NOWOŚĆ!
EDYCJA 2020–2022

Tablice matematyczne

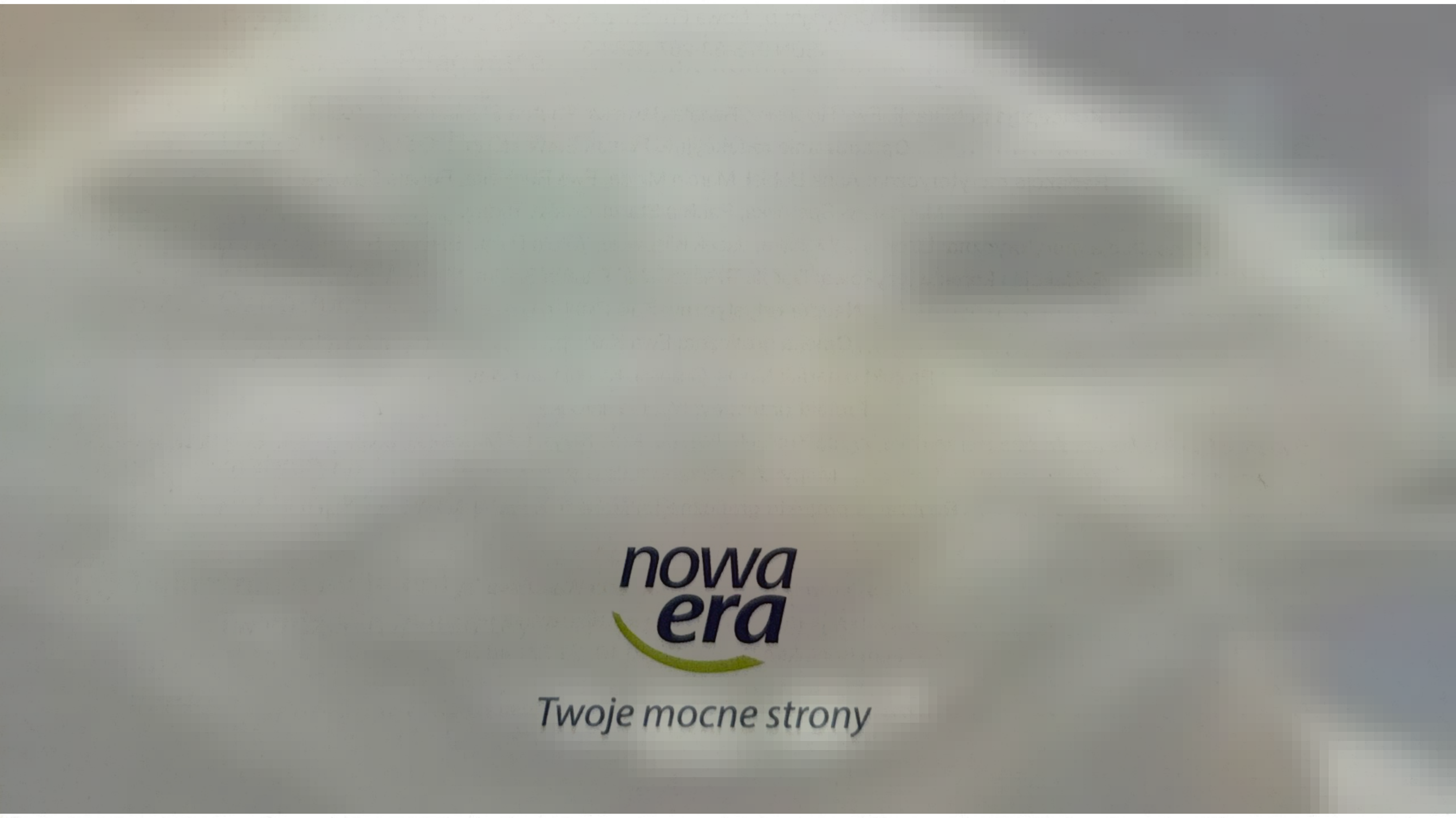
DLA SZKOŁY PODSTAWOWEJ

nowa era

Jerzy Janowicz

Tablice matematyczne

DLA SZKOŁY PODSTAWOWEJ



nowa era

Twoje mocne strony

Tablice matematyczne

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie.
Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujmy cudzą własność i prawo.
Więcej na **www.legalnakultura.pl**

© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2020
ISBN 978-83-267-3888-3

Koncepcja publikacji: Ewa Rucińska, Renata Sawicka, Paulina Staniszewska-Tudruj.
Opracowanie redakcyjne: Renata Sawicka.
Redakcja merytoryczna: Anna Dubiel, Marcin Minda, Ewa Rucińska, Renata Sawicka, Magdalena Spalińska, Paulina Staniszewska-Tudruj.
Konsultacja merytoryczna: Elżbieta Jabłońska, Jacek Klisowski, Witold Pająk, Barbara Sasim-Leciejewska.
Redakcja i korekta językowa: Dorota Rzeszewska, Paulina Szulim, Marta Zuchowicz.
Nadzór artystyczny: Kaia Pichler.
Opieka graficzna: Ewa Kaletyn.
Projekt okładki: Maciej Galiński, Klaudia Jarocka.
Projekt graficzny: Klaudia Jarocka.
Rysunki: Ewelina Baran, Wioleta Herczyńska, Agata Knajdek, Elżbieta Król, Krzysztof Mrawiński, Joanna Ptak, Ewa Sowulewska.
Mapy: Zespół kartograficzny.
Realizacja projektu graficznego: Mariusz Trzaskalski.

Nowa Era Sp. z o.o.
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa
www.nowaera.pl, e-mail: nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: tel. 801 88 10 10, 58 721 48 00

Druk i oprawa: DRUK-SERWIS Sp. z o.o. Ciechanów

Spis treści

1 Liczby

1.1. Własności liczb 4
1.2. Działania na liczbach 9
1.3. Ułamki 19
1.4. Działania na ułamkach 23
1.5. Ułamek liczby 27
1.6. Proporcjonalność prosta 29
1.7. Obliczenia praktyczne 30

2 Procenty

2.1. Procenty 34
2.2. Obliczenia procentowe w praktyce 35

3 Potęgi i pierwiastki

3.1. Potęgi 37
3.2. Pierwiastki 39

4 Wyrażenia algebraiczne, równania

4.1. Wyrażenia algebraiczne 41
4.2. Równania 43
4.3. Zadania tekstowe 45

5 Planimetria

5.1. Własności figur płaskich 46
5.2. Przystawanie figur. Symetrie 54
5.3. Twierdzenie Pitagorasa 58
5.4. Pola i obwody figur 60
5.5. Układ współrzędnych na płaszczyźnie 62

6 Geometria przestrzenna

6.1. Graniastosłupy 64
6.2. Ostrosłupy 67
6.3. Bryły obrotowe 70

7 Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

7.1. Statystyka 71
7.2. Rachunek prawdopodobieństwa 74

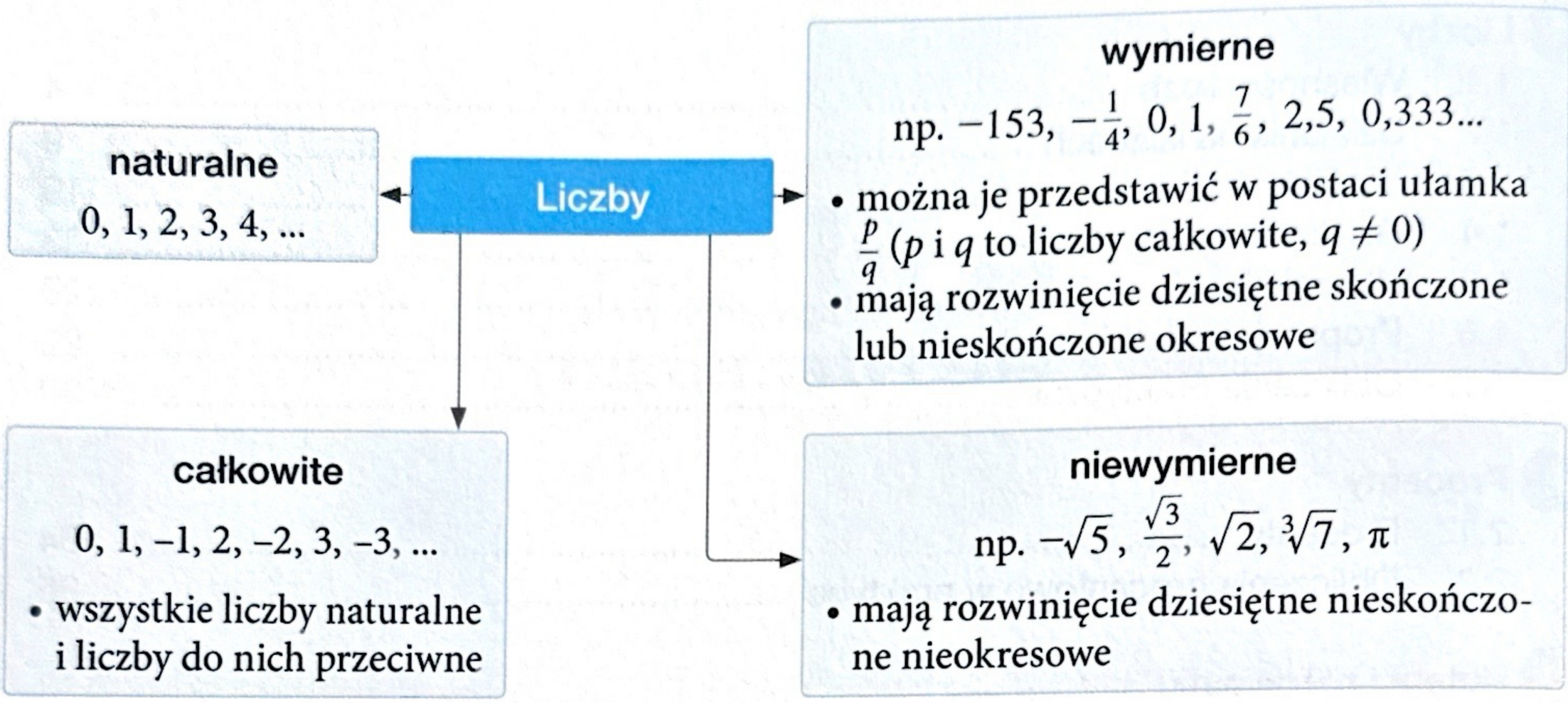
8 Twierdzenie matematyczne

8.1. Twierdzenie matematyczne 76

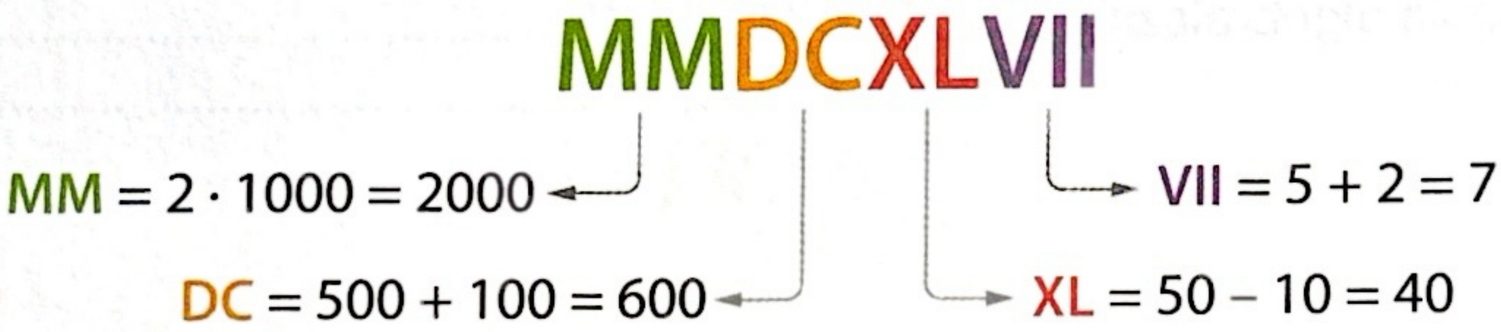
Indeks 80

1.1. Własności liczb

Liczby



System rzymski



Do zapisu liczb w systemie rzymskim używamy siedmiu znaków.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

- Obok siebie nie mogą stać dwa jednakowe znaki spośród: V, L i D.
- Obok siebie mogą stać co najwyżej trzy jednakowe znaki spośród: I, X, C i M.

Wartość liczby zapisanej w systemie rzymskim odczytujemy, wykonując:

- **dodawanie**, jeśli po znaku liczby występuje znak liczby od niej mniejszej lub równej,
- **odejmowanie**, jeśli przed znakiem liczby występuje znak liczby od niej mniejszej – jest sześć takich przypadków:

$IV = 5 - 1 = 4$, $XL = 50 - 10 = 40$, $CD = 500 - 100 = 400$,
$IX = 10 - 1 = 9$, $XC = 100 - 10 = 90$, $CM = 1000 - 100 = 900$.

Np. $CCLXI = 2 \cdot 100 + 50 + 10 + 1 = 261$

$CDLXXI = 500 - 100 + 50 + 2 \cdot 10 + 1 = 471$

$MXLV = 1000 + 50 - 10 + 5 = 1045$

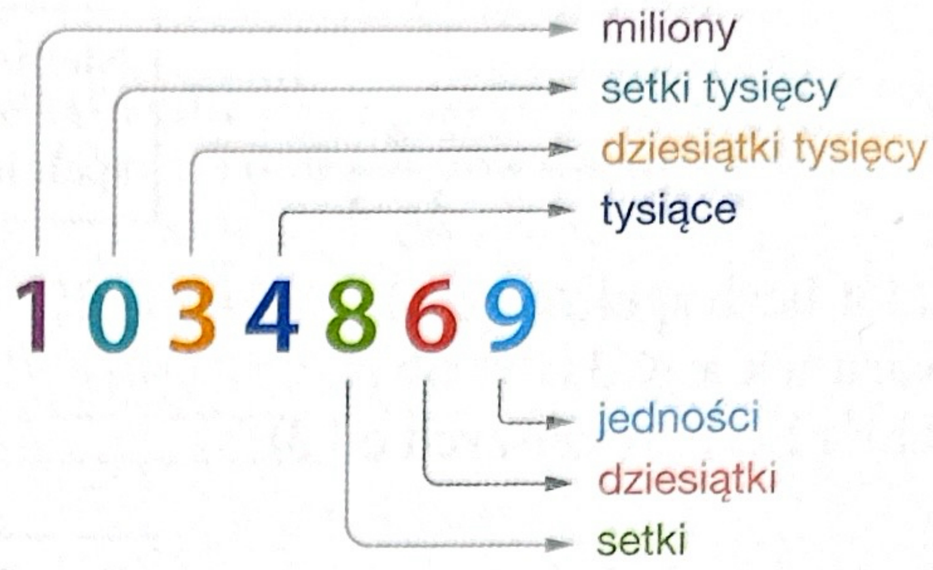
$MDXCIV = 1000 + 500 + 100 - 10 + 5 - 1 = 1594$

System dziesiątkowy

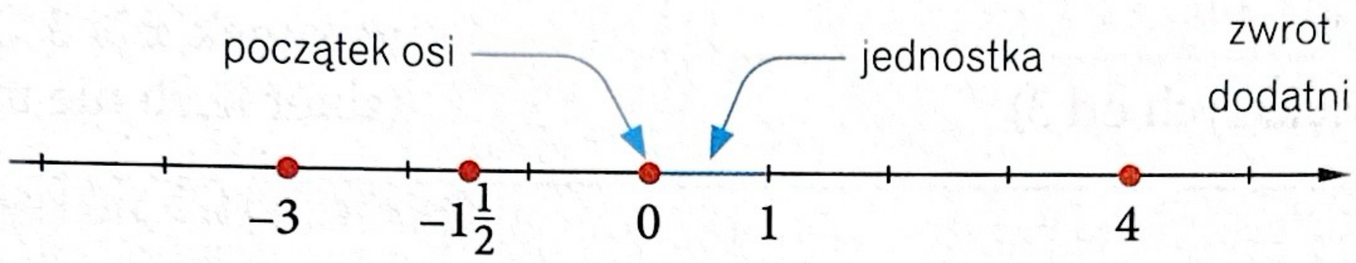
Do zapisu liczb w systemie dziesiątkowym używamy dziesięciu cyfr:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Wartość, jaką reprezentuje dana cyfra w zapisie liczby, zależy od pozycji, na której się ta cyfra znajduje.

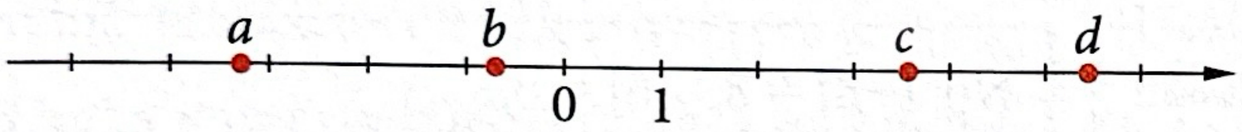
Np. 1 milion 34 tysiące 869 zapisujemy jako 1 034 869.



Oś liczbowa



Strzałka osi liczbowej pokazuje kierunek wzrastania liczb.



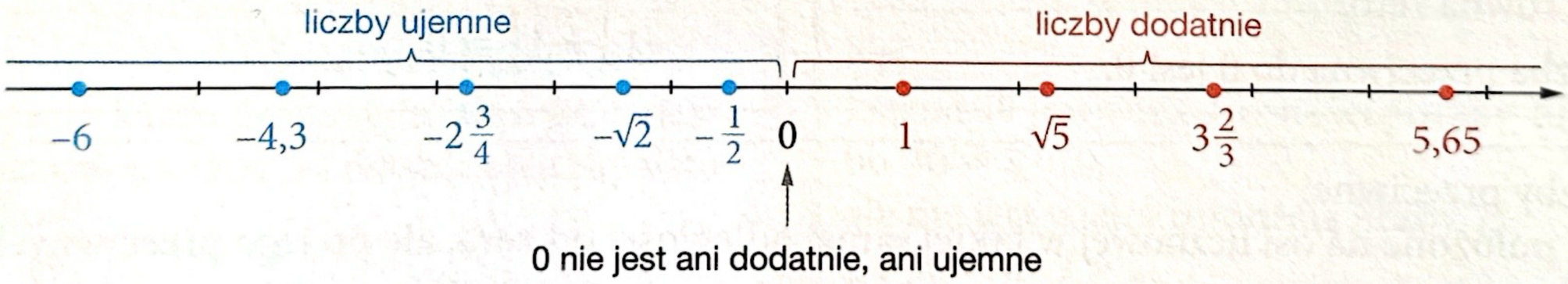
Np. $a < b, c < d, b < d$

Jeśli $a \leqslant b$, to **odległość** między liczbami a i b na osi liczbowej jest równa różnicy $b - a$.

Np. $4 - \left(-1\frac{1}{2}\right) = 4 + 1\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$

Liczby większe od zera to **liczby dodatnie**, a mniejsze od zera to **liczby ujemne**.

Zero nie jest ani liczbą dodatnią, ani ujemną.



Liczby większe od zera (dodatnie) lub równe zero to **liczby nieujemne**, a mniejsze od zera (ujemne) lub równe zero to **liczby niedodatnie**.

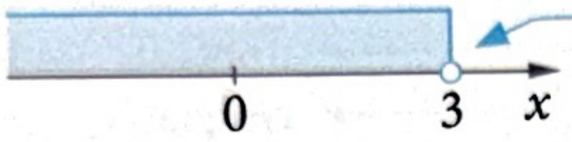
Zero jest zarówno liczbą nieujemną, jak i niedodatnią.

Np.
$10, 2\frac{4}{5}, \sqrt{7}, 0$ – liczby nieujemne
$-12, -6\frac{3}{7}, -\sqrt{2}, 0$ – liczby niedodatnie

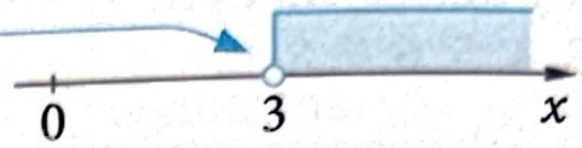
Spośród dwóch różnych liczb ujemnych większa jest ta, która na osi liczbowej leży bliżej zera.

Np. $-4{,}3 > -6$
$-\frac{1}{2} > -2\frac{3}{4}$

Zbiory liczb na osi liczbowej

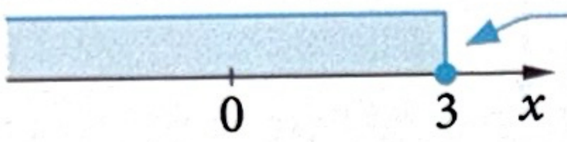


Niezamalowane kółko oznacza, że liczba 3 **nie spełnia** nierówności.

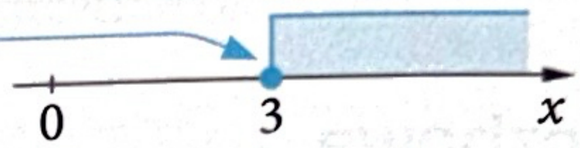


zbiór liczb spełniających warunek $x < 3$
(zbiór liczb mniejszych od 3)

zbiór liczb spełniających warunek $x > 3$
(zbiór liczb większych od 3)



Zamalowane kółko oznacza, że liczba 3 **spełnia** nierówność.

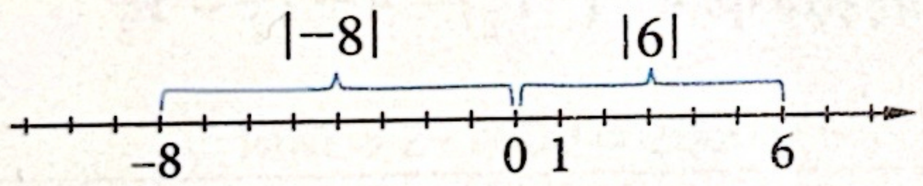


zbiór liczb spełniających warunek $x \leqslant 3$
(zbiór liczb nie większych od 3)

zbiór liczb spełniających warunek $x \geqslant 3$
(zbiór liczb nie mniejszych od 3)

Wartość bezwzględna. Liczby przeciwne

Wartość bezwzględna liczby to odległość tej liczby od zera na osi liczbowej.



Np. $|-8| = 8$, $|6| = 6$,
$\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $|0| = 0$

Dwie liczby są **przeciwne**, jeśli ich suma jest równa zero.

Liczbą przeciwną do 0 jest 0.

Np. liczby $-1\frac{1}{3}$ i $1\frac{1}{3}$ są przeciwne, bo
$-1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 0$.

Liczby przeciwne:
- są położone na osi liczbowej w takiej samej odległości od zera, ale po jego przeciwnych stronach,
- mają różne znaki, ale taką samą wartość bezwzględną.

Porównywanie liczb

Liczby można porządkować:
- **rosnąco** (od najmniejszej do największej), np. −3, 1, 5,

albo
- **malejąco** (od największej do najmniejszej), np. 5, 1, −3.

Do porównania dwóch liczb można użyć ich:
- **różnicy**, np. liczba 15 jest o 10 większa od liczby 5, bo $15 - 10 = 5$,

albo
- **ilorazu**, np. liczba 15 jest 3 razy większa od liczby 5, bo $15 : 3 = 5$.

Zaokrąglanie liczb

Zaokrąglenie w dół (przybliżenie z niedomiarem)
Jeśli pierwszą z odrzucanych cyfr jest 0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnia z pozostawionych cyfr się nie zmienia. Odrzucone cyfry zastępujemy zerami.

Np.
Podkreślamy pierwszą z odrzucanych cyfr.
$25\underline{4}29 \approx 25\,000$ – zaokrąglenie do tysięcy
$25\,4\underline{2}9 \approx 25\,400$ – zaokrąglenie do setek

Zaokrąglenie w górę (przybliżenie z nadmiarem)
Jeśli pierwszą z odrzucanych cyfr jest 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnią z pozostawionych cyfr zwiększamy o 1. Odrzucone cyfry zastępujemy zerami.

Np.
Podkreślamy pierwszą z odrzucanych cyfr.
$2\underline{5}429 \approx 30\,000$ – zaokrąglenie do dziesiątek tysięcy
$25\,42\underline{9} \approx 25\,430$ – zaokrąglenie do dziesiątek

Dzielniki i wielokrotności

Dzielnik liczby naturalnej n to liczba naturalna, która dzieli liczbę n bez reszty.

Liczba n **jest podzielna** przez p, jeśli liczba p jest dzielnikiem liczby n.

Liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej.

Każda dodatnia liczba naturalna jest swoim dzielnikiem.

Np.
Liczba 7 jest dzielnikiem liczby 28,
bo $28 : 7 = 4$,
a liczba 9 nie jest dzielnikiem liczby 28,
bo $28 : 9 = 3$ i reszta 1.
Liczba 28 jest podzielna przez 7,
ale nie jest podzielna przez 9.
Wszystkie dzielniki liczby 28 to:
1, 2, 4, 7, 14, 28.

Wielokrotność dodatniej liczby naturalnej n to każda liczba naturalna, która jest iloczynem liczby n i dowolnej liczby naturalnej.

Liczba 0 jest wielokrotnością każdej liczby naturalnej.

Każda liczba naturalna jest wielokrotnością liczby 1 i wielokrotnością samej siebie.

Np.
Liczba 30 jest wielokrotnością liczby 10,
bo $30 = 3 \cdot 10$,
ale nie jest wielokrotnością liczby 7,
bo $30 = 4 \cdot 7 + 2$.
Kolejne wielokrotności liczby 7 to:
0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, …

Największy wspólny dzielnik (NWD)

Największy wspólny dzielnik (NWD) dwóch liczb naturalnych to największa liczba naturalna, przez którą jest podzielna jednocześnie jedna i druga liczba.

Np. NWD(12, 18) = 6

Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)

Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) dwóch liczb naturalnych to najmniejsza liczba naturalna dodatnia, która jest wielokrotnością jednocześnie jednej i drugiej liczby.

Np. NWW(12, 18) = 36

Cechy podzielności liczb naturalnych

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- **4** – gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4, np. 112, 236, 3016
- **3** – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3, np. 15, 129, 3018
- **2** – gdy jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 lub 8, np. 32, 754, 5126
- **9** – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9, np. 27, 342, 1008
- **10** – gdy jej ostatnią cyfrą jest 0, np. 50, 170, 1520
- **100** – gdy jej dwie ostatnie cyfry to 00, np. 500, 1700, 15 200
- **5** – gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5, np. 10, 35, 105

Liczby pierwsze i złożone

Liczba pierwsza to liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki: 1 i samą siebie.

Liczba złożona to liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki.

Liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do liczb złożonych.

Np. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, …, 223, …

Np. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, …, 224, …

Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Każdą liczbę złożoną można zapisać jako iloczyn liczb pierwszych.

Taki zapis nazywamy **rozkładem liczby na czynniki pierwsze**.

Np. $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $51 = 3 \cdot 17$

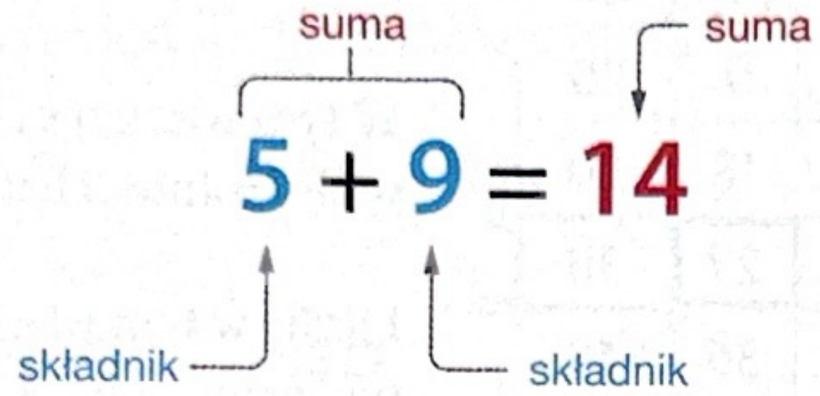
Dzielimy liczbę 126 przez 2, czyli liczbę pierwszą, przez którą jest podzielna liczba 126. Wynik tego dzielenia, 63, zapisujemy pod liczbą 126. Kolejne otrzymane ilorazy dzielimy przez odpowiednie liczby pierwsze, aż do uzyskania wyniku równego 1.

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

51	3
17	17
1	

1.2. Działania na liczbach

Dodawanie

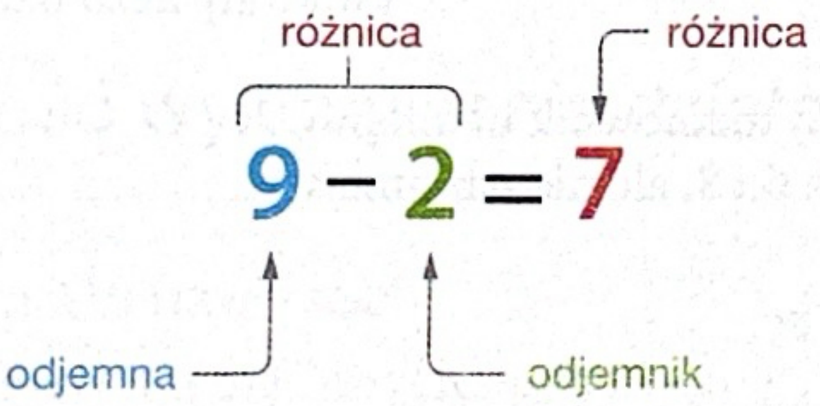


Dodanie zera do dowolnej liczby nie zmienia tej liczby. Np. $17 + 0 = 17$

Kolejność składników nie wpływa na wynik dodawania. Np. $2 + 6 = 6 + 2 = 8$

Składniki sumy można dowolnie grupować i nie zmienia to wyniku. Np. $(3 + 4) + 2 = 3 + (4 + 2) = 9$

Odejmowanie

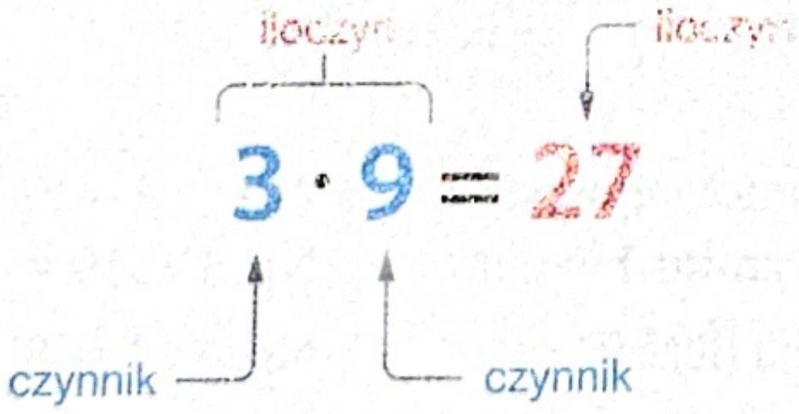


Odjęcie zera od dowolnej liczby nie zmienia tej liczby. Np. $13 - 0 = 13$

Różnica dwóch takich samych liczb jest równa 0. Np. $23 - 23 = 0$

Wynik odejmowania można sprawdzić za pomocą dodawania. Np. $20 - 17 = 3$, bo $3 + 17 = 20$

Mnożenie



Mnożenie dowolnej liczby przez 1 nie zmienia tej liczby. Np. $16 \cdot 1 = 16$

Wynikiem mnożenia przez 0 jest 0. Np. $456 \cdot 0 = 0$

Kolejność czynników nie wpływa na wynik mnożenia. Np. $4 \cdot 8 = 8 \cdot 4 = 32$

Czynniki iloczynu można dowolnie grupować i nie zmienia to jego wartości. Np. $(2 \cdot 4) \cdot 5 = 2 \cdot (4 \cdot 5) = 40$

Tabliczka mnożenia i jej wykorzystanie

Co można odczytać z tabliczki mnożenia

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

W tym wierszu są kolejne wielokrotności liczby 3.

Liczby w tym wierszu są podzielne przez 3.

27 jest podzielne przez 3 i przez 9.

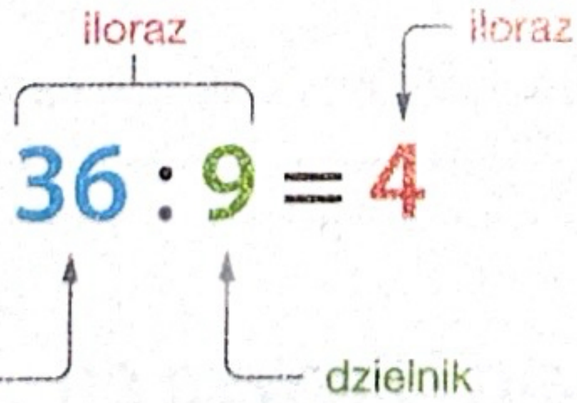
81 to kwadrat liczby 9.

Liczby na przekątnej to kwadraty liczb naturalnych.

48 to też wspólny mianownik ułamków o mianownikach 6 i 8, ale nie najmniejszy.

24 to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 6 i 8;
24 to najmniejszy wspólny mianownik ułamków o mianownikach 6 i 8.

Dzielenie



Dzielenie dowolnej liczby przez siebie daje w wyniku 1. Np. 19 : 19 = 1

Dzielenie dowolnej liczby przez 1 nie zmienia tej liczby. Np. 8 : 1 = 8

Dzielenie zera przez dowolną liczbę różną od zera daje w wyniku zero. Np. 0 : 5 = 0

Wynik dzielenia można sprawdzić za pomocą mnożenia. Np. 45 : 9 = 5, bo 5 · 9 = 45

Nie wolno dzielić przez 0. ~~3 : 0~~

Dzielenie z resztą

Jeśli liczba **nie jest podzielna** przez inną liczbę, to w wyniku dzielenia otrzymujemy iloraz i resztę różną od zera.

Reszta zawsze jest liczbą mniejszą od dzielnika.

Np. $34 : 8 = 4$ r 2, czyli $34 = 8 \cdot 4 + 2$

reszta

Liczba 34 nie jest podzielna przez 8, ponieważ przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2.

Podzielność liczb

Jeśli liczba **jest podzielna** przez inną liczbę, to w wyniku dzielenia otrzymujemy iloraz i resztę równą zero.

Możemy też wtedy powiedzieć, że liczba ta jest wielokrotnością innej liczby.

Np. $32 : 8 = 4$ r 0, czyli $32 = 8 \cdot 4$

reszta

Liczba 32 jest podzielna przez 8, ponieważ przy dzieleniu przez 8 daje resztę 0. Możemy ją zapisać w postaci iloczynu $8 \cdot 4$.

Kolejność wykonywania działań

1. Działania w nawiasach
   (w których nie ma innych nawiasów)
2. Potęgowanie i pierwiastkowanie
3. Dzielenie i mnożenie
   (w kolejności występowania)
4. Odejmowanie i dodawanie
   (w kolejności występowania)

Np. $3 + (45 - 5 \cdot 2) : 7 =$ Na początku wykonujemy działania w nawiasie: najpierw mnożenie,

$= 3 + (45 - 10) : 7 =$ a potem odejmowanie.

$= 3 + 35 : 7 =$ Następnie wykonujemy dzielenie,

$= 3 + 5 =$ a na końcu dodawanie.

$= 8$

Sposoby ułatwiające obliczenia

- zmiana kolejności składników w dodawaniu

  Np. $23 + 54 + 17 + 11 + 26 + 79 =$

  $= (23 + 17) + (54 + 26) + (11 + 79) = 40 + 80 + 90 = 210$

- zmiana kolejności czynników w mnożeniu

  Np. $7 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 4 = (25 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 3) = 100 \cdot 21 = 2100$

  $6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 = (6 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 2) = 48 \cdot 10 = 480$

- zwiększenie (lub zmniejszenie) jednego ze składników i zmniejszenie (lub zwiększenie) drugiego składnika o tę samą wartość

  Np. $37 + 56 = (37 + 3) + (56 - 3) = 40 + 53 = 93$

  $24 + 62 = (24 - 4) + (62 + 4) = 20 + 66 = 86$

- zwiększenie (lub zmniejszenie) odjemnej i odjemnika o tę samą wartość

  Np. $63 - 48 = (63 + 2) - (48 + 2) = 65 - 50 = 15$

  $57 - 34 = (57 - 4) - (34 - 4) = 53 - 30 = 23$

- odejmowanie „metodą kasjera"

  Np. $72 - 37 = 3 + 30 + 2 = 35$

  $37 \xrightarrow{+3} 40 \xrightarrow{+30} 70 \xrightarrow{+2} 72$

  $143 - 86 = 4 + 10 + 40 + 3 = 57$

  $86 \xrightarrow{+4} 90 \xrightarrow{+10} 100 \xrightarrow{+40} 140 \xrightarrow{+3} 143$

- mnożenie i dzielenie w dwóch krokach

  Np. $15 \cdot 12 = 15 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \cdot 3 = 180$

  $18 \cdot 15 = 18 \cdot 5 \cdot 3 = 90 \cdot 3 = 270$

  $120 : 24 = (120 : 3) : 8 = 40 : 8 = 5$

  $360 : 24 = (360 : 6) : 4 = 60 : 4 = 15$

- mnożenie i dzielenie „po kawałku"

  Np. $15 \cdot 12 = 15 \cdot (10 + 2) = 15 \cdot 10 + 15 \cdot 2 = 150 + 30 = 180$

  $38 \cdot 6 = (40 - 2) \cdot 6 = 40 \cdot 6 - 2 \cdot 6 = 240 - 12 = 228$

  $96 : 8 = (80 + 16) : 8 = 80 : 8 + 16 : 8 = 10 + 2 = 12$

  $108 : 6 = (120 - 12) : 6 = 120 : 6 - 12 : 6 = 20 - 2 = 18$

- mnożenie liczb z zerami na końcu

  Gdy mnożymy liczby z zerami na końcu, najpierw mnożymy liczby otrzymane po odrzuceniu zer, a następnie do wyniku dopisujemy wszystkie odrzucone zera.

  Np. $30000 \cdot 1200 = 36000000$

  $453 \cdot 100000 = 45300000$

- dzielenie liczb z zerami na końcu

  Jeśli w dzielnej występują zera na końcu, a w dzielniku nie, to możemy wykonać dzielenie po odrzuceniu zer w dzielnej, a następnie dopisać odrzucone zera na końcu wyniku.

  Np. $4800 : 16 = 300$

  $40\,000 : 5 = 8000$

  Jeśli w dzielnej i dzielniku występują na końcu zera, to można pominąć tyle samo zer w dzielnej i dzielniku i nie zmieni to wyniku.

  Np. $24\,000 : 1200 = 240 : 12 = 20$

  $560\,000 : 7000 = 560 : 7 = 80$

Dodawanie pisemne

Liczby zapisujemy tak, aby jedności były pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, setki pod setkami itd.
Dodajemy najpierw jedności, potem dziesiątki, setki itd.

	1	2		1	
		6	8	2	4
	4	3	9	3	7
+			9	2	6
	5	1	6	8	7

4 + 7 + 6 = 17 jedności,
czyli 1 dziesiątka i 7 jedności

1 + 2 + 3 + 2 = 8 dziesiątek

8 + 9 + 9 = 26 setek,
czyli 2 tysiące i 6 setek

2 + 6 + 3 = 11 tysięcy,
czyli 1 dziesiątka tysięcy i 1 tysiąc

1 + 4 = 5 dziesiątek tysięcy

Np.

		6	8	2	4
	4	3	9	3	7
+			9	2	6
	5	1	6	8	7

Odejmowanie pisemne

Zapisujemy większą liczbę (odjemną), a pod nią mniejszą (odjemnik) tak, aby jedności były pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, setki pod setkami itd.
Odejmowanie rozpoczynamy od jedności.

	3	12	7	16	
	~~4~~	~~2~~	~~8~~	~~6~~	8
–		5	2	7	5
	3	7	5	9	3

8 – 5 = 3

nie możemy od 6 odjąć 7, dlatego 1 setkę zamieniamy na 10 dziesiątek, razem mamy 10 + 6 = 16 dziesiątek,
16 – 7 = 9

7 – 2 = 5

nie możemy od 2 odjąć 5, dlatego 1 dziesiątkę tysięcy zamieniamy na 10 tysięcy, razem mamy 10 + 2 = 12 tysięcy,
12 – 5 = 7

3 – 0 = 3

Np.

	4	2	8	6	8
–		5	2	7	5
	3	7	5	9	3

Mnożenie pisemne przez liczby jednocyfrowe

Mnożymy najpierw przez jedności, potem przez dziesiątki, setki itd.

Np.

	1	3	4	2	
		2	5	6	4
·					7
	1	7	9	4	8

$7 \cdot 4 = 28$ jedności, czyli 2 dziesiątki
i 8 jedności

$7 \cdot 6 = 42$
$42 + 2 = 44$ dziesiątki, czyli 4 setki
i 4 dziesiątki

$7 \cdot 5 = 35$
$35 + 4 = 39$ setek, czyli 3 tysiące i 9 setek

$7 \cdot 2 = 14$
$14 + 3 = 17$ tysięcy, czyli 1 dziesiątka tysięcy
i 7 tysięcy

Mnożenie pisemne przez liczby wielocyfrowe

Liczby zapisujemy tak, aby jedności były pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami itd. Gdy mnożymy daną liczbę przez liczbę wielocyfrową, osobno mnożymy ją przez jedności, osobno przez dziesiątki itd., a następnie dodajemy otrzymane wyniki.

Np.

			4	2	3	
			3	1	2	
			2	8	4	7
		·			5	4
		1	1	3	8	8
+	1	4	2	3	5	0
	1	5	3	7	3	8

← $4 \cdot 2847$ (wynik mnożenia przez jedności)
← $50 \cdot 2847$ (wynik mnożenia przez dziesiątki)
to zero można pominąć w zapisie

Mnożenie pisemne liczb zakończonych zerami

Gdy mnożymy liczby z zerami na końcu, to mnożymy liczby po odrzuceniu zer, a odrzucone zera dopisujemy na końcu wyniku.

Np.

			3	2	4	0	0			
	·			5	9	0	0	0		
		2	9	1	6					
+	1	6	2	0						
	1	9	1	1	6	0	0	0	0	0

Mnożenie pisemne przez liczby z zerami w środku

Gdy mnożymy przez czynnik, który ma zera w środku, to w zapisie pomijamy wiersz złożony z samych zer.

Mnożymy tak:

				4	8	3	9
			·		5	0	7
			3	3	8	7	3
+	2	4	1	9	5		
	2	4	5	3	3	7	3

zamiast tak:

				4	8	3	9
			·		5	0	7
			3	3	8	7	3
			0	0	0	0	
+	2	4	1	9	5		
	2	4	5	3	3	7	3

Dzielenie pisemne

Wykonujemy kolejno czynności:

- ustalamy, ile razy liczba 35 mieści się w 82:
  mieści się 2 razy,

		2						
	8	2	5	7	8	:	3	5

- mnożymy $2 \cdot 35 = 70$,

		2						
	8	2	5	7	8	:	3	5
	7	0						

- odejmujemy $82 - 70 = 12$,

		2						
	8	2	5	7	8	:	3	5
−	7	0						
	1	2						

- spisujemy kolejną cyfrę dzielnej,
  czyli 5.

		2						
	8	2	5	7	8	:	3	5
−	7	0						
	1	2	5					

itd.

35 mieści się 2 razy w 82
35 mieści się 3 razy w 125
35 mieści się 5 razy w 207
35 mieści się 9 razy w 328

		2	3	5	9			
	8	2	5	7	8	:	3	5
−	7	0						
	1	2	5					
−	1	0	5					
		2	0	7				
	−	1	7	5				
			3	2	8			
		−	3	1	5			
				1	3			

$2 \cdot 35$
$3 \cdot 35$
$5 \cdot 35$
$9 \cdot 35$

$82\,578 : 35 = 2359$ r 13

Dodawanie liczb całkowitych

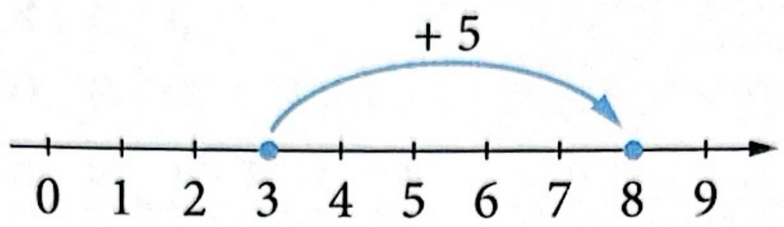
Dodawanie liczb całkowitych możemy sobie wyobrazić na osi liczbowej lub za pomocą plusów i minusów.

Dodawanie liczb o jednakowych znakach

- Jeśli obie liczby są dodatnie, to wynik jest dodatni.

  Np.

  $3 + 5 = 8$

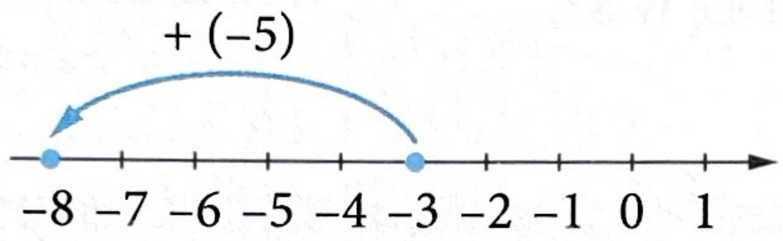


3, czyli +++
5, czyli +++++
razem 8 plusów

- Jeśli obie liczby są ujemne, to wynik jest ujemny.

  Np.

  $(-3) + (-5) = -8$ ← Dodajemy wartości bezwzględne liczb, a w wyniku dopisujemy minus.



−3, czyli −−−
−5, czyli −−−−−
razem 8 minusów

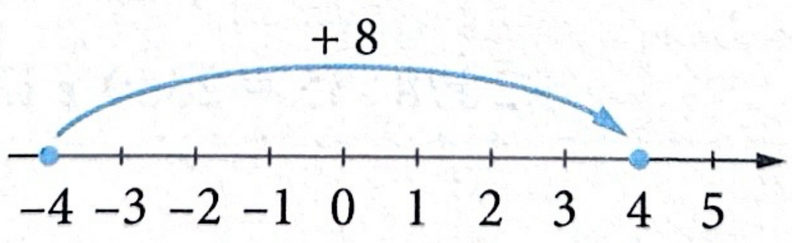
Dodawanie liczb o różnych znakach

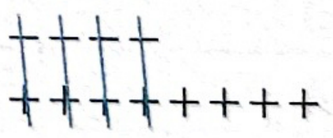
Gdy dodajemy liczby o różnych znakach, to odejmujemy wartości bezwzględne składników (od większej odejmujemy mniejszą), czyli liczby po odrzuceniu minusów.

- Jeśli większą wartość bezwzględną miała liczba dodatnia, to wynik jest dodatni.

  Np.

  $(-4) + 8 = 4$ ← $|8| > |-4|$, więc wynik jest dodatni, a $8 - 4 = 4$



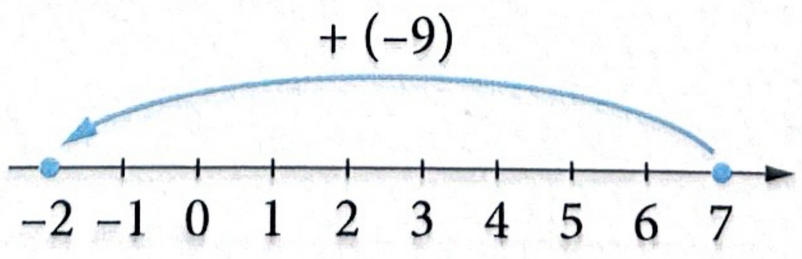


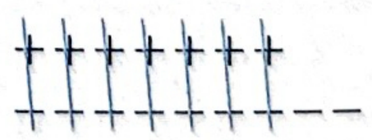
plus i minus się kasują;
zostają 4 plusy

- Jeśli większą wartość bezwzględną miała liczba ujemna, to wynik jest ujemny.

  Np.

  $7 + (-9) = -2$ ← $|-9| > |7|$, więc wynik jest ujemny, a $9 - 7 = 2$





plus i minus się kasują;
zostają 2 minusy

Dodawanie liczb całkowitych cd.

Suma liczb przeciwnych jest równa zero.
Np. $(-9)+9=0$, $6+(-6)=0$

Kolejność składników w dodawaniu nie wpływa na jego wynik.
Np. $7+(-9)=(-9)+7=-2$

Aby ułatwić obliczenia, można zmieniać kolejność składników i je grupować.
Np. $26+(-5)+(-36)+12+(-15)+(-2)=$
$=[26+(-36)]+[(-5)+(-15)]+[12+(-2)]=$
$=(-10)+(-20)+10=[(-10)+10]+(-20)=-20$

Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych

Gdy mnożymy i dzielimy liczby całkowite, musimy pamiętać o dwóch zasadach:

- iloczyn i iloraz dwóch liczb o jednakowych znakach jest dodatni,

$+\cdot+=+$
$-\cdot-=+$
$+:+=+$
$-:-=+$

Np. $6\cdot 2=12$
$(-6)\cdot(-2)=12$
$80:8=10$
$(-80):(-8)=10$

- iloczyn i iloraz dwóch liczb o różnych znakach jest ujemny.

$+\cdot-=-$
$-\cdot+=-$
$+:-=-$
$-:+=-$

Np. $5\cdot(-8)=-40$
$(-5)\cdot 8=-40$
$18:(-3)=-6$
$(-18):3=-6$

Mnożenie przez 0 daje w wyniku 0.
Np. $12\cdot 0=0$, $0\cdot(-5)=0$

Dzielenie 0 przez liczbę różną od 0 daje w wyniku 0.
Np. $0:3=0$, $0:(-9)=0$

Mnożenie lub dzielenie dowolnej liczby przez 1 nie zmienia tej liczby.
Np. $(-5)\cdot 1=-5$, $1\cdot(-7)=-7$,
$(-8):1=-8$, $(-17):1=-17$

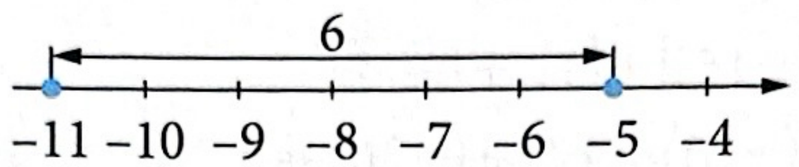
Mnożenie lub dzielenie dowolnej liczby przez -1 zamienia tę liczbę na przeciwną.
Np. $(-1)\cdot 5=-5$, $(-12)\cdot(-1)=12$,
$(-8):(-1)=8$, $19:(-1)=-19$

Nie wolno dzielić przez 0.

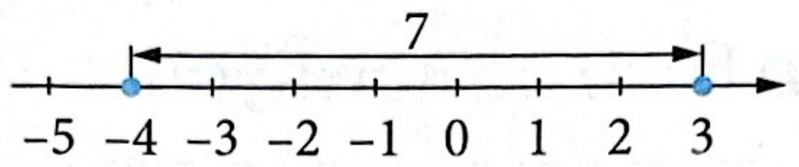
Odejmowanie liczb całkowitych

Gdy odejmujemy liczby całkowite, należy obliczyć, o ile różnią się liczby, oraz określić znak wyniku.

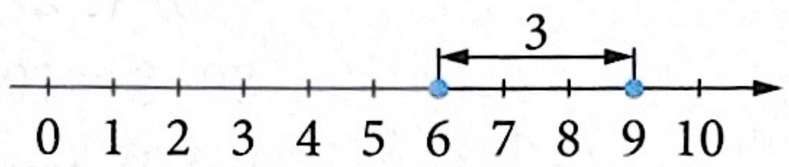
- Jeśli od większej liczby odejmujemy mniejszą (odjemna jest większa od odjemnika), to wynik jest dodatni.
  Np.
  $(-5)-(-11)=6$ ← $-5 > -11$, więc wynik jest dodatni; liczby -5 i -11 różnią się o 6



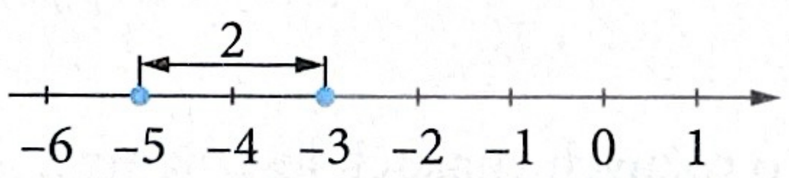
$3-(-4)=7$ ← $3 > -4$, więc wynik jest dodatni; liczby 3 i -4 różnią się o 7



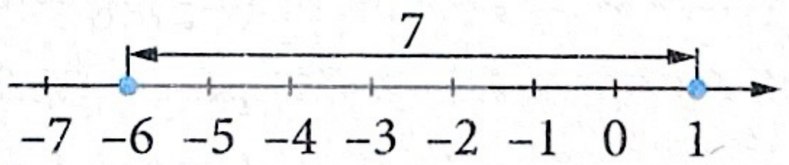
- Jeśli od mniejszej liczby odejmujemy większą (odjemna jest mniejsza od odjemnika), to wynik jest ujemny.
  Np.
  $6-9=-3$ ← $6 < 9$, więc wynik jest ujemny; liczby 6 i 9 różnią się o 3



$(-5)-(-3)=-2$ ← $-5 < -3$, więc wynik jest ujemny; liczby -5 i -3 różnią się o 2



$(-6)-1=-7$ ← $-6 < 1$, więc wynik jest ujemny; liczby -6 i 1 różnią się o 7



Odejmowanie można zamienić na dodawanie liczby przeciwnej.

Np. $7-(-3)=7+3=10$
$11-5=11+(-5)=6$

Różnica dwóch jednakowych liczb jest równa 0.

Np. $8-8=0$
$(-6)-(-6)=0$

Odjęcie zera od dowolnej liczby nie zmienia tej liczby.

Np. $7-0=7$
$(-10)-0=-10$

1.3. Ułamki

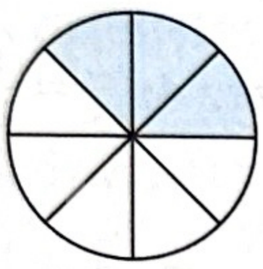
Ułamki zwykłe

Ułamek to liczba, która określa pewną część całości.

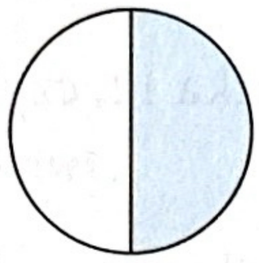
$\frac{a}{b}$

- a – licznik – określa, ile części wzięto/zamalowano
- kreska ułamkowa
- b – mianownik – wskazuje, na ile równych części została podzielona całość

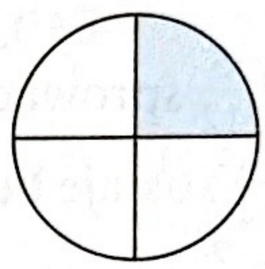
Np. Zamalowano $\frac{3}{8}$ koła.



Zamalowano $\frac{1}{2}$ koła, czyli połowę.



Zamalowano $\frac{1}{4}$ koła, czyli ćwierć.



ułamek $\frac{a}{b}$ $a \geqslant 0,\ b > 0$

- **właściwy** $a < b$ — Np. $\frac{2}{3}$, $\frac{23}{1000}$, $\frac{1}{258}$
- **niewłaściwy** $a \geqslant b$ — Np. $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{2500}{2}$

Liczba mieszana to liczba zapisana za pomocą liczby naturalnej i ułamka zwykłego. Liczbę mieszaną możemy zamienić na ułamek niewłaściwy.

Np. $6\frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{20}{3}$

Ułamek zwykły możemy zapisać w postaci ilorazu. Iloraz liczb całkowitych możemy przedstawić jako ułamek zwykły.

Np. $\frac{9}{11} = 9 : 11$, $7 : 12 = \frac{7}{12}$

Skracanie i rozszerzanie ułamków zwykłych

Skracanie ułamka zwykłego to dzielenie licznika i mianownika tego ułamka przez ich wspólny dzielnik różny od 1.

Ułamek nieskracalny to ułamek, którego nie można już skrócić.

Np.

$$\frac{125}{1000} = \frac{125 : 5}{1000 : 5} = \frac{25}{200} = \frac{25 : 5}{200 : 5} = \frac{5}{40} = \frac{5 : 5}{40 : 5} = \frac{1}{8}$$

W wyniku skrócenia lub rozszerzenia ułamka otrzymujemy **ułamek równy danemu**.

Rozszerzanie ułamka zwykłego to mnożenie licznika i mianownika tego ułamka przez tę samą liczbę naturalną większą od 1.

Np.

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{6}{16} = \frac{6 \cdot 10}{16 \cdot 10} = \frac{60}{160} = \frac{60 \cdot 3}{160 \cdot 3} = \frac{180}{480}$$

Doprowadzanie ułamka do najprostszej postaci

Doprowadzić ułamek do najprostszej postaci to znaczy:
- skrócić ułamek właściwy do ułamka nieskracalnego

lub
- zapisać ułamek niewłaściwy w postaci liczby naturalnej lub liczby mieszanej, w której część ułamkowa jest ułamkiem nieskracalnym.

Np.
- $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
- $\frac{15}{3} = 5$

$\frac{32}{6} = 5\frac{2}{6} = 5\frac{1}{3}$

Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika

Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika polega na takim przekształceniu ułamków (rozszerzeniu lub skróceniu), aby miały takie same mianowniki.

Np.

Ułamki $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{12}$ sprowadzamy do mianownika 12, czyli $\frac{2}{3}$ rozszerzamy przez 4: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, a ułamek $\frac{5}{12}$ zostaje bez zmian.

Ułamki $\frac{3}{8}$ i $\frac{7}{10}$ sprowadzamy do mianownika 40, czyli $\frac{3}{8}$ rozszerzamy przez 5: $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$, a $\frac{7}{10}$ rozszerzamy przez 4: $\frac{7}{10} = \frac{28}{40}$.

Ułamki $\frac{18}{60}$ i $\frac{45}{50}$ sprowadzamy do mianownika 10, skracając $\frac{18}{60}$ przez 6: $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$, a $\frac{45}{50}$ przez 5: $\frac{45}{50} = \frac{9}{10}$.

Porównywanie ułamków zwykłych

Aby porównać dwa ułamki zwykłe, możemy:
- sprowadzić je do wspólnego mianownika – większy jest ten ułamek, który ma większy licznik,
- sprowadzić je do wspólnego licznika – większy jest ten ułamek, który ma mniejszy mianownik,
- porównać oba ułamki z trzecią liczbą.

Np.

$\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, bo $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ i $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$

$\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, bo $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ i $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

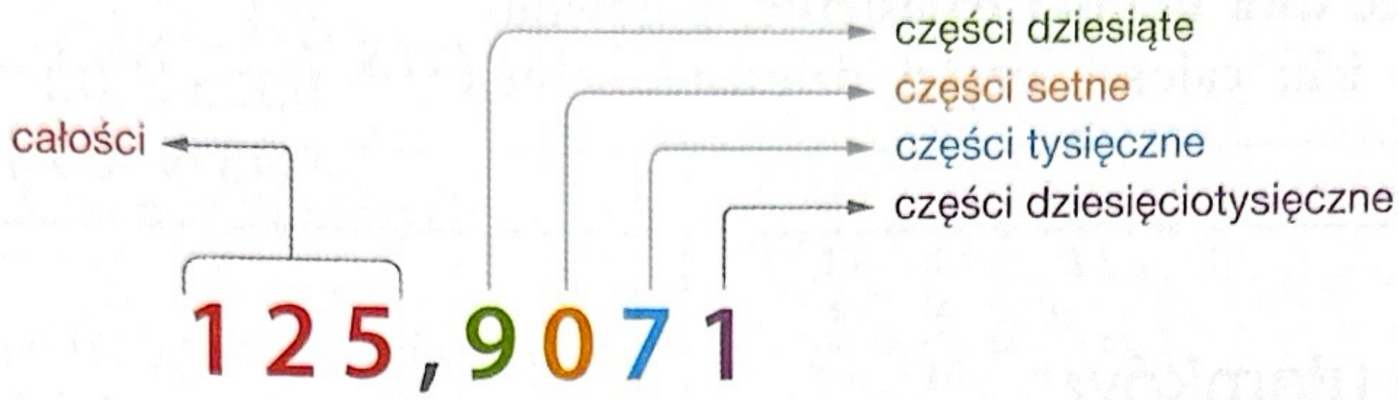
$\frac{13}{25} > \frac{4}{9}$, bo $\frac{13}{25} > \frac{1}{2}$ i $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$

Liczby odwrotne

Jeśli iloczyn dwóch liczb jest równy 1, to każda z tych liczb jest **odwrotnością** drugiej.
- Odwrotność ułamka $\frac{a}{b}$ to ułamek $\frac{b}{a}$.
- Odwrotność liczby naturalnej n różnej od 0 to liczba $\frac{1}{n}$.
- Odwrotność liczby 1 to 1.
- Liczba 0 nie ma odwrotności.

Przykłady liczb odwrotnych:
- $\frac{2}{15}$ i $\frac{15}{2}$, bo $\frac{2}{15} \cdot \frac{15}{2} = 1$
- 73 i $\frac{1}{73}$, bo $73 \cdot \frac{1}{73} = 1$

Ułamki dziesiętne



Ułamek dziesiętny to ułamek o mianowniku 10, 100, 1000, …
Zwykle jest przedstawiany w postaci dziesiętnej, czyli z użyciem przecinka oddzielającego całości od części ułamkowej.

Np. $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $2\frac{37}{100} = 2{,}37$

Każdy ułamek zwykły możemy zamienić na:
- ułamek dziesiętny **skończony**

Np. $\frac{7}{200} = \frac{35}{1000} = 0{,}035$

lub
- ułamek dziesiętny **nieskończony okresowy**.

Np. $\frac{29}{11} = 2{,}636363\ldots = 2{,}(63)$

Zamiast 636363… możemy zapisać (63).
Grupę liczb 63 nazywamy **okresem ułamka**.

Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych

Przy zaokrąglaniu ułamków dziesiętnych postępujemy podobnie jak przy zaokrąglaniu liczb naturalnych. W tym przypadku cyfr odrzucanych w części ułamkowej nie zastępujemy zerami, tylko je odrzucamy.

Zaokrąglenie w dół (przybliżenie z niedomiarem)
Jeśli pierwszą z odrzucanych cyfr jest 0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnia z pozostawionych cyfr się nie zmienia.
Np. $0{,}78\underline{6}37 \approx 7{,}786$ – zaokrąglenie do części tysięcznych (pierwsza odrzucana cyfra to 3)
$0{,}8\underline{2}77 \approx 0{,}8$ – zaokrąglenie do części dziesiątych (pierwsza odrzucana cyfra to 2)
$3{,}47\underline{4}1 \approx 3{,}47$ – zaokrąglenie do części setnych (pierwsza odrzucana cyfra to 4)

Zaokrąglenie w górę (przybliżenie z nadmiarem)
Jeśli pierwszą z odrzucanych cyfr jest 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnią z pozostawionych cyfr zwiększamy o 1.
Np. $0{,}53\underline{8}61 \approx 0{,}54$ – zaokrąglenie do części setnych (pierwsza odrzucana cyfra to 8)
$12{,}\underline{8}44 \approx 13$ – zaokrąglenie do jedności (pierwsza odrzucana cyfra to 8)
$4{,}99\underline{7}13 \approx 5{,}0$ – zaokrąglenie do części dziesiątych (pierwsza odrzucana cyfra to 9)

Porównywanie ułamków dziesiętnych

Aby porównać dwa ułamki dziesiętne, porównujemy kolejno ich: całości, części dziesiąte, setne, tysięczne itd.

Np.
$0{,}125 > 0{,}117$, bo $2 > 1$
$9{,}4579 < 9{,}4584$, bo $7 < 8$

Zamiana ułamków

Zamiana ułamka dziesiętnego na ułamek zwykły

Np. $0{,}7 = \frac{7}{10}$ ← jedno miejsce po przecinku, jedno zero w mianowniku

$0{,}083 = \frac{83}{1000}$ ← trzy miejsca po przecinku, trzy zera w mianowniku

$5{,}03 = 5\frac{3}{100}$ ← dwa miejsca po przecinku, dwa zera w mianowniku

$0{,}12 = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ ← doprowadzamy ułamek do postaci nieskracalnej

Zamiana ułamka zwykłego na ułamek dziesiętny

- rozszerzamy lub skracamy ułamek zwykły tak, aby miał mianownik 10, 100, 1000, ...

Np. $\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0{,}35$

$\frac{48}{4000} = \frac{12}{1000} = 0{,}012$

$2\frac{1}{8} = 2\frac{125}{1000} = 2{,}125$

- dzielimy licznik przez mianownik

Np. $\frac{17}{32} = 17 : 32 = 0{,}53125$

$\frac{34}{11} = 34 : 11 = 3{,}090909\ldots = 3{,}(09)$

Ułamki, które warto zapamiętać:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\frac{1}{4} = 0{,}25$ $\frac{1}{5} = 0{,}2$ $\frac{3}{4} = 0{,}75$ $\frac{1}{8} = 0{,}125$

Porównywanie ułamków zwykłych i dziesiętnych

Aby porównać ułamki zwykłe i dziesiętne, najpierw je ujednolicamy, czyli zamieniamy je albo na ułamki zwykłe, albo na dziesiętne.

Np. $0{,}2 < \frac{3}{4}$, bo $\frac{3}{4} = 0{,}75$ i $0{,}2 < 0{,}75$

$0{,}4 > \frac{1}{3}$, bo $0{,}4 = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ i $\frac{6}{15} > \frac{5}{15}$

1.4. Działania na ułamkach

Dodawanie ułamków zwykłych

Dodawanie ułamków o tych samych mianownikach

Aby dodać ułamki o tych samych mianownikach, dodajemy ich liczniki, a mianownik pozostawiamy bez zmian.
Jeśli to możliwe, wynik doprowadzamy do najprostszej postaci.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Np. $\frac{5}{13}+\frac{4}{13}=\frac{5+4}{13}=\frac{9}{13}$

$\frac{3}{16}+\frac{5}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$

$3\frac{2}{9}+4\frac{8}{9}=7\frac{10}{9}=8\frac{1}{9}$

↑ osobno dodajemy części całkowite i osobno ułamki

Dodawanie ułamków o różnych mianownikach

Aby dodać ułamki o różnych mianownikach, najpierw sprowadzamy je do wspólnego mianownika.

Np. $\frac{3}{8}+\frac{1}{5}=\frac{15}{40}+\frac{8}{40}=\frac{23}{40}$

$1\frac{2}{3}+2\frac{4}{5}=1\frac{10}{15}+2\frac{12}{15}=3\frac{22}{15}=4\frac{7}{15}$ ← osobno dodajemy części całkowite i osobno ułamki; wynik doprowadzamy do najprostszej postaci

Odejmowanie ułamków zwykłych

Odejmowanie ułamków o tych samych mianownikach

Aby odjąć ułamki o jednakowych mianownikach, odejmujemy ich liczniki, a mianownik pozostawiamy bez zmian.
Jeśli to możliwe, wynik doprowadzamy do najprostszej postaci.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Np. $\frac{9}{10}-\frac{3}{10}=\frac{9-3}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$8\frac{9}{17}-2\frac{5}{17}=6\frac{4}{17}$

↑ osobno odejmujemy części całkowite i osobno ułamki

$10-8\frac{2}{5}=9\frac{5}{5}-8\frac{2}{5}=1\frac{3}{5}$

↑ zamieniamy jedną całość odjemnej na ułamek

$9\frac{3}{11}-6\frac{5}{11}=8\frac{14}{11}-6\frac{5}{11}=2\frac{9}{11}$

Odejmowanie ułamków o różnych mianownikach

Aby odjąć ułamki o różnych mianownikach, najpierw sprowadzamy je do wspólnego mianownika.

Np. $\frac{7}{8}-\frac{5}{12}=\frac{21}{24}-\frac{10}{24}=\frac{11}{24}$

$9\frac{8}{15}-3\frac{1}{6}=9\frac{16}{30}-3\frac{5}{30}=6\frac{11}{30}$ ← osobno odejmujemy części całkowite i osobno ułamki

Mnożenie ułamków zwykłych przez liczbę naturalną

Aby pomnożyć ułamek zwykły przez liczbę naturalną, mnożymy licznik ułamka przez tę liczbę, a mianownik pozostawiamy bez zmian. Jeśli to możliwe, wynik doprowadzamy do najprostszej postaci.

$$a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$$

Np. $5 \cdot \frac{2}{17} = \frac{5 \cdot 2}{17} = \frac{10}{17}$

$3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$

$\frac{4}{9} \cdot 7 = \frac{4 \cdot 7}{9} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$

$\frac{2}{25} \cdot 15 = \frac{2 \cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

Aby pomnożyć liczbę naturalną przez liczbę mieszaną, można:

- zamienić liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy i pomnożyć go przez daną liczbę naturalną,

  Np. $2 \cdot 7\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{23}{3} = \frac{2 \cdot 23}{3} = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$

- pomnożyć przez tę liczbę naturalną osobno część całkowitą i osobno ułamek.

  Np. $2 \cdot 7\frac{2}{3} = 2 \cdot 7 + 2 \cdot \frac{2}{3} = 14\frac{4}{3} = 15\frac{1}{3}$

Mnożenie ułamków zwykłych

Aby pomnożyć dwa ułamki zwykłe, mnożymy licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik. Jeśli to możliwe, wynik doprowadzamy do najprostszej postaci.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Np. $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{10} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 10} = \frac{21}{40}$

$\frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{11} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 11} = \frac{20}{33}$

$\frac{\overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{7}{35}} \cdot \frac{\overset{1}{5}}{\underset{3}{\cancel{18}}} = \frac{2 \cdot 1}{7 \cdot 3} = \frac{2}{21}$

Jeśli czynnik jest liczbą mieszaną, zamieniamy go na ułamek niewłaściwy.

Np. $\frac{3}{5} \cdot 4\frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{10} = 2\frac{7}{10}$

Dzielenie ułamków zwykłych

Dzielenie przez liczbę możemy zastąpić mnożeniem przez odwrotność tej liczby. Jeśli to możliwe, wynik doprowadzamy do najprostszej postaci.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Np. $\frac{5}{6} : 7 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{42}$

$\frac{4}{9} : \frac{3}{5} = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{27}$

$\frac{4}{5} : \frac{12}{25} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

Jeśli w dzieleniu występuje liczba mieszana, zamieniamy ją na ułamek niewłaściwy.

Np. $1\frac{2}{3} : \frac{2}{11} = \frac{5}{3} : \frac{2}{11} = \frac{5}{3} \cdot \frac{11}{2} = \frac{55}{6} = 9\frac{1}{6}$

Dodawanie ułamków dziesiętnych

Ułamki dziesiętne możemy dodawać w pamięci.

Np. $0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7 \left(\frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}\right)$

$1{,}12 + 2{,}34 = 3{,}46 \left(1\frac{12}{100} + 2\frac{34}{100} = 3\frac{46}{100}\right)$

Ułamki dziesiętne możemy dodawać sposobem pisemnym podobnie jak liczby naturalne. Ułamki zapisujemy tak, aby **przecinek był pod przecinkiem**. W razie potrzeby możemy dopisać zera na końcu ułamka.

Np.

			1	
	1	3	, 2	8
+		0	, 4	7
	1	3	, 7	5

	1	1	1	2	1	
		5	6	, 3	7	6
	1	6	6	, 0	7	0
+		1	2	, 6	6	9
	2	3	5	, 1	1	5

← na końcu ułamka dopisujemy zero

Odejmowanie ułamków dziesiętnych

Ułamki dziesiętne możemy odejmować w pamięci.

Np. $0{,}9 - 0{,}2 = 0{,}7 \left(\frac{9}{10} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}\right)$

$2{,}56 - 1{,}42 = 1{,}14 \left(2\frac{56}{100} - 1\frac{42}{100} = 1\frac{14}{100}\right)$

Ułamki dziesiętne możemy odejmować sposobem pisemnym podobnie jak liczby naturalne. Ułamki zapisujemy tak, aby **przecinek był pod przecinkiem**. W razie potrzeby możemy dopisać zera na końcu ułamka.

Np.

	2	14	7	11
	~~3~~	~~4~~ , ~~8~~	~~1~~	
−	1	9 , 5	9	
	1	5 , 2	2	

	1	18	7	11	10
	~~2~~	~~8~~ , ~~8~~	~~2~~		0
−		9 , 7	2		6
	1	9 , 0	9		4

← na końcu ułamka dopisujemy zero

Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000, ...

Aby **pomnożyć** ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000, ..., przesuwamy przecinek **w prawo** odpowiednio o jedno, dwa, trzy itd. miejsca. W razie potrzeby uzupełniamy zapis zerami.

Np. $2{,}56 \cdot 10 = 25{,}6$
$0{,}678 \cdot 100 = 67{,}8$
$0{,}45 \cdot 1000 = 450$

Aby **podzielić** ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000, ..., przesuwamy przecinek **w lewo** odpowiednio o jedno, dwa, trzy itd. miejsca. W razie potrzeby uzupełniamy zapis zerami.

Np. $12{,}7 : 10 = 1{,}27$
$76{,}1 : 100 = 0{,}761$
$5{,}91 : 1000 = 0{,}00591$

Mnożenie ułamków dziesiętnych

Gdy mnożymy w pamięci ułamki dziesiętne, mnożymy liczby bez przecinka, a dopiero potem wstawiamy go w wyniku: w iloczynie powinno być tyle cyfr po przecinku, ile jest ich łącznie w obu czynnikach.

Np. $0{,}3 \cdot 0{,}04 = 0{,}012$

1 cyfra · 2 cyfry · 1 + 2 = 3 cyfry

$0{,}4 \cdot 1{,}6 = 0{,}64$

1 cyfra · 1 cyfra · 1 + 1 = 2 cyfry

Mnożenie ułamków dziesiętnych można wykonać pisemnie podobnie jak mnożenie liczb naturalnych. Zapisujemy ułamki jeden pod drugim tak, jakby nie miały przecinków. W otrzymanym wyniku wstawiamy przecinek, odliczając od prawej strony tyle cyfr, ile jest łącznie cyfr po przecinku w obu czynnikach.

Np.

			2	, 6	← 1 cyfra po przecinku
	·	0	, 4	8	← 2 cyfry po przecinku
		2	0	8	
+	1	0	4		
	1	, 2	4	8	← 1 + 2 = 3 cyfry po przecinku

Dzielenie ułamków dziesiętnych

Dzielenie ułamków dziesiętnych czasem łatwo wykonać w pamięci.

Np. $0{,}08 : 2 = 0{,}04$

$1{,}5 : 3 = 0{,}5$

Aby podzielić pisemnie ułamek dziesiętny przez liczbę naturalną, należy wykonać dzielenie tak, jakby obie liczby były liczbami naturalnymi, a w wyniku przecinek wstawić nad przecinkiem.

Np.

		4	, 7			
	5	6	, 4	:	1	2
−	4	8				
		8	4			
	−	8	4			
			0			

Aby podzielić liczbę przez ułamek dziesiętny, zamieniamy to dzielenie na dzielenie przez liczbę naturalną. W tym celu przesuwamy przecinek w prawo o tyle samo miejsc w dzielnej i dzielniku.

Np. $5{,}3 : 1{,}25 = 530 : 125$

			4	, 2	4		
	5	3	0	:	1	2	5
−	5	0	0				
		3	0	0			
	−	2	5	0			
			5	0	0		
		−	5	0	0		
					0		

1.5. Ułamek liczby

Obliczanie ułamka liczby

Aby obliczyć ułamek danej liczby, mnożymy ułamek przez tę liczbę.

$$\frac{a}{b} \text{ liczby } x \text{ to } \frac{a}{b} \cdot x$$

Np. $\frac{2}{5}$ liczby 15 to $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$

2,5 liczby 200 to $2{,}5 \cdot 200 = 500$

$\frac{3}{4}$ doby to $\frac{3}{4} \cdot 24$ godziny $= 18$ godzin

Obliczanie, jakim ułamkiem jednej liczby jest druga liczba

Aby obliczyć, jakim ułamkiem liczby b jest liczba a, zapisujemy iloraz liczby a przez liczbę b w postaci ułamka zwykłego i doprowadzamy go do najprostszej postaci.

Np.

- Jakim ułamkiem liczby 35 jest liczba 15?

  $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$, czyli liczba 15 stanowi $\frac{3}{7}$ liczby 35.

- Jakim ułamkiem liczby 12 jest liczba 30?

  $\frac{30}{12} = 2\frac{6}{12} = 2{,}5$, czyli liczba 30 stanowi 2,5 liczby 12.

Obliczanie liczby, gdy dany jest jej ułamek

Aby obliczyć liczbę, gdy dany jest jej ułamek, możemy postąpić w różny sposób.

Np.

- Znajdź liczbę, której $\frac{3}{5}$ jest równe 12.

  Sposób 1

  $12 : \frac{3}{5} = 12 \cdot \frac{5}{3} = \frac{60}{3} = 20$,

  więc tą liczbą jest 20.

  Sposób 2

  $\frac{3}{5} \longrightarrow 12$

  $\downarrow : 3 \qquad \downarrow : 3$

  $\frac{1}{5} \longrightarrow 4$

  $\downarrow \cdot 5 \qquad \downarrow \cdot 5$

  $1 \longrightarrow 20$

- Znajdź liczbę, której 1,25 jest równe 40.

  Sposób 1

  $40 : 1{,}25 = 40 : 1\frac{1}{4} = 40 : \frac{5}{4} =$

  $= \overset{8}{\cancel{40}} \cdot \frac{4}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 8 \cdot 4 = 32$,

  więc tą liczbą jest 32.

  Sposób 2

  $\frac{5}{4} \longrightarrow 40$

  $\downarrow : 5 \qquad \downarrow : 5$

  $\frac{1}{4} \longrightarrow 8$

  $\downarrow \cdot 4 \qquad \downarrow \cdot 4$

  $1 \longrightarrow 32$

Pomniejszanie i powiększanie wielkości

O ułamek liczby mniej, o ułamek liczby więcej

Aby obliczyć liczbę mniejszą od liczby a o dany ułamek liczby a, odejmujemy od liczby a jej iloczyn przez ten ułamek.

Np. kwota o połowę mniejsza od 18 zł to
$18 - \frac{1}{2} \cdot 18 = 18 - 9 = 9$ [zł]

odległość o 0,35 mniejsza od 12 km to
$12 - 0{,}35 \cdot 12 = 12 - 4{,}2 = 7{,}8$ [km]

Aby obliczyć liczbę większą od liczby a o dany ułamek liczby a, dodajemy do liczby a jej iloczyn przez ten ułamek.

Np. masa o połowę większa od 2,8 kg to
$2{,}8 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}8 = 2{,}8 + 1{,}4 = 4{,}2$ [kg]

kwota o $\frac{3}{4}$ większa od 20 zł to
$20 + \frac{3}{4} \cdot 20 = 20 + 15 = 35$ [zł]

Liczba mniejsza od a		Liczba większa od a
$a - \frac{1}{2}a$	o połowę	$a + \frac{1}{2}a$
$a - \frac{3}{4}a$	o $\frac{3}{4}a$	$a + \frac{3}{4}a$
$a - 0{,}35a$	o $0{,}35a$	$a + 0{,}35a$

Ułamek razy mniej, ułamek razy więcej

Aby obliczyć liczbę a razy mniejszą od danej liczby, dzielimy daną liczbę przez a.

Np. masa 3,5 razy mniejsza od 70 dag to
$70 : 3{,}5 = 20$ [dag]

długość $2\frac{1}{4}$ razy mniejsza od 360 cm to
$360 : 2\frac{1}{4} = 360 : \frac{9}{4} = 360 \cdot \frac{4}{9} = 160$ [cm]

Aby obliczyć liczbę a razy większą od danej liczby, mnożymy daną liczbę przez a.

Np. masa $2\frac{1}{3}$ razy większa od 30 kg to
$30 \cdot 2\frac{1}{3} = 30 \cdot \frac{7}{3} = 70$ [kg]

kwota 1,5 raza większa od 24 zł to
$24 \cdot 1{,}5 = 36$ [zł]

Liczba mniejsza od a		Liczba większa od a
$a : 2$	2 razy	$2a$
$a : 1{,}5$	1,5 raza	$1{,}5a$
$a : 2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$ razy	$2\frac{1}{4}a$

1.6. Proporcjonalność prosta

Wielkości wprost proporcjonalne

Wielkości $x > 0$ i $y > 0$ są **wprost proporcjonalne**, jeżeli wraz ze wzrostem (zmniejszaniem się) jednej wielkości, druga rośnie (zmniejsza się) tyle samo razy.

Iloraz wielkości wprost proporcjonalnych jest stały:

$$\frac{y}{x} = a, \text{ gdzie } a > 0.$$

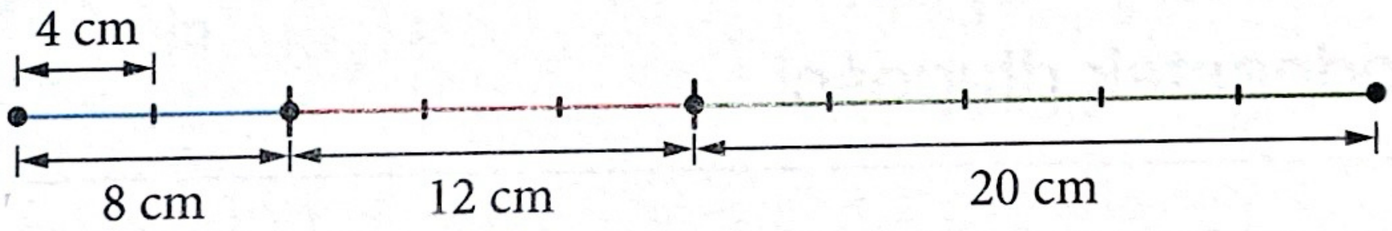
Liczba a to **współczynnik proporcjonalności**.

Np.
- droga i czas w ruchu jednostajnym
- masa kupionych jabłek i ich wartość

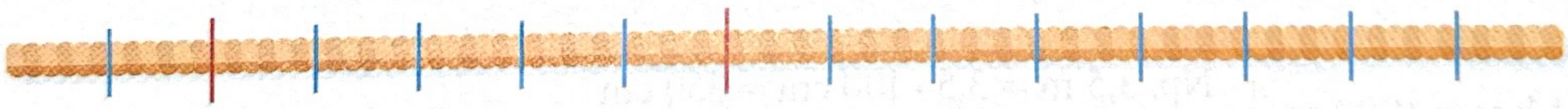
Podział proporcjonalny

Podział wielkości na części, które są proporcjonalne do podanego zestawu liczb, nazywamy **podziałem proporcjonalnym**.

Np.
- Odcinek długości 40 cm rozcięty na trzy części o długościach: 8 cm, 12 cm i 20 cm jest podzielony proporcjonalnie w stosunku $2 : 3 : 5$, gdyż $8 = 2 \cdot 4$, $12 = 3 \cdot 4$, $20 = 5 \cdot 4$.



- Jak podzielić sznurek o długości 300 cm na trzy części w stosunku $2 : 5 : 8$?
  Dzielimy sznurek na $2 + 5 + 8 = 15$ równych części – każda o długości $300 : 15 = 20$ [cm].

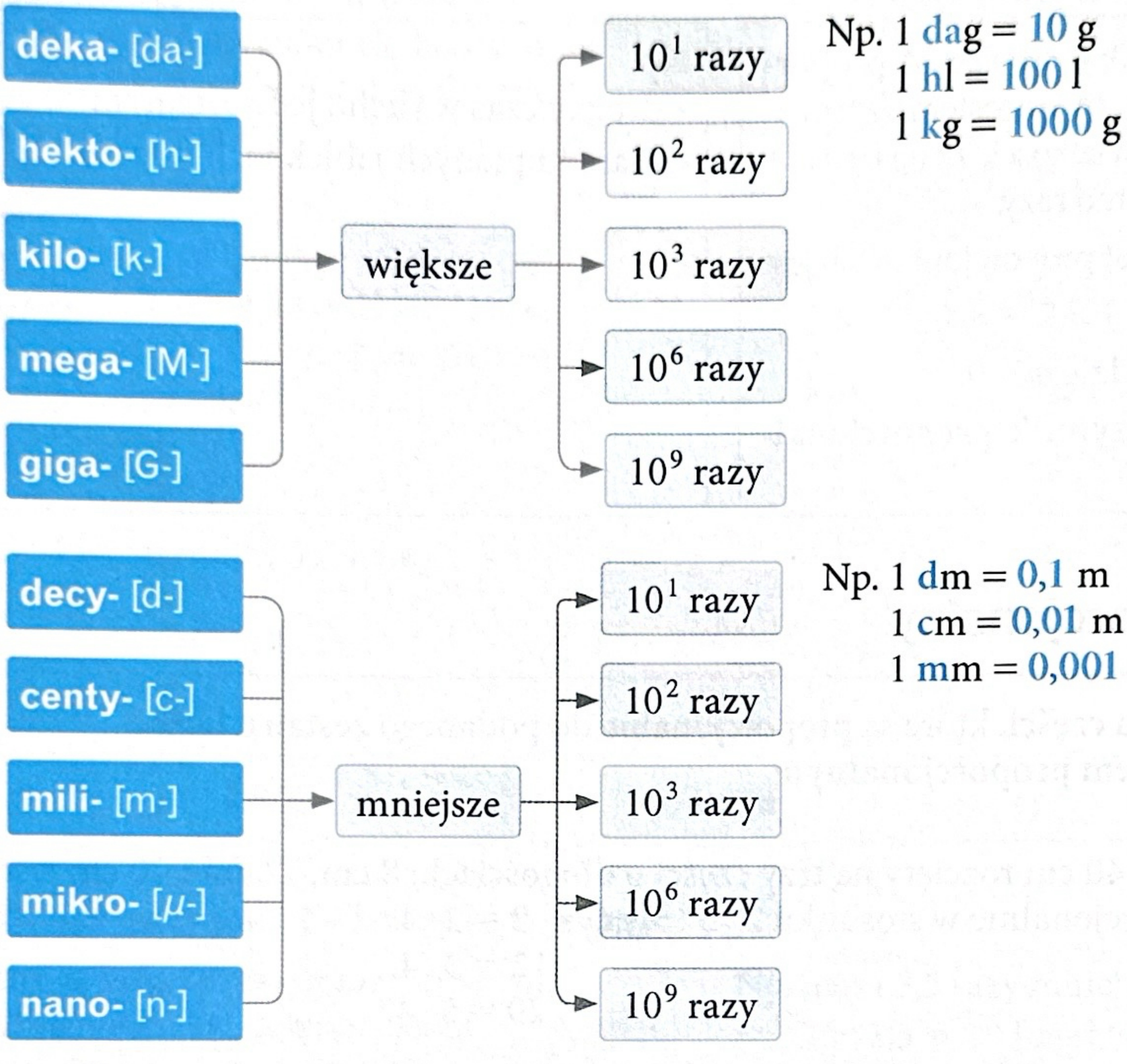


pierwszy kawałek to 2 takie części: $2 \cdot 20 = 40$ [cm]
drugi kawałek to 5 takich części: $5 \cdot 20 = 100$ [cm]
trzeci kawałek to 8 takich części: $8 \cdot 20 = 160$ [cm]

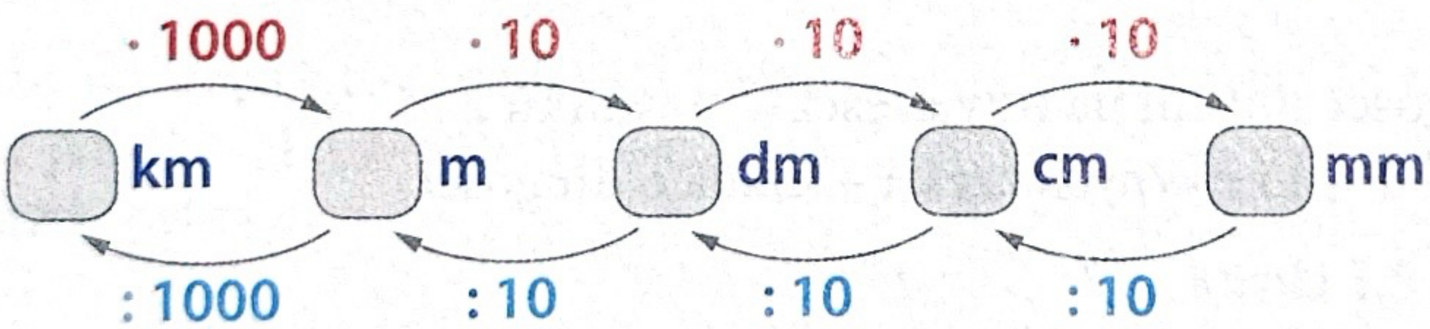
Zauważmy, że:
pierwszy kawałek stanowi $\frac{2}{15}$ całego sznurka, drugi $\frac{5}{15}$, a trzeci $\frac{8}{15}$.

1.7. Obliczenia praktyczne

Nazwy jednostek pochodnych



Zamiana jednostek długości



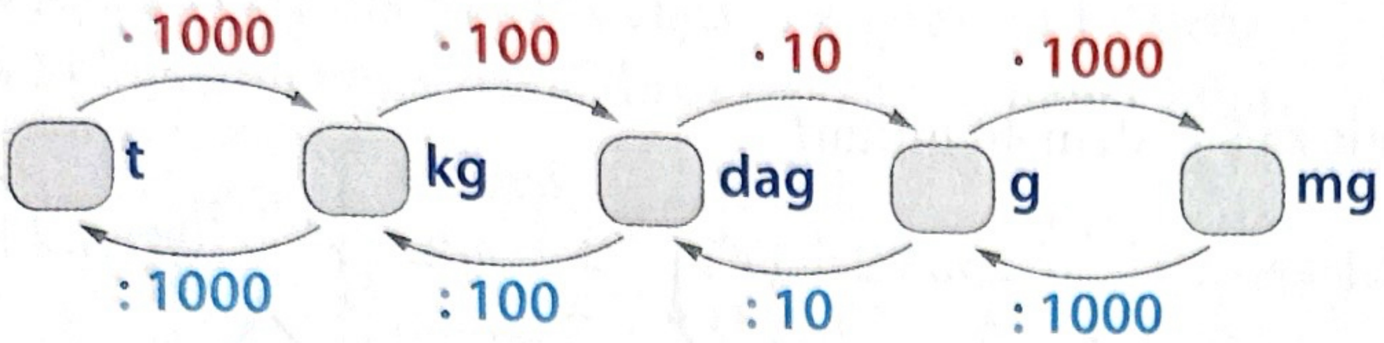
1 km = 1000 m
1 m = 10 dm
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm

Np. 3,5 m = 3,5 · 100 cm = 350 cm
5,8 km = 5,8 · 1000 m = 5800 m
14,6 dm = 14,6 · 10 cm = 146 cm = 146 · 10 mm = 1460 mm
2,63 km → 2,63 · 1000 m = 2630 m = 2630 · 10 dm = 26 300 dm
2,63 km → 2,63 · (1000 · 10) dm = 26 300 dm

1 mm = 0,1 cm
1 cm = 0,1 dm
1 dm = 0,1 m
1 m = 0,001 km

72 cm = 72 · 0,1 dm = 7,2 dm
630 mm = 630 · 0,1 cm = 63 cm = 63 · 0,1 dm = 6,3 dm
7,5 m = 7,5 · 0,001 km = 0,0075 km
47 300 dm → 47 300 · 0,1 m = 4730 m = 4730 · 0,001 km = 4,73 km
47 300 dm → (47 300 : 10 : 1000) km = 4,73 km

Zamiana jednostek masy



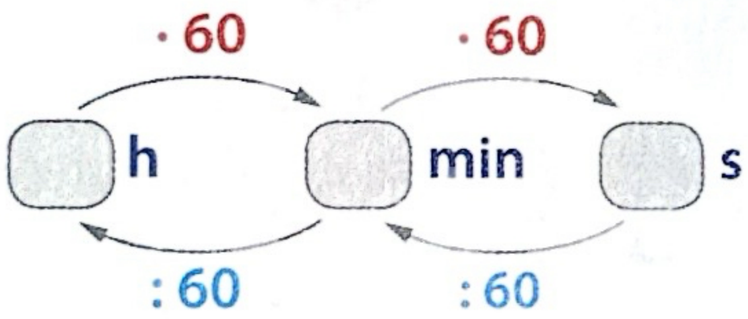
1 t = 1000 kg
1 kg = 100 dag
1 dag = 10 g
1 g = 1000 mg

Np. 6,2 t = 6,2 · 1000 kg = 6200 kg
16,7 kg = 16,7 · 1000 g = 16 700 g
5,33 dag = 5,33 · 10 g = 53,3 · 1000 mg = 53 300 mg
8,134 t → 8,134 · 1000 kg = 8134 · 100 dag = 813 400 dag
8,134 t → 8,134 · (1000 · 100) dag = 813 400 dag

1 mg = 0,001 g
1 g = 0,1 dag
1 dag = 0,01 kg
1 kg = 0,001 t

42 dag = 42 · 0,01 kg = 0,42 kg
682 000 mg = 682 000 · 0,001 g = 682 g
5,23 dag = 5,23 · 0,01 kg = 0,0523 kg
524 g → 524 · 0,1 dag = 52,4 · 0,01 kg = 0,524 kg
524 g → (524 : 10 : 100) kg = 0,524 kg

Zamiana jednostek czasu



1 h = 60 min
1 min = 60 s
1 h = 3600 s

$1\text{ s} = \frac{1}{60}\text{ min}$
$1\text{ min} = \frac{1}{60}\text{ h}$

1 doba to 24 godziny
1 godzina to 4 kwadranse
1 kwadrans to 15 minut

Np. $\frac{3}{5}\text{ h} = \frac{3}{5}\cdot 60\text{ min} = 36\text{ min}$

$8\text{ min} = 8\cdot\frac{1}{60}\text{ h} = \frac{8}{60}\text{ h} = \frac{2}{15}\text{ h}$

Jednostki prędkości

Średnia prędkość v obiektu, który w czasie t pokonał drogę s, wyraża się wzorem:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$1\text{ km/h} = \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = \frac{5}{18}\text{ m/s}$$

$$1\text{ m/s} = \frac{0{,}001\text{ km}}{\frac{1}{3600}\text{ h}} = 3{,}6\text{ km/h}$$

Obliczenia zegarowe

Która to będzie godzina?

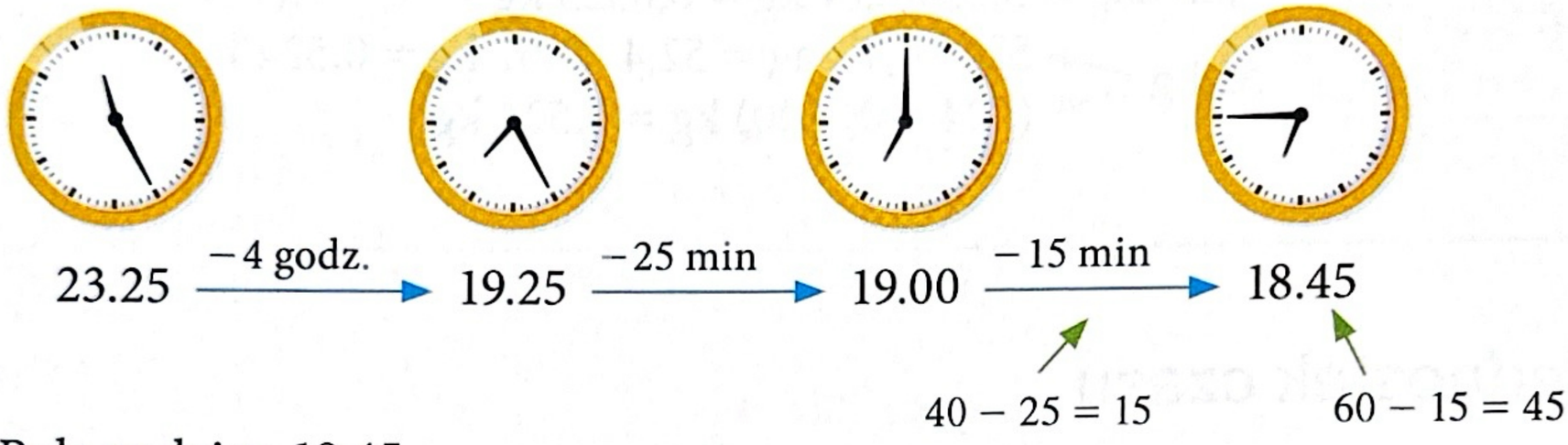
- Jest 21.45. Która godzina będzie za 9 godzin 40 minut?



Będzie godzina 7.25 następnego dnia.

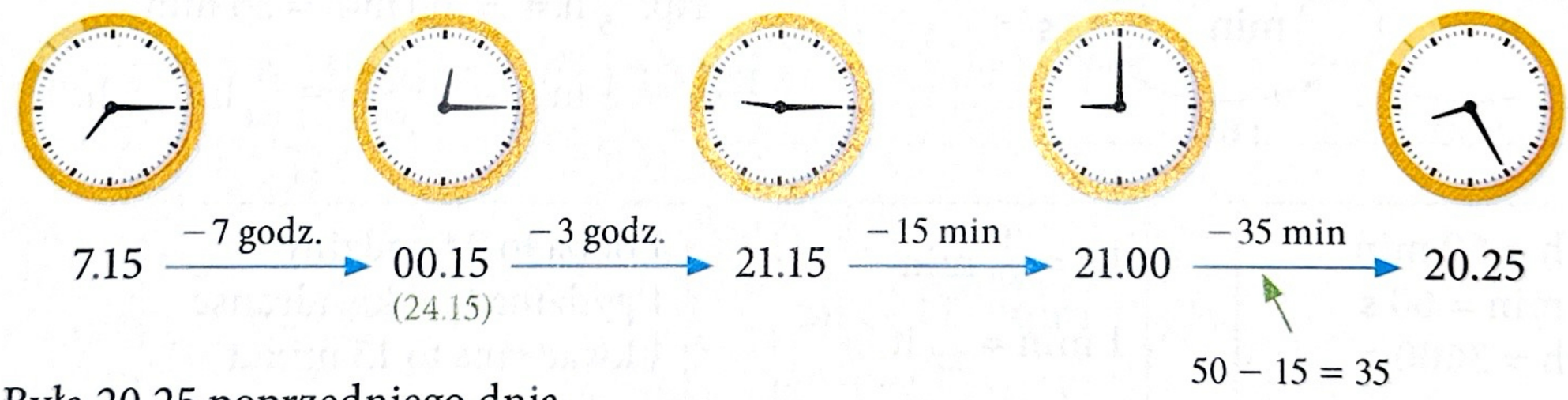
Która to była godzina?

- Jest 23.25. Która godzina była 4 godziny 40 minut temu?



Była godzina 18.45.

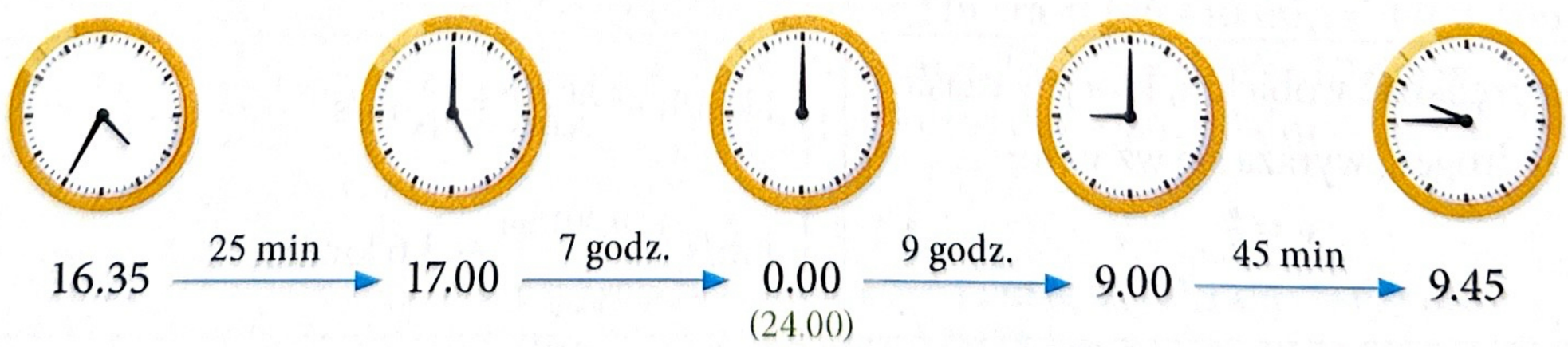
- Jest 7.15. Która godzina była 10 godzin 50 minut temu?



Była 20.25 poprzedniego dnia.

Obliczanie, ile czasu upłynie

- Ile czasu upłynie od godziny 16.35 do godziny 9.20 następnego dnia?



25 min + 7 godz. + 9 godz. + 45 min = 16 godz. 70 min = 17 godz. 10 min
Upłynie 17 godzin 10 minut.

Obliczenia kalendarzowe

- Rok zwykły ma 365 dni, czyli 52 tygodnie i 1 dzień.
- Rok przestępny ma 366 dni, czyli 52 tygodnie i 2 dni.

I kwartał	styczeń	31 dni	III kwartał	lipiec	31 dni
	luty	28 lub 29 dni		sierpień	31 dni
	marzec	31 dni		wrzesień	30 dni
II kwartał	kwiecień	30 dni	IV kwartał	październik	31 dni
	maj	31 dni		listopad	30 dni
	czerwiec	30 dni		grudzień	31 dni

Skala i plan

Gdy rysujemy figurę w powiększeniu lub pomniejszeniu i zachowujemy przy tym jej kształt, mówimy, że przedstawiamy ją w **skali**.



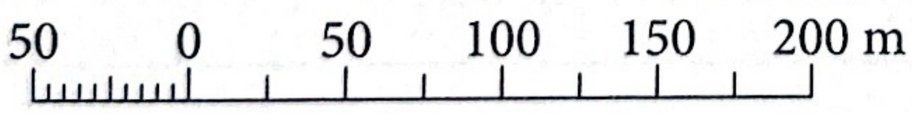
skala 1 : 3 (wymiary zmniejszono 3 razy)

skala 1 : 1 (wymiary rzeczywiste)

skala 2 : 1 (wymiary zwiększono 2 razy)

Na mapach stosuje się różne sposoby zapisu skali.

- skala liczbowa: 1 : 5000
- skala mianowana: 1 cm – 50 m
- skala liniowa:



Np. na mapie obok odległość między Warszawą a Szczecinem jest równa 4,6 cm. Odczytujemy, że 1 cm na mapie odpowiada 100 km w rzeczywistości, więc 4,6 cm odpowiada $4{,}6 \cdot 100$ km = 460 km. Zatem rzeczywista odległość między tymi miastami wynosi 460 km.



2.1. Procenty

Procent

Jeden procent (1%) pewnej wielkości to setna część tej wielkości.

1% liczby x to $\frac{1}{100} \cdot x$

p% liczby x to $\frac{p}{100} \cdot x$

Np. 9% liczby 70 to $\frac{9}{100} \cdot 70 = 6{,}3$.

Wyrażanie ułamka całości za pomocą procentów

Aby wyrazić ułamek w postaci procentów, mnożymy go przez 100%.

Np. $\frac{2}{5}$ godziny to $\frac{2}{5} \cdot 100\%$ godziny = $= 40\%$ godziny.

Warto pamiętać niektóre przeliczenia:

Część całości	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$
Procent całości	25%	$33\frac{1}{3}\% \approx 33\%$	50%	$66\frac{2}{3}\% \approx 67\%$	75%	100%	150%

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Aby obliczyć, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, możemy kolejno:

1. ustalić, jakim **ułamkiem** pierwszej liczby jest druga liczba,
2. wyrazić otrzymany ułamek w **procentach**.

Np. liczba 8 stanowi 25% liczby 32, gdyż $\frac{8}{32} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$.

Obliczanie liczby, gdy dany jest jej procent

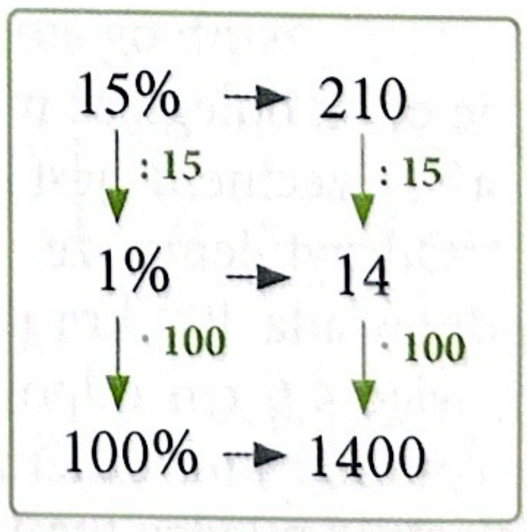
Aby wyznaczyć liczbę x, której p% jest równe a, możemy kolejno:

1. obliczyć 1% liczby x, dzieląc a przez p,
2. pomnożyć otrzymaną wartość przez 100.

Np. 15% liczby x jest równe 210,

więc 1% liczby x wynosi $\frac{210}{15} = 14$,

czyli $x = 14 \cdot 100 = 1400$.



2.2. Obliczenia procentowe w praktyce

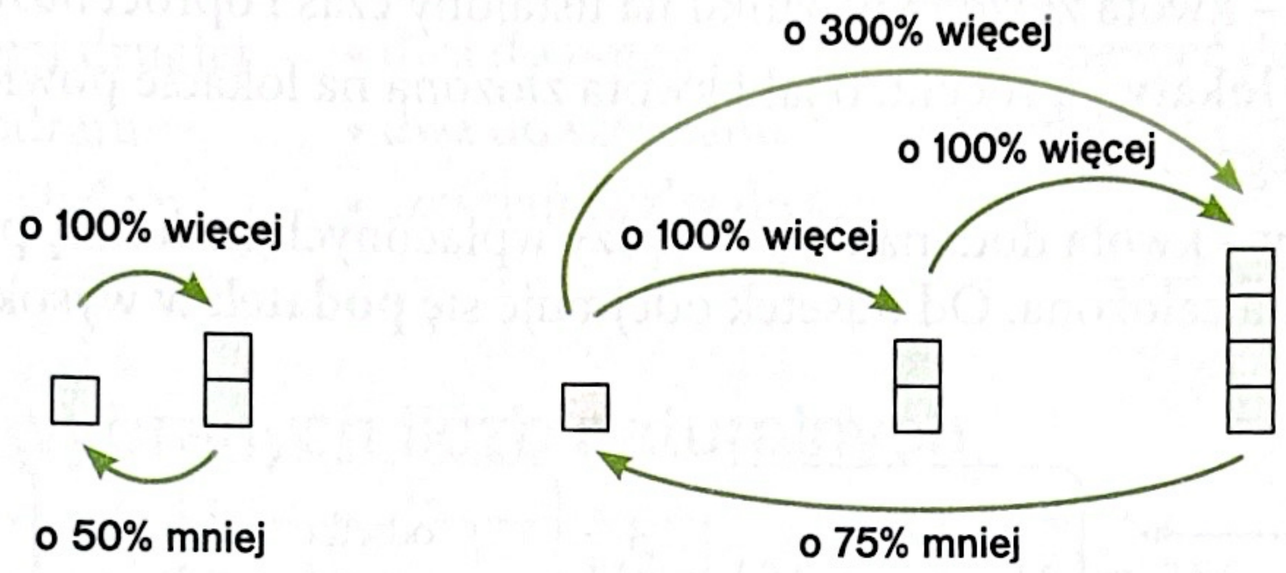
Zmiana wielkości o dany procent

- Liczba o p% większa od liczby x to:
$$x + \frac{p}{100} \cdot x$$
- Liczba o p% mniejsza od liczby x to:
$$x - \frac{p}{100} \cdot x$$

Np. liczba o 6% większa od x to $1{,}06x$,
bo $x + 0{,}06x = 1{,}06x$.

Np. liczba o 6% mniejsza od x to $0{,}94x$,
bo $x - 0{,}06x = 0{,}94x$.

Powiększanie i pomniejszanie wielkości o dany procent



Podwyżka i obniżka ceny

Aby obliczyć cenę **podwyższoną** o p%, do początkowej ceny x **dodajemy** p% ceny x.

Cena początkowa (w zł): x → podwyżka o p% → Cena końcowa (w zł): $x + p$% liczby x

Np. cena początkowa: 4,50 zł → podwyżka o 20% → cena końcowa: $4{,}50 + 0{,}20 \cdot 4{,}50 = 5{,}40$ [zł]

Aby obliczyć cenę **obniżoną** o p%, od początkowej ceny x **odejmujemy** p% ceny x.

Cena początkowa (w zł): x → obniżka o p% → Cena końcowa (w zł): $x - p$% liczby x

Np. cena początkowa: 1300 zł → obniżka o 15% → cena końcowa: $1300 - 0{,}15 \cdot 1300 = 1105$ [zł]

Podatek VAT

cena netto + **podatek VAT** = **cena brutto**

Podatek VAT w wysokości $p\%$ to kwota równa ***p*% ceny netto**.

p% – **stawka** podatku VAT

Np.
cena netto: 90 zł
stawka podatku VAT: 23%
cena brutto: $90 + 0{,}23 \cdot 90 = 90 + 20{,}70 = 110{,}70$ [zł]

Lokata bankowa

- **Lokata bankowa** – kwota złożona w banku na ustalony czas i oprocentowana.
- **Oprocentowanie lokaty** – procent, o jaki kwota złożona na lokacie powiększy się po upływie określonego czasu.
- **Odsetki od lokaty** – kwota dodana do pieniędzy wpłaconych na lokatę po okresie, na który lokata została założona. Od odsetek odejmuje się **podatek** w wysokości 19% tych odsetek.

lokata → lokata + odsetki − podatek 19% od odsetek

do wypłaty

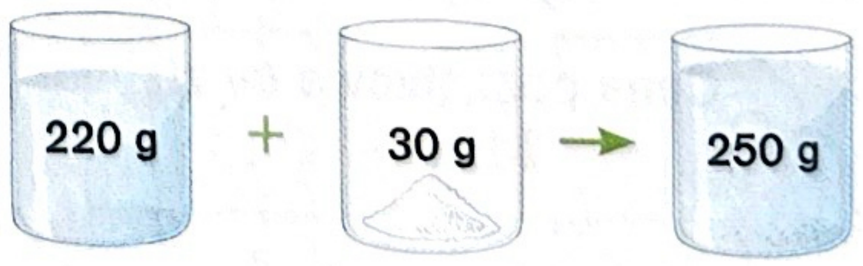
Np. lokata: roczna, oprocentowana 2,5%
kwota: 15 000 zł
odsetki: 2,5% liczby 15 000 $= 0{,}025 \cdot 15\,000 = 375$ [zł]
podatek od odsetek: 19% liczby 375 $= 0{,}19 \cdot 375 = 71{,}25$ [zł]
do wypłaty: $15\,000 + 375 - 71{,}25 = 15\,303{,}75$ [zł]

Stężenie procentowe wodnego roztworu (masowe)

$$C_p = \frac{s}{w+s} \cdot 100\%$$

gdzie: C_p – stężenie procentowe
s – masa substancji rozpuszczonej
w – masa wody

Np. woda + sól → roztwór



stężenie:

$$C_p = \frac{30}{220+30} \cdot 100\% = 12\%$$

3.1. Potęgi

Potęga o wykładniku naturalnym

Dla dowolnej liczby a i liczby naturalnej $n > 1$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Ponadto przyjmujemy:

- $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$
- $a^1 = a$

wykładnik potęgi

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

podstawa potęgi

Odczytywanie potęg

7^2	2^3	9^5
• siedem do potęgi drugiej	• dwa do potęgi trzeciej	• dziewięć do potęgi piątej
• siedem do kwadratu	• dwa do sześcianu	• piąta potęga liczby dziewięć
• kwadrat liczby siedem	• sześcian liczby dwa	

Kwadraty wybranych liczb naturalnych

$1^2 = 1$	$6^2 = 36$	$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$7^2 = 49$	$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$
$3^2 = 9$	$8^2 = 64$	$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$
$4^2 = 16$	$9^2 = 81$	$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$
$5^2 = 25$	$10^2 = 100$	$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$

Sześciany wybranych liczb naturalnych

$1^3 = 1$	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$	$7^3 = 343$	$9^3 = 729$
$2^3 = 8$	$4^3 = 64$	$6^3 = 216$	$8^3 = 512$	$10^3 = 1000$

Własności potęg

Przyjmijmy, że $a \neq 0$ i n jest liczbą naturalną.

- Jeśli $a > 0$, to $a^n > 0$.
- Jeśli $a < 0$ i n jest liczbą parzystą, to $a^n > 0$.
- Jeśli $a < 0$ i n jest liczbą nieparzystą, to $a^n < 0$.

Np.

$6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 > 0$

$(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) > 0$

$(-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) < 0$

Działania na potęgach

Przyjmijmy, że $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz k i m są liczbami naturalnymi.

- $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$
- $a^k : a^m = \frac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$, gdy $k \geqslant m$
- $a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$
- $a^k : b^k = \frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$
- $(a^k)^m = a^{k \cdot m}$

Np.

- $8^5 \cdot 8^2 = 8^{5+2} = 8^7$

  $10^8 \cdot 10^3 = 10^{8+3} = 10^{11}$
- $0{,}6^9 : 0{,}6^5 = 0{,}6^{9-5} = 0{,}6^4$

  $10^8 : 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$
- $5^8 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^8 = \left(5 \cdot \frac{2}{5}\right)^8 = 2^8$

  $6^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right)^5 = 3^5$
- $12^5 : 3^5 = (12 : 3)^5 = 4^5$

  $\frac{24^9}{8^9} = \left(\frac{24}{8}\right)^9 = 3^9$
- $(9^3)^4 = 9^{3 \cdot 4} = 9^{12}$

  $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]^7 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5 \cdot 7} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{35}$

Potęga o podstawie 10 i wykładniku całkowitym ujemnym

Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$:

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Np.

$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ i dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Np.

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Notacja wykładnicza

Zapis liczby dodatniej w notacji wykładniczej to przedstawienie tej liczby w postaci:

$$a \cdot 10^n$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, a liczba a spełnia warunek $1 \leqslant a < 10$.

Np.

$2\,800\,000\,000 = 2{,}8 \cdot 10^9$

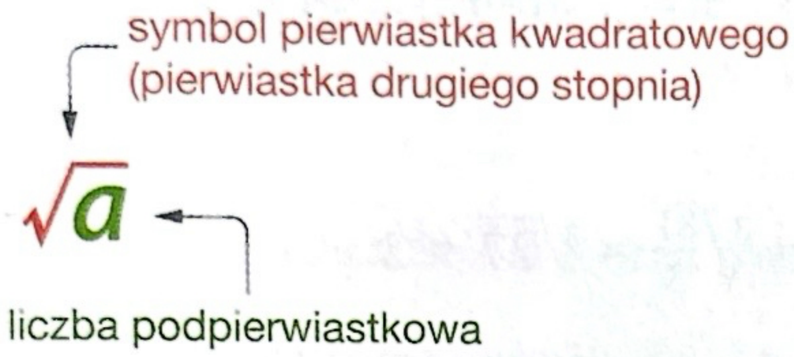
$0{,}0000000425 = 4{,}25 \cdot 10^{-8}$

3.2. Pierwiastki

Pierwiastek kwadratowy

Pierwiastkiem kwadratowym (drugiego stopnia) z liczby $a \geqslant 0$ nazywamy taką liczbę $b \geqslant 0$, dla której $b^2 = a$.
Piszemy wówczas: $\boldsymbol{b = \sqrt{a}}$.

Np.
$\sqrt{36} = 6$, bo $6 \geqslant 0$ i $6^2 = 36$
$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$, bo $\frac{3}{5} \geqslant 0$ i $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$



Czytamy:

$\sqrt{20}$ — pierwiastek z 20; pierwiastek kwadratowy z 20; pierwiastek drugiego stopnia z 20

Dla dowolnej liczby $a \geqslant 0$:
$\boldsymbol{(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a}$

Dla dowolnej liczby a:
$\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |a|}$

Np.
$(\sqrt{14})^2 = 14$, $\sqrt{14^2} = 14$

$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

Pierwiastek sześcienny

Pierwiastkiem sześciennym (trzeciego stopnia) z liczby a nazywamy taką liczbę b, dla której $b^3 = a$.
Piszemy wówczas: $\boldsymbol{b = \sqrt[3]{a}}$.

Np.
$\sqrt[3]{64} = 4$, bo $4^3 = 64$
$\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$



Czytamy:

$\sqrt[3]{20}$ — pierwiastek sześcienny z 20; pierwiastek trzeciego stopnia z 20

Dla dowolnej liczby a:
$\boldsymbol{(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a}$

Np. $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$, $\sqrt[3]{5^3} = 5$,
$(\sqrt[3]{-10})^3 = -10$, $\sqrt[3]{(-10)^3} = -10$

Działania na pierwiastkach

- Dla dowolnych liczb $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$:
  $\boldsymbol{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}}$
- Dla dowolnych liczb a i b:
  $\boldsymbol{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}}$

Np.
$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

$\sqrt[3]{\frac{8}{9}} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{\frac{8}{9} \cdot 9} = \sqrt[3]{8} = 2$

- Dla dowolnych liczb $a \geqslant 0$ i $b > 0$:
  $\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$
- Dla dowolnej liczby a i liczby $b \neq 0$:
  $\boldsymbol{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$

Np.
$\sqrt{50} : \sqrt{2} = \sqrt{50 : 2} = \sqrt{25} = 5$

$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka

Np. $1{,}5 \cdot \sqrt{8} = \sqrt{1{,}5^2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{1{,}5^2 \cdot 8} = \sqrt{2{,}25 \cdot 8} = \sqrt{18}$

$-2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt[3]{-8 \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt[3]{-6}$

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka

Np. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

Np. $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

$\frac{\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}+10) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5+10\sqrt{5}}{5} = \frac{5}{5} + \frac{10\sqrt{5}}{5} = 1 + 2\sqrt{5}$

Szacowanie wartości pierwiastka

Jeśli wartość $\sqrt{a}$ nie jest liczbą naturalną, to można znaleźć taką liczbę naturalną m, że:

$$\boldsymbol{m < \sqrt{a} < m+1}$$

Np. $8 < \sqrt{72} < 9$

$8^2 = 64 < 72$ $\qquad$ $9^2 = 81 > 72$

Jeśli wartość $\sqrt[3]{a}$ nie jest liczbą całkowitą, to można znaleźć taką liczbę całkowitą m, że:

$$\boldsymbol{m < \sqrt[3]{a} < m+1}$$

Np. $2 < \sqrt[3]{20} < 3$

$2^3 = 8 < 20$ $\qquad$ $3^3 = 27 > 20$

4.1. Wyrażenia algebraiczne

Zapisywanie i nazywanie wyrażeń algebraicznych

Wyrażenie algebraiczne to liczba (stała), litera (**zmienna**) lub wyrażenie, w którym występują liczby i litery połączone znakami działań.

Np. $x+y$, $\frac{1}{3}k \cdot m \cdot p$, $3x^2yz^3$, $(a+b)\cdot(a-b)$, $\frac{6+x}{6-x}$

Nazwą wyrażenia algebraicznego jest **nazwa ostatniego działania**, które jest wykonywane podczas obliczania wartości tego wyrażenia.

Np.

- $8 \cdot (x-y)$ – **iloczyn** liczby 8 oraz różnicy liczby x i liczby y,
- $\left(a+\frac{1}{2}c\right)^2$ – **kwadrat** sumy liczby a i połowy liczby c,
- $\frac{k+m}{2km}$ – **iloraz** sumy liczb k i m przez podwojony iloczyn liczb k i m.

Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego

Aby obliczyć wartość wyrażenia algebraicznego, wstawiamy w miejsce liter odpowiednie liczby i wykonujemy działania.

Np. wartość wyrażenia x^2+xy dla $x=3$ i $y=-4$ jest równa $3^2+3\cdot(-4)=9-12=-3$.

Jednomiany

Jednomian to liczba, zmienna lub iloczyn liczb i zmiennych.

Np. $5a$, $6x^2y$, $-\frac{3}{4}k^2mp^2$, x, 15

Dwa jednomiany są **podobne**, gdy występują w nich te same zmienne w tych samych potęgach.

Np. $\frac{3}{7}x^3yz^7$ i $-5{,}213z^7yx^3$ – **są** podobne.

$\frac{3}{7}x^3yz^7$ i $\frac{3}{7}x^3yz$ – **nie są** podobne, ponieważ zmienna z w tych jednomianach jest w innej potędze.

Mnożyć możemy dowolne jednomiany – ich iloczyn także jest jednomianem.

Np. $8x^2y\cdot 5x^3y^6=40x^5y^7$

Dodawać możemy tylko jednomiany podobne – ich suma jest jednomianem do nich podobnym.

Np. $3x^2y+6x^2y=(3+6)x^2y=9x^2y$

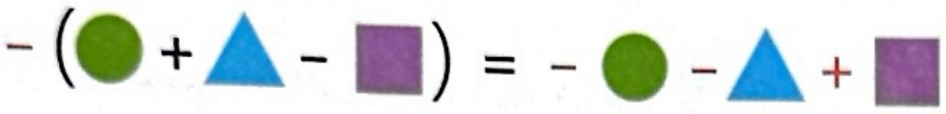
Dodawanie jednomianów podobnych nazywa się **redukcją wyrazów podobnych**.

Sumy algebraiczne i działania na nich

Suma algebraiczna to suma jednomianów.
Składniki sumy nazywamy jej wyrazami.

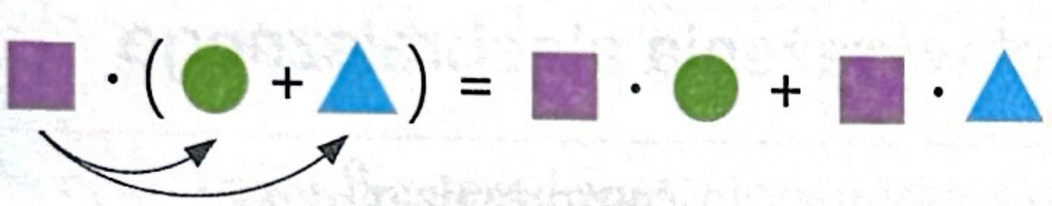
Np. $12x^2 + 8x - 6$,
wyrazy: $12x^2$, $8x$, -6,
$9km^2 + 2k^2m + k$
wyrazy: $9km^2$, $2k^2m$, k

- **Minus przed nawiasem** (mnożenie sumy algebraicznej przez -1)
  Jeśli przed nawiasem jest znak minus, to opuszczając nawias, należy zmienić znak każdego wyrazu w nawiasie na przeciwny.



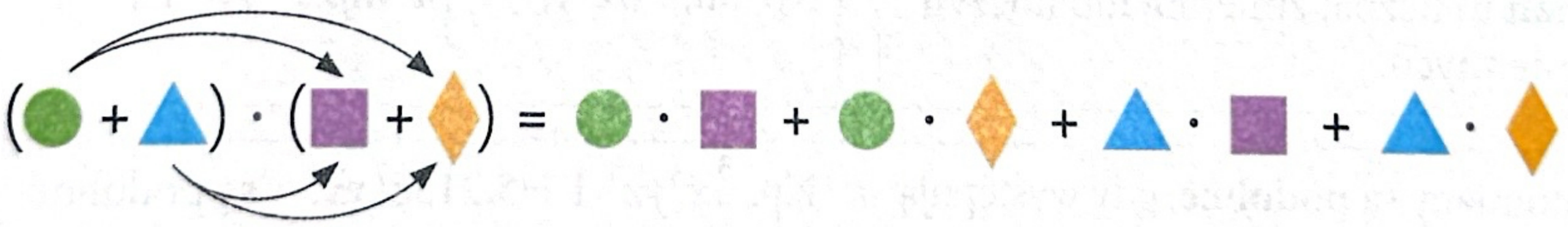
Np. $-(2x^3 + 5xy - 7y) = -2x^3 - 5xy + 7y$
$-(-k - 4m^3 + 2) = k + 4m^3 - 2$

- **Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian**
  Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, mnożymy każdy wyraz sumy przez ten jednomian.



Np. $6(4a - 7b) = 6 \cdot 4a - 6 \cdot 7b = 24a - 42b$
$-2x(3xy - x^2y + 4x) = -2x \cdot 3xy - 2x \cdot (-x^2y) - 2x \cdot 4x = -6x^2y + 2x^3y - 8x^2$

- **Mnożenie sum algebraicznych**
  Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, mnożymy każdy wyraz pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy.



Np. $(2x + 3y)(x - 4y) = 2x \cdot x + 2x \cdot (-4y) + 3y \cdot x + 3y \cdot (-4y) =$
$= 2x^2 - 8xy + 3xy - 12y^2 = 2x^2 - 5xy - 12y^2$

redukcja wyrazów podobnych

$(2x - y)(3x + 2y - xy) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 2y + 2x \cdot (-xy) - y \cdot 3x - y \cdot 2y - y \cdot (-xy) =$
$= 6x^2 + 4xy - 2x^2y - 3xy - 2y^2 + xy^2 = 6x^2 + xy - 2x^2y - 2y^2 + xy^2$

redukcja wyrazów podobnych

4.2. Równania

Równanie z jedną niewiadomą

Równanie z jedną niewiadomą to dwa wyrażenia algebraiczne, z których przynajmniej jedno zawiera niewiadomą, połączone znakiem równości.

Każde równanie ma prawą i lewą stronę.

Np.

$$\underbrace{7x^2 + 0{,}5}_{\text{L (lewa strona)}} = \underbrace{15{,}5 - x}_{\text{P (prawa strona)}}$$

Liczba spełniająca równanie

O liczbie, dla której wartość lewej strony równania jest równa wartości prawej strony równania, mówimy, że **spełnia** to równanie. Taką liczbę nazywamy **rozwiązaniem równania**.

Np.

- Liczba 4 spełnia równanie $\frac{x-3}{2} + 8 = \frac{x+5}{3} + \frac{11}{2}$,

  ponieważ

  $L = \frac{4-3}{2} + 8 = 8{,}5$

  i $P = \frac{4+5}{3} + \frac{11}{2} = 3 + 5{,}5 = 8{,}5$,

  czyli $L = P$.

- Liczba 2 nie jest rozwiązaniem równania $\frac{x+12}{7} + 0{,}5x = 4(x-1) - 6$,

  ponieważ

  $L = \frac{2+12}{7} + 0{,}5 \cdot 2 = 2 + 1 = 3$

  i $P = 4 \cdot (2-1) - 6 = 4 - 6 = -2$,

  czyli $L \neq P$.

Liczba rozwiązań równania liniowego z jedną niewiadomą

Równanie liniowe z jedną niewiadomą to równanie z jedną niewiadomą w pierwszej potędze.

Np. $2x - 3 = 7$

Równanie liniowe z jedną niewiadomą może:	Przykład	Rozwiązanie
mieć **dokładnie jedno** rozwiązanie	$2x + 8 = 10$	$x = 1$ liczba 1 jest jedynym rozwiązaniem
być spełnione przez każdą liczbę (równanie **tożsamościowe**)	$x + 2x + 3 = 3(x + 1)$	$0 = 0$ każda liczba spełnia to równanie
nie mieć rozwiązań (równanie **sprzeczne**)	$8x + 7 = 8x + 9$	$0 = 2$ żadna liczba nie spełnia tego równania

Rozwiązywanie równań

Aby rozwiązać równanie, doprowadzamy je do prostszej postaci, przekształcając obie strony równania: prawą i lewą.
W tym celu możemy:
- wykonać działania arytmetyczne, zredukować wyrazy podobne po jednej lub obu stronach równania,
- obie strony równania podzielić lub pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera,
- do obu stron równania dodać lub od obu stron odjąć tę samą liczbę (wyrażenie).

$2x = \frac{1}{5}(x + 10) + 7$
$2x = \frac{1}{5}x + 2 + 7$ ← wykonujemy działania po prawej stronie równania

$2x = \frac{1}{5}x + 9 \quad |\cdot 5$ ← obie strony równania mnożymy przez 5

$10x = x + 45 \quad |-x$ ← od obu stron równania odejmujemy x

$9x = 45 \quad |:9$ ← obie strony równania dzielimy przez 9

$x = 5$ ← rozwiązanie równania

Jedyną liczbą spełniającą to równanie jest 5.

$L = 2 \cdot 5 = 10,\ P = \frac{1}{5}(5 + 10) + 7 = 10,\ L = P$ ← sprawdzamy otrzymane rozwiązanie

Dodanie do obu stron równania lub odjęcie od obu stron równania tej samej liczby (wyrażenia) jest tym samym co przeniesienie tej liczby (wyrażenia) na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem.

Np.

$2x + 5 = 13 \quad |-5$
$2x + 5 - 5 = 13 - 5$
$2x = 8 \quad |:2$
$x = 4$

Odejmujemy 5 od obu stron równania.

$2x + 5 = 13$
$2x = 13 - 5$
$2x = 8 \quad |:2$
$x = 4$

Przenosimy 5 na drugą stronę równania ze zmienionym znakiem.

Przekształcanie wzorów

Aby wyznaczyć zmienną ze wzoru, postępujemy tak samo jak przy rozwiązywaniu równania.

Np.

Wyznacz wysokość h trójkąta ze wzoru na pole $P = \frac{1}{2}ah$.

$P = \frac{1}{2}ah \quad |\cdot 2$
$2P = ah \quad |:a$
$\frac{2P}{a} = h$
$h = \frac{2P}{a}$

4.3. Zadania tekstowe

Rozwiązywanie zadań tekstowych za pomocą równań

ANALIZA

- **Przeczytaj** dokładnie zadanie.
- Ustal, **co należy obliczyć** (szukane).
- **Oznacz** niewiadomą.
- Wyszukaj w tekście i wypisz:
  – **dane**,
  – **zależności** między danymi a szukanymi.
- Pamiętaj o **ujednoliceniu jednostek**.
- Możesz zrobić **rysunek pomocniczy**.

ROZWIĄZANIE

- Ułóż i rozwiąż **równanie**.
- **Sprawdź**, czy rozwiązanie spełnia warunki zadania.

ODPOWIEDŹ

- Sformułuj i zapisz **odpowiedź**.

Np.

Jurek zapłacił 6,90 zł za dwie duże butelki napoju i jedną małą. Wojtek za trzy duże i dwie małe butelki tego napoju zapłacił 10,90 zł. O ile droższa jest duża butelka napoju od małej butelki?

ANALIZA

Zapisujemy (lub podkreślamy w treści zadania), co należy obliczyć oraz zależności opisane w zadaniu.

Należy obliczyć, o ile droższa jest jedna duża butelka napoju od jednej małej butelki.

Wiemy, że:

1. za dwie duże butelki napoju i jedną małą zapłacono 6,90 zł,
2. za trzy duże i dwie małe butelki napoju zapłacono 10,90 zł.

Oznaczamy niewiadomą i zapisujemy zależności opisane w zadaniu.

x – cena dużej butelki napoju (w zł)

$6{,}90 - 2x$ – cena małej butelki napoju (w zł) ← na podstawie informacji 1

$3x + 2 \cdot (6{,}90 - 2x)$ – koszt zakupów Wojtka (w zł)

ROZWIĄZANIE

Układamy równanie: $3x + 2 \cdot (6{,}90 - 2x) = 10{,}90$

Rozwiązujemy je: $x = 2{,}90$

Obliczamy cenę małej butelki: $6{,}90 - 2 \cdot 2{,}90 = 1{,}10$

Sprawdzamy, czy spełnione są warunki zadania:

$2 \cdot 2{,}90 + 1{,}10 = 5{,}80 + 1{,}10 = 6{,}90$ ← informacja 1

$3 \cdot 2{,}90 + 2 \cdot 1{,}10 = 8{,}70 + 2{,}20 = 10{,}90$ ← informacja 2

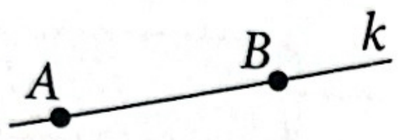
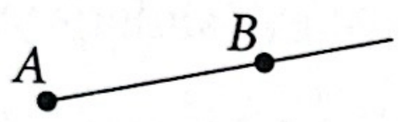
Zatem duża butelka jest droższa od małej o $2{,}90 - 1{,}10 = 1{,}80$ [zł].

ODPOWIEDŹ

Duża butelka napoju jest o 1,80 zł droższa od małej butelki.

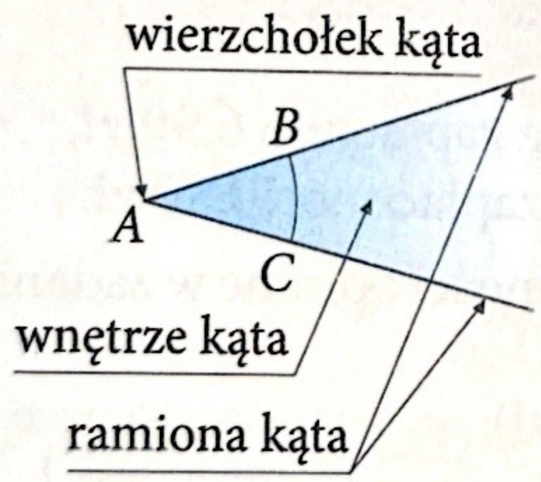
5.1. Własności figur płaskich

Podstawowe figury na płaszczyźnie

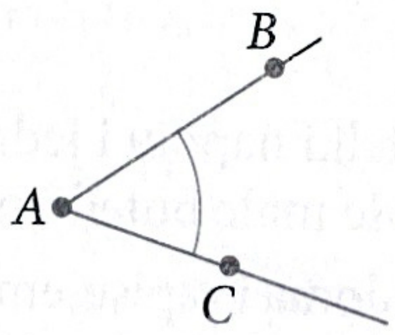
	Przykład	Oznaczenia	Własności
Punkt	A •	Oznaczamy wielką literą alfabetu, np. A.	• Nie ma wymiarów. • Przez punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych.
Odcinek		Nazywamy, podając oznaczenia punktów, które są jego końcami, np. AB.	• Ma dwa końce. • Odległość między końcami odcinka to długość odcinka.
Prosta		Oznaczamy małą literą alfabetu, np. k, lub podając nazwy dwóch punktów, przez które dana prosta przechodzi, np. prosta AB.	• Nie ma początku ani końca. • Przez dwa różne punkty można poprowadzić jedną prostą.
Półprosta		W nazwie podajemy oznaczenia dwóch punktów: najpierw punktu, który jest początkiem półprostej, a następnie innego punktu, który należy do tej półprostej, np. półprosta AB.	Ma początek, ale nie ma końca. W przykładzie punkt A jest początkiem półprostej.

Kąty

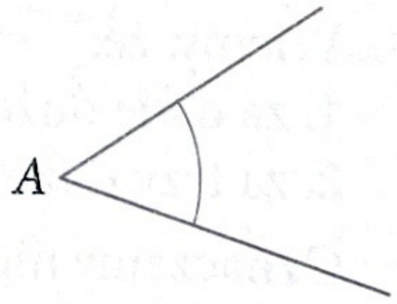
Kąt



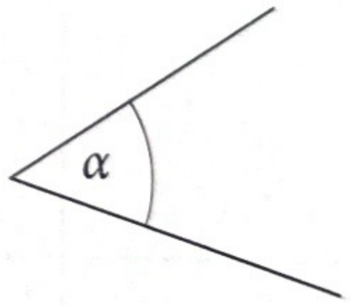
Oznaczenia kąta:



kąt BAC



kąt A



kąt α

Alfabet grecki			
α – alfa (a)	η – eta (e)	ν – ni (n)	τ – tau (t)
β – beta (b)	θ – teta (th)	ξ – ksi (ks, x)	υ – ipsylon (y)
γ – gamma (g)	ι – jota (i)	o – omikron (o)	φ – fi (f)
δ – delta (d)	κ – kappa (k)	π – pi (p)	χ – chi (ch)
ε – epsilon (e)	λ – lambda (l)	ρ – ro (r)	ψ – psi (ps)
ζ – dzeta (z)	μ – mi (m)	σ – sigma (s)	ω – omega (o)

Rodzaje kątów

Kąt zerowy

$\alpha = 0°$

Kąt wypukły

$0° < \alpha \leqslant 180°$

Kąt wklęsły

$180° < \alpha < 360°$

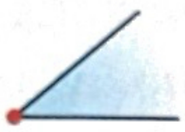


Kąt pełny

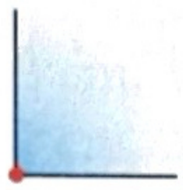
$\alpha = 360°$



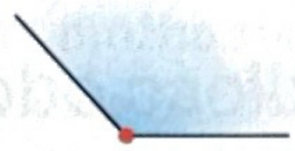
Kąt ostry:
$0° < \alpha < 90°$



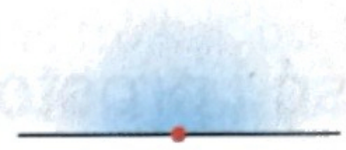
Kąt prosty:
$\alpha = 90°$



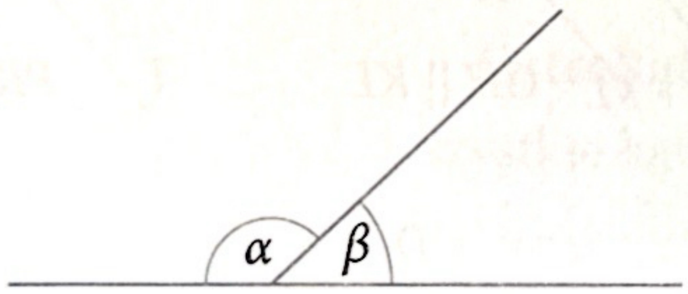
Kąt rozwarty:
$90° < \alpha < 180°$



Kąt półpełny:
$\alpha = 180°$

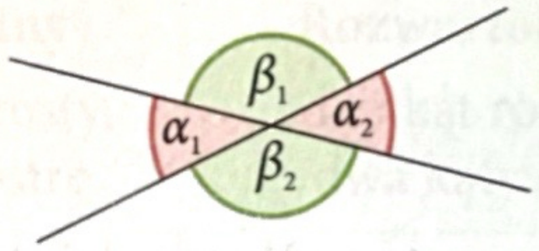


Kąty przyległe



$\alpha + \beta = 180°$

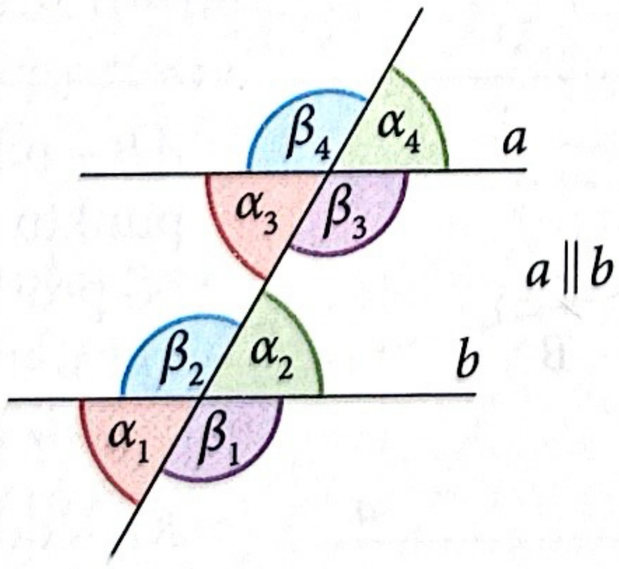
Kąty wierzchołkowe



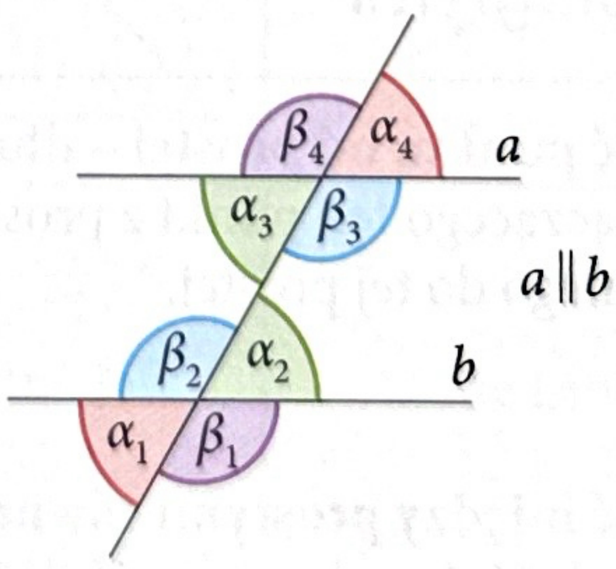
Kąty wierzchołkowe są równe.
$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2$

Kąty odpowiadające, kąty naprzemianległe

Jeżeli proste równoległe a i b przetniemy trzecią prostą, to otrzymamy pary równych **kątów odpowiadających** i pary równych **kątów naprzemianległych**.



$\alpha_1 = \alpha_3$ $\quad \beta_1 = \beta_3$
$\alpha_2 = \alpha_4$ $\quad \beta_2 = \beta_4$

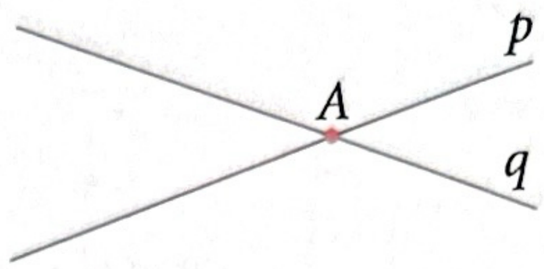


$\alpha_1 = \alpha_4$ $\quad \beta_1 = \beta_4$
$\alpha_2 = \alpha_3$ $\quad \beta_2 = \beta_3$

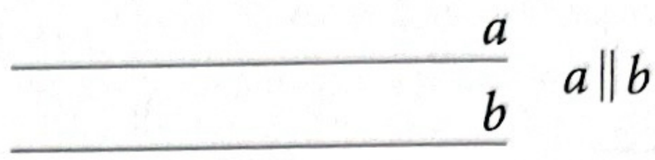
Wzajemne położenie dwóch prostych

Dwie proste na płaszczyźnie:

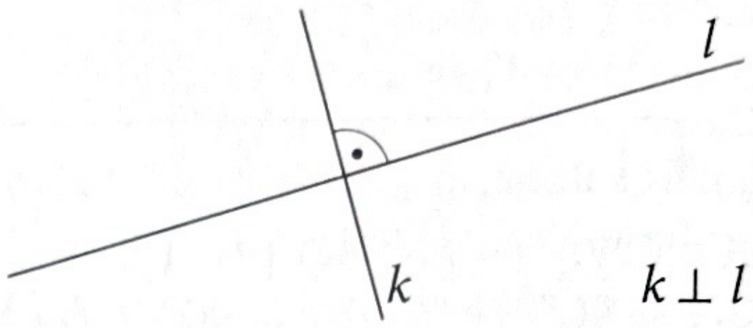
- **przecinają się** – mają dokładnie jeden punkt wspólny,



- **są równoległe** – nie mają punktów wspólnych albo pokrywają się.

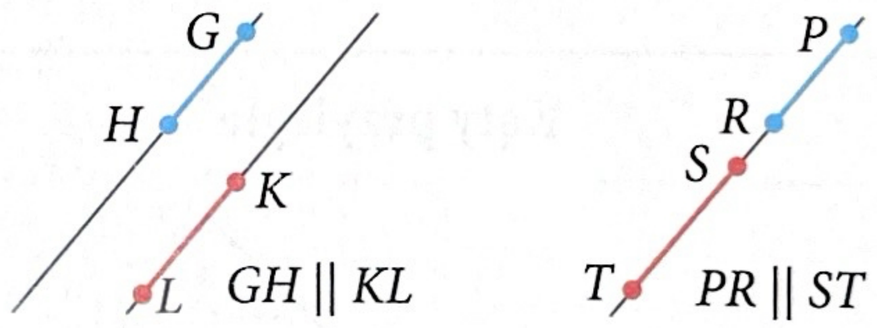


Proste prostopadłe to proste, które przecinają się pod kątem prostym.

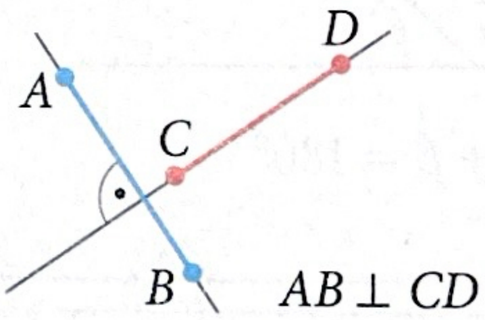


Równoległość i prostopadłość odcinków

Odcinki równoległe to odcinki, które leżą na prostych równoległych lub na jednej prostej.

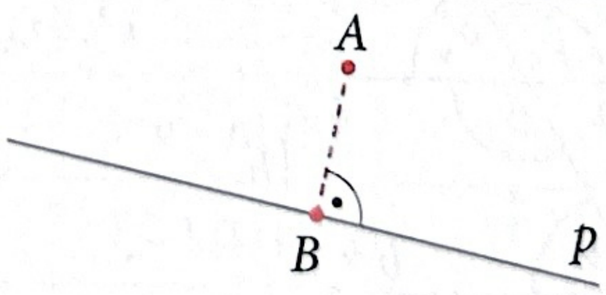


Odcinki prostopadłe to odcinki, które leżą na prostych prostopadłych.



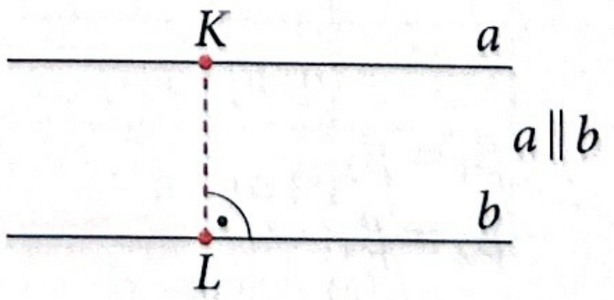
Odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi

Odległość punktu od prostej – długość odcinka łączącego ten punkt z prostą, prostopadłego do tej prostej.



AB – odległość punktu A od prostej p

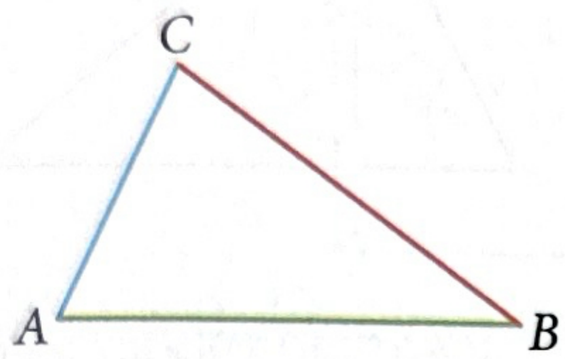
Odległość między prostymi równoległymi – odległość dowolnego punktu jednej prostej od drugiej prostej.



KL – odległość prostej a od prostej b

Nierówność trójkąta

W każdym trójkącie suma długości dwóch boków jest większa niż długość trzeciego boku.



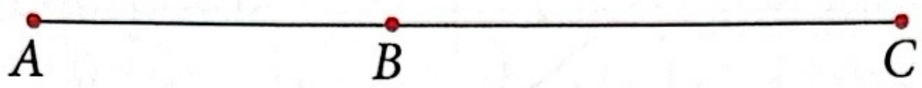
$AB + BC > AC$

$AC + BC > AB$

$AB + AC > BC$



Dla punktów A, B, C równość $AB + BC = AC$ oznacza, że punkt B leży na odcinku AC.



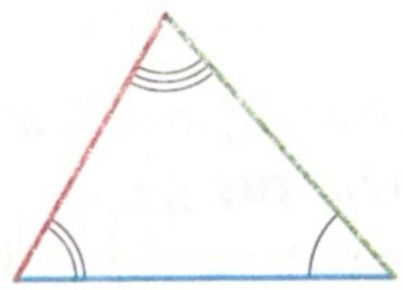
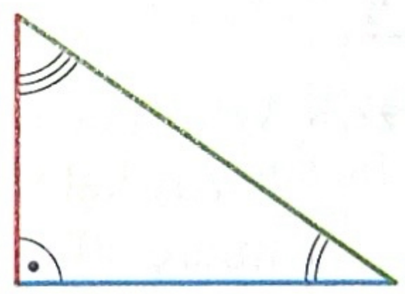
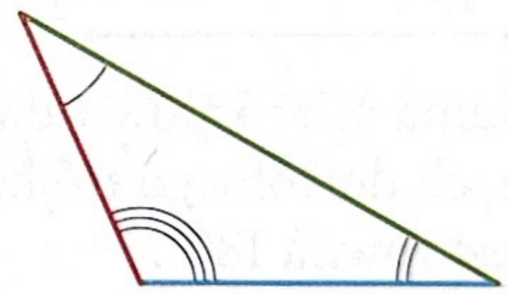
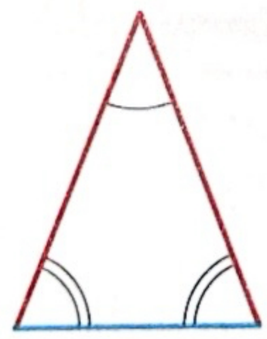
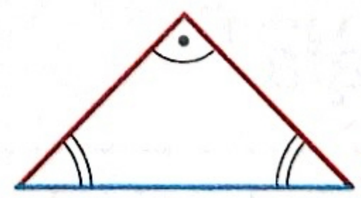
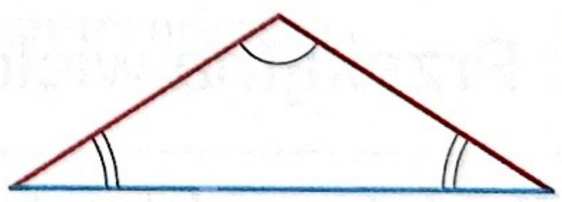
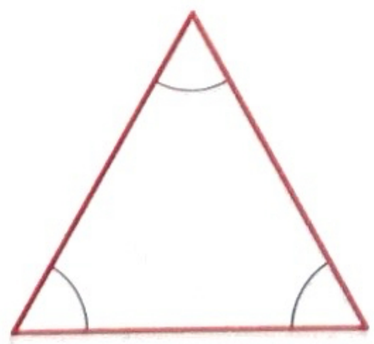
Z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeżeli najdłuższy odcinek jest krótszy od sumy dwóch pozostałych odcinków.

Np.

Z odcinków o długości 3 cm, 4 cm i 6 cm można zbudować trójkąt, bo $6 < 3 + 4$.

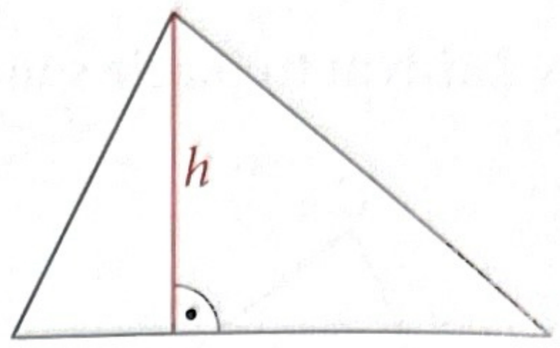
Z odcinków o długości 1 cm, 2 cm i 4 cm nie można zbudować trójkąta, bo $4 > 1 + 2$.

Trójkąty

	Ostrokątny wszystkie kąty ostre	**Prostokątny** jeden kąt prosty, dwa kąty ostre	**Rozwartokątny** jeden kąt rozwarty, dwa kąty ostre
Różnoboczny każdy bok innej długości, każdy kąt ma inną miarę			
Równoramienny dwa boki równe i dwa kąty równe			
Równoboczny wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe		nie istnieje	nie istnieje

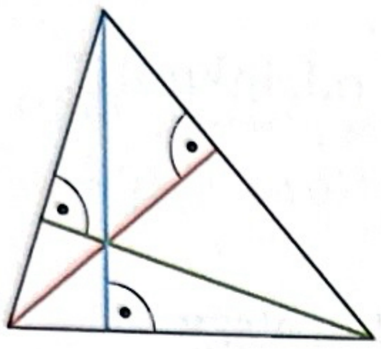
Wysokość trójkąta

Wysokość trójkąta to odcinek prostopadły do boku trójkąta, łączący ten bok (lub jego przedłużenie) z przeciwległym wierzchołkiem.
Wysokością nazywamy również długość tego odcinka.



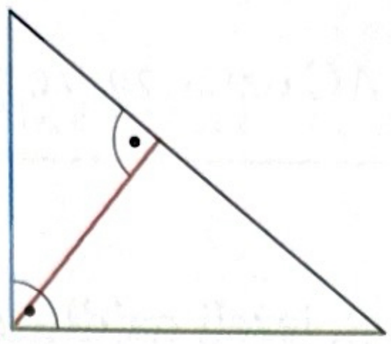
Każdy trójkąt ma trzy wysokości.

trójkąt ostrokątny



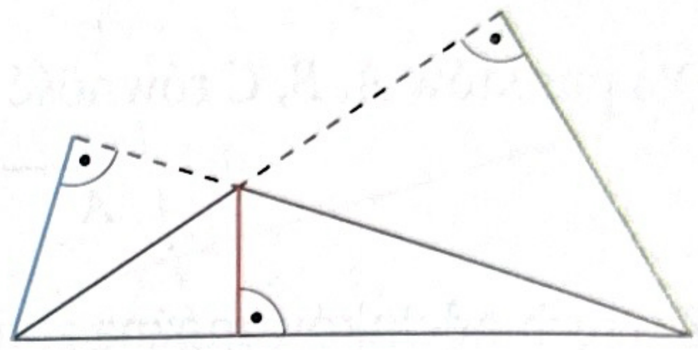
Wszystkie wysokości leżą wewnątrz trójkąta.

trójkąt prostokątny



Przyprostokątne są wysokościami trójkąta.

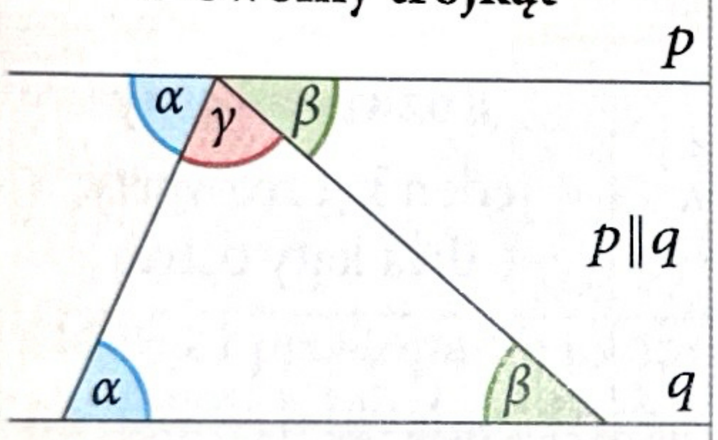
trójkąt rozwartokątny



Dwie wysokości leżą poza trójkątem.

Suma miar kątów trójkąta. Kąty wewnętrzne trójkąta

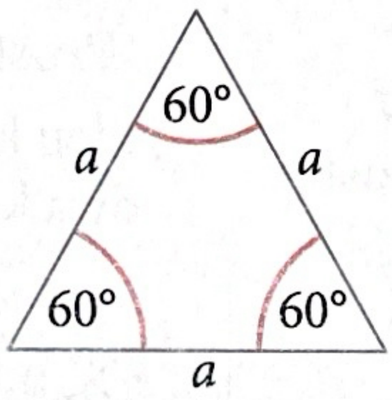
Dowolny trójkąt



Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest równa 180°.

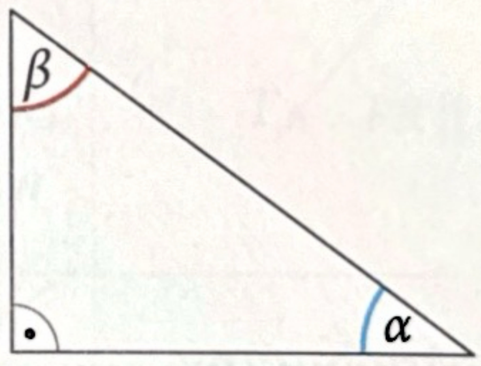
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Trójkąt równoboczny



W trójkącie równobocznym każdy kąt wewnętrzny ma miarę 60°.

Trójkąt prostokątny

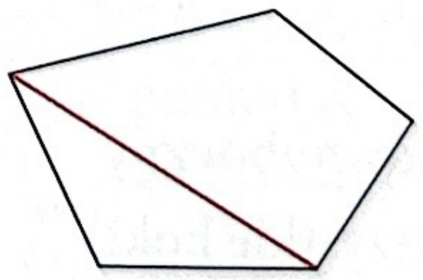


Suma miar kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa 90°.

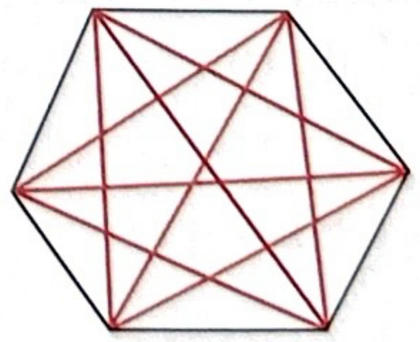
$$\alpha + \beta = 90°$$

Przekątna wielokąta

Przekątna wielokąta to odcinek, który łączy dwa wierzchołki wielokąta i nie jest bokiem tego wielokąta.



Liczbę przekątnych n-kąta możemy obliczyć ze wzoru: $p = \frac{n(n-3)}{2}$.

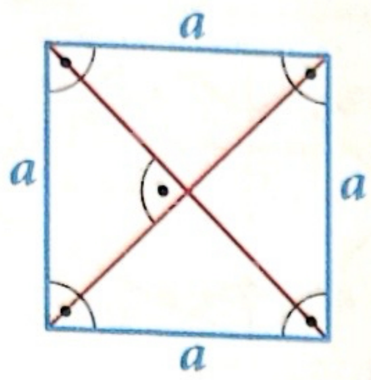


Np. liczba przekątnych sześciokąta ($n = 6$) jest równa:

$$\frac{6\cdot(6-3)}{2} = \frac{6\cdot 3}{2} = 9.$$

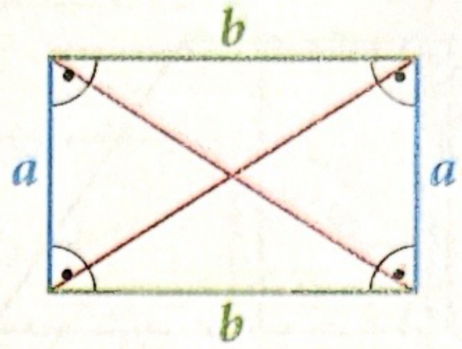
Czworokąty

Kwadrat



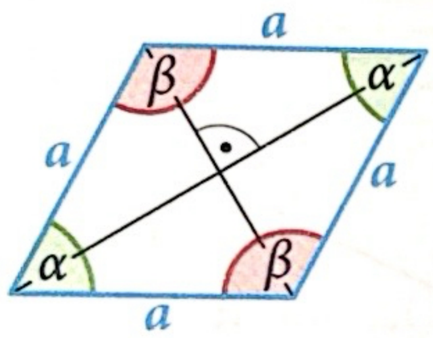
- Wszystkie boki równe.
- Dwie pary boków równoległych.
- Wszystkie kąty wewnętrzne proste.
- Przekątne równe, przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

Prostokąt



- Przeciwległe boki równe i równoległe.
- Wszystkie kąty wewnętrzne proste.
- Przekątne równe, przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

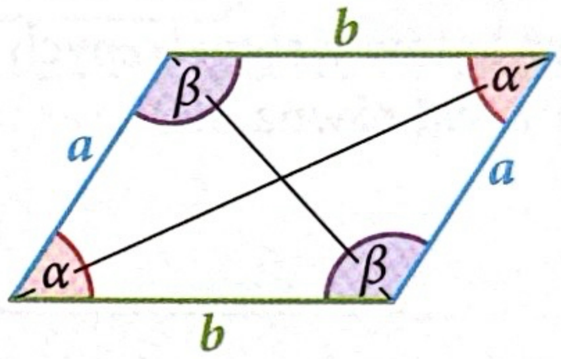
Romb



$$\alpha + \beta = 180°$$

- Wszystkie boki równe.
- Dwie pary boków równoległych.
- Suma miar kątów przy dowolnym boku równa 180°.
- Przekątne przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

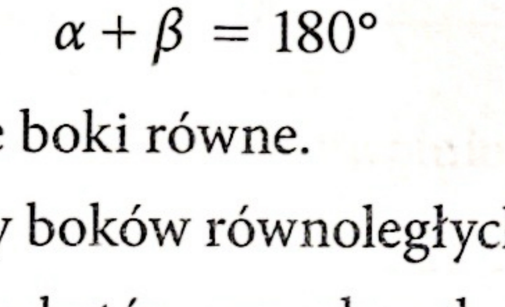
Równoległobok



$$\alpha + \beta = 180°$$

- Przeciwległe boki równe i równoległe.
- Suma miar kątów przy dowolnym boku równa 180°.
- Przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.

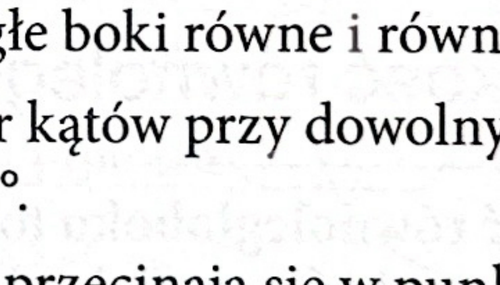
Trapez



$$\alpha + \beta = 180°$$
$$\delta + \gamma = 180°$$

- Para boków równoległych (podstawy trapezu).
- Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu równa 180°.

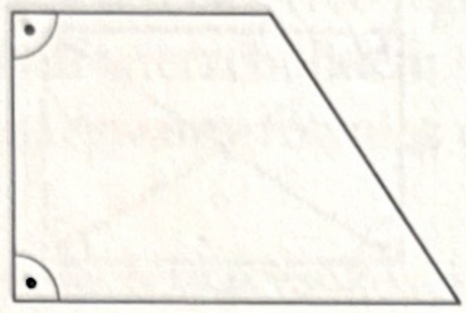
Trapez równoramienny



- Ramiona równej długości.
- Przekątne równej długości.
- Kąty leżące przy każdej z podstaw równe.

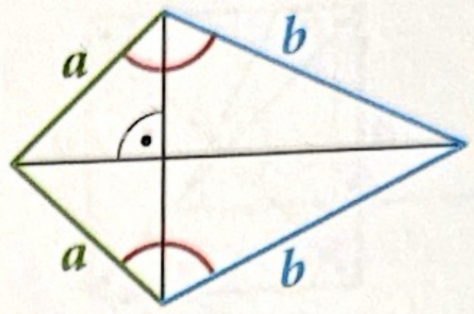
Czworokąty cd.

Trapez prostokątny



- Dwa kąty proste leżące przy jednym ramieniu.

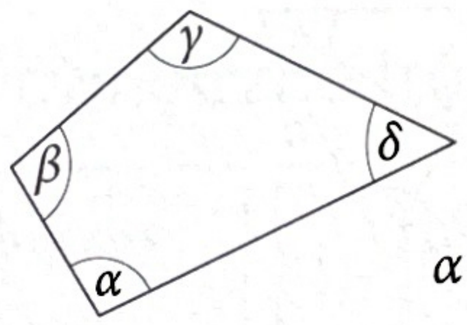
Deltoid



- Dwie pary sąsiednich boków równych.
- Dwa kąty wewnętrzne równe.
- Przekątne przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który jest środkiem jednej z nich.

Suma miar kątów czworokąta

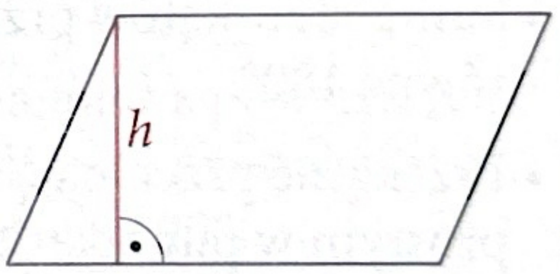
Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego czworokąta jest równa 360°.



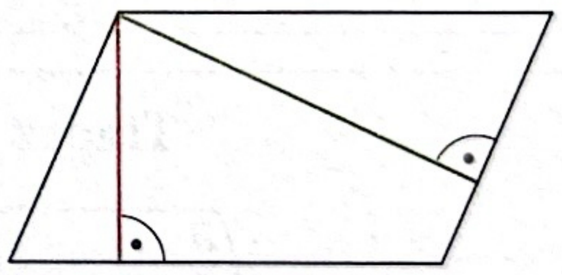
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Wysokość równoległoboku i trapezu

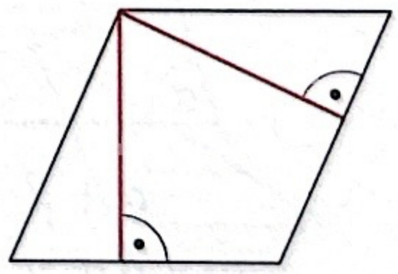
Wysokość równoległoboku to odcinek, który łączy dwa równoległe boki figury (lub ich przedłużenia) i jest do nich prostopadły.
Wysokością nazywamy również długość tego odcinka.



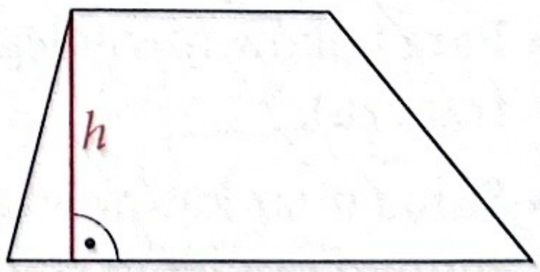
W równoległoboku, który nie jest rombem, wysokości opuszczone na sąsiednie boki są różnej długości.



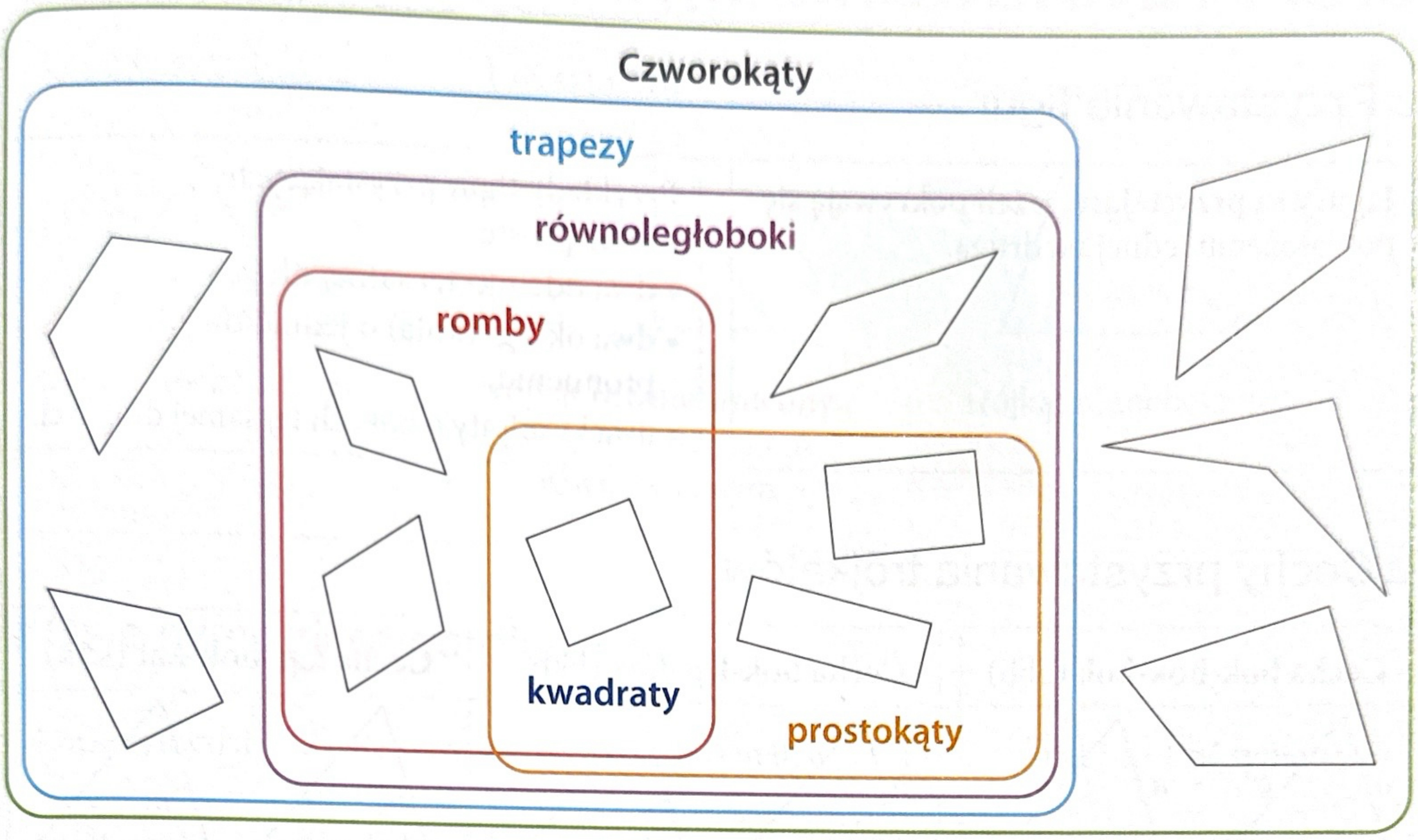
W rombie wysokości opuszczone na sąsiednie boki są równej długości.



Wysokość trapezu to odcinek, który łączy podstawy trapezu (lub ich przedłużenia) i jest do nich prostopadły.
Wysokością nazywamy również długość tego odcinka.

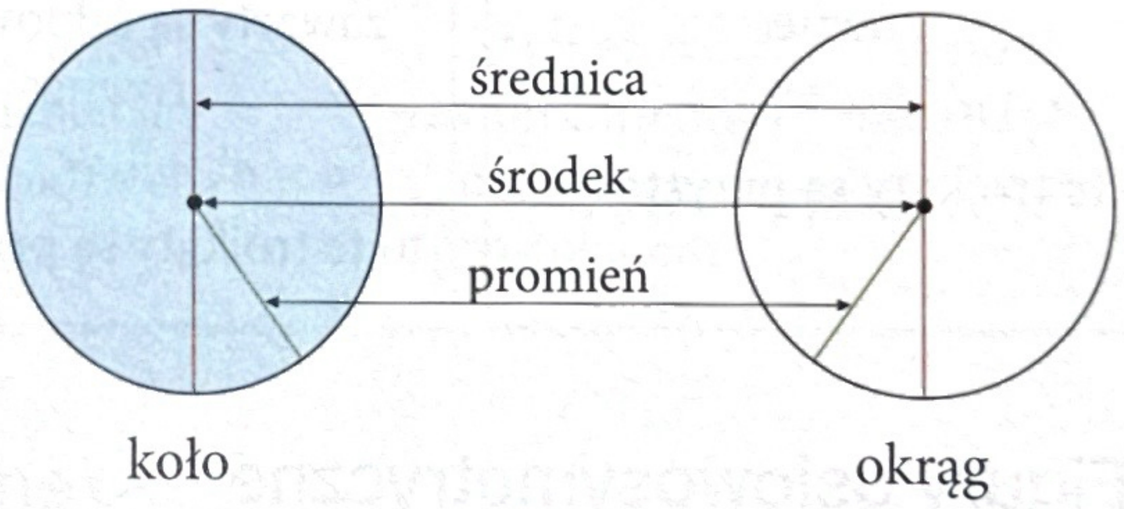


Klasyfikacja czworokątów

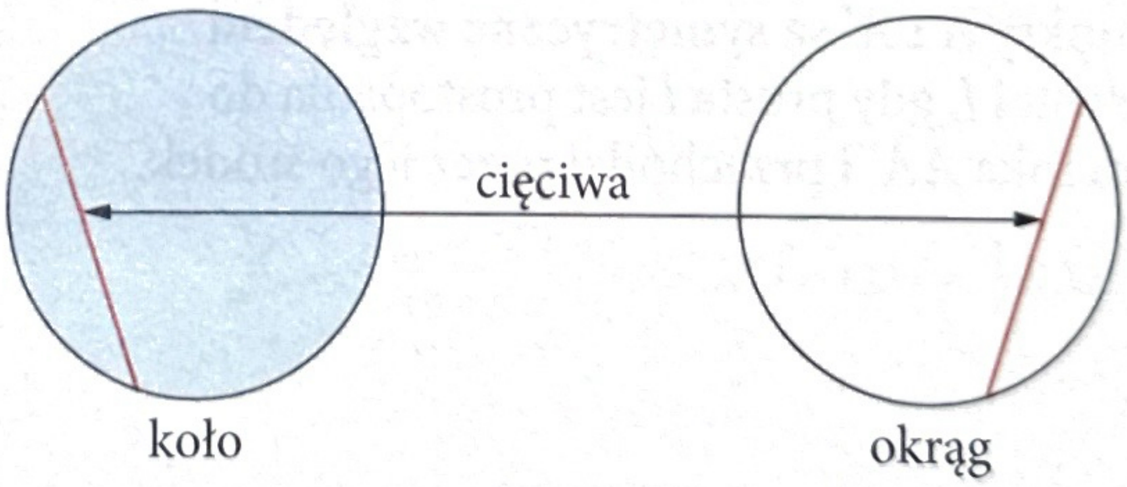


Okrąg i koło

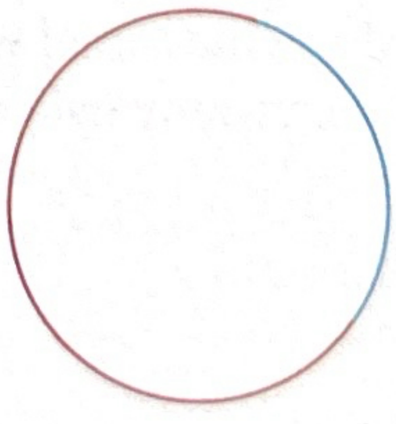
Promień okręgu (koła) to zarówno odcinek łączący środek okręgu (koła) z dowolnie wybranym punktem na okręgu, jak i długość tego odcinka.



Cięciwa okręgu (koła) to odcinek łączący dwa punkty leżące na okręgu. Najdłuższą cięciwą jest średnica.



Łuk to fragment okręgu.



5.2. Przystawanie figur. Symetrie

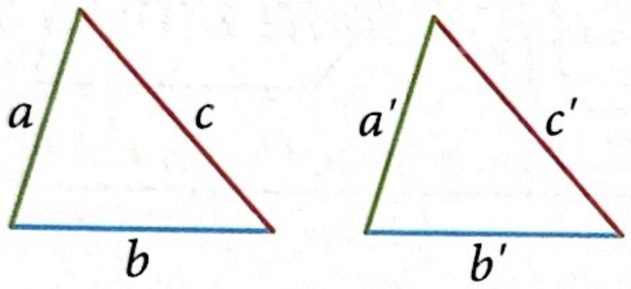
Przystawanie figur

Figury są **przystające**, jeżeli pokrywają się po nałożeniu jednej na drugą.

Przykłady figur przystających:
- dwie proste,
- dwa odcinki tej samej długości,
- dwa okręgi (koła) o jednakowym promieniu,
- dwa kwadraty o bokach tej samej długości.

Cechy przystawania trójkątów

Cecha bok-bok-bok (bbb)

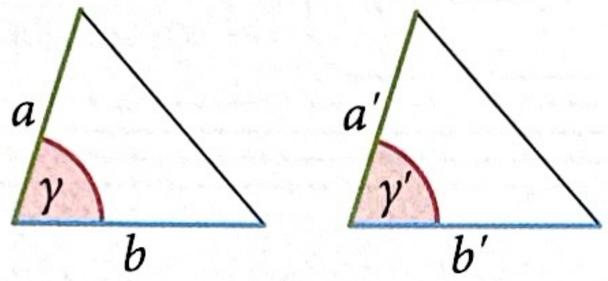


Jeśli wszystkie boki dwóch trójkątów są odpowiednio równe:

$a = a'$, $b = b'$, $c = c'$

to te trójkąty są przystające.

Cecha bok-kąt-bok (bkb)

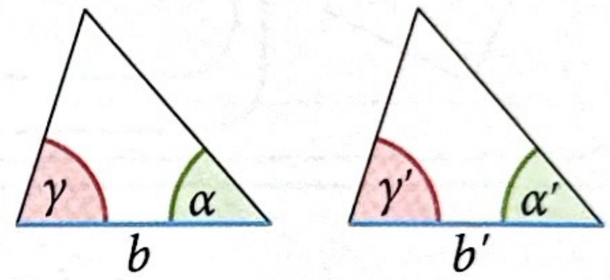


Jeśli w dwóch trójkątach dwa boki i kąt między nimi zawarty są odpowiednio równe:

$a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$

to te trójkąty są przystające.

Cecha kąt-bok-kąt (kbk)



Jeśli w dwóch trójkątach bok i dwa kąty do niego przylegające są odpowiednio równe:

$b = b'$, $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$

to te trójkąty są przystające.

Figury osiowosymetryczne

Punkty A i A' są **symetryczne względem prostej l**, gdy prosta l jest prostopadła do odcinka AA' i przechodzi przez jego środek.

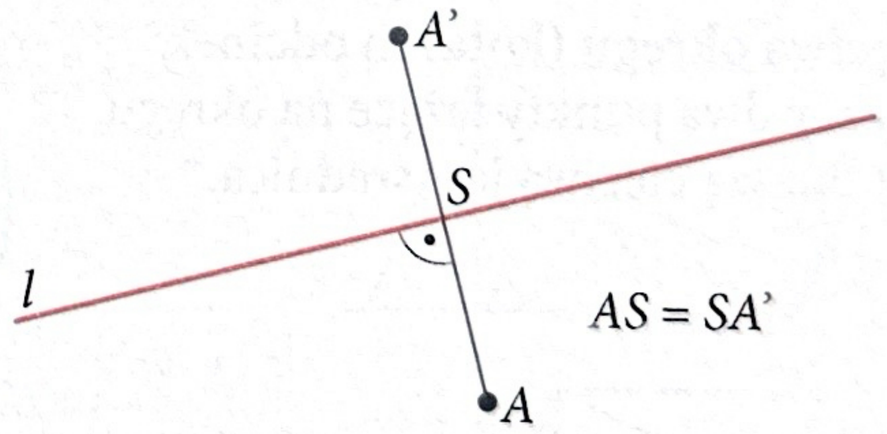
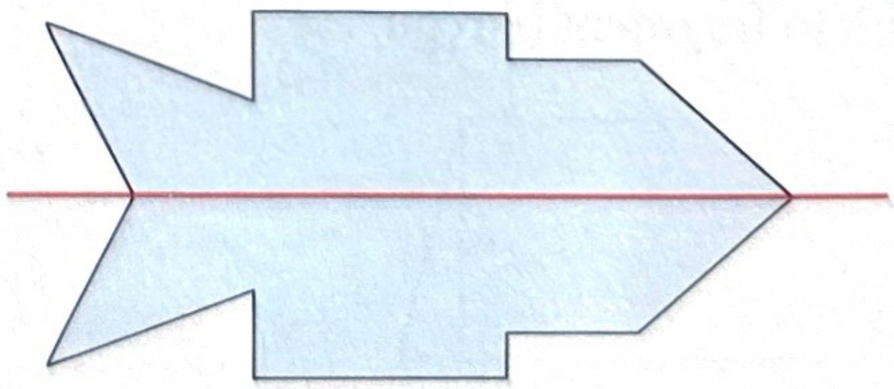


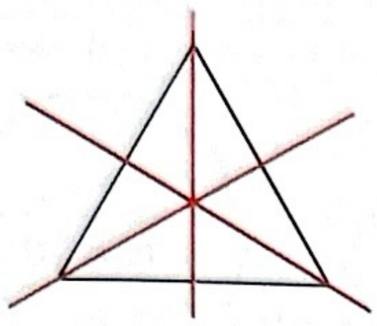
Figura osiowosymetryczna to figura, która jest symetryczna do siebie samej względem prostej. Tę prostą nazywamy **osią symetrii** figury.

Np.



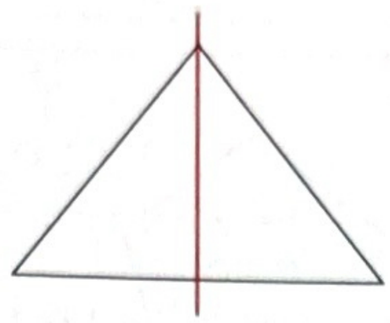
Osie symetrii trójkątów

3 osie symetrii



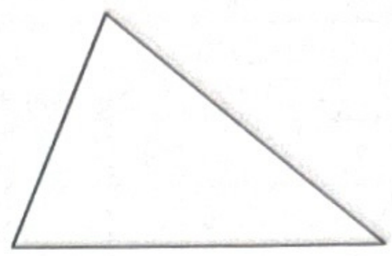
trójkąt równoboczny

1 oś symetrii



trójkąt równoramienny niebędący trójkątem równobocznym

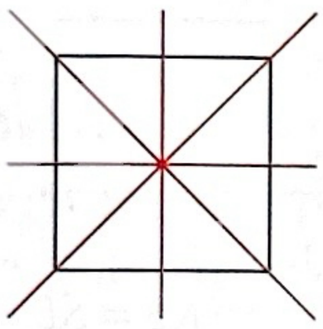
0 osi symetrii



trójkąt różnoboczny

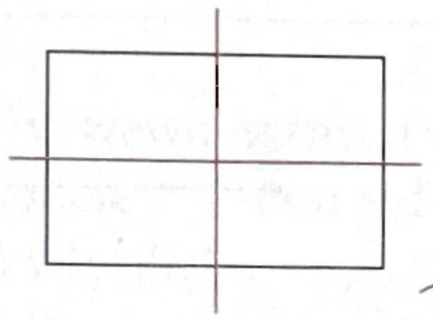
Osie symetrii czworokątów

4 osie symetrii



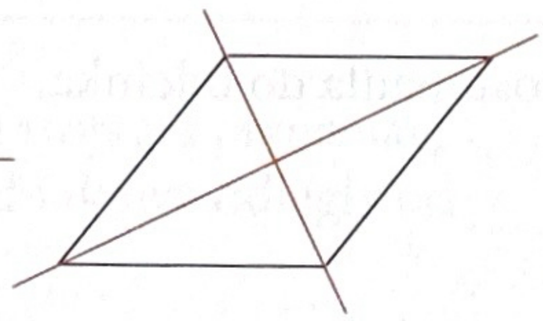
kwadrat

2 osie symetrii



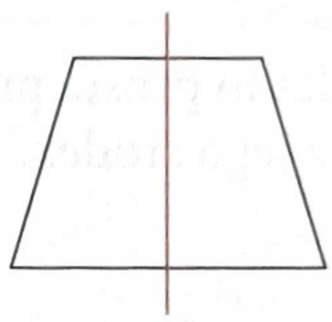
prostokąt niebędący kwadratem

2 osie symetrii



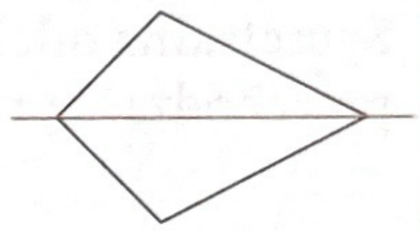
romb niebędący kwadratem

1 oś symetrii



trapez równoramienny niebędący prostokątem

1 oś symetrii



deltoid niebędący rombem

Figury środkowosymetryczne

Punkty K i M są **symetryczne względem punktu O**, gdy punkt O jest środkiem odcinka KM.

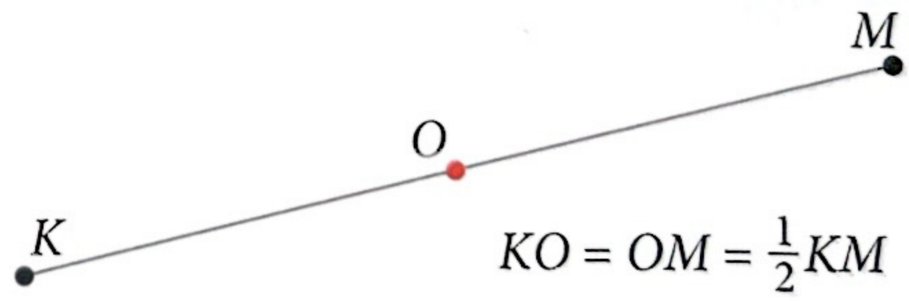
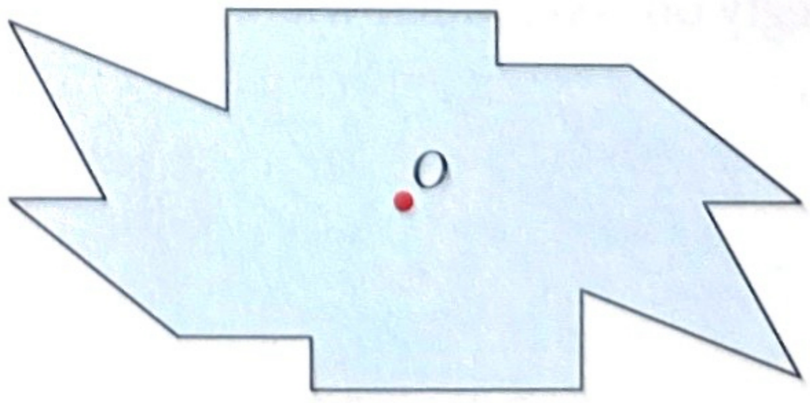


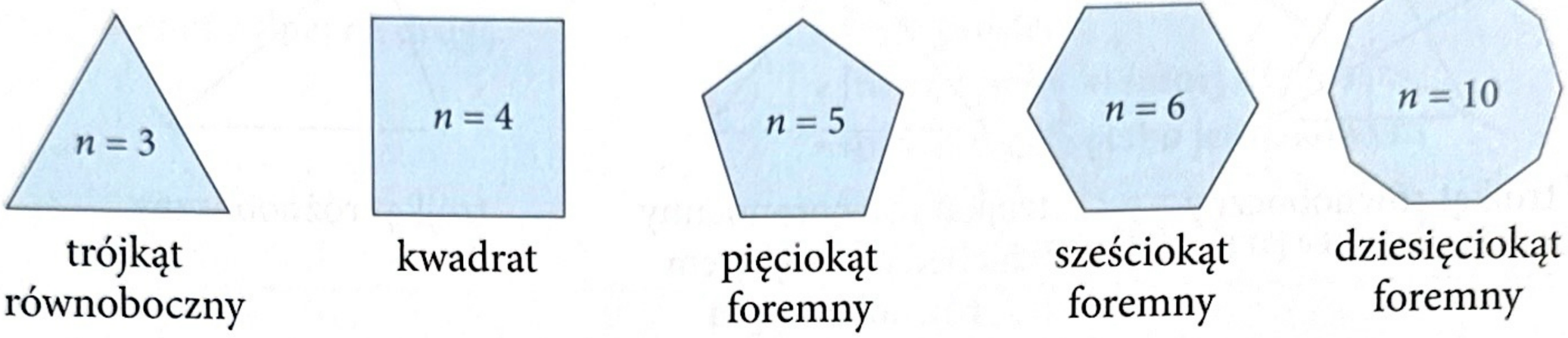
Figura środkowosymetryczna to figura, która jest symetryczna do siebie samej względem punktu. Ten punkt nazywamy **środkiem symetrii** figury.

Np.



Wielokąty foremne

Wielokąt foremny ma wszystkie boki tej samej długości i wszystkie kąty wewnętrzne o tej samej mierze.

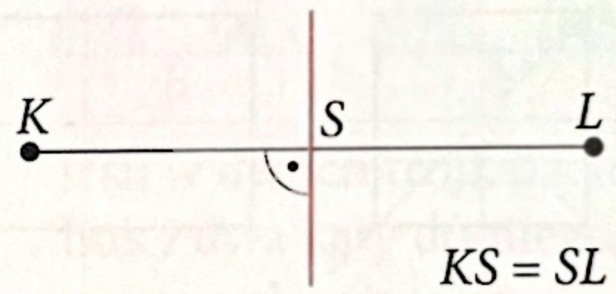


trójkąt równoboczny | kwadrat | pięciokąt foremny | sześciokąt foremny | dziesięciokąt foremny

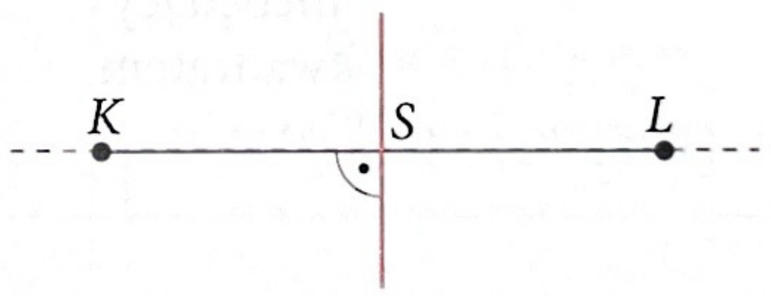
- Wielokąt foremny mający n boków (n-kąt foremny) ma n osi symetrii.
- Środek symetrii mają wielokąty foremne o parzystej liczbie wierzchołków.

Symetralna odcinka i jej własności

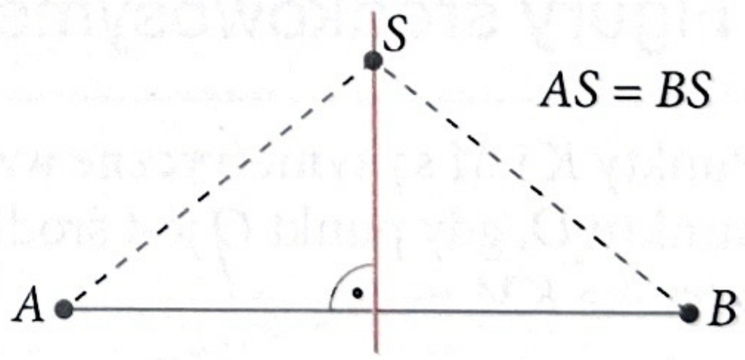
Symetralna odcinka to prosta prostopadła do odcinka, przechodząca przez jego środek.



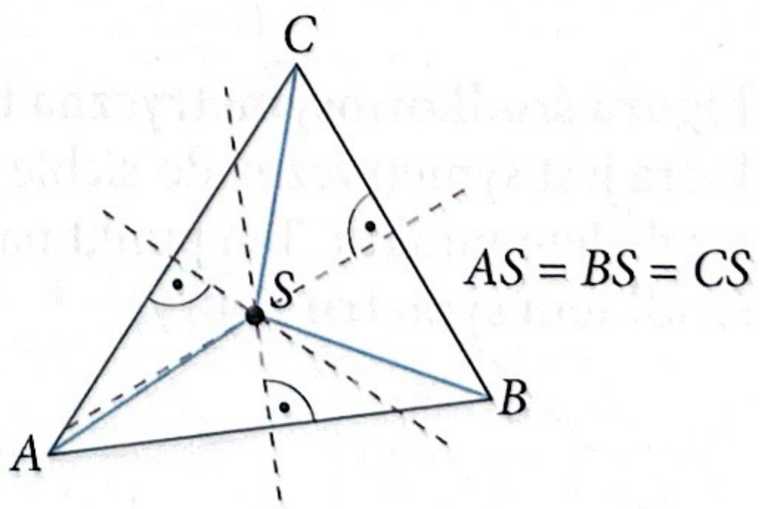
Symetralna odcinka jest jedną z dwóch osi symetrii tego odcinka. Drugą osią symetrii odcinka jest prosta zawierająca ten odcinek.



Każdy punkt symetralnej odcinka jest jednakowo odległy od obu końców odcinka.
Jeśli punkt jest jednakowo odległy od obu końców odcinka, to leży na jego symetralnej.

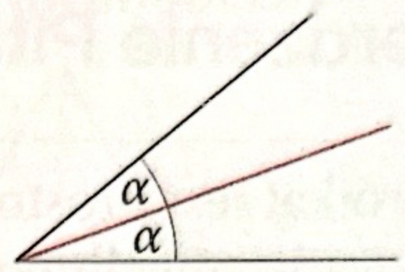


Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie – jest on jednakowo odległy od wszystkich wierzchołków trójkąta.

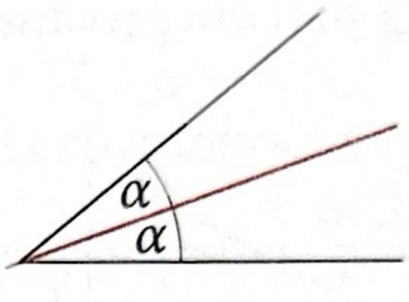


Dwusieczna kąta i jej własności

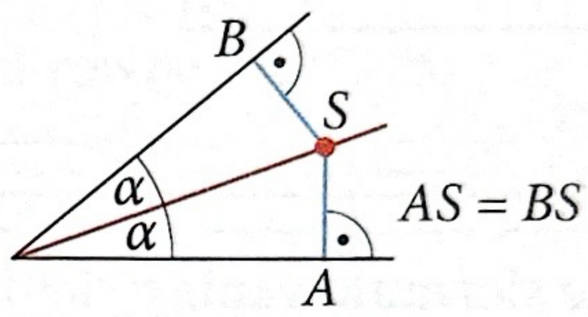
Dwusieczna kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta, dzieląca kąt na dwa równe kąty.



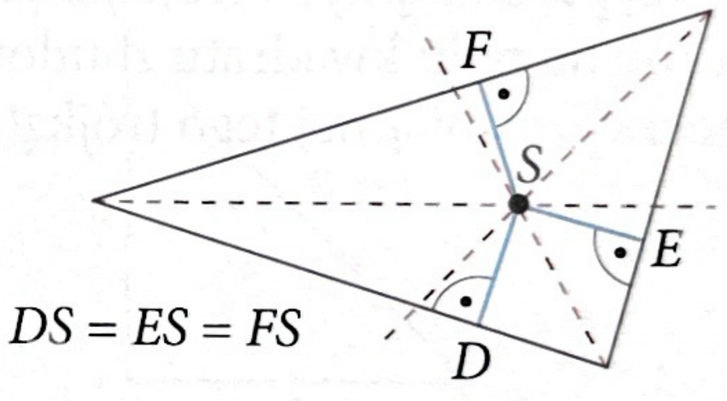
Dwusieczna kąta zawiera się w osi symetrii tego kąta.



Każdy punkt dwusiecznej kąta jest jednakowo odległy od obu ramion kąta.
Jeśli punkt we wnętrzu kąta wypukłego jest jednakowo odległy od obu ramion tego kąta, to leży na jego dwusiecznej.



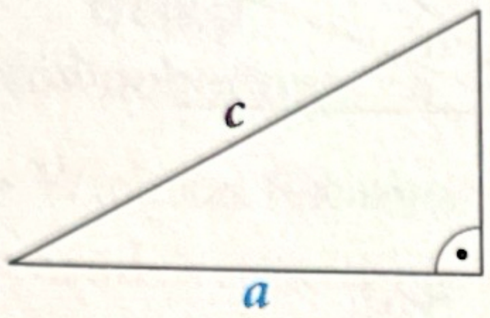
Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie – jest on jednakowo odległy od wszystkich boków trójkąta.



5.3. Twierdzenie Pitagorasa

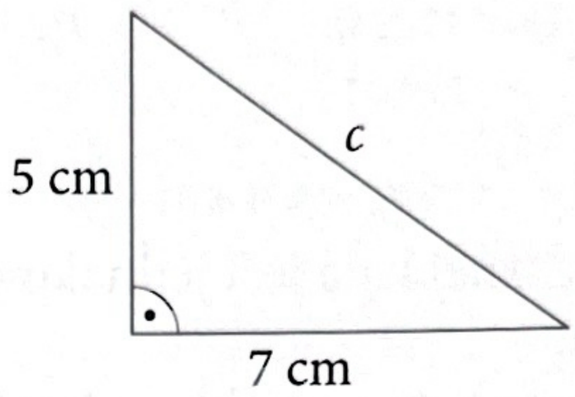
Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości obu jego przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



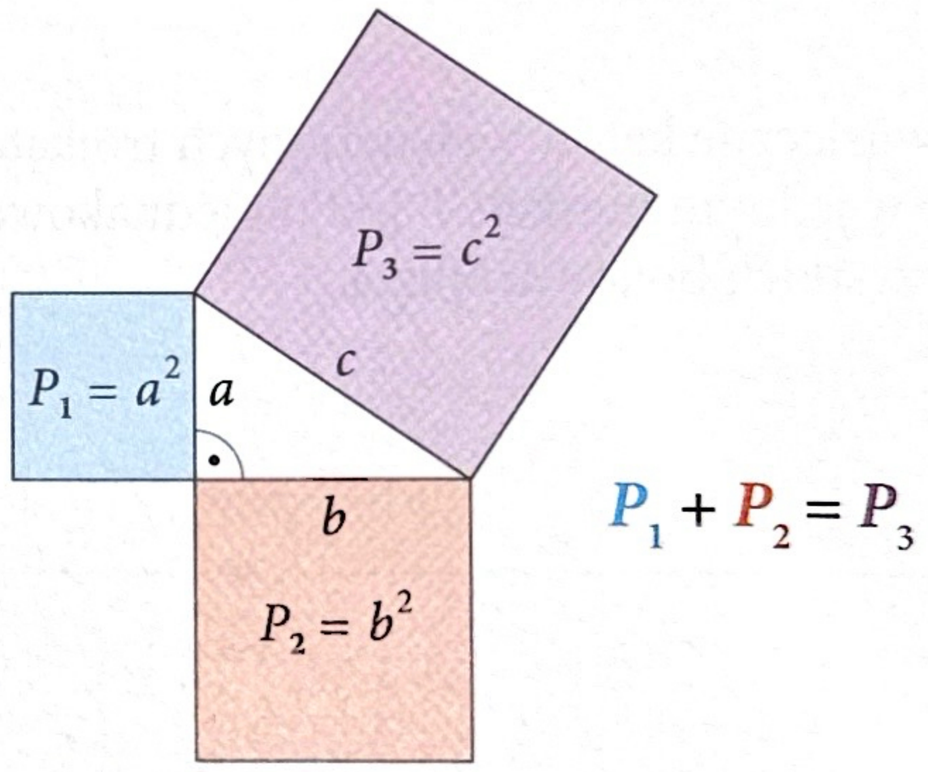
$b \longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Np.
W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 5 cm i 7 cm. Długość przeciwprostokątnej obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:



$c^2 = 5^2 + 7^2$
$c^2 = 25 + 49$
$c^2 = 74$
$c = \sqrt{74}$ [cm]

Inne sformułowanie twierdzenia Pitagorasa:
Suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej tego trójkąta.



$P_1 + P_2 = P_3$

Trójki pitagorejskie

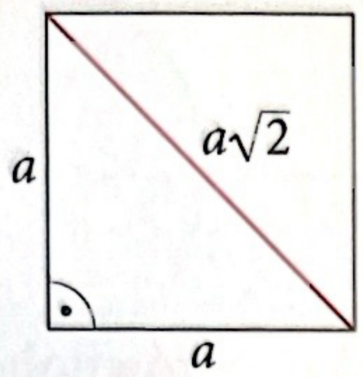
Przykładowe długości boków trójkąta prostokątnego wyrażone liczbami naturalnymi.

a	3	5	6	7	8	9	10
b	4	12	8	24	15	12	24
c	5	13	10	25	17	15	26

Kolejne wielokrotności wymienionych trójek też są długościami boków trójkąta prostokątnego, np. $2 \cdot \mathbf{8}$, $2 \cdot \mathbf{15}$ i $2 \cdot \mathbf{17}$.

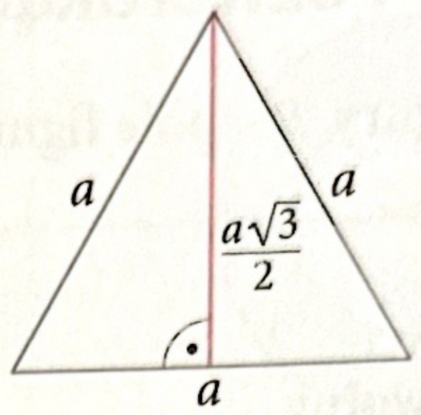
Zastosowania twierdzenia Pitagorasa

Kwadrat



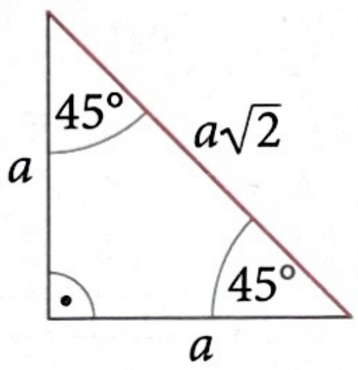
Przekątna kwadratu o boku długości a ma długość $a\sqrt{2}$.

Trójkąt równoboczny



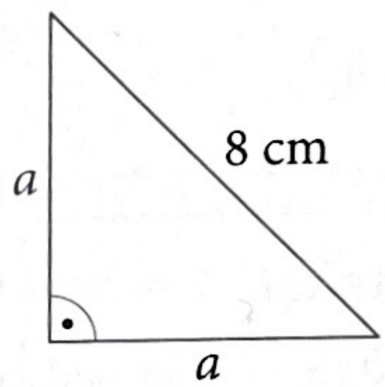
- Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Pole trójkąta równobocznego o boku długości a jest równe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Połowa kwadratu



Trójkąt o kątach 45°, 45°, 90° ma boki długości a, a, $a\sqrt{2}$.

Np.
W trójkącie prostokątnym równoramiennym przeciwprostokątna ma długość 8 cm.

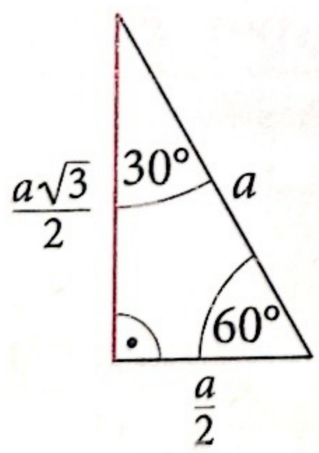


Obliczamy długości przyprostokątnych:

$a\sqrt{2} = 8$

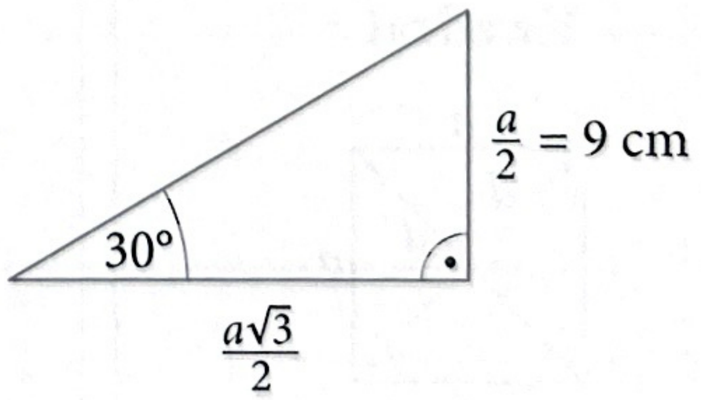
$a = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ [cm]

Połowa trójkąta równobocznego



Trójkąt o kątach 30°, 60°, 90° ma boki długości a, $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Np.
W trójkącie prostokątnym, w którym jeden z kątów ostrych ma 30°, krótsza przyprostokątna ma długość 9 cm.



Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$\frac{a}{2} = 9$, czyli $a = 18$ [cm]

Obliczamy długość drugiej przyprostokątnej:

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ [cm]

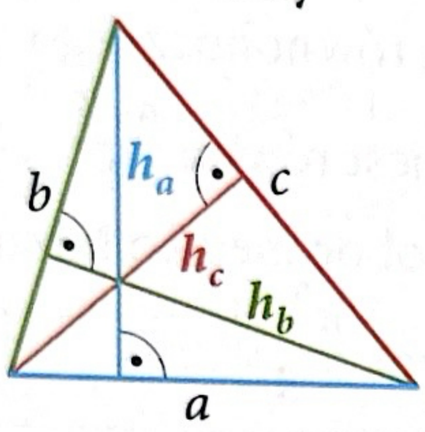
5.4. Pola i obwody figur

Trójkąty i czworokąty

L – obwód figury, P – pole figury

Trójkąt

dowolny



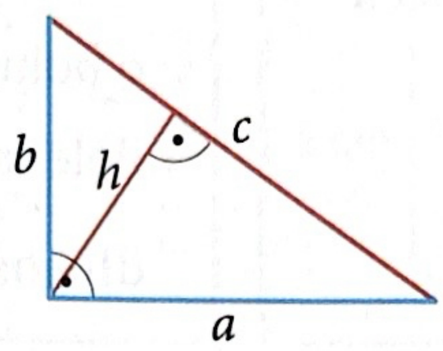
$L = a + b + c$

$P = \frac{1}{2}ah_a$

$P = \frac{1}{2}bh_b$

$P = \frac{1}{2}ch_c$

prostokątny

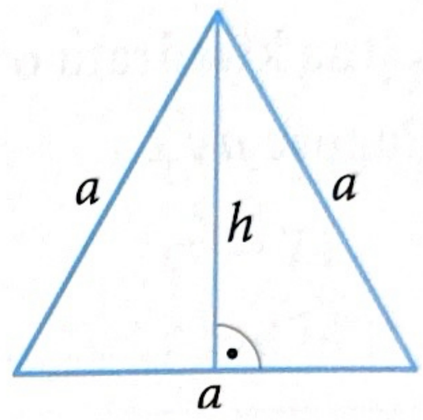


$L = a + b + c$

$P = \frac{1}{2}ab$

$P = \frac{1}{2}ch$

równoboczny

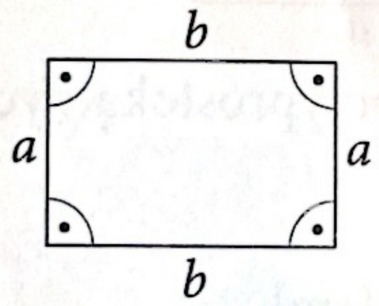


$L = 3a$

$P = \frac{1}{2}ah$

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

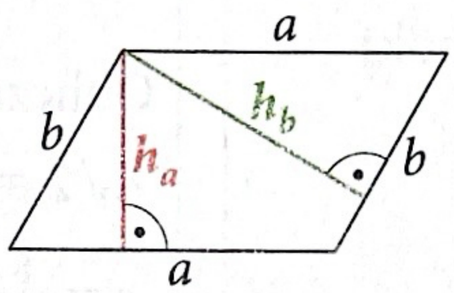
Prostokąt



$L = 2a + 2b$

$P = ab$

Równoległobok

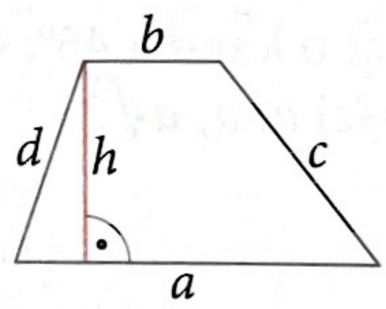


$L = 2a + 2b$

$P = ah_a$

$P = bh_b$

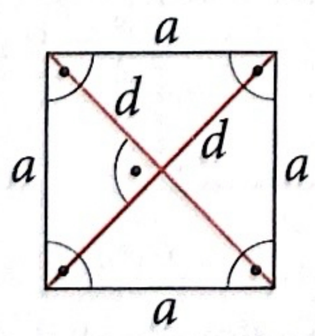
Trapez



$L = a + b + c + d$

$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Kwadrat

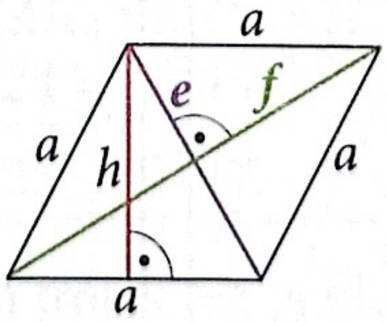


$L = 4a$

$P = a^2$

$P = \frac{d^2}{2}$

Romb

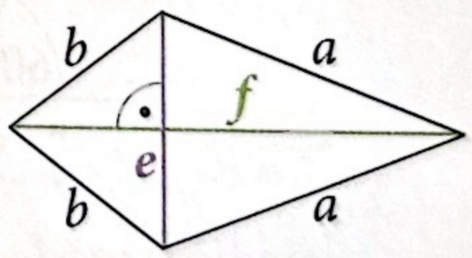


$L = 4a$

$P = ah$

$P = \frac{ef}{2}$

Deltoid

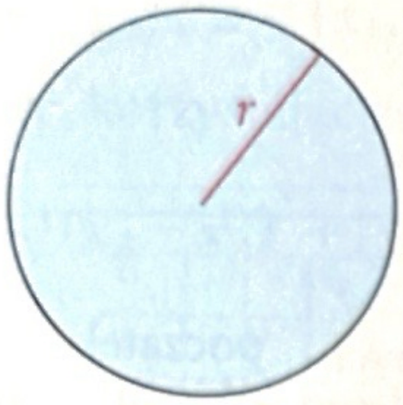


$L = 2a + 2b$

$P = \frac{ef}{2}$

Koła i okręgi

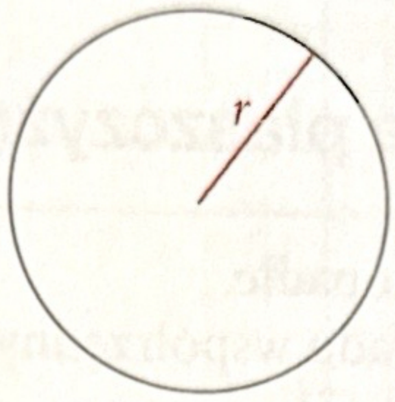
Koło



P – pole koła

$P = \pi r^2$

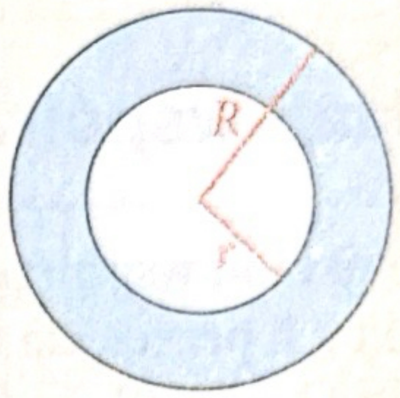
Okrąg



l – długość okręgu

$l = 2\pi r$

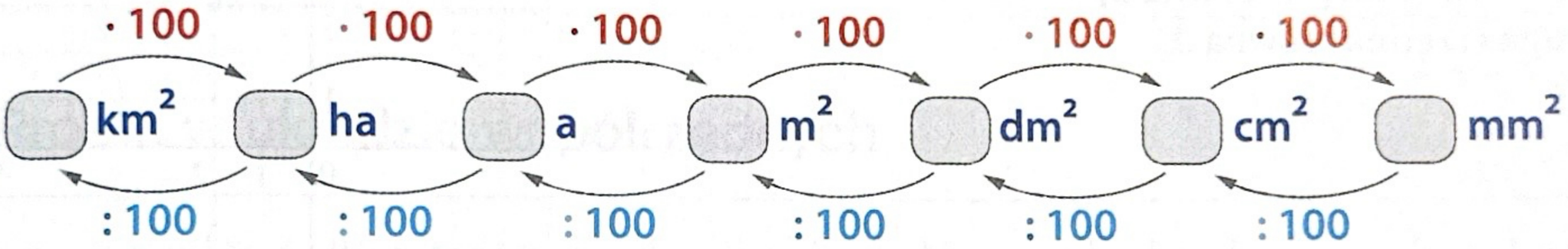
Pierścień kołowy



P – pole pierścienia

$P = \pi(R^2 - r^2)$

Zamiana jednostek pola



$1\ km^2 = 100\ ha$

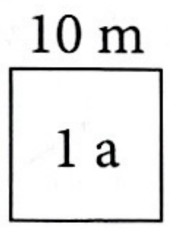
$1\ ha = 100\ a$

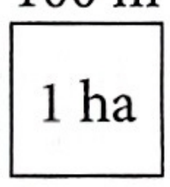
$1\ a = 100\ m^2$

$1\ m^2 = 100\ dm^2$

$1\ dm^2 = 100\ cm^2$

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$





$1\ ha = 10\ 000\ m^2$

$1\ mm^2 = 0{,}01\ cm^2$

$1\ cm^2 = 0{,}01\ dm^2$

$1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$

$1\ m^2 = 0{,}01\ a$

$1\ a = 0{,}01\ ha$

$1\ ha = 0{,}01\ km^2$

Np. $7\ ha = 7 \cdot 100\ a = 700\ a$

$2{,}3\ m^2 = 2{,}3 \cdot 100\ dm^2 = 230\ dm^2$

$0{,}48\ dm^2 = 0{,}48 \cdot 100\ cm^2 = 48\ cm^2$

$5{,}24\ cm^2 = 5{,}24 \cdot 100\ mm^2 = 524\ mm^2$

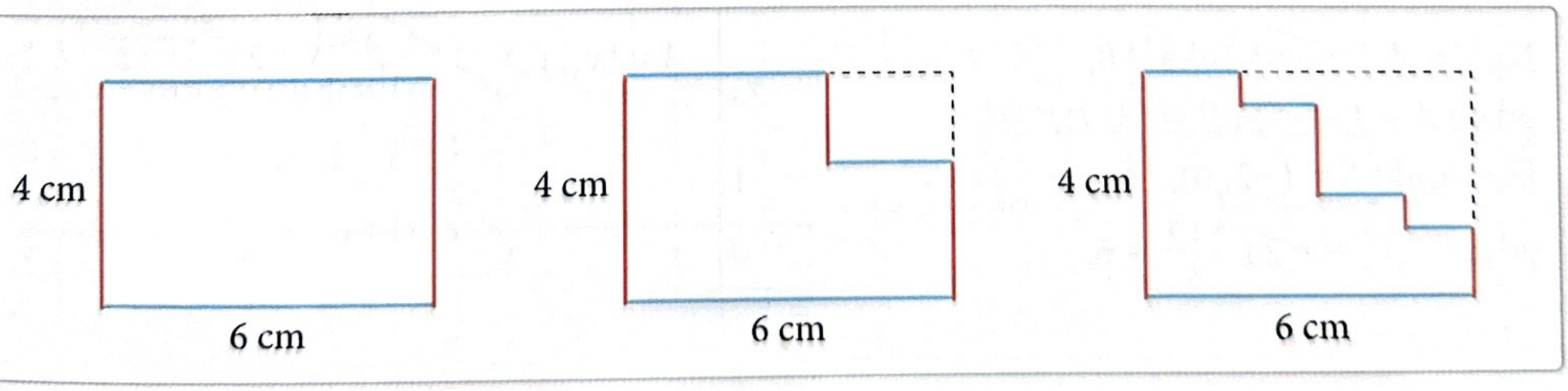
$120\ mm^2 = 120 \cdot 0{,}01\ cm^2 = 1{,}2\ cm^2$

$73\ cm^2 = 73 \cdot 0{,}01\ dm^2 = 0{,}73\ dm^2$

$2850\ m^2 = 2850 \cdot 0{,}01\ a = 28{,}5\ a$

$80\ ha = 80 \cdot 0{,}01\ km^2 = 0{,}8\ km^2$

Figury o jednakowych obwodach



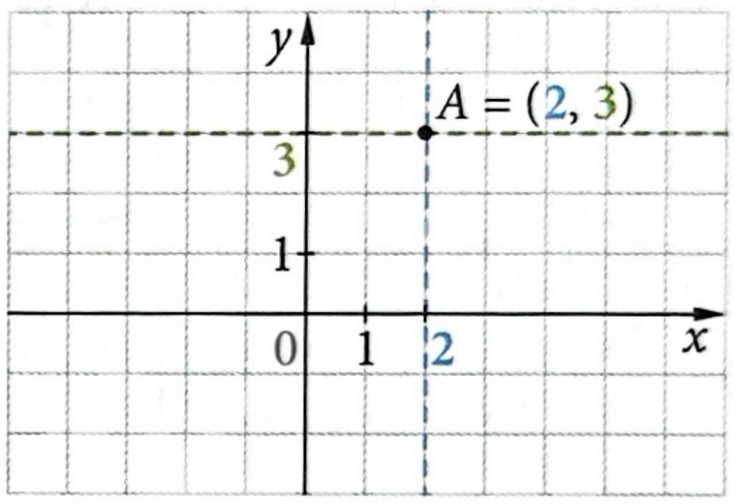
5.5. Układ współrzędnych na płaszczyźnie

Układ współrzędnych na płaszczyźnie

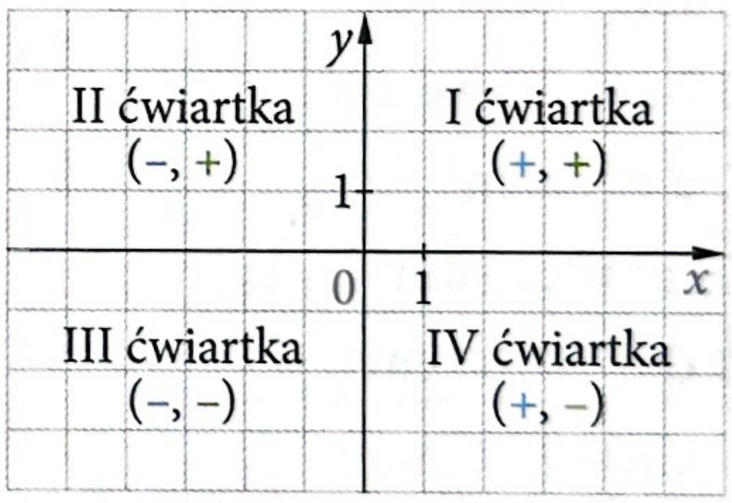
Osie układu współrzędnych są prostopadłe.
Punkt ich przecięcia to początek układu współrzędnych: punkt $O = (0, 0)$.



Współrzędne punktu A:
pierwsza (odcięta) równa 2,
druga (rzędna) równa 3.



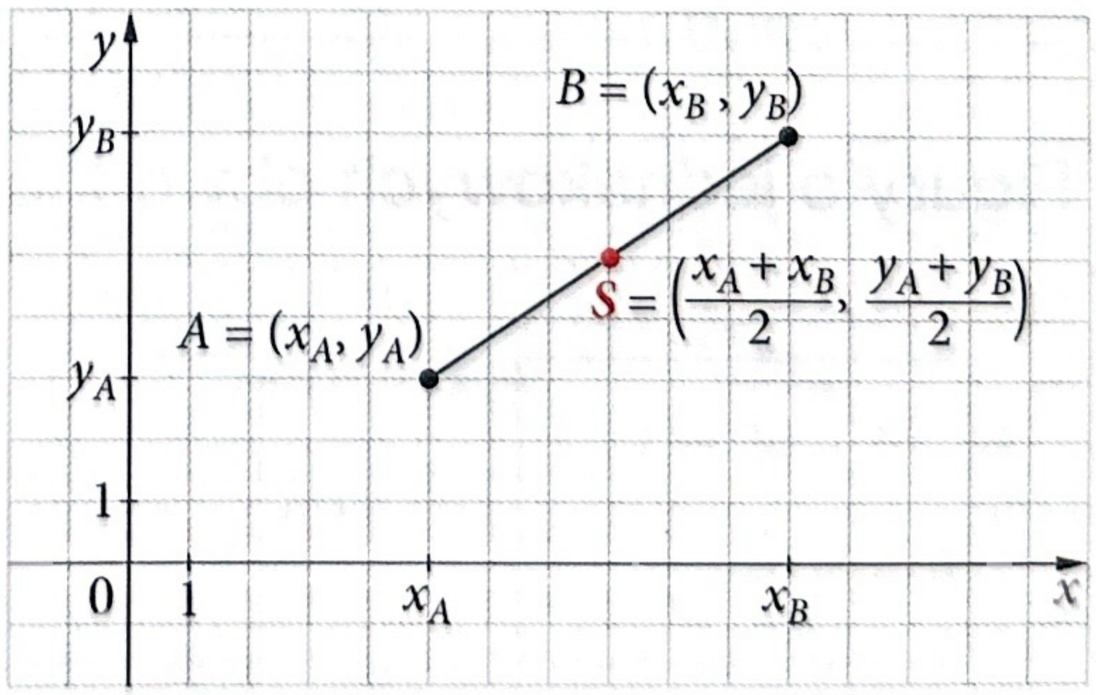
Osie układu współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki.



Odcinek w układzie współrzędnych

Środek odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ to punkt $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

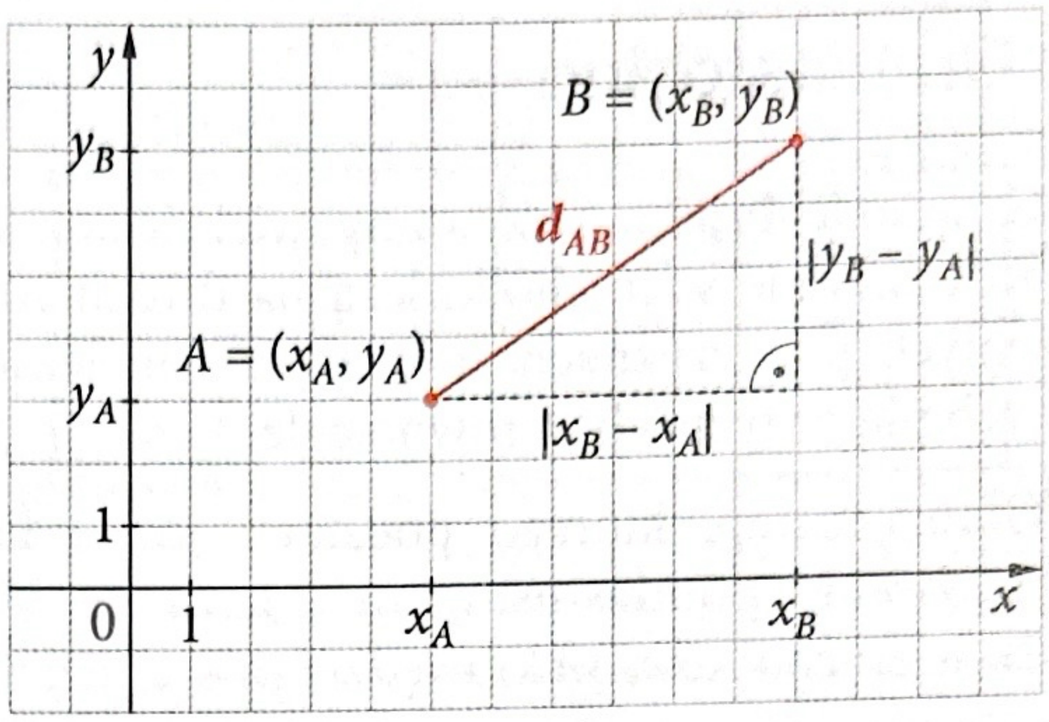
Np. środkiem odcinka AB, gdzie $A = (-7, 5)$ i $B = (3, 7)$, jest punkt $S = (-2, 6)$, gdyż $\frac{-7+3}{2} = -2$ i $\frac{5+7}{2} = 6$.



Odległość między punktami w układzie współrzędnych

Odległość d_{AB} między punktami $A=(x_A, y_A)$ i $B=(x_B, y_B)$ można obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$d_{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$



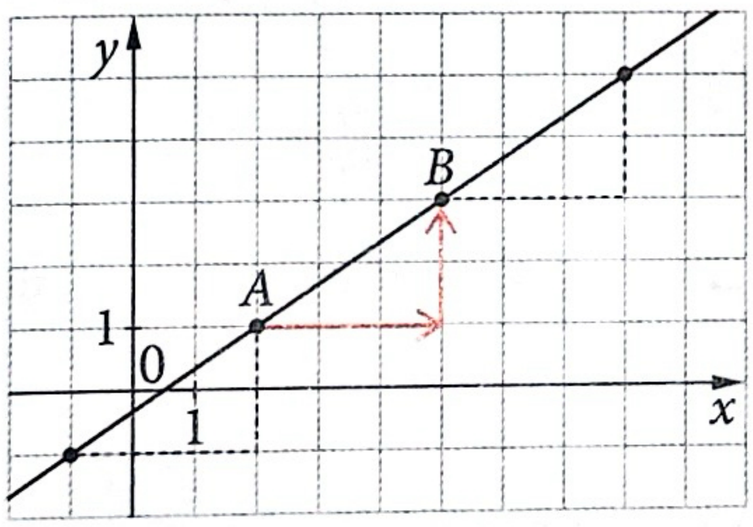
Np.
Odległość między punktami $A=(11,-2)$ i $B=(-1,3)$ jest równa:

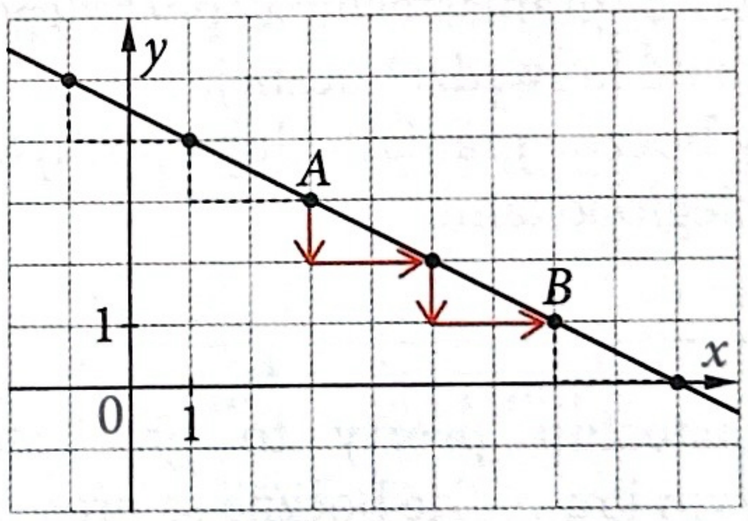
$$d_{AB}=\sqrt{(-1-11)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=\sqrt{169}=13.$$

Uwaga. Nie musisz pamiętać wzoru. Wystarczy, że wykonasz odpowiedni rysunek w układzie współrzędnych i zastosujesz twierdzenie Pitagorasa.

Prosta w układzie współrzędnych

Dane są punkty A, B o współrzędnych całkowitych. Na rysunkach pokazano, jak znaleźć punkty o współrzędnych całkowitych, należące do prostej AB.





Odcinki równoległe i prostopadłe w układzie współrzędnych

Dane są cztery odcinki, których końce leżą w punktach o współrzędnych całkowitych.

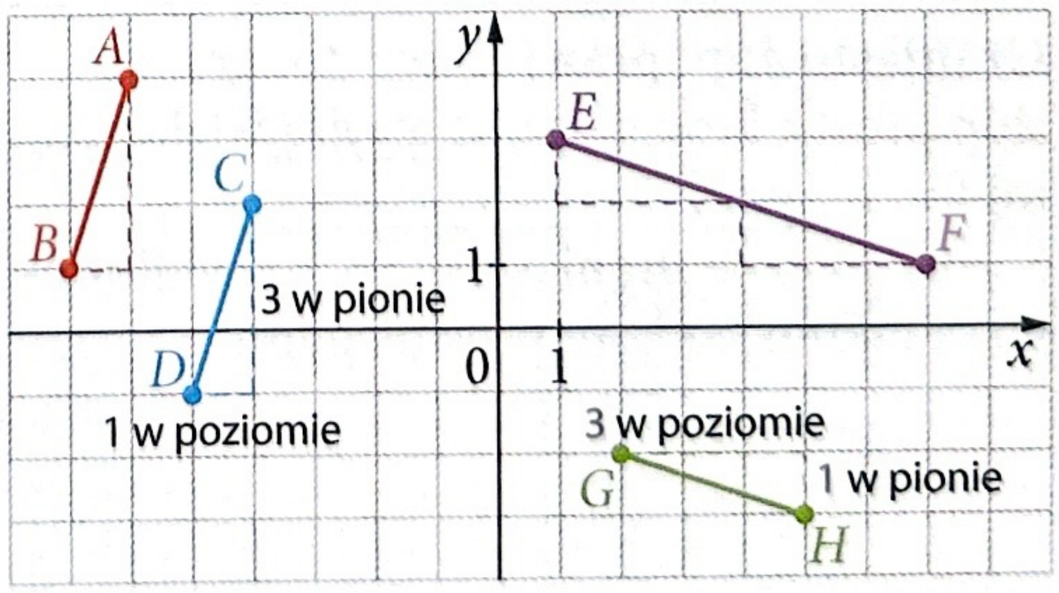
Odcinkami równoległymi są:

$AB \parallel CD$ i $EF \parallel GH$

Odcinkami prostopadłymi są:

$AB \perp GH$ i $AB \perp EF$

$CD \perp GH$ i $CD \perp EF$



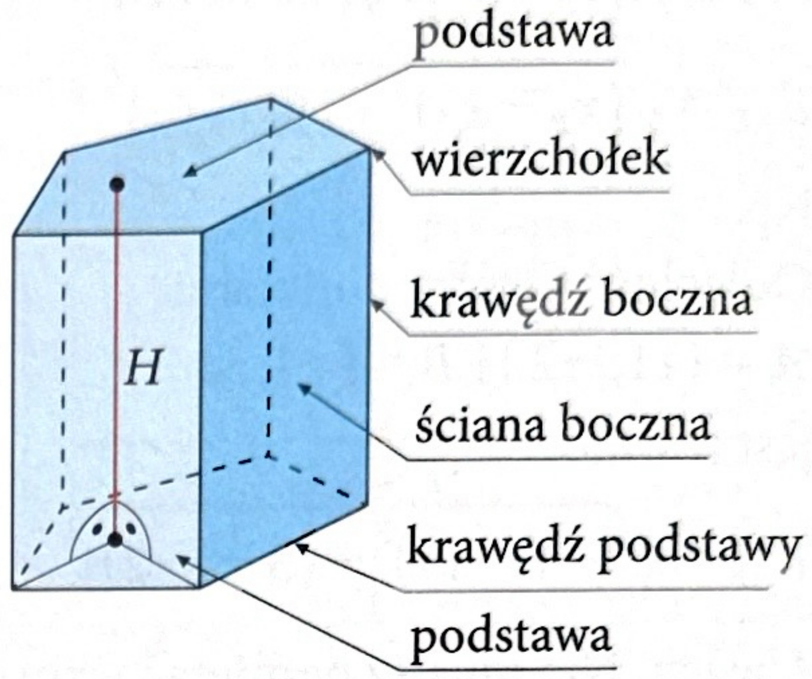
6.1. Graniastosłupy

Graniastosłup

Graniastosłupem nazywamy wielościan, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwóch równoległych płaszczyznach, a krawędzie nieleżące na tych płaszczyznach są równoległe.

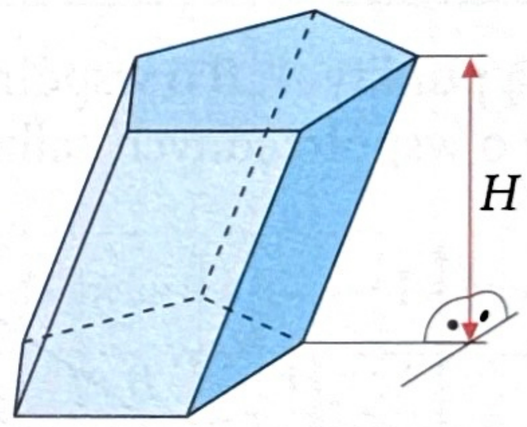
Graniastosłup, którego podstawa jest n-kątem, nazywamy **graniastosłupem n-kątnym**. Ma on $2n$ wierzchołków, $3n$ krawędzi i $(n + 2)$ ścian.

Wysokość H graniastosłupa to odcinek, który łączy płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i jest do nich prostopadły. To również długość takiego odcinka.



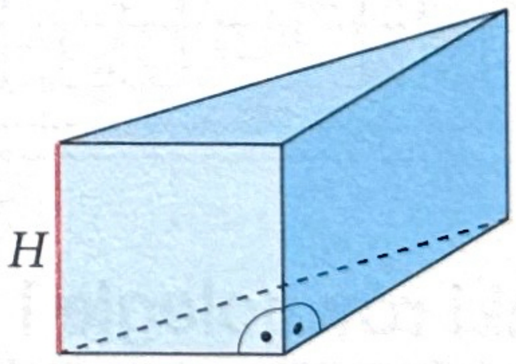
Podział graniastosłupów

Graniastosłup pochyły to graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw.
Wysokość graniastosłupa pochyłego jest krótsza od krawędzi bocznej.
Ściany boczne graniastosłupa pochyłego są równoległobokami.



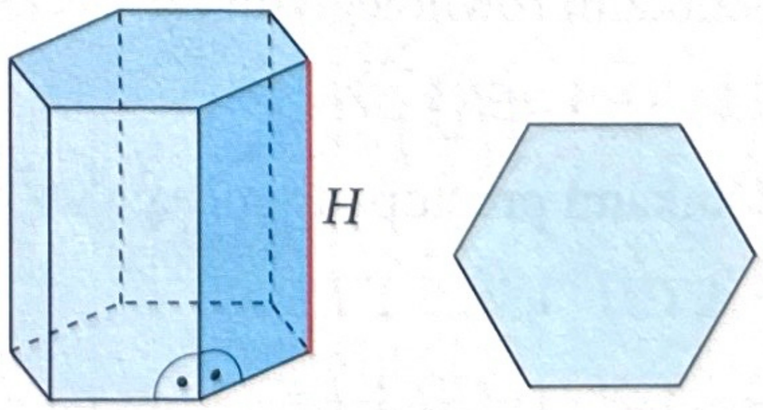
graniastosłup pochyły pięciokątny

Graniastosłup prosty to graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw.
Wysokość graniastosłupa prostego jest równa długości krawędzi bocznej.
Ściany boczne graniastosłupa prostego są prostokątami.



graniastosłup prosty trójkątny

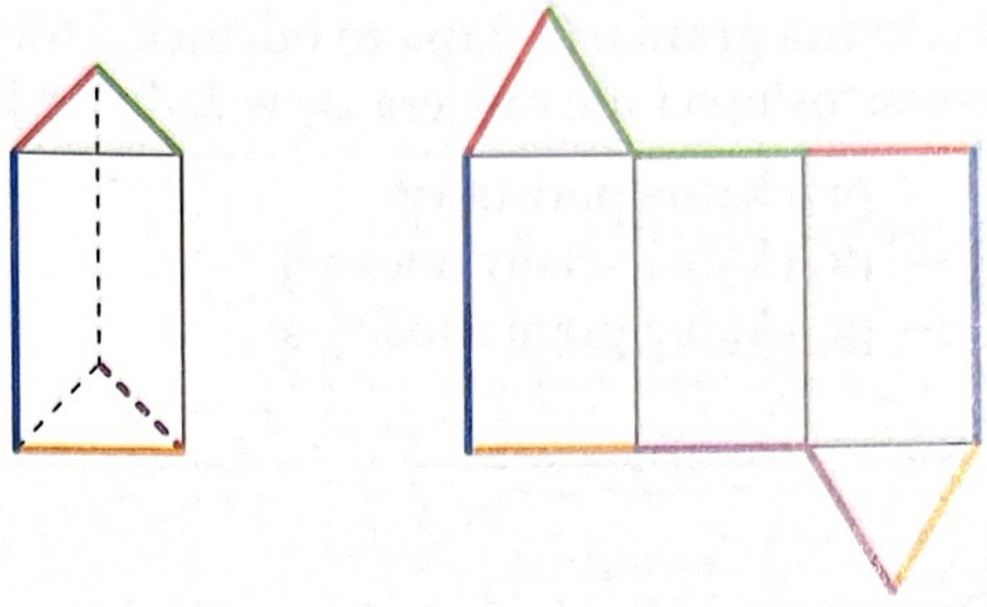
Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi.
Ściany boczne graniastosłupa prawidłowego są takimi samymi prostokątami.



graniastosłup prawidłowy sześciokątny
podstawa – sześciokąt foremny

Siatka graniastosłupa

Na siatce graniastosłupa takimi samymi kolorami zaznaczono te odcinki, które łączą się przy składaniu modelu. Ten sam kolor mają odpowiadające im krawędzie w graniastosłupie.



Pole powierzchni i objętość graniastosłupa

Pole powierzchni bocznej P_b graniastosłupa to suma pól wszystkich jego ścian bocznych.

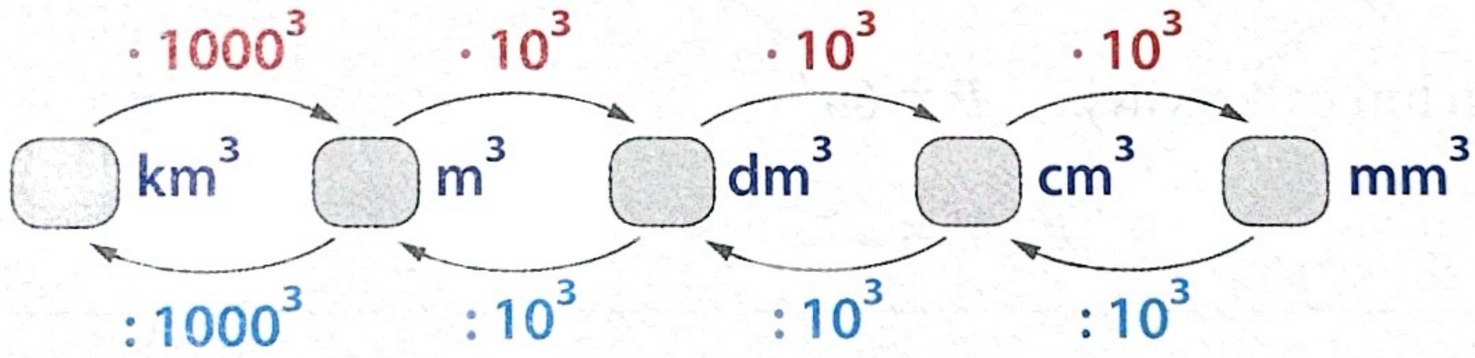
Pole powierzchni całkowitej P_c graniastosłupa to suma pól wszystkich jego ścian, czyli podstaw (P_p) i ścian bocznych.

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

Objętość V graniastosłupa o wysokości H wyraża się wzorem:

$$V = P_p \cdot H$$

Zamiana jednostek objętości



$1\ m^3 = 1000\ dm^3$

$1\ dm^3 = 1000\ cm^3$

$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$

$1\ mm^3 = 0{,}001\ cm^3$

$1\ cm^3 = 0{,}001\ dm^3$

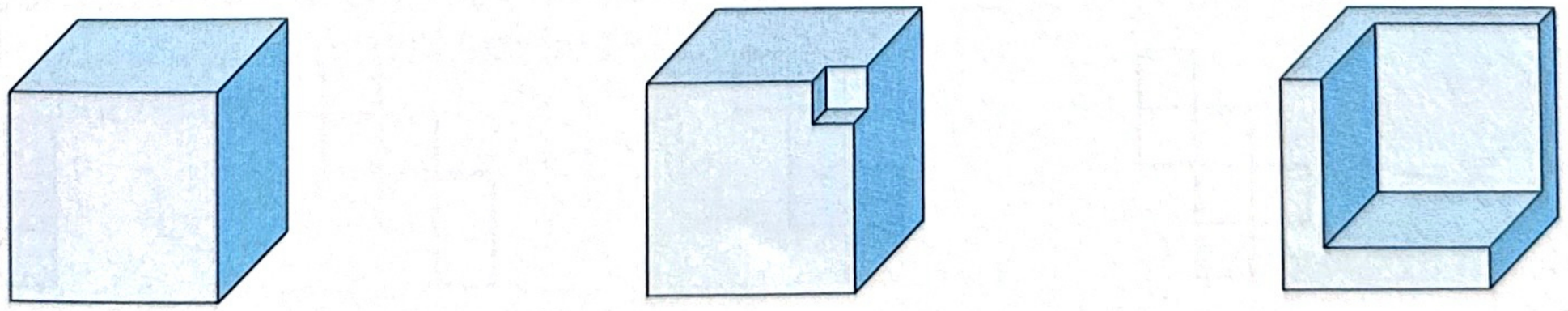
$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3$

1 litr = 1 dm^3

1 mililitr = 1 cm^3

1 litr = 1000 ml

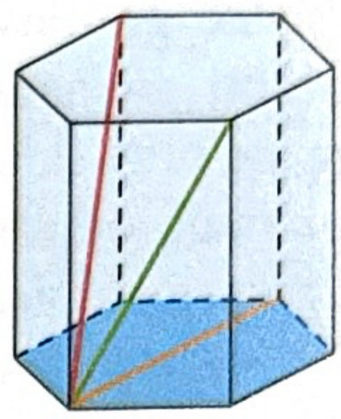
Bryły o jednakowych polach powierzchni całkowitej



Odcinki w graniastosłupach

Przekątna graniastosłupa to odcinek, który łączy dwa wierzchołki graniastosłupa i nie zawiera się w żadnej z jego ścian.

— przekątna podstawy
— przekątna ściany bocznej
— przekątna graniastosłupa



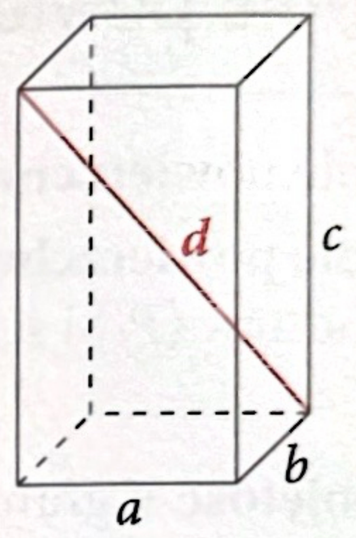
Prostopadłościan i sześcian

Prostopadłościan to graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami.

Przekątna prostopadłościanu: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Pole powierzchni całkowitej: $P = 2(ab + ac + bc)$

Objętość: $V = abc$

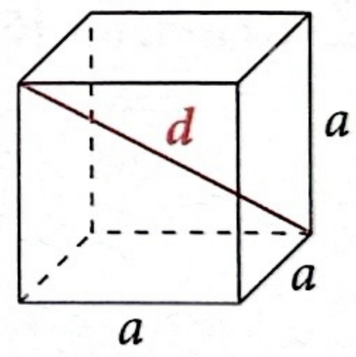


Sześcian to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami.

Przekątna sześcianu: $d = a\sqrt{3}$

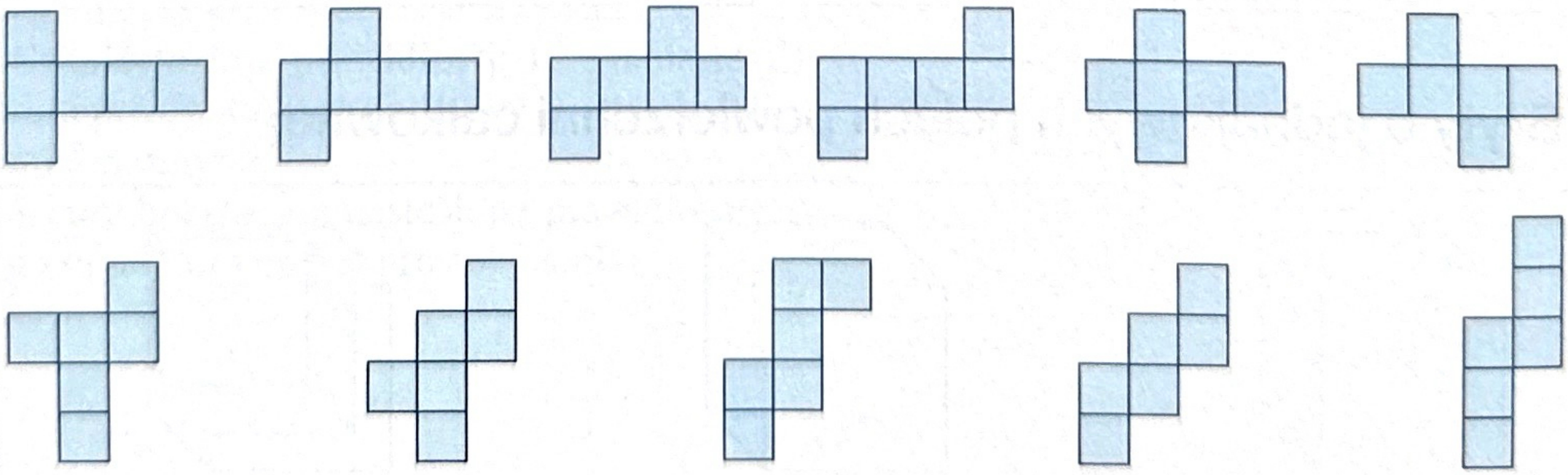
Pole powierzchni całkowitej: $P = 6a^2$

Objętość: $V = a^3$



Siatki sześcianu

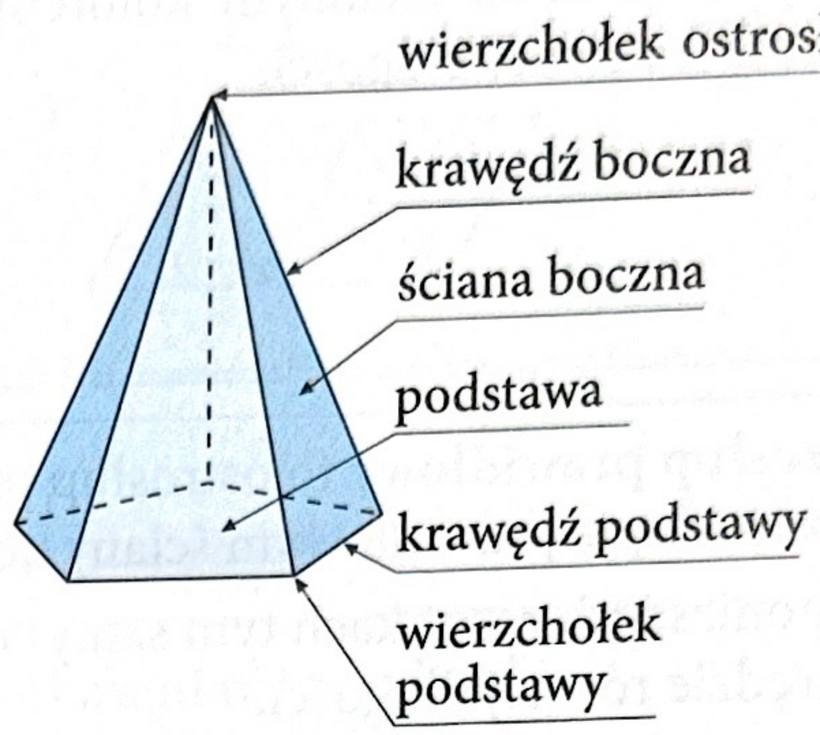
Sześcian ma 11 różnych siatek.



6.2. Ostrosłupy

Ostrosłup

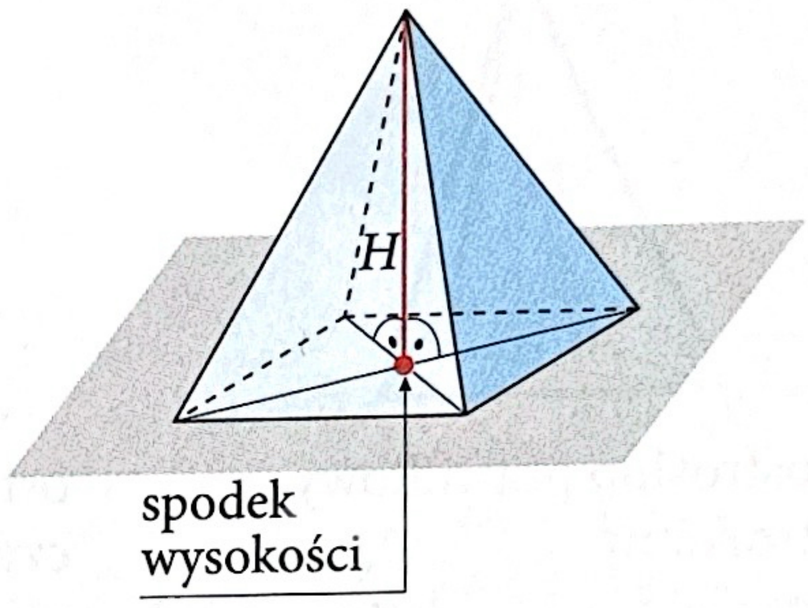
Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego jedna ściana (podstawa) jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym wierzchołkiem ostrosłupa.



Ostrosłup, którego podstawa jest n-kątem, nazywamy **ostrosłupem n-kątnym**.

Ostrosłup **n-kątny** ma $(n + 1)$ wierzchołków, $2n$ krawędzi i $(n + 1)$ ścian.

Wysokość H ostrosłupa to odcinek, który łączy wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną zawierającą jego podstawę i jest do niej prostopadły.
To również długość tego odcinka.

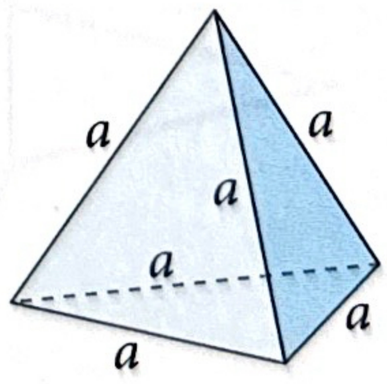


Spodek wysokości to punkt, który jest końcem wysokości leżącym na płaszczyźnie zawierającej podstawę ostrosłupa. Może leżeć na podstawie ostrosłupa lub poza nią.

Czworościan

Czworościan to inna nazwa ostrosłupa trójkątnego.

Czworościan foremny to czworościan, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.

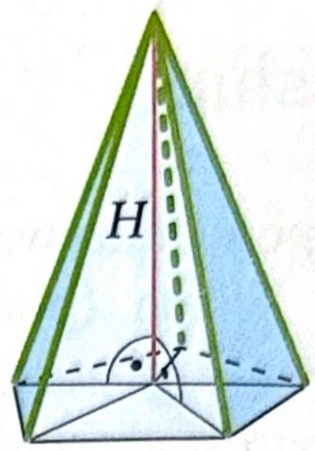


czworościan foremny

Podział ostrosłupów

Ostrosłup prosty to ostrosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są równej długości.

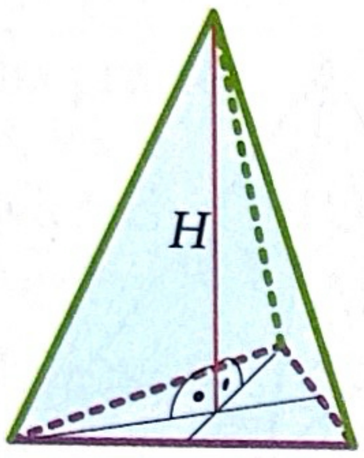
Na rysunku obok zielonym kolorem zaznaczono krawędzie równej długości.



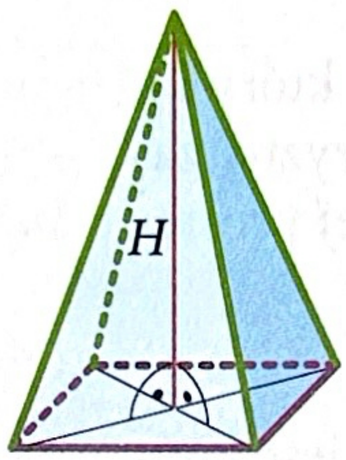
ostrosłup prosty pięciokątny

Ostrosłup prawidłowy to ostrosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym. W ostrosłupie prawidłowym ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

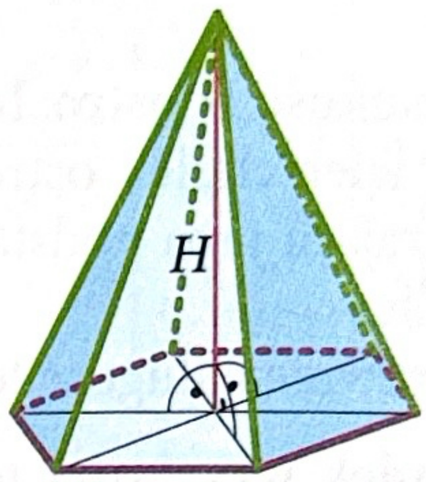
Na poniższych rysunkach tym samym kolorem zaznaczono w każdym ostrosłupie krawędzie równej długości.



ostrosłup prawidłowy trójkątny
podstawa – trójkąt równoboczny



ostrosłup prawidłowy czworokątny
podstawa – kwadrat

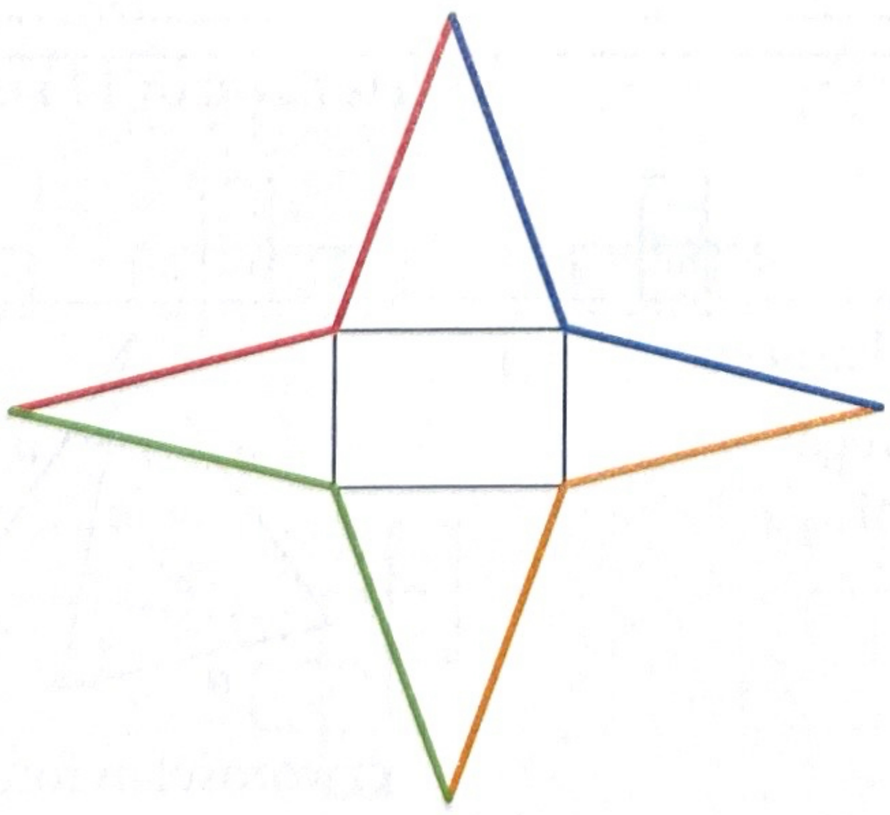


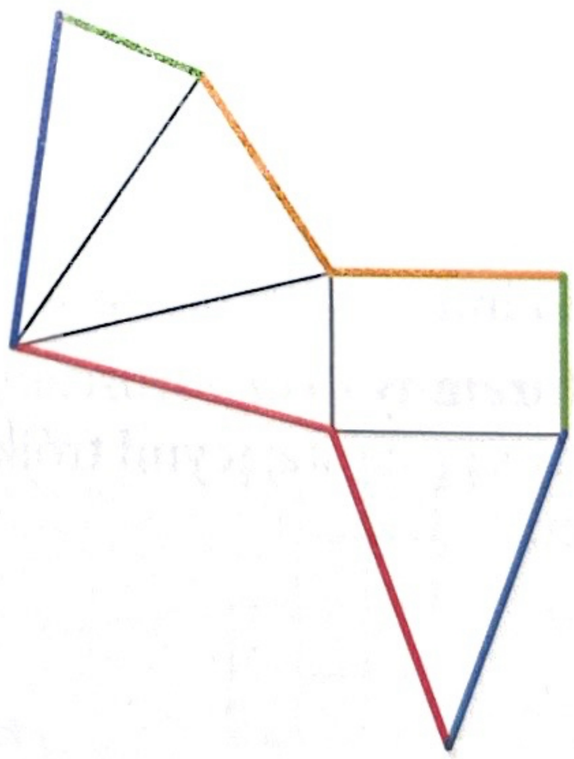
ostrosłup prawidłowy sześciokątny
podstawa – sześciokąt foremny

Siatka ostrosłupa

Siatkę ostrosłupa najłatwiej narysować, dorysowując odpowiedni trójkąt do każdego boku wielokąta będącego podstawą ostrosłupa.

Na dwóch przykładowych siatkach ostrosłupa prostego czworokątnego takim samym kolorem zaznaczono te odcinki, które łączą się przy składaniu modelu.





Siatki czworościanu foremnego

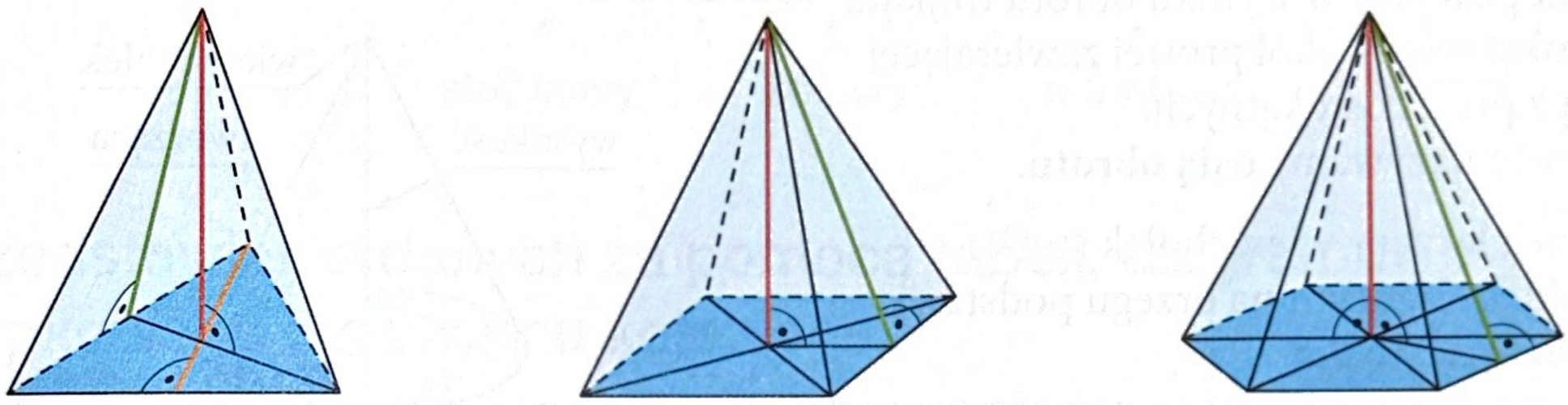
Czworościan foremny ma tylko 2 różne siatki.



Odcinki w ostrosłupach

Na poniższych rysunkach ostrosłupów zaznaczono kolorami różne odcinki.

— wysokość ostrosłupa
— wysokość ściany bocznej
— wysokość podstawy



Pole powierzchni i objętość ostrosłupa

Pole powierzchni bocznej P_b ostrosłupa to suma pól wszystkich jego ścian bocznych.

Pole powierzchni całkowitej P_c ostrosłupa to suma pól wszystkich jego ścian, czyli podstawy (P_p) i ścian bocznych.

$$P_c = P_p + P_b$$

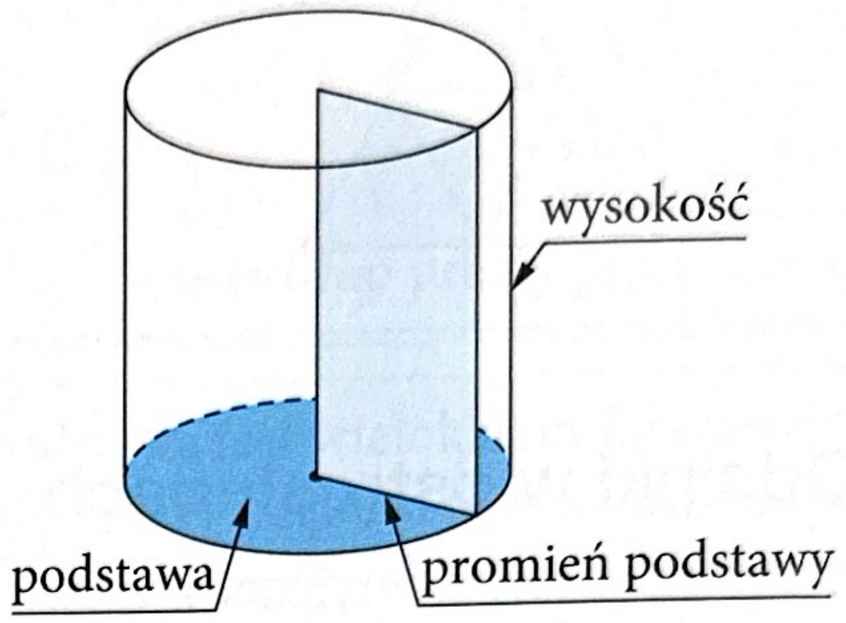
Objętość V ostrosłupa o wysokości H wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

6.3. Bryły obrotowe

Walec

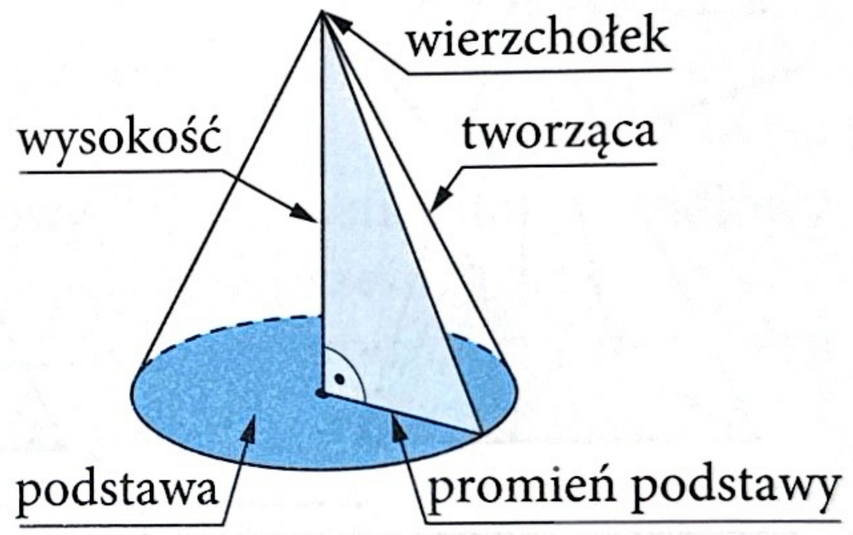
Walec powstaje w wyniku obrotu prostokąta wokół prostej zawierającej jeden z jego boków. Tę prostą nazywamy **osią obrotu**.



Stożek

Stożek powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych. Tę prostą nazywamy **osią obrotu**.

Odcinek łączący wierzchołek stożka z punktem leżącym na brzegu podstawy to **tworząca stożka**.

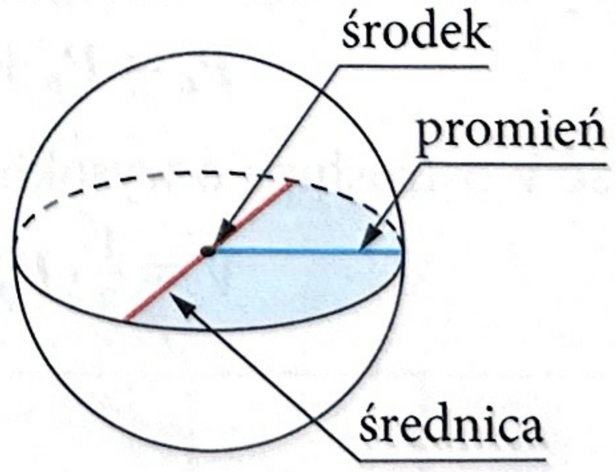


Kula

Kula powstaje w wyniku obrotu półkola wokół prostej zawierającej jego średnicę. Tę prostą nazywamy **osią obrotu**.

Powierzchnia kuli to **sfera**.

Odcinek łączący dwa punkty na sferze i przechodzący przez środek kuli to **średnica kuli**.



7.1. Statystyka

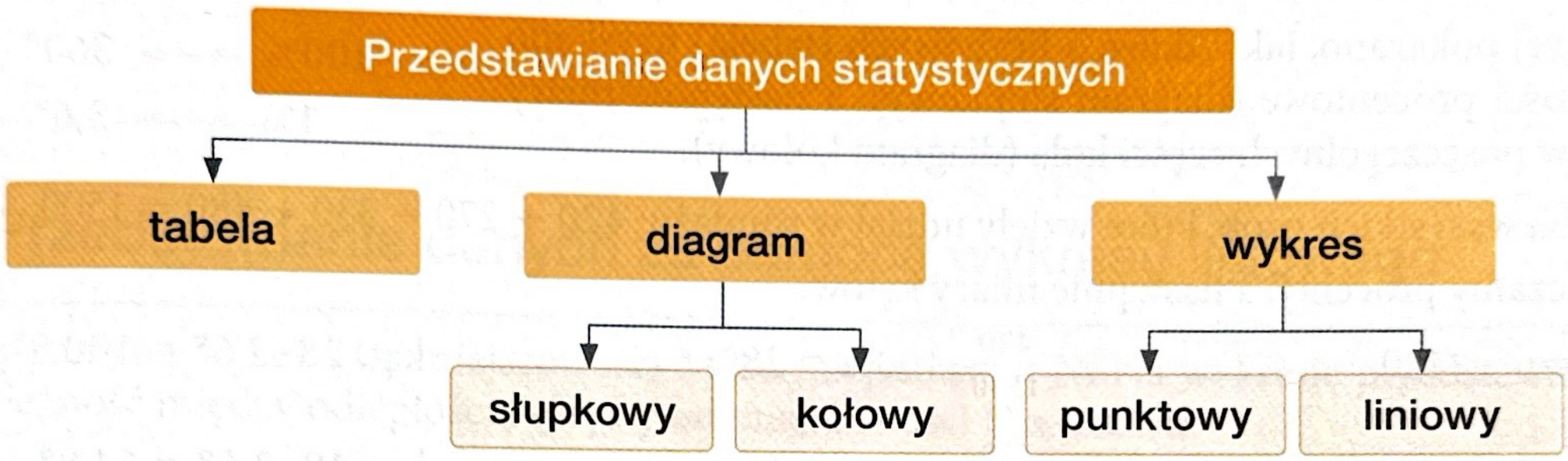
Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna zestawu liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa sumie tych liczb podzielonej przez liczbę jej składników:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$$

Np. średnia arytmetyczna ocen 5, 4, 5, 2, 6 i 5 jest równa $\frac{5+4+5+2+6+5}{6} = 4{,}5$.

Sposoby przedstawiania danych statystycznych



Przedstawianie danych za pomocą tabeli, diagramu słupkowego i diagramu kołowego

W przykładach przedstawiono wyniki sondażu „Najładniejsze zabytki naszego miasta".

Tabela

Zebrane dane wygodnie jest umieścić w tabeli. Tabela dobrze je porządkuje, ale nie pozwala ich porównać na pierwszy rzut oka.

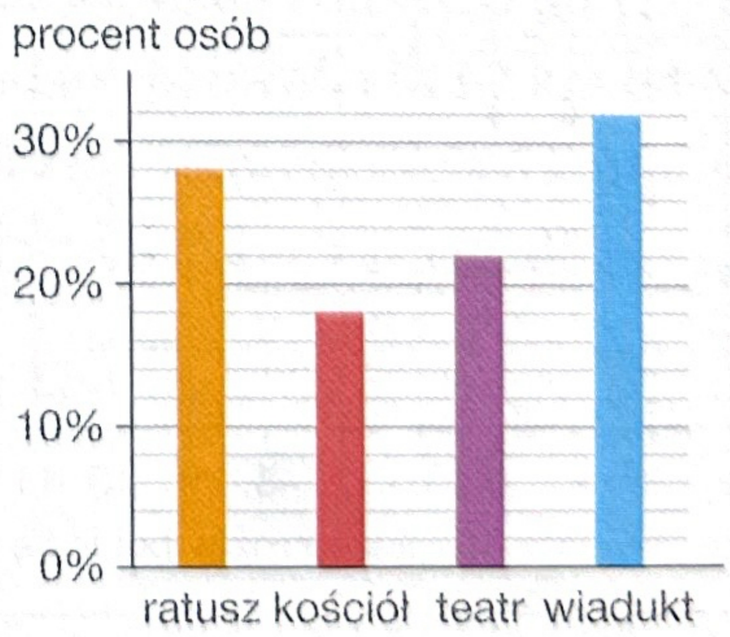
Np.

Zabytek	Liczba osób
ratusz	420
kościół	270
teatr	330
wiadukt	480

Diagram słupkowy

Aby szybko porównać dane, warto je przedstawić za pomocą diagramu, np. diagramu słupkowego. Danym odpowiadają wtedy wysokości słupków. Każdy diagram powinien mieć objaśnienie poszczególnych elementów.

Np.



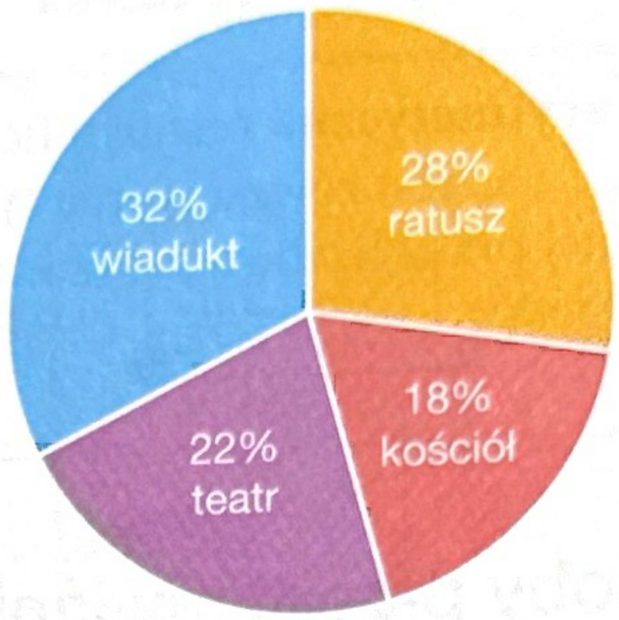
Przedstawianie danych za pomocą tabeli, diagramu słupkowego i diagramu kołowego cd.

Diagram kołowy

Diagram kołowy to sposób prezentacji danych w postaci części koła.

Każdy diagram powinien mieć objaśnienie poszczególnych elementów.

Np.



Poniżej pokazano, jak z danych liczbowych (tabela) uzyskano wartości procentowe (diagram słupkowy), a następnie miary kątów poszczególnych części koła (diagram kołowy).

100% ⟷ 360°

1% ⟷ 3,6°

Liczba wszystkich osób, które wzięły udział w sondażu: $420 + 270 + 330 + 480 = 1500$.

Obliczamy procenty, a następnie miary kątów:

ratusz: 420 $\longrightarrow \frac{420}{1500} \cdot 100\% = 28\% \longrightarrow$ kąt: $28 \cdot 3{,}6° = 100{,}8°$

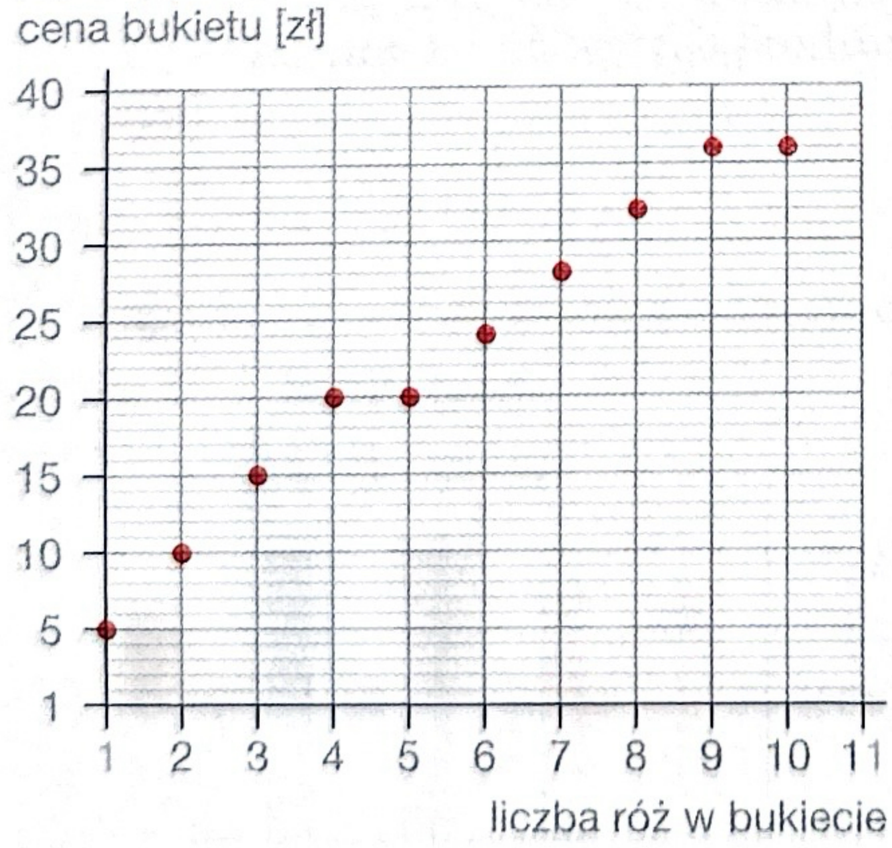
kościół: 270 $\longrightarrow \frac{270}{1500} \cdot 100\% = 18\% \longrightarrow$ kąt: $18 \cdot 3{,}6° = 64{,}8°$

teatr: 330 $\longrightarrow \frac{330}{1500} \cdot 100\% = 22\% \longrightarrow$ kąt: $22 \cdot 3{,}6° = 79{,}2°$

wiadukt: 480 $\longrightarrow \frac{480}{1500} \cdot 100\% = 32\% \longrightarrow$ kąt: $32 \cdot 3{,}6° = 115{,}2°$

Przedstawianie danych za pomocą wykresu punktowego

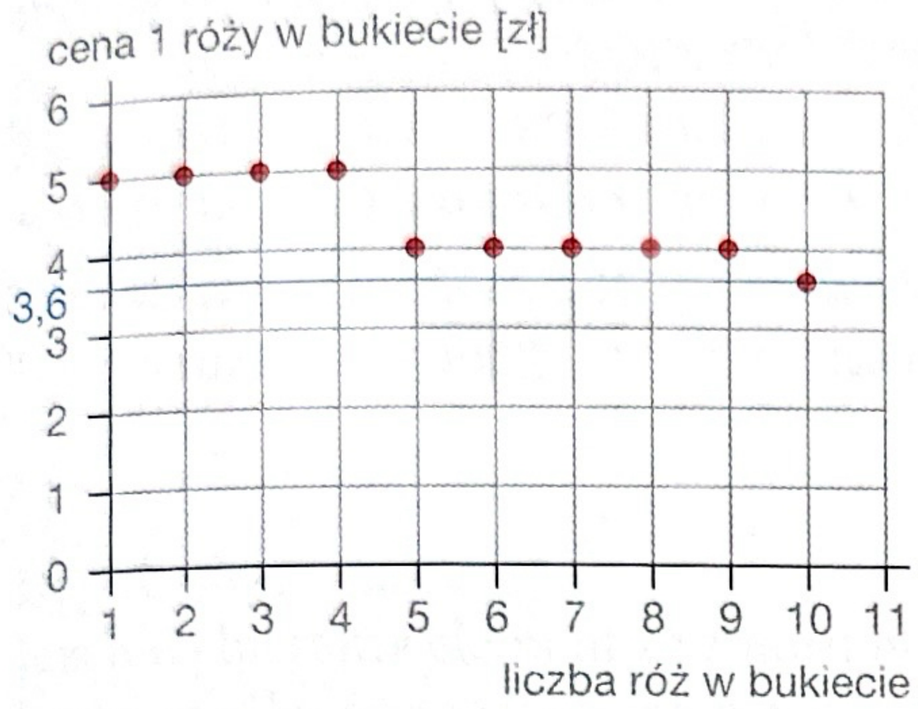
Np. zależność ceny bukietu róż od liczby róż w bukiecie przedstawiono na poniższym wykresie.



- Możemy z niego odczytać, ile kosztuje jedna róża (5 zł), a ile kosztują dwie, trzy itd.
- Punkty leżące na tym samym poziomie oznaczają jednakową cenę bukietu. Cena czterech i pięciu róż jest taka sama (20 zł).
- Cena bukietu początkowo z każdą różą rośnie o 5 zł, następnie dla bukietów złożonych z czterech i pięciu róż jest taka sama (20 zł), dla kolejnych bukietów wzrasta o 4 zł i dla bukietów złożonych z 9 i 10 róż znów jest taka sama (36 zł).

Przedstawianie danych za pomocą wykresu punktowego cd.

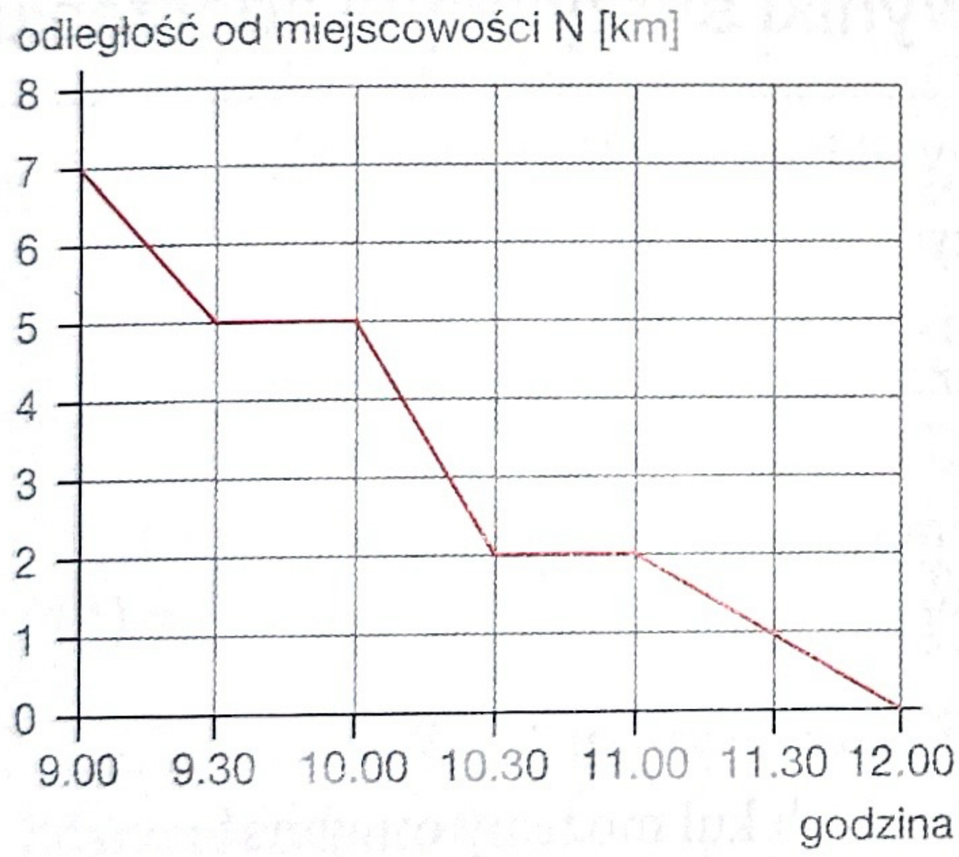
Jeśli interesuje nas cena jednej róży w bukiecie, także możemy przedstawić takie informacje na wykresie:



- Początkowo cena każdej róży w bukiecie to 5 zł. W bukiecie liczącym od pięciu do dziewięciu róż cena jednej róży wynosi 4 zł. Przy zakupie bukietu złożonego z 10 róż za każdą różę zapłacimy 3,60 zł.

Przedstawianie danych za pomocą wykresu liniowego

Np. turysta wyruszył z miejscowości M do miejscowości N. Na wykresie przedstawiono zależność między odległością turysty od miejscowości N a czasem.



Z wykresu możemy odczytać następujące informacje:

- Turysta wyruszył z miejscowości M o godz. 9.00. Na miejsce dotarł o godz. 12.00. Jego wycieczka trwała 3 godziny.
- Miejscowość N jest odległa od M o 7 km.
- O godz. 9.30 turysta był w odległości 2 km od miejscowości M i 5 km od miejscowości N.
- W ciągu pierwszych 30 minut turysta pokonał 2 km. Zatem szedł wtedy z prędkością 4 km/h.
- Turysta odpoczywał dwa razy po pół godziny: od 9.30 do 10.00 i od 10.30 do 11.00.
- Drugi odpoczynek turysta miał w odległości 5 km od miejscowości M i 2 km od N.
- Od godz. 10.00 do 10.30 turysta pokonał 3 km, szedł zatem z prędkością 6 km/h.
- Ostatnią godzinę turysta szedł najwolniej. Przeszedł wtedy 2 km, czyli szedł z prędkością 2 km/h.

7.2. Rachunek prawdopodobieństwa

Doświadczenie losowe

Doświadczenie losowe spełnia trzy warunki:

- Można je powtarzać.
- Ma określony zestaw możliwych wyników.
- Nie można przewidzieć jego wyniku.

Przykładami **doświadczeń losowych** są:
- rzut monetą,
- rzut sześcienną kostką do gry,
- rzut kostką dwunastościenną,
- losowanie jednej kuli z zestawu kul ponumerowanych od 1 do 9,
- rzut dwiema monetami,
- rzut monetą, a potem kostką do gry.

Wyniki doświadczenia losowego, wyniki sprzyjające zdarzeniu

- W rzucie monetą możemy otrzymać dwa różne wyniki: orzeł (O) i reszka (R).
- W rzucie sześcienną kostką do gry możliwe jest uzyskanie sześciu wyników: 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
  Zdarzeniu *w rzucie tą kostką otrzymamy liczbę parzystą* **sprzyjają trzy wyniki**: 2, 4 i 6.
- Doświadczenie losowe polegające na jednokrotnym rzucie kostką dwunastościenną może się skończyć jednym z następujących wyników: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
  Zdarzeniu *wypadnie wielokrotność trójki* **sprzyjają cztery wyniki**: 3, 6, 9 i 12.
- Podczas losowania jednej z dziewięciu ponumerowanych kul możemy otrzymać następujące wyniki: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.
  Zdarzeniu *wylosowana liczba będzie większa od 3* **sprzyja sześć wyników**: 4, 5, 6, 7, 8 i 9.
- W rzucie dwiema monetami możemy uzyskać cztery wyniki: (O, O), (O, R), (R, O) i (R, R), gdzie O oznacza orła, a R – reszkę.
  Zdarzeniu *na obu monetach wypadnie to samo* **sprzyjają dwa wyniki**: (O, O) i (R, R).
- Doświadczenie losowe polegające na rzucie najpierw monetą, a potem kostką może się skończyć jednym z następujących wyników: (O, 1), (O, 2), (O, 3), (O, 4), (O, 5), (O, 6), (R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6).
  Zdarzeniu *wypadną orzeł i więcej niż 3 oczka* **sprzyjają trzy wyniki**: (O, 4), (O, 5) i (O, 6).

Kombinatoryka (metody zliczania)

Reguła mnożenia
Jeżeli wybieramy jedną z n możliwości, a następnie jedną z k możliwości, to wszystkich możliwości wyboru jest $n \cdot k$.
W przypadku podejmowania większej liczby decyzji postępujemy podobnie.
Np.
- Wszystkich możliwych wyników w rzucie dwiema kostkami dwunastościennymi jest $12 \cdot 12 = 144$.
- Wszystkich liczb czterocyfrowych jest $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Pierwszą cyfrą nie może być 0.

Reguła dodawania
Jeżeli wybieramy element ze zbioru n-elementowego albo ze zbioru k-elementowego, to liczba możliwości jest równa $n + k$.
Np.
- Na jednej półce stoi 5 różnych kubków, a na drugiej 6. Mamy więc $5 + 6 = 11$ możliwości wyboru kubka.
- Ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5? Liczby podzielne przez 5 to liczby, których ostatnią cyfrą jest 0 lub 5. Liczb dwucyfrowych zakończonych cyfrą 0 jest 9, zakończonych cyfrą 5 też jest 9. Razem jest ich $9 + 9 = 18$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest to liczba $P(A)$ spełniająca nierówności $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, określona następująco:

$$P(A) = \frac{\text{liczba wyników sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich możliwych wyników}}$$

Np. prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek w jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry jest równe $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Zdarzenie niemożliwe
- Zdarzenie, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie (żaden wynik).
- Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0.

Np. zdarzeniem niemożliwym w rzucie sześcienną kostką jest zdarzenie A polegające na otrzymaniu 7 oczek.
$P(A) = 0$

Zdarzenie pewne
- Zdarzenie, któremu sprzyja każde zdarzenie (każdy wynik).
- Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1.

Np. zdarzeniem pewnym w rzucie sześcienną kostką jest zdarzenie B polegające na otrzymaniu liczby oczek większej od 0 i mniejszej od 7.
$P(B) = 1$

8.1. Twierdzenie matematyczne

Twierdzenie matematyczne

Twierdzenie matematyczne to zdanie, którego prawdziwość można udowodnić. W każdym twierdzeniu wyróżniamy dwie części: **założenie** i **tezę**.

Jeśli **założenie**, to **teza**.

Np.
Jeśli
ostatnią cyfrą liczby naturalnej jest 5,
to
ta liczba jest podzielna przez 5.

Dowodzenie twierdzeń

Aby udowodnić, że zdanie:

- nie jest prawdziwe, wystarczy znaleźć jeden przykład, tzw. **kontrprzykład**, który to potwierdza,
- jest prawdziwe, nie wystarczy nawet wiele przykładów potwierdzających to zdanie, trzeba przeprowadzić dowód.

Wskazanie założenia i tezy jest istotne w przeprowadzeniu dowodu:

- **założenie** to fakty, z których możemy korzystać podczas dowodzenia („dane”),
- **teza** to fakt, do którego mamy dojść w naszym rozumowaniu („szukane”).

Dowodzenie własności liczb

Co zrobić, żeby udowodnić własności liczb

Wykonaj obliczenia

- skróć ułamki
- wyłącz (włącz) czynnik przed (pod) znak pierwiastka
- wykonaj działania na potęgach

Zobacz przykłady 1, 3.

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego

- opisz rozważaną własność liczb za pomocą wyrażenia algebraicznego

Zobacz przykład 2.

Wykonaj przekształcenia algebraiczne

- przekształć wyrażenia
- wykonaj działania
- zredukuj wyrazy podobne

Zobacz przykład 2.

Najbardziej użyteczne narzędzia przy dowodzeniu własności liczb

Podstawowe wzory

- działania na potęgach (s. 38)
- działania na pierwiastkach (s. 40)
- kolejność wykonywania działań (s. 11)

Zobacz przykład 1.

Podzielność

- cechy podzielności (s. 8)
- działania na liczbach parzystych, nieparzystych

Zobacz przykład 2.

Szacowanie

- zasady zaokrąglania liczb (s. 7)
- działania na liczbach dodatnich, ujemnych

Zobacz przykłady 3 i 4.

Dowodzenie własności liczb cd.

Przykład 1

Dane są liczby: $a = \sqrt{147} + \sqrt{27}$, $b = \sqrt{432} - \sqrt{12}$. Uzasadnij, że są one równe.

Rozwiązanie

$a = \sqrt{147} + \sqrt{27} = \sqrt{49 \cdot 3} + \sqrt{9 \cdot 3} = 7\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$b = \sqrt{432} - \sqrt{12} = \sqrt{144 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 3} = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

Zatem $a = b$.

Przykład 2

Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie

Trzy kolejne liczby naturalne można zapisać następująco: n, $n + 1$, $n + 2$.

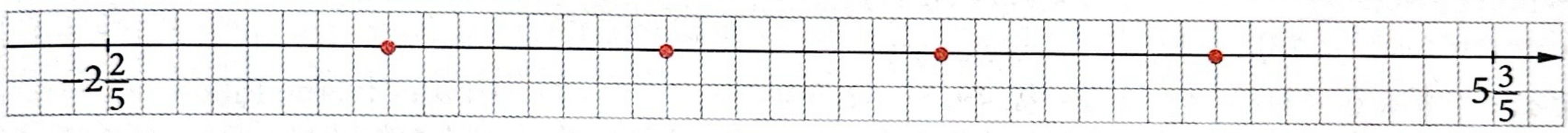
Ich suma jest równa:

$n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$

Otrzymana liczba jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby naturalnej $n + 1$.

Przykład 3

Na osi liczbowej wskazano położenie dwóch liczb: $-2\frac{2}{5}$ i $5\frac{3}{5}$ oraz zaznaczono kropkami cztery inne liczby. Uzasadnij, że jedna z liczb zaznaczonych kropką jest całkowita.



Rozwiązanie

Odcinek osi liczbowej od $-2\frac{2}{5}$ do $5\frac{3}{5}$ jest podzielony na pięć jednakowych odcinków długości:

$\left(5\frac{3}{5} - \left(-2\frac{2}{5}\right)\right) : 5 = \left(5\frac{3}{5} + 2\frac{2}{5}\right) : 5 = 8 : 5 = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$

Kolejnymi kropkami zaznaczono więc liczby:

$-2\frac{2}{5} + 1\frac{3}{5} = -\frac{4}{5}$, $-\frac{4}{5} + 1\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$, $\frac{4}{5} + 1\frac{3}{5} = 2\frac{2}{5}$, $2\frac{2}{5} + 1\frac{3}{5} = 4$

Liczba zaznaczona ostatnią kropką jest całkowita.

Przykład 4

Bez wykonywania dokładnych obliczeń uzasadnij, że suma 321 + 111 + 202 + 206 jest większa od 800.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$321 > 300$, $111 > 100$, $202 > 200$, $206 > 200$

Zatem:

$321 + 111 + 202 + 206 > 300 + 100 + 200 + 200 = 800$

Dowodzenie własności figur

Co zrobić, żeby udowodnić własności figur

Wykonaj rysunek
- wprowadź wygodne oznaczenia
- oznacz znane kąty, boki itp.
- wyróżnij równe kąty, odcinki
- użyj różnych kolorów lub rodzajów linii

Zobacz przykład 3.

Oblicz lub przekształć
- zapisz potrzebne wzory i zależności
- przekształć wzory
- wykonaj obliczenia

Zobacz przykłady 1, 2, 3, 4.

Dorysuj przydatne elementy
- uzupełnij dany rysunek, aby pokazać podane zależności lub użyć odpowiednich wzorów

Zobacz przykład 3.

Najbardziej użyteczne narzędzia przy dowodzeniu własności figur

Pojęcia geometryczne
- równoległość, prostopadłość (s. 48)
- rodzaje kątów (s. 47)
- obwód, pole, objętość (s. 60, 61, 65, 66, 69)
- przystawanie figur (s. 54)

Zobacz przykłady 1, 2, 4, 5.

Własności figur i brył
- kąty (s. 47)
- wielokąty (s. 49, 51, 52, 59)
- graniastosłupy (s. 64)
- ostrosłupy (s. 67, 68)

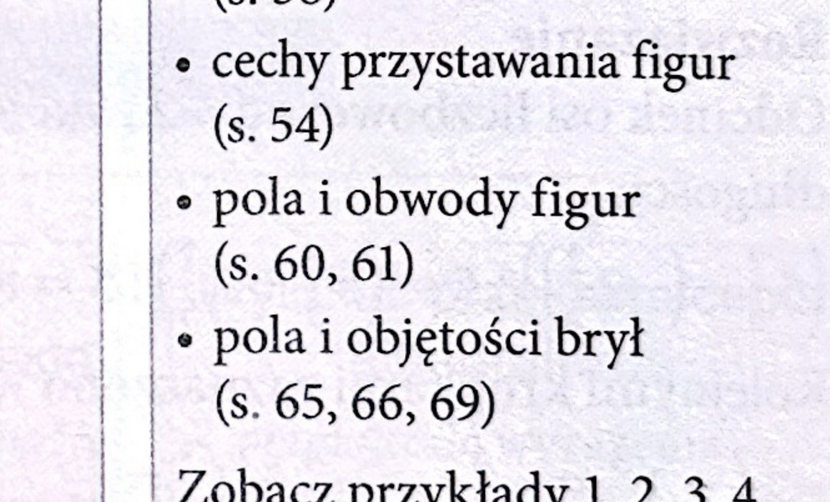
Zobacz przykłady 2, 3.

Wzory i fakty
- suma kątów w trójkącie (s. 50)
- twierdzenie Pitagorasa (s. 58)
- cechy przystawania figur (s. 54)
- pola i obwody figur (s. 60, 61)
- pola i objętości brył (s. 65, 66, 69)

Zobacz przykłady 1, 2, 3, 4.

Przykład 1

O prostych a, b, c, d wiemy, że $a \parallel b$ oraz $c \parallel d$.
Uzasadnij, że trójkąty ABD i CDB są przystające.

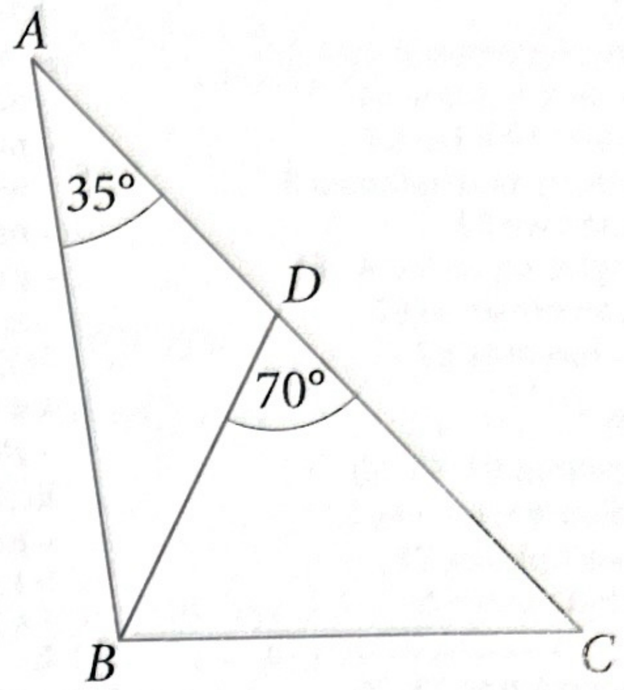


Rozwiązanie

Trójkąty ABD i CDB mają wspólny bok BD.
Ponadto:
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$ (kąty naprzemianległe przy prostych a i b),
$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD$ (kąty naprzemianległe przy prostych c i d).
Z cechy przystawania kbk wynika przystawanie trójkątów ABD i CDB.

Przykład 2

W trójkącie ABC obrano na boku AC punkt D tak jak na rysunku. Udowodnij, że trójkąt ABD jest równoramienny.



Rozwiązanie

Obliczmy miarę drugiego kąta ostrego w trójkącie ABD.

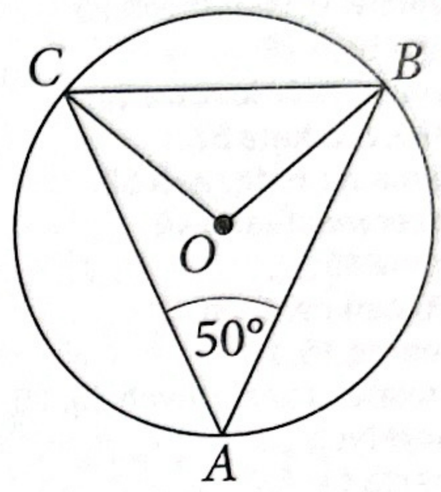
$\sphericalangle BDA = 180° - 70° = 110°$ (kąty ADB i CDB są przyległe)

$\sphericalangle ABD = 180° - \sphericalangle BDA - \sphericalangle DAB = 180° - 110° - 35° = 35°$

Trójkąt ABD ma dwa kąty równe, każdy o mierze 35°,
więc jest trójkątem równoramiennym, co należało udowodnić.

Przykład 3

Okrąg o środku O przechodzi przez wszystkie wierzchołki trójkąta ABC, w którym $AB = AC$ i $\sphericalangle BAC = 50°$ (patrz rysunek). Uzasadnij, że trójkąt OBC jest rozwartokątny.



Rozwiązanie

Dorysujmy promień OA. Wówczas trójkąty równoramienne OAB i OAC mają kąty ostre po 25°.

Korzystamy z założenia:

skoro $AB = AC$, to trójkąt ABC jest równoramienny, czyli mamy:

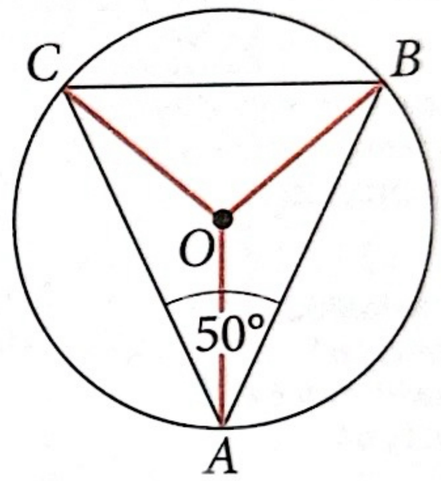
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = (180° - 50°) : 2 = 65°$.

Zatem $\sphericalangle OBC = 65° - 25° = 40°$.

Podobnie uzasadniamy, że $\sphericalangle OCB = 40°$.

Stąd $\sphericalangle BOC = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$.

Kąt BOC jest rozwarty, więc trójkąt OBC jest rozwartokątny,
co należało uzasadnić.



Przykład 4

Uzasadnij, że sześcian o krawędzi a i prostopadłościan o wymiarach $2a$, $\frac{3}{4}a$, $\frac{2}{3}a$ mają jednakowe objętości.

Rozwiązanie

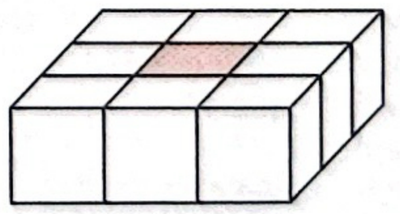
Objętość sześcianu jest równa: a^3.

Objętość prostopadłościanu jest równa: $2a \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{2}{3}a = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3} \cdot a^3 = a^3$.

Zatem obie bryły mają taką samą objętość.

Przykład 5

Z dziewięciu jednakowych sześciennych kostek zbudowano figurę F taką jak na rysunku obok. Uzasadnij, że po wyjęciu środkowej kostki (zaznaczonej na rysunku kolorem) otrzymamy figurę o większym polu powierzchni niż pole figury F.



Rozwiązanie

Jeśli usuniemy kostkę zaznaczoną na rysunku, zabierzemy z powierzchni figury F dwa kwadraty, ale powstanie otwór ograniczony czterema nowymi kwadratami – zatem po wyjęciu kostki przybędą dwa kwadraty. Nowa bryła będzie miała większe pole powierzchni.

Indeks

C
cecha bok-bok-bok 54
– bok-kąt-bok 54
– kąt-bok-kąt 54
cechy podzielności 8
cięciwa 53
cyfry rzymskie 4
czworościan 67
– foremny 67

D
deltoid 52, 55, 60
diagram kołowy 72
– słupkowy 71
dodawanie 9
– liczb całkowitych 16
– pisemne 13, 25
– ułamków dziesiętnych 25
– – zwykłych 23
doświadczenie losowe 74
dwusieczna kąta 57
działania na potęgach 38
– na pierwiastkach 40
dzielenie 10
– liczb całkowitych 17
– pisemne 15, 26
– ułamków dziesiętnych 25, 26
– – zwykłych 24
– z resztą 11
dzielnik 7

F
figura osiowosymetryczna 54
– środkowosymetryczna 55
figury przystające 54

G
graniastosłup 64, 65
– pochyły 64
– prawidłowy 64
– prosty 64

J
jednomian 41
jednomiany podobne 41
jednostki czasu 31
– długości 30
– masy 31
– objętości 65
– pola 61
– prędkości 31

K
kalendarz 33
kąt 46
– ostry 47
– pełny 47
– półpełny 47
– prosty 47
– rozwarty 47
– wewnętrzny trójkąta 50
– wklęsły 47
– wypukły 47
– zerowy 47
kąty naprzemianległe 47
– odpowiadające 47
– przyległe 47
– wierzchołkowe 47
kolejność wykonywania działań 11
koło 53, 61
kontrprzykład 76
kula 70
kwadrat 51, 55, 56, 59, 60
kwadraty liczb 37

L
liczba całkowita 4
– dodatnia 5
– mieszana 19
– naturalna 4
– niedodatnia 5
– nieujemna 5
– niewymierna 4
– pierwsza 8
– spełniająca równanie 43
– ujemna 5
– wymierna 4
– złożona 8
liczby odwrotne 20
– przeciwne 6
lokata bankowa 36

Ł
łuk 53

M
mnożenie 9
– liczb całkowitych 17
– pisemne 14, 26
– sum algebraicznych 42
– sumy algebraicznej przez jednomian 42
– ułamków dziesiętnych 25, 26
– – zwykłych 24

N
najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) 8
największy wspólny dzielnik (NWD) 7
nazwy jednostek pochodnych 30
nierówność trójkąta 49
notacja wykładnicza 38

O
objętość graniastosłupa 65
– ostrosłupa 69
– prostopadłościanu 66
– sześcianu 66
odcinek 46
odcinki prostopadłe 48
– równoległe 48
odejmowanie 9
– liczb całkowitych 18
– pisemne 13, 25
– ułamków dziesiętnych 25
– – zwykłych 23
odległość między prostymi równoległymi 48
– między punktami w układzie współrzędnych 63
– punktu od prostej 48
odsetki 36
odwrotność ułamka 20
okrąg 53, 61
okres ułamka 21
oprocentowanie lokaty 36
ostrosłup 67, 69
– prawidłowy 68
– prosty 68
oś liczbowa 5
– symetrii 54, 55

P
pierścień kołowy 61
pierwiastek kwadratowy 39
– sześcienny 39
podatek VAT 36
podzielność 11
podział proporcjonalny 29
pole powierzchni bocznej graniastosłupa 65
– – – ostrosłupa 69
– – całkowitej graniastosłupa 65
– – – ostrosłupa 69
– – – prostopadłościanu 66
– – – sześcianu 66
– trójkąta równobocznego 59, 60
połowa kwadratu 59
– trójkąta równobocznego 59
porównywanie ułamków dziesiętnych 22
– – dziesiętnych i zwykłych 22
– – zwykłych 20
potęga 37, 38
półprosta 46
prawdopodobieństwo 75
procent 34, 35
promień okręgu (koła) 53
prosta 46
proste prostopadłe 48
– przecinające się 48
– równoległe 48
prostokąt 51, 55, 60
prostopadłościan 66
przekątna graniastosłupa 66
– kwadratu 51, 59
– prostopadłościanu 66
– sześcianu 66
– wielokąta 50
przekształcanie wzoru 44
przybliżenie z nadmiarem 7, 21
– z niedomiarem 7, 21
punkt 46

R
redukcja wyrazów podobnych 41
reguła dodawania 75
– mnożenia 75
romb 51, 55, 60
rozkład liczby na czynniki pierwsze 8
rozszerzanie ułamka zwykłego 19
rozwiązanie równania 43
równanie 43
– liniowe z jedną niewiadomą 43
– sprzeczne 43
– tożsamościowe 43
– z jedną niewiadomą 43
równoległobok 51, 60

S
siatka czworościanu foremnego 69
– graniastosłupa 65
– ostrosłupa 68
– sześcianu 66
skala 33
skracanie ułamka zwykłego 19
spodek wysokości 67
sprowadzanie ułamków zwykłych do wspólnego mianownika 20
stężenie procentowe 36
stożek 70
suma algebraiczna 42
– kątów czworokąta 52
– – trójkąta 50
symetralna odcinka 56
system dziesiątkowy 5
– rzymski 4
sześcian 66
sześciany liczb 37

Ś
średnia arytmetyczna 71
średnica koła (okręgu) 53
środek odcinka 62
środek symetrii figury 55

T
teza 76
trapez 51, 60
– prostokątny 52
– równoramienny 51, 55
trójkąt 49, 60
– 30°, 60°, 90° (połowa trójkąta równobocznego) 59
– 45°, 45°, 90° (połowa kwadratu) 59
– ostrokątny 49
– prostokątny 49, 50, 60
– rozwartokątny 49
– równoboczny 49, 50, 55, 56, 59, 60
– równoramienny 49, 55
– różnoboczny 49, 55
trójki pitagorejskie 58
twierdzenie 76
– Pitagorasa 58

U
układ współrzędnych 62
ułamek dziesiętny 21
– – nieskończony okresowy 21
– – skończony 21
– liczby 27, 28
– nieskracalny 19
– niewłaściwy 19
– właściwy 19
– zwykły 19
usuwanie niewymierności z mianownika ułamka 40

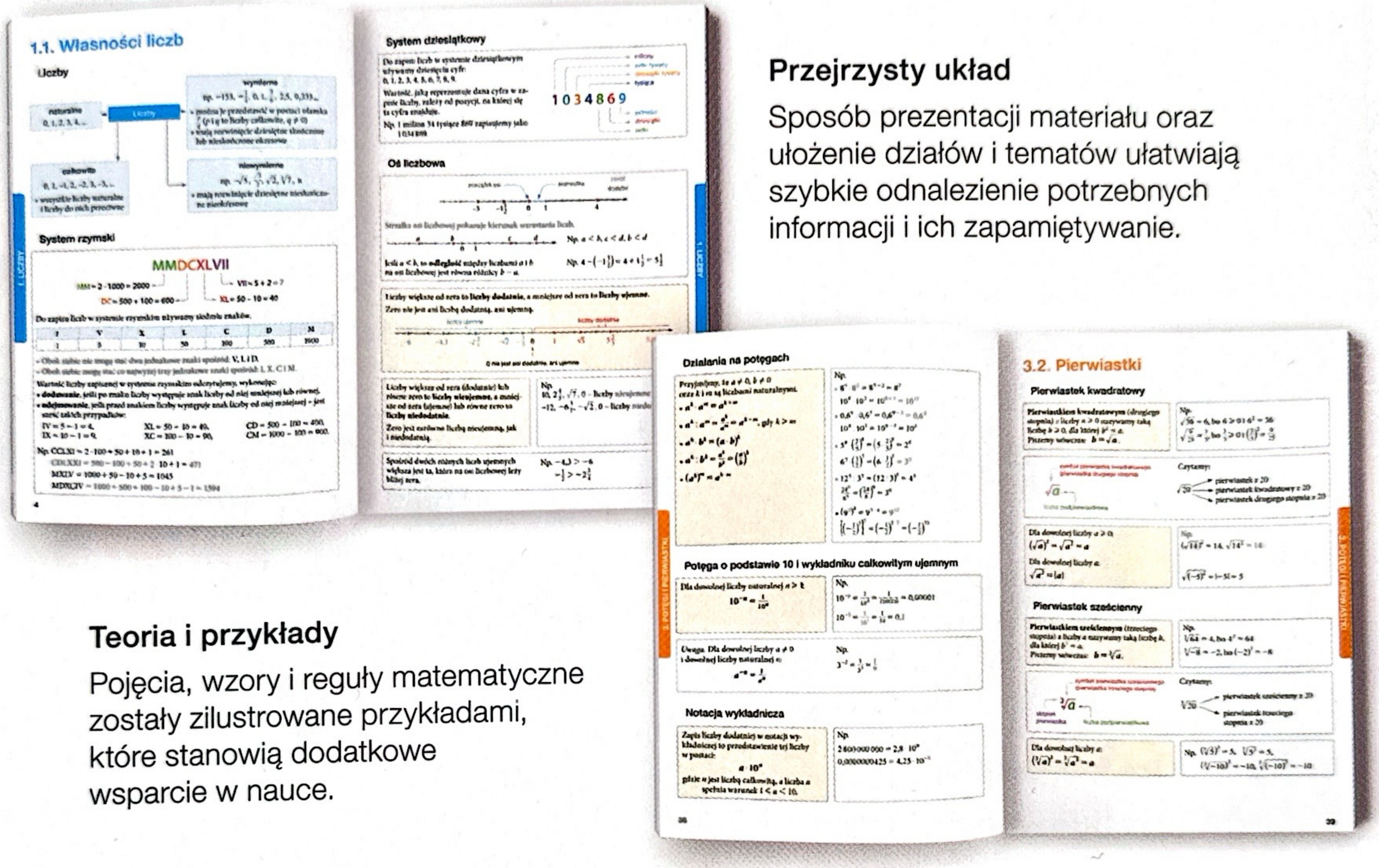
W
walec 70
wartość bezwzględna 6
wielkości wprost proporcjonalne 29
wielokąt foremny 56
wielokrotność 7
włączanie czynnika pod znak pierwiastka 40
współczynnik proporcjonalności 29
wykres liniowy 73
– punktowy 72, 73
wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka 40
wyniki doświadczenia losowego sprzyjające zdarzeniu 74
wyrażenie algebraiczne 41
wysokość graniastosłupa 64
– ostrosłupa 67
– rombu 52
– równoległoboku 52
– trapezu 52
– trójkąta 50
– – równobocznego 59

Z
założenie 76
zamiana ułamka dziesiętnego na zwykły 22
– – zwykłego na dziesiętny 22
zaokrąglanie liczb 7
– ułamków dziesiętnych 21
zdarzenie niemożliwe 75
– pewne 75
zegar 32

Tablice
matematyczne

nowa era
Twoje mocne strony

Publikacja stworzona z myślą o uczniach szkoły podstawowej. Może być wykorzystywana zarówno podczas **przygotowania do egzaminu**, jak i w **codziennej pracy** na lekcji oraz w domu. Zebrano w niej **wzory i definicje szczególnie** przydatne podczas rozwiązywania zadań z matematyki w szkole podstawowej.



Przejrzysty układ

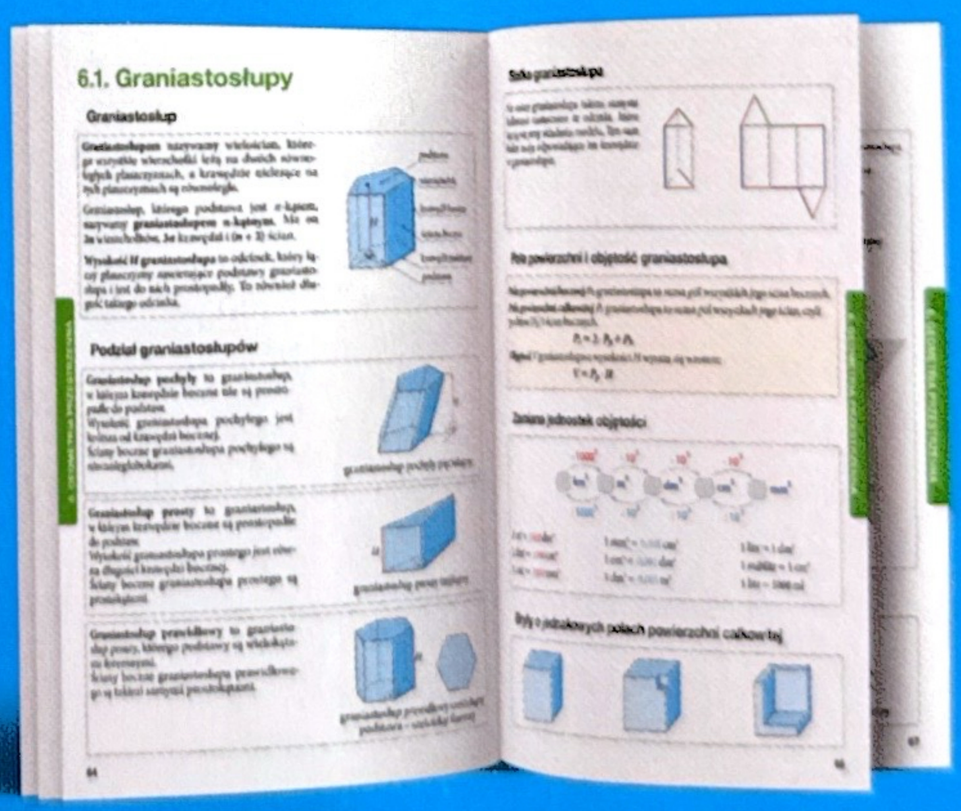
Sposób prezentacji materiału oraz ułożenie działów i tematów ułatwiają szybkie odnalezienie potrzebnych informacji i ich zapamiętywanie.

Teoria i przykłady

Pojęcia, wzory i reguły matematyczne zostały zilustrowane przykładami, które stanowią dodatkowe wsparcie w nauce.

Przygotowanie do egzaminu ósmoklasisty

W *Tablicach matematycznych* zostały zamieszczone wszystkie zagadnienia z zakresu szkoły podstawowej – jest to bardzo przydatne podczas przygotowań do egzaminu ósmoklasisty. Pogrupowanie tematyczne treści zapewnia szybki dostęp do potrzebnej wiedzy.



Nowa Era Sp. z o.o.
www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 801 88 10 10, 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-3888-3