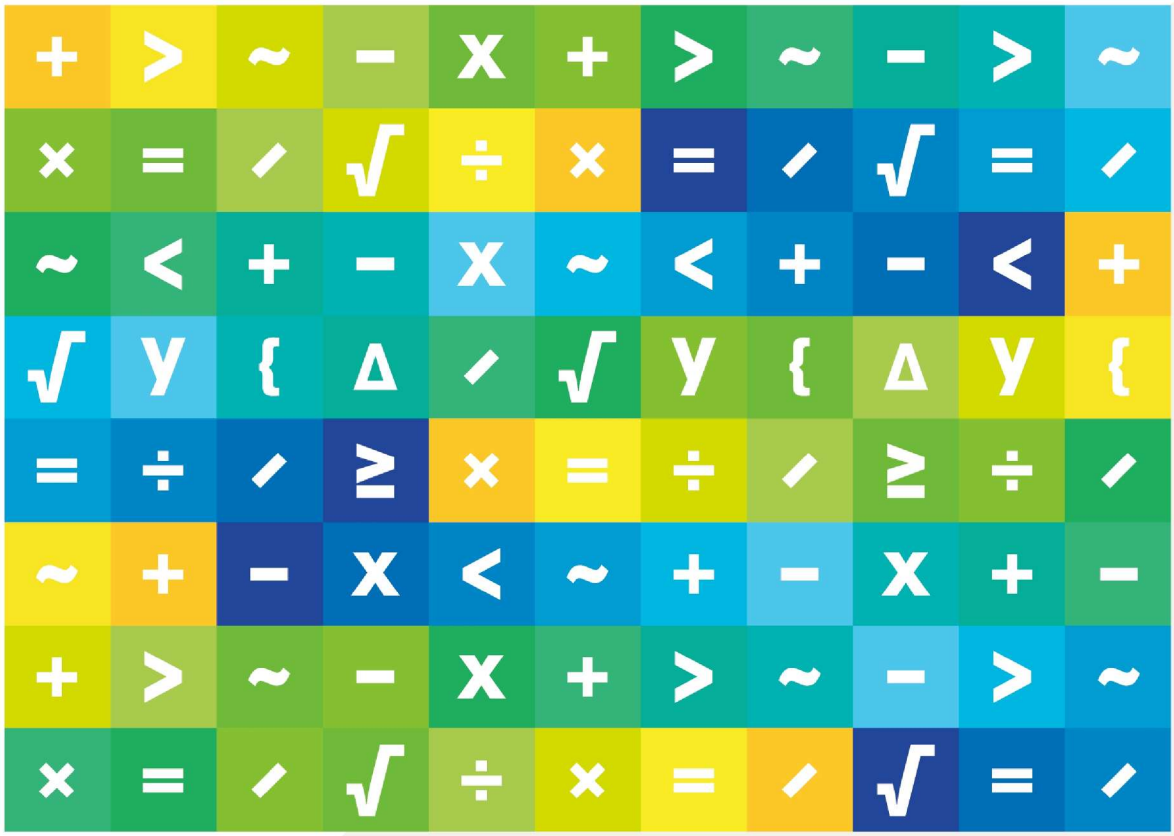
OLDSCHOOL
STARA DOBRA SZKOŁA

Seria repetytoriów dla szkół średnich

MATEMATYKA

KOREPETYCJE MATURZYSTY



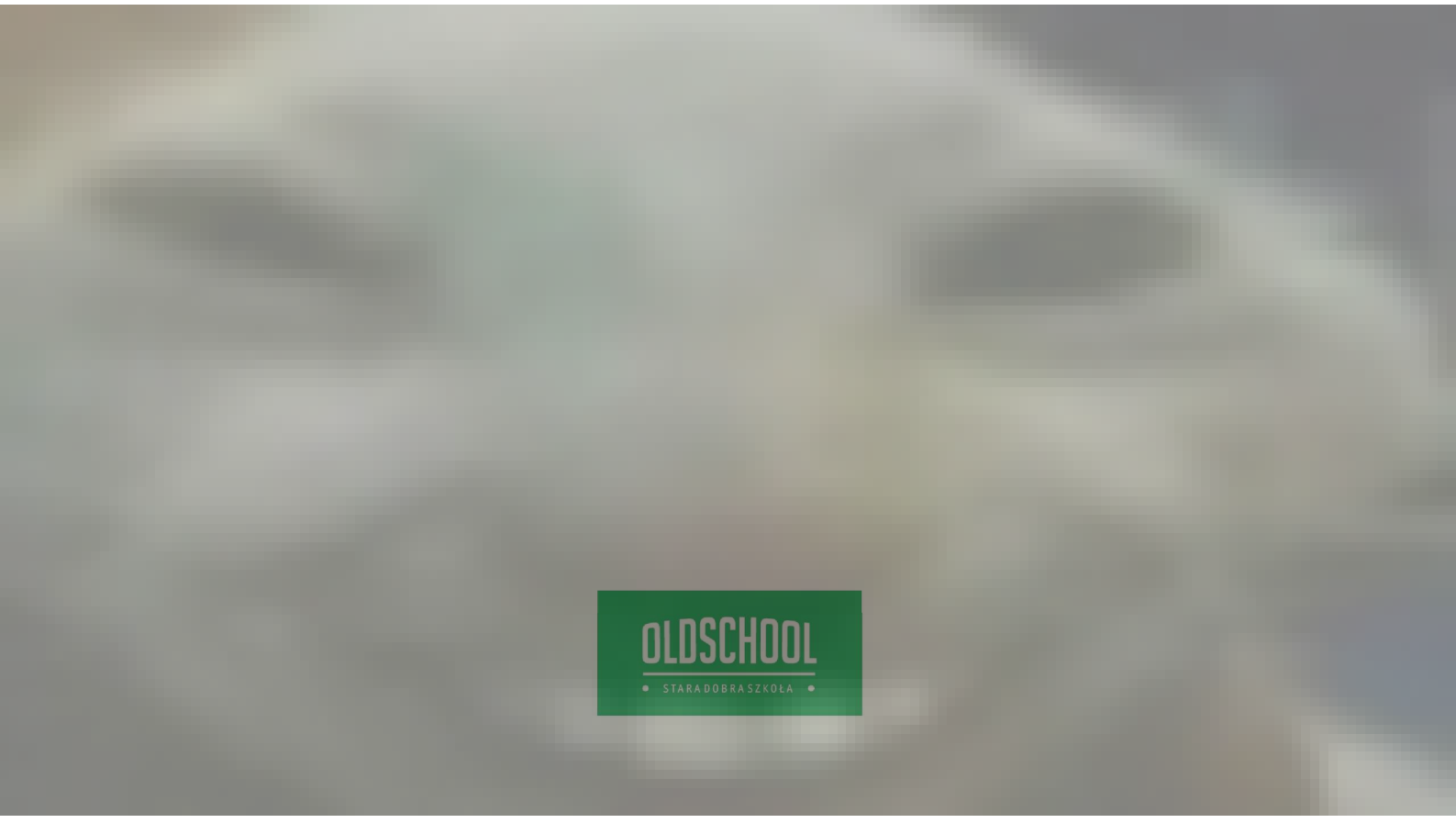
NASZ CEL:
MATURA
ZDANA NA 100%

TWÓJ DOMOWY NAUCZYCIEL

Danuta Zaremba

MATEMATYKA

KOREPETYCJE MATURZYSTY



OLDSCHOOL
STARA DOBRA SZKOŁA

Redaktor serii: **Marek Jannasz**
Konsultacja matematyczna: **dr Ryszard Kopiecki**
Redakcja i korekta: **Maria Bradło-Kusiak**
Projekt okładki: **Teresa Chylińska-Kur, KurkaStudio**
Projekt makiety i opracowanie graficzne: **Kaja Mikoszewska**

© Copyright by Wydawnictwo Lingo sp.j., Warszawa 2012

www.cel-matura.pl

ISBN: 9788363165734

Skład i łamanie: Kaja Mikoszewska
Druk i oprawa: Pozkal

Jest to książka dla wszystkich, którzy chcą powtórzyć i uzupełnić swoją wiedzę matematyczną przed maturą. Przypominając najważniejsze wiadomości, staram się to robić tak, aby Czytelnik miał szansę rozumienia co, jak i dlaczego. Rezygnuję ze zbędnych formalizmów, odwołując się w zamian do zdrowego rozsądku. Pokazuję, że nie trzeba obciążać pamięci dużą liczbą wzorów i reguł; wystarczy myśleć i kojarzyć.

Zachęcam do uczestniczenia w rozumowaniach przeprowadzanych w książce i samodzielnego szukania odpowiedzi na stawiane pytania. Warto też rozwiązywać sugerowane zadania. Rozwiązania można skonfrontować z zamieszczonymi odpowiedziami.

Na końcu każdego rozdziału omówione są zadania wybrane z matur (także próbnych) z kilku ostatnich lat, przy czym nie wszystkie zadania są cytowane w niezmienionej formie. Niektóre z nich są inaczej sformułowane, a zadania zamknięte zostały przedstawione jako otwarte. Oczywiście zadania można rozwiązywać różnymi sposobami – pokazałam te, które wydały mi się najprostsze.

Z życzeniami matury na 100 procent
dr Danuta Zaremba

Spis treści

Wstęp 3

1. LICZBY I DZIAŁANIA 7

Liczby jako punkty prostej 8
Odległość między liczbami 10
Kilka uwag o rachowaniu 12
Potęga o wykładniku całkowitym 14
Własności pierwiastków 17
Logarytmy 21
Przykłady ciągów liczbowych 23
Ciąg arytmetyczny 25
Ciąg geometryczny 27
Przegląd zadań maturalnych 30

2. PROCENTY 39

Poćwiczmy obliczanie w pamięci 40
Ile razy? O ile procent? 42
Jak omijać pułapki? 43
Proste obliczenia z kalkulatorem 45
Zamieniamy ułamek na procent 48
Dużo czy mało? 50
Procent procentu 51
Lokujemy pieniądze w banku 54
Punkty procentowe 57
Przegląd zadań maturalnych 58

3. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE 63

Co oznacza minus? 64
Przekształcanie wyrażeń algebraicznych 66
Wzory skróconego mnożenia 70
O dziedzinie i wartościach wyrażeń algebraicznych 73
Jak układać równania? 75
Jak rozwiązywać równania? 78
Uwagi o rozwiązywaniu nierówności 81
Przegląd zadań maturalnych 84

4. WŁASNOŚCI FIGUR PŁASKICH 101

Kąty w wielokątach 102
Kąty w kole 104
Co wynika z przystawania trójkątów? 106
Symetrie wielokątów 108
Co wynika z symetrii osiowej? 110
Co wynika z twierdzenia Pitagorasa? 112
Wielokąty podobne 116
Co wynika z podobieństwa trójkątów? 119
Obwód i pole 121
Przegląd zadań maturalnych 124

5. ELEMENTY GEOMETRII ANALITYCZNEJ NA PŁASZCZYŹNIE 139

Współrzędne punktu 140
Interpretacja geometryczna równań i nierówności 142
Równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych 145
Równanie dowolnej prostej 147
Przegląd zadań maturalnych 151

6. FUNKCJE 161

Proporcjonalność prosta i odwrotna 162
Funkcje – dziedzina, argumenty, wartości 164

Spis treści

Od wykresu do wykresu ____ 167
Funkcja liniowa ____ 169
Funkcje przedziałami liniowe ____ 171
Kilka wykresów funkcji kwadratowej ____ 173
Wyznaczanie wierzchołka paraboli ____ 175
Największa i najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale ____ 177
Rozwiązywanie nierówności kwadratowych ____ 179
Jeszcze dwie funkcje ____ 182
Przegląd zadań maturalnych ____ 184

7. BRYŁY 197

Graniastosłupy ____ 198
Ostrosłupy ____ 200
Kąt między prostą i płaszczyzną ____ 202
Kąt między płaszczyznami ____ 204
Walec i kula ____ 206
Stożek ____ 208
Przegląd zadań maturalnych ____ 211

8. TRYGONOMETRIA KĄTA OSTREGO 219

Kąt → trójkąt prostokątny → stosunki boków ____ 220
Zastosowania funkcji trygonometrycznych ____ 223
Związki między funkcjami trygonometrycznymi ____ 225
Przegląd zadań maturalnych ____ 228

9. ELEMENTY STATYSTYKI I RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA 235

Średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe ____ 236
Mediana i średnia arytmetyczna ____ 238
Średnia ważona i średnia arytmetyczna ____ 241
Iloma sposobami...? ____ 242
Kilka przykładów obliczania prawdopodobieństwa ____ 245
Przegląd zadań maturalnych ____ 248

1. Liczby i działania

Wcale nie tak rzadko słyszy się informację,

że pewna wielkość wyraża się ogromnymi cyframi.

Tymczasem najogromniejsza cyfra

w systemie dziesiętnym to 9...

Cyfry to znaki graficzne, które służą do zapisu liczb.

Nie zapominajmy o tym!

Liczby jako punkty prostej

Jak wiadomo, liczby można utożsamiać z punktami prostej, tworząc z niej oś liczbową. Na osi liczbowej jest nieskończenie wiele punktów reprezentujących te liczby, które można przedstawić w postaci ułamka, czyli ilorazu dwóch liczb całkowitych. Liczby takie nazywamy wymiernymi. Jak wiemy, przedstawienie liczby wymiernej w postaci ułamka nie jest jednoznaczne, na przykład $\frac{1}{3} = \frac{60}{20} = \frac{-2}{-6}$.

Pozostałe punkty osi liczbowej, a jest ich również nieskończenie wiele, reprezentują tzw. liczby niewymierne. Liczbami niewymiernymi są m.in. te pierwiastki (z liczb naturalnych), które nie są liczbami naturalnymi, na przykład $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{7}$ itd. Liczbą niewymierną jest także iloraz obwodu dowolnego koła i jego średnicy.

To, czy liczba jest wymierna czy niewymierna, można poznać po jej rozwinięciu dziesiętnym. Mianowicie liczby niewymierne, i tylko one, mają nieskończone rozwinięcia dziesiętne, które nie są okresowe. Na przykład rozwinięcie, w którym od pewnego miejsca powstarza się grupa cyfr 125788, przedstawia liczbę wymierną, a rozwinięcie postaci: zero, dwie jedynki, zero, trzy jedynki, zero, cztery jedynki itd. nie ma okresu i dlatego przedstawia liczbę niewymierną.

Liczby wymierne i niewymierne, tzn. wszystkie liczby z matematyki szkolnej, nazywamy liczbami rzeczywistymi[1]. Mówiąc „liczby", mamy na myśli liczby rzeczywiste.

Oś liczbową zwykle rysujemy poziomo, chociaż bardziej obrazowa byłaby oś pionowa. Na osi pionowej bardziej naturalne jest uporządkowanie liczb: im wyżej, tym większa. W sensie nierówności między liczbami -3 jest większe od -7, chociaż z życiowego punktu widzenia czasami jest inaczej. Na przykład mróz -7 jest większy niż -3.

[1] W matematyce wyższej są jeszcze inne rodzaje liczb.

Przejście do liczby przeciwnej do liczby a polega na odbiciu symetrycznym liczby a względem zera. W przypadku osi pionowej jest tak, że im liczba jest wyżej (niżej), tym liczba do niej przeciwna jest niżej (wyżej).

Stąd wynika, że nierówność między liczbami zmienia kierunek przy obustronnym przejściu do liczb przeciwnych.
Nie zapominaj o tym, mnożąc obie strony nierówności przez -1!

Jak wiemy, na osi liczbowej można dodawać liczby, startując z zera i przesuwając się po osi pionowej w górę lub w dół (lub w lewo i w prawo na osi poziomej) zgodnie z poszczególnymi składnikami. Na przykład $(-4) + 2 + (-3)$ to 4 jednostki w dół, potem 2 w górę, a na końcu 3 w dół.

Wyobraźmy sobie, że mamy dwie osie liczbowe. Na jednej z nich ktoś oblicza sumę pewnych składników. Jednocześnie na drugiej osi druga osoba dodaje liczby, które są przeciwne do kolejnych składników dodawanych na pierwszej osi. Wynikiem tego dodawania na jednej osi jest liczba (-6). Jaki jest wynik dodawania na drugiej osi?

Sprawdź, czy potrafisz

1. Porównaj wyniki dodawania:
$(-7) + (-3)$ oraz $7 + 3$, $(-7) + 3$ oraz $7 + (-3)$.

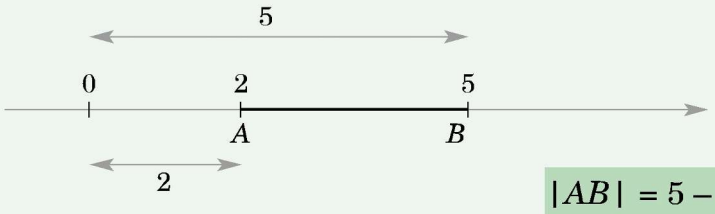
2. Suma liczb a i b jest równa 34. Ile wynosi suma liczby przeciwnej do a i przeciwnej do b?

1. Są liczbami przeciwnymi.
2. -34.

Podane przykłady można uogólnić: liczba przeciwna do sumy jest równa sumie liczb przeciwnych do składników.

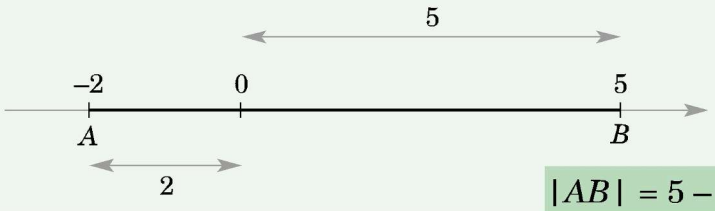
Odległość między liczbami

Dzięki umieszczeniu liczb na osi liczbowej możemy mówić o odległościach między nimi. Odległość między liczbami to długość odcinka je łączącego. Obliczając odległość, odejmujemy mniejszą liczbę od większej, co jest jasne w przypadku liczb dodatnich:

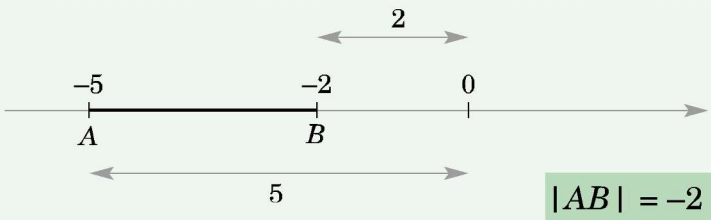


$|AB| = 5 - 2$

a mniej oczywiste, jeżeli co najmniej jedna liczba jest ujemna:

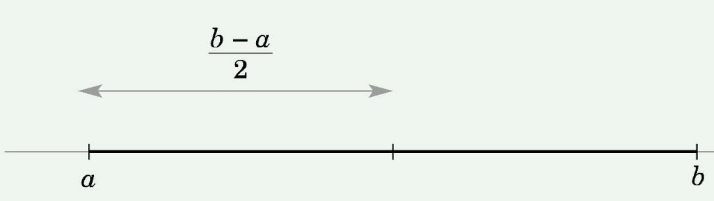


$|AB| = 5 - (-2) = 5 + 2$



$|AB| = -2 - (-5) = -2 + 5 = 5 - 2$

Zobaczmy, jak znaleźć środek odcinka o danych końcach. Posłużmy się rysunkiem:



$\text{środek} = a + \frac{b-a}{2}$

Ponieważ $a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, więc środek odcinka jest średnią arytmetyczną jego końców. Warto to zapamiętać.

Przypomnijmy, że odległość liczby od zera nazywamy wartością bezwzględną (lub modułem) tej liczby i oznaczamy pionowymi kreskami. Z tej definicji wynika, że wartość bezwzględna każdej liczby różnej od zera jest dodatnia, wartość bezwzględna zera jest równa zeru, a liczby przeciwne mają tą samą wartość bezwzględną.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Znajdź środek odcinka o końcach $-\frac{3}{2}$ i $\frac{3}{4}$.

2. Czy z równości $|a| = |b|$ wynika, że $a = b$?

3. Czy z nierówności $a < b$ wynika, że $|a| < |b|$?
A czy wynikanie odwrotne jest prawdziwe?

4. Na osi liczbowej zaznacz liczby, których wartość bezwzględna jest:
a) mniejsza od 5, b) większa od 7.

5. Posługując się osią liczbową, znajdź liczby x spełniające nierówność:
a) $|x| \leqslant 2$,
b) $|x| > 3$,
c) $|x| > -1$.

6. Ile rozwiązań ma równanie $|x| = a$, gdzie a jest stałą?
Wskazówka: rozważ przypadki: $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.

1. $-\frac{3}{8}$.
2. Nie, bo liczby mogą być przeciwne.
3. Oba wynikania są fałszywe. W pierwszym przypadku wystarczy podstawić $a = -2$, $b = 1$, a w drugim odwrotnie: $a = 1$, $b = -2$.
5. a) $-2 \leqslant x \leqslant 2$,
b) $x > 3$ lub $x < -3$,
c) x jest dowolną liczbą.
6. Dla $a < 0$ nie ma rozwiązań, dla $a = 0$ jest jedno, dla $a > 0$ są dwa rozwiązania.

Kilka uwag o rachowaniu

Jak obliczyć wartość wyrażenia $1000 - 689 + 94 - 121 + 689 - 92 + 120$? Czy opłaca się sięgać po kalkulator, wpisując do niego liczby i symbole działań?

Jeżeli ogarniemy wzrokiem całość, zauważymy, że działania można zredukować:

działania „odjąć 689” i „dodać 689” wzajemnie się znoszą,

„dodać 94” i „odjąć 92”, to „dodać 2”,

„odjąć 121” i „dodać 120”, to „odjąć 1”.

W rezultacie obliczenie wartości wyrażenia sprowadza się do działania $1000 + 1$.

Obliczając, ile pieniędzy jest na koncie Iksińskiego, jeżeli było tam 1721 zł, Iksiński podjął 350 zł, a potem na konto przyszedł przelew 380 zł, powiększamy 1721 o 30.

Obliczając sumę $1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 + 10$, warto połączyć 1 z 9, 2 z 8, a 3 z 7, bo wtedy wynik otrzymamy błyskawicznie.

W wyrażeniu $2\frac{3}{7} - 1\frac{1}{5} + \frac{6}{7} - 1\frac{2}{7}$ unikniemy sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika, jeżeli zaczniemy od działań na ułamkach o mianowniku 7, przy czym warto zmienić kolejność działań na $2\frac{3}{7} - 1\frac{2}{7} + \frac{6}{7}$.

W wyrażeniu $1\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$ nie unikniemy przejścia przez wspólny mianownik, ale i tak opłaca się najpierw wykonać działania na ułamkach o jednakowych mianownikach, a dopiero potem sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika.

Racjonalne obliczenia nie tylko pozwalają uniknąć
żmudnych rachunków, ale także zmniejszają ryzyko błędów,
o czym chyba nie trzeba nikogo przekonywać.

Obliczając wartość wyrażenia $2 + 3 \cdot 4$ czy $2 - 3 \cdot 4$, pamiętajmy o umowie, która daje pierwszeństwo mnożeniu przed dodawaniem i odejmowaniem, o ile w wyrażeniu nie ma nawiasów.

Dzielenie w wyrażeniach arytmetycznych jest zwykle pisane w postaci ułamka i wtedy kolejność działań jest oczywista. Na przykład wyrażenie $\frac{3 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{3 \cdot 4 + 9}$ oznacza dzielenie licznika przez mianownik. Wyrażenie to można by zapisać w postaci $(3 \cdot 5 + 6 \cdot 4) : (3 \cdot 4 + 9)$, ale kreska ułamkowa zamiast dwukropka ma wiele zalet – na przykład łatwiej upraszczać. W podanym przykładzie licznik i mianownik można podzielić przez 3. Nie zapominajmy przy tym, że dzieląc sumę, trzeba podzielić każdy składnik: $(3 \cdot 5 + 6 \cdot 4) : 3 = 5 + 2 \cdot 4$, $(3 \cdot 4 + 9) : 3 = 4 + 3$. Stąd $\frac{3 \cdot 5 + 6 \cdot 4}{3 \cdot 4 + 9} = \frac{13}{7}$.

Podobnie, dzieląc przez 2 licznik i mianownik ułamka $\frac{4 - 2 \cdot 6}{4 - 2 \cdot 5}$, otrzymamy $\frac{2 - 6}{2 - 5}$, czyli $\frac{4}{3}$.

> Pamiętaj, że mnożąc sumę, mnożymy każdy jej składnik.
> Analogiczna uwaga dotyczy różnicy. Własności te noszą nazwę
> praw rozdzielności mnożenia względem dodawania i odejmowania.

Upraszczając ułamki piętrowe, mnożymy licznik i mianownik przez wspólny mianownik wszystkich występujących tam ułamków. Na przykład upraszczając ułamek $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{5}{6}}$, pomnóżmy licznik i mianownik przez 6, aby pozbyć się występujących tu ułamków:

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{5}{6}} = \frac{2 - 3}{6 + 5} = -\frac{1}{11}.$$

A jak uprościć ułamek $\frac{0{,}18 - 0{,}3}{0{,}04}$?

Mnożąc licznik i mianownik przez 100, otrzymujemy $\frac{18 - 30}{4}$, czyli -3.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz w pamięci: a) $134 + 155 + 234 - 55$, b) $7391 - 102 - 356 + 358$.

2. Pomnóż licznik i mianownik przez tę samą liczbę tak, by zlikwidować występujące tam ułamki, a potem oblicz:

a) $\dfrac{3-\frac{1}{2}\cdot 5}{\frac{3}{4}+3\cdot\frac{1}{2}}$, b) $\dfrac{\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{1}{3}}$.

1. a) 468, b) 7291. **2.** a) $\frac{2}{9}$, b) $-\frac{1}{14}$.

Potęga o wykładniku całkowitym

Zacznijmy od wykładnika naturalnego. Jak wiadomo, potęgowanie o wykładniku 2, 3, 4, ... oznacza mnożenie: $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$ itd. Wobec tej definicji logiczne wydaje się przyjęcie umowy, że $a^1 = a$.

Zauważmy, że w przypadku wykładnika parzystego potęga dowolnej liczby jest nieujemna. Ponadto nie zależy od znaku liczby, a tylko od jej bezwzględnej wartości; jest taka sama dla liczb przeciwnych.

W tym miejscu zwróćmy uwagę na konieczność pisania nawiasu w przypadku potęgowania liczby ujemnej. Podnosząc do potęgi liczbę ujemną, trzeba ją ująć w nawias. Zatem -2 do potęgi n to $(-2)^n$, a nie -2^n. Jeżeli bowiem n jest parzyste, to liczby te są różne: $(-2)^n > 0$, a $-2^n < 0$. Na przykład $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$, a $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$.

Z definicji potęgowania, jeżeli napiszemy potęgi w postaci iloczynów, otrzymamy własności:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Przydają się one w rachunkach. Na przykład:

$$5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4, \quad \frac{6^4}{3^4} = \left(\frac{6}{3}\right)^4 = 2^4.$$

Przypomnijmy podstawowe prawa działań na potęgach o tej samej podstawie. Jest jasne, że mnożąc dwie potęgi, otrzymujemy iloczyn, w którym jest tyle czynników, ile w sumie jest w obu potęgach.

Na przykład a^5 oznacza iloczyn 5 czynników, a^3 oznacza iloczyn 3 czynników, więc $a^5 \cdot a^3$ to a^{5+3}.

Przy dzieleniu potęg otrzymujemy ułamek, w którym czynniki się skracają. Na przykład w ułamku $\frac{a^5}{a^3}$ wszystkie 3 czynniki mianownika kasują się z 3 czynnikami licznika, skąd $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3}$.

> Pamiętaj, że przy mnożeniu potęg o jednakowych podstawach wykładniki dodajemy, a przy dzieleniu potęg wykładniki odejmujemy.

Z pierwszej z tych własności wynika, że $(a^n)^k = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{k \text{ czynników}} = \overbrace{a^{n+n+\ldots+n}}^{k \text{ składników}} = a^{kn}$.

> Nie zapominaj, że przy potęgowaniu potęgi wykładniki mnożymy.

A jak rozszerzyć potęgowanie na wykładniki całkowite? Jak określić a^0 czy a^{-3}? Czym się kierować?

Przyjęto definicję, która pozwoliła zachować prawa działań na potęgach. W szczególności jeżeli własność

$$(*)\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ dla } a \neq 0$$

ma być prawdziwa także dla równych wykładników, to $1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$. W konsekwencji przyjmujemy, że

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0.$$

Symbol 0^0 jest nieokreślony.

Jeżeli własność (*) ma być prawdziwa także dla $n < m$, to dla a ≠ 0 otrzymamy:

$$a^{-1} = a^{1-2} = \frac{a^1}{a^2} = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = a^{1-3} = \frac{a^1}{a^3} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2} \quad \text{itd.}$$

Przy takim określeniu potęg każdy ułamek dziesiętny można przedstawić jako kombinację potęg liczby dziesięć. Na przykład:

$$375{,}412 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}.$$

Potęgi dziesiątki przydają się do zwięzłego zapisywania liczb zawierających dużo zer. Na przykład:

$$23\,000\,000 = 23 \cdot 10^6, \quad 0{,}0001 = 10^{-4}, \quad 0{,}000045 = 45 \cdot 10^{-6}.$$

Prawa dotyczące podnoszenia do potęgi iloczynu i ilorazu, a także prawa mnożenia, dzielenia i potęgowania potęg o tej samej podstawie odnoszą się do wszystkich wykładników całkowitych.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) $x^5 \cdot x^2 \cdot x$, b) $(x^4)^4$.

2. Ile razy liczba 5^{15} jest większa od liczby 5^{13}?

3. Oblicz:

a) $\frac{100^{16} \cdot 100^4}{100^{15} \cdot 100^5}$, b) $\frac{3^5 \cdot 3^4 \cdot (2^4)^3}{(2^3)^4 \cdot (3^2)^5}$

4. Oblicz:

a) $100^3 : 25^3$, b) $2^6 \cdot (\frac{1}{2})^7$,

c) $(\frac{2}{5})^4 \cdot 5^4$, d) $7^2 \cdot (\frac{1}{14})^2$.

5. Zapisz, posługując się potęgami dziesiątki:

a) $0{,}0000003$,

b) $0{,}00000234$.

6. Przedstaw w postaci jednej potęgi:

a) $3^{-6} \cdot 3^{-16}$, b) $3^{-6} : 3^{-16}$, c) $3^{-7} \cdot 3^5$.

1. a) x^8, b) x^{16}.
2. 25.
3.
4. a) 1, b) $\frac{1}{3}$.
5. a) $3 \cdot 10^{-7}$, b) $2 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-7} + 4 \cdot 10^{-8}$ lub $234 \cdot 10^{-8}$.
6. a) 3^{-32}, b) 3^{10}, c) 3^{-2}.

Własności pierwiastków

Jak wiadomo, pierwiastkowanie jest w pewnym sensie czynnością odwrotną do potęgowania o wykładniku całkowitym większym od 1. Mając wynik potęgowania i wykładnik, szukamy podstawy.

Na przykład jeżeli $x^3 = 8$, to $x = 2$, a jeżeli $x^n = 0$, to $x = 0$.

Podstawa nie zawsze jest wyznaczona jednoznacznie, na przykład jeżeli $x^2 = 9$, to $x = 3$ lub $x = -3$. Aby mieć jednoznaczność, rozpatrujemy tylko podstawy nieujemne ($x \geqslant 0$). I tak właśnie określamy pierwiastek arytmetyczny[2]:

$$x = \sqrt[n]{a}, \text{ jeżeli } x^n = a \text{ i } x \geqslant 0.$$

Skoro $x \geqslant 0$, to $a \geqslant 0$. Zatem pierwiastek arytmetyczny jest określony tylko dla liczb nieujemnych.

Pierwiastek arytmetyczny będziemy nazywać krótko pierwiastkiem.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Podaj wyniki działań:

a) $(\sqrt{3})^2$, b) $(\sqrt[n]{a})^n$, c) $\sqrt{(-3)^2}$.

2. Sprawdź, czy równości są prawdziwe:

a) $\sqrt{10^4} = 10^2$, b) $\sqrt[3]{333^3} = 333$, c) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{5^2}$.

1.
a) 3, b) a, c) 3.

2.
Wszystkie równości są prawdziwe.

Pamiętaj, że równość $\sqrt{a^2} = a$ jest prawdziwa tylko dla $a \geqslant 0$, bo pierwiastek z definicji jest nieujemny. Nie znając znaku liczby podpierwiastkowej, musimy posłużyć się modułem: $\sqrt{a^2} = |a|$.

W zadaniach rachunkowych z pierwiastkami często przydaje się własność, w myśl której pierwiastek iloczynu jest równy iloczynowi pierwiastków:

[2] Jest jeszcze inny pierwiastek, zwany algebraicznym.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Wynika ona stąd, że $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$.

Własność ta pozwala wyłączać czynnik przed pierwiastek, na przykład:
$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

Niekiedy stosujemy własność w drugą stronę, zastępując kilka pierwiastków jednym, na przykład: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10} = \sqrt{100} = 10$.

Analogiczną własność ma pierwiastek ilorazu: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Natomiast inaczej jest z pierwiastkiem sumy i różnicy, co widać na przykładach:

$$\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} > 2, \text{ więc } \sqrt{2+2} \neq \sqrt{2} + \sqrt{2},$$
$$\sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{2} - \sqrt{1} < 1, \text{ więc } \sqrt{2-1} \neq \sqrt{2} - \sqrt{1}.$$

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz, zamieniając na pierwiastek iloczynu lub ilorazu:

a) $\sqrt{12{,}1} \cdot \sqrt{10}$, b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{250}$,

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$, d) $\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{3}}$, e) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$.

2. Wyłącz czynnik przed pierwiastek:

a) $\sqrt{12}$, b) $\sqrt{18}$, c) $\sqrt{45}$, d) $\sqrt{12a^2}$ dla $a > 0$.

3. Włącz czynnik pod pierwiastek:

a) $2\sqrt{2}$, b) $2\sqrt[3]{2}$, c) $\frac{1}{2}\sqrt{8}$, d) $5\sqrt{\frac{1}{5}}$.

1. a) 11, b) 10,
c) 9, d) 10, e) 3.
2. a) $2\sqrt{3}$,
b) $2\sqrt{3}$,
c) $3\sqrt{5}$,
d) $2a\sqrt{3}$.
3. a) $\sqrt{8}$,
b) $\sqrt[3]{16}$,
c) $\sqrt{2}$,
d) $\sqrt{5}$.

Zastanówmy się, jak porównać liczby $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ i $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Nie tak łatwo stwierdzić od razu, która z liczb jest większa. A może są równe?

Spróbujmy przekształcić liczby do postaci, w której w mianownikach nie ma pierwiastków. Inaczej mówiąc, usuńmy niewymierności z mianowników:

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{3}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3},$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}.$$

Ponieważ $2 > \frac{5}{3}$, więc większa jest druga liczba.

O usuwaniu niewymierności z mianownika w bardziej skomplikowanych przypadkach będzie mowa przy wzorach skróconego mnożenia.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$, b) $\frac{3}{a\sqrt{a}}$, gdzie $a > 0$.

2. Która z liczb $\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ i $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ jest większa?

1. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, b) $\frac{3\sqrt{a}}{a^2}$.

2. Ta pierwsza.

Na koniec przypomnijmy, że za pomocą pierwiastków definiujemy potęgę o dowolnym wykładniku wymiernym. Jeżeli liczba wymierna ma postać $\frac{p}{q}$, gdzie $q > 0$, to $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Można wykazać, że zmieniając kolejność działań po prawej stronie równości, nie zmienimy wartości wyrażenia: $\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$.

Z definicji potęgi wymiernej wynika, że jest ona określona tylko dla liczb dodatnich i jej wartościami są również tylko liczby dodatnie.

Własności dotyczące mnożenia, dzielenia i potęgowania potęg o tych samych podstawach przysługują również potęgom o wykładnikach wymiernych.

Logarytmy

Podobnie jak pierwiastkowanie, logarytmowanie jest również czynnością odwrotną do potęgowania, chociaż w innym sensie. Mając podstawę (różną od 1) i wynik potęgowania, obie liczby dodatnie, szukamy wykładnika. Na przykład jeżeli $2^x = 16$, to $x = 4$, a jeżeli $3^x = \frac{1}{3}$, to $x = -1$.

Ten wykładnik to właśnie logarytm. Ogólnie:

$$\log_a b = x, \text{ jeżeli } a^x = b.$$

Zauważmy, że podstawa logarytmu (liczba a) jest zarazem podstawą potęgi.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz:

a) $\log_{10}100$, b) $\log_{100}10$, c) $\log_3 27$, d) $\log_4\frac{1}{4}$,

e) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$, f) $\log_2 4$.

2. Oblicz: a) $\log_{123}123$, b) $\log_a a$, c) $\log_8 1$,

d) $\log_a 1$, e) $\log_2 2^{100}$.

1. a) 2, b) $\frac{1}{2}$, c) 3, d) −1, e) 3, f) 2.
2. a) 1, b) 1, c) 0, d) 0, e) 100.

W zadaniach rachunkowych korzystamy z własności dotyczących logarytmu iloczynu, logarytmu ilorazu i logarytmu potęgi. Wyprowadzimy te własności, korzystając z własności potęgowania.

Zacznijmy od przekształcenia $\log_a (b \cdot c)$.

Oznaczmy: $\log_a b = x$ oraz $\log_a c = y$. Wtedy $a^x = b$ i $a^y = c$, skąd $a^x \cdot a^y = b \cdot c$.
Ponieważ przy mnożeniu potęg wykładniki dodajemy, więc $a^{x+y} = b \cdot c$.
Oznacza to, że $\log_a (b \cdot c) = x + y$, czyli

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Analogicznie, korzystając z własności, że przy dzieleniu potęg wykładniki odejmujemy, dochodzimy do równości

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Własności te warto pamiętać: logarytm iloczynu (ilorazu) jest równy sumie (różnicy) logarytmów.

Pozostaje jeszcze wyprowadzić wzór na $\log_a b^c$, gdzie c jest dowolną liczbą. Oznaczając $\log_a b = x$, otrzymamy $a^x = b$. Stąd $(a^x)^c = b^c$. Korzystając z własności, że potęgując potęgę, wykładniki mnożymy, mamy $a^{c \cdot x} = b^c$. Oznacza to, że $\log_a b^c = c \cdot x$, czyli

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b.$$

To też warto wiedzieć: logarytmując potęgę, wyłączamy wykładnik przed logarytm.

A oto przykłady zastosowania poznanych własności:

$$\log_2 12 = \log_2 (4 \cdot 3) = \log_2 4 + \log_2 3 = 2 + \log_2 3,$$

$$\log_a 23 + \log_a \frac{1}{23} = \log_a \left(23 \cdot \frac{1}{23}\right) = \log_a 1 = 0,$$

$$\log_3 21 - \log_3 7 = \log_3 \frac{21}{7} = \log_3 3 = 1,$$

$$\log_2 4^{35} = 35 \log_2 4 = 35 \cdot 2 = 70.$$

Przykłady ciągów liczbowych

Zacznijmy od przykładu ciągu nieskończonego: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Widząc kilka początkowych wyrazów, dostrzegamy regułę, w myśl której ciąg został utworzony. Potrafimy powiedzieć, jaka liczba jest na piątym miejscu, jaka na dziesiątym, a jaka na tysięcznym. Zauważamy, że mianownik pokrywa się z numerem miejsca, na którym stoi dany wyraz. Oznaczając wyrazy ciągu przez a_1, a_2, ..., mamy $a_5 = \frac{1}{5}$, $a_{10} = \frac{1}{10}$, $a_{1000} = \frac{1}{1000}$. Umiemy to zapisać w sposób ogólny: $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

A jak zapisać wzorem ogólnym ciąg $3, 6, 9, 12, \ldots$?

Skoro $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$, $a_4 = 12$, ..., to $a_n = 3n$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Podaj wzór ogólny ciągu:

a) $1, 2, 3, \ldots$ b) $2, 4, 6, \ldots$ c) $-1, -2, -3, \ldots$ d) $1, 3, 5, \ldots$

2. Podaj wzór ogólny ciągu liczb naturalnych podzielnych przez 4.

3. Oblicz a_1, a_2 i a_3, jeżeli $a_n = (-2)^n$.

1. a) $a_n = n$, b) $a_n = 2n$, c) $a_n = -n$, d) $a_n = 2n - 1$. **2.** $a_n = 4n$. **3.** $a_1 = -2$, $a_2 = 4$, $a_3 = -8$.

A jak zmieni się wzór na n-ty wyraz ciągu, jeżeli co drugi wyraz zmienimy na przeciwny? Jak zapisać wzorem ciąg $-3, 6, -9, 12, \ldots$?

W tego typu przypadkach wykorzystuje się czynnik $(-1)^n$, który na przemian przyjmuje wartość -1 i 1. Wyrazy o numerach parzystych mnoży się więc przez 1, a o numerach nieparzystych przez -1. Szukany wzór przyjmie postać $a_n = (-1)^n \cdot 3n$.

Gdyby zmieniać wyrazy na przeciwne, zaczynając od drugiego, to we wzorze ogólnym wykładnik trzeba by przesunąć o 1. Istotnie, jeżeli $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3n$, to $a_1 = 3$, $a_2 = -6$, $a_3 = 9$, ...

Wśród ciągów szczególną rolę odgrywają ciągi arytmetyczne i geometryczne.

Przypomnijmy, że ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg, w którym różnica między dwoma kolejnymi wyrazami jest stała; ściślej mowiąc stała jest różnica $a_n - a_{n-1}$ dla $n = 2, 3, \ldots$. Natomiast w ciągu geometrycznym stały jest iloraz sąsiednich wyrazów, tzn. stały jest iloraz $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ dla $n = 2, 3, \ldots$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Które z podanych ciągów są arytmetyczne, a które geometryczne:

a) $0, -1, -2, -3, \ldots$

b) $0, -1, 2, -3, \ldots$

c) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

d) $5, 10, 20, 40, 80, \ldots$

2. Podaj przykład ciągu o wyrazach malejących, który jest:

a) arytmetyczny,

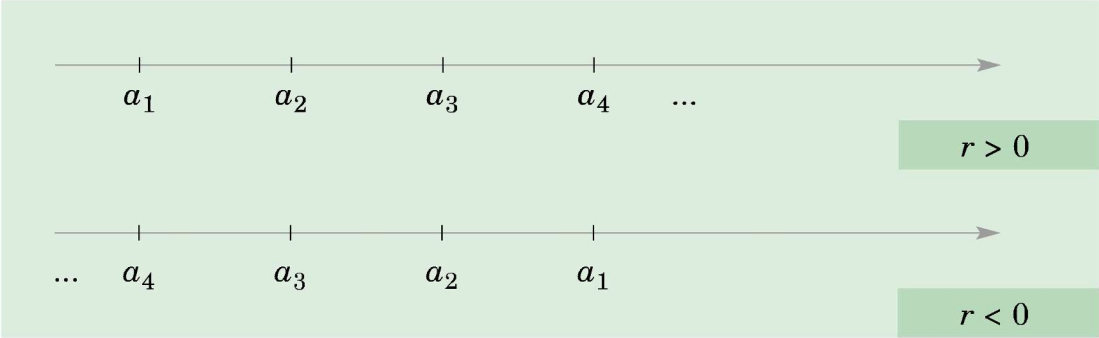
b) geometryczny.

1. a) Ciąg arytmetyczny, c) i d) ciągi geometryczne.

Ciąg arytmetyczny

Różnicę między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego tradycyjnie oznaczamy literą r, tzn. $a_n - a_{n-1} = r$ dla każdego $n > 1$. Inaczej mówiąc, $a_n = a_{n-1} + r$.

Jeżeli $r > 0$, to ciąg jest rosnący, a jeżeli $r < 0$, to ciąg jest malejący:



Jak widać z rysunku, każdy wyraz ciągu arytmetycznego o numerze większym od 1 leży w połowie odcinka, którego końcami są wyrazy sąsiednie, więc jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.

Widzimy też, że odcinek łączący dwa dowolne wyrazy ciągu jest wielokrotnością odcinka łączącego dwa wyrazy sąsiednie. Stąd wynika, że różnica między dwoma dowolnymi wyrazami jest wielokrotnością r.

Na przykład znajdźmy różnicę $a_9 - a_5$.

Ile razy trzeba dodawać r do a_5, aby otrzymać a_9? Dodając raz, otrzymujemy a_6, dodając drugi raz otrzymamy a_7, dodając trzeci raz otrzymamy a_8, a za czwartym razem otrzymamy a_9. Jak widać, dodajemy r tyle razy, ile jest liczb naturalnych od 6 do 9, czyli $9 - 5$. Zatem $a_9 - a_5 = (9 - 5) \cdot r$.

Podobnie obliczymy, że $a_{13} - a_8 = (13 - 8)r$ oraz $a_n - a_1 = (n - 1)r$.

Korzystając z tych zależności, możemy obliczyć dowolny wyraz ciągu arytmetycznego, jeżeli znamy jeden z jego wyrazów i różnicę, a także możemy obliczyć różnicę ciągu, znając dwa jego wyrazy.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Jeden z wyrazów ciągu arytmetycznego jest równy 5. Znajdź dwa wyrazy następne i jeden poprzedni, jeżeli różnica ciągu jest równa: a) 2, b) –2.

2. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, a dziesiąty 4. Oblicz różnicę ciągu.

3. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy –3 jest równy 2. Oblicz dwudziesty wyraz tego ciągu.

1. a) Dwa następne wyrazy to 7, 9, a poprzedni to 3, b) dwa następne wyrazy to 3, 1, a poprzedni to 7.
2. $\frac{1}{9}$.
3. –52.

Przypomnijmy wzór na sumę dowolnej liczby początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Zgodnie z tradycją, oznaczamy

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \tag{1}$$

Zauważmy, że suma wyrazu pierwszego i ostatniego jest taka sama, jak suma wyrazu drugiego i przedostatniego.Wynika to stąd, że drugi wyraz powstaje z pierwszego przez dodanie r, a przedostatni powstaje z ostatniego przez odjęcie r. Mamy więc $a_2 = a_1 + r$ oraz $a_{n-1} = a_n - r$, skąd $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$. Postępowanie to można kontynuować: odliczając po tyle samo miejsc od pierwszego i ostatniego, otrzymujemy wyrazy, z których jeden powstaje z pierwszego wyrazu przez kilkakrotne dodanie r, a drugi powstaje z ostatniego przez odjęcie r tyle samo razy. Zatem suma takiej pary wyrazów to $a_1 + a_n$.

Napiszmy jeszcze raz sumę S_n, tym razem w kolejności od wyrazu ostatniego do pierwszego:

(2) $$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Dodajmy stronami równości (1) i (2), przy czym dodawajmy w kolumnach, łącząc po dwa wyrazy: $a_1 + a_n$, $a_2 + a_{n-1}$, $a_3 + a_{n-2}$ itd. Otrzymamy n składników, z których każdy jest równy $a_1 + a_n$. Zatem:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz sumę liczb naturalnych od 1 do 1000.

2. Suma 10 wyrazów ciągu arytmetycznego $a_1, a_2, \ldots$ jest równa 110, a $a_1 = 2$. Oblicz a_{10}.

1. 500 500.
2. 20.

Ciąg geometryczny

Iloraz sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego tradycyjnie oznaczamy literą q, tzn. $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ dla każdego $n > 1$. Inaczej mówiąc, $a_n = a_{n-1} \cdot q$.

Ciąg geometryczny może być rosnący, malejący lub żaden z tych dwóch, co pokazują przykłady:

$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

$2, -4, 8, -16, 32, \ldots$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Pierwszy ciąg jest rosnący, bo iloraz jest większy od 1. Drugi ciąg nie jest ani rosnący ani malejący, wyrazy są na przemian dodatnie i ujemne, bo iloraz jest ujemny. Trzeci ciąg jest malejący, bo iloraz jest ułamkiem właściwym (dodatnim).

Zauważmy, że ponieważ w dowolnym ciągu geometrycznym każdy wyraz powstaje z poprzedniego przez pomnożenie przez q, więc można go otrzymać także z dowolnego wyrazu wcześniejszego, mnożąc ten wyraz przez odpowiednią potęgę q.

Na przykład zobaczmy, jak otrzymać a_9 z a_5.

Ile razy trzeba mnożyć a_5 przez q, aby otrzymać a_9? Mnożąc raz, otrzymamy a_6, mnożąc drugi raz, otrzymamy a_7, mnożąc trzeci raz, otrzymamy a_8, a za czwartym

Sprawdź, czy potrafisz

1. Jeden z wyrazów ciągu geometrycznego jest równy 9. Znajdź dwa wyrazy następne i trzy poprzednie, jeżeli iloraz ciągu jest równy 3.

2. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3, a piąty 48. Oblicz iloraz ciągu.

3. Drugi wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie $\frac{1}{2}$ jest równy 2. Oblicz siódmy wyraz tego ciągu.

1. Wyrazy następne: 27, 81, wyrazy poprzednie: $3, 1, \frac{1}{3}$.
2. 2 lub −2.
3. $\frac{1}{16}$.

razem otrzymamy a_9. Jak widać, mnożymy przez q tyle razy, ile jest liczb od 6 do 9, czyli 9 – 5. Zatem $a_9 = a_5 \cdot q^{9-5}$.

Podobnie obliczymy, że $a_{13} = a_8 \cdot q^{13-8}$ oraz $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Korzystając z tych zależności, możemy obliczyć dowolny wyraz ciągu geometrycznego, jeżeli znamy jeden z jego wyrazów i iloraz, a także możemy obliczyć iloraz ciągu, znając dwa jego wyrazy.

Na zakończenie przypomnijmy wzór na sumę dowolnej liczby początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Oznaczmy

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Wyrażając każdy składnik tej sumy za pomocą a_1, otrzymujemy:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Pomnóżmy przez q obie strony otrzymanej równości, rozdzielając mnożenie po prawej stronie na poszczególne składniki. Otrzymamy:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n.$$

Zauważmy, że $a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}$ jest sumą kolejnych wyrazów ciągu od a_2 do a_n, zatem uzupełniając tę sumę o a_1, otrzymamy S_n. Dodajmy więc a_1 do obu stron równości:

$$S_n \cdot q + a_1 = \underbrace{a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1}}_{S_n} + a_1 \cdot q^n,$$

czyli $S_n \cdot q = S_n + a_1 \cdot q^n - a_1$.

Otrzymaną równość przekształćmy tak, aby wyznaczyć z niej S_n:

$$S_n \cdot q - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1,$$
$$S_n(q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1),$$
$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}.$$

Sprawdź, czy potrafisz

1. Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 63, a iloraz jest równy 2. Oblicz pierwszy wyraz ciągu.

2. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie 2 jest równy 5. Znajdź najmniejsze n, dla którego suma n początkowych wyrazów ciągu jest większa od 100.

1. 1.
2. 5.

Przegląd zadań maturalnych

Oblicz $63^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$.

Chodzi tu o takie uproszczenie wyrażenia, aby rachunki były łatwe. Nasuwa się pomysł rozłożenia liczby 63 na czynniki tak, aby pojawiła się liczba 3.

Ponieważ $63 = 3 \cdot 21 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$,

więc $63^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = (3^2 \cdot 7)^2 \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{(3^2)^2 \cdot 7^2}{3^4} =$

$= \frac{3^4 \cdot 7^2}{3^4} = 7^2 = 49.$

Oblicz

$|5-7| - |-3+4|.$

$|5-7| - |-3+4| =$

$= |-2| - |1| = 2 - 1 = 1.$

Oblicz $\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}$.

$$\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}} = \frac{\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{1}{2^2\cdot 3}}{\frac{1}{2\cdot 3^2}} =$$

$$= \frac{1}{2^2\cdot 3}\cdot 2\cdot 3^2 = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Można obliczać inaczej, korzystając od razu z reguł potęgowania:

$$\frac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}} = 2^{-2-(-1)}\cdot 3^{-1-(-2)} =$$

$$= 2^{-1}\cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Oblicz $32^{-3} : \left(\frac{1}{8}\right)^4$.

$$32^{-3} : \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{32^3}\cdot 8^4 = \frac{8^4}{(4\cdot 8)^3} =$$

$$= \frac{8^4}{4^3\cdot 8^3} = \frac{8}{4^3} = \frac{2\cdot 4}{4^3} = \frac{2}{4^2} = \frac{1}{8}$$

Rachunki będą nieco prostsze, jeżeli zarówno 32, jak i 8 przedstawimy jako potęgi liczby 2:

$$32^{-3} : \left(\frac{1}{8}\right)^4 = (2^5)^{-3}\cdot(2^3)^4 =$$

$$= \frac{1}{(2^5)^3}\cdot 2^{12} = \frac{2^{12}}{2^{15}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Oblicz: **a)** $\log_5 5 - \log_5 125$, **b)** $\log_4 8 + \log_4 2$, **c)** $2\log_{\frac{1}{3}} 9$, **d)** $\log_3 \frac{1}{27}$.

a) Korzystamy z definicji logarytmu: $\log_5 5 = 1$, bo $5^1 = 5$, a $\log_5 125 = 3$, bo $5^3 = 125$. Wynikiem obliczeń jest więc -2.

b) Najlepiej zastąpić sumę logarytmów logarytmem iloczynu:

$$\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4 (8\cdot 2) = \log_4 16 = 2.$$

Obliczenie każdego z dwóch logarytmów oddzielnie jest trudniejsze, ale możliwe: $\log_4 8 = \frac{3}{2}$, bo $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8$, a $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, bo $\sqrt{4} = 2$.

c) $2\log_{\frac{1}{3}} 9 = 2\cdot(-2) = -4$.

d) Ponieważ $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$, więc $\log_3 \frac{1}{27} = -3$.

Podaj wartość x, dla której $\log_3 x = 9$.

Z definicji logarytmu wynika, że $x = 3^9$.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot (3 - n)$. Oblicz a_3, a_4 i a_5.

Do wzoru określającego ciąg trzeba w miejsce n podstawić kolejno liczby 3, 4 i 5. Otrzymamy: $a_3 = 0$, $a_4 = (-1)^4 \cdot (3 - 4) = -1$, $a_5 = (-1)^5 \cdot (3 - 5) = 2$.

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 13$ i $a_5 = 39$. Oblicz a_1.

Korzystając z równości $a_3 - a_1 = a_5 - a_3$, otrzymamy $a_3 - a_1 = 26$. Zatem $13 - a_1 = 26$, skąd $a_1 = -13$.

Można także od razu skorzystać z wzoru $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, podstawiając $n = 20$.

W ciągu arytmetycznym trzeci wyraz jest równy 14, a jedenasty jest równy 34. Oblicz różnicę tego ciągu.

Skorzystamy ze związku $a_{11} = a_3 + (11 - 3) \cdot r$. Otrzymamy $34 = 14 + 8r$, skąd $r = \frac{5}{2}$.

W ciągu arytmetycznym $a_1 = 3$ oraz $a_{20} = 7$. Oblicz sumę $a_1 + a_2 + \ldots + a_{19} + a_{20}$.

Sumę $a_1 + a_2 + \ldots + a_{19} + a_{20}$ można obliczyć bezpośrednio, łącząc wyraz pierwszy z ostatnim, drugi z przedostatnim itd.

Takich par jest 10, a suma wyrazów w każdej parze jest taka sama jak w pierwszej parze, więc wynosi 10. Zatem szukana suma jest równa $10 \cdot 10$, czyli 100.

Wykaż, że liczba 3^{54} jest rozwiązaniem równania $243^{11} - 81^{14} + 7x = 9^{27}$.

Trzeba pokazać, że $243^{11} - 81^{14} + 7 \cdot 3^{54} = 9^{27}$. W tym celu występujące tu liczby przedstawmy w postaci iloczynów tak, aby jak najwięcej razy występował czynnik 3.

Zatem: $81 = 3^4$, $243 = 3 \cdot 81 = 3 \cdot 3^4 = 3^5$, $9 = 3^2$.

Hipotetyczna równość przybiera wtedy postać $(3^5)^{11} - (3^4)^{14} + 7 \cdot 3^{54} = (3^2)^{27}$.

Korzystając z wzoru na potęgowanie potęgi, otrzymujemy $3^{55} - 3^{56} + 7 \cdot 3^{54} = 3^{54}$.

Po lewej stronie wyłączamy przed nawias 3^{54}, otrzymując $3^{54}(3 - 3^2 + 7) = 3^{54}$.

Równość ta jest prawdziwa, ponieważ $3 - 3^2 + 7 = 1$.

Wykaż, że w dowolnym ciągu arytmetycznym (a_n) zachodzi równość $a_{k-1} + a_{k+1} = 2a_k$ dla dowolnego wskaźnika $k > 1$.

Wystarczy skorzystać z tego, że $a_{k-1} = a_k - r$ oraz $a_{k+1} = a_k + r$, i dodać stronami obie równości.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Znajdź taką liczbę x, aby ciąg trzywyrazowy a_2, a_7, x był arytmetyczny.

Z podanego wzoru wynika, że $a_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ oraz $a_7 = 2 - \frac{1}{7} = \frac{13}{7}$.

Liczby $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{7}$, x tworzą ciąg arytmetyczny, jeżeli $\frac{13}{7} - \frac{3}{2} = x - \frac{13}{7}$.

Stąd $x = \frac{26}{7} - \frac{3}{2} = \frac{52}{14} - \frac{21}{14} = \frac{31}{14}$.

Wykaż, że dla każdego m ciąg $\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}$ jest arytmetyczny.

Trzeba wykazać, że dla każdego m

(1) $$\frac{m+3}{6} - \frac{m+1}{4} = \frac{m+9}{12} - \frac{m+3}{6}$$

Pomnóżmy obie strony tej hipotetycznej równości przez 12:

(2) $$2(m+3) - 3(m+1) = m + 9 - 2(m+3).$$

Nietrudno sprawdzić, że lewa strona jest równa prawej, więc równość (2) jest prawdziwa dla każdego m. Pozostanie ona prawdziwa po podzieleniu obu stron przez 12, a po tym przekształceniu wrócimy do postaci (1). Zatem równość (1) jest prawdziwa dla każdego m.

W rosnącym ciągu geometrycznym $a_1 = 12$, $a_3 = 27$.
Wyznacz iloraz tego ciągu i oblicz a_6.

Ponieważ $a_3 = a_1 q^2$, więc $27 = 12 \cdot q^2$, skąd $q^2 = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$. Zatem $q = \frac{3}{2}$ lub $q = -\frac{3}{2}$. Drugą wartość q trzeba odrzucić, bo ciąg z założenia ma być rosnący. Ponieważ $a_6 = a_3 \cdot q^3$, więc $a_6 = 27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3 \cdot 3^3}{2^3} = \frac{27^2}{8}$.

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 2$ oraz $a_2 = 12$.
Oblicz a_4.

Ponieważ $q = 6$, więc
$a_4 = a_2 \cdot q^2 = 12 \cdot 36 = 432$.

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ oraz $a_4 = 24$.
Oblicz iloraz tego ciągu.

Z równości $a_4 = a_1 q^3$ otrzymujemy $24 = 3q^3$, skąd $q = 2$.

Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.

Do warunku $x + y = 8$ dołączymy warunek $y - x = 19 - y$, otrzymując układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2y - x = 19 \end{cases}$$

Dodając stronami, otrzymamy $3y = 27$, skąd $y = 9$. W konsekwencji $x = -1$.

Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na półce górnej, a ile na dolnej.

Skoro drugi wyraz ciągu geometrycznego jest równy 24, to trzeci wyraz jest równy $24 \cdot q$, a pierwszy $\frac{24}{q}$. Iloraz q obliczymy z warunku, że suma płyt na półce górnej i na dolnej jest równa $76 - 24$, czyli 52.
Zapisując to symbolicznie, otrzymujemy równanie $\frac{24}{q} + 24 \cdot q = 52$.
Mnożymy obie strony równania przez q, przenosimy wyrazy na jedną stronę i porządkujemy, otrzymując $24q^2 - 52q + 24 = 0$. Dzielimy obie strony równania przez 4 i znajdujemy pierwiastki: $q = \frac{3}{2}$ lub $q = \frac{2}{3}$.
Na górnej półce stoi więc 16 płyt, a na dolnej 36, lub odwrotnie.

Zadanie można też rozwiązać inaczej, przyjmując za niewiadome liczby płyt na półce gónej i dolnej i układając dwa równania.
Ten sposób jest bardziej żmudny.

Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$.

Zacznijmy od obliczenia ilorazu ciągu: $q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{2}{3}$

Ponieważ $a_3 = a_1 \cdot q^2$, więc $1 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$, skąd $a_1 = \frac{9}{4}$.

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, $a_7 = 1$, $a_{11} = 9$.

a) Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n).

b) Sprawdź czy ciąg a_7, a_8, a_{11} jest geometryczny.

c) Wyznacz takie n, aby suma początkowych wyrazów ciągu (a_n) miała wartość najmniejszą.

a) Korzystając z równości $a_{11} - a_7 = (11 - 7) \cdot r$, orzymamy $8 = 4r$, skąd $r = 2$. Wartość tę podstawimy do równości $a_7 = a_1 + 6r$, otrzymując $1 = a_1 + 12$, skąd $a_1 = -11$.

b) Ponieważ $a_8 = a_7 + r$, więc $a_8 = 1 + 2 = 3$. Ciąg $1, 3, 9$ jest geometryczny, iloraz jest równy 3.

c) Wyrazy ciągu od pierwszego do szóstego są ujemne, a pozostałe są dodatnie. Suma wyrazów będzie najmniejsza, jeżeli wszystkie będą ujemne. Zatem $n = 6$.

Ciąg $1, x, y - 1$ jest arytmetyczny, natomiast ciąg $x, y, 12$ jest geometryczny. Oblicz x oraz y.

Z pierwszego założenia wynika, że $x - 1 = y - 1 - x$, a z drugiego, że $\frac{y}{x} = \frac{12}{y}$. Mamy więc dwa równania. Pierwsze z nich przekształćmy do postaci $y = 2x$, a drugie do postaci $y^2 = 12x$. Układ równań

$$\begin{cases} y = 2x \\ y^2 = 12x \end{cases}$$

można rozwiązać nawet w pamięci. Dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze (a można to zrobić, ponieważ x i y – jako wyrazy ciągu geometrycznego – nie mogą być zerami), otrzymamy $y = 6$, skąd $x = 3$.

Drugi wyraz ciągu geometrycznego jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$, a trzeci $\frac{-3}{2}$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Przyjmijmy tradycyjne oznaczenia i obliczmy iloraz ciągu:

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{-3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

Z równości $a_1 \cdot q = a_2$ otrzymujemy

$a_1 \cdot (-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, skąd $a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$.

Zadanie można rozwiązać inaczej, bez obliczania ilorazu.
W tym celu wystarczy skorzystać z proporcji $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$.

Wykaż, że $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^5 = \left(\frac{y}{x}\right)^{10}$.

Ponieważ

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^5} = \frac{1}{\frac{x^5}{y^5}} = \frac{y^5}{x^5} = \left(\frac{y}{x}\right)^5,$$

więc

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^5 = \left(\frac{y}{x}\right)^5 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^5 = \left(\frac{y}{x}\right)^{10}.$$

Oblicz różnicę ciagu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = -2n + 1$ dla $n \geqslant 1$.

Wybierzmy dwa kolejne wyrazy ciągu, np. a_1 i a_2.
Ponieważ $a_2 = -2 \cdot 2 + 1 = -3$,
$a_1 = -2 + 1 = -1$,
więc $a_2 - a_1 = -3 - (-1) = -2$.
I taka jest różnica ciągu.

Liczby 64 i 4 są odpowiednio pierwszym i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

Oznaczmy wyrazy ciągu geometrycznego standardowo przez a_n, a iloraz przez q.
Ponieważ $a_3 = a_1 \cdot q^2$
oraz $a_5 = a_3 \cdot q^2$, więc $\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_5}{a_3}$.
Podstawiając liczby dane w zadaniu, otrzymujemy równość $\frac{4}{64} = \frac{a_5}{4}$,
skąd $a_5 = \frac{1}{4}$.

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) =$$
$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot \underbrace{2 \cdot 5}_{10} = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}),$$

przy czym liczba $3^n - 2^{n-1}$ jest całkowita (jako różnica liczb całkowitych).

Oblicz:

a) $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$,

b) $(3 - \sqrt{2})^2 + 4(2 - \sqrt{2})$.

a) $\sqrt[3]{(-8)^{-1}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} =$
$= \sqrt[3]{\frac{1}{-8}} \cdot (2^4)^{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \cdot 2^3 = -4,$

b) $(3 - \sqrt{2})^2 + 4(2 - \sqrt{2}) =$
$= 9 - 6\sqrt{2} + 2 + 8 - 4\sqrt{2} =$
$= 19 - 10\sqrt{2}.$

Przekształć $\sqrt{32}$, wyłączając czynnik przed pierwiastek.

$\sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}.$

Ciąg jest określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geqslant 1$. Oblicz a_5.

$a_5 = (-1)^5 \cdot \frac{2-5}{5^2} = \frac{3}{25}.$

Ciąg $9, x, 19$ jest arytmetyczny, a ciąg $x, 42, y, z$ jest geometryczny. Oblicz x, y oraz z.

Przyjmijmy tradycyjne oznaczenia. Ponieważ $19 - 9 = 2r$, więc $r = 5$, skąd $x = 14$. Obliczamy iloraz ciągu geometrycznego: $q = \frac{42}{x} = \frac{42}{14} = 3$. Zatem $y = 42 \cdot 3 = 126$ oraz $z = 126 \cdot 3 = 378$.

2. Procenty

Procent, pojęcie w gruncie rzeczy nieskomplikowane, ciągle sprawia kłopoty i rodzi nieporozumienia. Niedawno w wiadomościach radiowych podano, że pewna wielkość wzrosła o 150%, czyli jest półtora raza większa[3]. Na pytanie, o ile procent muszą wzrosnąć akcje giełdowe po spadku o 50%, aby powrócić do poprzedniej ceny, wiele osób odpowiada bez wahania, że o 50[4]. Ten rozdział jest po to, aby zapobiegać takim (i innym) błędom. Będzie ich mniej, jeżeli w standardowych obliczeniach procentowych posłużymy się prostymi, zdroworozsądkowymi sposobami. Reguły, proporcje i równania z iksem są nie tylko niepotrzebne, ale wręcz komplikują rachunki.

[3] Prawidłowo: jest dwa i pół raza większa. [4] Odpowiedź prawidłowa: 100%

Poćwiczmy obliczanie w pamięci

Jak wiemy, procent odnosi się zawsze do pewnej liczby. Zamiast mówić: $\frac{x}{100}$ danej liczby, mówimy: $x\%$ tej liczby. Obliczenie procentu liczby, czyli znalezienie odpowiedniego jej ułamka, oznacza pomnożenie liczby przez ten ułamek. Tak właśnie obliczamy procenty, jeżeli posługujemy się kalkulatorem. Obliczając 23%, mnożymy przez $\frac{23}{100}$, czyli przez 0,23, a obliczając 146%, mnożymy przez $\frac{146}{100}$, czyli przez 1,46.

W dzisiejszych czasach stosowanie kalkulatora jest powszechne. I bardzo dobrze, wykonuje on za nas żmudną pracę i pozwala szybko wykonać skomplikowane obliczenia. Jednak w prostych przypadkach warto obliczać w pamięci, i to nie tylko dlatego, że dojście do wyniku zajmie nam mniej czasu, niż wpisanie odpowiednich danych do kalkulatora. Operując procentami w pamięci, lepiej je poznajemy. Łatwiej zdajemy sobie sprawę z ich znaczenia i wzajemnych relacji. Uczymy się też szacować, co jest umiejętnością przydatną na co dzień.

> Nie zawsze potrzebujemy znać dokładne wartości procentów;
> często wystarcza znalezienie odpowiedzi na pytanie,
> ile to jest *mniej więcej*.

„Okrągłe" procenty liczb można obliczać, startując z 10%, czy 50%. Na przykład 15% to 10% i jeszcze połowa tego, 45% to 3 razy więcej niż 15%, 75% to połowa liczby i jeszcze połowa z tej połowy, a 150% liczby to ona sama plus jej połowa.

Zauważmy, że 1 czy 10 procent liczby znajdujemy wszyscy jednakowo, ustawiając odpowiednio przecinek dziesiętny. Oliczając 20% liczby, można skorzystać z tego, że jest to dwa razy więcej niż jej 10%, lub można podzielić liczbę przez 5. Obliczając 95% liczby, odejmiemy od liczby jej 5%.

2. Procenty

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz: 10% liczby 23,08, 25% liczby 280, 40% liczby 60, 250% liczby 70, 5% liczby 90, 20% liczby 55.

2. Oblicz następujące procenty liczby 140:
10%, 40%, 45%, 110%, 90%, 150%, 300%.

3. Oblicz następujące procenty liczby 2:
1%, 10%, 5%, 30%, 200%, 350%.

4. Oblicz: 1% z 32, 6% z 200, 5% z 50, 75% z 60, 110% z 35, 150% z 7, 220% z 1000, 99% z 300.

1.
2,308; 70; 24;
175; 4,5; 11.
2.
14; 56; 63; 154;
126; 210; 420.
3.
0,02; 0,2; 0,1; 0,6;
4; 7.
4.
0,32; 12; 2,5; 45;
38,5; 10,5; 2200;
297.

Związki między procentami pozwalają obliczyć dany procent liczby, jeżeli znany jest inny jej procent. Na przykład jeśli 15% liczby wynosi 21, to 5% tej liczby wynosi trzy razy mniej, czyli 7, a 45% wynosi trzy razy więcej, czyli 63.

W szczególności można znaleźć liczbę, znając pewien jej procent. Na przykład jeśli 250% liczby wynosi 60, to jej 50% wynosi 12, więc liczba jest równa 24.

Sprawdź, czy potrafisz

1. 30% pewnej liczby wynosi 50. Oblicz 45% i 120% tej liczby.

2. Znajdź liczbę, której:
a) 30% wynosi 18, b) 15% wynosi 36,
c) 80% wynosi 100, d) 125% wynosi 200.

1.
75 i 200.
2.
a) 60, b) 240,
c) 125, d) 160.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Towar staniał o 50% i kosztuje 249 zł. Ile kosztował przed obniżką?

2. Towar podrożał o 50% i kosztuje 390 zł.
Ile kosztował przed podwyżką?

1. 498 zł.
2. 260 zł.

Ile razy? O ile procent?

Zastanowimy się nad związkiem między kilkakrotnym zwiększaniem lub zmniejszaniem liczby a jej zmianą procentową. Skorzystamy z równości: $a = 100\%a$, $2a = 200\%a$, $3a = 300\%a$ itd. Jeżeli liczbę 2 razy zwiększymy, to otrzymamy 200% liczby początkowej. Zatem wzrost wynosi 100%. Jeżeli liczbę 3 razy zwiększymy, to otrzymamy jej 300%, czyli liczba wzrasta o 200%. Przy zwiększeniu liczby 4 razy, wzrost wynosi 300%. I tak dalej. Zapisując to symbolicznie, mamy: $2a = a + a$, $3a = a + 2a$, $4a = a + 3a$ itd.

Jeżeli pewna liczba wzrosła półtora raza, to wzrosła o swoją połowę, co wynika z równości $1\frac{1}{2}a = a + \frac{1}{2}a$. Wzrost wyniósł więc 50%, a nie 150% (jak w informacji cytowanej na wstępie do rozdziału).

Popełniony błąd wynika z błędnej interpretacji pojęcia „zwiększyć ileś razy". Niektórzy odczytują je tak, jakby chodziło o zwiększenie *o ileś*, myśląc, że zwiększenie a półtora raza to $a + \frac{1}{2}a$. Tymczasem $a + 1\frac{1}{2}a = 2\frac{1}{2}a$, co oznacza zwiększenie liczby a dwa i pół raza.

Analogicznie ze zmniejszaniem. Jeżeli liczbę zmniejszymy 2 razy, to zostanie jej 50%, czyli zmniejszy się ona o 50%; jeżeli liczbę zmniejszymy 4 razy, to zostanie jej 25%, czyli liczba zmaleje o 75%; natomiast przy zmniejszeniu 3 razy zostanie $33\frac{1}{3}\%$ liczby, czyli zmaleje ona o $66\frac{2}{3}\%$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Pani Iksińska szuka takiej pracy, w której będzie zarabiać dwa i pół raza więcej niż obecnie. Ilu procent podwyżki pensji pragnie pani Iksińska?

2. Duża kserokopiarka kopiuje pięć razy więcej stron na minutę niż mała kserokopiarka. O ile procent duża kopiarka jest wydajniejsza od małej?

3. Jakim procentem danej liczby jest liczba: a) 10 razy mniejsza, b) 10 razy większa?

4. O ile procent liczba $1\frac{1}{4}a$ jest większa od liczby a?

5. O ile procent liczba $\frac{2}{5}a$ jest mniejsza od liczby a?

1. 150%. **2.** ○ 400%.
3. a) 10%, b) 1000%.
4. ○ 25%. **5.** ○ 60%.

Jak omijać pułapki?

Wróćmy do pytania postawionego we wstępie do rodziału:

O ile procent muszą wzrosnąć akcje giełdowe po spadku o 50%,
aby powrócić do poprzedniej ceny?

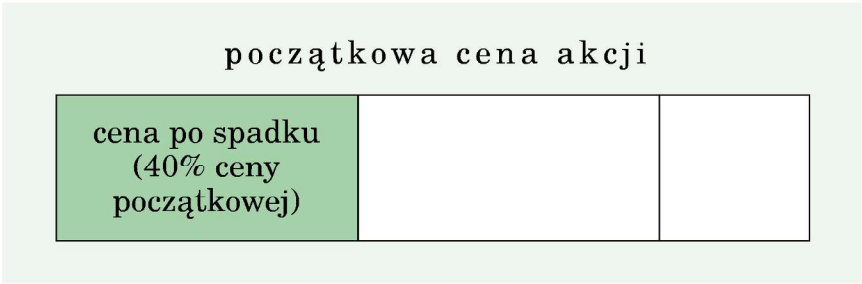
Szukając poprawnej odpowiedzi, trzeba procenty odnieść do odpowiednich wielkości. Zgodnie z przyjętą konwencją, spadek akcji odnosi się do ceny początkowej, natomiast wzrost do ceny już po spadku.

Jeżeli cena spadła o 50%, to jest dwa razy mniejsza,
więc aby wrócić do wartości początkowej, musi dwa razy wzrosnąć,
a to oznacza wzrost o 100%.

Postawmy teraz podobne pytanie:

Cena akcji spadła o 60%. O ile procent musi wzrosnąć, aby wrócić do ceny początkowej?

Dobrym sposobem rozwiązania zadania jest graficzne przedstawienie opisanej w nim sytuacji. Spadek ceny o 60% oznacza, że cena po spadku stanowi 40% ceny początkowej:



Jak widać, cena początkowa =

= cena po spadku + (cena po spadku + połowa ceny po spadku) =

= cena po spadku + 150% ceny po spadku.

Pułapką, w którą wpada wiele osób, jest także pytanie w rodzaju:

Sekretarka zarabia o 80% mniej od dyrektora.
O ile procent więcej od sekretarki zarabia dyrektor?

Wcale nie o 80%! A to dlatego, że podane 80% dotyczy zarobków dyrektora, a procent, o który pytamy, ma być wzięty z zarobków sekretarki.

Skoro sekretarka zarabia o 80% mniej, to zarabia 20% tego, co dyrektor, więc zarobki dyrektora są pięć razy większe. Zatem zarobki dyrektora stanowią 500% zarobków sekretarki, czyli dyrektor zarabia o 400% więcej.

Zagadka ?

Słoń waży tonę i 75% tego, co waży.
Ile waży słoń?

Sprawdź, czy potrafisz

1. O ile procent muszą wzrosnąć akcje giełdowe po spadku o 90%, aby powrócić do poprzedniej ceny?

2. Iksiński zarabia tylko 25% tego, co mu obiecywano. O ile procent więcej miał zarabiać Iksiński?

Wskazówka: najpierw odpowiedz na pytanie, ile razy więcej miał zarabiać.

1. ○ 900%, **2.** ○ 300%.

Na zakończenie zapytajmy podchwytliwie, która liczba jest większa: 13% z 94 czy 94% z 13?

Dlaczego podchwytliwie? Bo pierwsza liczba to $\frac{13}{100} \cdot 94$, a druga to $\frac{94}{100} \cdot 13$, więc liczby te są równe, co jest konsekwencją przemienności mnożenia.

Proste obliczenia z kalkulatorem

W tej części rozdziału rachunki będą bardziej żmudne, więc posłużymy się kalkulatorem.

Zacznijmy od zadania przygotowawczego:

13% pewnej liczby to 182. Ile wynosi 17% tej liczby?

Zadanie to rozwiążemy dokładnie tak, jak w szkole podstawowej rozwiązywaliśmy zadanie typu:

Za 13 biletów zapłacono 182 zł. Ile trzeba by zapłacić za 17 takich biletów?

Obliczaliśmy cenę jednego biletu, a następnie mnożyliśmy ją przez 17.

Przechodząc do procentów, obliczymy najpierw wielkość jednego procentu liczby, a potem pomnożymy ją przez 17:

1% liczby to $182 : 13$, czyli 14, skąd 17% liczby to $14 \cdot 17$, czyli 238.

W taki sposób, znając dowolny procent liczby, można znaleźć samą liczbę: wystarczy obliczyć 1% liczby, a potem pomnożyć przez 100. Na przykład jeżeli 18% liczby wynosi 37,5, to wykonujemy działania $37{,}5 : 18 \cdot 100$, czyli dzielimy przez 18 i przesuwamy przecinek dziesiętny o dwa miejsca w prawo.

Odnotujmy, że jest to równoważne działaniu $37{,}5 : 0{,}18$, ponieważ $a : 18 \cdot 100 = a \cdot \frac{1}{18} \cdot 100 = a \cdot \frac{100}{18} = a : \frac{18}{100}$. Niektórzy właśnie tak obliczają.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Znajdź liczbę, której 31% wynosi 80,6.

2. Paweł i Gaweł mają udziały w pewnej spółce, która właśnie osiągnęła pewien zysk. Paweł dostanie 27% zysku, czyli 5751 zł. Gawłowi przypadnie 19% zysku. Ile pieniędzy dostanie Gaweł?

3. Po obniżce o 32% atlas geograficzny staniał o 12,48 zł. Oblicz, ile kosztował atlas przed obniżką.

4. Inwestor spodziewał się 32% zysku z zainwestowanej kwoty. Okazało się jednak, że osiągnął 28% zysku, zarabiając w ten sposób o 900 zł mniej niż oczekiwał. Jaką kwotę zainwestował?

1. 260.
2. 4047 zł.
3. 39 zł.
4. 22 500 zł.

Jak rozwiązać zadania:

Komputer staniał o 9% i kosztuje 1911 zł. Ile kosztował ten komputer przed obniżką ceny?

Pikutkowo Małe liczy teraz o 4% więcej mieszkańców niż dwa lata temu. Ile osób mieszkało w Pikutkowie Małym dwa lata temu, jeżeli obecnie mieszkają tam 572 osoby?

W pierwszym zadaniu wystarczy zauważyć, że skoro komputer staniał o 9%, to zostało 91% ceny. Zatem 91% to 1911 zł, 1% to (1911 : 91) zł, a 100%, czyli poprzednia cena komputera, to 100 razy więcej.

W drugim zadaniu skorzystamy z tego, że obecna liczba mieszkańców Pikutowa (572) to 104% liczby mieszkańców sprzed dwóch lat.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Po doliczeniu 23% VAT-u telewizor kosztuje 1476 zł. Oblicz, jaka była cena telewizora bez podatku VAT.

2. Książka, do ceny której doliczono 5% VAT-u, kosztuje 48,30 zł. Jaka była cena książki bez VAT-u?

3. Iksińskiemu potrącono z pensji 30% i wypłacono 2030 zł. Ile wynosiła pensja Iksińskiego bez potrąceń?

1. 1200 zł.
2. 46 zł.
3. 2900 zł.

A jak rozwiązać zadanie:

Kurtka kosztuje 350 zł. Ile zapłaci za nią klient, który dostanie 18% rabatu?

Można obliczyć 18% z 350 zł i orzymaną kwotę odjąć od ceny kurtki. Wtedy bedą dwa działania: mnożenie i odejmowanie. Można także zauważyć, że po rabacie kurtka bedzie kosztować 82% początkowej ceny i obliczyć 82% liczby 350. Wtedy będzie tylko jedno działanie; ten sposób jest więc bardziej racjonalny.

Zamieniamy ułamek na procent

Jaki procent liczb naturalnych od 1 do 20 stanowią liczby parzyste?

Łatwo się przekonać, że liczb parzystych w tym zakresie jest tyle samo co nieparzystych, więc stanowią one połowę, czyli 50% (liczb naturalnych od 1 do 20).

Jaki procent liczb naturalnych od 1 do 19 stanowią liczby parzyste?

Od razu możemy powiedzieć, że jest to ok. 50%, ale dokładniejsza odpowiedź nie jest już natychmiastowa; trzeba obliczyć.

Jedna liczba naturalna stanowi $\frac{1}{19}$ wszystkich z podanego zakresu; liczb parzystych jest 9, więc stanowią one ułamek $\frac{9}{19}$. Zamieniając ten ułamek na procent, czyli na ułamek o mianowniku 100, otrzymujemy: $\frac{9}{19} = 0,473... \approx 0,47 = 47\%$.

Pytanie „ile procent” oznacza „ile setnych”. Na przykład:

$0,37 = \frac{37}{100} = 37\%$, $1,37 = \frac{137}{100} = 137\%$, $0,02 = 2\%$,
$0,002$ to 10 razy mniej niż $0,02$, więc $0,002 = 0,2\%$,
$0,372 = 37,2\%$, $0,3724 = 37,24\%$ itp.

Przypomnijmy, że dziesiątą część procenta nazywamy promilem i oznaczamy symbolem ‰. Zatem $0,2\% = 2‰$.

Promile zwykle kojarzą nam się z badaniem zawartości alkoholu we krwi człowieka:

Ile mniej więcej alkoholu znajduje się we krwi człowieka, jeżeli badanie alkoholomierzem wykazało 2‰?

Przyjmując, że człowiek ma 5 litrów krwi, oliczamy: $0{,}002 \cdot 5\ \text{l} = 0{,}01\ \text{l} = 10\ \text{ml}$.

Rozwiążmy zadanie nieco podchwytliwe:

100 ha ziemi dzielimy na dwie działki, z których jedna ma powierzchnię o 10 ha większą niż druga. O ile procent działka większa będzie większa od mniejszej?

Wcale nie o 10%! Wprawdzie 10 ha stanowi rzeczywiście 10% ze 100 ha, ale nie o taki procent chodzi w zadaniu. Procent, o który pytamy, ma być procentem działki mniejszej.

Nietrudno sptrawdzić, że mniejsza działka ma powierzchnię 45 ha. Trzeba więc 10 wyrazić jako procent 45. Otrzymamy:

$$\frac{10}{45} = 0,\ 222\ldots \approx 0,\ 22 = 22\%.$$

Kolejne zadanie nie jest skomplikowane:

Liczba a jest równa 47% liczby b. Jakim procentem liczby b jest liczba a?

Ponieważ $a = \frac{47}{100}b$, więc $b = \frac{100}{47}a$. Przedstawiając $\frac{100}{47}$ w postaci procentu, otrzymujemy: $\frac{100}{47} \approx 2{,}13 = 213\%$.

W analogiczny sposób można rozwiązać zadanie z akcjami (ze wstępu do rozdziału), które – po obniżce o 50% – mają wrócić do ceny wyjściowej. Oznaczając przez p cenę początkową akcji, a przez k ich cenę końcową, otrzymamy: $k = 50\%p = \frac{1}{2}p$, skąd $p = 2k = 200\%k$, co oznacza podwyżkę o 100%.

Dużo czy mało?

Iksiński dostał podwyżkę. Od przyszłego miesiąca będzie zarabiał o 150 zł więcej. Czy to jest duża podwyżka? Na to pytanie różni ludzie mogą różnie odpowiadać, bo nie jest ono sprecyzowane. Dla niektórych 150 zł to duża kwota, dla innych nie.

Jak wiemy, w takich przypadkach posługujemy się odniesieniem kwoty podwyżki do poprzednich zarobków Iksińskiego. Im więcej by zarabiał, tym podwyżka byłaby względnie mniejsza. Najczęściej określamy podwyżkę w procentach (liczonych od poprzednich zarobków).

> Dwóch uczniów mierzyło dwie odległości, przy czym jeden mierzył odległość kilkumetrową, a drugi kilkucentymetrową. Po sprawdzeniu pomiarów okazało się, że każdy z nich pomylił się o 2 cm. Czy popełnili taką samą pomyłkę, czy też któryś pomylił się bardziej?

Przy mierzeniu odległości rzędu kilku metrów pomyłka o 2 cm nie jest znacząca, natomiast w przypadku odległości kilkucentymetrowej jest ona istotna.

> Ważne jest więc, jaką część mierzonej wielkości stanowi błąd pomiaru.

Jest to tzw. błąd względny. Zwykle wyrażamy go w procentach. Na przykład ważąc przedmiot z dokładnością do 1 g, co najwyżej o tyle się mylimy. Jeżeli wynik ważenia jest równy 137 g, to błąd względny wynosi $\frac{1}{137}$, czyli w przybliżeniu 0,007, co stanowi 0,7% (liczby 137).

Wyciągając wnioski z danego pomiaru, trzeba brać pod uwagę błąd, który mógł zostać popełniony.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Na lekcji fizyki uczniowie zmierzyli długość śruby, otrzymując wynik $3{,}5\ \text{cm}$. Pomiar był wykonany z dokładnością do $1\ \text{mm}$. Jaki jest procentowy błąd tego pomiaru? Wskazówka: uważaj na jednostki!

2. Mierzono czas z dokładnością do 1 sekundy. Jaki co najwyżej mógł być względny błąd pomiaru, jeżeli otrzymano wynik: a) $45\ \text{s}$, b) $2\ \text{min}\ 3\ \text{s}$?

1. ok. 2,86%.
2.
a) ok. 2,2%,
b) ok. 0,81%.

Procent procentu

60% osób w pewnej grupie to osoby z wyższym wykształceniem, z których 10% to absolwenci studiów ekonomicznych. Jaki procent grupy stanowią osoby po studiach ekonomicznych?

Opowiedź jest natychmiastowa: jest to 10% z 60%, czyli 6%.

Następne zadanie jest podobne, ale rachunki są bardziej żmudne:

W wyborach wzięło udział 43% osób uprawnionych do głosowania, z czego na kandydata X głosowało 16%. Jaki procent uprawnionych do głosowania poparł kandydata X?

Obliczamy: $0{,}43 \cdot 0{,}16 = 0{,}0688 \approx 0{,}07 = 7\%$.

Teraz będziemy badać, o ile procent zmieni się cena towaru po dwóch kolejnych zmianach procentowych. Na przykład:

O ile procent zmieni się cena towaru, który najpierw stanieje o 10%, a potem podrożeje o 10%?

Na ogół każdy od razu dostrzega, że cena zmieni się, bo owe 10% jest brane z różnych wielkości: pierwsze 10% dotyczy ceny początkowej, a drugie 10% dotyczy ceny po spadku. Obniżka jest więc większa niż podwyżka i w kosekwencji cena spadnie. O ile procent?

Zobaczmy, ile procent ceny wyjściowej otrzymamy. Najpierw zostanie 90%, a potem z tej wartości bierzemy 110%. W rezultacie otrzymamy $0{,}9 \cdot 1{,}1$ ceny. Przechodząc do ułamków zwykłych, wynik znajdziemy w pamięci: $\frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} = \frac{99}{100} = 99\%$. Zatem cena spadnie o 1%.

> Kolejność mnożenia nie gra roli, ten sam wynik otrzymamy, przestawiając obniżkę z podwyżką. Warto zdawać sobie z tego sprawę.

W kolejnym zadaniu posłużymy się kalkulatorem.

Odkurzacz najpierw podrożał o 20%, a potem staniał o 15%. W rezultacie tych zmian cena odkurzacza wyniosła 459 zł. Jaka była pierwotna cena odkurzacza?

Rozwiążmy zadanie dwuetapowo, cofając się z cenami. Najpierw znajdziemy cenę środkową, tzn, cenę między powyżką i obniżką. Po obniżce o 15% zostaje 85% ceny środkowej i to jest równe 459 zł. Stąd obliczamy cenę środkową: $459 : 85 \cdot 100 = 540$. Cena środkowa powstała z ceny wyjściowej po podwyżce o 20%, jest więc równa 120% ceny wyjściowej. Stąd obliczymy cenę wyjściową: $540 : 120 \cdot 100 = 450$.

Zagadka

Wróbel siedzący na słupie telegraficznym:
– Przed chwilą było nas tu więcej. Najpierw odleciało 50% wróbli, potem także 50% i zostałem tylko ja.
Ile nas było?

Kto woli, może najpierw obliczyć procent ceny, jaki zostanie po obu operacjach, mnożąc $1{,}2 \cdot 0{,}85$, i skorzystać z tego, że odpowiada on kwocie 459 zł.

Postawmy teraz nieco inny problem:

> Pewien towar najpierw staniał o 20%, a następnie podrożał tak, że cena wróciła do wyjściowej. O ile procent podrożał towar za drugim razem?

Po obniżce zostało 0,8 ceny wyjściowej. Jaki ułamek (niewłaściwy) tej kwoty trzeba wziąć, aby powrócić do ceny wyjściowej?

Szukamy takiego ułamka x, że $0{,}8 \cdot x = 1$. Przechodząc do ułamków zwykłych, otrzymamy $\frac{8}{10} \cdot x = 1$, skąd $x = \frac{10}{8}$, a $\frac{10}{8}$ to $1\frac{1}{4}$. Cena po podwyżce musi być zatem równa $1\frac{1}{4}$ ceny po obniżce, co oznacza podwyżkę o 25%.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Po dwóch kolejnych obniżkach, za każdym razem o 15%, cena dywanu wyniosła 578 zł. Jaka była cena dywanu przed obniżkami?

2. Telewizor najpierw staniał o 10%, a potem podrożał o 4% i kosztuje 2106 zł. Ile kosztował przed tymi zmianami?

1. 800 zł.
2. 2250 zł.

Na koniec zadanie geometryczne:

> O ile procent wzrośnie pole kwadratu, jeżeli każdy jego bok zwiększymy o 10%?

Jeżeli bok wyjściowego kwadratu miał długość a, to po zwiększeniu o 10% będzie miał długość $1{,}1a$. Pole większego kwadrtu będzie więc równe $(1{,}1a)^2$, czyli $1{,}21a^2$, podczas gdy pole mniejszego kwadratu jest równe a^2. Oznacza to wzrost pola o 21%.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Dwa równoległe boki prostokąta zwiększamy o 20%, a pozostałe dwa zmniejszamy o 20%. Określ w procentach, jak zmieni się pole prostokata.

2. Każdy bok kwadratu zmniejszamy o 10%. O ile procent zmaleje pole kwadratu?

3. Każdą krawędź sześcianu zmniejszamy o 10%. O ile procent zmaleje objętość sześcianu?

1. Zmaleje o 4%.
2. O 19%.
3. O 27,1%.

Lokujemy pieniądze w banku

Zacznijmy od zadania pomocniczego:

Spodnie kosztują 350 zł. Ile będą kosztować po podwyżce o 18%?

Można obliczyć 18% z 350 zł i orzymaną kwotę dodać do ceny spodni. Można też zauważyć, że po podwyżce spodnie będą kosztować 118% początkowej ceny, co oznacza pomnożenie tej ceny przez 1,18. Ten sposób jest krótszy, bo jest tylko jedno działanie. Pamiętaj o nim, przyda się przy obliczaniach bankowych!

Jak wiadomo, do lokaty pieniężnej bank co jakiś czas dopisuje odsetki, czyli pewien umowny procent od kwoty leżącej na lokacie.

Obliczmy, do jakiej kwoty urośnie po dwóch latach 3000 zł ulokowane w banku, który po każdym roku dopisuje 4% aktualnej kwoty.

Po pierwszym roku do kwoty 3000 bank dopisuje jej 4%, czyli otrzymujemy $3000 \cdot 1{,}04$. Po drugim roku do poprzednio otrzymanej kwoty bank dopisuje jej 4%, czyli otrzymujemy $3000 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}04$.

Przedłużając lokatę na kolejne lata, po każdym z nich dopisujemy jeszcze jeden czynnik. Po trzech latach otrzymamy więc kwotę $3000 \cdot (1{,}04)^3$, a po dziesięciu $3000 \cdot (1{,}04)^{10}$.

Tak by było, gdyby nie to, że po każdym roku odsetki są pomniejszane o podatek płacony państwu[5]. Stanowi on 19% kwoty odsetek i jest potrącany przez bank, a klient otrzymuje tylko 81% kwoty odsetek. W zadaniach będziemy pomijać ten podatek.

Gdyby oprocentowanie lokaty wynosiło 4,3%, to kwotę mnożylibyśmy przez 1,043. Ułamki procentów występują w bankach często, a w obliczeniach pojawiają się liczby mające więcej niż dwie cyfry po przecinku – zaokrąglamy je, aby otrzymać złote i grosze.

Czynność dopisywania odsetek nazywa się kapitalizacją, a kwotę, która jest podstawą do obliczania odsetek, nazywamy kapitałem. Po każdej kapitalizacji kapitał zwiększa się. Oprocentowanie lokaty określane jest w stosunku rocznym, ale kapitalizacja niekoniecznie musi odbywać się po roku. Są także lokaty z kapitalizacją kilkumiesięczną, odsetki nalicza się w nich proporcjonalnie do okresu kapitalizacji. Na przykład jeżeli kapitalizacja jest półroczna, a oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 4%, to po sześciu miesiącach kapitał wzrasta o 2%; w przypadku kapitalizacji kwartalnej, tak samo oprocentowanej, kapitał po trzech miesiącach wzrasta o 1%. Jeżeli natomiast kapitalizacja jest miesięczna, to po miesiącu kapitał wzrasta o $\frac{1}{12}$ z 4%.

> Lokatę z kapitalizacją roczną nazywamy krótko lokatą roczną,
> lokatę z kapitalizacją półroczną nazywamy lokatą półroczną itp.

Im krótszy okres kapitalizacji, tym lepiej dla właściciela lokaty. Dlaczego – przy jednakowym oprocentowaniu rocznym – im krótsza lokata, tym bardziej opłacalna?

[5] tzw. podatek Belki

Prześledźmy to na przykładzie lokat z kapitalizacją roczną i półroczną, obu procentowanych 4% w stosunku rocznym. Dopisując po roku do włożonej kwoty 4% odsetek na lokacie rocznej, możemy dopisać je w dwóch etapach: raz 2% włożonego kapitału i drugi raz 2% włożonego kapitału. Na lokacie półrocznej po pierwszym półroczu dopisujemy do włożonego kapitału 2%, a po drugim dopisujemy 2% kapitału półrocznego, który jest większy niż początkowy.

> Ile pieniędzy będzie po roku na lokacie kwartalnej oprocentowanej 4,8%, jeżeli kapitał początkowy wynosi 6000 zł?

Oprocentowanie kwartalne jest cztery razy mniejsze niż roczne, więc wynosi 1,2%. Zatem przy każdej kapitalizacji kapitał mnożymy przez 1,012. Kapitalizacje są cztery, więc otrzymamy $6000 \cdot (1{,}012)^4$, co wynosi 6293,23 zł.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Kwotę 12 000 zł ulokowano na lokacie rocznej oprocentowanej w wysokości 4,5%. Oblicz, jaka kwota będzie na lokacie po roku.

2. Po roku leżenia na lokacie rocznej kwota 7500 zł wzrosła do 7950 zł. Jak wysoko oprocentowana była ta lokata?

3. Klient założył lokatę roczną oprocentowaną w wysokości 5%, wpłacając do banku 5000 zł. Zlikwidował ją po pięciu latach. Jaką kwotę odebrał?

4. Klient założył dwie lokaty, obie oprocentowane 6% w stosunku rocznym, wpłacając na każdą z nich po 4000 zł. Na jednej lokacie kapitalizacja była roczna, na drugiej półroczna. Jakie kwoty były na każdej z tych lokat po roku?

1. 12 540 zł. **2.** 6%.
3. 6381,41 zł.
4. Na lokacie z kapitalizacją roczną była kwota 4240 zł, na drugiej lokacie 4243,60 zł.

Punkty procentowe

W zeszłym miesiącu partię X popierał 1% obywateli. W tym miesiącu poparcie wzrosło do 2%. O ile procent wzrosło poparcie dla partii X?

W pierwszym odruchu nasuwa się odpowiedź: 1%. Czy rzeczywiście? Zauważmy, że partię poparło w tym miesiącu dwa razy więcej obywateli, niż w zeszłym, a to oznacza wzrost jeszcze raz o tyle samo, czyli wzrost o 100%!

Jest tutaj jakiś paradoks: wzrost o 1% nie oznacza wzrostu o 1%! Chcąc uniknąć takiej sprzeczności, wprowadzono pojęcie punktu procentowego.

Określając wzrost wielkości procentu, mówimy właśnie o punktach procentowych. Powiemy więc, że poparcie dla partii X wzrosło o 1 punkt procentowy.

Oprocentowanie lokaty rocznej w banku A wynosi 4%, a w banku B jest o 1 punkt procentowy większe. O ile procent odsetki roczne od kwoty ulokowanej w banku A są mniejsze od odsetek rocznych od takiej samej kwoty ulokowanej w banku B?

Sprawdźmy, jaka będzie różnica między odsetkami od kwoty 1000 zł w banku A i banku B. Te pierwsze wyniosą 40 zł, a te drugie 50 zł. Różnica wynosi więc 10 zł, co stanowi $\frac{1}{5}$ odsetek w banku B. Zatem odsetki w banku A są mniejsze od odsetek w banku B o 20%.

Tak jest dla dowolnej kwoty, byleby była taka sama w obu bankach. Odsetki w banku A wynoszą 4% ulokowanej kwoty, odsetki w banku B wynoszą 5% kwoty, różnica między nimi jest równa 1% kwoty, więc jest 5 razy mniejsza niż odsetki w banku B. Mówiąc krótko, różnica $5-4$ stanowi 20% liczby 5. Rozstrzygając, o ile procent odsetki w banku B są większe od odsetek w banku A, trzeba odpowiedzieć na pytanie, jakim procentem liczby 4 jest różnica $5-4$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. O ile procent zmalało poparcie dla partii Y, jeżeli wynosiło 1% i zmalało o $0{,}5$ punktu procentowego?

2. Podatek wynoszący dotąd 20% zwiększono o 1 punkt procentowy. O ile procent wzrósł ten podatek?

1. O 50%, **2.** Wzrósł o $\frac{1}{20}$, czyli o 5%.

Przegląd zadań maturalnych

Koncern paliwowy podnosił dwukrotnie w jednym tygodniu cenę benzyny, pierwszy raz o 10%, a drugi raz o 5%. Po obu tych podwyżkach jeden litr benzyny, wyprodukowanej przez ten koncern, kosztuje $4{,}62$ zł. Oblicz cenę jednego litra benzyny przed omawianymi podwyżkami.

Podwyżka ceny o 10% oznacza pomnożenie tej ceny przez $1{,}1$, a podwyżka o 5% to pomnożenie przez $1{,}05$. Najpierw więc pomnożono cenę przez $1{,}1$, a potem otrzymaną kwotę pomnożono jeszcze przez $1{,}05$.
W rezultacie cena początkowa została pomnożona przez $1{,}1 \cdot 1{,}05$, czyli przez $1{,}155$. W ten sposób osiągnęła kwotę $4{,}62$ zł. Aby więc wrócić do ceny początkowej, trzeba podzielić $4{,}62$ przez $1{,}155$.
Jeżeli ktoś woli, to może posłużyć się równaniem $x \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}05 = 4{,}62$, w którym x oznacza początkową cenę litra benzyny. Tak czy inaczej, litr benzyny kosztował przed podwyżkami 4 zł.

Rodzeństwo w wieku 8 i 10 lat otrzymało razem w spadku $84\ 100$ zł. Kwotę tę złożono w banku, który stosuje kapitalizację roczną przy rocznej stopie procentowej 5%. Każde z dzieci otrzyma swoją część spadku z chwilą osiągnięcia wieku 21 lat. Życzeniem spadkodawcy było takie podzielenie kwoty spadku, aby w przyszłości obie wypłacone części spadku zaokrąglone do 1 zł były równe. Jak należy podzielić kwotę $84\ 100$ zł między rodzeństwo?

Oznaczmy przez x kwotę, którą otrzyma młodsze dziecko. Wtedy starszemu dziecku przypadnie kwota $84\ 100 - x$. Po każdym roku bank mnoży każdą z tych kwot przez $1{,}05$. Kwota przydzielona młodszemu dziecku będzie leżała w banku przez 13 lat (bo $21 - 8 = 13$), więc na koniec wyniesie $x \cdot (1{,}05)^{13}$.
Natomiast kwota przydzielona starszemu dziecku będzie leżała w banku przez 11 lat (bo $21 - 10 = 11$), więc na koniec wyniesie $(84\ 100 - x) \cdot (1{,}05)^{11}$.
Końcowe kwoty mają być równe, skąd $x \cdot (1{,}05)^{13} = (84\ 100 - x) \cdot (1{,}05)^{11}$.
Dzieląc obie strony równania przez $(1{,}05)^{11}$, otrzymamy:
$x \cdot (1{,}05)^2 = 84\ 100 - x, \quad 2{,}1025x = 84\ 100, \quad x = 40\ 000.$
Młodsze dziecko dostanie więc $40\ 000$ zł, a starsze $44\ 100$ zł.

Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

Po obniżce o 30% zostało 70% ceny, co jest równe 126 zł. Zatem 1% ceny jest równy $126 : 70$ (zł), a cena jest od tego 100 razy większa.
Rozwiążemy zadanie nieco prościej, jeżeli zuważymy, że liczba 126 jest podzielna przez 7, a wynik tego dzielenia, czyli 18, to 10% ceny początkowej. Ponieważ cena początkowa jest 10 razy większa, więc przed obniżką spodnie kosztowały 180 zł.

6% liczby x jest równe 9.
Ile wynosi x?

Z podanych liczb wynika,
że 2% liczby x jest równe 3.
Liczba x, jako swoje 100%, jest
50 razy większa od swoich 2%,
czyli $x = 3 \cdot 50 = 150$.

Pierwsza rata, która stanowi
9% ceny roweru, jest równa
189 zł. Ile kosztuje rower?

Skoro 9% ceny roweru
to 189 zł, to 1% tej ceny to
$189 : 9$ (zł), czyli 21 zł.
Rower kosztuje 100 razy więcej,
czyli 2100 zł.

Cenę nart obniżono o 20%,
a po miesiącu nową cenę obniżono
o dalsze 30%. O ile procent staniały
narty w wyniku obu podwyżek?

Posłużmy się ułamkami zwykłymi.
Po pierwszej obniżce zostało $\frac{4}{5}$ ceny,
a po drugiej $\frac{7}{10}$ nowej ceny,
czyli $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{10}$ ceny pierwotnej.
Ponieważ $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{50} = \frac{56}{100}$,
więc zostało 56% ceny pierwotnej,
co znacza obniżkę o 44%.

Jeżeli ktoś woli posłużyć się ułamkami
dziesiętnymi, to skorzysta z tego,
że po pierwszej obniżce zostało
$0{,}8$ ceny, a po drugiej $0{,}7$ nowej ceny,
czyli po obu obniżkach zostało $0{,}8 \cdot 0{,}7$
ceny pierwotnej.

W sklepie obniżono ceny wszystkich płyt CD o 20%. O ile procent mniej zapłacimy za 2 płyty CD w tym sklepie?

Też 20%, co wynika z prawa rozdzielności mnożenia. Mianowicie, jeżeli a i b oznaczają odpowiednio ceny jednej i drugiej płyty, to $20\%\,a + 20\%\,b = 0{,}2a + 0{,}2b = 0{,}2(a + b) = 20\%\,(a + b)$.

Samochód kosztował $30\,000$ zł. Jego cenę obniżono o 10%, a następnie cenę po tej obniżce ponownie obniżono o 10%. Ile kosztował samochód po tych obniżkach?

Po pierwszej obniżce o 10% z cena samochodu wyniosła $27\,000$ zł. Następnie kwotę tę zmniejszono o 2700 zł, więc po obu obniżkach samochód kosztował $24\,300$ zł.

Rozwiązania zagadek: str. 44 – 4 tony; str. 52 – 4 wróble.

3. Wyrażenia algebraiczne

Algebra szkolna jest z reguły postrzegana jako zbiór reguł, które trzeba stosować, niekoniecznie wiedząc dlaczego. Będę się starała pokazać, że algebrę można zrozumieć, jeżeli spojrzeć na nią w sposób mniej formalny. Chodzi o to, aby symboliczny zapis przekładać na wykonywane czynności i odkrywać prawa, którym te czynności podlegają.

Co oznacza minus?

Chcąc zrozumieć przekształcanie wyrażeń algebraicznych, trzeba sobie zdawać sprawę ze znaczenia symbolu „–”. A znaczenie nie zawsze jest takie samo, zależy od kontekstu.

Przypatrz się wyrażeniu $(-3)-(-2)$. Jakie jest znaczenie każdego z trzech występujących w nim symboli „–”?

Minus występuje tu w dwóch znaczeniach: środkowy minus oznacza odejmowanie, a dwa pozostałe są znakami liczb. Mamy więc już dwa znaczenia minusa.

A co oznacza minus w wyrażeniu $-a$? Wystepuje on tu w innym, trzecim znaczeniu. Oznacza przejście od liczby a do liczby przeciwnej. Na przykład jeżeli $a = -7$, to $-a = 7$. Jak widać, liczba $-a$ może być dodatnia. Nie wolno więc identyfikować tego minusa ze znakiem liczby.

> Dopóki nie wiemy, czy liczba a jest dodatnia czy ujemna,
> dopóty nie znamy znaku liczby $-a$. Pamiętaj o tym!

Jak wiemy, wartość bezwzględna liczby ujemnej a jest liczbą przeciwną do a. Zatem $|a| = -a$ dla $a < 0$.

Jeżeli wybierzemy dowolną liczbę, przejdziemy do liczby przeciwnej, a następnie weźmiemy liczbę przeciwną do otrzymanej, to wrócimy do liczby początkowej: $-(-a) = a$.

Zauważmy, że im liczba mniejsza, tym liczba przeciwna do niej jest większa, tzn. z nierówności $a < b$ wynika nierówność $-a > -b$. O własności tej trzeba pamiętać, rozwiązując nierówności. Na przykład jeżeli $-3x < 5$, to $3x > -5$.

Za pomocą liczb przeciwnych można zamienić odejmowanie na dodawanie. Jak wiadomo, odjęcie liczby jest równoznaczne z dodaniem liczby przeciwnej: $a - b = a + (-b)$.

Równość ta pokazuje, jak można zmieniać znaczenie symbolu „–”. Minus oznaczający odejmowanie (lewa strona równości) można zamienić na minus oznaczający przejście do liczby przeciwnej (strona prawa) i odwrotnie. Zależność ta jest bardzo ważna, stale będziemy z niej korzystać.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Ile wynosi $-a$, jeżeli: a) $a = -6$, b) $a = \frac{2}{3}$, c) $a = -\frac{2}{3}$, d) $a = 0$?

2. Wiadomo, że liczba przeciwna do b jest ujemna. Jaki znak ma liczba b?

3. Podaj liczbę przeciwną do liczby przeciwnej do liczby: a) 5, b) -5.

4. Jaki jest znak liczby c, jeżeli $-c > 0$?

5. Odejmowanie $a - (-b)$ zamień na dodawanie.

Wskazówka: jaka liczba jest przeciwna do $-b$?

6. Co oznacza każdy z symboli „–” w wyrażeniu $-a + b - (-c) + (-d)$?

1. a) 6, b) $-\frac{2}{3}$, c) $\frac{2}{3}$, d) 0.
2. Plus. **3.** a) 5, b) –5.
4. Minus. **5.** $a - (-b) = a + b$.
6. W kolejności:
wystąpowania: liczba
przeciwna, odejmowanie,
liczba przeciwna, liczba
przeciwna.

Wyrażenie z ostatniego zadania można napisać krócej, redukując liczbę minusów oznaczających przejście do liczby przeciwnej:

$$-a + b - (-c) + (-d) = -a + b + c - d$$

Zauważmy, że teraz tylko początkowy minus oznacza przejście do liczby przeciwnej. Można by zmienić jego znaczenie na odejmowanie, gdyby skorzystać z równości $-a = 0 + (-a) = 0 - a$ i dopisać zero na początku wyrażenia.

Na zakończenie zastanówmy się, jak zmieni się iloczyn dwóch liczb, jeżeli jedną z nich zamienimy na przeciwną. A jeżeli zamienimy na liczby przeciwne oba czynniki?

Jak wiadomo, zmiana znaku jednego czynnika powoduje zmianę znaku wyniku mnożenia. Liczba $(-a) \cdot b$ jest zatem przeciwna do $a \cdot b$, czyli $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

Jeżeli zmienimy znak także w drugim czynniku, to wrócimy do iloczynu początkowego: $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

W szczególności $(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = a \cdot a = a^2$. Oznacza to, że kwadrat liczby i kwadrat liczby przeciwnej są równe.

Korzystając z podanych zależności, można redukować liczbę minusów w iloczynach, a także dowolnie je przesuwać. Na przykład:

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b), \quad (-a) \cdot (-b) \cdot (-c) = a \cdot b \cdot (-c) = -(a \cdot b \cdot c).$$

Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

Jak wiemy, suma nie zależy od kolejności dodawania poszczególnych składników. Z tej własności będziemy wielokrotnie korzystać. Na przykład:

$$\underline{a + b - c} = a + b + (-c) = (-c) + a + b = \underline{-c + a + b}$$
$$\underline{-a + b - c} = (-a) + b + (-c) = b + (-a) + (-c) = b + (-a) + (-c) = \underline{b - a - c}$$

Zauważ, że literę poprzedzoną symbolem „–” przestawiamy razem z tym symbolem.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Napisz krócej wyrażenie $a - b + (-c) - (-d) - (-e) + (-f)$.

2. W wyrażeniu $-l + m - k + s - p + n$ zmień kolejność występowania liter, aby stała się ona alfabetyczna.

1. $a - b - c + d + e - f$.
2. $-k - l + m + n - p + s$.

Jak wiemy, liczba przeciwna do sumy jest równa sumie liczb przeciwnych do poszczególnych składników. Z własności tej wynika sposób likwidowania nawiasu poprzedzonego minusem. Na przykład:

$$-(a + b) = (-a) + (-b),$$
$$\underline{-(a - b)} = -(a + (-b)) = -a + (-(-b)) = -a + b = \underline{b - a},$$
$$x - (a + b - c) = x + (-(a + b - c)) = x + \underbrace{(-a)}_{-a} + \underbrace{(-b)}_{-b} + \underbrace{(-(-c))}_{c} = x - a - b + c.$$

Nie zapominaj, że pozbywając się nawiasu poprzedzonego minusem trzeba zmienić znaki. Warto też pamiętać, że liczby $a - b$ i $b - a$ są przeciwne (środkowa z trzech równości).

Sprawdź, czy potrafisz

1. Podane wyrażenia przekształć tak, aby pozbyć się nawiasów:
a) $5a - (b - c)$, b) $a + b - (c + d) - (e - f)$.

2. Wyrażenie $-(p - r) - (b - a + c)$ przekształć tak, aby nie było nawiasów i aby litery występowały w kolejności alfabetycznej.

1. a) $5a - b + c$, b) $a + b - c - d - e + f$. **2.** $a - b - c - p + r$.

Przy przekształcaniu wyrażeń ważną rolę odgrywa redukcja, która pozwala skracać wyrażenia. Można do niej podejść zdroworozsądkowo, pomijając formalne reguły. Wystarczy skorzystać z tego, że działania „odjąć x" i „dodać x" wzajemnie się znoszą. Zacznijmy od przykładów liczbowych. Popatrz:

$$a + 3 \cdot 9 = a + 9 + 9 + 9, \quad a - 5 \cdot 9 = a - 9 - 9 - 9 - 9 - 9,$$
$$a + 3 \cdot 9 - 5 \cdot 9 = a - 2 \cdot 9.$$

Przejdźmy do wyrażeń algebraicznych:

$$a - 2b + b = a \underbrace{- 2b + b}_{-b} = a - b,$$

$$2 - a + \frac{3}{2}a = 2 \underbrace{- a + a + \frac{1}{2}a}_{\frac{1}{2}a} = 2 + \frac{1}{2}a,$$

$$a - 3a^2 + 2a^3 + a^2 + 5 = a \underbrace{- 3a^2 + a^2}_{-2a^2} + 2a^3 + 5 = a - 2a^2 + 2a^3 + 5.$$

Przekształcając wyrażenia, często stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: $a(b + c) = ab + ac$. Na przykład:

$$a + 2(a + b) = a + 2a + 2b = 3a + b.$$

Prawo rozdzielności funkcjonuje także dla większej liczby składników. Ponieważ odejmowanie można zamienić na dodawanie liczby przeciwnej, więc mnożenie jest rozdzielne również względem odejmowania:

$$a\,(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-(ac)) = ab - ac.$$

Oto przykład na zastosowanie tego prawa:

$$a - 2(a - b) = a - (2a - 2b) = a - 2a + 2b = -a + 2b.$$

Często także stosujemy prawo rozdzielności mnożenia w drugim kierunku, wyłączając przed nawias wspólny czynnik składników. Na przykład:

$$a(b+2c)-a(b-2c)=a((b+2c)-(b-2c))=a(b+2c-b+2c)=$$
$$=a\cdot 4c=4ac,$$
$$ab-3b+5a-15=b(a-3)+5(a-3)=$$
$$=(a-3)(b+5),$$
$$(a-b)c+b-a=(a-b)c-(a-b)=$$
$$=(a-b)(c-1).$$

Zauważmy, że wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias jest formalnym podejściem do redukcji wyrazów podobnych:

$$2a-5a=a(2-5)=a\cdot(-3)=-3a.$$

Sprawdź, czy potrafisz

1. Zredukuj wyrazy podobne w wyrażeniach:

a) $3x-\mathrm{a}-4x+3\frac{1}{3}a-x^2$,

b) $-x-y-x^2-3x-\frac{2}{5}x+x^2$.

2. Zlikwiduj nawiasy i przeprowadź redukcję w wyrażeniach:

a) $2y-4(y-z)-2(y+2z)$,

b) $6-2x(x+y-2)+x(2y+1)-5x$.

3. Wyłącz przed nawias wspólny czynnik:

a) $16xy+20yz$,

b) x^3+x^2,

c) $(x-y)a+(y-x)b$.

1.
a) $2\frac{1}{3}a-x-x^2$,
b) $-4\frac{2}{5}x-y$.

2.
a) $-4y$, b) $6-2x^2$.

3.
a) $4y(4x+5z)$,
b) $x^2(x+1)$,
c) $(x-y)(a-b)$.

Wzory skróconego mnożenia

Z prawa rozdzielności wynika sposób mnożenia sumy przez sumę:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Mnożymy zatem każdy składnik jednej sumy przez każdy składnik drugiej, przy czym w każdej sumie może być dowolnie wiele składników.

A jak pomnożyć $(a - b)(c + d - e)$? Zamieniając odejmowanie na dodawanie liczby przeciwnej, będziemy mnożyć sumę przez sumę, czyli obliczymy $(a + (-b))(c + d + (-e))$.

Wynik mnożenia $(-b) \cdot c$ zapiszemy w postaci $-(bc)$, a dodanie $-(bc)$ zamienimy na odjęcie bc; wobec tego przed tym iloczynem pojawi się minus. Natomiast mnożąc $(-b)(-e)$, otrzymamy be, więc przed tym iloczynem będzie plus. W konsekwencji $(a + (-b))(c + d + (-e)) = ac - bc + ad - bd - ae + be$.

Oto przykład na zastosowanie poznanych własności:

$$a - 3(b + c)(d - e) - 2be + 3cd = a - 3(bd + cd - be - ce) - 2be + 3cd =$$
$$= a - 3bd - 3cd + 3be + 3ce - 2be + 3cd = a - 3bd + be + 3ce.$$

Sprawdź, czy potrafisz

1. Przekształć do postaci bez nawiasów i zredukuj wyrazy podobne:

a) $3(x + 2) - 4(x - 1)$, b) $(x + 5)(1 - x) - 2(-x)(x + 1)$.

2. Przekształć do postaci bez nawiasów:

a) $(a + b)(a + b)$, b) $(a - b)(a - b)$, c) $(a + b)(a - b)$.

1.
a) $10 - x$,
b) $x^2 - 2x + 5$.

2.
a) $a^2 + 2ab + b^2$,
b) $a^2 - 2ab + b^2$,
c) $a^2 - b^2$.

Tego typu mnożenia jak w ostatnim zadaniu występują dosyć często, dlatego opłaca się zapamiętać, że:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Dosyć powszechnym błędem jest zapominanie o wyrazie $2ab$ w dwóch pierwszych wzorach – nie zapominaj!

Na przykład obliczając $(3c-2d)^2$, trzeba nie tylko obliczyć kwadraty wyrażeń $3c$ i $2d$, ale także ich podwojony iloczyn:

$$(3c-2d)^2 = (3c)^2 + (2d)^2 - 2 \cdot (3c)(2d) = 9c^2 + 4d^2 - 12cd.$$

Sprawdź, czy potrafisz

1. Przekształć wyrażenia do postaci bez nawiasów, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) $(4p-3q)^2$, b) $(ab+2c)^2$, c) $(2b-a)^2$.

2. Zastosuj wzór skróconego mnożenia, przekształcając wyrażenie $(4a+3b)(4a-3b)$ do postaci bez nawiasów.

1. a) $16p^2 - 24pq + 9q^2$, b) $a^2b^2 + 4abc + 4c^2$, c) $4b^2 - 4ab + a^2$.
2. $16a^2 - 9b^2$.

A który z wzorów zastosować, chcąc pozbyć się nawiasu w wyrażeniu $(-2a-b)^2$? Wyrażenie podnoszone do kwadratu można potraktować jako różnicę $(-2a)-b$, jako sumę $(-2a)+(-b)$, ale najlepiej zamienić $-2a-b$ na liczbę przeciwną:

$$(-2a-b)^2 = (2a+b)^2.$$

Wyrażenie $(-a+b)^2$ napiszmy w postaci $(b-a)^2$ i zastosujmy wzór na kwadrat różnicy, bo to uprości rachunki.

Zauważmy, że $(a-b)^2=(b-a)^2$. Wynika to stąd, że liczba $b-a$ jest przeciwna do $a-b$.

Każdy z wzorów skróconego mnożenia stosujemy także w drugim kierunku, od strony prawej do lewej.

Na przykład chcąc wykazać, że wyrażenie $x^2-10x+25$ nie przyjmuje wartości ujemnych, przedstawiamy go w postaci kwadratu:

$$x^2-10x+25=(x-5)^2.$$

Jak wiadomo, kwadrat dowolnej liczby jest nieujemny. Zatem $(x-5)^2\geqslant 0$, skąd $x^2-10x+25\geqslant 0$.

Chcąc zbadać wartości wyrażenia $x^2+6x+10$, przekształcamy:

$$x^2+6x+10=(x^2+2\cdot 3x+3^2)+1=(x+3)^2+1.$$

Ponieważ $(x+3)^2\geqslant 0$, więc $(x+3)^2+1\geqslant 1$, co oznacza, że wyrażenie $x^2+6x+10$ przyjmuje co najmniej wartość 1.

Wzory skróconego mnożenia przydają się też do przekształcania wyrażeń arytmetycznych z pierwiastkami:

$$(2\sqrt{3}+1)^2=4\cdot 3+4\sqrt{3}+1=4\sqrt{3}+13,$$

$$(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2=7-5=2,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}+2)}{(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)}=\frac{2\cdot 3+2\sqrt{3}}{4\cdot 3-4}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{8}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$

To ostatnie przekształcenie usuwa niewymierność z mianownika.

O dziedzinie i wartościach wyrażeń algebraicznych

Litery występujące w wyrażeniu algebraicznym nazywamy zmiennymi. Są wyrażenia z jedną zmienną, dwoma zmienymi itd. Na przykład w wyrażeniu $2x^5 + 3xy^2 + xz$ są trzy zmienne, a wyrażenie $\frac{x-y}{x+y}$ zawiera dwie zmienne.

Podstawiając w miejsce zmiennych konkretne liczby, otrzymujemy liczbę zwaną wartością wyrażenia dla danych liczb. W pierwszym z podanych przykładów w miejsce liter możemy podstawiać dowolne liczby, natomiast w drugim wyrażeniu nie można podstawić takich liczb, dla których mianownik jest zerem. Na przykład podstawienie $x = 7$ i $y = -7$ jest w drugim wyrażeniu niedozwolone. Ogólnie nie możemy tam podstawić żadnych dwóch liczb przeciwnych, bo musi być spełniony warunek $x + y \neq 0$, czyli $x \neq -y$.

Mówimy, że dziedziną wyrażenia $\frac{x-y}{x+y}$ jest zbiór takich par liczb x, y, że $x \neq -y$.

A jakie podstawienia są wykluczone w wyrażeniu $\frac{3-a}{(a^2+1)(a^2-1)}$? Mianownik, który ma być różny od zera, jest iloczynem dwóch czynników. Zatem oba muszą być różne od zera. Pierwszy czynnik, tzn. $a^2 + 1$, jest różny od zera dla każdej liczby a. Wystarczy więc wziąć pod uwagę warunek $a^2 - 1 \neq 0$. Jest on równoważny temu, że $a^2 \neq 1$, czyli $a \neq 1$ oraz $a \neq -1$.

W wyrażeniach z pierwiastkami kwadratowymi można podstawiać za zmienne tylko takie liczby, aby pod pierwiastkiem była liczba nieujemna. Na przykład w wyrażeniu $x + \sqrt{x-5}$ musi być spełniony warunek $x - 5 \geqslant 0$, czyli $x \geqslant 5$.

Rozpatrując wyrażenie z logarytmem, pamiętajmy, że logarytm jest określony tylko dla liczb dodatnich. Na przykład w wyrażeniu $\log_p (1 - 5x)$ musi być spełniony warunek $1 - 5x > 0$, czyli $x < \frac{1}{5}$.

W programach szkolnych występują najczęściej wyrażenia, w których jest tylko mnożenie i dodawanie[6]. Jak wiadomo, tego rodzaju wyrażenia noszą nazwę wielomianów. Są wielomiany jednej zmiennej, wielomiany dwóch zmiennych itd. W szkole najczęściej rozważa się wielomiany jednej zmiennej. Najwyższą potęgę zmiennej występującej w danym wielomianie nazywamy stopniem wielomianu. Na przykład $x^5 + 3x^4 - 5x + 2$ jest wielomianem stopnia piątego, a wielomian $2x + 3$ ma stopień 1.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $4a^3 + 3a^2 - 5a - 10$

dla $a = -2$,

b) $a^2 - ab^2$ dla $a = -\frac{3}{4}$ i $b = -\frac{1}{2}$.

2. Dla jakich x nie jest określone wyrażenie $\frac{x+1}{x(x+2)(x-2)}$?

1. a) -20, b) $\frac{3}{4}$.

2. Nie jest określone dla żadnej z trzech liczb: 2, 0, -2.

Mnożąc wielomian $2x^3 + x - 1$ przez wielomian $x^2 - 3x + 2$, otrzymamy między innymi wyraz $2x^3 \cdot x^2$, czyli $2x^5$. I to jest wyraz z największą potęgą, którą otrzymamy. Jak widać, w wyniku mnożenia wielomianów otrzymujemy wielomian, którego stopień jest sumą stopni poszczególnych czynników.

Wśród wartości, jakie przyjmuje dany wielomian, na szczególną uwagę zasługuje wartość zero. Oczywiście nie każdy wielomian musi ją przyjmować. Na przykład wielomian $x^2 + 1$ nie przyjmuje wartości zero, bo najmniejsza przyjmowana przez niego wartość to 1 (dla $x = 0$). Natomiast wielomian $x^2 - 4$ przyjmuje wartość zero dla dwóch liczb: $x = \sqrt{4}$ oraz $x = -\sqrt{4}$.

Podany przykład pokazuje, dlaczego liczbę, dla której wartość wielomianu jest równa zero, nazywamy pierwiastkiem wielomianu.

[6] Przypomnijmy, że odejmowanie jest również dodawaniem (liczb przeciwnych), a potęgowanie jest mnożeniem (jednakowych czynników)

Sprawdź, czy potrafisz

1. Sprawdź, czy -3 jest pierwiastkiem wielomianu $2x^3 - x^2 - 2x + 30$.

2. Dla jakiej wartości a liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $x^5 - x^4 + x^3 + ax - 3 = 0$?

1. Nie jest.
2. $a = -6$.

Jak układać równania?

Jak wiadomo, równania są przydatnym narzędziem do rozwiązywania zadań tekstowych. Układając równania, zapisujemy tekst za pomocą wyrażeń algebraicznych, zawierających zarówno liczby podane w treści zadania, jak i niewiadome, które mamy znaleźć.

Tłumacząc tekst na język algebry, starajmy się to robić jak najprościej, a przede wszystkim nie wpadajmy w pułapki.

Na przykład jeżeli pewna liczba jest o 3 większa lub 3 razy większa od niewiadomej, to pojawiają się wyrażenia $x + 3$ oraz $3x$. Jeżeli natomiast liczba jest o $\frac{1}{3}$ większa lub mniejsza od niewiadomej, to na ogół ma postać $x + \frac{1}{3}x$ lub $x - \frac{1}{3}x$, bo w sytuacjach życia codziennego ułamek jest zawsze ułamkiem czegoś. To samo dotyczy zmiany wyrażonej w procentach: więcej o 32% od x, to $x + 0{,}32x$, czyli $1{,}32x$.

Jeżeli trzeba znaleźć dwie liczby, z których jedna jest 2 razy mniejsza od drugiej, to zamiast szukać liczb postaci x oraz $\frac{x}{2}$, lepiej przyjąć za niewiadomą liczbę mniejszą, czyli poszukać liczb x oraz $2x$, bo unikniemy ułamka.

Zobaczmy to na przykładzie:

Córka jest dwa razy młodsza od matki. 6 lat temu matka miała tyle lat, ile córka będzie miała za 17 lat. Ile lat ma matka, a ile córka?

Jeżeli wiek córki oznaczymy przez c, to wiek matki jest równy $2c$ i otrzymamy równanie $2c - 6 = c + 17$, które łatwo rozwiązać nawet w pamięci.

Zawsze warto zastanowić się, którą z nieznanych wielkości przyjąć za niewiadomą. Chodzi o to, aby rozwiązać zadanie jak najprościej.

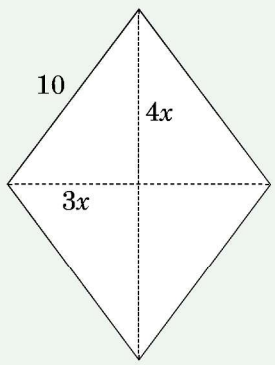
Ojciec i syn mają razem 60 lat. Za 3 lata ojciec będzie 2 razy starszy od syna. Ile lat ma ojciec teraz?

Na pewno nie warto wprowadzać tu dwóch niewiadomych. Warto natomiast skorzystać z tego, że jeżeli za 3 lata syn będzie miał s lat, to wtedy ojciec bedzie miał $2s$ lat. A ile lat będą mieli w sumie? Każdemu przybędzie 3 lata, więc razem przybędzie im 6 lat i będą mieli $60 + 6$ lat. Otrzymamy więc równanie $2s + s = 66$, skąd $s = 22$. Pamietając, że jest to wiek syna za 3 lata, obliczymy jego obecny wiek, a potem wiek ojca.

Zastanówmy się, co przyjąć za niewiadomą w następującym zadaniu:

Bok rombu jest równy 10, a przekątne rombu są do siebie w stosunku 3 : 4. Oblicz przekątne rombu.

Przyjmując za niewiadome długości przekątnych rombu, otrzymamy układ równań: jedno opisuje stosunek przekątnych, drugie związek między ich połówkami i bokiem rombu, wynikający z twierdzenia Pitagorasa. Sprytniej będzie, jeżeli przyjmiemy oznaczenia jak na rysunku:



Z równania $(3x)^2 + (4x)^2 = 10^2$ obliczymy x. Długości przekątnych są równe $6x$ i $8x$.

A jak sobie poradzić z zadaniem:

> Gdyby rowerzysta zwiększył swoją prędkość o 2 km na godzinę,
> to trasę, którą przejeżdża w ciągu 8 godzin, pokonałby w ciągu 7 godzin.
> Oblicz prędkość rowerzysty.

Wystarczy skorzystać z tego, że rowerzysta za każdym razem przejeżdża tę samą drogę. Jeżeli jadąc z prędkością x (km/h) pokonuje drogę w ciągu 8 godzin, to droga jest równa $8x$ (km). Podobnie droga ta jest równa $7(x + 2)$. W konsekwencji otrzymujemy równanie $8x = 7(x + 2)$.

Są jednak zadania, w których trzeba posłużyć się dwiema niewiadomymi, na przykład:

> Jeśli mniejszy bok pewnego prostokąta powiększymy o 3, a większy
> zmniejszymy o 9, to pole prostokąta nie zmieni się. Jeżeli natomiast
> mniejszy bok zmniejszymy o 1, a większy zwiększymy o 1,
> to pole prostokąta zmaleje o 15. Oblicz długości boków prostokąta.

Oznaczając długości mniejszego i większego boku prostokąta odpowiednio przez x i y, zapisujemy treść zadania:

$$\begin{cases} (x + 3)(y - 9) = xy \\ (x - 1)(y + 1) = xy - 15 \end{cases}$$

Przekształcając równania zauważymy, że iloczyn xy wystąpi po obu stronach każdego z równań i zniknie po redukcji. Zostanie układ równań, który umiemy rozwiązać:

$$\begin{cases} 3x - y = -9 \\ x - y = -14. \end{cases}$$

Jak rozwiązywać równania?

Zacznijmy od przykładów.

Równanie $x + 1 = x + 2$ nie ma żadnego rozwiązania, bo zwiększając dowolną liczbę o 2 otrzymamy więcej, niż zwiększając ją o 1.

Równanie $x + 6 = 8$ ma jedno rozwiązanie, bo jest spełnione tylko przez liczbę 2.

Równanie $2x^2 = 8$ ma dwa rozwiązania, bo jest spełnione zarówno przez liczbę 2, jak i -2.

Równanie $x(x + 1)(x - 2) = 0$ ma trzy rozwiązania, bo jest spełnione dokładnie wtedy, kiedy któryś z czynników jest równy zeru. Zatem $x = 0$ lub $x = -1$ lub $x = 2$.

Rozwiązując równanie $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$, rozłożymy lewą stronę na czynniki:

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x - 2) + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1).$$

Równanie $x + 1 = y + 2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Znajdując je, wystarczy podstawić za jedną z niewiadomych dowolną liczbę i znaleźć drugą. Na przykład jeżeli $x = 0$, to $y = -1$, jeżeli $x = 1$, to $y = 0$, a dla $x = 5$ otrzymamy $y = 4$. Ogólnie $y = x - 1$.

Równanie $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ma jedno rozwiązanie, bo jest spełnione tylko wtedy, kiedy każda z trzech niewiadomych jest zerem.

A ile rozwiązań ma równanie $|x| = a$, gdzie a jest pewną stałą? To zależy od znaku a. Zobaczmy to na przykładach:

$|x| = 2$,

$|x| = -2$,

$|x| = 0$.

Są dwie liczby (–2 i 2), których wartość bezwzględna jest równa 2, jest jedna liczba (zero) o wartości bezwzględnej 0 i nie ma liczby, której wartość bezwzględna jest równa –2.

Rozwiązanie nie zawsze jest od razu widoczne, często trzeba zacząć od przekształcenia równania. Przekształcamy równanie tak, aby nie zmienić jego rozwiązań, czyli przekształcamy równanie do tzw. postaci równoważnej.

Rozwiązując równanie z jedną niewiadomą, w pewnym momencie przenosimy wyrazy z niewiadomą na jedną stronę, a liczby na drugą.

> Chcąc rachować sprawnie i możliwie szybko, warto zastanowić się, na którą stronę przenieść niewiadome. Dobrze jest to robić tak, aby unikać minusów przy niewiadomych, bo one na ogół utrudniają rachunki i prowadzą do pomyłek.

Na przykład rozwiązując równanie $1 + 3x = 5x - 6$, opłaca się przenieść niewiadome na prawą stronę, a wiadome na lewą:

$$1 + 6 = 5x - 3x, \quad 7 = 2x, \quad x = \frac{7}{2}.$$

Rozwiązując równanie, w którym są ułamki, warto pozbyć się ich możliwie szybko, bo wtedy łatwiej rachować. Na przykład rozwiązując równanie $\frac{2}{3}x + 5 = \frac{1}{2}x$, warto zacząć od pomnożenia obu stron równania przez 6. Nie zapomnijmy tylko, że lewa strona jest sumą dwóch wyrazów i wobec tego każdy z nich trzeba pomnożyć przez 6:

$$6 \cdot \frac{2}{3}x + 6 \cdot 5 = 6 \cdot \frac{1}{2}x.$$

Równanie postaci $0{,}3x + 0{,}21 = 0{,}23x - 0{,}04$ opłaca się pomnożyć stronami przez 100.

Jeżeli w równaniu występuje ułamek $\frac{2x+3}{4}$, a obie strony równania mnożymy przez 8, to zamiast ułamka otrzymamy $2 \cdot (2x + 3)$. Nie zapominaj o tym nawiasie!

Rozwiązując układ równań, opłaca się korzystać z metody przeciwnych współczynników. W metodzie podstawiania często pojawiają się ułamki, podczas gdy metoda przeciwnych współczynników pomaga ich unikać.

Rozwiązując układ

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

warto zacząć od odjęcia stronami pierwszego równania od drugiego. Otrzymamy $x + y = -5$, skąd wyznaczymy jedną z niewiadomych, podstawimy otrzymane wyrażenie do jednego z dwóch danych równań i znajdziemy drugą niewiadomą. Możemy także otrzymane równanie dołączyć do jednego z dwóch równań układu i zastosować metodę przeciwnych współczynników.

Na zakończenie kilka uwag dotyczących rozwiazywania równań kwadratowych. Jeżeli równanie zawiera x tylko w drugiej potędze, to jego rozwiązanie jest proste. Po przekształceniach dochodzi się do postaci $x^2 = a$, gdzie liczba rozwiązań zależy od a.

Nie zapominaj, że dla $a > 0$ równanie ma dwa rozwiązania $x = \sqrt{a}$ i $x = -\sqrt{a}$.

Do rozwiązywania równania kwadratowego postaci $ax^2 + bx + c = 0$ mamy gotowe wzory. Jednak bez wzorów też można sobie poradzić. Zobaczmy to na dwóch przykładach: $x^2 - 2x - 3 = 0$ oraz $x^2 + x - 6 = 0$.

Przekształćmy lewą stronę pierwszego równania:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x - 1)^2 - 4.$$

Równanie przyjmuje więc postać $(x - 1)^2 - 4 = 0$, czyli $(x - 1)^2 = 4$, skąd $x - 1 = 2$ lub $x - 1 = -2$, więc $x = 3$ lub $x = -1$.

Podobne przekształcenia w równaniu drugim są nieco bardziej skomplikowane:

$$x^2 + x - 6 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0.$$

Zatem $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, skąd $x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ lub $x + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, więc $x = 2$ lub $x = -3$.

Tego rodzaju sposób rozwiązywania równań kwadratowych warto stosować wtedy, kiedy rachunki są proste. Stosuję go w większości omawianych zadań maturalnych.

> Rozwiązując równanie, które było środkiem do rozwiązania zadania tekstowego, warto skonfrontować otrzymane liczby z treścią zadania i sprawdzić, czy rzeczywiście spełniają one podane warunki.

Jest to sposób na wykrycie ewentualnych błędów. Może się przy tym okazać, że niektóre rozwiązania równania trzeba odrzucić. Na przykład jeżeli niewiadomą jest długość pewnego odcinka spełniająca równanie $x^2 = 4$, to trzeba odrzucić rozwiązanie $x = -2$.

Uwagi o rozwiązywaniu nierówności

Podobnie jak w przypadku równań, rozwiązywanie nierówności często zaczynamy od przekształcania jej do postaci równoważnej, tzn. przekształcamy tak, aby nie zmieniły się liczby spełniające nierówność.

Nierówności z niewiadomą w pierwszej potędze[7] rozwiązujemy podobnie jak równania, tzn. dążymy do tego, aby wyrazy z niewiadomą znalazły się po jednej stronie nierówności, a liczby po drugiej. Jedyna różnica polega na tym, że mnożąc lub dzieląc obie strony nierówności przez liczbę ujemną, trzeba zmienić nierówność na przeciwną,

[7] Nierówności kwadratowe są omówione w rozdziale 6.

o czym czasami zapominamy. Warto więc unikać sytuacji, kiedy takie działania są potrzebne.

> Starajmy się tak przenosić wyrazy, aby przed niewiadomą nie było minusa.

Na przykład:

$$3 - 5x < 2x + 4, \quad 3 - 4 < 2x + 5x, \quad -1 < 7x, \quad x > -\frac{1}{7}.$$

Jeżeli w nierówności są ułamki, to warto jak najszybciej się ich pozbyć, mnożąc obie strony nierówności przez wspólny mianownik. Na przykład rozwiązując nierówność $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}(2 - x) > x - 3$, pomnóżmy obie strony przez 10. Z pierwszego ułamka zostanie licznik pomnożony przez 2, a z drugiego licznik pomnożony przez 5. Nie zapomnijmy o pomnożeniu prawej strony przez 10. Otrzymamy:

$$6x + 5\,(2 - x) > 10\,(x - 3),$$
$$x + 10 > 10x - 30,$$
$$10 + 30 > 10x - x,$$
$$40 > 9x, \quad x < \frac{40}{9}.$$

Sprawdź, czy potrafisz

1. Rozwiąż nierówności:

a) $1 - \frac{2}{3}(x - 1) > \frac{1}{6}x$,

b) $6 - 0{,}3 \cdot x < 9$.

2. Znajdź największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność

$3(x + 1) - 2(2x - 3) < 3 - 4(x + 2)$.

1. a) $x < 2$,
b) $x > -10$.
2. -5.

A jak rozwiązywać nierówności z wartością bezwzględną?

Rozwiązując nierówność $|x - 1| < 3$, zadajemy sobie pytanie, gdzie na osi liczbowej są liczby, których wartość bezwzględna jest mniejsza od 3. Są to liczby leżące pomiędzy -3 i 3, a więc liczby większe od -3 i jednocześnie mniejsze od 3. Zadanie sprowadza się więc do znalezienia wspólnego rozwiązania dwóch nierówności: $x - 1 > -3$ oraz $x - 1 < 3$. Z pierwszej nierówności wynika, że $x > -2$, a rowiązanie drugiej nierówności to $x < 4$. Łącząc oba warunki, otrzymujemy, że x leży pomiędzy -2 i 4, co zapisujemy w postaci podwójnej nierówności: $-2 < x < 4$.

Rozwiązując nierówność $|2x + 3| > 5$, szukamy na osi liczb, których wartość bezwzględna jest większa od 5. Są to zarówno wszystkie liczby większe od 5, jak i wszystkie liczby mniejsze od -5, a więc liczby spełniające nierówność $2x + 3 > 5$ oraz liczby spełniające nierówność $2x + 3 < -5$. Z pierwszej nierówności otrzymujemy $x > 1$, a z drugiej $x < -4$. Zatem nierówność $|2x + 3| > 5$ jest spełniona, jeżeli $x > 1$ lub $x < -4$.

> Stawiając pierwsze kroki w rozwiązywaniu nierówności z wartością bezwzględną, warto pomagać sobie ilustrowaniem sytuacji na osi liczbowej.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Rozwiąż nierówność $|3x - 1| < 2$.

2. Rozwiąż nierówność $|x + 5| > 1$.

1. $-\frac{1}{3} < x < 1$.
2. $x > -4$ lub $x < -6$.

Przegląd zadań maturalnych

Przedstaw w postaci iloczynu wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$.

Iloczyn powstanie, jeżeli wyłączymy wspólny czynnik przed nawias. We wszystkich trzech składnikach występuje $5a$. Zatem $5a^2 - 10ab + 15a = 5a(a - 2b + 3)$.
Inną odpowiedź otrzymamy, jeżeli wyłączymy przed nawias tylko 5 lub tylko a.
Zwykle jednak wyłączamy maksymalny wspólny czynnik.

Zapisz wielomian $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego.

Trzeba pogrupować wyrazy, aby móc wyłączyć przed nawias wspólny czynnik. Można to zrobić dwojako: połączyć wyraz pierwszy z drugim, a trzeci z czwartym lub pierwszy z trzecim, a drugi z czwartym.
W pierwszym przypadku:
$x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = x^2(x - 5) - 9(x - 5) = (x - 5)(x^2 - 9) = (x - 5)\,(x - 3)\,(x + 3)$,
W drugim przypadku:
$x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = x(x^2 - 9) - 5(x^2 - 9) = (x^2 - 9)\,(x - 5) = (x - 3)\,(x + 3)\,(x - 5)$.

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 + ax^2 + 6x - 4$. Oblicz a.

Skoro 2 jest pierwiastkiem wielomianu, to jego wartość dla $x = 2$ jest równa zero.
Zatem $2^3 + a \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 = 0, \quad 8 + 4a + 12 - 4 = 0, \quad a = -4$.

Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

Zadanie nie jest łatwe, trzeba pokombinować. Z czego skorzystać?

Trzeba jakoś wyrazić $a^4 + b^4$ za pomocą wyrażeń, których wartości są dane.

Zacznijmy od wyrażenia $a^2 + b^2$, podnosząc je do kwadratu:

$$* \underbrace{(a^2 + b^2)^2}_{7} = a^4 + b^4 + 2a^2b^2.$$

Aby stąd obliczyć $a^4 + b^4$, trzeba znać a^2b^2, a to możemy znaleźć, podnosząc do kwadratu $a + b$. Otrzymamy:

$$\underbrace{(a + b)^2}_{1} = \underbrace{a^2 + b^2}_{7} + 2ab,$$

$2ab = 1 - 7, \quad ab = -3, \quad a^2b^2 = (ab)^2 = 9.$

Wracając do równości *, otrzymujemy $49 = a^4 + b^4 + 2 \cdot 9$, skąd $a^4 + b^4 = 31$.

Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

Wykonujemy działania po obu stronach równości:

$a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2.$

Po redukcji otrzymujemy:

$b^2c^2 + a^2d^2 = 2abcd, \quad b^2c^2 + a^2d^2 - 2abcd = 0, \quad (bc - ad)^2 = 0.$

Ponieważ jedyną liczbą, której kwadrat jest równy zeru, jest zero, więc $bc - ad = 0$, skąd $bc = ad$.

Liczby 3 i -1 są pierwiastkami wielomianu $2x^3 + ax^2 + bx + 30$. Wyznacz wartości współczynników a i b.

Skoro podane liczby są pierwiastkami wielomianu, to dla każdej z nich wielomian przyjmuje wartość zero. Podstawiamy więc w miejsce x raz 3, a drugi raz -1, otrzymując dwa równania z dwiema niewiadomymi a i b:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 30 = 0 \\ 2 \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 30 = 0 \end{cases}$$

Po wykonaniu działań otrzymujemy

$$\begin{cases} 54 + 9a + 3b + 30 = 0 \\ -2 + a - b + 30 = 0 \end{cases}$$

W pierwszym równaniu podzielmy obie strony przez 3. Po redukcji otrzymamy układ

$$\begin{cases} 3a + b + 28 = 0 \\ a - b + 28 = 0 \end{cases}$$

Dodając równania stronami, otrzymamy $4a + 56 = 0$, skąd $a = -14$. W konsekwencji $b = 14$.

Wykaż, że jeżeli $a > 0$, to $\frac{a^2 + 1}{a + 1} \geqslant \frac{a + 1}{2}$.

Sprowadźmy hipotetyczną nierówność do postaci równoważnej, ale bez ułamków. W tym celu obie strony nierówności trzeba pomnożyć przez $2(a + 1)$. Z założenia podanego w zadaniu wynika, że jest to liczba dodatnia i wobec tego kierunek nierówności nie zmieni się:

$2(a^2 + 1) \geqslant (a + 1)^2$.

Otrzymaną nierówność dalej przekształcamy w sposób równoważny. Wykonujemy działania, redukujemy i przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę:

$2a^2 + 2 \geqslant a^2 + 2a + 1$,

$a^2 - 2a + 1 \geqslant 0$.

Końcowa nierówność jest prawdziwa, ponieważ

$a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geqslant 0$.

Stąd wynika, że prawdziwa jest również nierówność początkowa.

Znajdź iloczyn wielomianów: **a)** $3x + y$ i $9x^2 - 3xy + y^2$, **b)** $x^3 - 3x + 1$ i $2x^3$.

Mnożąc wielomiany, mnożymy każdy składnik jednego wielomianu przez każdy składnik drugiego. Uważajmy na znaki i pamiętajmy, że podczas mnożenia dodajemy wykładniki potęg. Zatem:

a) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2) = 27x^3 - 9x^2y + 3xy^2 + 9x^2y - 3xy^2 + y^3 = 27x^3 + y^3$,

b) $2x^3(x^3 - 3x + 1) = 2x^6 - 6x^4 + 2x^3$.

Dla jakich liczb x jest określone wyrażenie $\log_4(2x - 1)$?

Ponieważ logarytm jest określony tylko dla liczb dodatnich, więc $2x - 1 > 0$, skąd $x > \frac{1}{2}$.

Rozwiąż równanie $x(x + 3) - 49 = x(x - 4)$.

Wbrew pozorom nie jest to równanie kwadratowe. Po wykonaniu mnożenia otrzymamy $x^2 + 3x - 49 = x^2 - 4x$, skąd po redukcji mamy $3x - 49 = -4x$. W rezultacie $x = 7$.

Dany jest wielomian $x^3 + ax^2 - 4x + b$. Wyznacz a, b oraz c tak, aby ten wielomian był równy wielomianowi $x^3 + (2a + 3)x^2 + (a + b + c)x - 1$.

Wiadomo, że dwa wielomiany są równe, jeżeli mają równe współczynniki przy takich samych potęgach zmiennej. Porównując wyrazy przy x^2, otrzymamy $a = 2a + 3$, skąd $a = -3$. Porównując wyrazy przy x^0, czyli tzw. wyrazy wolne, widzimy, że $b = -1$. Uwzględniając znalezione wartości i porównując współczynniki przy x, otrzymamy $-3 - 1 + c = -4$, skąd $c = 0$.

Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2 + 10x - 24 = 0$ oraz $x_1 < x_2$.
Oblicz $2x_1 + x_2$.

Rozwiązując równanie, można zastosować wzory na pierwiastki równania kwadratowego, a można też uzupełnić lewą stronę do kwadratu, co w tym przypadku jest nieskomplikowane:

$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 2 \cdot 5x + 25 - 25 - 24 = (x + 5)^2 - 49$.

Otrzymujemy równanie $(x + 5)^2 - 49 = 0$, czyli $(x + 5)^2 = 49$,

skąd $x + 5 = 7$ lub $x + 5 = -7$. Zatem $x = 2$ lub $x = -12$.

Stąd $x_1 = -12$, $x_2 = 2$, więc $2x_1 + x_2 = -22$.

Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Długości przyprostokątnych trójkąta to x i $x + 7$, a ich iloczyn jest równy podwojonemu polu trójkąta. Otrzymujemy więc równanie $x(x + 7) = 120$, czyli $x^2 + 7x - 120 = 0$.

Rozwiązywanie równania metodą uzupełniania do kwadratu byłoby kłopotliwe, bo pojawiły by się ułamki. Zastosujmy więc metodę standardową, obliczając wyróżnik: $\Delta = 7^2 + 4 \cdot 120 = 529$.

Pierwiastek z 529 jest zawarty pomiędzy 20 i 25. Jeżeli ten pierwiastek jest liczbą naturalną, to musi być równy 23 (bo po podniesieniu pierwiastka do kwadratu otrzymujemy ostatnią cyfrę 9). Sprawdzamy: $23^2 = 529$. Stąd $x = \frac{-7 + 23}{2} = 8$, bo drugie rozwiązanie równania jest ujemne i nie wchodzi w grę.

Przyprostokątne są więc równe 8 i 15, a przeciwprostokątną znajdziemy z twierdzenia Pitagorasa, otrzymując 17.

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm i od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Jest dosyć oczywiste, że trzeba będzie skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. Co przyjąć za niewiadomą? Z zadania wynika, że każda z przyprostokątnych daje się łatwo wyrazić za pomocą przeciwprostokątnej: jedna jest mniejsza od przeciwprostokątnej o 1, a druga o 32. Niech więc x oznacza długość przeciwprostokątnej. Wtedy mamy związek $(x-1)^2+(x-32)^2=x^2$. Jest to równanie kwadratowe, więc potrafimy go rozwiązać. Standardowe rachunki będą dosyć żmudne, bo są duże liczby. Spróbujmy niestandardowo:

$$x^2-2x+1+x^2-2\cdot 32x+(32)^2=x^2,$$
$$x^2-2x-2\cdot 32x+1+(32)^2=0,$$
$$x^2-2(x+32x)+1+(32)^2=0,$$
$$x^2-2\cdot 33x+(33)^2-(33)^2+1+(32)^2=0,$$
$$(x-33)^2=(33)^2-1-(32)^2,$$
$$(x-33)^2=(32+1)^2-1-(32)^2,$$
$$(x-33)^2=64.$$

Stąd $x-33=8$ lub $x-33=-8$, więc $x=41$ lub $x=25$.

Ta druga wartość nie spełnia warunków zadania, bo przeciwprostokątna musi być większa od 32. Zatem przeciwprostokątna ma długość 41, a przyprostokątne 40 i 9.

Przedstawiony sposób rozwiązywania równania wymaga pewnego sprytu matematycznego i przedstawiłam go raczej jako ciekawostkę niż wzorzec dla maturzysty.

Dwaj rzemieślnicy przyjęli zlecenie wykonania 980 detali. Zaplanowali, że każdego dnia pierwszy z nich wykona m, a drugi n detali. Obliczyli, że razem wykonają zlecenie w ciągu 7 dni. Po pierwszym dniu pracy pierwszy z rzemieślników rozchorował się i wtedy drugi, aby wykonać całe zlecenie, musiał pracować o 8 dni dłużej niż planował (nie zmieniając liczby wykonywanych codziennie detali). Oblicz m i n.

Skoro rzemieślnicy wykonują razem $m + n$ detali dziennie, to w ciągu 7 dni wykonują $7(m + n)$ detali, co – jak wynika z planu – jest równe 980.
W rzeczywistości jednak pierwszy z nich pracował tylko jeden dzień, a drugi 15 (bo $7 + 8 = 15$), więc wykonali w sumie $m + 15n$ detali, co jest równe 980. Mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} 7(m + n) = 980 \\ m + 15n = 980 \end{cases}$$

Pierwsze z tych równań warto od razu podzielić przez 7, otrzymując $m + n = 140$. Równanie to odejmijmy stronami od drugiego równania, bo w ten sposób zniknie niewiadoma m, co pozwoli obliczyć wartość n. Otrzymamy $n = 60$, podstawimy do pierwszego równania i okaże się, że $m = 80$.

Rozwiąż równanie: **a)** $2x^3 - 14x = 0$, **b)** $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$, **c)** $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$, **d)** $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

Po prawej stronie każdego z równań jest zero. Jeżeli wielomiany występujące w równaniach przedstawimy jako iloczyny wielomianów, to rozwiązanie każdego z równań sprowadzi się do znalezienia takich wartości x, dla których jeden z czynników jest równy zeru.

Będziemy wtedy rozwiązywać równania stopni niższych niż 3. Chcąc rozłożyć wielomian na czynniki, wyłączajmy wspólny czynnik przed nawias. W punkcie a) wystarczy raz wyłączyć wspólny czynnik, podczas gdy w pozostałych punktach trzeba to robić dwukrotnie, łącząc wyrazy w odpowiednie pary.

a) $2x^3 - 14x = 2x(x^2 - 7)$, a równanie $2x(x^2 - 7) = 0$ jest spełnione dokładnie wtedy, kiedy $x = 0$ lub $x = \sqrt{7}$ lub $x = -\sqrt{7}$.

b) $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = x^3 - 5x + 2x^2 - 10 = x(x^2 - 5) + 2(x^2 - 5) = (x^2 - 5)(x + 2)$.
Rozwiązując równanie $(x^2 - 5)(x + 2) = 0$, otrzymujemy, że $x = \sqrt{5}$ lub $x = -\sqrt{5}$ lub $x = -2$.

c) $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = x^3 - 4x + 28 - 7x^2 = x(x^2 - 4) - 7(x^2 - 4) = (x^2 - 4)(x - 7)$.
Otrzymany iloczyn jest równy zero dokładnie wtedy, kiedy $x = 2$ lub $x = -2$ lub $x = 7$.

d) $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = x^2(x - 7) + 2(x - 7) = (x - 7)(x^2 + 2)$.
Ponieważ $x^2 + 2$ nie przyjmuje wartości zero, więc rozwiązaniem równania $(x - 7)(x^2 + 2) = 0$ jest tylko $x = 7$.

Rozwiąż równanie: **a)** $\frac{3x - 1}{7x + 1} = \frac{2}{5}$, **b)** $\frac{x - 5}{x - 3} = \frac{2}{3}$.

W każdym z tych równań mnożymy obie strony przez iloczyn mianowników występujących tam ułamków, co się sprowadza do pomnożenia „na krzyż”.
Otrzymujemy: **a)** $5(3x - 1) = 2(7x + 1)$, skąd $x = 7$,
b) $3(x - 5) = 2(x - 3)$, skąd $x = 9$.

W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary może mieć basen w drugim hotelu. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Jest to ewidentnie zadanie z dwiema niewiadomymi. Oznaczmy przez x i y wymiary basenu w pierwszym hotelu, przy czym niech x będzie tym wymiarem, który w drugim basenie jest większy o 5. Tłumaczymy treść zadania na równania:

$$\begin{cases} xy = 240 \\ (x+5)(y+2) = 350 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie, otrzymując $xy + 5y + 2x + 10 = 350$.
Podstawiamy w miejsce xy liczbę 240, porządkujemy, redukujemy i otrzymujemy $2x + 5y = 100$. Stąd $2x = 100 - 5y$. Znalezione wyrażenie podstawiamy do pierwszego równania, mnożąc go uprzednio stronami przez 2.
Otrzymujemy $(100 - 5y)y = 480$, co przekształcamy do postaci $y^2 - 20y + 96$.
Równanie to można rozwiązać metodą uzupełniania do kwadratu:
$y^2 - 20y + 96 = y^2 - 2 \cdot 10y + 100 - 100 + 96 = (y-10)^2 - 4 = 0$.
Zatem $(y-10)^2 = 4$, skąd $y - 10 = 2$ lub $y - 10 = -2$, czyli $y = 12$ lub $y = 8$.
Jeżeli $y = 12$, to $x = 20$, a jeżeli $y = 8$, to $x = 30$. Są więc dwie możliwości.
W drugim hotelu basen ma odpowiednio wymiary 14 i 25 lub 10 i 35.
Proponuję sprawdzić, że obie pary liczb spałniają warunki podane w zadaniu.

Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{3}{8} + \frac{x}{6} < \frac{5x}{12}$.

Zaczynając od pomnożenia stronami przez 24, otrzymamy $9 + 4x < 10x$, skąd $6x > 9$, czyli $x > \frac{3}{2}$. Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest 2.

Rozwiąż nierówność $|x-2| \geqslant 3$.

Nierówność jest równoważna temu, że
$x-2 \geqslant 3$ lub $x-2 \leqslant -3$.
Zatem $x \geqslant 5$ lub $x \leqslant -1$.

Rozwiąż nierówność $|x+7| < 5$.

Nierówność jest równoważna temu, że
$x+7 > -5$ i $x+7 < 5$. Zatem
$x > -12$ i jednocześnie $x < -2$,
co zapisujemy w postaci $-12 < x < -2$.

Kolejne cztery zadania mają podobną strukturę. W każdym jest mowa o pewnej czynności (pokonywanie drogi, czytanie książki), którą wykonuje się przez pewien czas (dni, godziny) i ze stałą prędkością (tyle samo kilometrów w ciągu godziny lub dnia, tyle samo stron książki w ciągu dnia). W każdym zadaniu wykorzystuje się związek między prędkością, czasem a wielkością wykonywanej czynności.

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Oznaczmy przez x liczbę kilometrów pokonywanych przez turystę w ciągu jednego dnia. Idąc z prędkością x, pokonuje trasę w ciągu $\frac{112}{x}$ dni.
Gdyby szedł z prędkością $x-12$, to pokonał by tę trasę w ciągu $\frac{112}{x-12}$ dni i ten czas byłby dłuższy od poprzedniego o 3 dni. Zatem otrzymujemy równanie $\frac{112}{x}+3=\frac{112}{x-12}$.
Rozwiązywanie równania zacznijmy od pomnożenia obu jego stron przez oba mianowniki. Otrzymamy
$112(x-12)+3x(x-12)=112x$.

Ciąg dalszy na następnej stronie

Ciąg dalszy z poprzedniej strony

Po redukcji występującego po obu stronach wyrazu $112x$ otrzymamy $-112 \cdot 12 + 3x(x - 12) = 0$.
Dzielimy stronami przez 3, otrzymując $-112 \cdot 4 + x(x - 12) = 0$, co przekształcamy do postaci $x^2 - 12x - 448 = 0$. Rozwiązujemy to równanie, korzystając z wzorów na pierwiastki lub uzupełniając do kwadratu. Wybieram ten drugi sposób:
$x^2 - 12x - 448 = x^2 - 2 \cdot 6x + 36 - 36 - 448 = (x - 6)^2 - 484 = 0$.
Zatem $(x - 6)^2 = 484$, skąd $x - 6 = 22$ lub $x - 6 = -22$. To drugie rozwiązanie odrzucamy, bo liczba kilometrów nie może być ujemna, i zostaje $x = 28$.
Na wszelki wypadek sprawdzamy wynik z treścią zadania:
Przechodząc dziennie 28 km, turysta pokonuje trasę 112 km w ciągu 4 dni.
Gdyby przechodził dziennie o 12 km mniej, czyli 16 km, potrzebował by na tę trasę $112 : 16$, czyli 7, dni. Wszystko się zgadza, bo $4 + 3 = 7$.

Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

Oznaczając przez x liczbę kilometrów, jaką samochód przebywał w ciągu godziny, i rozumując analogicznie jak w zadaniu poprzednim, dochodzimy do równania $\frac{210}{x} - \frac{1}{2} = \frac{210}{x + 10}$.
Po przekształceniach równanie przyjmuje postać $x^2 + 10x - 4200 = 0$.
Uzupełniamy do kwadratu i przekształcamy: $x^2 + 2 \cdot 5x + 25 - 25 - 4200 = 0$, $(x + 5)^2 = 4225$, skąd $x + 5 = 65$ lub $x + 5 = -65$.
W drugim przypadku x jest ujemne, co jest niemożliwe wobec treści zadania.
Zatem rozwiązanie zadania ma postać $x = 60$.

Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km. Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż samochód z miasta B do miasta A. Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B. Średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, liczona od chwili wyjazdu z A do momentu spotkania, była o 17 km/h mniejsza od średniej prędkości drugiego samochodu liczonej od chwili wyjazdu z B do chwili spotkania. Oblicz średnią prędkość każdego samochodu do chwili spotkania.

To zadanie jest nieco bardziej kłopotliwe niż dwa poprzednie, bo są dwa samochody, a każdy z nich przebywa inną drogę. Samochód jadący z A do B przebywa $(474 - 300)$ km, a samochód jadący z B do A przebywa 300 km. Oznaczmy przez x prędkość samochodu jadącego z B do A. Wtedy drugi samochód jedzie z prędkością $x - 17$. Proponuję zilustrować sytuację na rysunku:



Czas jazdy samochodu jadącego z A jest więc równy $\frac{174}{x-17}$, a czas jazdy samochodu jadącego z B to $\frac{300}{x}$, przy czym ten drugi czas jest o godzinę dłuższy. Zatem $\frac{174}{x-17} + 1 = \frac{300}{x}$.

Po standardowych przekształceniach otrzymamy równanie $x^2 - 143x + 5100 = 0$, którego wyróżnik (Δ) jest równy 49, skąd $x = 75$ lub $x = 68$.

Tym razem oba pierwiastki bierzemy pod uwagę, bo oba są dodatnie. Zadanie ma więc dwa rozwiązania. Jeżeli samochód jadący z B jedzie z prędkością 75 km/h, to drugi samochód ma prędkość 58 km/h, a jeżeli samochód jadący z B jedzie z prędkością 68 km/h, to prędkość drugiego samochodu jest równa 51 km/h.

Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Oznaczmy przez x liczbę dni, w czasie których uczeń przeczytał książkę. Czytał ją zatem z prędkością $\frac{480}{x}$ stron na dzień. Gdyby czas czytania książki miał być o 3 dni krótszy, to dziennie trzeba by przeczytać $\frac{480}{x-3}$ i to by było o 8 (stron dziennie) więcej niż poprzednio. Stąd $\frac{480}{x} + 8 = \frac{480}{x-3}$.

Dzieląc obie strony równania przez 8, otrzymujemy $\frac{60}{x} + 1 = \frac{60}{x-3}$.
Po standardowych przekształceniach mamy równanie $x^2 - 3x - 180 = 0$.
Biorąc pod uwagę tylko dodatni pierwiastek, otrzymamy $x = 15$.
Ewentualne sprawdzenie odpowiedzi z treścią zadania pozostawiam Czytelnikowi.

Rozwiąż równanie:
a) $\frac{x^2-36}{x-6} = 0$, **b)** $\frac{x^2+36}{x-6} = 0$.

a) $x^2 - 36 = 0$ dla $x = 6$ oraz dla $x = -6$, ale rozwiązaniem danego równania jest tylko $x = -6$, bo mianownik musi być różny od zera.

b) Żadna liczba nie spełnia równania, bo licznik jest zawsze różny od zera.

Wyrażenie $||x| + 1|$ dla $x < 0$ zapisz tak, aby nie było w nim modułu.

Zauważmy, że zewnętrzny symbol modułu jest niepotrzebny. Istotnie, $||x| + 1| = |x| + 1$ dla każdego x, bo $|x| + 1 > 0$. Jeżeli $x < 0$, to $|x| = -x$, skąd $|x| + 1 = -x + 1$.

Rozłóż na czynniki wielomian $4x^2 - 100$.

$4x^2 - 100 = 4(x^2 - 25) = 4(x + 5)(x - 5)$.

Która z liczb: $-5, -4, -3, -2$ jest największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $(4 + x)^2 < (x - 4)(x + 4)$?

Można rozwiązać nierówność i znaleźć największą liczbę, która ją spełnia. Można także postąpić inaczej, sprawdzając, która z podanych liczb spełnia nierówność. Ponieważ szukamy liczby największej, więc opłaca się zacząć od końca.

Podstawiając $x = -2$ lub $x = -3$, otrzymujemy po prawej stronie liczbę ujemną, więc nierówność nie jest prawdziwa, bo lewa strona jest zawsze (tzn. dla każdego x) liczbą nieujemną. Jeżeli $x = -4$, to po obu stronach nierówności jest zero i nierówność także nie jest prawdziwa. Jeżeli $x = -5$, to po lewej stronie nierówności jest 1, a po prawej $(-9) \cdot (-1)$, więc nierówność jest prawdziwa. Zatem nierówność jest spełniona dopiero dla liczby -5.

Rozwiąż równanie $|3x + 1| = 4x$.

Ponieważ bezwzględna wartość każdej liczby jest nieujemna, więc równanie ma rozwiązanie tylko wtedy, kiedy $4x \geqslant 0$, skąd otrzymujemy nierówność $x \geqslant 0$. A skoro tak, to $3x + 1 > 0$, więc $|3x + 1| = 3x + 1$ i równanie ma postać $3x + 1 = 4x$. Zatem $x = 1$.

Z dwóch miast A i B, oddalonych od siebie o 18 km, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta A o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta B. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta B jeszcze $1{,}5$ godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta A.

Oznaczmy przez t czas (liczony w godzinach) od chwili wyjścia drugiego turysty z miasta B do chwili spotkania z pierwszym turystą. Wtedy na całą trasę drugi turysta potrzebował $t+4$ godzin, zaś pierwszy turysta na całą trasę potrzebował $1+t+1{,}5$, czyli $t+2{,}5$ godzin.

Ponieważ trasa liczyła 18 km, więc prędkość pierwszego turysty wyniosła $\frac{18}{t+2{,}5}$ (km/h), a prędkość drugiego turysty była równa $\frac{18}{t+4}$.

Wyraziliśmy prędkości turystów za pomocą niewiadomej t. Trzeba jeszcze znaleźć jakieś równanie, z którego obliczymy t. Skorzystajmy z faktu, że suma dróg, jakie przejdą turyści do momentu spotkania, jest równa 18 (km). Znamy prędkości obu turystów i wiemy, jak długo idą do momentu spotkania: czas pierwszego jest równy $1+t$, a drugiego t. Zatem otrzymujemy równanie

$$\frac{18}{t+2{,}5}\cdot(1+t)+\frac{18}{t+4}\cdot t=18$$

Rozwiązujemy, zaczynając od podzielenia obu stron równania przez 18 i pomnożenia przez iloczyn mianowników:

$$(t+4)(1+t)+(t+2{,}5)t=(t+2{,}5)(t+4),$$

$$t^2+5t+4+t^2+2{,}5t=t^2+6{,}5t+10,$$

$$t^2+t-6=0,$$

$$\Delta=1+24=25,\quad \sqrt{25}=5,\quad t=\frac{-1+5}{2}=2\quad (t<0 \text{ odrzucamy}).$$

Wracamy do wyrażeń określających prędkości turystów, podstawiając $t=2$. Prędkość pierwszego turysty jest więc równa $\frac{18}{2+2{,}5}$, czyli 4 (km/h), a prędkość drugiego $\frac{18}{2+4}$, czyli 3 (km/h).

Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0 < a < b < c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

Zmieńmy postać nierówności tak, aby po obu stronach były ułamki o tym samym mianowniku. Inaczej mówiąc, sprowadźmy ułamki do mianownika 6:
$\frac{2(a+b+c)}{6} > \frac{3(a+b)}{6}$.

Zadanie sprowadza się więc do dowodu tak przekształconej nierówności, co z kolei sprowadza się do dowodu odpowiedniej nierówności między licznikami obu ułamków: $2(a+b+c) > 3(a+b)$.

Mnożymy i redukujemy:
$2a + 2b + 2c > 3a + 3b, \quad 2c > a + b.$

Pozostaje dowieść ostatniej nierówności. Jest ona spełniona, ponieważ z założeń $c > a$ i $c > b$ wynika, że $2c = c + c > a + b$.

Znajdź pierwiastki wielomianu $x^3 + 4x^2 - 9x - 36$.

Poszukajmy rozkładu wielomianu na czynniki, wyłączając przed nawias wspólny czynnik:
$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = x^2(x+4) - 9(x+4) = (x+4)(x^2-9) =$
$= (x+4)(x+3)(x-3).$

Wielomian przyjmuje wartość zero dla trzech wartości zmiennych: $-4, -3, 3$.
Takie są więc jego pierwiastki.

Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Oznaczmy przez t czas (w godzinach), w jakim pociąg pospieszny pokonuje daną trasę. Wtedy pociąg osobowy pokonuje tę trasę w czasie $t + 1$. Prędkości obu pociągów to odpowiednio $\frac{210}{t}$ i $\frac{210}{t+1}$, skąd otrzymujemy równanie $\frac{210}{t} = \frac{210}{t+1} + 24$.

Ponieważ $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ oraz $210 = 2 \cdot 3 \cdot 35$, więc równanie można uprościć, dzieląc obie strony przez $2 \cdot 3$. Otrzymujemy:
$\frac{35}{t} = \frac{35}{t+1} + 4$.

Mnożymy obie strony równania przez iloczyn mianowników, wykonujemy działania i redukujemy:
$35 \cdot (t + 1) = 35 \cdot t + 4t(t + 1)$, $35t + 35 = 35t + 4t^2 + 4t$,
$4t^2 + 4t - 35 = 0$.

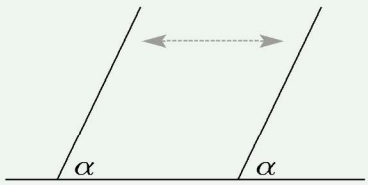
Rozwiązujemy:
$\Delta = 16 + 560 = 576$, $\sqrt{\Delta} = 24$, $t = \frac{-4+24}{8} = 2\frac{1}{2}$ lub $t = \frac{-4-24}{8} < 0$.
Ponieważ w grę wchodzi tylko rozwiązanie dodatnie, więc pociąg pospieszny pokonuje trasę w ciągu $2\frac{1}{2}$ godziny.

4. Własności figur płaskich

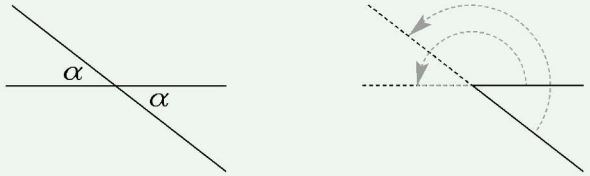
Niektóre własności figur wynikają w sposób widoczny z ich symetrii, inne są konsekwencją równości odcinków lub kątów, czy też ich wzajemnego położenia. Cała sztuka polega na dostrzeżeniu tych związków.

Kąty w wielokątach

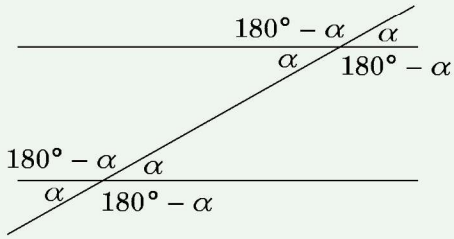
W rozwiązywaniu zadań z geometrii bardzo istotna jest umiejętność spostrzegania, które kąty w danej konfiguracji są równe. Mogą to być kąty w trójkątach podobnych (w szczególności przystających), kąty wpisane oparte na tych samych łukach, a mogą to być kąty, których równość jest zauważalna bezpośrednio. Na przykład kąty równe otrzymamy, ustalając kierunek jednego ramienia, a drugie przesuwając równolegle:



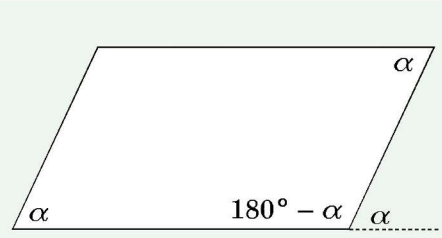
Równe są też tzw. kąty wierzchołkowe, z których jeden powstaje z drugiego przez obrót o 180° wokół wspólnego wierzchołka:

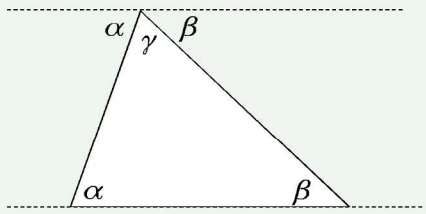


W konsekwencji przy przecięciu pary prostych równoległych trzecią prostą jeden kąt wyznacza pozostałe:



Własność ta pozwala zobaczyć, że przeciwległe kąty równoległoboku są równe, a kąty sąsiednie mają w sumie 180°:

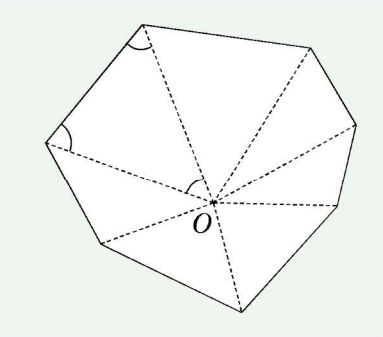




Pozwala też znaleźć sumę kątów dowolnego trójkąta:

W konsekwencji możemy obliczyć sumę kątów dowolnego wielokąta.

W przypadku wielokąta o wszystkich kątach wypukłych[8] dowód można odczytać z rysunku:



Istotnie, łącząc dowolny punkt wewnętrzny z wierzchołkami wielokąta, otrzymujemy tyle trójkątów, ile boków ma wielokąt. Dodając kąty tych trójkątów otrzymujemy sumę kątów wielokąta powiększoną o kąt pełny o wierzchołku O. Zatem suma kątów wielokąta jest równa sumie kątów trójkątów pomniejszonej o $360°$. W przypadku n-kąta otrzymujemy więc liczbę $n \cdot 180° - 360°$, czyli $n \cdot 180° - 2 \cdot 180°$, skąd możemy wyłączyć $180°$ poza nawias, otrzymując $(n-2) \cdot 180°$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Jeden z kątów równoległoboku jest równy $55°$.
Oblicz pozostałe kąty równoległoboku.

2. Uzasadnij, że nie istnieje czworokąt o jednym kącie prostym i trzech ostrych.

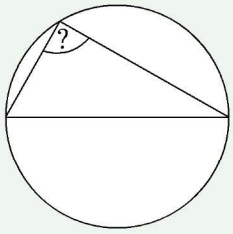
3. Czy istnieje wielokąt o sumie kątów równej: a) $1980°$, b) $2150°$?

1. Dwa kąty po $55°$ i dwa po $125°$. **2.** Suma kątów takiego czworokąta byłaby mniejsza od $360°$, co jest sprzeczne z tym, że suma kątów dowolnego czworokąta jest równa $360°$.
3. a) Tak, jest to trzynastokąt. b) Nie istnieje, bo żadna liczba naturalna nie spełnia równania $(n-2) \cdot 180 = 2150$.

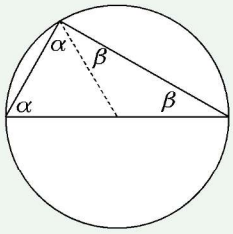
[8] tzn. mniejszych od $180°$

Kąty w kole

Zacznijmy od znalezienia miary kąta wpisanego opartego na półokręgu[9]:



Dorysowując promień, dzielimy trójkąt na dwa trójkąty równoramienne, więc mające po dwa kąty równe:

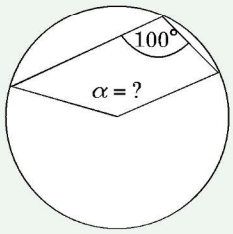


Teraz wystarczy zsumować kąty wyjściowego trójkąta:

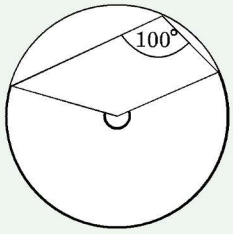
$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180°, \text{ skąd } \alpha + \beta = 90°.$$

Własność ta jest szczególnym przypadkiem twierdzenia, że każdy kąt wpisany jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Jeżeli łuk jest półokręgiem, to kąt środkowy na nim oparty jest półpełny, więc odpowiadający mu kąt wpisany jest prosty.

W zadaniach na kąty wpisane i środkowe najważniejsze jest właściwe odczytanie łuku, na którym dany kąt środkowy jest oparty. Na przykład w sytuacji przedstawionej na rysunku



kąt środkowy α nie jest oparty na tym samym łuku co kąt wpisany 100°. Nie można więc bezpośrednio skorzystać z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym, trzeba wziąć pod uwagę dopełnienie kąta α do kąta pełnego:



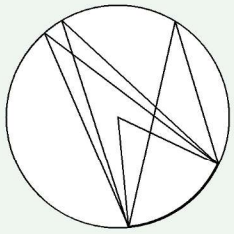
Zaznaczony na rysunku kąt środkowy jest oparty na tym samym łuku, co kąt wpisany 100°, więc jest równy 200°. Wracając do kąta α, otrzymamy $\alpha = 360° - 200° = 160°$.

[9] O kącie takim mówimy też, że jest oparty na średnicy.

4. Własności figur płaskich

Wyobraźmy sobie koło i dowolny łuk na jego okręgu. Ile jest kątów środkowych, a ile wpisanych opartych na tym łuku?

Kąt środkowy jest wyznaczony jednoznacznie, a kątów wpisanych jest wiele, bo wierzchołek może „wędrować" po okręgu:

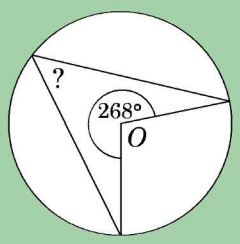


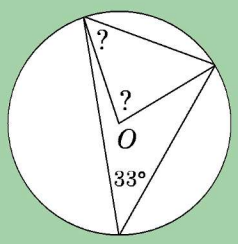
Wszystkie te kąty wpisane są równe, bo każdy z nich jest połową tego samego kąta środkowego.

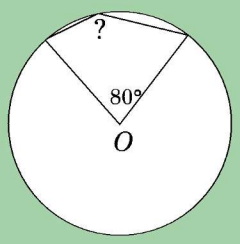
Sprawdź, czy potrafisz

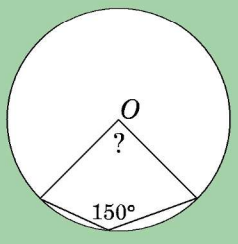
1. Ile wynosi miara dowolnego kąta wpisanego opartego na:
a) $\frac{1}{4}$ okręgu, b) $\frac{1}{8}$ okręgu, c) $\frac{1}{3}$ okręgu?

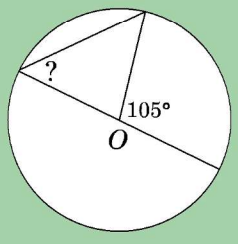
2. Jakie miary kryją się pod znakami zapytania, jeśli punkt O jest środkiem koła:

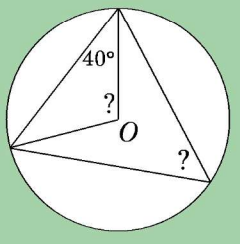
a)


b)


c)


d)


e)


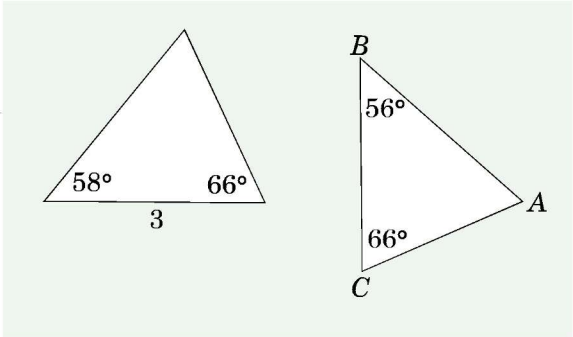
f)


1. a) 45°, b) 22,5°, c) 60°.
2. a) 46°, b) 66° i 57°, c) 140°, d) 60°, e) 52,5°, f) 100° i 50°.

Co wynika z przystawania trójkątów?

Jak wiadomo, trójkąty przystające to takie, z których jeden można otrzymać z drugiego za pomocą przesuwania, obracania i odbicia lustrzanego. Poćwiczmy umiejętność wskazywania par boków równych i par kątów równych w trójkątach przystających.

Na przykład jeżeli trójkąty są przystające, to jeden z boków trójkąta ABC ma długość 3. Który?



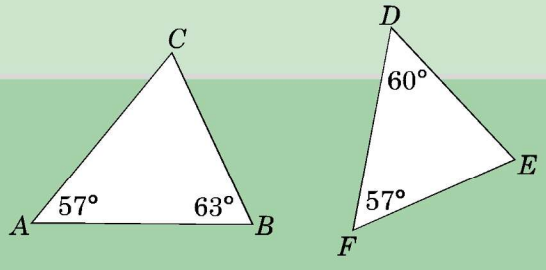
Ten, przy którym są kąty 58° i 66°, czyli bok AC.

Jak wiadomo, do stwierdzenia przystawania dwóch trójkątów wystarczy sprawdzić jeden z trzech warunków, zwanych cechami przystawania trójkątów:

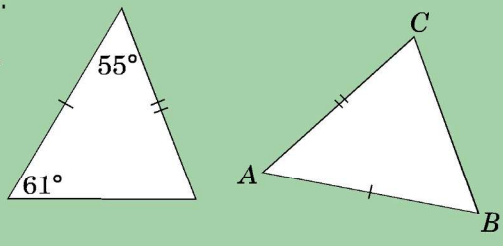
– trójkąty mają równe boki,
– dwa boki wraz z kątem między nimi są takie same w obu trójkątach,
– jeden bok i dwa kąty do niego przylegające są takie same w jednym i drugim trójkącie.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Trójkąty ABC i DEF są przystające. Które boki są równe?

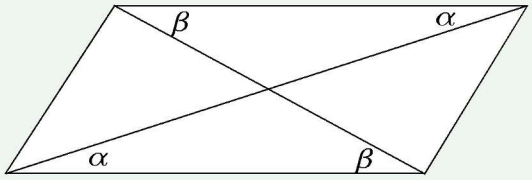


2. Na rysunku zaznaczono równe boki trójkątów. Znajdź miary kątów przy wierzchołkach A, B, C.

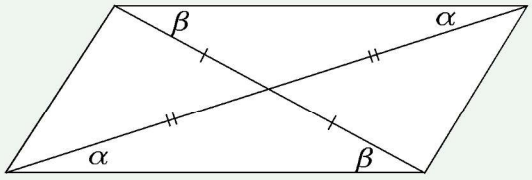


1. AB i FE, AC i FD, BC i ED.
2. Odpowiednio: $55°$, $61°$ i $64°$.

Wiele własności wielokątów wykrywamy, znajdując odpowiednie trójkąty przystające. Na przykład popatrzmy na trójkąty utworzone przez przekątne równoległoboku:

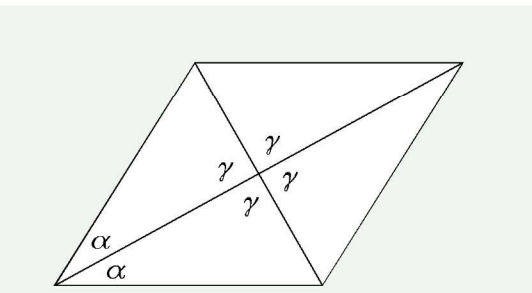


Trójkąty położone naprzeciw siebie mają równe kąty. Ponieważ dodatkowo trójkąty te mają bok tej samej długości (bo równoległe boki równoległoboków są równe), więc są przystające. W konsekwencji ich boki leżące naprzeciw kątów α są równe oraz równe są boki leżące naprzeciw kątów β:



Oznacza to, że przekątne równoległoboku dzielą się wzajemnie na połowy.

Jeżeli dodatkowo równoległobok ma równe wszystkie boki, tzn. jest rombem, to wszystkie cztery trójkąty mają takie same boki. Są więc przystające, skąd wynika równość kątów pokazanych na rysunku:



Z rysunku odczytujemy, że przekątne rombu dzielą jego kąty na połowy. Ponadto $4\gamma = 360°$, skąd $\gamma = 90°$. Przekątne rombu są więc prostopadłe.

Obie te własności można odwrócić, również posługując się przystawaniem trójkątów:

> Jeżeli przekątne czworokąta dzielą się na połowy,
> to czworokąt jest równoległobokiem, a jeżeli dodatkowo przekątne
> są prostopadłe, to czworokąt jest rombem.

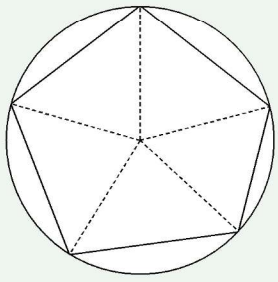
Symetrie wielokątów

Zacznijmy od symetrii osiowej. Jak wiadomo, oś symetrii figury dzieli ją na dwie części, z których jedna jest odbiciem lustrzanym drugiej. Zbadajmy, ile osi symetrii może mieć wielokąt.

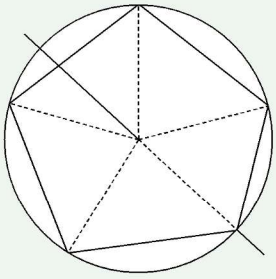
Są wielokąty, nie mające osi symetrii w ogóle – na przykład równoległobok, który nie jest prostokątem ani rombem. Są wielokąty, mające dokładnie jedną oś symetrii – na przykład trapez równoramienny, który nie jest prostokątem, lub trójkąt równoramienny, który nie jest równoboczny. Prostokąt różny od kwadratu ma dwie osie symetrii; dwie osie symetrii ma również romb, który nie jest kwadratem.

Trójkąt równoboczny ma trzy, a kwadrat ma cztery osie symetrii. Trójkąt równoboczny i kwadrat należą do wielokątów foremnych. Wielokąt foremny to taki wielokąt, który ma wszystkie kąty równe i wszystkie boki równe. Im więcej kątów ma wielokąt foremny, tym więcej ma osi symetrii.

> Okazuje się, że każdy wielokąt foremny ma tyle osi symetrii, ile ma kątów: pięciokąt ma pięć osi symetrii, sześciokąt ma sześć itd.



Na przykład znajdźmy osie symetrii pięciokąta. Narysujmy pięciokąt, wpisując go w koło. W tym celu kąt pełny trzeba podzielić na pięć równych części:

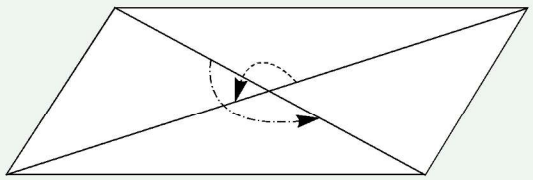


Przedłużając promienie, otrzymamy osie symetrii:

Zastanówmy się teraz nad środkami symetrii wielokątów. Przypomnijmy: środek symetrii figury jest takim punktem, że po obrocie wokół niego o 180° figura pozostaje taka sama.

Chcąc doświadczalnie rozstrzygnąć, czy dany punkt jest środkiem symetrii danej figury, trzeba by nałożyć na figurę jej ruchomą kopię, przymocowując ją w danym punkcie na przykład za pomocą szpilki, po czym obrócić tę kopię o 180° (wszystko jedno w którą stronę) i zobaczyć, czy pokryje się z figurą wyjściową.

Dowolny równoległobok ma środek symetrii, jest nim punkt przecięcia przekątnych:



Żaden trójkąt, nawet równoboczny, nie ma środka symetrii.

Można to uogólnić na wielokąty o nieparzystej liczbie kątów: żaden z nich, nawet foremny, nie ma środka symetrii. Natomiast wielokąty foremne o parzystej liczbie kątów mają środek symetrii.

Sprawdź, czy potrafisz

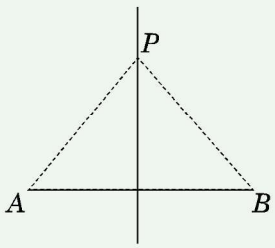
1. Znajdź osie symetrii sześciokąta foremnego i jego środek symetrii.

2. Które z drukowanych wielkich liter alfabetu polskiego mają osie symetrii, a które mają środki symetrii?

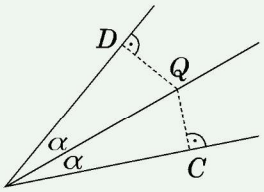
1. Osiami symetrii są proste wyznaczone przez przekątne łączące przeciwległe wierzchołki oraz odcinki łączące środki przeciwległych boków. Środkiem symetrii jest punkt przecięcia osi symetrii. **2.** Osie symetrii mają: A, B, D, E, H, I, K, M, O, T, U, W, Y. Środki symetrii mają: H, I, N, O, S, Z.

Co wynika z symetrii osiowej?

Z symetrii osiowej wynika, że symetralna odcinka pokrywa się ze zbiorem punktów równooddalonych od jego końców, a dwusieczna kąta to dokładnie zbiór punktów równooddalonych od jego ramion:

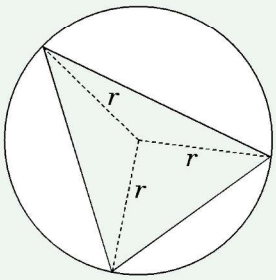


$|AP| = |PB|$

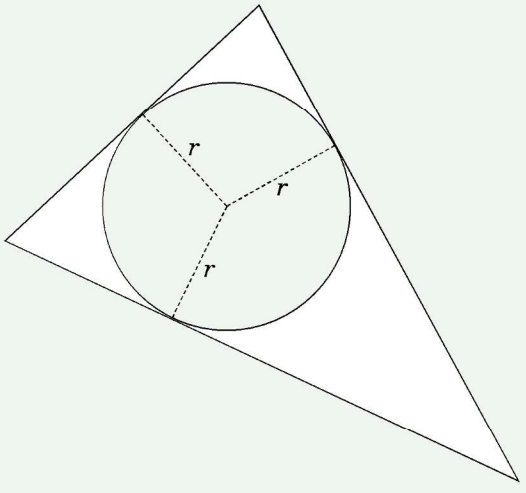


$|CQ| = |QD|$

Z własności tych korzystamy, opisując okrąg na trójkącie i wpisując okrąg w trójkąt. W pierwszym przypadku środek okręgu jest punktem równooddalonym (o promień okręgu) od wierzchołków trójkąta, czyli końców każdego boku, więc leży na symetralnej każdego boku.

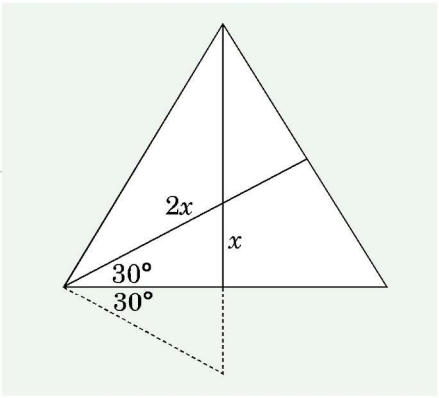


W drugim przypadku środek okręgu jest równooddalony od boków trójkąta, więc leży na dwusiecznych kątów trójkąta:

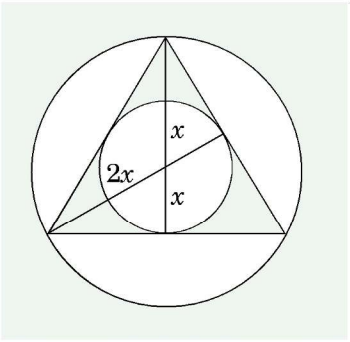


Jeżeli trójkąt jest równoboczny, to symetralne boków pokrywają się z dwusiecznymi kątów i zawierają wysokości trójkąta. Wtedy środkiem okręgu wpisanego i jednocześnie środkiem okręgu opisanego jest punkt przecięcia wysokości.

Przypomnijmy, że wysokości trójkąta równobocznego dzielą się wzajemnie w stosunku 1 : 2, co możemy odczytać z rysunku:

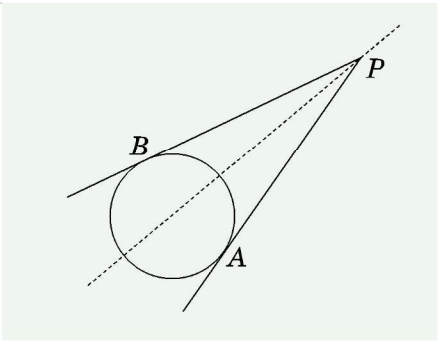


Zatem dla trójkąta równobocznego o wysokości h promienie okręgu wpisanego i opisanego



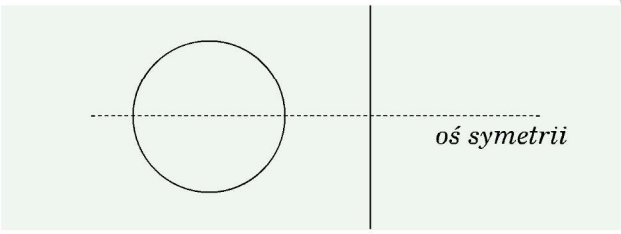
są równe odpowiednio $\frac{1}{3}h$ i $\frac{2}{3}$h.

Osią symetrii okręgu jest dowolna prosta przechodząca przez jego środek. Osią symetrii okręgu i pary przecinających się stycznych jest ta oś symetrii okręgu, która przechodzi przez punkt wspólny stycznych:

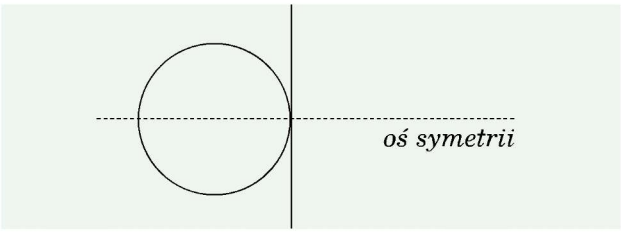


Wynika stąd, że $|AP| = |PB|$.

Osią symetrii okręgu i dowolnej prostej jest ta oś symetrii okręgu, która jest prostopadła do prostej:



Jeżeli prosta jest styczna do okręgu, to punkt styczności leży na osi symetrii:

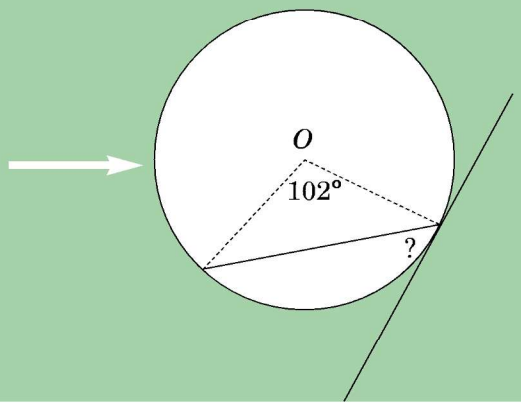


Zatem styczna do okręgu jest prostopadła do promienia wychodzącego z punktu styczności.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Z punktu A leżącego na zewnątrz okręgu o środku O poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie B. Kąt BAO ma $35°$. Ile stopni mają pozostałe kąty trójkąta OAB?

2. Punkt O jest środkiem okręgu.
Oblicz miarę kąta pokazanego na rysunku:



1. $90°$ i $55°$. 2. $51°$.

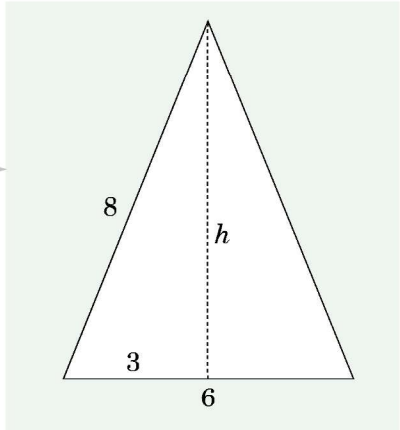
Co wynika z twierdzenia Pitagorasa?

Jak wiadomo od czasów starożytnych, kwadrat najdłuższego boku trójkąta prostokątnego jest równy sumie kwadratów dwóch pozostałych boków.

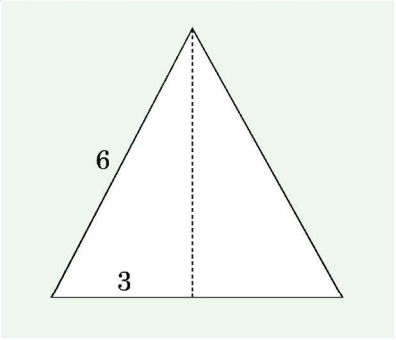
Własność ta pozwala obliczyć bok trójkąta prostokątnego, jeżeli dane są dwa pozostałe boki, i ma różne zastosowania.

Na przykład znając ramię i podstawę trójkąta równoramiennego, możemy obliczyć jego wysokość:

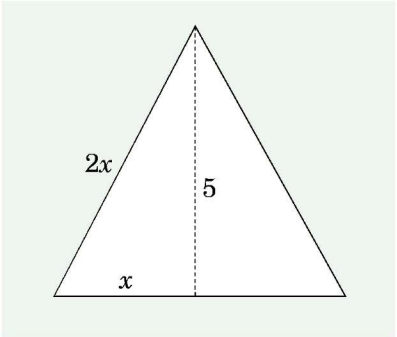
$8^2 - 3^2 = h^2$, skąd $h = \sqrt{55}$.



W szczególności obliczymy wysokość trójkąta równobocznego, znając jego bok. Na przykład dla trójkąta równobocznego o boku 6 wysokość jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego o drugiej przyprostokątnej 3 i przeciwprostokątnej 6:



Postępowanie to można uogólnić, znajdując wzór na wysokość trójkąta równobocznego o boku a. Nie warto jednak obciążać pamięci pamiętaniem tego wzoru, bo w każdym konkretnym przypadku wystarczy po prostu zastosować twierdzenie Pitagorasa.



Znając wysokość trójkąta równobocznego, możemy obliczyć jego bok:

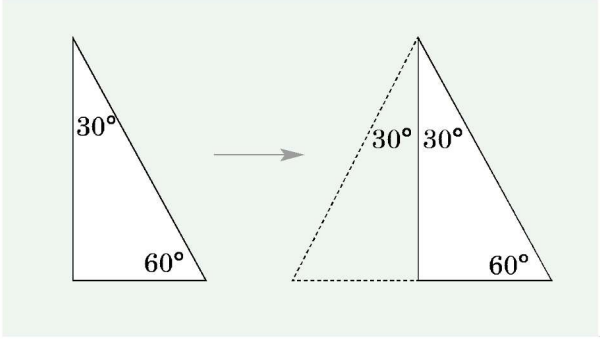
$$(2x)^2 - x^2 = 5^2, \quad 3x^2 = 5^2, \quad x^2 = \frac{5^2}{3}, \quad x = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

W zadaniach często pojawiają się trójkąty prostokątne o kątach ostrych takich jak w ekierkach, tzn. 45° lub 30° i 60°. W takich trójkątach już jeden bok determinuje dwa pozostałe.

Zobaczmy to, zaczynając od trójkąta z kątem 45°. Drugi kąt ostry w takim trójkącie jest też równy 45°, więc trójkąt ma równe przyprostokątne. Mając przyprostokątną, obliczymy przeciwprostokątną, i odwrotnie.

Na przykład jeżeli przyprostokątna jest równa 4, to przeciwprostokątna jest równa $\sqrt{4^2 + 4^2}$, czyli $\sqrt{2 \cdot 4^2}$, co jest równe $4\sqrt{2}$.

Jeżeli natomiast przeciwprostokątna jest równa 4, to przyprostokątne x spełniają warunek $x^2 + x^2 = 4^2$, skąd $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.



W przypadku trójkąta z kątami 30° i 60° pomoże nam odbicie symetryczne, w wyniku którego otrzymamy trójkąt równoboczny:

Widać, że przeciwprostokątna wyjściowego trójkąta jest dwa razy dłuższa od jego krótszej przyprospokątnej. Jeżeli więc jedna z tych wielkości jest znana, to druga też, a dłuższą przyprostokątną obliczymy z twierdzenia Pitagorasa. Jeżeli natomiast dana jest dłuższa przyprostokątna, to jest ona wysokością trójkąta równobocznego i zadanie sprowadza się do obliczenia boku tego trójkąta, co już robiliśmy.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Dwa z trzech boków trójkąta prostokątnego są równe 3 i 4. Oblicz trzeci bok. Czy zadanie jest jednoznaczne?

2. Przekątna kwadratu jest równa 2. Oblicz bok kwadratu.

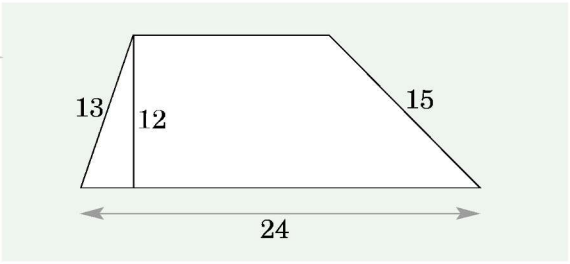
3. Punkt A leży na stycznej do okręgu o promieniu 5 i jest odległy od punktu styczności o 6. Oblicz odległość punktu A od środka okręgu.

1. Jeżeli dane boki są przyprostokątnymi trójkąta, to trzeci bok ma długość 5; w pozostałym przypadku trzeci bok ma długość $\sqrt{7}$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\sqrt{61}$.

Twierdzenie Pitagorasa pozwala też rozwiązywać zadania, których treść nie dotyczy bezpośrednio trójkąta prostokątnego. Jest to trudniejsze, bo wtedy trzeba samemu poszukać trójkąta prostokątnego, którego boki wiążą się z długościami wymienionymi w zadaniu. Zilustrujmy to przykładem.

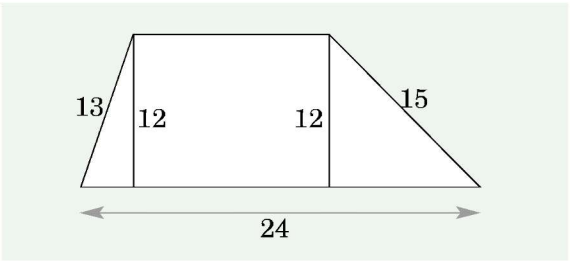
Wysokość trapezu jest równa 12, a jego dłuższa podstawa jest równa 24. Boki nierównoległe mają długości 13 oraz 15 i tworzą z dłuższą podstawą trapezu kąty ostre. Oblicz krótszą podstawę trapezu.

Przedstawmy sytuację na rysunku:



Jeden trójkąt prostokątny już się pojawił, drugi jest z drugiej strony:

Aby otrzymać krótszą podstawę trapezu, wystarczy obliczyć nieznane przyprostokątne obu trójkątów i odjąć je od dłuższej podstawy. Dokończ obliczenia.



Okazuje się, że własność: *kwadrat jednego z boków trójkąta jest równy sumie kwadratów dwóch pozostałych boków* przysługuje tylko trójkątom prostokątnym. Inaczej mówiąc, prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa:

> Jeżeli kwadrat jednego z boków jest równy sumie kwadratów dwóch pozostałych[10], to trójkąt jest prostokątny.

Na przykład trójkąt o bokach $5, 12, 13$ jest prostokątny, bo $13^2 = 12^2 + 5^2$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Czy trójkąt o bokach 6, 8, 10 jest prostokątny?
Z jakiego twierdzenia wynika odpowiedź?

2. Czy trójkąt o bokach 7, 9, 10 jest prostokątny?

Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa:
gdyby trójkąt był prostkątny, to...

1. Trójkąt jest prostokątny
na mocy twierdzenia
odwrotnego do twierdzenia
Pitagorasa.

2. Trójkąt nie jest prostokątny,
co wynika z twierdzenia
Pitagorasa.

[10] Z tej równości wynika, że jest to kwadrat najdłuższego boku.

Wielokąty podobne

Podobieństwo wielokątów jest uogólnieniem ich przystawania: każde dwa wielokąty przystające są podobne, ale nie na odwrót.

Przypomnijmy, że dwa wielokąty nazywamy podobnymi, jeżeli mają jednakowe kąty, a boki jednego wielokąta są proporcjonalne do boków drugiego. Ten drugi warunek oznacza, że stosunki boków jednego wielokąta do odpowiadających im[11] boków drugiego są jednakowe.

W odniesieniu do trójkątów podobnych odpowiadające sobie boki to boki leżące naprzeciw równych kątów.

> Niekiedy stosunek boków zapisujemy za pomocą dwukropka i mówimy o skali podobieństwa. W zadaniach na ogół najwygodniej zapisywać stosunek boków w postaci ułamka.

Na przykład prostokąty o bokach 2 i 4 oraz 3 i 6 są podobne, bo mają kąty równe oraz $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, a prostokąty o bokach 3 i 4 oraz 5 i 8 nie są podobne, bo $\frac{3}{5} \neq \frac{4}{8}$.

Równoległobok z kątem 40° nie jest podobny do żadnego prostokąta, bo różni się od niego kątami.

Jak widać z podanych przykładów, warunki: *kąty czworokątów równe* i *boki czworokątów proporcjonalne* są od siebie niezależne, jeden może być spełniony, a drugi nie. Tak jest też w pięciokątach, sześciokątach itd. Natomiast inaczej jest w trójkątach. Już od starożytności wiadomo (wniosek z twierdzenia Talesa), że jeżeli kąty w jednym

[11] Mówimy też: odpowiednich

trójkącie są takie same jak kąty w drugim, to boki jednego trójkąta są proporcjonalne do boków drugiego. Odwrotne wynikanie też zachodzi: jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do boków drugiego, to trójkąty mają równe kąty.

Zatem do stwierdzenia podobieństwa trójkątów wystarczy wiedzieć, że spełniony jest jeden z dwóch warunków: trójkąty mają równe kąty lub mają boki proporcjonalne. Jest jeszcze trzeci warunek wystarczający do podobieństwa trójkątów: para boków jednego trójkąta jest proporcjonalna do pary boków drugiego, a kąty między tymi bokami w jednym i drugim trójkącie są takie same.

Te trzy warunki noszą nazwę cech podobieństwa trójkątów.

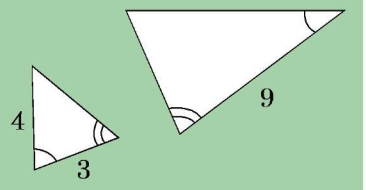
Sprawdź, czy potrafisz

1. Boki jednego z dwóch trójkątów są równe $7, 8, 10$, a boki drugiego są równe $14, 16, 19$. Ktoś stwierdził, że kąty w obu trójkątach są takie same. Co o tym sądzisz?

2. Czy trójkąt prostokątny z kątem $35°$ jest podobny do trójkąta prostokątnego z kątem $55°$?

3. Dwa boki jednego trójkąta są równoległe do dwóch boków drugiego trójkąta, a trzecie boki tych trójkątów nie są równoległe. Czy te trójkąty są podobne?

4. Na rysunku zaznaczono równe kąty trójkątów i podano długości niektórych boków. Który bok większego trójkąta można obliczyć? Znajdź jego długość.



1. Trójkąty nie mają takich samych kątów, bo nie mają boków proporcjonalnych. **2.** Trójkąty są podobne, bo mają takie same kąty. **3.** Trójkąty nie są podobne, bo nie mają takich samych kątów. **4.** Bok leżący naprzeciw kąta zaznaczonego podwójnym łukiem ma długość 12.

W definicji podobieństwa porównujemy stosunki boków jednego wielokąta do odpowiadających im boków drugiego. Tak więc jeżeli dwa dowolne boki jednego z dwóch wielokątów podobnych mają długości $a, b,$ a odpowiadające im boki drugiego wielokąta mają długości $a', b',$ to $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

Podzielmy obie strony tej równości przez b i pomnóżmy przez a'. Po skróceniu otrzymamy $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

W tej ostatniej proporcji porównujemy stosunki boków w każdym wielokącie z osobna. Zatem jeżeli wielokąty są podobne, to stosunek dwóch dowolnych boków jednego wielokąta jest taki sam jak stosunek odpowiadających im boków drugiego.

Z tej własności będziemy korzystać w odniesieniu do trójkątów prostokątnych. Zauważmy, że jeżeli trójkąty prostokątne mają taki sam kąt ostry, to mają takie same wszystkie kąty i w kosekwencji są podobne. Zatem jeżeli dwa trójkąty prostokątne mają taki sam kąt ostry, to stosunek przyprostokątnych w jednym trójkącie jest taki sam, jak stosunek odpowiednich przyprostokątnych w drugim trójkącie. To samo dotyczy stosunku przyprostokątnej i przeciwprostokątnej.

Rozwiązując zadanie:

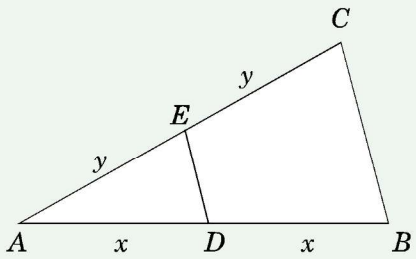
> Dwa trójkąty prostokątne mają taki sam kąt ostry. Przyprostokątne jednego z nich są równe 2 i 4, a krótsza przyprostokątna drugiego trójkąta jest równa 3. Oblicz długość pozostałej przyprostokątnej.

można zarówno skorzystać z proporcji $\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$, jak i proporcji $\frac{2}{4} = \frac{3}{x}$, w których x oznacza szukaną długość.

Proporcje lepiej pisać tak, aby niewiadoma była w liczniku, a nie w mianowniku ułamka. Wtedy rachunki są nieco krótsze. Na przykład w równości $\frac{3}{2} = \frac{x}{4}$ wystarczy obie strony pomnożyć przez 4, podczas gdy rozwiązanie proporcji $\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$ wymaga więcej działań.

Co wynika z podobieństwa trójkątów?

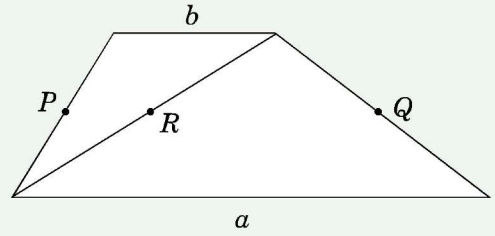
Połączymy odcinkiem środki dwóch boków dowolnego trójkąta:



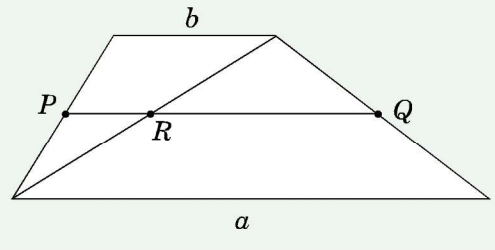
Powstałe trójkąty mają ten sam kąt (przy wierzchołku A), a boki przy tym kącie są w mniejszym trójkącie dwa razy mniejsze niż w większym. Zatem na mocy jednej z cech podobieństwa trójkąty te są podobne. W konsekwencji dwa pozostałe kąty są takie same w obu trójkątach, co oznacza, że $ED \parallel CB$. Ponadto bok ED jest dwa razy mniejszy od boku CB.

Własność tę warto zapamiętać: odcinek łączący środki boków dowolnego trójkąta jest równoległy do boku trzeciego i dwa razy krótszy od tego boku.

Z tej własności wyprowadzimy ważną własność dotyczącą odcinka łączącego środki nierównoległych boków trapezu. Niech P i Q będą środkami boków trapezu, którego postawy mają długości a i b. Dorysujmy przekątną i niech punkt R będzie jej środkiem:

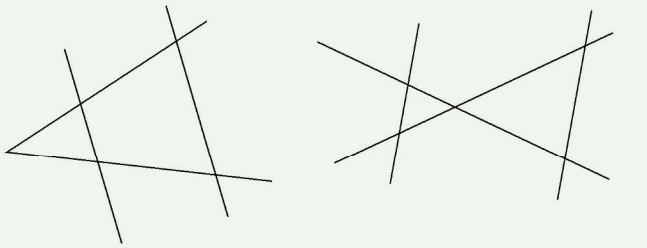


Ponieważ odcinek PR łączy środki dwóch boków jednego z dwóch widocznych na rysunku trójkątów, więc jest równoległy do trzeciego boku trójkąta i w konsekwencji jest równoległy do podstaw trapezu. Analogicznie odcinek RQ jest równoległy do podstaw trapezu. Stąd wynika, że cały odcinek PQ jest równoległy do podstaw trapezu:

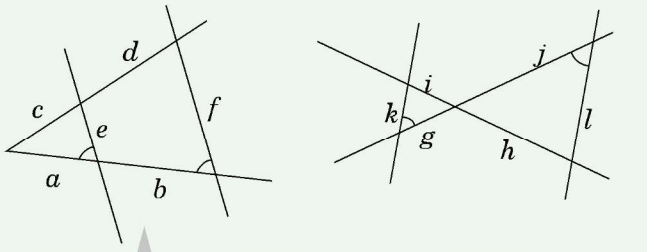


Dodatkowo, ponieważ $|PR| = \frac{b}{2}$ i $|RQ| = \frac{a}{2}$, więc $|PQ| = \frac{a+b}{2}$.

Często w geometrii rozważa się trójkąty odcięte na przecinających się prostych przez parę prostych równoległych:



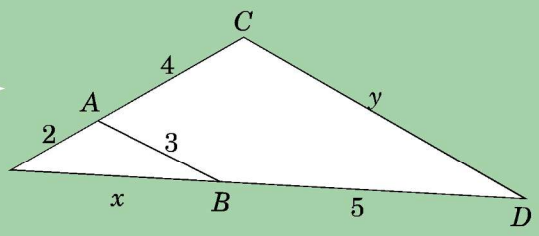
Sprawdź, że w obu przypadkach mamy parę trójkątów o takich samych kątach. Zatem w każdej parze trójkątów odpowiednie boki są proporcjonalne:



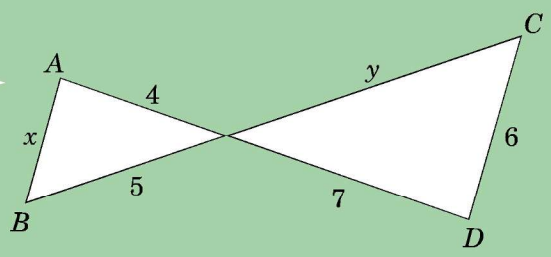
$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}, \quad \frac{g}{j} = \frac{i}{h} = \frac{k}{l}.$$

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz x i y, jeżeli $AB \| CD$:



2. Oblicz x i y, jeżeli $AB \| CD$:



1. $x = \frac{5}{2}, y = 9$.
2. $x = \frac{24}{7}, y = \frac{35}{4}$.

W pierwszym przypadku prawdziwa jest także równość $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ale nie można jej rozszerzyć na $\frac{e}{f}$.

Chcąc uniknąć pomyłek, najlepiej zawsze pisać proporcje dotyczące całych boków trójkątów. Taka jest moja rada.

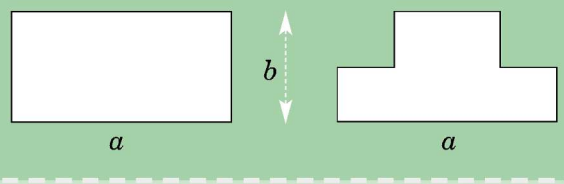
Obwód i pole

Z obwodem wielokąta sprawa jest prosta. Obliczając go, trzeba dodać długości wszystkich boków. W przypadku trójkąta równobocznego, rombu lub ogólnie wielokąta o równych bokach jest to dodawanie jednakowych liczb, czyli mnożenie.Wprzypadku prostokąta o bokach a, b jest to $2a + 2b$, czyli $2(a + b)$.

Sprawdź, czy potrafisz

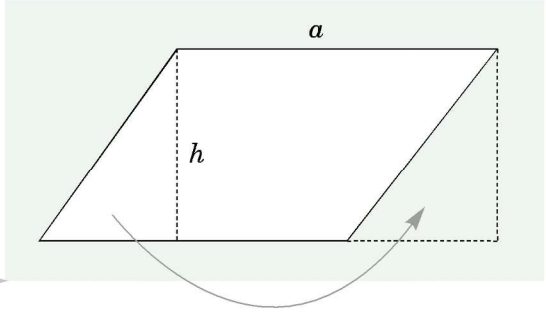
1. Środki boków trójkąta równobocznego o boku 5 połączono odcinkami. Oblicz obwód powstałego trójkąta.

2. Który z wielokątów ma większy obwód:

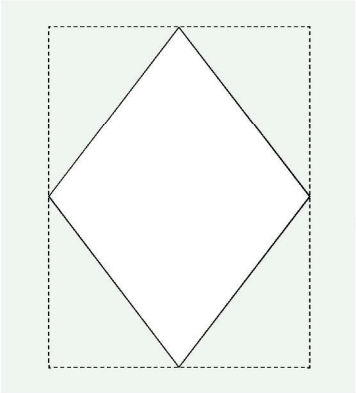


1. $7\frac{1}{2}$. 2. Obwody są jednakowe.

Podstawą do obliczania pól wielokątów jest pole prostokąta. Umiejąc obliczyć pole prostokąta, umiemy obliczyć pole równoległoboku:

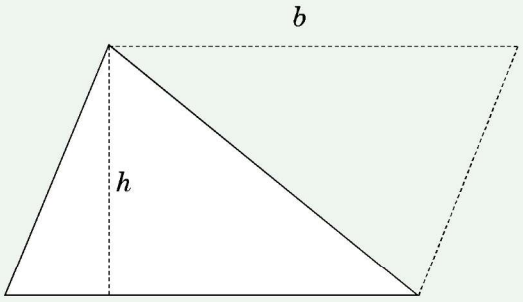


Jak widać, pole równoległoboku o boku a i wysokości h opuszczonej na ten bok jest równe polu prostokąta o bokach a i h, czyli jest równe ah.



Jeżeli równoległobok jest rombem, to jego pole jest połową pola prostokąta, którego boki mają taką długość jak przekątne rombu:

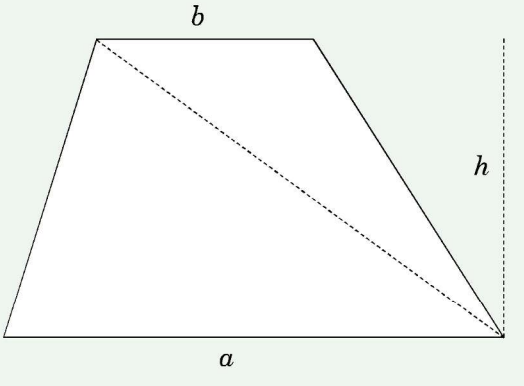
Trójkąt o danym boku i wysokości jest połową równoległoboku o tym samym boku i wysokości:



Pole trójkąta jest więc połową pola równoległoboku, czyli jest równe $\frac{1}{2}ah$.

Umiejąc obliczyć pole trójkąta, umiemy obliczyć pole dowolnego wielokąta, bo każdy wielokąt można podzielić na trojkąty, których pola dadzą w sumie pole wielokąta.

W szczególności trapez można podzielić na dwa trójkąty o jednakowej wysokości:



Jak widać, pole trapezu jest równe sumie pól obu trójkątów, czyli $\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh$, co można przekształcić do postaci $\frac{(a+b)h}{2}$.

Z obwodem i polem koła jest inaczej niż z wielokątami – bez wzorów ani rusz.

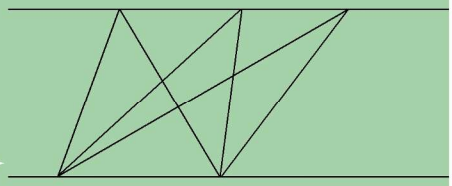
4. Własności figur płaskich

Już w starożytności wiedziano, że stosunek obwodu koła do średnicy jest taki sam we wszystkich kołach. Stosunek ten jest liczbą niewymierną, którą oznaczamy literą π. Zatem obwód koła jest równy πd, gdzie d jest średnicą koła.

We wzorze na pole koła również występuje liczba π, mianowicie pole koła o promieniu r jest równe πr^2.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Porównaj pola trójkątów, które mają wspólny bok, a przeciwległe wierzchołki leżą na prostej równoległej do tego boku:



2. Każdy z boków prostokąta zwiększono 3 razy. Ile razy wzrosło pole prostokąta?

3. Plan pokoju, sporządzony w skali $1{:}20$, jest prostokątem o wymiarach 20 cm i 15 cm. Oblicz powierzchnię pokoju.

4. Oblicz pole kwadratu o przekątnej 5, nie obliczając boku kwadratu.
Wskazówka: kwadrat to także romb.

5. Jak zmieni się obwód i pole koła, jeżeli jego promień zwiększymy 2 razy?

6. Koło rowerowe ma średnicę 60 cm. Ile mniej więcej razy obróci się ono, gdy rower przejedzie 100 m?

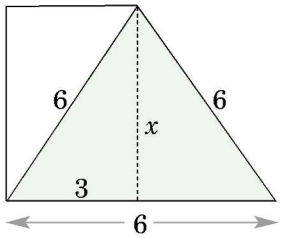
7. Oblicz pole koła, którego obwód jest równy 20π.

1. Pola są jednakowe, bo trójkąty mają wspólną podstawę i równe wysokości.
2. 9 razy. **3.** 12 m^2. **4.** $12\frac{1}{2}$. **5.** Obwód wzrośnie 2 razy, a pole 4 razy. **6.** Ok. 53 razy. **7.** 100π.

Przegląd zadań maturalnych

Krótsza przekątna trapezu prostokątnego dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

Sposób rozwiązywania zadania odczytamy z rysunku:

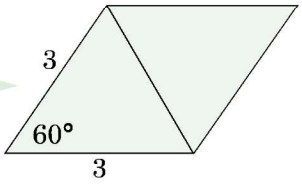


$x^2 = 6^2 - 3^2 = 27, \quad x = \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}$

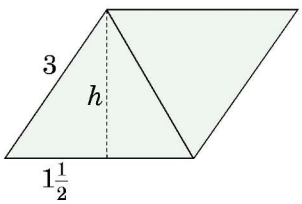
Obwód trapezu jest równy $6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3}$, czyli $15 + 3\sqrt{3}$.

Oblicz wysokość rombu o boku 3 i kącie ostrym $60°$.

Narysujmy romb i przekątną:

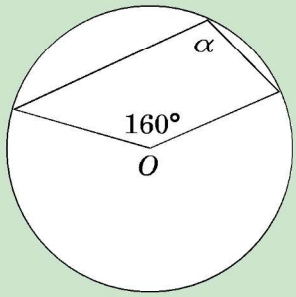


Widoczny na rysunku trójkąt z kątem $60°$ jest równoramienny, więc pozostałe kąty trójkąta też mają po $60°$ i trójkąt jest równoboczny. Obliczymy jego wysokość, która jednocześnie jest wysokością rombu:



$h = \sqrt{3^2 - (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

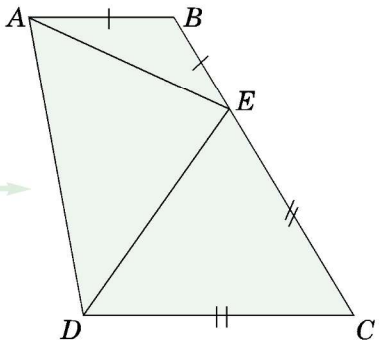
Oblicz kąt α, wiedząc, że punkt O jest środkiem okręgu:



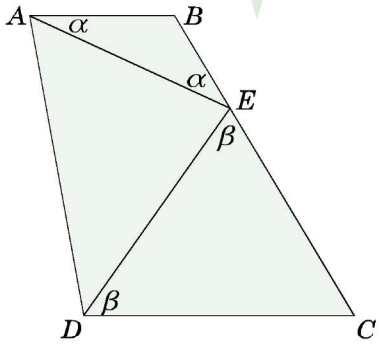
Kąt wpisany jest oparty na tym samym łuku co dopełnienie kąta środkowego $160°$ do $360°$. Zatem: $360 - 160 = 200$, $\alpha = 100°$.

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \| CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

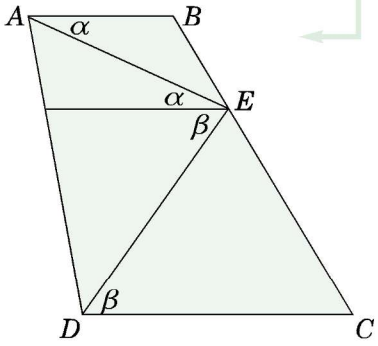
Rysunek jest tu potrzebny, ale technicznie dosyć trudny do sporządzenia. Sytuacja wygląda mniej więcej tak:



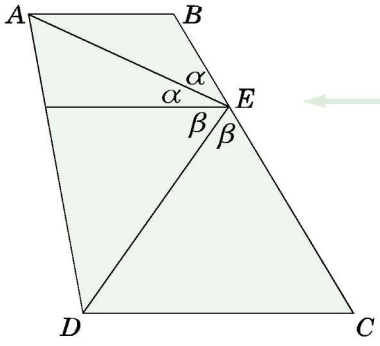
Na rysunku widać dwa trójkąty równoramienne. Każdy z nich ma więc dwa kąty równe:



Z punktu E poprowadźmy odcinek równoległy do dwóch równoległych boków czworokąta i poszukajmy, gdzie jeszcze są kąty α i β, patrząc na proste równoległe przecięte trzecią prostą:



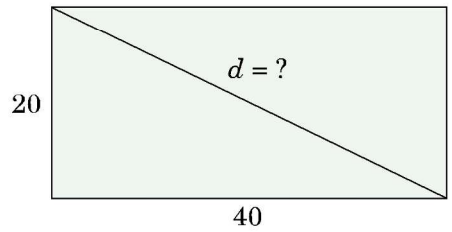
Korzystając z ostatnich dwóch rysunków, popatrzmy na kąt półpełny o wierzchołku E:



Widzimy, że $180° = 2\alpha + 2\beta$, skąd $\alpha + \beta = 90°$, co trzeba było udowodnić.

Ogród ma kształt prostokąta o bokach 20 m i 40 m. Na dwóch końcach przekątnej tego protokąta wbito słupki. Wykaż, że odległość między tymi słupkami jest mniejsza niż 45 m.

Trzeba obliczyć długość przekątnej prostokąta o bokach 20 m i 40 m:

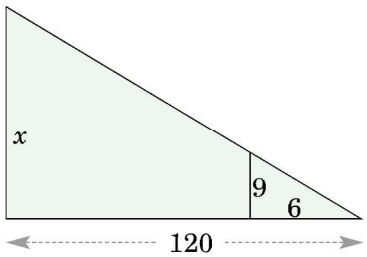


$d = \sqrt{20^2 + 40^2} = \sqrt{400 + 1600} = \sqrt{2000}$.

Ponieważ $(45)^2 = 2025 > 2000$, więc $\sqrt{2000} < 45$.

Pionowy słupek o wysokości 90 cm rzuca cień o długości 60 cm. W tej samej chwili stojąca obok wieża rzuca cień o długości 12 m. Jaka jest wysokość wieży?

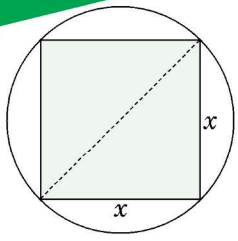
W zadaniu występują różne jednostki długości i trzeba je ujednolicić. Najzręczniej chyba wyrazić wszystkie długości w decymetrach. Zatem:



Widoczne na rysunku trójkąty mają równe kąty, więc są podobne. Z podobieństwa trójkątów wynika proporcja $\frac{x}{9} = \frac{120}{6}$, skąd $x = 180$ (dcm). Wysokość wieży jest zatem równa 18 m.

Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Oblicz długość boku tego kwadratu.

Narysujmy:



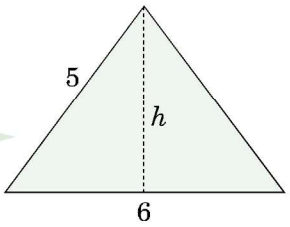
Przekątna kwadratu jest średnicą okręgu, więc ma długość 8. Stąd $2x^2 = 64$, więc $x = \sqrt{32}$, co można zapisać w postaci $x = 4\sqrt{2}$.

Ile przekątnych ma siedmiokąt?

Każdy wierzchołek jest połączony przekątną z każdym wierzchołkiem oprócz trzech: siebie samego i dwóch sąsiednich. Skoro jest 7 wierzchołków, to z każdego wychodzą 4 przekątne. Mnożąc $7 \cdot 4$, liczymy każdą przekątną dwukrotnie: przekątną PQ liczymy raz jako przekątną wychodzącą z P, a drugi raz jako przekątną wychodzącą z Q. Zatem liczba przekątnych jest dwa razy mniejsza niż $7 \cdot 4$, więc jest równa $\frac{7 \cdot 4}{2}$, czyli 14.
Podany sposób liczenia przekątnych można uogólnić na dowolny n-kąt, otrzymując $\frac{n(n-3)}{2}$.

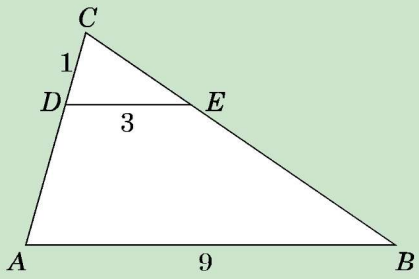
Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Oblicz wysokość opuszczoną na podstawę.

Narysujmy dany trójkąt i jego wysokość h:



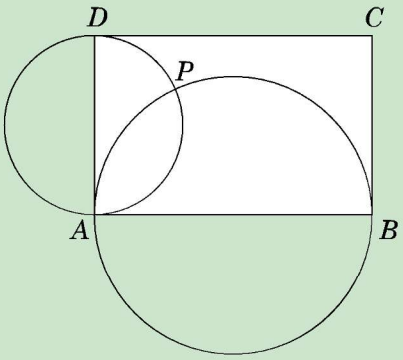
Ponieważ wysokość w trójkącie równoramiennym dzieli podstawę na połowy, więc $h^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, skąd $h = 4$.

Odcinki AB i DE są równoległe. Długości odcinków CD, DE i AB są odpowiedno równe 1, 3 i 9. Oblicz długość odcinka AD.

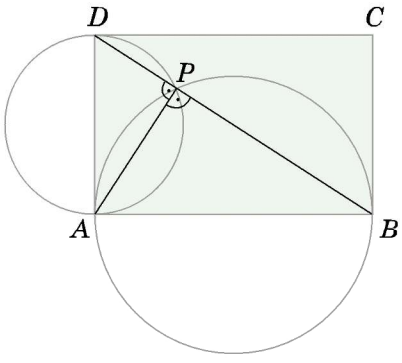


Widoczne na rysunku trójkąty mają równe kąty, więc są podobne. Oznaczajac przez x szukaną długość, otrzymamy proporcję $\frac{x+1}{1} = \frac{9}{3}$, skąd $x = 2$.

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P. Wykaż, że punkty B, P i D leżą na jednej prostej.

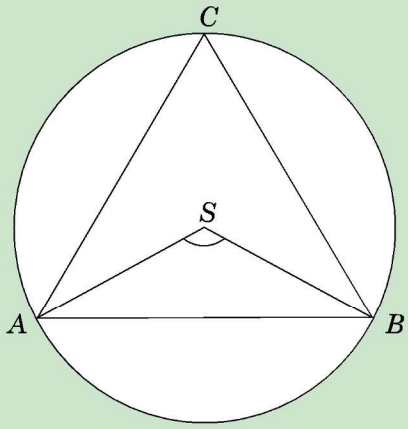


Kąty wpisane DPA i APB są oparte na średnicach okręgów, więc są proste:



Suma tych dwóch kątów, czyli kąt DPB wynosi $180°$, co oznacza, że punkty D, P, B leżą na jednej prostej.

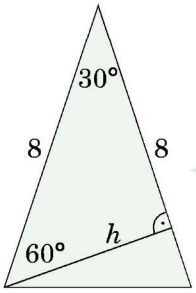
Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku S są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Oblicz miarę kąta ASB.



Szukany kąt ASB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany ACB. Ten ostatni kąt, jak każdy kąt trójkąta równobocznego, jest równy $60°$.

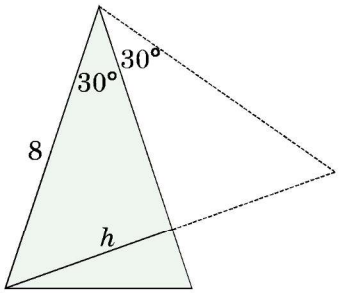
Zatem kąt ASB, jako kąt dwa razy większy, ma $120°$.

Dwa równe boki trójkąta równoramiennego mają długości 8, a kąt między nimi jest równy $30°$. Oblicz pole tego trójkąta.



Poprowadźmy wysokość opuszczoną na jeden z boków o długości 8. Powstaje trójkąt prostokątny o kątach $30°$ i $60°$:

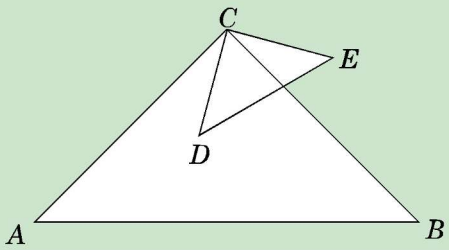
Uzupełniamy ten trójkąt do trójkąta równobocznego



i odczytujemy, że $2h = 8$, skąd $h = 4$.

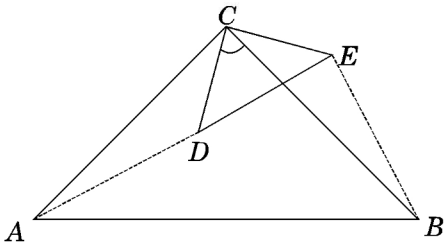
Zatem pole trójkąta jest równe $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4$, czyli 16.

Trójkąty równoramienne ABC i CDE są położone jak na rysunku, przy czym w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty. Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



Poprowadźmy odcinki AD i BE.

Porównajmy trójkąty ADC i CBE:



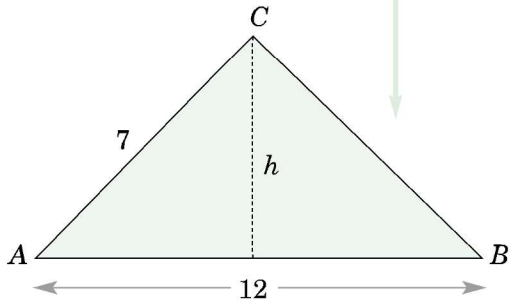
Mają one po jednej parze boków równych, bo boki CA i CD mają takie same długości, jak boki CB i CE.

Popatrzmy na kąt między bokami CA i CD oraz na kąt między bokami CB i CE.

Są one równe, ponieważ każdy z nich tworzy wraz z kątem zaznaczonym łukiem kąt prosty. Stąd wynika, że rozważane trójkąty są przystające, więc i trzecie ich boki są równe: $|AD| = |BE|$.

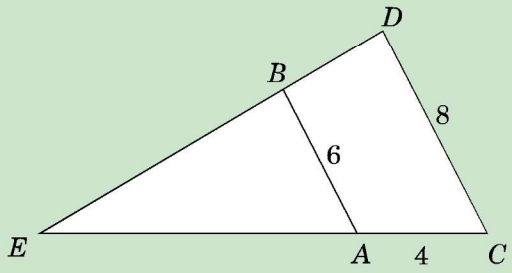
W trójkącie ABC dane są: $|AC| = |BC| = 7$ oraz $|AB| = 12$. Oblicz wysokość opuszczoną z wierzchołka C.

Rozwiązanie odczytujemy z rysunku, wiedząc, że wysokość dzieli bok AB na połowy:



$h^2 = 7^2 - 6^2 = 13, \quad h = \sqrt{13}.$

Oblicz długość odcinka AE, jeżeli $AB \| CD$, $|AB| = 6$, $|AC| = 4$, $|CD| = 8$.



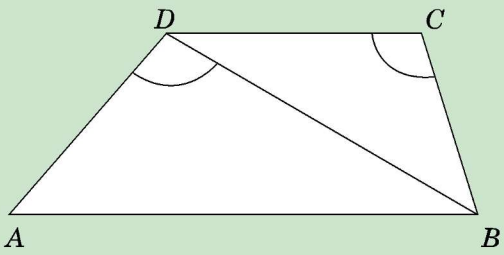
Widoczne na rysunku trójkąty mają równe kąty, więc są podobne. Oznaczając długość odcinka EA literą x, mamy proporcję $\frac{x}{x+4} = \frac{6}{8}$, skąd $x = 12$.

Korzystając z wzoru na liczbę przekątnych n-kąta wypukłego:
a) oblicz liczbę przekątnych w dwudziestokącie, **b)** oblicz, ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest 5 razy większa od liczby boków.

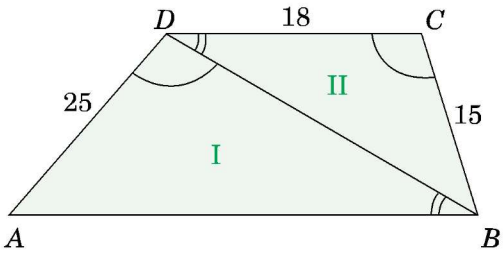
a) Liczba przekątnych w n–kącie to $\frac{n(n-3)}{2}$. Podstawiając $n = 20$, otrzymamy $\frac{20 \cdot 17}{2}$, czyli 170.

b) Oznaczając przez n szukaną liczbę boków (i jednocześnie kątów) wielokąta, zapisujemy symbolicznie podany warunek: $\frac{n(n-3)}{2} = 5n$. Przekształcając, otrzymamy równanie $n^2 - 13n = 0$, czyli $n(n-13) = 0$. Zatem $n = 13$.

W trapezie $ABCD$ długość podstawy CD jest równa 18, a długości ramion AD i BC są odpowiednio równe 25 i 15. Kąty ADB i DCB, zaznaczone na rysunku, mają równe miary. Oblicz obwód tego trapezu.



Ponieważ boki AB i CD są równoległe, więc trójkąty, na jakie przekątna podzieliła trapez, mają jeszcze po jednym kącie równym:



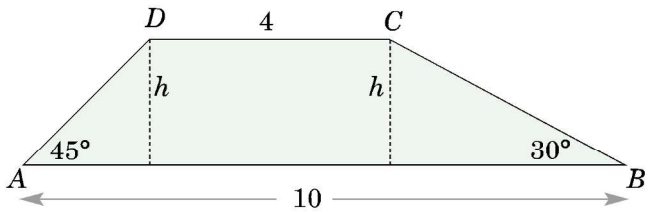
Zatem kąty trójkąta I są równe kątom trójkąta II. Stąd wynika, że trójkąty te są podobne, z czego skorzystamy, i to dwukrotnie.

Do obliczenia obwodu trapezu brakuje długości boku AB. Obliczymy go, jeżeli przedtem obliczymy długość boku BD. Jest on wspólnym bokiem obu trójkątów. Najpierw popatrzmy na niego jako na bok trójkąta I, więc bok leżący naprzeciw nieoznaczonego kąta. Wtedy w trójkącie II odpowiada mu bok o długości 18 i mamy proporcję $\frac{|BD|}{18} = \frac{25}{15}$, z której $|BD| = 30$.

Następnie skorzystamy z proporcji $\frac{|AB|}{25} = \frac{30}{15}$, skąd $|AB| = 50$.

Obwód trapezu jest więc równy $25 + 18 + 15 + 50$, czyli 108.

Podstawy trapezu mają długości 4 cm i 10 cm, a ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty $30°$ i $45°$. Oblicz wysokość tego trapezu.

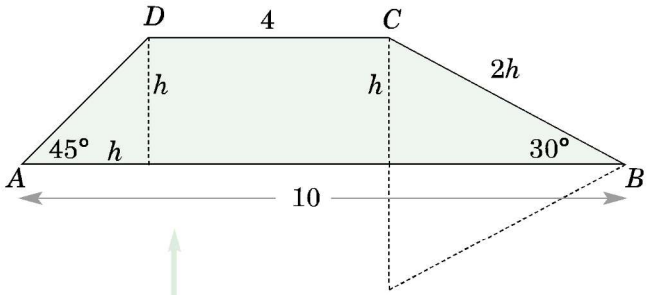


Posłużmy się rysunkiem:

Ciąg dalszy zadania na następnej stronie

Ciąg dalszy zadania z poprzedniej strony

Biorąc pod uwagę, że trójkąt prostokątny z kątem $45°$ jest równoramienny oraz uzupełniając standardowo trójkąt z kątem $30°$ do trójkąta równobocznego, możemy dopisać dwie długości:



Oznaczając przez x wysokość utworzonego trójkąta równobocznego, otrzymamy związki: $x^2 + h^2 = (2h)^2$ oraz $h + 4 + x = 10$.

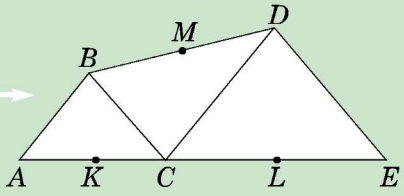
Z drugiego równania mamy $x = 6 - h$, co podstawiamy do pierwszego równania:

$(6 - h)^2 + h^2 = 4h^2$, $\quad 36 - 12h + h^2 + h^2 = 4h^2$,

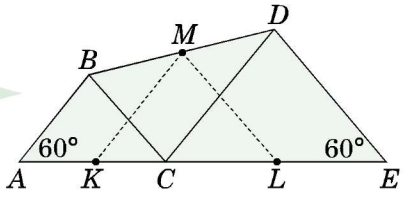
$2h^2 + 12h - 36 = 0$, $\quad h^2 + 6h - 18 = 0$.

Pozostaje rozwiązać otrzymane równanie kwadratowe. Ma ono dwa pierwiastki, ale weźmiemy pod uwagę tylko pierwiastek dodatni. Okaże się, że $h = 3(\sqrt{3} - 1)$.

Trójkąty ABC i CDE są równoboczne. Punkty A, C, E leżą na jednej prostej. Punkty K, L, M są środkami odcinków AC, CE, BD: Wykaż, że punkty K, L, M są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



Uzupełnijmy rysunek:



Odcinek MK łączy środki boków nierównoległych trapezu $ACDB$, więc jest równoległy do AB.

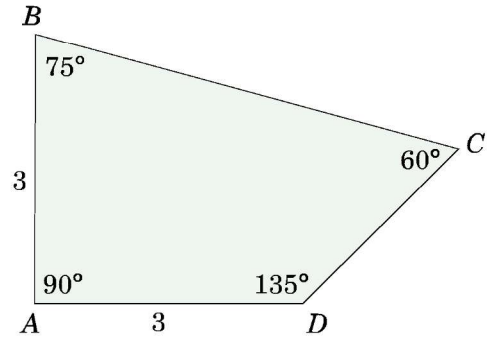
Stąd wynika, że kąt przy wierzchołku K w trójkącie KLM jest równy $60°$.

Analogicznie kąt przy wierzchołku L w tym trójkącie jest także równy $60°$.

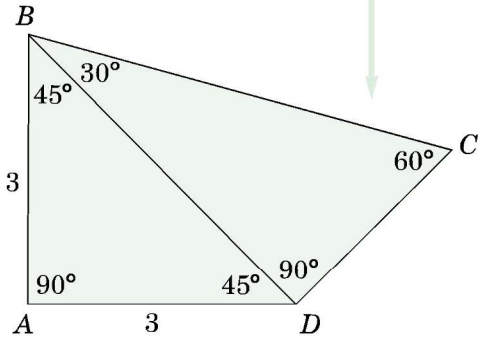
Zatem trzeci kąt trójkąta KLM też ma $60°$ i trójkąt jest równoboczny.

Oblicz pole czworokąta wypukłego, w którym kąty przy wierzchołkach A, B, C, D mają odpowiednio miary $90°, 75°, 60°, 135°$, a boki AB i AD mają długość 3 cm.

Zadanie wymaga sporządzenia rysunku:



Podzielmy czworokąt przekątną BD na dwa trójkąty. W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABD kąty ostre mają po $45°$, co pozwala obliczyć kąty drugiego trójkąta:

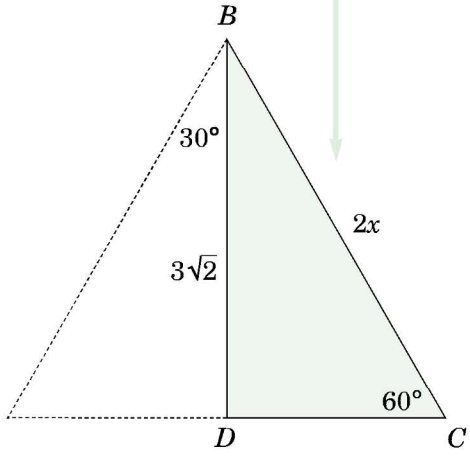


Pole czworokąta jest sumą pól obu trójkątów. Pole trójkąta ABD jest równe $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3$, czyli $\frac{9}{2}$. W drugim trójkącie przyprostokątna BD ma długość $\sqrt{3^2 + 3^2}$, czyli $3\sqrt{2}$. Pozostaje obliczyć przyprostokątną DC.

W tym celu uzupełnijmy trójkąt do trójkąta równobocznego:

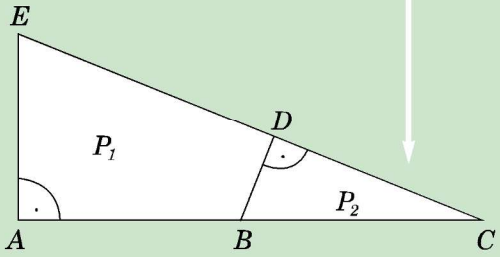
$(3\sqrt{2})^2 + x^2 = (2x)^2, \quad 3x^2 = 18, \quad x = \sqrt{6}.$

Zatem pole trójkąta BCD jest równe $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$, co po uproszczeniu przyjmuje postać $3\sqrt{3}$.

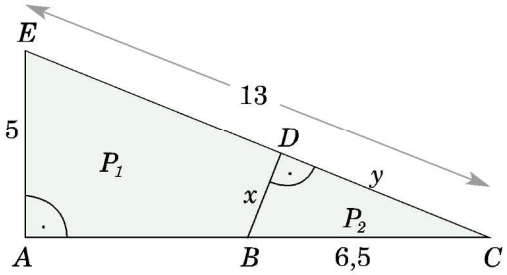


W konsekwencji pole czworokąta jest równe $\frac{9}{2} + 3\sqrt{3}$.

Państwo Nowakowie przeznaczyli $26\,000$ zł na zakup działki. Do jednej z ofert dołączono rysunek dwóch przylegających do siebie działek w skali $1{:}1000$.
Na rysunku $|AE| = 5$ cm, $|EC| = 13$ cm, $|BC| = 6{,}5$ cm. Jeden metr kwadratowy gruntu w tej ofercie kosztuje 35 zł. Oblicz, czy przeznaczona przez państwa Nowaków kwota wystarczy na zakup działki P_2.



Powtórzmy rysunek, nanosząc dane długości:

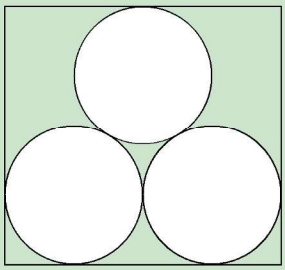


Do obliczenia pola trójkąta P_2 potrzebne są długości jego przyprostokątnych. Trzeba więc znaleźć warunki, które pozwolą obliczyć x i y. Z czego skorzystać? Na pewno z twierdzenia Pitagorasa, bo trójkąt jest prostokątny i znamy przeciwprostokątną. A drugi warunek? Trójkąty widoczne na rysunku są prostokątne i mają ten sam kąt ostry (przy wierzchołku C), są więc podobne. W dużym trójkącie dana jest przyprostokątna AE leżąca naprzeciw kąta przy wierzchołku C i przeciwprostokątna EC. Odpowiednie do nich boki mniejszego trójkąta to przyprostokątna BD, też leżąca naprzeciw kąta przy wierzchołku C, i przeciwprostokątna BC. Mamy więc proporcję $\frac{x}{5} = \frac{6{,}5}{13}$, skąd $x = \frac{5}{2}$.
Teraz skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla mniejszego trójkąta:
$y^2 + (\frac{5}{2})^2 = (6{,}5)^2$, $y^2 = (\frac{13}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2$, $y^2 = \frac{169}{4} - \frac{25}{4}$, $y = 6$.
Zatem pole mniejszego trójkąta jest równe $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 6$, czyli $7{,}5$ cm^2.

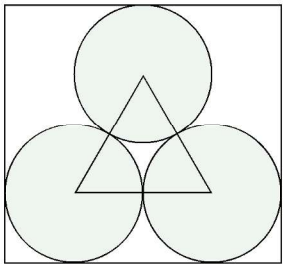
Przechodząc do pola działki P_2, trzeba otrzymaną liczbę pomnożyć przez kwadrat skali: $7{,}5 \cdot (1000)^2 = 7\,500\,000$.
Jest to liczba centymetrów kwadratowych. Chcąc otrzymać pole w metrach

kwadratowych, trzeba skorzystać z równości $1\ \text{m}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$ i w wyniku skreślić cztery zera. Stąd pole działki P_2 jest równe $750\ \text{m}^2$.
Sprawdzając, ile trzeba by zapłacić za tę działkę, mnożymy $750 \cdot 35$ i otrzymujemy $26\,250$ (zł). Formalnie państwu Nowakom zabrakłoby więc 250 zł. Myślę jednak, że mimo to kupili by działkę...

Szkic przedstawia kanał ciepłowniczy, którego przekrój poprzeczny jest prostokątem.Wewnatrz kanału znajduje się rurociąg składający się z trzech rur, każda o średnicy zewnętrznej 1 m. Oblicz wysokość i szerokość kanału ciepłowniczego. Wysokość zaokrąglij do 0.01 m.



Z rysunku odczytujemy, że szerokość kanału ciepłowniczego jest taka jak dwie średnice, więc jest równa 2 m.
Aby znaleźć wysokość kanału, połączmy odcinkami środki kół:



Jak widać, wysokość kanału to wysokość trójkąta powiększona o dwa promienie, czyli o średnicę koła. Trójkąt jest równoboczny, jego bokiem jest średnica koła.Wysokość trójkąta jest więc równa $\sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2}$, czyli $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (m). W konsekwencji wysokość kanału to $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ m, co w przybliżeniu jest równe $1{,}87$ m.

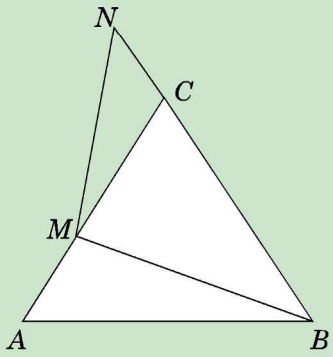
Pole prostokąta jest równe 40, a długości boków są w stosunku $2{:}5$. Oblicz boki prostokąta.

Wygodnie będzie oznaczyć długości boków przez $2x$ i $5x$. Wtedy $2x \cdot 5x = 40$, skąd $x^2 = 4$, więc $x = 2$.
Prostokąt ma zatem boki 4 i 10.

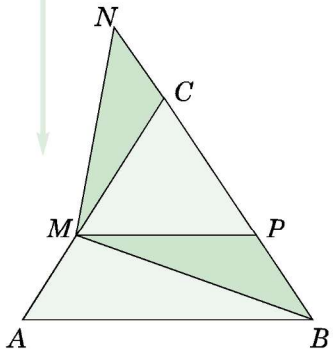
Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 5 i 12.

Ponieważ kąt wpisany w okrąg jest prosty dokładnie wtedy, kiedy jest oparty na średnicy tego okręgu, więc średnicą okręgu jest przeciwprostokątna. Stąd wynika, że promień okręgu jest połową przeciwprostokątnej. Przeciwprostokątna trójkąta jest równa $\sqrt{5^2 + 12^2}$, czyli 13. Zatem promień okręgu jest równy $6\frac{1}{2}$.

Trójkąt ABC przedstawiony na rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|MB| = |MN|$.



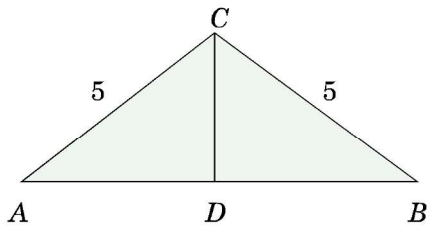
Dorysujmy odcinek MP równoległy do AB i popatrzmy na zaznaczone ciemnym kolorem trójkąty:



Ponieważ $|PB| = |AM|$, a z założenia $|AM| = |CN|$, więc bok PB jest równy bokowi NC. Boki MP i MC są także równe, bo trójkąt MPC jest równoboczny (ma takie same kąty jak trójkąt ABC).
Zatem dwa boki jednego ciemnoniebieskiego trójkąta są równe dwóm bokom drugiego ciemnoniebieskiego trójkąta. Kąty między tymi bokami to kąty przy wierzchołkach C i P. Każdy z nich jest dopełnieniem do $180°$ kąta $60°$, więc są one równe. To wystarcza do przystawania ciemnoniebieskich trójkątów. Zatem ich trzecie boki są też równe, czyli $|MB| = |MN|$.

W trójkącie ABC dane są $|AC| = |BC| = 5$ i wysokość $|CD| = 2$. Oblicz $|AB|$.

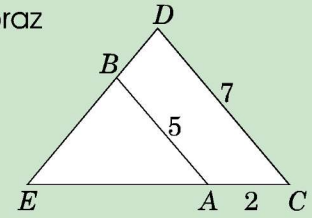
Połowę długości boku AB obliczymy z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do połówki trójkąta ABC:
$\frac{1}{2}|AB| = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$. Stąd $|AB| = 2\sqrt{21}$.



W trójkącie prostokątnym dwa dłuższe boki mają długości 5 i 7. Oblicz obwód tego trójkąta.

Bok o długości 7 – jako najdłuższy bok trójkąta – jest przeciwprostokątną.
Obliczmy długość nieznanej przyprostokątnej:
$\sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$.
Zatem obwód trójkąta jest równy $5 + 7 + 2\sqrt{6}$, czyli $12 + 2\sqrt{6}$.

Oblicz długość odcinka EA, jeżeli odcinki AB i CD są równoległe oraz
$|AB| = 5$,
$|AC| = 2$,
$|CD| = 7$.



Oznaczmy $|EA| = x$. Ponieważ trójkąty widoczne na rysunku są podobne, więc $\frac{x}{x+2} = \frac{5}{7}$.
Rozwiązujemy otrzymane równanie:
$7x = 5(x + 2)$, $2x = 10$, $x = 5$.

Oblicz miarę kąta wpisanego opartego na $\frac{1}{4}$ okręgu.

Skoro kąt środkowy oparty na $\frac{1}{4}$ okręgu jest równy $90°$, to kąt wpisany oparty na tym łuku jest równy $45°$.

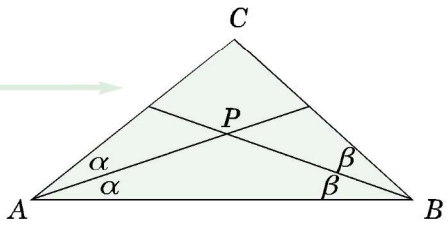
Oblicz pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5.

Przekątna kwadratu jest równa średnicy okręgu, czyli ma długość 10.
Można albo obliczyć bok kwadratu, a potem jego pole, a można skorzystać z tego, że pole kwadratu (tak jak dowolnego rombu) jest równe połowie iloczynu przekątnych. Otrzymamy $\frac{10 \cdot 10}{2}$, czyli 50.

Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $20°$.
Jaka jest miara najmniejszego z tych kątów?

Oznaczając literą x miarę najmniejszego kąta i korzystając z własności, że suma kątów dowolnego czworokąta jest równa $360°$, otrzymujemy równanie $x + x + 20° + x + 40° + x + 60° = 360°$. Zatem $4x = 240°$, skąd $x = 60°$.

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.



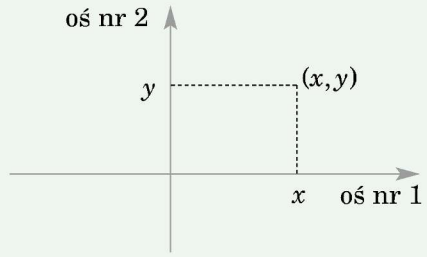
Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku:
Kąty 2α i 2β są kątami trójkąta ABC. Ponieważ suma wszystkich kątów trójkąta jest równa $180°$, więc $2\alpha + 2\beta < 180°$, skąd $\alpha + \beta < 90°$. Zatem suma dwóch kątów trójkąta APB jest mniejsza niż $90°$. Ponieważ po dodaniu do tych dwóch kątów kąta przy wierzchołku P otrzymujemy $180°$, więc kąt przy wierzchołku P jest większy od $90°$, co należało uzasadnić.

5. Elementy geometrii analitycznej na płaszczyźnie

Istota geometrii analitycznej na płaszczyźnie polega na identyfikowaniu punktów płaszczyzny z parami liczb, dzięki czemu zbiory punktów, a więc obiekty geometryczne, opisujemy za pomocą związków między liczbami. Analizując te związki, analizujemy jednocześnie własności geometryczne.

Współrzędne punktu

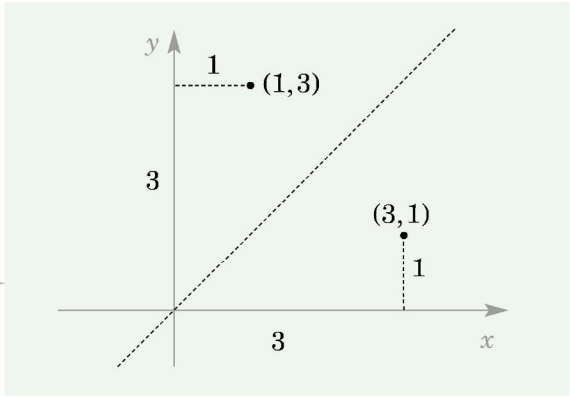
Wprowadzając układ współrzędnych, ustalamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami płaszczyzny a parami liczb wziętych w określonym porządku:



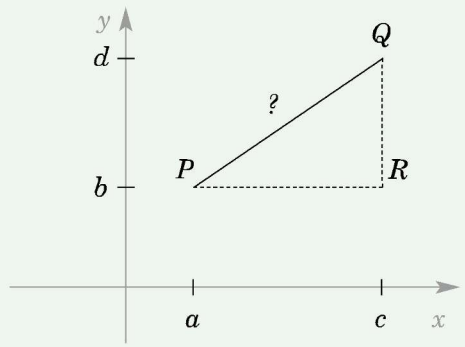
Oś nr 1 nazywamy tradycyjnie osią x, a oś nr 2 osią y.

Osie układu współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki, które numerujemy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, zaczynając od tej ćwiartki, w której punkty mają obie współrzędne dodatnie.

Zmiana porządku liczb w danej parze powoduje zmianę punktu na punkt symetryczny względem dwusiecznej pierwszej i trzeciej ćwiartki. Na przykład:



Przypomnijmy, jak obliczamy odległość między punktami o danych współrzędnych: $P = (a,b)$ i $Q = (c,d)$. Posłużmy się rysunkiem:



Jak widać, długość odcinka PR to $c - a$, a długość odcinka QR to $d - b$.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że odległość między punktami P i Q, czyli długość odcinka PQ, jest równa $\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

Można sprawdzić, że taki sam wzór jest prawdziwy dla punktów leżących w innych ćwiartkach płaszczyzny.

Zauważmy, że we wzorze można zamienić miejscami a i c, bo $(a-c)^2 = (c-a)^2$. Podobnie można zamienić miejscami b i d. W konsekwencji

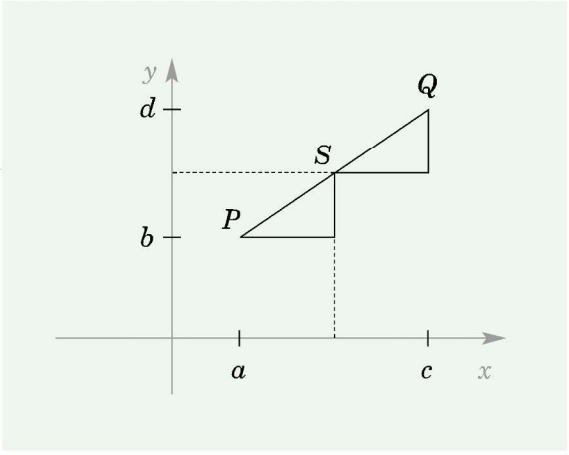
$$\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2} = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

Zatem obliczając różnice odpowiednich współrzędnych obu punktów, można to robić w dowolnej kolejności. Kto woli nie mieć liczb ujemnych, niech odejmuje od większej współrzędnej mniejszą.

Na przykład obliczmy odległość d między punktami $(2,3)$ i $(-1,4)$:

$$2-(-1)=3, \quad 4-3=1, \quad 3^2+1^2=10, \quad d=\sqrt{10}.$$

Na zakończenie przypomnijmy, jak znaleźć środek odcinka o danych końcach. Popatrzmy na rysunek:



Widoczne na rysunku trójkąty mają boki równoległe, więc ich kąty są równe. Jeżeli S jest środkiem odcinka PQ, to odcinki PS i SQ są równe; trójkąty są więc przystające. Z równości boków równoległych do osi układu współrzędnych wynika, że pierwsza współrzędna punktu S jest środkiem odcinka o końcach a i c, a druga jego współrzędna jest środkiem odcinka o końcach b i d. Stąd punkt S ma współrzędne $\frac{a+c}{2}$ i $\frac{b+d}{2}$.

Oznacza to, że współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi współrzędnych jego końców.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz odległość punktu $(1,-2)$ od początku układu współrzędnych.

2. Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach $(0,-1)$, $(3,-3)$ i $(5,4)$ jest prostokątny.

3. Znajdź współrzędne środka odcinka o końcach $(-3,-5)$ i $(-4,2)$.

4. Punkt $(2,-1)$ jest środkiem odcinka, którego jednym końcem jest punkt $(7,-3)$. Znajdź drugi koniec odcinka.

1. $\sqrt{5}$. **2.** Nie jest. **3.** $-3\frac{1}{2}$ i $-1\frac{1}{2}$. **4.** $(-3,1)$.

Interpretacja geometryczna równań i nierówności

Zacznijmy od pytań:

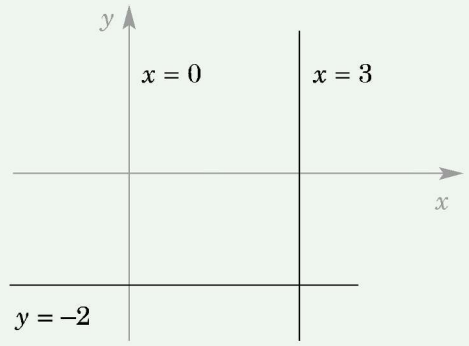
Ile jest punktów, których pierwsza współrzędna jest równa 3?

Jak symbolicznie zapisać ten warunek? Jaką figurę tworzą te punkty?

Jaką figurę tworzą punkty, których druga współrzędna jest równa –2?

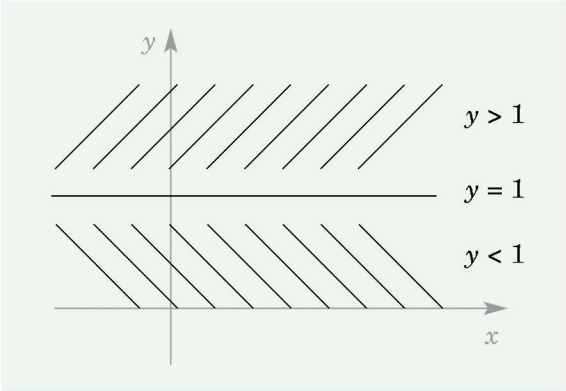
Gdzie leżą punkty, których pierwsza współrzędna jest równa zero?

Przedstawmy odpowiedzi na rysunku:

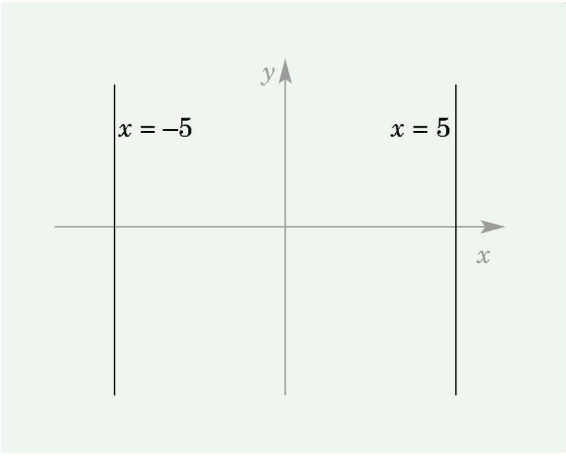


Jak widać, układ współrzędnych pozwala zapisać zbiory punktów za pomocą równań.

Zbiory punktów można też zapisywać za pomocą nierówności. Na przykład:

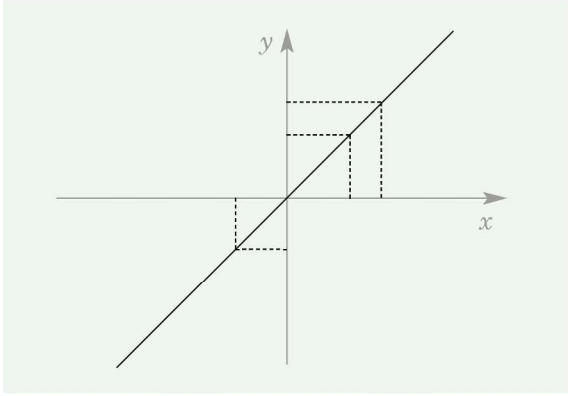


Wróćmy do równań. Jaki zbiór punktów jest opisany równaniem $|x| = 5$? Równanie to oznacza, że $x = 5$ lub $x = -5$. Jest więc spełnione przez punkty leżące na prostej $x = 5$ oraz przez punkty prostej $x = -5$. Zatem równanie to przedstawia parę prostych:



A jak znaleźć równanie dwusiecznej pierwszej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych? Jaki warunek spełniają współrzędne punktów tej prostej?

Odpowiedź odczytujemy z rysunku:



Prosta pokrywa się ze zbiorem punktów, których obie współrzędne są jednakowe; ma więc równanie $y = x$.

Na zakończenie napiszmy równanie okręgu o danym środku i promieniu, czyli równanie zbioru punktów oddalonych od środka o promień.

Jeżeli okrąg ma środek (a,b) i promień r, to jest dokładnie zbiorem takich punktów (x,y), dla których $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$. Równanie to zwykle zapisujemy w postaci warunku na kwadrat odległości od środka okręgu: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Jaki zbiór punktów jest przedstawiony równaniem $y=-x$?

2. Jaką figurę przedstawia równanie $|y|=3$?

3. Jaki zbiór punktów płaszczyzny spełnia warunek $x\cdot y=0$?

Wskazówka: Kiedy iloczyn dwóch czynników jest równy zero?

4. Które punkty płaszczyzny spełniają nierówność $x>-2$?

5. Które punkty płaszczyzny spełniają jednocześnie nierówności $x<2$ i $x>-3$?

6. Napisz równanie okręgu o środku $(1,-2)$ i promieniu 4.

7. Wskaż środek i promień okręgu:

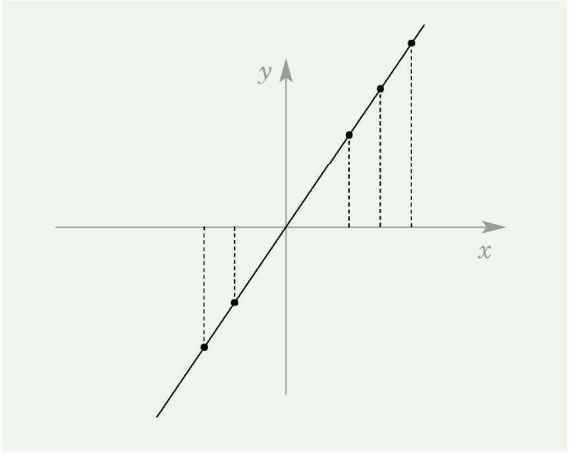
a) $(x+3)^2+(y-5)^2=4$,

b) $(x-3)^2+y^2=2$.

1. Prosta będąca dwusieczną drugiej i czwartej ćwiartki.
2. Dwie proste: $y=3$ i $y=-3$.
3. Osie układu współrzędnych.
4. Punkty leżące na prawo od prostej $x=-2$.
5. Punkty części płaszczyzny zawartej między prostymi $x=-3$ i $x=2$.
6. $(x-1)^2+(y+2)^2=16$. **7.** a) Środek $(-3,5)$, promień 2, b) środek $(3,0)$, promień $\sqrt{2}$.

Równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych

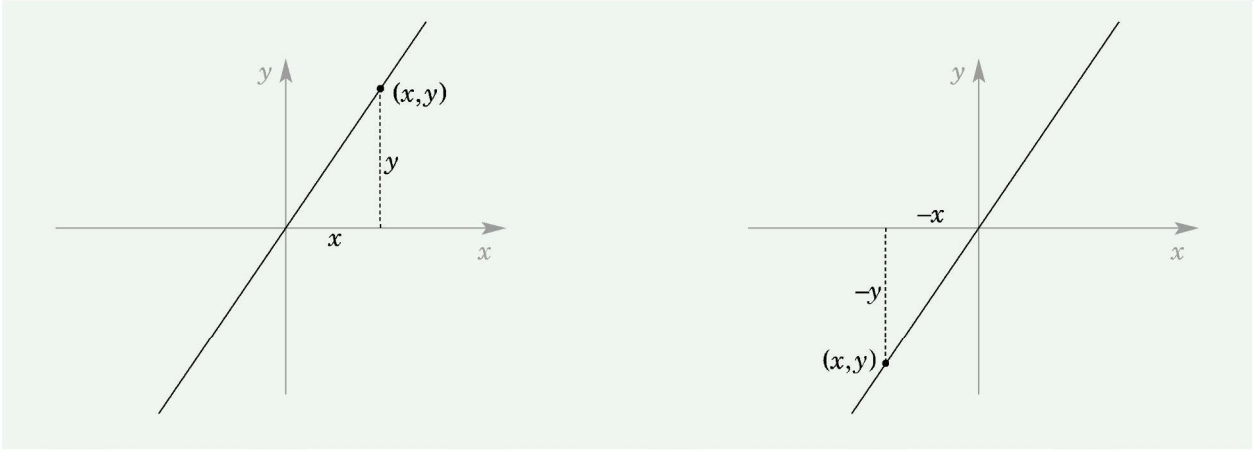
Prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych leży w pierwszej i trzeciej ćwiartce lub w drugiej i czwartej ćwiartce. Zacznijmy od tego pierwszego położenia, przyporządkowując każdemu punktowi prostej trójkąt prostokątny w sposób wskazany na rysunku:



Trójkąty te mają ten sam kąt ostry, więc są podobne.

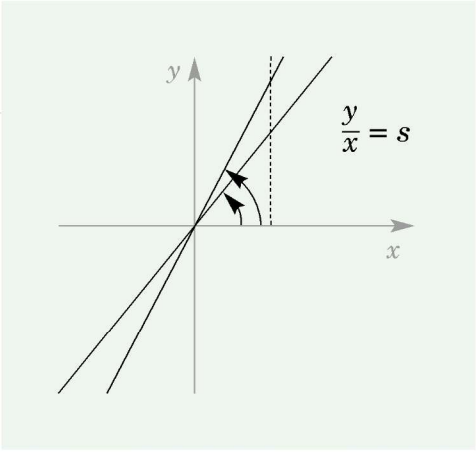
Stąd wynika, że stosunek przyprostokątnych we wszystkich tych trójkątach jest taki sam. Oznaczmy stosunek przyprostokątnej „pionowej" do przyprostokątnej „poziomej" literą s.

Jeżeli punkt (x,y) leży w pierwszej ćwiartce, to przyprostokątne odpowiadającego mu trójkąta mają długości x i y, a jeżeli leży w trzeciej ćwiartce, to $x < 0$ oraz $y < 0$ i wtedy przyprostokątne odpowiadającego mu trójkąta mają długości $-x$ i $-y$:

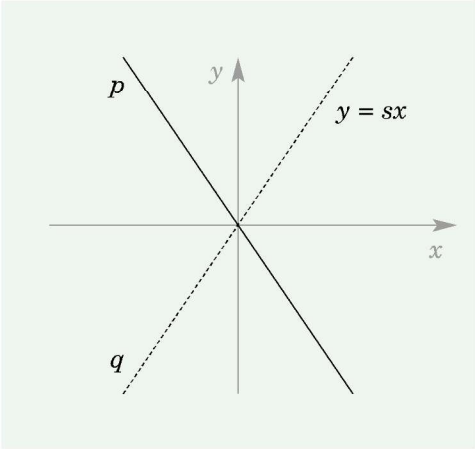


W pierwszym przypadku zachodzi równość $\frac{y}{x} = s$, a w drugim przypadku $\frac{-y}{-x} = s$, czyli również $\frac{y}{x} = s$. Równość ta jest spełniona przez wszystkie punkty prostej z wyjątkiem punktu $(0,0)$. Jeżeli równość napiszemy w postaci $y = sx$, to spełniają ją wszytkie punkty prostej.

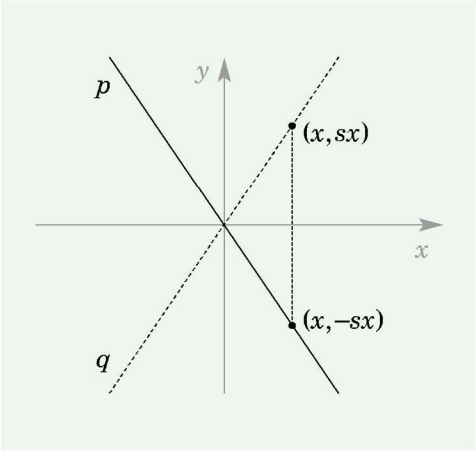
Zauważmy, że im większe s, tym większy kąt tworzy prosta z osią x:



Rozważmy teraz prostą p przechodzącą przez początek układu współrzędnych oraz drugą i czwartą ćwiartkę i odbijmy ją symetrycznie względem osi x, otrzymując prostą q. Ponieważ prosta q przechodzi przez pierwszą i trzecią ćwiartkę, więc ma równanie postaci $y = sx$.



Odbicie względem osi x zmienia drugą współrzędną każdego punktu na liczbę przeciwną:



Jeżeli prosta q jest zbiorem punktów postaci (x, sx), to prosta p jest zbiorem punktów postaci $(x, -sx)$, więc ma równanie $y = -sx$.

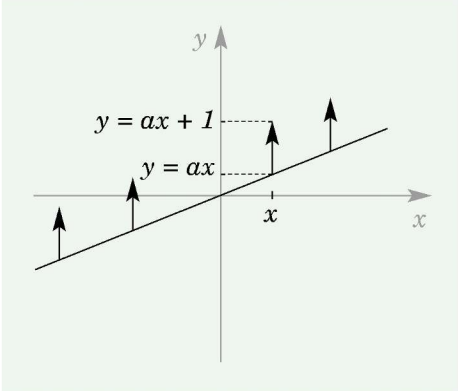
Z przeprowadzonych rozważań wynika, że dowolna prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych (i różna od osi y) ma równanie postaci $y = ax$, gdzie $a = s$ lub

$a = -s$. Zatem a jest liczbą dodatnią lub ujemną, przy czym znak zależy od tego, przez które ćwiartki płaszczyzny przechodzi dana prosta.

Liczba a określa kierunek prostej i dlatego nazywamy ją współczynnikiem kierunkowym.

Równanie dowolnej prostej

Porównajmy teraz równania $y = ax$ i $y = ax + 1$. Dla każdej ustalonej współrzędnej x współrzędna y określona drugim równaniem jest o 1 większa niż ta sama współrzędna określona pierwszym równaniem:



Jak widać, równanie $y = ax + 1$ opisuje prostą powstającą z prostej $y = ax$ przez przesunięcie o 1 do góry.[12]

Analogicznie równanie $y = ax - 1$ przedstawia prostą powstającą z prostej $y = ax$ przez przesunięcie o 1 w dół.

Uogólniając poznane własności, stwierdzamy, że równanie postaci $y = ax + b$ przedstawia prostą, przy czym współczynnik a decyduje o jej kierunku, a współczynnik b określa jej położenie względem prostej $y = ax$, wskazując, czy jest wyżej czy niżej i o ile.

Na przykład proste $y = \frac{2}{3}x + 3$ i $y = \frac{2}{3}x - 2$ są równoległe, a proste $y = \frac{2}{3}x + 3$ i $y = \frac{3}{2}x - 2$ przecinają się.

[12] Mówiąc ściślej, chodzi tu o przesunięcie równoległe do osi y zgodnie z jej zwrotem.

Rozwiązywanie zadań z geometrii analitycznej jest nietrudne, trzeba tylko umieć zapisywać algebraicznie własności geometryczne i tłumaczyć na język geometrii warunki zapisane językiem algebry.

> Rysunek nie zawsze jest potrzebny, zależy od sytuacji opisanej w zadaniu. Zauważmy też, że sporządzając rysunek, często można pominąć usytuowanie danej figury względem układu współrzędnych.

Uwzględnienie położenia figury bywa kłopotliwe (na przykład wtedy, kiedy są duże różnice między współrzędnymi punktów), a nie zawsze jest istotne.

Rozstrzygnięcie, czy punkt leży, czy nie leży na prostej danej równaniem, sprowadza się do sprawdzenia, czy współrzędne punktu spełniają równanie prostej. Znalezienie punktu wspólnego dwóch prostych sprowadza się do rozwiązania układu równań, a zbadanie, czy proste są równoległe, polega na porównaniu ich współczynników kierunkowych.

Równanie prostej może też być podane w innej formie, na przykład $2x + 3y - 4 = 0$. Wtedy można je przekształcić do postaci, o której była mowa poprzednio. Otrzymamy $3y = -2x + 4$, skąd $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. Jest to tzw. postać kierunkowa.

> Każde równanie postaci $ax + by + c = 0$ przedstawia linię prostą i z tego powodu nazywamy je równaniem liniowym.

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi przedstawia zatem dwie proste; ma więc tyle rozwiązań, ile punktów wspólnych mają dwie proste przedstawione równaniami tego układu. Jeżeli proste te przecinają się, to układ ma jedno rozwiązanie, jeżeli są równoległe, to układ nie ma w ogóle rozwiązań, a jeżeli oba równania przedstawiają tą samą prostą, to jest nieskończenie wiele rozwiązań.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Znajdź współrzędne dowolnych trzech punktów leżących na prostej $y = -2x + 3$.

2. Sprawdź, czy proste $3x + y - 5 = 0$ i $2x - 6y + 1 = 0$ są równoległe.

3. Napisz równanie prostej równoległej do prostej $2x - y = 0$ i przechodzącej przez punkt $(-3, 3)$.

2. Nie są równoległe. **3.** $y = 2x + 9$.

A jak napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty $(2, -1)$ oraz $(-2, 3)$?

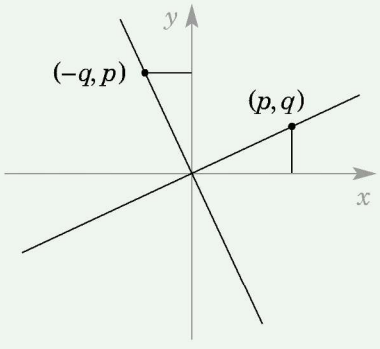
Poszukajmy równania prostej w postaci $y = ax + b$. Są w nim niewiadome dwie liczby a i b, ale są też dwa warunki, bo każdy z dwóch danych punktów ma spełniać szukane równanie:

$$\begin{cases} -1 = a \cdot 2 + b \\ 3 = a \cdot (-2) + b \end{cases}$$

Dodając równania stronami, otrzymamy $2b = 2$, skąd $b = 1$. Podstawiając tę wartość do jednego z równań, otrzymamy $a = -1$. Zatem szukana prosta ma równanie $y = -x + 1$.

W każdym tego typu zadaniu warto sprawdzić, czy się nie pomyliliśmy, podstawiając do znalezionego równania współrzędne danych punktów.

Na zakończenie znajdźmy związek między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych. Odczytajmy go z rysunku:



Współczynnik kierunkowy jednej prostej to $\frac{q}{p}$, a współczynnik kierunkowy drugiej prostej to $\frac{-p}{q}$. Zatem jeden jest przeciwny do odwrotności drugiego.

Oznaczając te współczynniki przez a_1 i a_2, warunek prostopadłości zapiszemy w postaci $a_1 = -\frac{1}{a_2}$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Znajdź współrzędne dowolnego punktu prostej $2x - 3y + 5 = 0$.

2. Napisz równanie prostej przechodzacej przez punkt $(-1, \frac{1}{2})$ i równoległej do prostej $y = 3x - 1$.

3. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $(1, -1)$ i prostopadłej do prostej $y = \frac{1}{2}x + 2$.

4. Sprawdź, czy proste $3x - 2y + 4 = 0$ i $2x - 3y + 4 = 0$ są równoległe.

5. O prostej p wiadomo, że jest prostopadła do prostej $-4x - 3y + 1 = 0$. Podaj współczynnik kierunkowy prostej p.

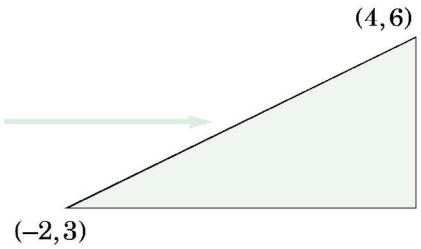
6. Oblicz odległość między punktami przecięcia prostej $y = -\frac{3}{4}x - 3$ z osiami układu współrzędnych.

2. $y = 3x + \frac{7}{2}$. **3.** $y = -2x + 1$. **4.** Nie są równoległe, bo mają różne współczynniki kierunkowe.
5. $\frac{3}{4}$. **6.** 5.

Przegląd zadań maturalnych

Oblicz długość odcinka o końcach $(-2,3)$ i $(4,6)$.

Narysujmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równoległych do odpowiednich osi współrzędnych: Odcinek o danych końcach jest przeciwprostokątną tego trójkąta, a przyprostokątne mają długości $4-(-2)$ i $6-3$. Długość tego odcinka jest więc równa $\sqrt{6^2+3^2}$, czyli $\sqrt{45}$, co można zapisać w postaci $3\sqrt{5}$.



Punkty $A=(-5,2)$ i $B=(3,-2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Oblicz obwód tego trójkąta.

Długość boku trójkąta jest równa $\sqrt{(3-(-5))^2+(2-(-2))^2}$, czyli $\sqrt{80}$, co można przekształcić do postaci $4\sqrt{5}$. Obwód trójkąta jest więc równy $12\sqrt{5}$.

Punkty $A=(2,0)$ i $B=(12,0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=x$. Oblicz współrzędne punktu C.

Szukamy punktu C, którego obie współrzędne są równe – niech to będzie punkt (x,x). Jest więc jedna niewiadoma, którą znajdziemy ze związku między bokami trójkąta prostokątnego: $|AC|^2+|CB|^2=|AB|^2$.

Ciąg dalszy zadania na następnej stronie

Ciąg dalszy zadania z poprzedniej strony

Obliczamy kwadraty długości poszczególnych boków:

$|AC|^2 = (2-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 4x + 4,$

$|CB|^2 = (x-12)^2 + x^2 = 2x^2 - 24x + 144,$

$|AB|^2 = (12-2)^2 = 100.$

Podstawiamy do związku między bokami:

$2x^2 - 4x + 4 + 2x^2 - 24x + 144 = 100$, skąd $4x^2 - 28x + 48 = 0.$

Dzielimy obie strony równania przez 4 i rozwiązujemy:

$x^2 - 7x + 12 = 0, \quad \Delta = 49 - 48 = 1, \quad x = \frac{7+1}{2} = 4$ lub $x = \frac{7-1}{2} = 3.$

Są więc dwa punkty spełniające warunki zadania: $C = (3,3)$ lub $C = (4,4)$.

Istnienie dwóch rozwiązań jest geometrycznie jasne, ponieważ C – jako wierzchołek kąta prostego – leży na okręgu o średnicy AB, a okrąg ten ma dwa punkty wspólne z prostą $y = x$, co można zobaczyć po sporządzeniu rysunku.

Napisz równanie okręgu o środku $(2,1)$ przechodzącego przez punkt $(6,4)$.

Równanie okręgu o środku $(2,1)$ i promieniu r ma postać $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2$. Aby znaleźć r, skorzystamy z informacji, że punkt $(6,4)$ spełnia równanie okręgu, czyli $(6-2)^2 + (4-1)^2 = r^2$. Stąd $r^2 = 25$, więc szukane równanie okręgu ma postać $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Podaj współrzędne środka i promień okręgu $(x-1)^2 + y^2 = 16$.

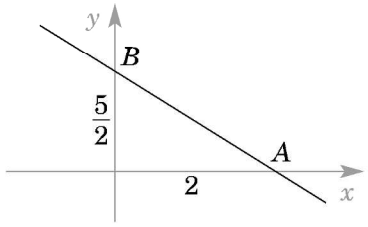
Środek okręgu ma współrzędne 1 i 0, a promień jest równy 4.

Prosta $5x + 4y - 10 = 0$ przecina oś x w punkcie A oraz oś y w punkcie B. Znajdź taki punkt C na osi x, aby pole trójkąta ABC było równe 35. Ile jest takich punktów?

Warto sporządzić rysunek, obliczając przedtem współrzędne punktów A i B, czyli znajdując punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych. W tym celu do równania prostej trzeba podstawić kolejno $x = 0$ i $y = 0$, obliczając pozostałą współrzędną.

Jeżeli $x = 0$, to $4y - 10 = 0$, skąd $y = \frac{5}{2}$.

Jeżeli natomiast $y = 0$, to $5x - 10 = 0$, skąd $x = 2$. Mamy więc $A = (2,0)$, $B = (0,\frac{5}{2})$ i sytuacja jest następująca:



Szukany punkt C leży gdzieś na osi x. Jeśli odcinek AC przyjmiemy za podstawę trójkąta ABC, to wysokość trójkąta jest równa $\frac{5}{2}$. Skoro pole trójkąta jest równe 35, to $\frac{1}{2}|AC| \cdot \frac{5}{2} = 35$. Stąd $|AC| = 28$.

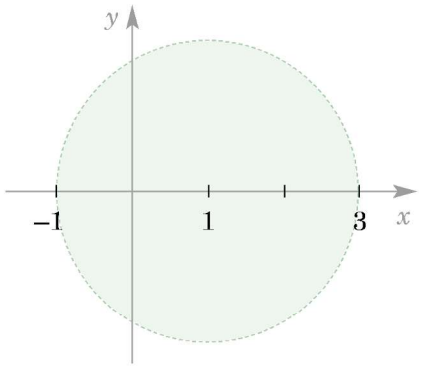
Aby otrzymać punkt C, trzeba od punktu B odłożyć odcinek o długości 28, przy czym można odkładać w jedną i drugą stronę. Odkładając odcinek zgodnie z kierunkiem osi x, otrzymamy punkt o pierwszej współrzędnej 30, a odkładając odcinek w kierunku przeciwnym, otrzymamy punkt o pierwszej współrzędnej -26. Zatem są dwa rozwiązania: $C = (30,0)$ lub $C = (-26,0)$.

Prosta $y = -4x + m - 7$ przechodzi przez punkt $(2,-1)$. Oblicz m.

Podstawiając współrzędne podanego punktu do równania prostej, otrzymamy równanie z niewiadomą m. Zatem $-1 = -4 \cdot 2 + m - 7$, skąd $m = 14$.

Narysuj okrąg $(x-1)^2+y^2-4=0$ i znajdź równania tych stycznych do okręgu, które są równoległe do osi y.

Ponieważ środkiem okręgu jest punkt $(1,0)$, a promień jest równy 2, więc okrąg przecina oś x w punktach, których pierwsze współrzędne są równe -1 i 3:



Zatem styczne do okręgu równoległe do osi y mają równania $x=-1$ i $x=3$.

Napisz równanie prostej równoległej do prostej $y=2x-3$ i przechodzącej przez punkt $(-2,1)$.

Z warunku równoległości wynika, że obie proste, dana i szukana, mają ten sam współczynnik kierunkowy. Zatem szukane równanie ma postać $y=2x+b$.
Ponieważ jest ono spełnione przez punkt $(-2,1)$, więc $1=2\cdot(-2)+b$, skąd $b=5$.
W rezultacie otrzymujemy równanie $y=2x+5$.

Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej $y=3x+3$ przechodzącej przez punkt $(3,-2)$.

Współczynnik kierunkowy szukanej prostej jest równy $-\frac{1}{3}$, więc ma ona równanie postaci $y=-\frac{1}{3}x+b$. Liczbę b znajdziemy z warunku, że punkt $(3,-2)$ spełnia to równanie.
Zatem $-2=-\frac{1}{3}\cdot 3+b$, skąd $b=-1$ i szukane równanie to $y=-\frac{1}{3}x-1$.

Okrąg o środku w punkcie $(3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Jak wiemy, styczna do okręgu jest prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt styczności. Punkt styczności jest więc punktem wspólnym stycznej i prostej do niej prostopadłej przechodzącej przez środek okręgu.

Napiszmy równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 2x - 3$ i przechodzącej przez punkt $(3,7)$. Postępując analogicznie jak w poprzednim zadaniu, otrzymamy $y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$.

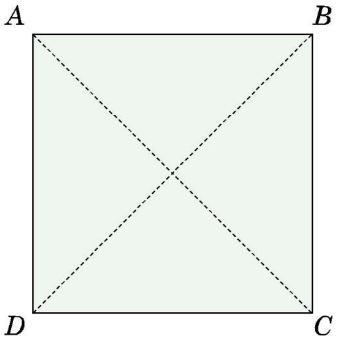
Teraz wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \end{cases}$$

Otrzymamy $x = \frac{23}{5}$ i $y = \frac{31}{5}$. I to są współrzędne punktu styczności.

Punkty $A = (2,5)$ i $C = (6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

Popatrzmy na rysunek:



Z prostopadłości przekątnych kwadratu wynika, że szukana prosta BD jest prostopadła do prostej AC. Ponadto przechodzi ona przez środek odcinka AC. Aby znaleźć równanie prostej BD, trzeba zatem znaleźć współczynnik kierunkowy prostej AC oraz współrzędne środka odcinka AC.

Ciąg dalszy zadania na następnej stronie

Ciąg dalszy zadania z poprzedniej strony

Szukając równania prostej AC w postaci $y = ax + b$, podstawiamy kolejno współrzędne punktów A i C:

$$\begin{cases} 5 = 2a + b \\ 7 = 6a + b \end{cases}$$

Z otrzymanego układu równań obliczymy, że $a = \frac{1}{2}$ (b nie jest nam potrzebne). Stąd współczynnik kierunkowy prostej BD jest równy -2 i ma ona równanie postaci $y = -2x + b'$.

Środek odcinka AC ma współrzędne $\frac{2+6}{2}$ i $\frac{5+7}{2}$, czyli 4 i 6. Liczby te podstawiamy do ostatniego równania, otrzymując $6 = -2 \cdot 4 + b'$, skąd $b' = 14$. Zatem szukana prosta ma równanie $y = -2x + 14$.

Dla jakiej wartości a układ równań

$$\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$$

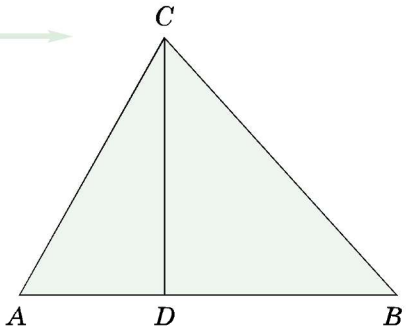
ma nieskończenie wiele rozwiązań?

Jak wiadomo, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, kiedy równania przedstawiają tę samą prostą. Oznacza to, że można równania doprowadzić do jednakowej postaci, mnożąc lub dzieląc obie strony przez tę samą liczbę. Na początek podzielmy obie strony pierwszego równania przez 2, a drugiego przez 3. Otrzymamy $2x + y = 5$ i $2x + \frac{a}{3}y = 5$. Jak widać, równania są identyczne, jeżeli $a = 3$. I taka jest odpowiedź.

Rozwiązywanie zadania z przejściem do postaci kierunkowych jest oczywiście możliwe, ale nieco bardziej uciążliwe rachunkowo.

Punkty $A=(1,5)$, $B=(14,31)$, $C=(4,31)$ są wierzchołkami trójkąta. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz długość odcinka BD.

Przedstawmy sytuację na rysunku:



Punkty A, B, C są dane, trzeba znaleźć punkt D. Jest on punktem wspólnym prostej AB i wysokości CD. Napiszmy więc równania tych dwóch prostych.

Szukając równania prostej AB w postaci $y=ax+b$, gdzie są dwie niewiadome a i b, skorzystamy z tego, że równanie jest spełnione zarówno przez punkt A, jak i punkt B.

Stąd

$$\begin{cases} 5=a+b \\ 31=14a+b \end{cases}$$

Odejmując stronami pierwsze równanie od drugiego, otrzymamy $26=13a$, skąd $a=2$. Podstawiając tę wartość do pierwszego równania, otrzymamy $b=3$.

Zatem prosta AB ma równanie $y=2x+3$.

Prosta CD jest prostopadła do prostej AB, więc ma współczynnik kierunkowy $-\frac{1}{2}$ i jej równanie ma postać $y=-\frac{1}{2}x+b'$. Skoro prosta przechodzi przez punkt $(4,31)$, więc $31=-\frac{1}{2}\cdot 4+b'$, skąd $b'=33$.

Znajdując punkt D, rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y=2x+3 \\ y=-\frac{1}{2}x+33 \end{cases}$$

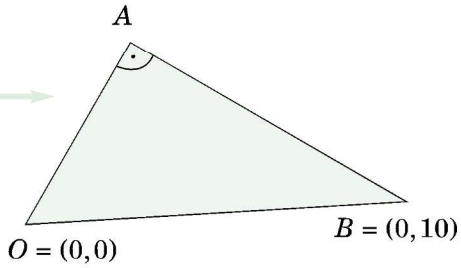
Otrzymamy $x=12$ i $y=27$, skąd $D=(12,27)$.

Teraz pozostaje obliczyć odległość między punktami B i D:

$$|BD|=\sqrt{(14-12)^2+(31-27)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

Punkty $B = (0,10)$ i $O = (0,0)$ są wierzchołkami trójkąta OAB, w którym kąt przy wierzchołku A jest prosty. Przyprostokątna OA zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne punktu A i długość przyprostokątnej OA.

Zilustrujmy sytuację rysunkiem:



Szukany punkt A jest punktem wspólnym prostych AO i AB. Ponieważ proste te są prostopadłe i pierwsza z nich ma równanie $y = \frac{1}{2}x$, więc druga ma równanie postaci $y = -2x + b$. Skoro punkt B spełnia to równanie, to $b = 10$.

Zatem prosta AB ma równanie $y = -2x + 10$, a punkt A spełnia układ równań

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -2x + 10 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest para liczb $x = 4$, $y = 2$, więc $A = (4,2)$.

Trzeba jeszcze obliczyć długość przyprostokątnej OA, czyli odległość punktu A od początku układu współrzędnych: $|OA| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $(6,1)$ i $(3,3)$.

Równanie prostej ma postać $y = ax + b$. Ponieważ dane punkty spełniają to równanie, to

$$\begin{cases} 1 = 6a + b \\ 3 = 3a + b \end{cases}$$

Odejmując stronami drugie równanie od pierwszego, otrzymujemy $-2 = 3a$, skąd $a = -\frac{2}{3}$. Znalezioną wartość podstawiamy do drugiego równania, otrzymując $3 = -2 + b$, skąd $b = 5$. Zatem równanie ma postać $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $(2,1)$ i stycznego do osi układu współrzędnych.

Radzę naszkicować sytuację. Wtedy widać, że są dwa okręgi spełniające podane warunki. Potwierdzimy to rachunkowo. Niech r bedzie promieniem szukanego okręgu. Ponieważ środek okręgu jest odległy od każdej osi o promień, więc ma współrzędne (r,r).
Równanie okręgu ma zatem postać $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$.
Korzystając z tego, że okrąg przechodzi przez punkt $(2,1)$, otrzymujemy równanie $(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$, które po przekształceniu przyjmuje postać $r^2-6r+5=0$.
Rozwiązując, otrzymujemy $r=5$ lub $r=1$.
Zatem równania okręgów to $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ oraz $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej $3x-6y+7=0$.

Przekształcamy dane równanie do postaci kierunkowej:
$3x-6y+7=0, \quad 6y=3x+7, \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{6}$.
Zatem współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej jest równy -2.

Punkt $(5,2012)$ odbito symetrycznie względem osi x, a otrzymany punkt odbito symetrycznie względem osi y. Podaj współrzędne otrzymanego w ten sposób punktu.

Po pierwszym odbiciu otrzymujemy punkt $(5,-2012)$, a po drugim $(-5,-2012)$.

Napisz równanie symetralnej odcinka o końcach $(-2,2)$ i $(2,10)$.

Symetralna jest prostą prostopadłą do odcinka i przechodzącą przez jego środek. Aby napisać jej równanie, trzeba znaleźć współczynnik kierunkowy prostej zawierającej dany odcinek oraz środek odcinka.

Prosta zawierająca odcinek to prosta przechodząca przez jego końce.

Jeżeli jej równanie napiszemy w postaci $y = ax + b$, to

$$\begin{cases} 2 = -2a + b \\ 10 = 2a + b \end{cases}$$

Odejmując stronami pierwsze równanie od drugiego, otrzymamy $8 = 4a$, skąd $a = 2$.

Zatem współczynnik kierunkowy symetralnej jest równy $-\frac{1}{2}$, a jej równanie ma postać $y = -\frac{1}{2}x + b'$.

Ponieważ współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi współrzędnych jego końców, więc środkiem odcinka jest punkt $(0,6)$.

Skoro spełnia on równanie symetralnej, to $b' = 6$ i symetralna ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + 6$.

6. Funkcje

Chociaż badaniem zależności między różnymi wielkościami zajmowali się już starożytni Grecy, pojęcie funkcji wprowadzono znacznie później; liczy ono sobie ok. 400 lat. Dzisiaj funkcja zajmuje jedno z naczelnych miejsc wśród pojęć matematycznych.

Proporcjonalność prosta i odwrotna

Zarówno w matematyce, jak i w życiu codziennym spotykamy się z różnego rodzaju powiązaniami rozmaitych wielkości – jedne zależą od drugich, zmiana jednych pociąga za sobą zmianę drugich. Na przykład pole kwadratu zależy od boku kwadratu, czas przejazdu samochodu na ustalonej trasie zależy od jego prędkości, temperatura za naszym oknem zależy od czasu, w którym ją odczytujemy itp.

Często jest tak, że jedna wielkość zależy od kilku innych, na przykład cena detaliczna towaru zależy m.in. od jego ceny hurtowej i od marży ustalonej przez sprzedawcę, suma trzech składników zależy od trzech liczb, wartość wielomianu zależy od wartości wszystkich występujących w nim zmiennych.

Zależność jest rodzajem przyporządkowania, jednej wielkości przyporządkowujemy drugą. Na przykład każdej liczbie możemy przyporządkować liczbę o 1 od niej większą. Przyporządkowanie to można odwrócić; wtedy każdej liczbie będzie odpowiadała liczba o 1 mniejsza.

Oba przyporządkowania są jednoznaczne, bo zarówno liczba o 1 większa, jak i liczba o 1 mniejsza od danej są określone jednoznacznie. Nie zawsze tak jest. Na przykład każdej liczbie odpowiada w sposób jednoznaczny jej wartość bezwzględna, natomiast przyporządkowanie odwrotne nie jest jednoznaczne, bo są różne liczby o tej samej wartości bezwzględnej.

Jak wiadomo, jeżeli przyporządkowanie jest jednoznaczne, to nazywamy je funkcją. Zatem przyporządkowania: o 1 *więcej*, o 1 *mniej*, wartość *bezwzględna* – są funkcjami.

Podobnie przyporządkowanie każdej liczbie jej kwadratu jest funkcją, a odwrotne przyporządkowanie nie jest funkcją. Natomiast pierwiastek kwadratowy jest funkcją, bo w definicji pierwiastka przyjmujemy, że jest on nieujemny.

Funkcjami są również zależności proporcjonalne – prosta i odwrotna.

> Nazwy te są używane potocznie, nie zawsze prawidłowo.
> Dosyć powszechnym błędem jest mylenie zależności
> wprost proporcjonalnej z zależnością rosnącą.

Mówimy na przykład, że wyniki sportowca są proporcjonalne do czasu, jaki przeznacza na trening. Mamy na myśli, że im więcej czasu sportowiec trenuje, tym lepsze ma wyniki. Tymczasem zależność proporcjonalna między dwoma wielkościami oznacza, że jeżeli jedna z nich zwiększa się pewną liczbę razy, to druga zwiększa się **tyle samo razy**.

Tego samego rodzaju błąd dotyczy proporcjonalności odwrotnej, którą na co dzień myli się z zależnością malejącą (jedna wielkość maleje, podczas gdy druga rośnie). Tymczasem zależność odwrotnie proporcjonalna oznacza nie tylko, że jedna wielkość maleje wraz ze wzrostem drugiej, ale na dodatek jedna wielkość zmniejsza się **tyle samo razy**, ile razy ta druga wzrasta.

Jeżeli w zależności wprost proporcjonalnej liczbie x odpowiada liczba y, to liczbie kx, gdzie k jest dowolną liczbą różną od zera, odpowiada liczba ky. Oznacza to, że $\frac{ky}{kx} = \frac{y}{x}$. Inaczej mówiąc, w proporcjonalności prostej iloraz $\frac{y}{x}$ jest stały, nie zależy od wyboru pary odpowiadających sobie liczb. Iloraz ten nazywamy współczynnikiem proporcjonalności prostej. Proporcjonalność prosta o współczynniku a jest więc określona wzorem $\frac{y}{x} = a$.

Natomiast jeżeli w zależności odwrotnie proporcjonalnej liczbie x odpowiada liczba y, to liczbie kx odpowiada liczba $\frac{y}{k}$. Oznacza to, że $kx \cdot \frac{y}{k} = x \cdot y$. Inaczej mówiąc, w proporcjonalności odwrotnej iloczyn $x \cdot y$ jest stały (i różny od zera), nie zależy od wyboru pary odpowiadających sobie liczb. Iloczyn ten nazywamy współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej. Proporcjonalność odwrotna o współczynniku a jest więc określona wzorem $x \cdot y = a$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Wykaż, że obwód koła jest wprost proporcjonalny do jego średnicy. Jaki jest współczynnik tej proporcjonalności?

2. Uzasadnij, że pole koła nie jest proporcjonalne (ani wprost ani odwrotnie) do promienia koła.

1. Stosunek obwodu koła do średnicy jest stały. Współczynnik proporcjonalności jest równy π.
2. Wystarczy zauważyć, że jeżeli promień koła zwiększymy 2 razy, to pole koła zwiększy się 4 razy.

Funkcje – dziedzina, argumenty, wartości

Jak wiadomo, zbiór liczb, dla których funkcja jest określona, nazywamy dziedziną funkcji. Na przykład dziedziną funkcji określonej wzorem $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz - 2$ jest zbiór wszystkich trójek liczb (x,y,z), a dziedziną funkcji $f(x,y) = \frac{x}{y}$ jest zbiór par liczb (x,y), w których $y \neq 0$.

Dziedziną funkcji określonej wzorem $f(x) = x^2$ jest zbiór wszystkich liczb, dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ jest zbiór liczb nieujemnych, a dziedziną funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ jest zbiór liczb różnych od zera.

Funkcja $f(x) = \log_2(x - 1)$ jest określona wtedy, kiedy liczba logarytmowana jest dodatnia, czyli dziedziną funkcji jest zbiór tych liczb, dla których $x - 1 > 0$. Dziedzinę stanowi więc zbiór liczb większych od 1.

We wzorze $f(x) = \frac{1}{\log_2 x}$ nie wystarczy warunek $x > 0$. Trzeba jeszcze, aby mianownik nie był zerem. Ponieważ $\log_2 x = 0$ dla $x = 1$, więc dziedziną funkcji $f(x) = \frac{1}{\log_2 x}$ jest zbiór wszystkich liczb dodatnich z wyjątkiem liczby 1.

Dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ wyznaczają dwa warunki: $x + 1 \geqslant 0$ oraz $x - 2 \neq 0$. Wobec tego dziedzinę stanowi zbiór liczb $x \geqslant -1$ z wyjątkiem $x = 2$.

Dziedziną funkcji $f(x) = \log_4(-x)$ jest zbiór liczb ujemnych, bo liczby przeciwne do ujemnych są dodatnie.

A jaka jest dziedzina funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$? Na licznik ułamka nie trzeba nakładać żadnych warunków, a mianownik powinien być różny od zera. Ponieważ ten ostatni warunek jest spełniony niezależnie od wartości x, więc dziedziną tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Podaj przykład funkcji, której dziedziną jest:

a) zbiór wszystkich liczb z wyjątkiem 1 oraz -2, b) zbiór wszystkich liczb.

2. Określ dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, b) $f(x) = \sqrt{x+2}$, c) $f(x) = \sqrt{|x+2|}$, d) $f(x) = \log_9 3x$.

2. a) $x \neq 1 \wedge x \neq -1$, b) $x \geqslant -2$, c) x jest dowolną liczbą, d) $x > 0$.

Jak wiadomo, elementy dziedziny funkcji noszą nazwę argumentów; każdemu argumentowi jest przyporządkowana wartość funkcji.

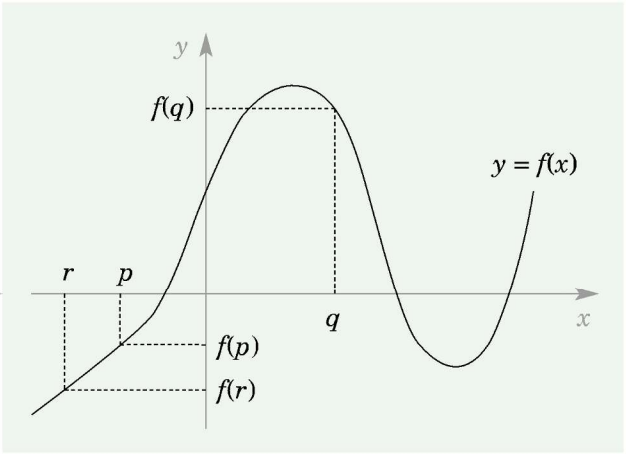
Funkcje przyporządkowujące liczbom liczby można przedstawiać na płaszczyźnie, na której jest układ współrzędnych. Wtedy argumenty są punktami osi x, wartości funkcji są punktami osi y, a wykres składa się z punktów postaci $(x, f(x))$. Wykres jest więc krzywą[13] o równaniu $y = f(x)$.

[13] W sensie matematycznym prosta też jest zaliczana do krzywych.

Ponieważ wartość funkcji w każdym punkcie dziedziny jest określona jednoznacznie, więc na wykresie funkcji jest tylko jeden punkt o ustalonej współrzędnej x. Oznacza to, że linie pionowe przecinają wykres funkcji w co najwyżej jednym punkcie.

Jak wiadomo, niektóre funkcje są rosnące, niektóre malejące, ale są i takie, które nie mają ani jednej ani drugiej własności.

Oto wykres funkcji $y = f(x)$, określonej w pewnym przedziale, na którym zaznaczono wartości funkcji w punktach p, q, r:



Funkcja $f(x)$ nie jest ani rosnąca, ani malejąca. Można jednak podzielić dziedzinę na takie trzy przedziały, że w każdym z nich funkcja jest rosnąca lub malejąca: najpierw rośnie, potem maleje, a potem znów rośnie.

Sprawdź, czy potrafisz

1. W ilu punktach funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość równą:
a) $f(p)$, b) $f(q)$, c) $f(r)$?

2. W ilu punktach funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość zero?

3. Czy prawdą jest, że funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości ujemne dla argumentów ujemnych, a dodatnie dla dodatnich?

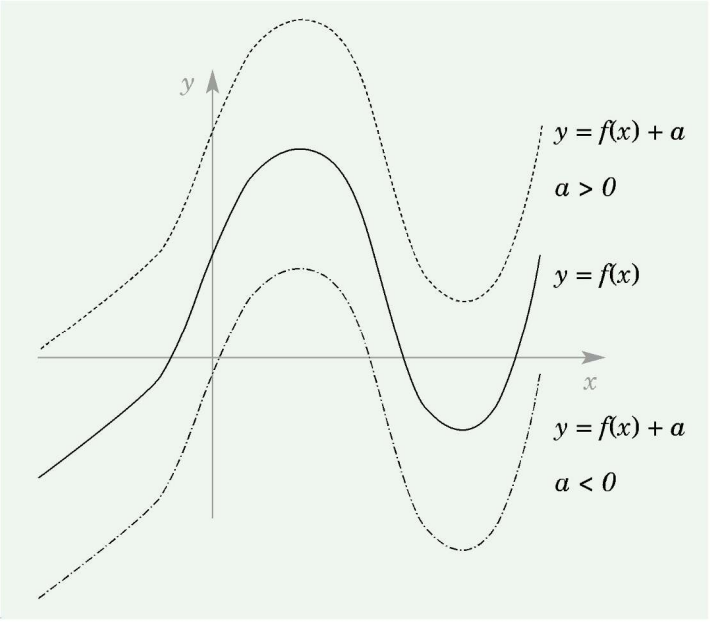
4. Podaj przykład funkcji, określonej wzorem, która w punkcie 2 przyjmuje wartość -1.

1.
a) w trzech,
b) w dwóch,
c) w jednym.
2. W trzech.
3.
Nieprawda.

Od wykresu do wykresu

Jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = f(x) + a$, gdzie a jest stałą?

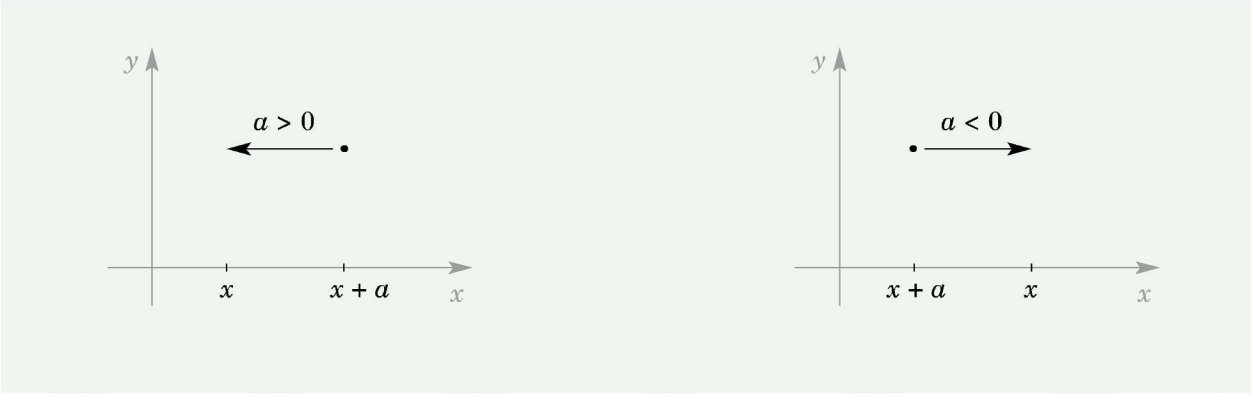
Wykres funkcji $y = f(x)$ jest zbiorem punktów postaci $(x, f(x))$, a wykres funkcji $y = f(x) + a$ jest zbiorem punktów $(x, f(x) + a)$. Wobec tego w każdym punkcie x trzeba zmienić wartość $f(x)$ na $f(x) + a$.



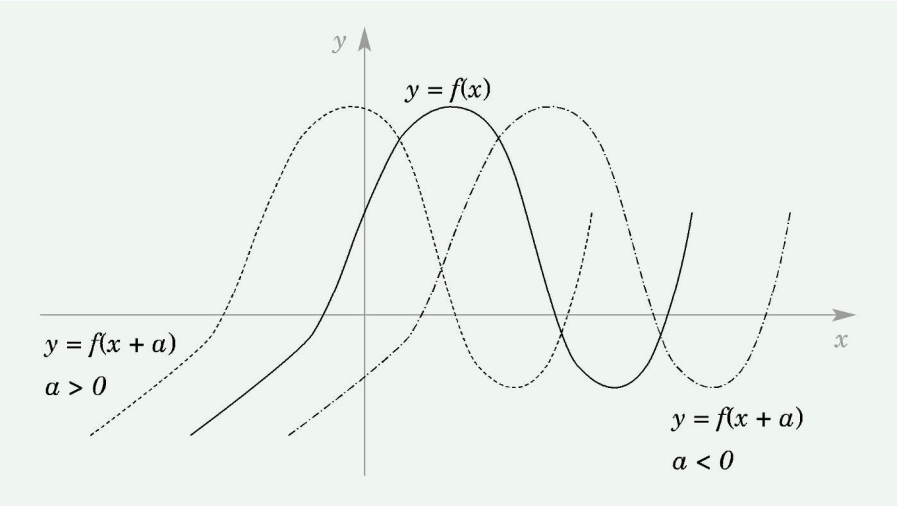
Zatem wykres funkcji przesunie się w górę lub w dół, zależnie od znaku a:

Jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = f(x + a)$, gdzie a jest stałą?

W każdym punkcie x trzeba zmienić wartość $f(x)$ na $f(x + a)$, czyli na wartość, którą funkcja $y = f(x)$ przyjmuje w punkcie różniącym się o a od punktu x:

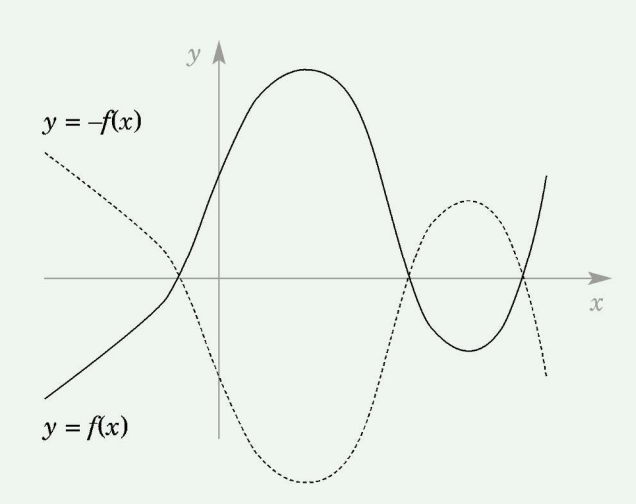


Oznacza to przesunięcie wykresu funkcji w lewo lub w prawo, zależnie od znaku a:



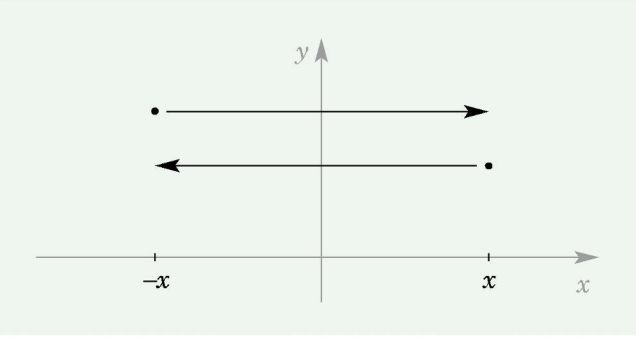
Jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = -f(x)$?

W każdym punkcie x trzeba zmienić wartość z $f(x)$ na $-f(x)$, co oznacza odbicie symetryczne wykresu względem osi x:

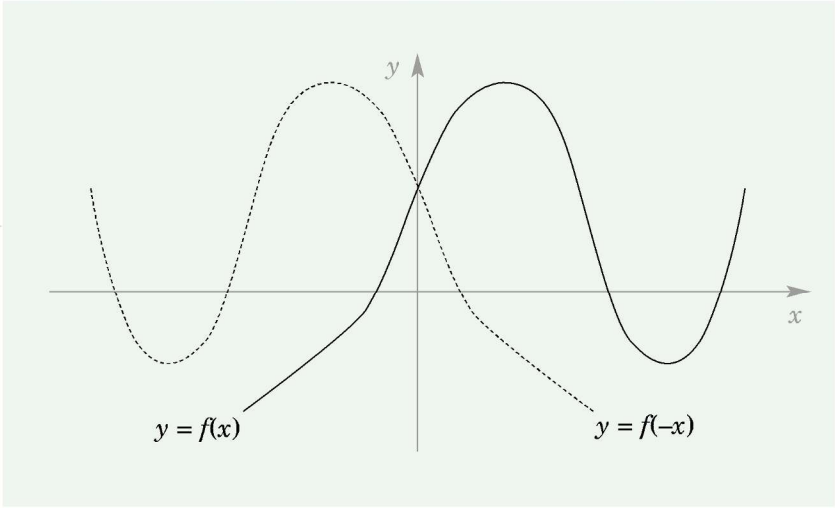


Jak z wykresu funkcji $y = f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y = f(-x)$?

Każdej liczbie x przypisujemy $f(-x)$, czyli wartość, która była przyjęta dla liczby przeciwnej:



Oznacza to, że wykres funkcji $y = f(x)$ trzeba odbić symetrycznie względem osi y:



Funkcja liniowa

Funkcja liniowa ma postać $f(x) = ax + b$, gdzie a i b są dowolnymi stałymi. Jak wiadomo, jej wykresem jest prosta o równaniu $y = ax + b$. Równanie prostej jest dokładnie omówione w rozdziale 5.

Jeżeli $a = 0$, to $f(x) = b$ dla każdego x i wykres funkcji jest prostą równoległą do osi x.

Przypomnijmy, że liczba a decyduje o kierunku prostej, proste $y = ax$ i $y = ax + b$ są równoległe.

Dla $a > 0$ prosta $y = ax$ przechodzi przez pierwszą i trzecią ćwiartkę, więc funkcja $f(x) = ax$ jest rosnąca. W konsekwencji funkcja $f(x) = ax + b$ jest rosnąca.

Dla $a < 0$ prosta $y = ax$ przechodzi przez drugą i czwartą ćwiartkę, więc funkcja $f(x) = ax$ jest malejąca. W konsekwencji funkcja $f(x) = ax + b$ jest malejąca.

Zauważmy, że dla $x \neq 0$ zależność $y = ax$ jest równoważna zależności $\frac{y}{x} = a$, która oznacza proporcjonalność prostą. Zatem wykresem proporcjonalności prostej jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych.

Z funkcją liniową wiążą się równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą.

Rozwiązaniem równania liniowego $ax + b = 0$ jest liczba, dla której funkcja $f(x) = ax + b$ przyjmuje wartość zero, a więc pierwsza współrzędna punktu, w którym wykres funkcji przecina oś x. Liczba ta nosi nazwę miejsca zerowego funkcji.

Rozwiązaniem nierówności $ax + b > 0$ (lub $ax + b < 0$) jest zbiór punktów, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (lub ujemne). Część wykresu odpowiadająca tym punktom przebiega powyżej (lub poniżej) osi x.

Na przykład rozwiązanie nierówności $-2x + 5 > 0$ można interpretować jako znalezienie tych punktów x, w których wartości funkcji $f(x) = -2x + 5$ są dodatnie. Funkcja ta przyjmuje wartość zero dla $x = \frac{5}{2}$, a ponieważ jest malejąca, to wartości większe od zera przyjmuje wcześniej, tzn. dla $x < \frac{5}{2}$. Jest to jeszcze jeden dowód na to, że likwidując minus przed nawiadomą, zmieniamy kierunek nierówności.

Sprawdź, czy potrafisz

1. W jakim punkcie wykres funkcji $y = 3x - 2$ przecina oś y?

2. Dla jakiej wartości a miejscem zerowym funkcji $f(x) = ax + 2$ jest liczba -3?

3. Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = (3 - m)x + 5$ jest rosnąca?

4. Wiadomo, że funkcja jest malejąca i przyjmuje wartość zero dla $x = -3$. Dla jakich x funkcja ta przyjmuje wartości ujemne?

1. W punkcie $(0, -2)$.
2. Dla $a = \frac{2}{3}$.
3. Dla $m < 3$.
4. Dla $x > -3$.

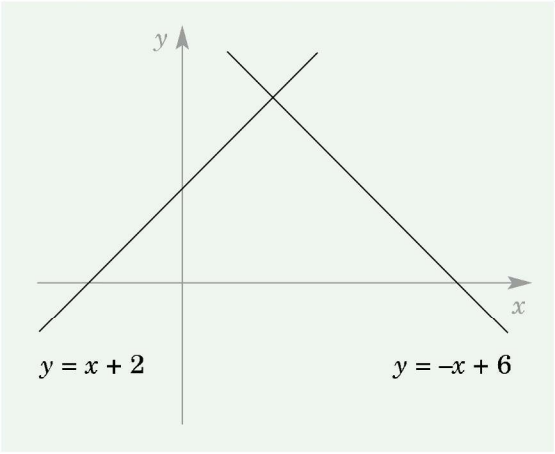
Sprawdź, czy potrafisz

1. Dla jakiego x funkcja $f(x) = 3x - 1$ przyjmuje wartość $-1\frac{1}{3}$? Dla jakich x przyjmuje wartości mniejsze niż $-1\frac{1}{3}$?

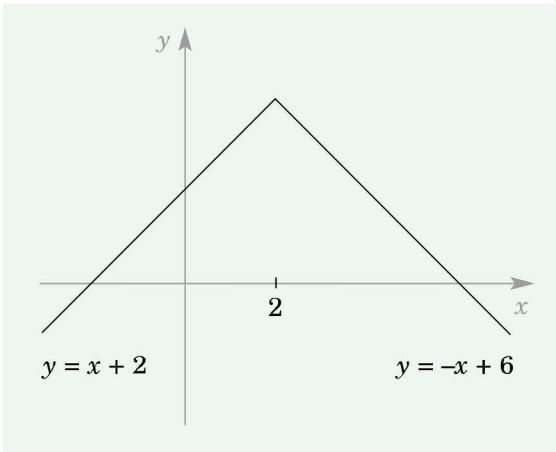
5. Wartość $-1\frac{1}{3}$ przyjmuje dla $x = -\frac{1}{9}$, wartości mniejsze przyjmuje dla $x < -\frac{1}{9}$.

Funkcje przedziałami liniowe

Rozważmy dwie proste jak na rysunku:



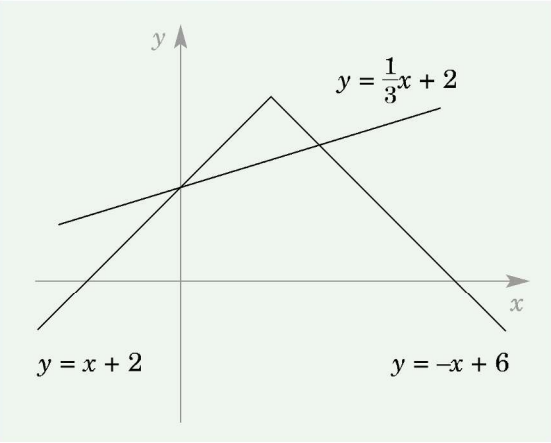
Proste te przecinają się dla $x = 2$. Utwórzmy wykres jak na rysunku:



Jest to wykres funkcji, określonej na całej prostej, która dla liczb x mniejszych od 2 przyjmuje wartości $x + 2$, a dla liczb x większych od 2 przyjmuje wartości $-x + 6$. W punkcie 2 wyrażenia $x + 2$ oraz $-x + 6$ mają taką samą wartość, więc można się posłużyć którymkolwiek z nich. W sposób symboliczny określenie funkcji zapisujemy tak:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \leqslant 2 \\ -x + 6 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Dorysujmy trzecią prostą jak na rysunku:

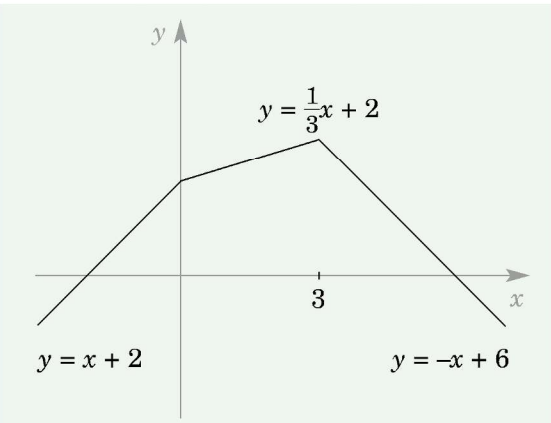


Trzecia prosta przecina dwie poprzednie odpowiednio w punktach $(0,2)$ i $(3,3)$.

Utwórzmy nową funkcję, określając ją wzorem

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{3}x + 2 & \text{dla } 0 < x \leqslant 3 \\ -x + 6 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$$

Oto wykres funkcji $y = g(x)$:



Sprawdź, czy potrafisz

1. Odczytaj z wykresu, dla jakich x funkcja $g(x)$ przyjmuje wartości ujemne.

2. Określ maksymalny zbiór argumentów, dla których funkcja $g(x)$ jest rosnąca.

3. Podaj największą wartość funkcji $g(x)$.

4. Znajdź miejsca zerowe funkcji $g(x)$.

5. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb x spełniających warunek:

a) $-1 \leqslant x < 2$, b) $0 < x < 4$, c) $x \leqslant 5$, d) $x > -2$.

1. Dla $x < -2$ i dla $x > 6$.
2. $(-\infty, 3\rangle$. 3. 3.
4. $x = -2 \mid x = 6$.
5. a) $\langle -1, 2)$,
b) $(0, 4)$,
c) $(-\infty, 5\rangle$,
d) $(-2, \infty)$.

Funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są przykładami funkcji, które nazywamy przedziałami liniowymi. Nazwa mówi sama za siebie.

Przypomnijmy przy okazji oznaczenia dotyczące przedziałów na prostej. Jeżeli $a < b$, to $\langle a, b\rangle$ oznacza przedział wraz z końcami[14], (a, b) oznacza przedział bez końców, natomiast $\langle a, b)$ i $(a, b\rangle$ to przedziały z jednym końcem, odpowiednio lewym lub prawym.

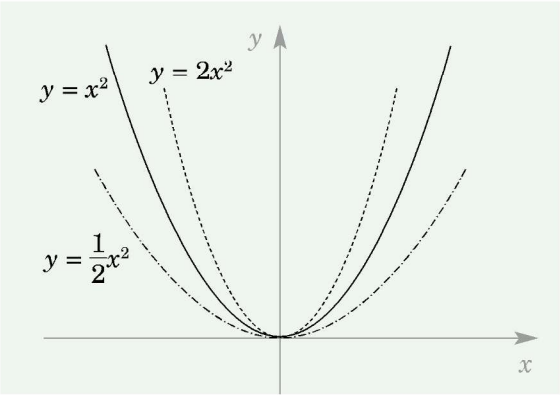
Do przedziałów zaliczamy też półproste: $\langle c, \infty)$, (c, ∞), $(-\infty, c)$, $(-\infty, -c\rangle$.

Kilka wykresów funkcji kwadratowej

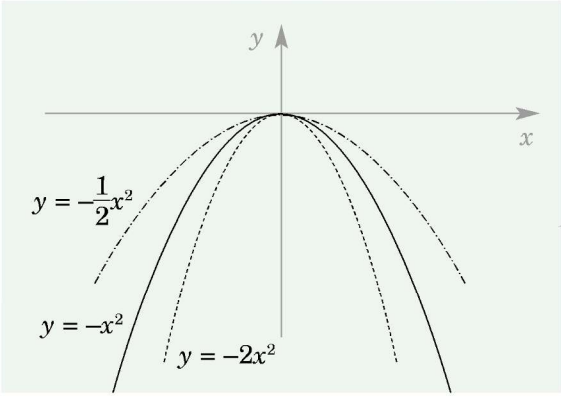
Jak wiadomo, funkcja kwadratowa ma postać $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$. Jej wykresem jest parabola. Znak współczynnika a decyduje o tym, czy ramiona paraboli są skierowane w górę $(a > 0)$ czy w dół $(a < 0)$. Parabola ma oś symetrii; jest nią prosta równoległa do osi y i przechodząca przez wierzchołek paraboli.

Zobaczmy na rysunkach kilka wykresów funkcji kwadratowej w prostych przypadkach, zaczynając od wykresu postaci $y = ax^2$.

Co mają wspólnego, a czym różnią się parabole $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$? Wszystkie przechodzą przez początek układu współrzędnych, są symetryczne względem osi y, a ich ramiona są skierowane do góry. Różnią się tylko tempem wznoszenia ramion:

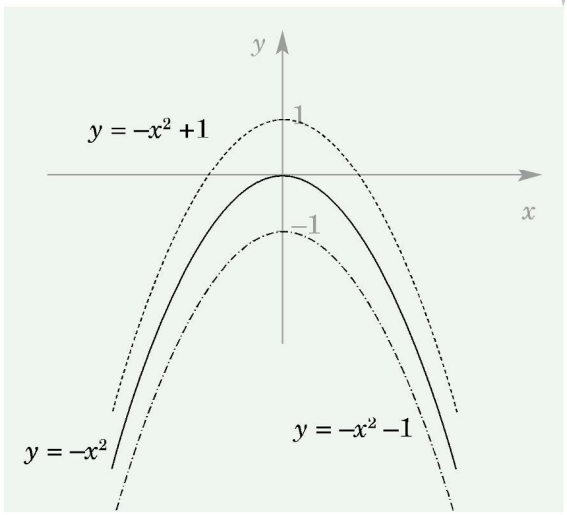


[14] Inne oznaczenie takiego przedziału to $[a, b]$.

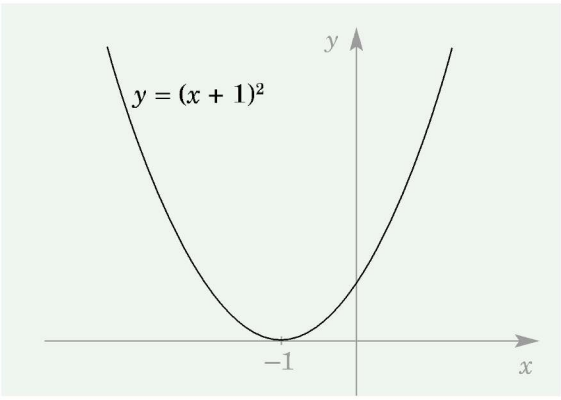


Zamiana współczynnika przy x^2 na liczbę przeciwną spowoduje odbicie wykresów względem osi x:

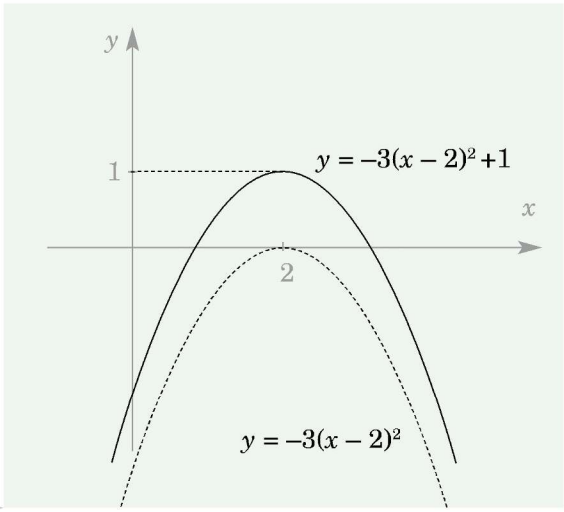
Parabole $y = ax^2 + 1$ i $y = ax^2 - 1$ powstają z paraboli $y = ax^2$ przez przesunięcie o 1 odpowiednio w górę lub w dół:



Parabola $y = (x + 1)^2$ jest wykresem funkcji przyjmującej wartość zero dla $x = -1$, a poza tym mającej tylko wartości dodatnie. Zatem punkt $(-1, 0)$ jest wierzchołkiem paraboli:



A jak narysować parabolę $y = -3(x - 2)^2 + 1$? Leży ona o 1 wyżej od paraboli $y = -3(x - 2)^2$, a ta ostatnia parabola przyjmuje wartości ujemne poza punktem $x = 2$ i wartość zero dla $x = 2$. Wykresy są więc takie:



Sprawdź, czy potrafisz

1. Narysuj wykres funkcji $f(x) = (x + 1)^2 - 1$. Jakim przedziałem jest zbiór wartości?

2. Dla jakiego x funkcja $f(x) = -2(x - 3)^2 + 1$ przyjmuje wartość największą? Jaka to jest wartość?

3. Dla jakiego x funkcja $f(x) = (1 - 3x)^2 - 4$ przyjmuje wartość najmniejszą? Jaka to wartość?

1. Zbiór wartości to $\langle -1, \infty)$.
2. Funkcja przyjmuje największą wartość dla $x = 3$ i jest to liczba 1.
3. Wartość najmniejsza jest przyjęta dla $x = \frac{1}{3}$ i jest równa -4.

Wyznaczanie wierzchołka paraboli

Jak widzieliśmy w poprzednim rozdziale, czasami wierzchołek paraboli można odczytać z jej równania, nie potrzeba wzorów.

Jest tak wtedy, kiedy równanie pozwala bezpośrednio wyznaczyć współrzędne najniższego (dla $a > 0$) lub najwyższego (dla $a < 0$) punktu paraboli.

Na przykład znajdując wierzchołek paraboli $y = -2(x + 3)^2 + 1$, korzystamy z tego, że jej ramiona są skierowane w dół, więc wierzchołek pokrywa się z punktem położonym najwyżej. Ponieważ $-2(x + 3)^2 \leqslant 0$, więc największa wartość wyrażenia $-2(x + 3)^2 + 1$ jest równa 1 i jest ona osiągnięta wtedy, kiedy $x + 3 = 0$, czyli $x = -3$. Zatem wierzchołkiem paraboli jest punkt $(-3, 1)$.

Zauważmy, że jeżeli parabola przecina oś x w dwóch punktach, to oś symetrii paraboli przechodzi przez środek odcinka łączącego te punkty; środek ten jest zatem pierwszą współrzędną wierzchołka.

Na przykład jeżeli parabola ma równanie $y = (x - 1)(x + 3)$, to przecina oś x w punktach 1 i -3. Środkiem odcinka o tych końcach jest punkt -1, więc taka jest pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli. Drugą współrzędną znajdziemy z równania paraboli, podstawiając $x = -1$. Otrzymamy $y = -4$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Z podanego równania odczytaj współrzędne wierzchołka paraboli:
a) $y = (2x - 1)^2$, b) $y = 1 - 2(x + 3)^2$.

2. Odczytaj z równania miejsca zerowe paraboli $y = (x - 2)(x + 6)$, napisz równanie osi symetrii paraboli i podaj współrzędne wierzchołka.

3. Z równania $y = 4x(2 - x)$ odczytaj miejsca zerowe oraz współrzędne wierzchołka paraboli. Jakie jest równanie osi symetrii tej paraboli?

1. a) $(\frac{1}{2}, 0)$, b) $(-3, 1)$.
2. Miejsca zerowe to 2 i -6, oś symetrii ma równanie $x = -2$, wierzchołkiem jest punkt $(-2, -16)$.
3. Miejsca zerowe to 0 i 2, wierzchołkiem jest punkt $(1, 4)$, a oś symetrii ma równanie $x = 1$.

W przypadku ogólnym, kiedy parabola ma równanie $y = ax^2 + bx + c$, znalezienie wierzchołka bez wzorów jest bardziej kłopotliwe. Można go znaleźć po przekształceniu równania do tzw. postaci kanonicznej. Na przykład:

$$2x^2 + 8x - 1 = 2(x^2 + 4x) - 1 =$$
$$= 2(x^2 + 4x + 4 - 4) - 1 =$$
$$= 2((x + 2)^2 - 4) - 1 = 2(x + 2)^2 - 9.$$

Z tej postaci widać, że wyrażenie przyjmuje najmniejszą wartość dla $x = -2$, więc taka jest pierwsza współrzędna wierzchołka. Drugą współrzędną wierzchołka znajdziemy z równania paraboli: jeżeli $x = -2$, to $y = -9$.

Przekształcenie takie bywa czasem dosyć żmudne.

Największa i najmniejsza wartość funkcji kwadratowej w przedziale

Zajmiemy się obliczaniem największej i najmniejszej wartości funkcji kwadratowej w danym przedziale. Jak wyznaczyć punkt przedziału, w którym funkcja przyjmuje wartość największą? W którym punkcie przedziału funkcja przyjmuje wartość najmniejszą?

W poszukiwaniu odpowiedzi na te pytania istotne będzie położenie wierzchołka wykresu funkcji względem danego przedziału.

> Zachęcam do szkicowania sobie sytuacji, które będziemy rozważać. Ułatwi to śledzenie rozumowania.

Jeżeli wierzchołek paraboli nie leży ani nad, ani pod rozważanym przedziałem, tzn. pierwsza współrzędna wierzchołka nie należy do przedziału, to w tym przedziale funkcja jest stale rosnąca lub stale malejąca. Wynika stąd, że wartość największa i wartość najmniejsza są przyjęte na końcach przedziału.

Jeżeli natomiast pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli należy do rozważanego przedziału, to trzeba znaleźć drugą współrzędną wierzchołka, bo to ona jest najmniejszą lub największą wartością funkcji – w zależności od tego, czy ramiona paraboli są skierowane w górę czy w dół.

Zobaczmy to na przykładach, w razie potrzeby pomagając sobie rysunkami. Nie chodzi tu o dokładny rysunek, ale o szkic, który pomoże zorientować się w przebiegu funkcji.

Znajdźmy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x(x - 4)$
w przedziale: a) $\langle 3, 6\rangle$, b) $\langle 1, 5\rangle$.

Miejsca zerowe funkcji to 0 i 4, środek odcinka je łączącego to 2, i taka jest pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli.

a) Ponieważ przedział $\langle 3, 6\rangle$ nie zawiera punktu 2, więc funkcja przyjmuje wartość najmniejszą i wartość największą na końcach przedziału. Obliczmy te wartości: $f(3) = -3$, $f(6) = 12$.

b) Ponieważ 2 należy do przedziału $\langle 1, 5\rangle$, a ramiona paraboli są skierowane do góry, więc najmniejsza wartość funkcji w tym przedziale (a nawet najmniejsza wartość funkcji na całej prostej) to $f(2)$, czyli -4.

Pozostaje znaleźć największą wartość funkcji w przedziale $\langle 1, 5\rangle$. Jest ona przyjęta na jednym końców. Można po prostu obliczyć $f(1)$ oraz $f(5)$ i wziąć większą z tych liczb.

Jeżeli jednak zauważymy, że oś symetrii paraboli leży bliżej lewego końca przedziału niż prawego, to wywnioskujemy bez liczenia, że wartość funkcji na prawym końcu przedziału jest większa. Zatem największa wartość funkcji w rozważanym przedziale to $f(5)$, czyli 5.

Znajdźmy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = (x + 1)(5 - x)$ w przedziale $\langle 2, 4\rangle$.

Miejsca zerowe funkcji to -1 i 5, środek odcinka je łączącego to 2 i taka jest pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli. Należy ona do przedziału $\langle 2, 4\rangle$. Ponieważ $(x + 1)(5 - x) = -x^2 + \ldots$, więc ramiona paraboli są kierowane w dół. Wynika stąd, że $f(2)$, czyli 9, jest największą wartością funkcji na całej prostej, a więc tym bardziej w przedziale $\langle 2, 4\rangle$. Najmniejszą wartością funkcji jest zatem $f(4)$, czyli 5.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 3(x - \frac{1}{2})(x + \frac{5}{2})$ w przedziale $\langle 0, 2\rangle$.

2. Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji $y = -(x - 2)^2 + 1$ w przedziałach: a) $\langle 0, 2\rangle$, b) $\langle 3, 4\rangle$.

1. Ponieważ pierwsza współrzędna wierzchołka jest równa -1, więc nie należy do przedziału $\langle 0, 2\rangle$. Wystarczy zatem obliczyć $f(0)$ i $f(2)$. Największą wartością funkcji jest $\frac{81}{4}$, a najmniejszą $-\frac{15}{4}$.

2. a) Największą wartością jest 1, a najmniejszą -3, b) największą wartością jest 0, a najmniejszą -3.

Rozwiązywanie nierówności kwadratowych

Przypomnijmy, jak rozwiązujemy nierówności $ax^2 + bx + c > 0$ i $ax^2 + bx + c < 0$.

Jeżeli parabola $y = ax^2 + bx + c$ nie przecina osi x, to w przypadku $a > 0$ jej wykres leży całkowicie nad osią x, więc $ax^2 + bx + c > 0$ dla każdego x, a w przypadku $a < 0$ wykres leży całkowicie pod osią x, więc $ax^2 + bx + c < 0$ dla każdego x.

Jeżeli parabola ma dokładnie jeden punkt wspólny z osią x, to poza tym punktem wyrażenie $ax^2 + bx + c$ jest stale dodatnie (w przypadku $a > 0$) lub stale ujemne (w przypadku $a < 0$).

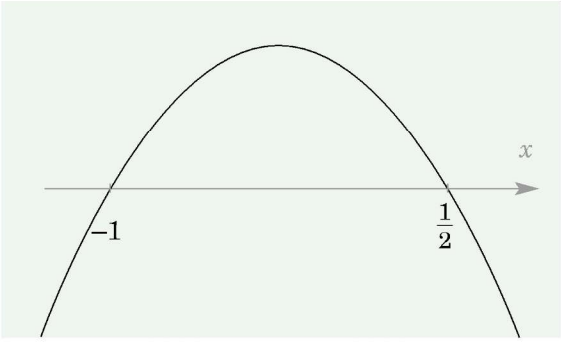
Jeżeli funkcja ma dwa miejsca zerowe, to część wykresu jest nad osią x, a część pod osią x. Wtedy znak wyrażenia $ax^2 + bx + c$ zależy od tego, czy x jest pomiędzy miejscami zerowymi czy na zewnątrz.

Zbadajmy, dla jakich x wyrażenie $-2x^2 - x + 1$ jest dodatnie,
a dla jakich x jest ujemne.

Zaczniemy od szukania pierwiastków równania $-2x^2 - x + 1 = 0$. Zamieńmy je na równanie równoważne i skorzystajmy ze wzorów:

$$2x^2 + x - 1 = 0,$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9,$$
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{4} = -1, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ ramiona paraboli $y = -2x^2 - x + 1$ są skierowane w dół



więc $-2x^2 - x + 1 > 0$
dla $-1 < x < \frac{1}{2}$,
a $-2x^2 - x + 1 < 0$
dla $x < -1$ oraz dla $x > \frac{1}{2}$.

Jeżeli rozwiązujemy słabą nierówność ($\leqslant$ lub $\geqslant$), to w rozwiązaniu pojawiają się również słabe nierówności.

Rozwiążmy nierówność $2 - (x + 1)^2 \geqslant 0$.

Zaczynamy od rozwiązania równania $2 - (x + 1)^2 = 0$, czyli $(x + 1)^2 = 2$. Otrzymujemy $x + 1 = \sqrt{2}$ lub $x + 1 = -\sqrt{2}$, skąd $x = \sqrt{2} - 1$ lub $x = -\sqrt{2} - 1$. Ponieważ ramiona paraboli $y = 2 - (x + 1)^2$ są skierowane w dół, więc $2 - (x + 1)^2 \geqslant 0$, jeżeli $-\sqrt{2} - 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} - 1$.

Rozwiązując nierówność typu $a(x - r)(x - s) < 0$ lub $a(x - r)(x - s) > 0$, gdzie r i s są konkretnymi liczbami, mamy łatwiejsze zadanie. Nie musimy szukać pierwiastków wielomianu kwadratowego, bo z równania $a(x - r)(x - s) = 0$ od razu odczytujemy, że pierwiastkami są r i s.

Rozwiążmy nierówność $3(x + 5)(3 - x) < 0$.

Parabola $y = 3(x + 5)(3 - x)$ ma ramiona skierowane w dół (bo $3(x + 5)(3 - x) = -3x^2 \ldots$), przecina oś x w punktach -5 oraz 3, więc nierówność $3(x + 5)(3 - x) < 0$ jest spełniona dla $x < -5$ oraz dla $x > 3$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Rozwiąż nierówność: a) $x(1 - x) < 0$, b) $2x^2 + x + 1 > 0$, c) $(x - 5)^2 + 1 < 0$.

2. Narysuj wykres funkcji $f(x) = (x + 1)^2 - 4$. Dla jakich x funkcja przyjmuje wartości dodatnie?

3. Dla jakich x jest spełniona nierówność $-3(x - \frac{1}{2})^2 - 4 < 0$?

Wskazówka: niczego nie obliczaj, uważnie popatrz!

1. a) $x < 0$ lub $x > 1$, b) x jest dowolną liczbą, c) żadna liczba x nie spełnia nierówności.
2. Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x > 1$ i dla $x < -3$.
3. Nierówność jest spełniona dla wszystkich x.

Jeszcze dwie funkcje

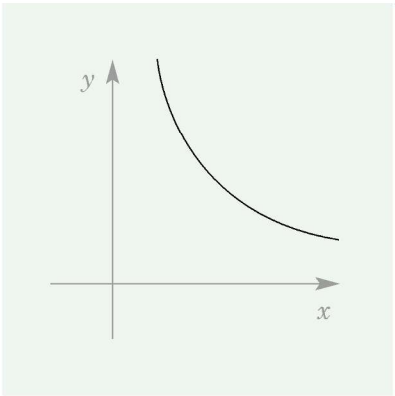
Znamy wykres proporcjonalności prostej, czyli funkcji $f(x) = ax$. A jaki jest wykres proporcjonalności odwrotnej?

Przypomnijmy, że zależność odwrotnie proporcjonalna oznacza, że iloczyn odpowiadających sobie wielkości jest stały, co można zapisać wzorem $x \cdot f(x) = a$, gdzie a jest stałą (różną od zera). Zatem $f(x) = \frac{a}{x}$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór wszystkich liczb różnych od zera, wartość funkcji dla $x = a$ jest równa 1, a wykresem jest krzywa zwana hiperbolą.

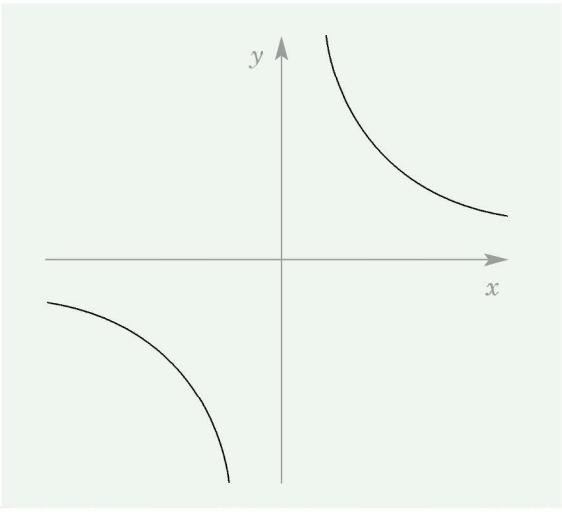
Narysujmy wykres dla $a = 2$. Zauważmy, że dla $x > 2$ wartości funkcji są tym mniejsze, im większe jest x, przy czym dla argumentów rosnących do nieskończoności wartości funkcji zbliżają się do zera: $f(100) = \frac{2}{100}$, $f(1000) = \frac{2}{1000}$ itd. Jednocześnie dla $0 < x < 2$ wartości funkcji rosną wraz z x malejącym do zera, i rosną nieograniczenie:

$$f(\tfrac{1}{100}) = 2 \cdot 100, \quad f(\tfrac{1}{1000}) = 2 \cdot 1000 \quad \text{itd.}$$

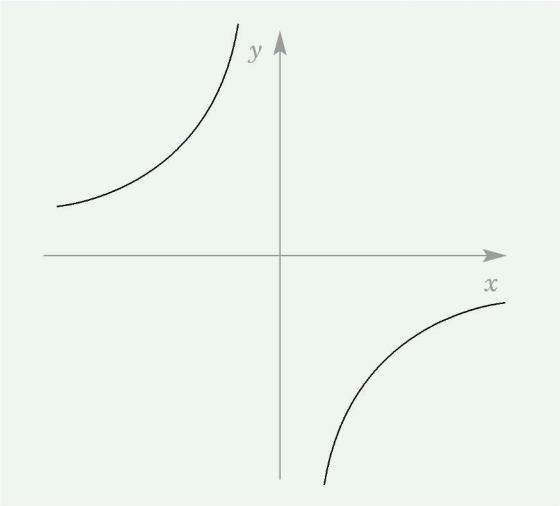
Ten kawałek wykresu, zwany gałęzią hiperboli, wygląda tak:



Korzystając z tego, że dla liczb przeciwnych wartości funkcji są liczbami przeciwnymi, tzn. $f(-x) = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x} = -f(x)$, można dorysować drugą gałąź hiperboli:



Zauważmy, że jeżeli we wzorze funkcji zamienić liczbę 2 na –2, to wartości zmienią znak. Hiperbola $y = \frac{-2}{x}$ jest położona tak:



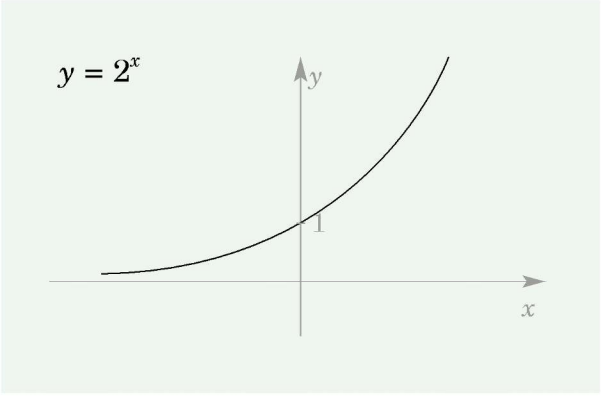
W podstawie programowej jest jeszcze wykres funkcji wykładniczej, tzn. funkcji postaci $f(x) = a^x$, gdzie a jest liczbą dodatnią różną od 1 (dla $a = 1$ jest to funkcja stała).

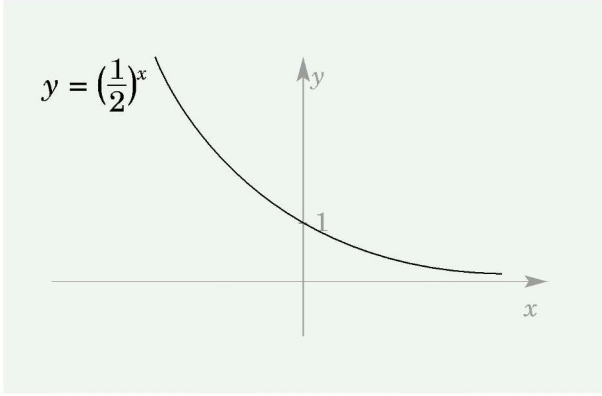
Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór wszystkich liczb, a wartości funkcji są dodatnie, co wynika z definicji potęgi. W punkcie zero funkcja przyjmuje wartość 1, ponieważ $a^0 = 1$.

Jeżeli $a > 1$, to wartości funkcji rosną wraz z x, bo im do wyższej potęgi ustaloną liczbę podnosimy, tym więcej otrzymujemy. Natomiast dla $a < 1$, czyli dla a będącego ułamkiem właściwym, wartości funkcji maleją wraz ze wzrostem x, bo podnosząc ułamek do coraz wyższych potęg, otrzymujemy coraz mniej.

Wynika stąd, że funkcja $f(x) = a^x$ jest rosnąca dla $a > 1$, a malejąca dla $0 < a < 1$.

Oto wykresy funkcji $y = 2^x$ i $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:





Zauważmy, że pierwszy z tych wykresów pnie się stromo w górę wraz ze wzrostem x. Wynika to stąd, że wartości funkcji szybko rosną:

$2^5 = 32, \quad 2^{10} = 32 \cdot 32, \quad 2^{15} = 32 \cdot 32 \cdot 32$ itd.

Podobnie jest dla każdej podstawy, jeżeli tylko jest większa od 1.

Przegląd zadań maturalnych

Dane są funkcje $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$. Narysuj wykres funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Ze wzoru $h(x) = (x - 2)(x + 4)$ odczytujemy, że wykresem jest parabola o ramionach skierowanych w górę, przecinająca oś x w punktach 2 i -4. Osią symetrii paraboli jest więc prosta $x = -1$. Zatem pierwszą współrzędną wierzchołka jest -1, a drugą $h(-1)$, czyli -9. Na podstawie tych informacji narysujesz wykres.

Znajdź miejsce zerowe funkcji $y = -\sqrt{2}x + 4$.

Wystarczy rozwiązać równanie $-\sqrt{2}x + 4 = 0$.

Otrzymamy: $x = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

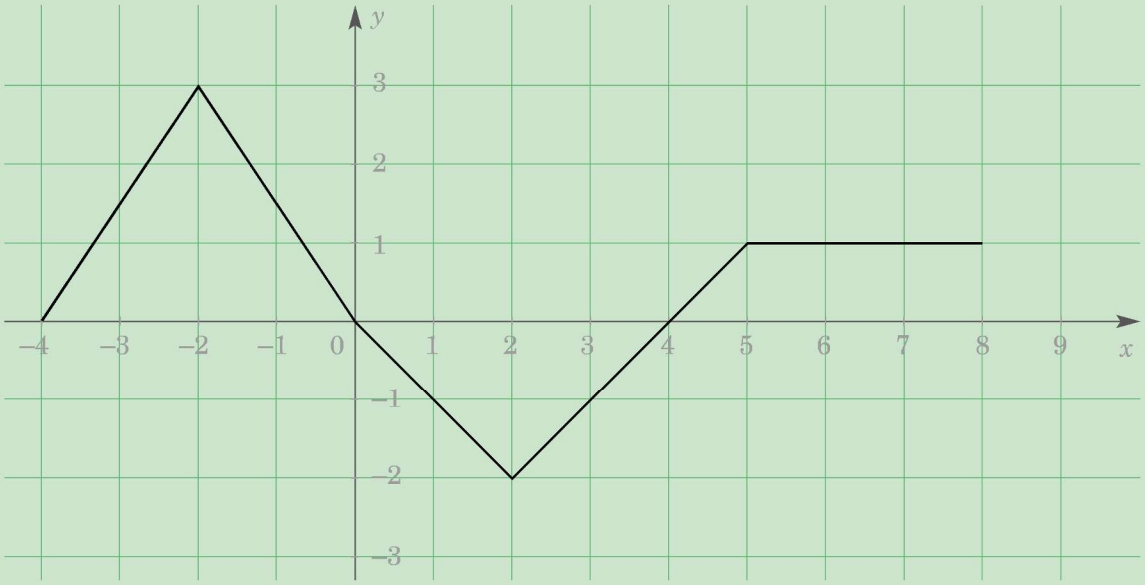
Dla jakiej wartości m funkcja $f(x) = (m - 1)x + 3$ jest stała?

Funkcja liniowa jest stała, kiedy współczynnik przy x jest równy zero. Zatem $m - 1 = 0$, skąd $m = 1$.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji f,

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.



a) Zbiór wartości to przedział $\langle -2, 3\rangle$.

b) Funkcja maleje w przedziale $\langle -2, 2\rangle$; jest to przedział maksymalny.

Znajdź równanie prostej, która jest osią symetrii paraboli $y = x^2 - 4x + 2010$.

Przekształcamy równanie paraboli do postaci kanonicznej:

$x^2 - 4x + 2010 = x^2 - 4x + 4 + 2006 = (x - 2)^2 + 2006.$

Ponieważ parabola ma ramiona skierowane w górę, więc wierzchołek pokrywa się z jej najniższym punktem. Wyrażenie $(x - 2)^2 + 2006$ przyjmuje najmniejszą wartość wtedy, kiedy $x - 2 = 0$, czyli $x = 2$.

Zatem oś symetrii ma równanie $x = 2$.

Jakie są współrzędne wierzchołka paraboli $f(x) = -3x^2 + 3$?

Parabola ta powstaje z paraboli $y = -3x^2$ przez przesunięcie o 3 w górę.

Ponieważ wierzchołkiem paraboli $y = -3x^2$ jest punkt $(0,0)$,
więc wierzchołek paraboli $y = -3x^2 + 3$ ma współrzędne 0 i 3.

Znajdź współrzędne wierzchołka paraboli $y = -3(x + 1)^2$.

Ponieważ ramiona paraboli są skierowane w dół, więc wierzchołek pokrywa się z jej najwyższym punktem.

Wyrażenie $-3(x + 1)^2$ jest co najwyżej równe zero i jest tak dla $x = -1$.
Zatem wierzchołek jest punktem $(-1,0)$.

Sprawdź, czy punkty $(-1,-4)$, $(-1,1)$, $(-1,-2)$, $(1,1)$, $(1,0)$ należą do wykresu funkcji $y = x^2 + x - 2$.

Trzeba sprawdzić, czy punkty spełniają równanie paraboli.
Podstawiając $x = -1$, otrzymamy $y = -2$, co oznacza, że punkt $(-1,-2)$ należy do wykresu funkcji. Podstawiając $x = 1$, otrzymamy $y = 0$, wobec czego punkt $(1,0)$ także należy do wykresu.

Pozostałe punkty nie należą do wykresu.

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dla } x < 2 \\ 1 & \text{dla } 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

x	-3	3	
$f(x)$			0

a) Uzupełnij tabelę:

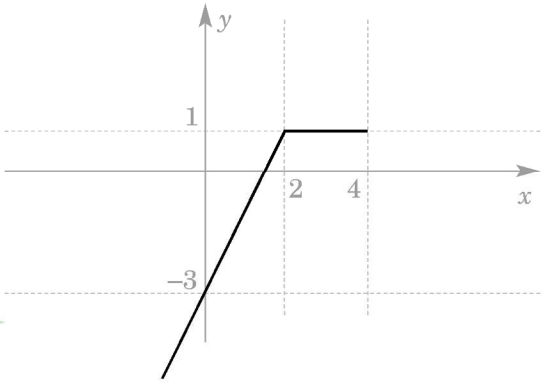
b) Narysuj wykres funkcji f.

c) Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $f(x) \geqslant -6$.

a) Ponieważ $-3 < 2$, więc $f(-3) = 2 \cdot (-3) - 3 = -9$, a ponieważ $3 > 2$, więc $f(3) = 1$. Te dwie wartości trzeba wpisać do drugiego wiersza tabeli. Trzeba jeszcze znaleźć punkt, w którym wartość funkcji jest równa zeru. Jest to punkt w pierwszym przedziale, bo w drugim wartość funkcji jest stale równa 1. Rozwiązujemy więc równanie $2x - 3 = 0$. Otrzymujemy $x = \frac{3}{2}$, co trzeba wpisać do pierwszego wiersza tabeli. Uzupełniona tabela wyglada zatem tak:

x	-3	3	$\frac{3}{2}$
$f(x)$	-9	1	0

b) Trzeba narysować prostą $y = 2x - 3$, ograniczając się do tej jej części, w której $x < 2$, i dołączyć do niej odcinek prostej $y = 1$. Znajdźmy dwa punkty pierwszej prostej, podstawiając za x liczby 0 oraz 2. Otrzymamy punkty $(0,-3)$ oraz $(2,1)$, które wyznaczają położenie prostej. Wykres funkcji f wygląda więc tak:



c) Rozwiązując równanie $f(x) = -6$, otrzymamy $2x - 3 = -6$, skąd $x = -\frac{3}{2}$. Z wykresu funkcji odczytujemy, że $f(x) \geqslant -6$ dla $x \geqslant -\frac{3}{2}$. Liczby całkowite spełniające ten warunek i należące do dziedziny funkcji to: $-1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto wzdłuż osi x o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi y o 8 jednostek w górę, otrzymując wykres funkcji g.

a) Rozwiąż nierówność $f(x) + 5 < 3x$.

b) Podaj zbiór wartości funkcji g.

c) Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = -2x^2 + bx + c$. Oblicz b oraz c.

a) Trzeba rozwiązać nierówność $-2x^2 + 5 < 3x$. Po przeniesieniu wszystkich wyrazów na prawą stronę nierówność przyjmie postać $2x^2 + 3x - 5 > 0$.

Poszukajmy pierwiastków występującego tu wielomianu:

$\Delta = 9 + 40 = 49, \quad x = \frac{-3-7}{4} = -\frac{5}{2}$ lub $x = \frac{-3+7}{4} = 1$.

Wykres wielomianu ma ramiona skierowane w górę i przecina oś x w punktach $-\frac{5}{2}$ oraz 1. Zatem nierówność $2x^2 + 3x - 5 > 0$ jest spełniona, jeżeli $x < -\frac{5}{2}$ lub $x > 1$.

b) Największą wartością funkcji $f(x)$ jest zero, pozostałe wartości są ujemne. Ponieważ przesnięcie wykresu wzdłuż osi x nie wpływa na zbiór wartości, a przesunięcie o 8 w górę zwiększa każdą wartość o 8, więc zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(-\infty, 8\rangle$.

c) Przesunięcie wykresu funkcji o 3 w prawo oznacza, że każda wartość nowej funkcji w punkcie x pokrywa się z wartością funkcji poprzedniej w punkcie $x - 3$. Zatem $-2x^2$ trzeba zamienić na $-2(x-3)^2$. Przesuwając o 8 w górę, zwiększamy wartości o 8.

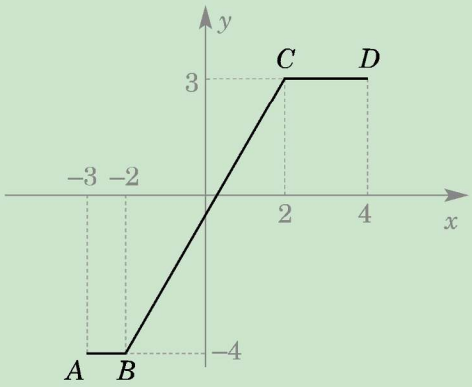
Zatem $g(x) = -2(x-3)^2 + 8$.

Z założenia wynika, że $-2(x-3)^2 + 8 = -2x^2 + bx + c$.

Po przekształceniu lewej strony otrzymamy równość

$-2x^2 + 12x - 10 = -2x^2 + bx + c$, skąd $b = 12$ oraz $c = -10$.

Na rysunku przedstawiono łamaną $ABCD$, która jest wykresem funkcji $y = f(x)$. Korzystając z tego wykresu:



a) zapisz w postaci przedziału zbiór wartości funkcji f,
b) podaj wartość funkcji f dla argumentu $1 - \sqrt{10}$,
c) napisz równanie prostej BC,
d) oblicz długość odcinka BC.

a) Jak widać z wykresu, zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -4, 3\rangle$.

b) Punkt $1 - \sqrt{10}$ należy do przedziału $\langle -3, -2\rangle$, a w tym przedziale wartość funkcji jest stale równa -4. Zatem $f(1 - \sqrt{10}) = -4$.

c) Z wykresu odczytujemy, że prosta BC przechodzi przez punkty $(-2,-4)$ oraz $(2,3)$. Zatem jeżeli ma ona równanie $y = ax + b$, to

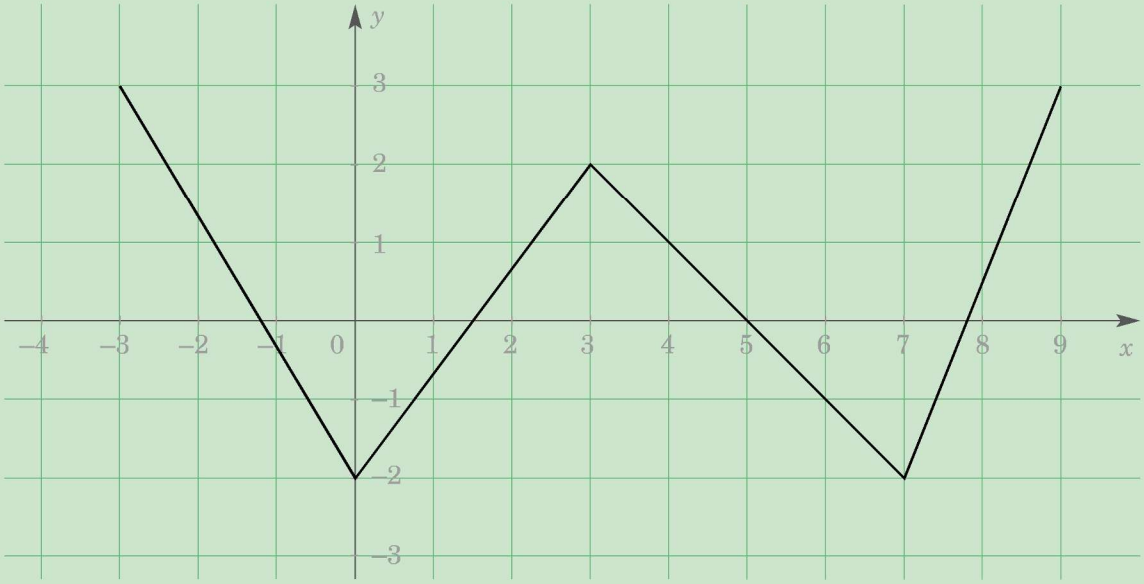
$$\begin{cases} -4 = -2a + b \\ 3 = 2a + b \end{cases}$$

Dodając równania stronami, otrzymujemy $-1 = 2b$, skąd $b = -\frac{1}{2}$. Podstawiając tę wartość do któregoś z równań, otrzymamy $a = \frac{7}{4}$. Stąd równanie prostej ma postać $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$.

d) Długość odcinka BC to odległość między punktami $(-2,-4)$ i $(2,3)$. Zatem:

$|BC| = \sqrt{(2+2)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{65}$.

Rysunek przedstawia wykres funkcji f:



Ile rozwiązań ma równanie: **a)** $f(x) = 2$, **b)** $f(x) = 1$, **c)** $f(x) = -2$, **d)** $f(x) = -1$?

Odczytujemy z wykresu, ile punktów wspólnych ma on z prostymi poziomymi leżącymi na odpowiednich wysokościach: **a)** 3, **b)** 4, **c)** 2, **d)** 4.

Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = (2x + 1)(x - 2)$ w przedziale $\langle -2, 2\rangle$.

Miejsca zerowe funkcji to $-\frac{1}{2}$ i 2. Punkt leżący w połowie między miejscami zerowymi to $\frac{-\frac{1}{2} + 2}{2}$, czyli $\frac{3}{4}$. I taka jest pierwsza współrzędna wierzchołka. Ponieważ należy ona do przedziału $\langle -2, 2\rangle$, a wierzchołek jest punktem najniższym wykresu, więc $f\left(\frac{3}{4}\right)$, czyli $-\frac{25}{8}$, jest najmniejszą wartością funkcji w rozważanym przedziale (nawet na całej prostej). Największą wartością funkcji w przedziale $\langle -2, 2\rangle$ jest większa z liczb $f(-2)$ i $f(2)$, czyli 12.

Funkcja h jest określona wzorem $h(x)=\frac{a}{x}$. Wiadomo, że do wykresu funkcji h należy punkt $(2,5)$.

a) Oblicz wartość współczynnika a.

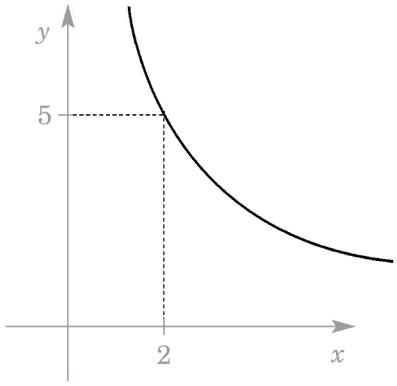
b) Sprawdź, czy liczba $h(\pi)-h(-\pi)$ jest dodatnia czy ujemna.

c) Naszkicuj wykres funkcji h i na jego podstawie znajdź rozwiązanie nierówności $h(x)>5$.

a) Zapisując warunek, że punkt $(2,5)$ należy do wykresu funkcji h, otrzymujemy $5=\frac{a}{2}$, skąd $a=10$.

b) Sprawdzamy: $h(\pi)-h(-\pi)=\frac{10}{\pi}-\frac{10}{-\pi}=$
$=\frac{10}{\pi}+\frac{10}{\pi}>0$.

c) Z wykresu widać, że nierówność $h(x)>5$ jest spełniona w przedziale $(0,2)$.



Parabola o wierzchołku $(1,-9)$ przechodzi przez punkt $(2,-8)$.
Znajdź współrzędne jeszcze jednego punktu tej paraboli.

Parabola ma tę własność, że wraz z każdym punktem zawiera punkt do niego symetryczny względem osi symetrii paraboli.
Osią symetrii danej paraboli jest prosta $x=1$, a punktem symetrycznym do punktu $(2,-8)$ względem tej prostej jest punkt $(0,-8)$, co łatwo zobaczyć, szkicując sytuację.
Zatem punkt $(0,-8)$ należy do paraboli.

Znajdź zbiór wartości funkcji $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Aby znaleźć zbiór wartości dowolnej funkcji kwadratowej, wystarczy wiedzieć, jak są skierowane ramiona i na jakiej wysokości położony jest wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji. Szukając wierzchołka, sprowadzimy wielomian do postaci kanonicznej:

$-x^2 + 6x - 5 = -(x^2 - 6x + 5) = -(x^2 - 6x + 9 - 9 + 5) =$

$= -((x - 3)^2 - 4) = -(x - 3)^2 + 4.$

Wielomian ten osiąga największą wartość wtedy, kiedy $x - 3 = 0$, czyli dla $x = 3$. Wartość ta jest równa 4. Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, 4\rangle$.

Rozwiąż nierówność: **a)** $3x^2 - 10x + 3 \leqslant 0$, **b)** $-3x^2 + 3x + 36 \leqslant 0$.

a) Szukamy pierwiastków równania $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

$\Delta = 100 - 36 = 64, \quad x = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}$ lub $x = \frac{10 + 8}{6} = 3.$

Parabola $y = 3x^2 - 10x + 3$ ma ramiona skierowane do góry i przecina oś x w punktach $\frac{1}{3}$ i 3. Zatem nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leqslant 0$ jest spełniona w przedziale $\langle\frac{1}{3}, 3\rangle$.

b) Rozwiążemy nierówność równoważną, którą otrzymamy, dzieląc obie strony przez 3 i przechodząc po obu stronach do liczb przeciwnych (inaczej: dzieląc obie strony przez -3), tzn. rozwiążemy nierówność $x^2 - x - 12 \geqslant 0$.

Znajdujemy pierwiastki wielomianu występującego po lewej stronie nierówności:

$\Delta = 1 + 4 \cdot 12 = 49, \quad \sqrt{\Delta} = 7, \quad x = \frac{1 - 7}{2} = -3$ lub $x = \frac{1 + 7}{2} = 4.$

Ponieważ parabola $y = x^2 - x - 12$ ma ramiona skierowane w górę, więc nierówność jest spełniona w przedziałach $(-\infty, -3\rangle$ oraz $\langle 4, \infty)$.

Rozwiąż nierówność: **a)** $(x-2)(x+3) \geqslant 0$, **b)** $(x-1)(x+3) < 0$.

a) Parabola $y = (x-2)(x+3)$ ma ramiona skierowane do góry i przecina oś x w punktach -3 i 2. Zatem nierówność $(x-2)(x+3) \geqslant 0$ jest spełniona w przedziałach $(-\infty, -3\rangle$ oraz $\langle 2, \infty)$.

b) Parabola $y = (x-1)(x+3)$ ma ramiona skierowane do góry i przecina oś x w punktach -3 i 1. Zatem nierówność $(x-1)(x+3) < 0$ jest spełniona w przedziale $(-3, 1)$.

Znajdź liczby spełniające nierówność $3(x-1)(x-5) \leqslant 0$ i większe od 1.

Parabola $y = 3(x-1)(x-5)$ ma ramiona skierowane do góry i przecina oś x w punktach 1 i 5. Zatem nierówność $3(x-1)(x-5) \leqslant 0$ jest spełniona w przedziale $\langle 1, 5\rangle$.
Jeżeli bierzemy pod uwagę tylko te liczby, które są większe od 1, to otrzymujemy przedział $(1, 5\rangle$.

Narysuj wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x - 6$.

Wiadomo, że wykresem jest linia prosta. Aby ją narysować, wystarczy znaleźć dwa punkty na niej leżące. Podstawiając $x = 0$, otrzymamy $y = -6$, a podstawiając $x = 2$, otrzymamy $y = -5$. Zatem prosta przechodzi przez punkty $(0,-6)$ i $(2,-5)$.

Sklep sprowadza z hurtowni kurtki, płacąc po 100 zł za sztukę, i sprzedaje średnio 40 sztuk miesięcznie po 160 zł. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny sprzedaży kurtki o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 sztukę. Jaką cenę kurtki powinien ustalić sprzedawca, aby jego miesięczny zysk był największy?

Obecny zysk ze sprzedaży jednej kurtki wynosi 60 zł. Jeżeli sprzedawca obniży cenę kurtki o x złotówek, to jego zysk ze sprzedaży jednej kurtki wyniesie $60 - x$ zł. Wtedy będzie sprzedawał $40 + x$ sztuk, więc całkowity zysk wyniesie $(60 - x)(40 + x)$.

Trzeba znaleźć największą wartość tego wyrażenia. Ponieważ parabola $y = (60 - x)(40 + x)$ przecina oś x w punktach -40 i 60, więc pierwsza współrzędna wierzchołka jest równa 10, bo taki jest środek odcinka $\langle -40, 60\rangle$. Ponieważ ramiona paraboli są skierowane w dół, więc wierzchołek jest punktem najwyższym, skąd wynika, że wartość iloczynu $(60 - x)(40 + x)$ jest największa dla $x = 10$.

Oznacza to, że cena kurtki powinna być o 10 zł niższa, czyli powinna wynieść 150 zł.

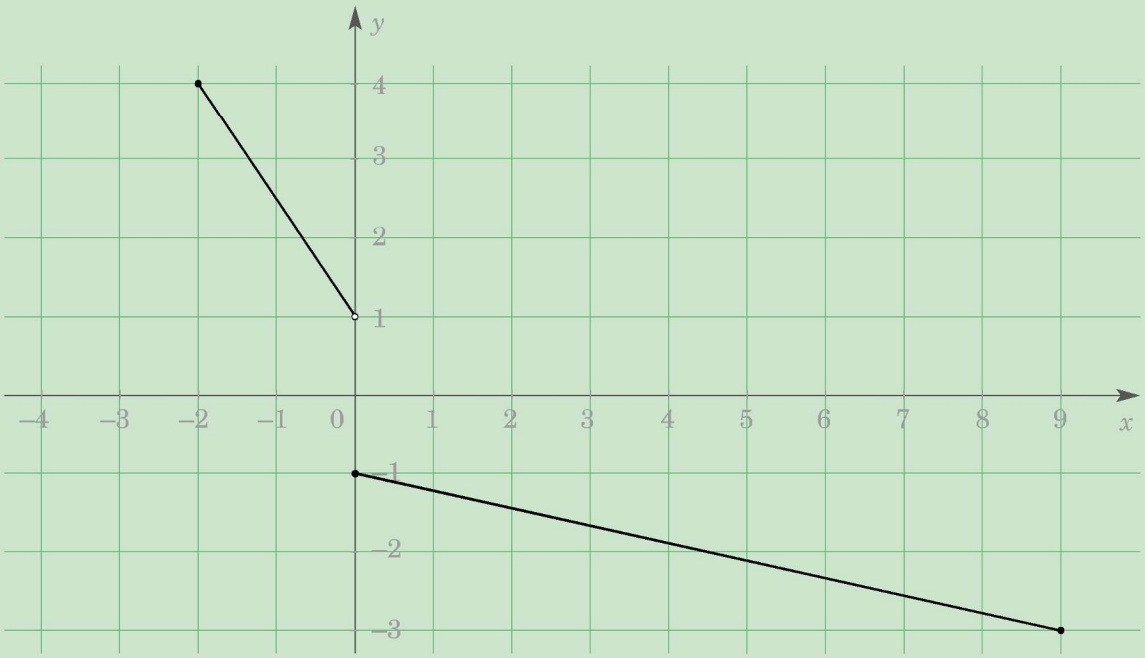
Funkcja jest określona wzorem $f(x) = ax + 6$, gdzie $a > 0$. Który z warunków:
a) $f(1) > 1$, **b)** $f(2) = 2$, **c)** $f(3) < 3$, **d)** $f(4) = 4$
jest spełniony?

Z określenia funkcji f wynika, że dla $x \geqslant 0$ przyjmuje wartość co najmniej 6.
Zatem tylko warunek **a)** jest spełniony.

Oblicz sumę kwadratów pierwiastków równania $4(x+2)(x-6)^2=0$.

Liczby spełniające równanie to -2 oraz 6, więc suma ich kwadratów to $(-2)^2+6^2$, czyli 40.

Podaj zbiór wartości funkcji przedstawionej na rysunku:



Zbiór wartości funkcji jest sumą przedziałów $\langle -3,-1\rangle$ oraz $(1,4\rangle$.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{2x-b}{x-9}$. Wiadomo, że $f(4)=-1$. Oblicz b.

Ponieważ $f(4)=\frac{2\cdot 4-b}{4-9}=\frac{8-b}{-5}$, więc $\frac{8-b}{-5}=-1$, skąd $b=3$.

7. Bryły

Rozwiązując zadania dotyczące brył,

badamy odpowiednie figury płaskie.

Cała sztuka polega na tym, aby problem przestrzenny

przedstawić na płaszczyźnie.

Graniastosłupy

Jak wiadomo, w graniastosłupie można wyróżnić podstawę. Jest nią dowolna z dwóch ścian przystających i równoległych. Podstawa może być dowolnym wielokątem, a wszystkie pozostałe ściany są prostokątami.

Szczególnym rodzajem graniastosłupa jest prostopadłościan, a szczególnym rodzajem prostopadłościanu jest sześcian.

Przypomnijmy, że objętość graniastosłupa = pole podstawy razy wysokość.

Wzór ten jest jasny, jeżeli pomyśleć o wypełnianiu prostopadłościanu jednostkowymi sześcianami. Układamy warstwami, zaczynając od podstawy. W jednej warstwie jest tyle sześcianów jednostkowych, ile wynosi iloczyn krawędzi podstawy, czyli pole podstawy, a o liczbie warstw decyduje wysokość graniastosłupa.

Pole powierzchni graniastosłupa jest sumą pól wszystkich ścian.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz objętość graniastosłupa, którego podstawą jest romb o przekątnych 4 i 6, a wysokość jest równa 10.

2. Jak zmieni się objętość prostopadłościanu, jeżeli każdą jego krawędź zmniejszymy o połowę?

3. Ile wynosi krawędź sześcianu, którego objętość jest równa: a) 64, b) 16?

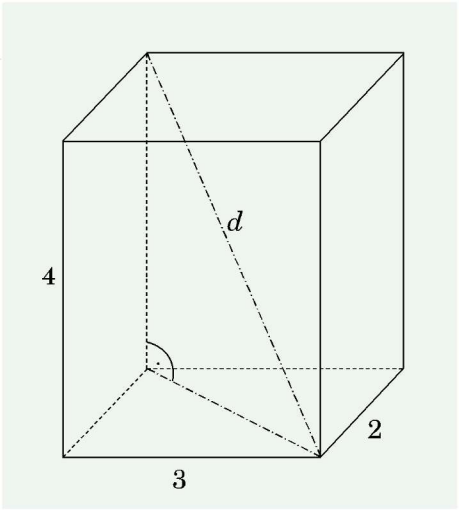
4. Ile wynosi krawędź sześcianu, którego pole powierzchni jest równe 12?

1. 120.
2. Będzie 8 razy mniejsza.
3. a) 4, b) $2\sqrt[3]{2}$.
4. $\sqrt{2}$.

W niektórych zadaniach mowa jest o przekątnej prostopadłościanu. Przypomnijmy, że przekątną prostopadłościanu nazywamy odcinek łączący dwa jego wierzchołki, które nie należą do tej samej ściany.

Prostopadłościan ma krawędzie 2, 3 i 4. Jak znaleźć długość jego przekątnej?

W tego typu zadaniach ważny jest rysunek:



Jak widać, przekątna prostopadłościanu jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna ma długość 4, a druga przyprostokątna, jako przekątna prostokąta o bokach 2 i 3, ma długość $\sqrt{13}$. Zatem: $d = \sqrt{4^2 + 13} = \sqrt{29}$.

Postępowanie to można uogólnić na prostopadłościan o krawędziach a, b, c. Ponieważ przekątna ściany o bokach a i b jest równa $\sqrt{a^2 + b^2}$, więc $d = \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. W przypadku sześcianu $a = b = c$, skąd $d = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Dwie krawędzie prostopadłościanu są równe 3 i 4, a przekątna prostopadłościanu ma długość 10. Znajdź trzecią krawędź prostopadłościanu.

2. Oblicz objętość sześcianu, którego przekątna ma długość 3.

1. $5\sqrt{3}$. 2. $(\sqrt{3})^3$, czyli $3\sqrt{3}$.

Ostrosłupy

Przypomnijmy, że objętość ostrosłupa jest 3 razy mniejsza od objętości graniastosłupa o takiej samej podstawie i wysokości.

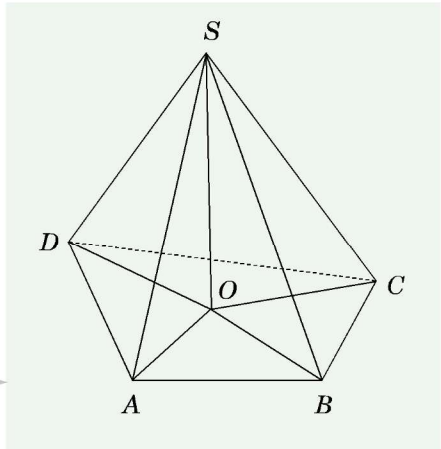
Sprawdź, czy potrafisz

1. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Pole powierzchni ostrosłupa jest równe 48, a pole powierzchni bocznej 30. Oblicz długość boku podstawy.

2. Jak zmieni się objętość ostrosłupa o podstawie prostokąta, jeżeli – nie zmieniając jego wysokości – zwiększymy dwukrotnie boki podstawy?

1. $3\sqrt{2}$.
2. Zwiększy się
4 razy.

Zajmijmy się teraz położeniem punktu, w którym wysokość ostrosłupa przecina podstawę. Jest to tzw. spodek wysokości. Rozważmy trójkąty, których wspólnym bokiem jest wysokość ostrosłupa, a pozostałe dwa boki to krawędź ostrosłupa i jej rzut na podstawę, czyli odcinek łączący spodek wysokości z odpowiednim wierzchołkiem podstawy.



Trójkątów jest tyle, ile wierzchołków ma podstawa. Na rysunku są to trójkąty SOA, SOB, SOC i SOD:

Są to trójkąty prostokątne mające jeden bok wspólny (SO). Do ich przystawania wystarczy więc równość jednego z dwóch pozostałych boków[15]. Stąd wynika ważna własność:

[15] Trzeci bok, na mocy twierzenia Pitagorasa, jest jednoznacznie wyznaczony.

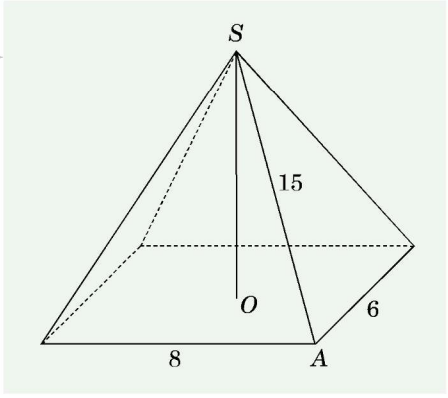
Jeżeli krawędzie wychodzące z dwóch wierzchołków podstawy są równe, to spodek wysokości leży w równej odległości od tych wierzchołków.

W szczególności jeżeli wszystkie krawędzie ostrosłupa są równe, to spodek wysokości jest równooddalony od wszystkich wierzchołków podstawy, czyli jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

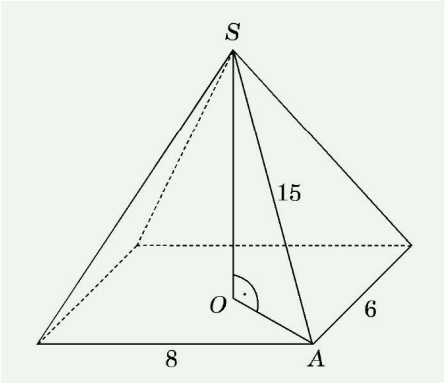
Zatem jeżeli podstawą takiego ostrosłupa jest prostokąt, to spodek wysokości pokrywa się z punktem przecięcia przekątnych prostokąta, a jeżeli podstawą jest trójkąt równoboczny, to spodkiem wysokości jest punkt przecięcia wysokości trójkąta.

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach 6 i 8, a każda krawędź boczna jest równa 15. Oblicz wysokość ostrosłupa.

Przedstawmy sytuację na rysunku:



Znajdźmy trójkąt, z którego można obliczyć wysokość – jest to trójkąt SOA:



Punkt O, jako środek okręgu opisanego na prostokącie, jest punktem wspólnym przekątnych. Stąd wynika, że odcinek OA jest połową przekątnej prostokąta: $|OA| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2} = 5$.

Wysokość obliczymy, stosując twierdzenie Pitagorasa: $|OS| = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 100} = 10\sqrt{2}$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa, którego podstawa jest kwadratem o boku 6, a wszystkie krawędzie boczne są równe 5.

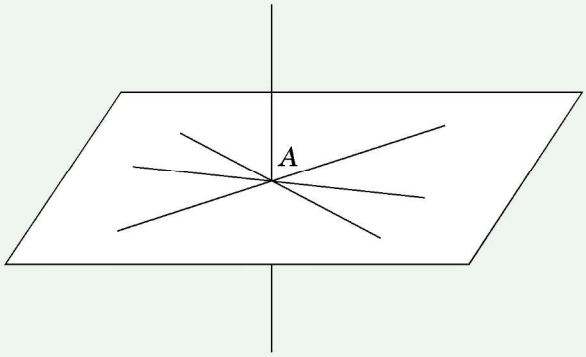
2. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku $2\sqrt{3}$, a krawędzie boczne ostrosłupa są równe. Oblicz odległość spodka wysokości ostrosłupa od wierzchołków podstawy.

1. 84.
2. 2.

Kąt między prostą i płaszczyzną

Prostą przecinającą płaszczyznę w punkcie A nazywamy prostopadłą do płaszczyzny, jeżeli jest ona prostopadła do każdej prostej przechodzącej przez punkt A[16]:

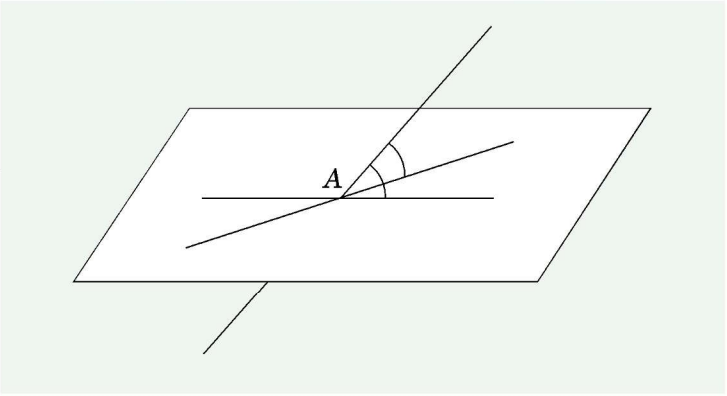
Na przykład wysokość każdej bryły, w której można wyróżnić podstawę, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.



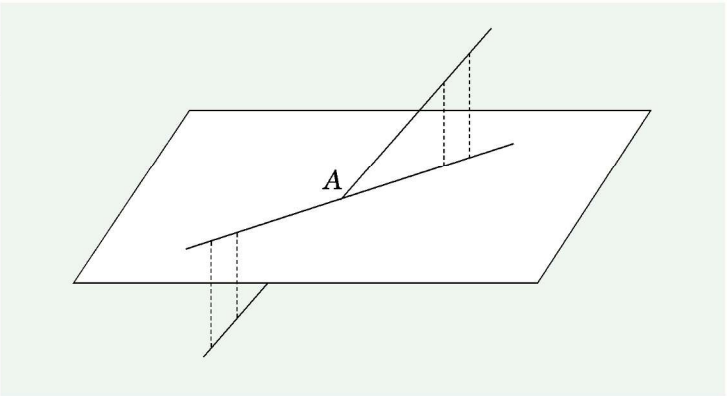
Jeżeli prosta nie jest prostopadła do płaszczyzny, to tworzy

[16] Można dowieść, że jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch takich prostych, to jest prostopadła do wszystkich.

różne kąty z różnymi prostymi leżącymi na płaszczyźnie i przechodzącymi przez punkt A:

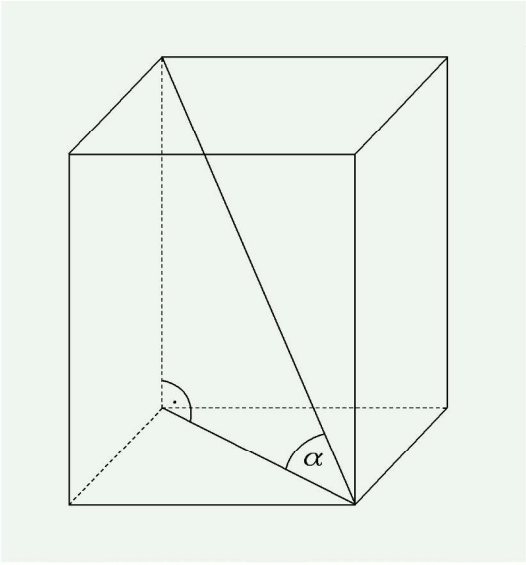


Przez kąt między prostą i płaszczyzną rozumiemy najmniejszy z tych kątów. Jest to kąt, jaki tworzy prosta ze swoim rzutem prostopadłym na płaszczyznę:



Zastępując płaszczyznę wielokątem, a prostą odcinkiem, będziemy rozważali kąty, jakie ze ścianami graniastosłupa lub ostrosłupa tworzą różne odcinki zawarte w tych bryłach. Kąty te są tworzone przez dany odcinek i jego rzut prostopadły na daną ścianę.

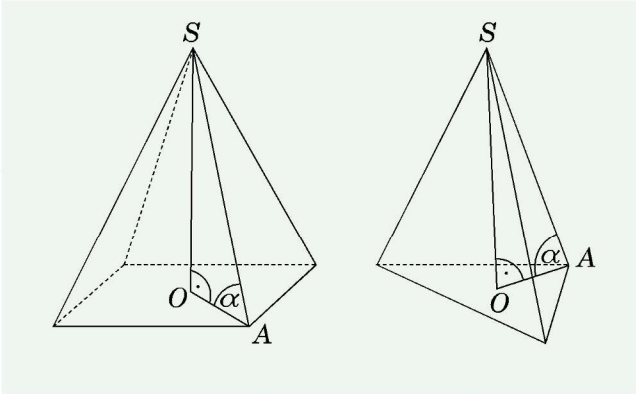
Na przykład kąt między przekątną prostopadłościanu i jego podstawą jest kątem, jaki tworzy ta przekątna z przekątną podstawy:



Na rysunku widzimy trójkąt prostokątny z kątem α. Jeżeli dany jest jeden z boków tego trójkąta oraz kąt, to możemy obliczyć pozostałe boki trójkąta, korzystając z funkcji trygonometrycznych.

W przypadku, kiedy kąt α jest równy 30, 45 lub 60 stopni, funkcje trygonometryczne nie są potrzebne; wystarczy twierdzenie Pitagorasa.

Wyznaczając kąt między krawędzią ostrosłupa i jego podstawą, a więc rzutując krawędź na podstawę, posłużymy się wysokością ostrosłupa:



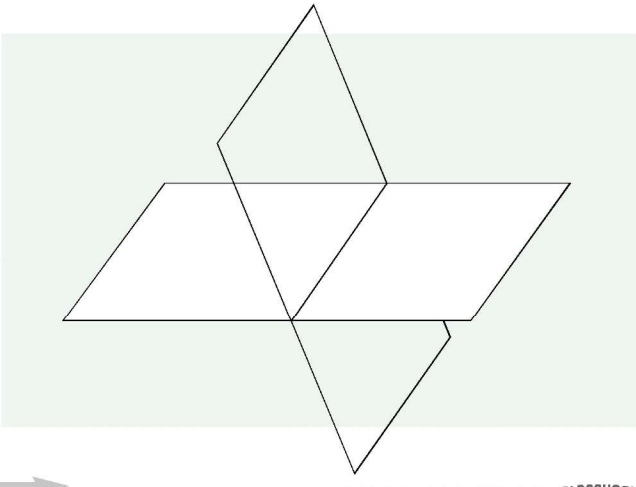
Pokazane na rysunkach trójkąty SOA są prostokątne. Zatem znając jeden bok trójkąta i kąt, obliczymy pozostałe boki.

Jak wiemy, w ostrosłupie o równych krawędziach punkt O jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. Jeżeli więc podstawą takiego ostrosłupa jest prostokąt, to O jest punktem przecięcia jego przekątnych, a jeżeli podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, to punkt O jest punktem wspólnym wysokości tego trójkąta. Zatem w pierwszym przypadku odcinek OA jest równy połowie przekątnej prostokąta, w drugim przypadku odcinek OA jest równy $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego.

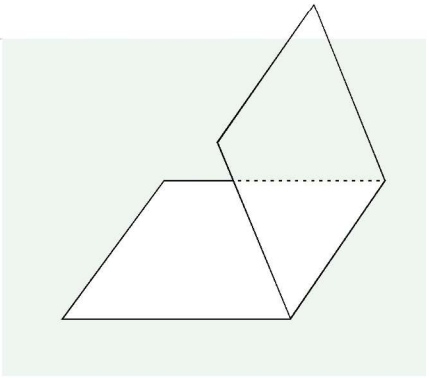
Na przykład jeżeli podstawą jest prostokąt o bokach 6 i 8, to przekątna ma długość $\sqrt{6^2 + 8^2}$, czyli 10, skąd $|OA| = 5$. Jeżeli natomiast podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o wysokości 3, to $|OA| = 2$.

Kąt między płaszczyznami

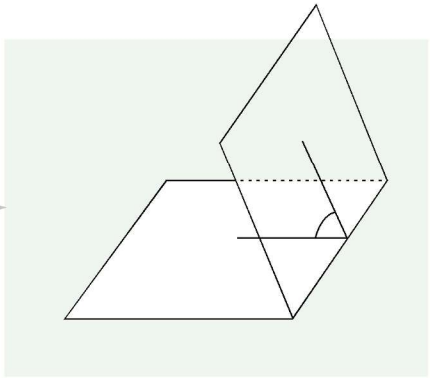
Na płaszczyźnie dwie przecinające się proste tworzą ze sobą cztery kąty, parami równe. Podobnie jest z płaszczyznami w przestrzeni:



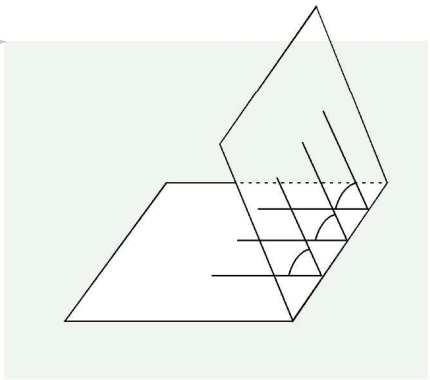
Każdy kąt jest wyznaczony przez dwie półpłaszczyzny:



Jak wiemy, taki kąt mierzy się kątem miedzy półrostymi leżącymi na danych płaszczyznach, wychodzącymi z ich wspólnej krawędzi i do tej krawędzi prostopadłymi:

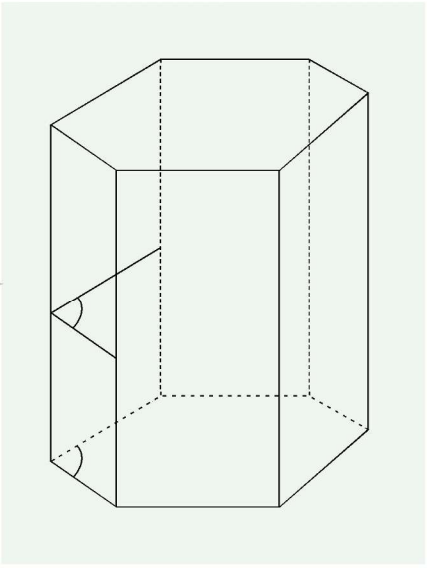


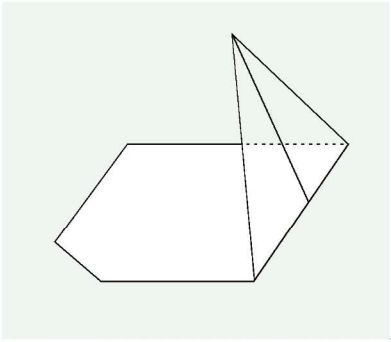
Miara kąta nie zależy od tego, który punkt wspólnej krawędzi półpłaszczyzn wybierzemy za wierzchołek:



Zastępując obie półpłaszczyzny dowolnymi wielokątami o wspólnym boku, będziemy rozważali kąty miedzy ścianami w granastosłupach i ostrosłupach. Kąt między ścianami bryły jest zatem wyznaczony przez dowolne dwa odcinki zawarte w tych ścianach i prostopadłe do ich wspólnej krawędzi.

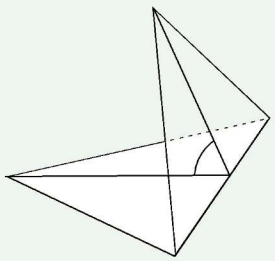
W graniastosłupie prostym ściany boczne są prostopadłe do podstawy, a kąt między ścianami bocznymi jest taki sam, jak kąt między odpowiednimi bokami podstawy:



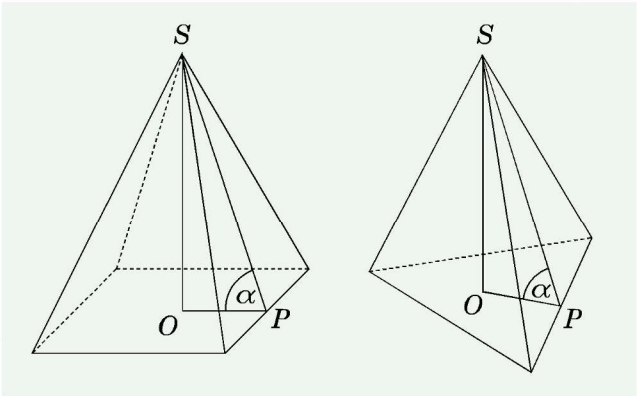


Jeżeli jedną ze ścian kąta jest trójkąt, to jednym ramieniem kąta może być wysokość tego trójkąta opuszczona na wspólną krawędź:

Jeżeli obie ściany są trójkątami i ich wysokości opuszczone na wspólną krawędź mają punkt wspólny, to ramionami kąta mogą być właśnie te wysokości:

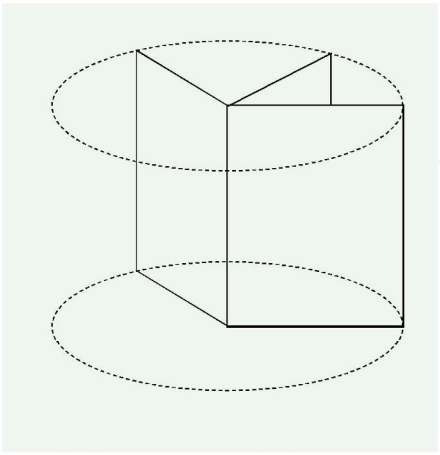


Tak będziemy wybierać ramiona kąta miedzy ścianami w ostrosłupach. Na przykład jeżeli krawędzie ostrosłupa są równe, a podstawa jest kwadratem lub trójkątem równobocznym, to jednym ramieniem kąta między ścianą boczną i podstawą jest wysokość ściany bocznej, a drugim – odpowiednio – połowa boku kwadratu lub $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego:



Pokazane na rysunkach trójkąty SOP są prostokątne. Zatem mając jeden z jego boków i kąt α, obliczymy pozostałe boki. W ogólnym przypadku zastosujemy funkcje trygonometryczne, a w przypadku, kiedy α jest kątem „ekierkowym", wystarczy twierdzenie Pitagorasa.

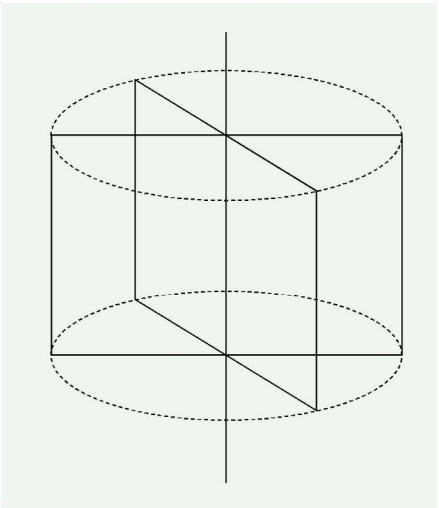
Walec i kula



Jak wiemy, walec jest bryłą obrotową, powstaje w wyniku obrotu prostokąta dokoła jednego z boków:

Zauważmy, że walec powstanie także w wyniku obrotu prostokąta dokoła jego osi symetrii:

Objętość walca obliczamy tak, jak objętość graniastosłupa: pole podstawy razy wysokość.



Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem, którego jeden bok jest równy obwodowi podstawy, a drugi wysokości walca.

Oprócz walca w programie szkolnym występują jeszcze dwie inne bryły obrotowe – kula i stożek. „Najbardziej obrotową" bryłą jest kula. Otrzymamy ją, obracając półkole lub koło względem jego średnicy. Promień koła jest jednocześnie promieniem kuli.

Wiadomo, że objętość kuli o promieniu r jest równa $\frac{4}{3}\pi r^3$, a pole jej powierzchni to $4\pi^2$.

Powierzchnia kuli nosi nazwę sfery.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Pole podstawy walca jest równe 9π, a objętość walca wynosi 90. Jakie są wymiary powierzchni bocznej walca po rozwinięciu?

2. Prostokąt obraca się raz dokoła krótszego boku, a drugi raz dokoła dłuższego boku. Który z otrzymanych w ten sposób walców ma większą objętość?

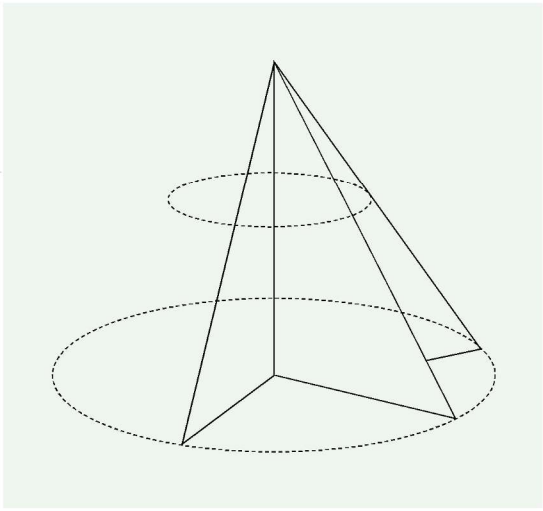
Wskazówka: oznacz długości boków prostokąta literami i porównaj odpowiednie wyrażenia algebraiczne.

3. Prostokąt obraca się raz dokoła krótszego boku, a drugi raz dokoła dłuższego boku. Porównaj pola powierzchni bocznej obu walców.

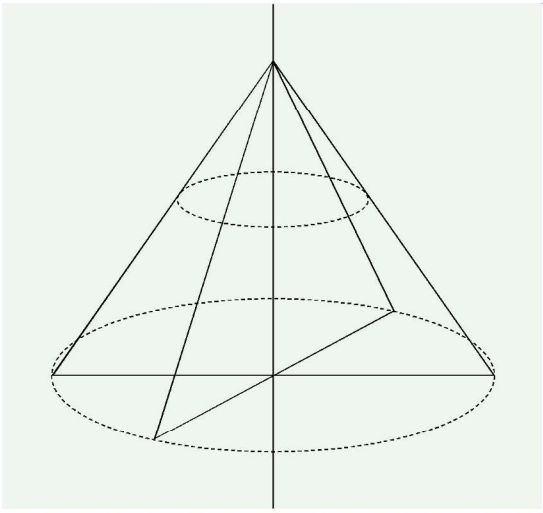
1. $6\pi \mid \frac{10}{\pi}$.
2. Większą objętość ma walec, który powstaje z obrotu prostokąta dokoła krótszego boku.
3. Powierzchnie boczne obu walców są jednakowe.

Stożek

Stożek powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dokoła jednej z przyprostokątnych:

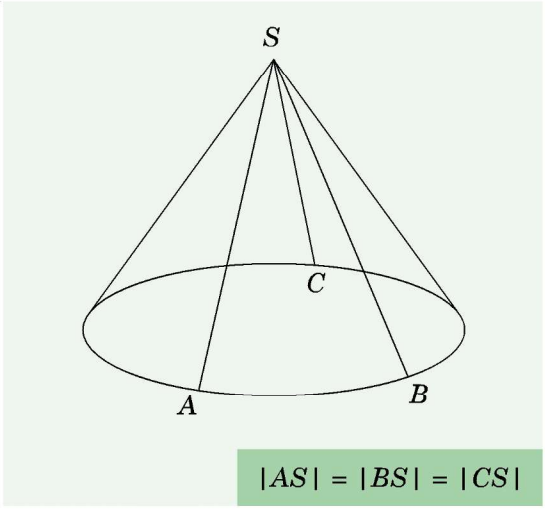


Stożek powstanie także przez obrót trójkąta równoramiennego dokoła jego osi symetrii:



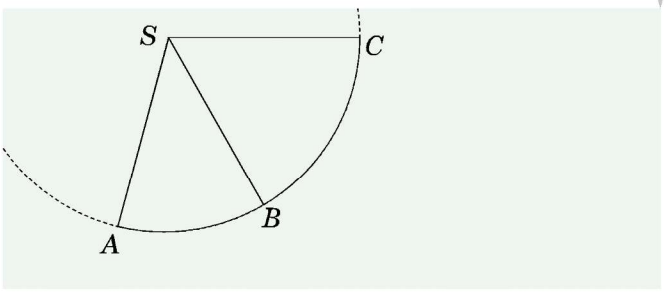
Podobnie jak w przypadku ostrosłupa i graniastosłupa, objętość stożka jest 3 razy mniejsza od objętości walca o takiej samej podstawie i wysokości.

Aby obliczyć pole powierzchni stożka, trzeba wiedzieć, czym jest powierzchnia boczna po rozcięciu i spłaszczeniu. Zauważmy, że wszystkie punkty leżące na obwodzie podstawy są równooddalone od wierzchołka stożka:



$|AS| = |BS| = |CS|$

Stąd wynika, że powierzchnia boczna po rozwinięciu jest wycinkiem koła:



Długość łuku wycinka jest równa obwodowi koła stanowiącego podstawę stożka, a promieniami tego wycinka są odcinki łączące wierzchołek stożka z punktami na brzegu podstawy. Powierzchnia boczna jest **utworzona** właśnie przez te odcinki. Zapewne dlatego nazywamy je **tworzącymi** stożka.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Jaki jest promień i jaka długość łuku wycinka kołowego, który jest rozwinięciem powierzchni bocznej stożka o tworzącej 24 i promieniu podstawy 11?

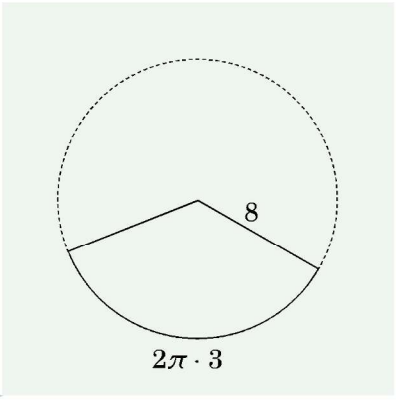
2. Czy z wycinka kołowego o promieniu 15,1 cm można zrobić powierzchnię boczną stożka o wysokości 15,2 cm?

1. Promień jest równy 24, a łuk 22π.
2. Nie, bo wysokość nie może być większa niż promień wycinka.

Mając tworzącą stożka i promień jego podstawy, potrafimy obliczyć powierzchnię boczną stożka.

Obliczmy pole powierzchni bocznej stożka, którego tworząca ma długość 8, a promień podstawy jest równy 3.

Zadanie sprowadza się do obliczenia pola wycinka kołowego o promieniu 8 i długości łuku równej 6π (taki jest obwód podstawy). Narysujmy ten wycinek, uzupełniając go do całego koła:

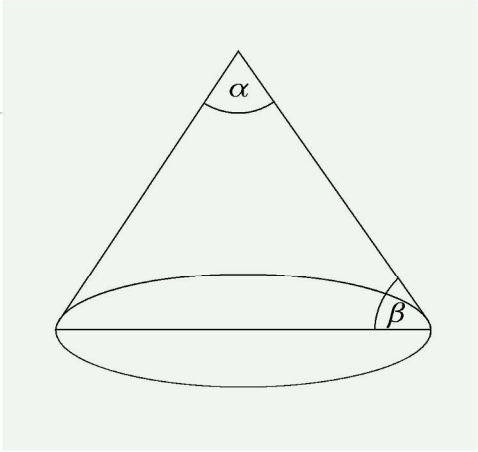


Skorzystajmy z proporcjonalności pola do długości łuku: ile razy dłuższy łuk wycinka, tyle razy większe pole wycinka. Dzieląc pole koła przez długość okręgu, otrzymamy taką część pola koła, która „przypada" na jednostkę długości okręgu, czyli otrzymamy pole wycinka o łuku długości 1. W danym przypadku jest to $\frac{64\pi}{16\pi}$.

Pole wycinka o łuku 6π jest 6π razy większe, więc jest równe $6\pi \cdot \frac{64\pi}{16\pi}$, czyli 24π.

Przedstawione obliczenia można uogólnić. Jeżeli tworząca stożka jest równa l, a promień podstawy r, to łuk wycinka kołowego jest równy $2\pi r$, pole koła πl^2, a obwód koła $2\pi l$. Oznaczając pole wycinka literą x, otrzymamy $x = 2\pi r \cdot \frac{\pi l^2}{2\pi l}$, skąd $x = \pi r l$.

Każdemu stożkowi można w spoób naturalny przypisać dwa kąty:



Są to kąty trójkąta, który jest przekrojem stożka płaszczyzną prostopadłą do podstawy i przechodzącą przez wierzchołek. Kąt α nazywamy kątem rozwarcia stożka. Kąt β jest kątem nachylenia tworzącej do podstawy.

Mając jeden z tych kątów i długość jednego z trzech odcinków: wysokość stożka, tworząca, promień podstawy, potrafimy obliczyć długości pozostałych dwóch, korzystając z trygonometrii; w przypadku kątów „ekierkowych" wystarczy twierdzenie Pitagorasa.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Wysokość stożka jest równa 4, a promień podstawy 3.

Oblicz pole powierzchni bocznej.

Wskazówka: mając wysokość stożka i promień podstawy, można obliczyć tworzącą.

2. Oblicz objętość stożka o tworzącej 10, jeżeli pole powierzchni bocznej jest równe 60π.

1. 15π. 2. 288π.

Przegląd zadań maturalnych

Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Ile ma krawędzi?

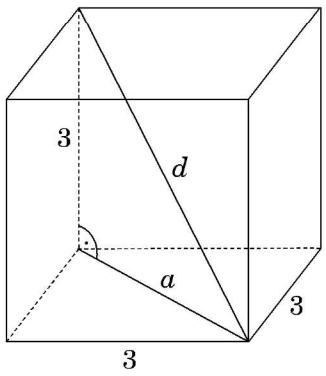
Z 18 wierzchołków ostrosłupa 17 przypada na podstawę.
W podstawie jest więc 17 krawędzi, do czego trzeba doliczyć 17 krawędzi bocznych. Razem ostrosłup ma 34 krawędzie.

Prostopadłościan ma krawędzie 5, 4, 3. Która ze ścian ma najdłuższą przekątną? Podaj wymiary tej ściany.

Najdłuższą przekątną ma ściana o największych wymiarach, więc ściana o krawędziach 5 i 4.

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Oblicz przekątną sześcianu.

Pole jednej ściany jest 6 razy mniejsze od pola powierzchni całkowitej, czyli jest równe 9. Oznacza to, że ściana jest kwadratem o boku 3. Przekątna sześcianu jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego pokazanego na rysunku:



Ponieważ $a^2 = 3^2 + 3^2$, więc $d^2 = 3^2 + a^2 =$
$= 3^2 + 3^2 + 3^2 = 3 \cdot 3^2$, skąd $d = 3\sqrt{3}$.

Oblicz objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12.

Promień podstawy jest równy 6, więc jej pole to $\pi \cdot 6^2$, czyli 36π. Zatem objętość stożka jest równa $\frac{1}{3} \cdot 36\pi \cdot 8$, czyli 96π.

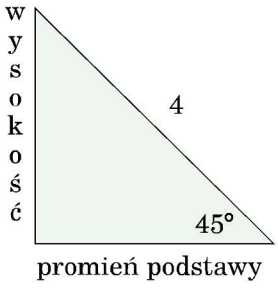
Oblicz krawędź sześcianu, którego powierzchnia całkowita ma pole 150 cm^2.

Ponieważ powierzchnia sześcianu składa się z sześciu jednakowych ścian, więc jedna ściana ma pole równe $\frac{1}{6}$ pola powierzchni całkowitej sześcianu, czyli 25 cm^2.

Ponieważ jest to pole kwadratu, więc bok tego kwadratu ma długość 5 cm. I taka jest długość krawędzi sześcianu.

Oblicz wysokość stożka, którego tworząca ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $45°$.

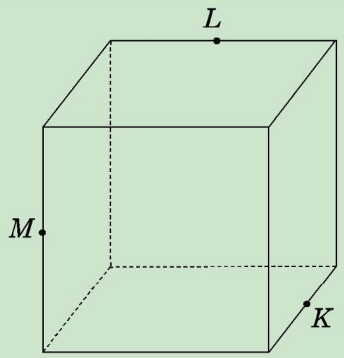
Spójrzmy na rysunek:



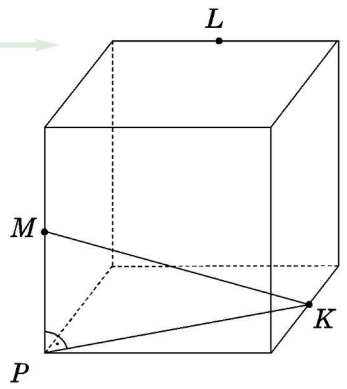
Ponieważ trójkąt jest równoramienny, więc wysokość jest równa promieniowi podstawy. Oznaczając wysokość literą h i korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy równanie $h^2 + h^2 = 4^2$, skąd $h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Punkty K, L, M są środkami krawędzi sześcianu o krawędzi 1:

Oblicz pole trójkąta KLM.



Z symetrii sześcianu wynika, że trójkąt KLM jest równoboczny. Obliczymy $|MK|$, posługując się trójkątem PKM wskazanym na rysunku:



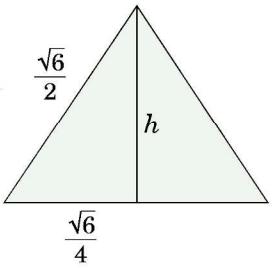
Trójkąt PKM jest prostokątny, $|PM| = \frac{1}{2}$,

$|PK| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$|MK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4}, \quad |MK| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Boki trójkąta KLM są więc równe $\frac{\sqrt{6}}{2}$.



Obliczmy wysokość:

$h^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{6}{4} - \frac{6}{16} = \frac{18}{16}$,

$h = \sqrt{\frac{18}{16}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

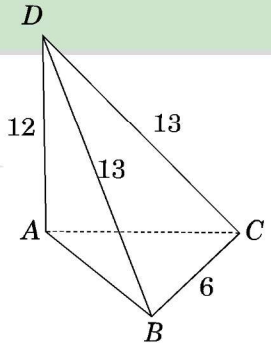
Pozostaje obliczyć pole trójkąta KLM:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{16} = \frac{3\sqrt{3 \cdot 2} \cdot \sqrt{2}}{16} = \frac{3\sqrt{3 \cdot 2 \cdot 2}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach 5 x 3 x 4.

Pola trzech różnych ścian prostopadłościanu to 15, 20 i 12, co w sumie jest równe 47. Ponieważ jest to połowa pola powierzchni prostopadłościanu, więc pole jest równe 94.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC. Krawędź AD jest wysokością ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.



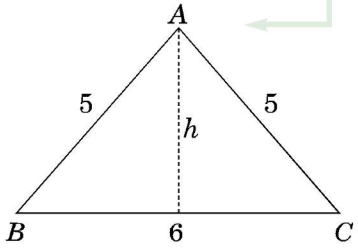
Przedstawmy dane na rysunku:

Ponieważ wysokość AD jest prostopadła do podstawy ostrosłupa, więc jest prostopadła od odcinków AB i AC. Oznacza to, że trójkąty ABD i ACD są prostokątne.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AB| = |AC| = 5$.

Podstawą ostrosłupa jest więc trójkąt równoramienny o bokach 5, 5 i 6:

Trzeba obliczyć pole trójkąta ABC.



Obliczamy wysokość, stosując twierdzenie Pitagorasa:

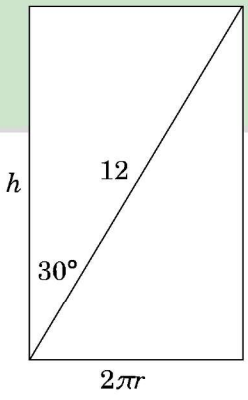
$h^2 + 3^2 = 5^2$, $h^2 = 25 - 9 = 16$, $h = 4$.

Stąd pole trójkąta jest równe $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4$, czyli 12.

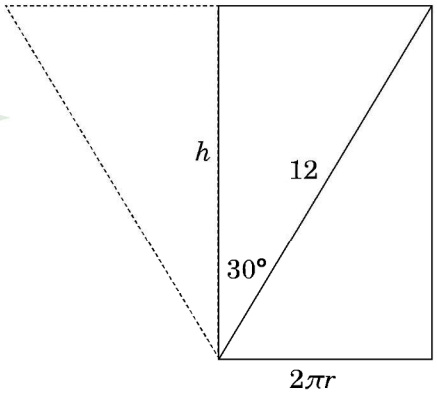
Zatem objętość ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12$, czyli 48.

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem o przekątnej 12. Przekątna tworzy z bokiem, którego długość jest równa wysokości walca, kąt $30°$. **a)** Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca. **b)** Sprawdź, czy objętość walca jest większa od $18\sqrt{3}$. Odpowiedź uzasadnij.

Oznaczając wysokość walca literą h, a promień podstawy literą r, narysujmy rozwinięcie powierzchni bocznej walca:



Uzupełniamy rysunek, tworząc trójkąt równoboczny:



Widzimy, że $2\pi r = 6$, skąd $r = \frac{3}{\pi}$. Ponieważ na mocy twierdzenia Pitagorasa $6^2 + h^2 = 12^2$, więc $h = \sqrt{108} = \sqrt{3 \cdot 36} = 6\sqrt{3}$.

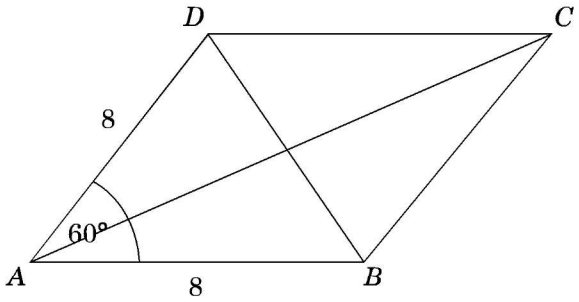
a) Pole powierzchni bocznej walca jest równe $6 \cdot 6\sqrt{3}$, czyli $36\sqrt{3}$.

b) Objętość walca jest równa $\pi \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \cdot 6\sqrt{3}$, czyli $\frac{54\sqrt{3}}{\pi}$.

Pozostaje jeszcze porównać liczby $\frac{54\sqrt{3}}{\pi}$ i $18\sqrt{3}$, co sprowadza się do porównania liczb $\frac{54}{\pi}$ i 18. Jeżeli w pierwszej z tych liczb mianownik zastąpimy liczbą 3, a więc liczbą mniejszą od π, to ułamek się zwiększy. Zatem $\frac{54}{\pi} < \frac{54}{3} = 18$. Stąd wniosek, że objętość walca jest mniejsza od $18\sqrt{3}$.

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o boku 8 i kącie ostrym $60°$ przy wierzchołku A. Przekątna graniastosłupa wychodząca z wierzchołka A jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$.
Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zacznijmy od obliczenia pola rombu, który jest podstawą graniastosłupa. W tym celu obliczymy długości przekątnych rombu, posługując się rysunkiem:



Ciąg dalszy na następnej stronie

Ciąg dalszy z poprzedniej strony

Ponieważ trójkąt ABD jest równoramienny i kąt między ramionami jest równy $60°$, więc wszystkie kąty tego trójkąta mają po $60°$ i jest on równoboczny.
Krótsza przekątna rombu jest zatem równa 8.

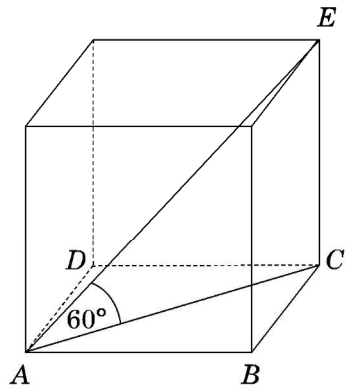
Dłuższą przekątną obliczymy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2 + 4^2 = 8^2, \quad \left(\frac{|AC|}{2}\right)^2 = 48, \quad |AC|^2 = 4 \cdot 48,$$

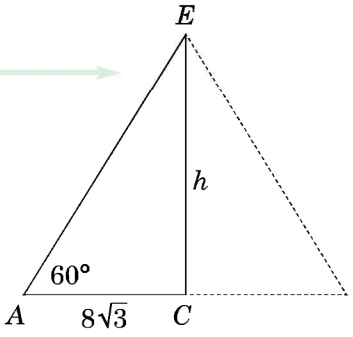
$$|AC| = 2\sqrt{48} = 2 \cdot \sqrt{16 \cdot 3} = 8\sqrt{3}.$$

Pole rombu jest połową iloczynu przekątnych, więc jest równe $4 \cdot 8\sqrt{3}$, czyli $32\sqrt{3}$.

Do obliczenia objętości graniastosłupa potrzebna jest jeszcze jego wysokość.
Narysujmy graniastosłup z przekątną nachyloną do podstawy pod kątem $60°$. Ponieważ rzutem przekątnej graniastosłupa na podstawę jest przekątna podstawy, więc jest to kąt między tymi przekątnymi:



Narysujmy trójkąt ACE, uzupełniając go do trójkąta równobocznego:



Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa:

$h^2 = (16\sqrt{3})^2 - (8\sqrt{3})^2 =$

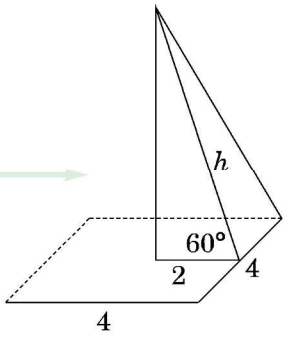
$= (16\sqrt{3} - 8\sqrt{3})(16\sqrt{3} + 8\sqrt{3}) =$

$= 8\sqrt{3} \cdot 24\sqrt{3} = 24 \cdot 24.$

Stąd $h = 24$. Zatem objętość graniastosłupa jest równa $32\sqrt{3} \cdot 24$, czyli $768\sqrt{3}$.

Dach wieży ma kształt powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 m. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$. Oblicz, ile sztuk dachówek należy kupić, aby pokryć ten dach, wiedząc, że do pokrycia 1 m^2 potrzebne są 24 dachówki. Przy zakupie należy doliczyć 8% dachówek na zapas.

Trzeba obliczyć pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa, które jest 4 razy większe od pola ściany bocznej. Posłużmy się rysunkiem:

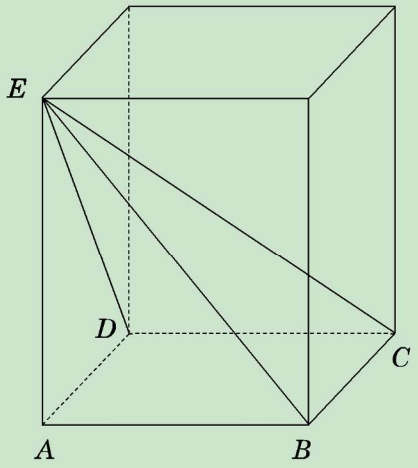


Ściana boczna jest trójkątem o podstawie 4 i wysokości h. Jak widzimy, wysokość h jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego z kątem $60°$ i jedną przyprostokątną 2. Uzupełniając ten trójkąt do trójkąta równobocznego, odczytujemy, że $h = 4$.
Pole ściany bocznej jest więc równe $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$, czyli 8, skąd pole całej powierzchni bocznej jest równe 32 (m^2).
Mnożąc tę liczbę przez 24 (tyle dachówek potrzeba na metr kwadratowy) i doliczając zapas 8%, otrzymujemy $32 \cdot 24 \cdot 1{,}08$, co jest równe $829{,}44$.
Trzeba zatem kupić 830 dachówek.

Jaki jest promień podstawy stożka, który powstaje w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 13 i 15 wokół dłuższej przyprostokątnej?

Promień podstawy jest równy 13.

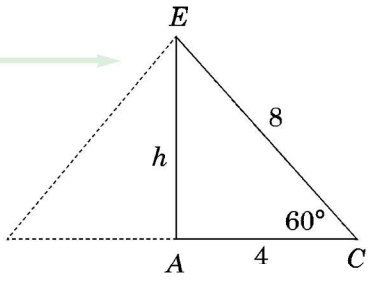
Rysunek przedstawia graniastosłup prawidłowy czworokątny:



Wiadomo, że $|AC| = 4$, a kąt ECA ma $60°$.
Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$.

Podstawą ostrosłupa $ABCDE$ jest kwadrat o przekątnej 4, a wysokość jest równa wysokości graniastosłupa. Pole podstawy ostrosłupa jest równe $\frac{4 \cdot 4}{2}$, czyli 8.

Trzeba jeszcze znaleźć wysokość AE. Popatrzmy na trójkąt ACE, w którym z założenia bok AC ma długość 4, a kąt przy wierzchołku C ma miarę $60°$:



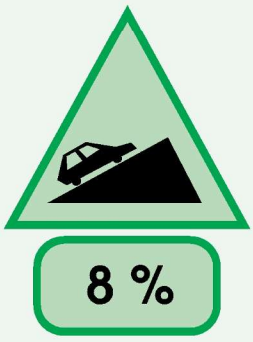
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48, \quad h = \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}.$

Zatem objętość ostrosłupa jest równa $\frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3}$, czyli $\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

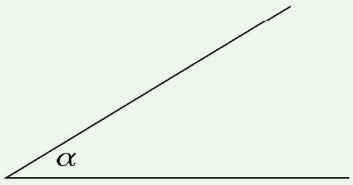
8. Trygonometria kąta ostrego

Trygonometria ma zastosowanie w różnych dziedzinach związanych z miernictwem. Jeżdżąc samochodem, można ją zauważyć na znakach drogowych informujących o wznoszeniu się lub spadku terenu. Kąt określający stromość terenu jest ostry. W trygonometrii rozważa się dowolne kąty. My ograniczymy się do kątów ostrych zgodnie z podstawą programową.

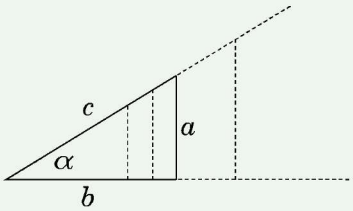


Kąt → trójkąt prostokątny → stosunki boków

Niech α będzie dowolnym kątem ostrym:



Jest nieskończenie wiele trójkątów prostokątnych z kątem α, mają boki różnej długości, ale wszystkie te trójkąty są podobne. Oznacza to, że stosunki boków w jednym z trójkątów są takie same jak stosunki odpowiednich boków w każdym innym.

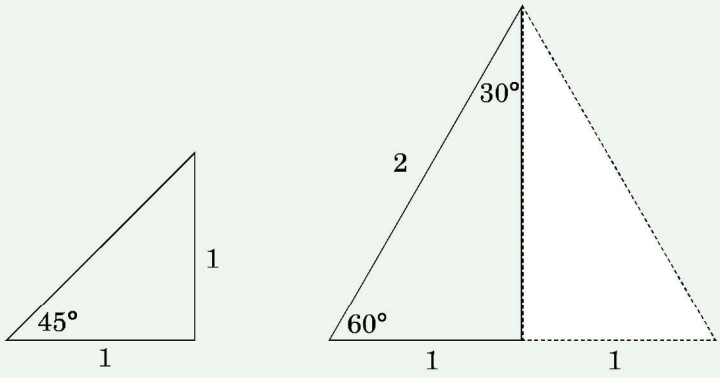


Ilorazy $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ nie zależą od wyboru trójkąta, zależą tylko od kąta α. Są zatem funkcjami tego kąta. Jak wiesz, noszą one nazwę funkcji trygonometrycznych.

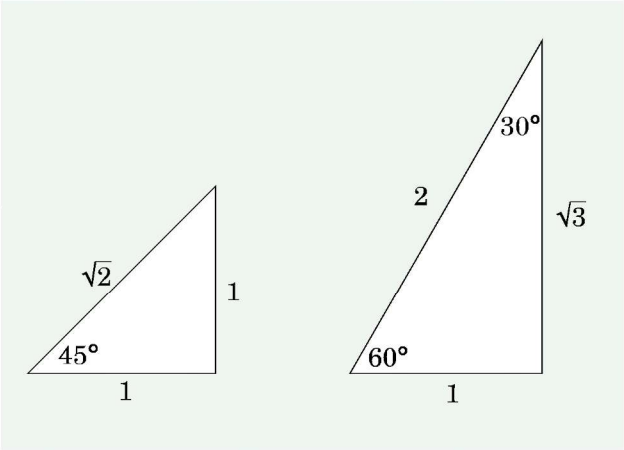
W szkole rozważa się tylko pierwsze cztery ilorazy, nazywając je odpowiednio tangensem, cotangensem, sinusem i cosinusem kąta α.

Dla kątów „ekierkowych” (45, 30, 60 stopni) wartości tych ilorazów można obliczyć w prosty sposób. Istotnie, skoro nie zależą od wyboru długości boków trójkątów prostokątnych zawierających podane kąty, to wybierzmy trójkąty tak, aby rachunki były łatwe.

Trójkąt prostokątny z kątem 45° jest równoramienny, a w trójkącie prostokątnym z kątem 60° drugi kąt ostry wynosi 30° i trójkąt ten jest połową trójkąta równobocznego:



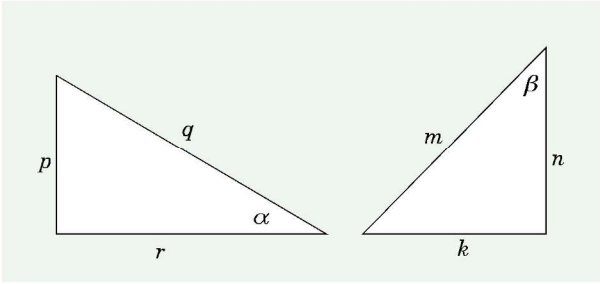
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy pozostałe boki trójkątów, a żądane ilorazy odczytamy z rysunków:



Wartości ilorazów boków nie warto uczyć się na pamięć, w razie potrzeby można szybko sporządzić odpowiedni rysunek i odczytać co trzeba.

Odtąd będziemy posługiwać się nazwami poszczególnych ilorazów. Przypomnijmy, że tangens i cotangens są ilorazami przyprostokątnych, przy czym przyprostokątna leżąca naprzeciw danego kąta jest w liczniku tangensa, a w mianowniku cotangensa. Sinus i cosinus są ilorazem przyprostokątnej i przeciwprostokątnej, przy czym w sinusie (podobnie jak w tangensie) występuje przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta.

Poćwicz, odczytując z rysunku:
$\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$.



Znając wartość jednej z czterech funkcji trygonometrycznych, można w prosty sposób znaleźć wartości pozostałych funkcji. Wystarczy wybrać odpowiedni trójkąt prostokątny.

Na przykład jeżeli tangens pewnego kąta wynosi $\frac{1}{3}$, to z rodziny trójkątów prostokątnych zawierających ten kąt wybierzmy trójkąt, w którym przyprostokątna leżąca naprzeciw danego kąta wynosi 1. Wtedy druga przyprostokątna jest równa 3. Po obliczeniu przeciwprostokątnej znajdziemy pozostałe ilorazy boków. W przypadku tangensa równego 5, wystarczy wziąć trójkąt o przyprostokątnych 5 i 1. Jeżeli natomiast sinus czy cosinus

kąta jest równy $\frac{3}{4}$, to wybieramy trójkąt o przyprostokątnej 3 (w pierwszym przypadku leżącej naprzeciw kąta, a w drugim przylegającej do kąta) i przeciwprostokątnej 4.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Podstawa trójkąta równoramiennego wynosi 8, a jego ramię 5. Oblicz sinus i tangens kąta przy podstawie.

2. Przekątne rombu są równe 4 i 6. Oblicz cotangens kąta, jaki dłuższa przekątna tworzy z bokiem rombu.

3. Ile wynosi tangens kąta między prostą $y = 2x$ a osią x?

Wskazówka: wybierz trójkąt prostokątny.

4. Cotangens kąta wynosi $\frac{1}{2}$. Oblicz wartości trzech pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta.

5. Wiadomo, że $\cos\alpha = 0.3$. Oblicz $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

6. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli: a) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

7. Czy jest taki kąt α, że $\sin\alpha = 1{,}5$ lub $\cos\alpha = 1{,}5$?

Wskazówka: porównaj długości przyprostokątnej i przeciwprostokątnej.

8. Jaka jest miara kąta α, jeżeli $\sin\alpha = \cos\alpha$?

9. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $(\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 30°)^2$, b) $\frac{\sin 30° - \operatorname{tg} 45°}{\operatorname{ctg} 45° - \cos 30°}$.

1. $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{4}$. **2.** $\frac{3}{\sqrt{13}}$. **3.** 2. **4.** Oznaczając kąt przez α, mamy: $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. **5.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{91}}$. **6.** a) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{7}$. **7.** Ponieważ przeciwprostokątna jest dłuższa niż każda przyprostokątna, więc zarówno sinus, jak i cosinus dowolnego kąta jest mniejszy niż 1. **8.** 45°. **9.** a) $1\frac{1}{3}$, b) $-2-\sqrt{3}$.

Zastosowania funkcji trygonometrycznych

Przypomnimy, jak stosować funkcje trygonometryczne do obliczania boków trójkąta prostokątnego z danym kątem ostrym i danym jednym bokiem. Będziemy rozważać tylko trójkąty „nieekierkowe".

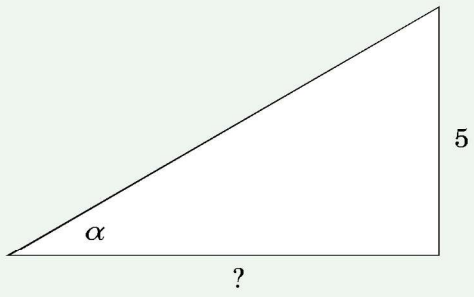
> Dla trójkątów „ekierkowych" trygonometria nie jest w ogóle potrzebna, wystarczy twierdzenie Pitagorasa.

Zacznijmy od spraw natury technicznej. Znając stosunek dwóch liczb i jedną z nich, obliczymy drugą.

1. Oblicz x, jeżeli $\frac{x}{a} = 2{,}3$ oraz $a = 5$.
2. Oblicz y, jeżeli $\frac{b}{y} = 4$ oraz $b = 7$.

W którym z zadań są prostsze rachunki? Czy lepiej, aby szukana liczba była w liczniku, czy mianowniku?

Popatrz na rysunek:

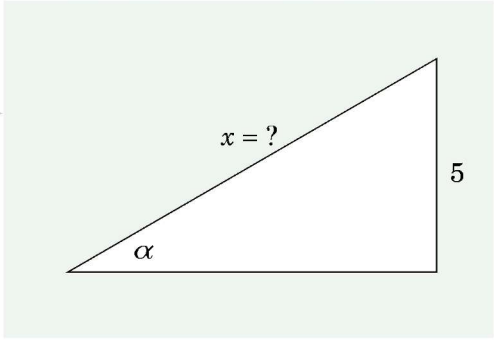


Załóżmy, że znasz wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych dla kąta α. Którą z nich wybierzesz, aby obliczyć nieznaną przyprostokątną?

Ponieważ chodzi tu o stosunek przyprostokątnych, to pomocny może być tangens lub cotangens. Racjonalniej jest wybrać tę ostatnią funkcję, bo wtedy niewiadoma będzie w liczniku.

Przeprowadź rachunki dla $\alpha = 35°$, posługując się kalkulatorem lub tablicami funkcji trygonometrycznych.

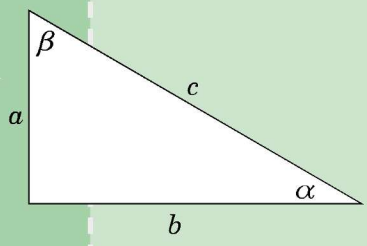
A jaką funkcją trygonometryczną posłużysz się w przypadku przedstawionym na rysunku:



Tutaj nie mamy wyboru, w żadnym z czterech ilorazów przeciwprostokątna nie występuje w liczniku. Trzeba posłużyć się funkcją sinus: $\sin\alpha = \frac{5}{x}$, skąd $x = \frac{5}{\sin\alpha}$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Które funkcje trygonometryczne zastosujesz w poszczególnych przypadkach:



a) Dane: α, b. Obliczyć c. b) Dane: α, b. Obliczyć a.
c) Dane: β, b. Obliczyć a. d) Dane: β, b. Obliczyć c.

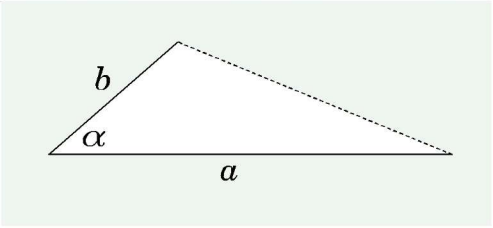
2. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest 3 razy dłuższa od przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta. Podaj miarę kąta w zaokrągleniu do stopni.

3. Cień drzewa ma długość 15 m, a promienie słoneczne padają na ziemię pod kątem 25°. Oblicz wysokość drzewa z dokładnością do metra.

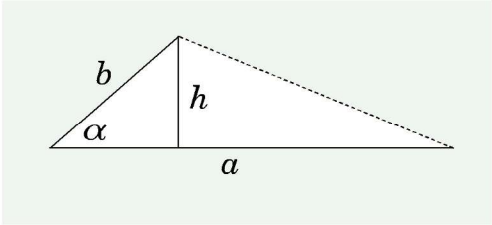
4. Turysta idzie pod górę ścieżką nachyloną pod kątem 20° do poziomu. O ile wyżej znajdzie się po przejściu 100 m?

1. Najlepiej zastosować:
a) cosinus,
b) tangens,
c) cotangens
d) sinus.
2. $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, skąd $\alpha \approx 19°$.
3. 7 m.
4. Ok. 34,2 m.

Na koniec zastosujemy trygonometrię do obliczenia pola dowolnego (a więc niekoniecznie prostokątnego) trójkąta, jeżeli znamy dwa boki i kąt ostry między nimi:



Przyjmijmy za podstawę bok o długości a. Dorysowując brakującą wysokość



tworzymy trójkąt prostokątny, w którym dany jest kąt α i przeciwprostokątna b. Zatem $\frac{h}{b} = \sin\alpha$, skąd obliczymy h. Mając podstawę i wysokość, umiemy znaleźć pole.

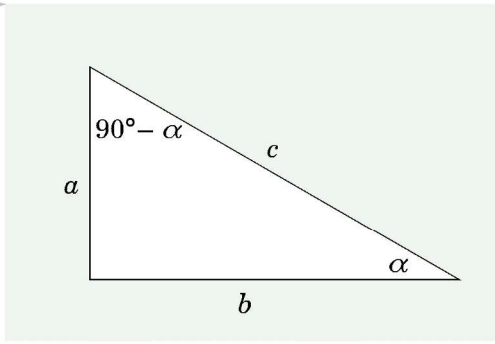
Na przykład jeżeli $a = 6$, $b = 4$ i $\alpha = 43°$, to:

$$\frac{h}{4} = \sin 43°, \quad \sin 43° \approx 0{,}7, \quad h \approx 4 \cdot 0{,}7 = 2{,}8, \quad \text{pole} \approx \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}8.$$

W przypadku, gdy kąt między danymi bokami wynosi 45°, 30° lub 60°, pole trójkąta można obliczyć bez stosowania trygonometrii; wystarczy twierdzenie Pitagorasa.

Związki między funkcjami trygonometrycznymi

Zacznijmy od związków między funkcjami trygonometrycznymi dwóch kątów ostrych w tym samym trójkącie prostokątnym. Wynikają one stąd, że przyprostokątna leżąca naprzeciw jednego z kątów ostrych jest zarazem przyprostokątną leżącą przy drugim kącie. Zobaczmy to na rysunku:



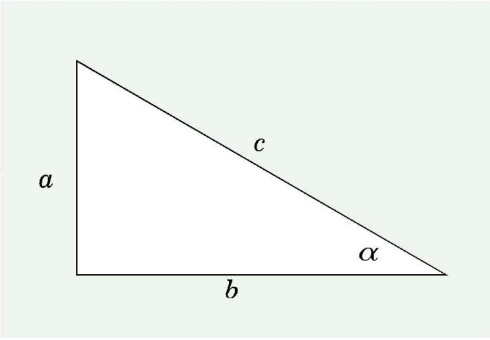
$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha.$$

Teraz przypomnimy związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta. Odczytamy je z rysunku:

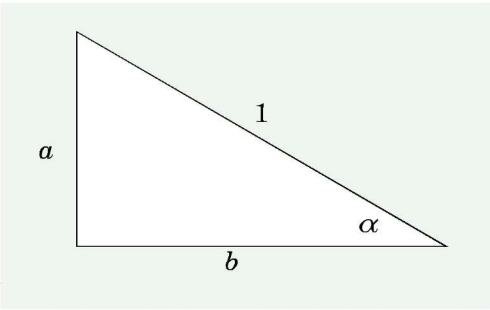


Skoro $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, a $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$,
to $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Ponadto $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, analogicznie $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Te własności warto pamiętać: tangens jest odwrotnością cotangensa (więc cotangens jest odwrotnością tangensa), tangens jest ilorazem sinusa i cosinusa, a cotangens jest ilorazem cosinusa i sinusa.

Jest jeszcze jedna ważna własność, od razu widoczna, jeżeli z wszystkich trójkątów prostokątnych z kątem α rozważyć ten, którego przeciwprostokątna ma długość 1:



Wtedy $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = b$, skąd $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$.

Jak wiesz, zamiast pisać $(\sin\alpha)^2$, piszemy krócej $\sin^2\alpha$. Zgodnie z tą umową związek między sinusem i cosinusem tego samego kąta ma postać: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Ten ważny związek, noszący nazwę jedynki trygonometrycznej, również warto pamiętać.

Pokażemy, jak związki między funkcjami trygonometrycznymi pozwalają dowodzić tzw. tożsamości trygonometrycznych.

Udowodnimy, że dla każdego kąta α zachodzą równości:
$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} = 1$, $\quad\frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha + 1$.

W pierwszej równości przekształcimy lewą stronę tak, aby otrzymać stronę prawą, natomiast w drugiej równości postąpimy odwrotnie. Zatem:

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\underbrace{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}_{1}}=$$

$$=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2+1=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Sprawdź, czy potrafisz

1. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{7}$. Ile wynosi $\operatorname{ctg}\alpha$?

2. $\operatorname{ctg}\alpha=9$. Ile wynosi $\operatorname{tg}\alpha$?

3. Czy jest kąt, którego sinus wynosi $0{,}3$, a cosinus $0{,}7$?

4. Uprość wyrażenia:

a) $\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, b) $(1+\sin\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)$,

c) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$,

d) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$,

e) $\cos^2\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$,

f) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$.

5. Udowodnij tożsamości:

a) $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+1$, b) $\frac{1}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha+1$,

c) $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1-\operatorname{ctg}\alpha)=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$,

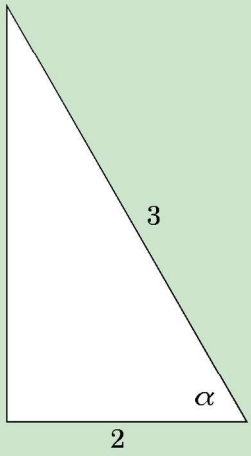
d) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

1. $\frac{7}{5}$.
2. $\frac{1}{9}$.
3. Nie, bo $(0{,}3)^2+(0{,}7)^2\neq 1$.
4. a) $\cos\alpha$,
b) $\cos^2\alpha$,
c) 2,
d) $\sin\alpha$,
e) 1,
f) $\sin^2\alpha$.

Uwaga! Umówiono się, że można opuszczać znak mnożenia przed czynnikiem, który ma postać funkcji trygonometrycznej. Tak więc zamiast $3 \cdot \cos\alpha$ można napisać $3\cos\alpha$, zamiast $2 \cdot \operatorname{tg}\alpha$ można napisać $2\operatorname{tg}\alpha$, a $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ można zastąpić przez $\sin\alpha\ \cos\alpha$.

Przegląd zadań maturalnych

Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$, korzystając z rysunku:



Do obliczenia wartości $\operatorname{tg}\alpha$ potrzebna jest długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α.

Na mocy twierdzenia Pitagorasa jest ona równa $\sqrt{3^2 - 2^2}$, czyli $\sqrt{5}$.
Zatem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Oblicz wartość wyrażenia
$\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

Chcąc rachować sprytnie, zauważmy, że opłaca się zacząć od przekształcenia danego wyrażenia, wyłączając $\cos\alpha$ przed nawias:

$$\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha =$$
$$= \cos\alpha \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} = \cos\alpha.$$

Wystarczy więc obliczyć $\cos\alpha$.
Ponieważ $\sin^2\alpha = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$,
więc $\cos^2\alpha = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.

Stąd $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ i taka jest wartość podanego wyrażenia.

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$.

Rozważmy ten z trójkątów prostokątnych z kątem α, w którym przyprostokątna leżąca przy tym kącie jest równa 5. Wtedy przeciwprostokątna jest równa 13. Na mocy twierdzenia Pitagorasa przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta jest równa $\sqrt{13^2 - 5^2}$, czyli 12. Zatem $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$.

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.
Oblicz wartość wyrażenia $2 - \cos^2\alpha$.

Zauważmy, że wartość $\cos\alpha$ jest w zadaniu niepotrzebna, potrzebny jest tylko jej kwadrat. Nasuwa to myśl, aby skorzystać z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, skąd $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. Zatem

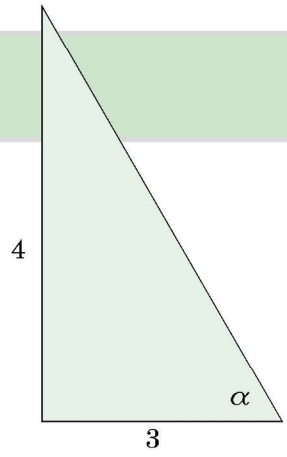
$$2 - \cos^2\alpha = 1 + (1 - \cos^2\alpha) = 1 + \sin^2\alpha =$$
$$= 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1\frac{9}{16}.$$

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 58^\circ - \cos^2 58^\circ + 1}$.

Ponieważ $\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ = 1$, więc w liczniku mamy 0 i taka jest wartość podanego wyrażenia.

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Wystarczy rozważyć trójkąt prostokątny i obliczyć jego przeciwprostokątną. Ponieważ $4^2 + 3^2 = 25$, więc przeciwprostokątna ma długość 5. Stąd $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$.



Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Dobrze byłoby tak przekształcić podane wyrażenie, aby otrzymać $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. Jest to wspólny mianownik obu ułamków, sprowadźmy więc je do tego mianownika i dodajmy:

$$2=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Zatem $\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2$, skąd $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Uzasadnij nierówność $\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha<0$.

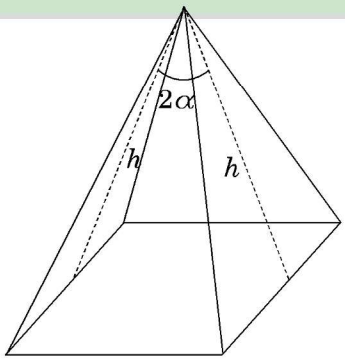
Nierówność $\sin\alpha<\operatorname{tg}\alpha$, równoważna nierówności do uzasadnienia, jest widoczna, bo $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$ mają w liczniku tę samą przyprostokątną, a mianownik $\sin\alpha$ (przeciwprostokątna) jest większy niż mianownik $\operatorname{tg}\alpha$ (przyprostokątna).

Uzasadnienie nierówności można zapisać, posługując się trójkątem prostokątnym z kątem α. Oznaczając przyprostokątną leżącą naprzeciw kąta α przez a, drugą przyprostokątną przez b, a przeciwprostokątną przez c, otrzymujemy:
$\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{c}-\frac{a}{b}<0$, bo $c>b$.

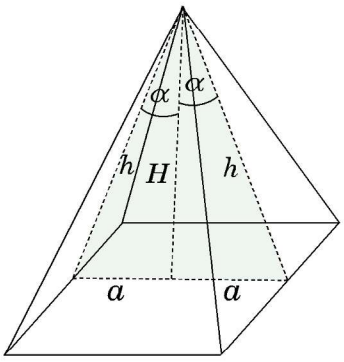
Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $4\operatorname{tg}\alpha=3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$.

Zauważmy, że $3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=3$.
Stąd $4\operatorname{tg}\alpha=3$, więc $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$.

W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa mają długości h i tworzą kąt o mierze 2α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



W rozwiązywaniu tego typu zadań trzeba znaleźć trójkąt prostokątny „pasujący" do zadania.
Posłużmy się rysunkiem, przedstawiającym opisaną sytuację:

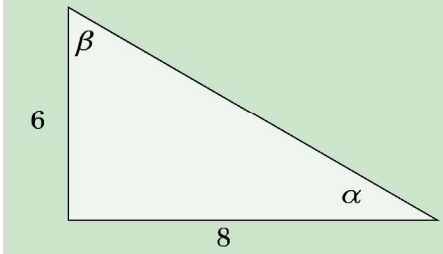


Do obliczenia objętości ostrosłupa potrzebna jest jego wysokość oraz bok kwadratu, który jest podstawą. Wysokość ostrosłupa dzieli trójkąt równoramienny z kątem 2α na dwa przystające trójkąty prostokątne z kątami α:
Ponieważ $\frac{a}{h} = \sin\alpha$, więc $a = h \cdot \sin\alpha$,
a ponieważ $\frac{H}{h} = \cos\alpha$, więc $\mathrm{H} = \mathrm{h} \cdot \cos\alpha$.
Oznaczając objętość ostrosłupa literą V,
otrzymujemy: $V = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \mathrm{H} = \frac{1}{3} \cdot (2h \cdot \sin\alpha)^2 \cdot h \cdot \cos\alpha = \frac{4}{3}h^3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$.

Oblicz $\frac{\cos 27^\circ + \sin 63^\circ}{\cos 27^\circ}$.

Ponieważ kąty 27° i 63° dają w sumie 90°, więc są kątami ostrymi tego samego trójkąta prostokątnego. Przyprostokątna leżąca naprzeciw jednego z tych kątów jest więc jednocześnie przyprostokątną leżącą przy drugim kącie. Stąd wynika, że sinus jednego z kątów jest cosinusem drugiego.
W szczególności $\sin 63^\circ = \cos 27^\circ$, skąd
$\frac{\cos 27^\circ + \sin 63^\circ}{\cos 27^\circ} = \frac{\cos 27^\circ + \cos 27^\circ}{\cos 27^\circ} = \frac{2\cos 27^\circ}{\cos 27^\circ} = 2.$

Korzystając z danych przedstawionych na rysunku oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}^2\beta - 5\sin\beta \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.



Podane wyrażenie można uprościć, zastępując $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ przez $\sin\alpha$.

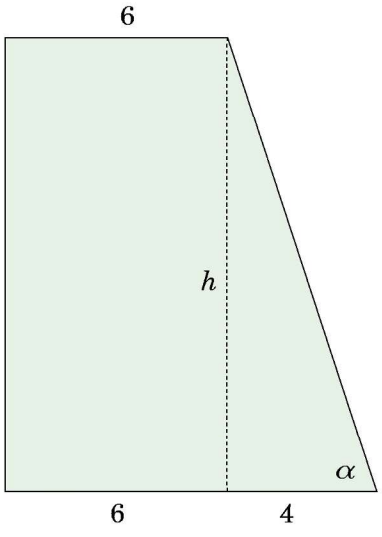
Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna jest równa 10.
Zatem $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Po podstawieniu znalezionych liczb do podanego wyrażenia obliczymy jego wartość:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} + \frac{3}{5} = \frac{16}{9} - \frac{16}{3} + \frac{3}{5} = \frac{16}{9} - \frac{48}{9} + \frac{3}{5} = -\frac{32}{9} + \frac{3}{5} = -\frac{133}{45}.$$

Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 oraz 10, a tangens kąta ostrego jest równy 3. Oblicz pole trapezu.

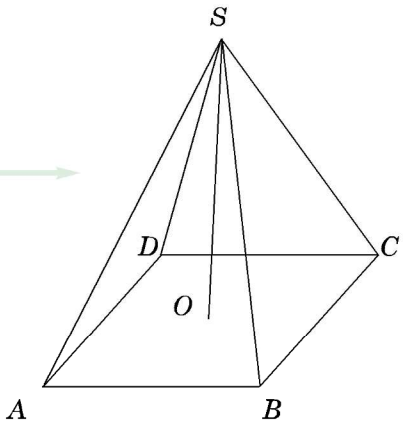
Trzeba obliczyć wysokość trapezu. Narysujmy:



Jak widać, $\frac{h}{4} = \operatorname{tg}\alpha$, przy czym $\operatorname{tg}\alpha = 3$.
Zatem $h = 12$.
Pole trapezu jest sumą pola prostokąta o bokach 6, 12 oraz pola trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 4, 12. Zatem pole trapezu jest równe $6 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12$, czyli 96.

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest romb $ABCD$ o boku 4. Kąt ABC rombu ma miarę $120°$ oraz $|AS| = |CS| = 10$ i $|BS| = |DS|$.
Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi BS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

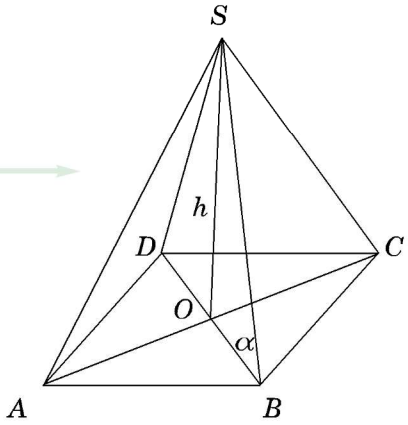
Narysujmy ostrosłup $ABCDS$ i jego wysokość, oznaczając literą O punkt, w którym wysokość przecina podstawę:



Porównajmy trójkąty AOS i COS. Są one prostokątne, jedna przyprostokątna (wysokość) jest wspólna, a przeciwprostokątne (krawędzie ostrosłupa) są równe z założenia. Stąd wynika, że przyprostokątne OA i OC są równe, więc punkt O leży więc na symetralnej przekątnej AC.

Analogicznie dowodzimy, że trójkąty BOS i DOS są przystające, skąd ich przyprostokątne OB i OD są równe i w konsekwencji punkt O leży na symetralnej przekątnej BD.

Ponieważ przekątne rombu są nawzajem swoimi symetralnymi, więc O jest punktem przecięcia przekątnych podstawy:

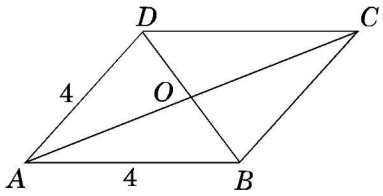


Jak widać z rysunku, do znalezienia sinusa kąta wystarczy obliczyć wysokość h i krawędź SB. Wysokość h obliczymy z trójkąta prostokątnego SOA, bo znamy długość przeciwprostokątnej SA, a długość OA znajdziemy z danych o rombie.

Ciąg dalszy zadania na następnej stronie

Ciąg dalszy zadania z poprzedniej strony

Popatrzmy na rysunek:



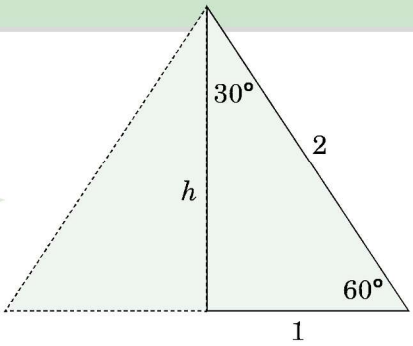
Skoro kąt rombu przy wierzchołku B ma miarę $120°$, to kąt przy wierzchołku A jest równy $60°$ i trójkąt ABD jest równoboczny. Stąd $|BD| = 4$, więc $|BO| = 2$. Długość odcinka AO obliczymy z twierdzenia Pitagorasa: $|AO|^2 + 2^2 = 4^2$, $|AO|^2 = 12$, $|AO| = \sqrt{12}$.

Wracamy do h, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta SOA:
$h^2 + (\sqrt{12})^2 = 10^2$, $h^2 = 100 - 12 = 88$, $h = \sqrt{88} = \sqrt{4 \cdot 22} = 2\sqrt{22}$.
Pozostaje obliczyć krawędź SB. W tym celu jeszcze raz skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa, tym razem w odniesieniu do trójkąta SOB:
$|SB|^2 = (\sqrt{88})^2 + 2^2$, $|BS| = \sqrt{92} = \sqrt{4 \cdot 23} = 2\sqrt{23}$.

Teraz już możemy obliczyć szukany sinus: $\sin\alpha = \dfrac{h}{|SB|} = \dfrac{2\sqrt{22}}{2\sqrt{23}} = \sqrt{\dfrac{22}{23}} \approx 0{,}9780$.

Oblicz $\operatorname{tg} 30° - \sin 30°$.

Wartości funkcji trygonometrycznych odczytamy z rysunku:



$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$.

Obliczamy: $\operatorname{tg} 30° - \sin 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

Możemy jeszcze usunąć niewymierność z mianownika ułamka, mnożąc przez $\sqrt{3}$ licznik i mianownik: $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{6}$.

9. Elementy statystyki i rachunku prawdopodobieństwa

W dzisiejszych czasach bez statystyki ani rusz. Środki masowego przekazu zasypują nas rozmaitymi danymi statystycznymi. Trzeba jednak uważać z ich odczytywaniem. Są sposoby, aby dane statystyczne przedstawić w sposób sugerujący z góry założone tezy.

Prawdopodobieństwem posługuje się każdy, niekoniecznie dokładnie w sensie matematycznym. Używamy określeń: pewnie, być może, chyba tak, chyba nie, na pewno nie itp. W sensie potocznym często określamy prawdopodobieństwo w procentach, posługując się uniwersalną regułą „pi razy oko".

Średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe

Zgromadzone dane statystyczne można w różny sposób opisywać – graficznie i rachunkowo. Do opisu graficznego służą różnego rodzaju diagramy. Rachunkowo opisujemy dane za pomocą różnego rodzaju średnich.

Jedną ze średnich jest tzw. średnia arytmetyczna. Posługujemy się nią często, chociaż w wielu wypadkach zawodzi, nie oddając wiernie sytuacji.

Na przykład jeżeli w pewnej grupie osób połowę stanowią wysocy, a drugą połowę niscy, to średnia arytmetyczna wzrostu bardzo odbiega od rzeczywistego wzrostu większości członków grupy.

W szkole najczęściej mowa jest o średnich arytmetycznych ocen. Rozważmy przykład.

Tabelki przedstawiają oceny semestralne z pracy klasowej w dwóch klasach, Ia i Ib, z których każda liczy 25 uczniów:

Ocena	Liczba uczniów kl. Ia	Liczba uczniów kl. Ib
5	1	6
4	4	5
3	15	3
2	4	5
1	1	6

Obliczmy średnią arytmetyczną ocen w każdej klasie.

Trzeba dodać oceny wszystkich uczniów tej samej klasy i podzielić przez liczbę uczniów. Oznacza to, że każdą ocenę trzeba wziąć tyle razy, ilu uczniów ją otrzymało.

Klasa Ia: $\frac{1 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 15 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{25} = \frac{75}{3} = 3.$

Klasa Ib: $\frac{6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{25} = \frac{75}{3} = 3.$

Jak widać, średnie w obu klasach są takie same. Czy jednak zgodzimy się z opinią, że obie klasy wypadły na klasówce tak samo?

Z tabelki wynika, że średnia dobrze oddaje wynik klasy Ia: większość uczniów otrzymała ocenę dostateczną, mniejszość oceny inne, przy czym tylko dwóch uczniów ma oceny zdecydowanie różniące się od średniej.

W klasie Ib jest natomiast bardzo mało uczniów z oceną dostateczną, prawie każdy uczeń jest powyżej lub poniżej średniej.

Jest to przykład pokazujący, że średnia arytmetyczna dosyć dobrze oddaje sytuację wtedy, kiedy większość danych mało się od niej różni.

W statystyce wprowadzono parametr, który mierzy stopień wiarygodności średniej arytmetycznej. Jest to tzw. odchylenie standardowe, oznaczane literą grecką σ (sigma). Jest ono tym mniejsze, im średnia arytmetyczna mniej odbiega od danych. W odchyleniu standardowym oblicza się odległość poszczególnych danych od średniej arytmetycznej, dodaje kwadraty tych odległości, dzieli otrzymaną sumę przez liczbę danych, a na końcu oblicza pierwiastek kwadratowy z otrzymanego ilorazu.

Jeżeli więc a jest średnią arytmetyczną liczb $a_1, a_2, ..., a_n$, to

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a - a_1)^2 + (a - a_2)^2 + ... + (a - a_n)^2}{n}}.$$

Przykładowo obliczmy odchylenie standardowe dla średnich ocen w klasach Ia i Ib.

Klasa Ia:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1 \cdot (3-5)^2 + 4 \cdot (3-4)^2 + 15 \cdot (3-3)^2 + 4 \cdot (3-2)^2 + 1 \cdot (3-1)^2}{25}} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Klasa Ib:

$$\sigma = \sqrt{\frac{6 \cdot (3-5)^2 + 5 \cdot (3-4)^2 + 3 \cdot (3-3)^2 + 5 \cdot (3-2)^2 + 6 \cdot (3-1)^2}{25}} =$$

$$= \sqrt{\frac{58}{25}} = \sqrt{2{,}32} \approx 1{,}52.$$

Jak widać, w klasie Ib odchylenie standardowe jest prawie dwa razy większe.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Średnia arytmetyczna sześciu liczb, z których pięć to 2, 5, 5, 8, 9, jest równa 6,5. Znajdź szóstą liczbę.

2. Średnia wieku czterech synów Kowalskiego jest równa 8,5. Jeżeli do wieku synów dodać jeszcze wiek córki Kowalskiego, to średnia zmniejszy się do 7. Ile lat ma córka Kowalskiego?

1. 10, 2. 1.

Mediana i średnia arytmetyczna

W praktyce często oblicza się średnią arytmetyczną zarobków różnych grup ludzi. Rozważmy przykład.

W pewnej firmie zarobki miesięczne pracowników przedstawiają się następująco:

Płaca w złotych	Liczba pracowników
1200	5
1300	5
1400	5
1500	5
4000	2
6000	1
8000	1

Obliczmy średnią arytmetyczną zarobków w tej firmie.

Trzeba obliczyć kwotę, która jest co miesiąc przeznaczana na płace dla wszystkich pracowników, i podzielić ją przez liczbę pracowników. Otrzymamy:

$$\frac{5 \cdot (1200 + 1300 + 1400 + 1500) + 2 \cdot 4000 + 6000 + 8000}{24} =$$

$$= \frac{49000}{24} \approx 2042.$$

Czy jednak zgodzimy się z opinią, że pracownicy firmy zarabiają ok. 2000 zł?

Tutaj bardziej sensownie byłoby posłużyć się inną średnią, tzw. medianą. Jest to wartość środkowa ciągu danych ustawionych według wzrostu.

W tym przykładzie, ustawiając według wielkości zarobki pracowników, otrzymamy następujący ciąg 24 liczb:

$$\underbrace{1200,}_{5 \text{ razy}} \quad \underbrace{1300,}_{5 \text{ razy}} \quad \underbrace{1400,}_{5 \text{ razy}} \quad \underbrace{1500,}_{5 \text{ razy}} \quad \underbrace{4000,}_{2 \text{ razy}} \quad \underbrace{6000,}_{1 \text{ raz}} \quad \underbrace{8000}_{1 \text{ raz}}$$

Jaka liczba występuje w środku ciągu? Ponieważ liczba wyrazów jest parzysta, więc ciąg nie ma wyrazu środkowego; można natomiast wskazać dwa wyrazy leżące w „środku". W rozważanym ciągu są to wyrazy na miejscach 12 i 13, więc są jednakowe; w przypadku ogólnym bierzemy pod uwagę średnią arytmetyczną tych wyrazów. To jest właśnie mediana parzystej liczby danych. Jeżeli natomiast liczba danych jest nieparzysta, to medianą jest środkowy wyraz ciągu.

Medianą zarobków w rozważanej firmie jest kwota 1400 zł. Oznacza to, że płaca co najmniej połowy pracowników nie przekracza tej kwoty. Ich zarobki bardzo różnią się od średniej arytmetycznej, są niższe o więcej niż 25%.

Wróćmy do przykładu z ocenami uczniów (s. 236). Nietrudno stwierdzić, że zarówno w klasie Ia, jak i klasie Ib mediana jest równa 3. Klasy te mają więc taką samą medianę, taką samą średnią arytmetyczną, a jednak są zdecydowanie inne.

Wyciągnijmy wnioski z rozważanych przykładów. Nie ulegajmy magii średnich, interpretacja danych jest bardziej skomplikowana.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Mediana 100 danych jest równa 100. Po ustawieniu danych według wielkości na 50 miejscu otrzymamy 90. Jaka liczba jest na 51 miejscu?

2. Oto dane statystyczne, ustawione według wielkości: $3, 3, 4, x, 7, 7, 8, y$. Średnia arytmetyczna danych jest równa 6, a ich mediana 5,5. Oblicz x i y.

1. 110.
2. $x = 4, y = 12$.

Średnia ważona i średnia arytmetyczna

Czasami chcemy obliczyć średnią z danych, z których nie wszystkie są jednakowo ważne – niektóre są bardziej znaczące, a inne mniej. Na przykład wiadomo, że trudniej dostać dobrą ocenę z pracy klasowej niż z zadania domowego. Ocena z pracy klasowej bardziej miarodajnie odzwierciedla umiejętności ucznia i w tym sensie ma większą wagę.

I w takich przypadkach poszczególnym danym przypisujemy rozmaite wagi, obliczając tzw. średnią ważoną.

Na przykład załóżmy, że uczeń otrzymał oceny 3, 4 i 5, przy czym 3 jest oceną z pracy klasowej, 4 oceną z odpowiedzi ustnej, a 5 oceną za zadanie domowe. Średnia arytmetyczna ucznia jest równa 4.

Przypiszmy każdej z tych ocen wagę w ten sposób, aby najbardziej liczyła się ocena z klasówki, a najmniej ocena za zadanie domowe. Na przykład niech to bedą kolejno wagi 3, 2 i 1. Średnią ważoną obliczamy tak, że dodajemy oceny pomnożone przez wagi, a wynik dzielimy przez sumę wag. Otrzymujemy:

$$\frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{3 + 2 + 1} = \frac{22}{6} = 3\frac{2}{3}.$$

Jak widać, średnia ważona jest niższa od średniej arytmetycznej.

Gdyby chcieć nagrodzić ucznia, który może nie jest zbyt zdolny, ale za to bardzo pracowity, i najwyższą wagę przypisać zadaniu domowemu, a najniższą klasówce, to w podanych przykładzie otrzymalibyśmy średnią $4\frac{1}{3}$, tym razem większą od średniej arytmetycznej.

Średnia ważona pokrywa się ze średnią arytmetyczną, kiedy wszystkie wagi są równe 1. W praktyce często suma wag jest równa 1. Na uczelniach końcowy wynik

studiów jest średnią ważoną oceny ze studiów[17], oceny z pracy dyplomowej i oceny egzaminu dyplomowego. Wagi tych trzech ocen są ułamkami, których suma jest równa 1. Na przykład mogą to być ułamki $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Liczbom 10 i 15 są przypisane wagi 1. Jaką wagę trzeba przypisać liczbie 5, aby średnia ważona tych trzech liczb była równa 6?

2. Jakie wagi trzeba przypisać liczbom 6 i 20, aby średnia ważona była równa 9,5, a suma wag była równa 1?

1. 13.
2. $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{4}$.

Iloma sposobami...?

Z grupy 15 kobiet i 13 mężczyzn mamy wybrać dwoje przedstawicieli – parę składającą się z jednej kobiety i jednego mężczyzny.
Iloma sposobami można to zrobić?

Każda kobieta może wystąpić w 13 parach, a ponieważ kobiet jest 15, więc można utworzyć $13 \cdot 15$ różnych par.

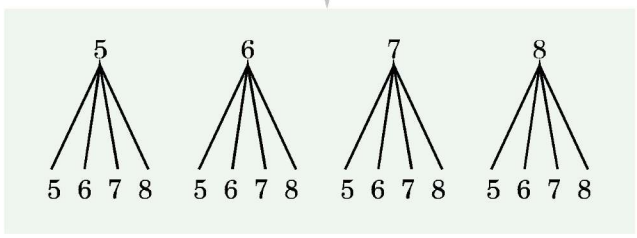
Gdyby w grupie było jeszcze 10 dzieci, a wybierano by troje przedstawicieli – kobietę, mężczyznę i dziecko, to do każdej z poprzednich par można by dołączyć jeszcze jedno z 10 dzieci, tworząc z każdej pary 10 trójek. Zatem liczba trójek jest 10 razy większa od liczby par i jest równa $13 \cdot 15 \cdot 10$.

[17] Ocena ze studiów zwykle jest średnią arytmetyczną ocen z poszczególnych przedmiotów.

Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć, używając co najwyżej cyfr 5, 6, 7, 8?

Spróbujmy tworzyć te liczby, zakładając najpierw, że cyfry mogą się powtarzać.

Mamy 4 możliwości wyboru pierwszej cyfry. Do każdego wyboru pierwszej cyfry, mamy również 4 możliwości wyboru cyfry na drugim miejscu. Razem mamy więc $4 \cdot 4$ możliwości wybrania dwóch pierwszych cyfr:



Postępowanie to mozna kontynuować. Każdą otrzymaną liczbę dwucyfrową możemy uzupełnić do trzycyfrowej czterema sposobami, więc liczb trzycyfrowych jest 4 razy więcej niż dwucyfrowych, czyli jest ich $4 \cdot 4 \cdot 4$.

Gdyby założyć, że cyfry w każdej liczbie mają być różne, to po ustaleniu pierwszej cyfry mamy do dyspozycji o jedną cyfrę mniej, czyli mamy tylko 3 możliwości wyboru drugiej cyfry. Po ustaleniu dwóch pierwszych cyfr mamy już tylko 2 możliwości wyboru cyfry na trzecim miejscu. Liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach jest zatem $4 \cdot 3 \cdot 2$.

Drzewko ilustrujace tę sytuację miałoby na kolejnych poziomach malejącą liczbę gałęzi.

Obliczmy, ile liczb trzycyfrowych parzystych można utworzyć, używając co najwyżej cyfr 0, 3, 4, 5, 7.

Zacznijmy od końca, bo o parzystości czy nieparzystości liczby decyduje ostatnia cyfra. Skoro liczba ma być parzysta, to ostatnią jej cyfrą może być 0 lub 4. Po umieszczeniu jednej z nich na trzecim miejscu, na drugim miejscu możemy umieścić którąkolwiek z wszystkich 5 cyfr, co oznacza, że mamy $2 \cdot 5$ możliwości wyboru dwóch ostatnich cyfr. Jako pierwszą cyfrę możemy wybrać każdą z wyjątkiem zera, więc mamy 4 możliwości. Stąd wynika, że szukanych liczb jest $2 \cdot 5 \cdot 4$.

Sprawdź, czy potrafisz

1. Oblicz, ile liczb nieparzystych trzycyfrowych można utworzyć z cyfr $1, 4, 5$, jeżeli:
a) cyfry mają być różne, b) cyfry mogą się powtarzać.

2. Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, posługując się co najwyżej cyframi $0, 1$ i 2?

Wskazówka: ile cyfr można ustawić na pierwszym miejscu, a ile na pozostałych miejscach?

1. a) 4, b) 18.
2. 162.

W ilu różnych konfiguracjach może iść na spacer stado 6 gęsi? Jak myślisz, czy mogą przez miesiąc ustawiać się każdego dnia w innej kolejności?

Jak wiadomo, gęsi chodzą gęsiego. Jeżeli ponumerujemy je liczbami od 1 do 6, to zadanie polega na obliczeniu, iloma sposobami możemy liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 ustawić w ciąg.

Na pierwszym miejscu możemy umieścić dowolną z 6 liczb, ale na drugim miejscu już tylko dowolną z pozostałych 5 liczb. Przy ustalonej pierwszej liczbie mamy więc 5 możliwości wyboru drugiej liczby. Razem na dwóch pierwszych miejscach możemy umieścić liczby na $6 \cdot 5$ sposobów. Kontynuując postępowanie, za każdym razem mnożymy przez czynnik o 1 mniejszy, otrzymując na końcu $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, a więc 720.

Jak widać, gęsi mogą chodzić każdego dnia w innej kolejności nie tylko przez miesiąc, ale nawet przez prawie dwa lata!

Dodajmy, że iloczyn liczb naturalnych od 1 do 6 oznaczamy symbolem 6!, który czytamy: 6 silnia. Ogólnie n! (n silnia) to iloczyn liczb naturalnych od 1 do n.

KIlka przykładów obliczania prawdopodobieństwa

W ujęciu szkolnym prawdopodobieństwo jest liczbą mierzącą szansę zdarzeń losowych.

Wyobraźmy sobie, że w urnie mamy dwie kule, jedną białą i jedną czarną. Wybieramy losowo jedną z nich, zwracamy do urny, po czym znowu losujemy jedną kulę. Zastanówmy się, co jest bardziej prawdopodobne: wylosowane kule są obie białe, obie czarne, czy jedna z nich jest biała, a druga czarna?

Wypiszmy wszystkie możliwe wyniki losowań, oznaczając białą kulę literą b, a czarną literą c. Możemy wylosować: (b, b), (b, c), (c, b), (c, c). Są więc cztery możliwości, w jednym przypadku obie kule są białe, w jednym obie są czarne, a dwóch przypadkach jedna z nich jest biała, a druga czarna. Zatem prawdopodobieństwo tych zdarzeń jest równe odpowiednio $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$.

W urnie są dwie kule białe i jedna czarna. Losujemy dwie kule jednocześnie. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul różnych kolorów?

Zadanie jest proste, chociaż nieco podchwytliwe. Aby uniknąć wpadki, ponumerujmy kule białe i wypiszmy możliwe wyniki losowań: obie kule białe, biała nr 1 i czarna, biała nr 2 i czarna.

Jak widać, wylosowanie kul różnych kolorów występuje w dwóch z trzech możliwych wyników, więc jego prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{3}$.

Ze zbioru liczb 3, 5, 11, 16 losujemy jednocześnie dwie liczby.
Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest:
a) parzysta,
b) podzielna przez 3?

Wypiszmy wszystkie możliwe wyniki losowania: 3 i 5, 3 i 11, 3 i 16, 5 i 11, 5 i 16, 11 i 16. Jest ich 6.

a) Sumę parzystą mają trzy pary liczb, więc szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{3}{6}$, czyli $\frac{1}{2}$.

b) Dwie spośród par liczb mają sumę podzielną przez 3, więc szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{2}{6}$, czyli $\frac{1}{3}$.

Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek jest równa 6?

Na jednej kostce możemy otrzymać jedną z 6 możliwych liczb, a do każdej z nich dołącza się 6 możliwych liczb na drugiej kostce. Mamy zatem $6 \cdot 6$, czyli 36, możliwych wyników.

Sumę 6 otrzymamy w następujących przypadkach:

Rzut nr 1	Rzut nr 2
5	1
1	5
4	2
2	4
3	3

Jak widać, jest tych przypadków 5. Szukane prawdopodobieństwo jest zatem równe $\frac{5}{36}$.

A jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając dwiema kostkami, otrzymamy sumę oczek różną od 6?

Pytamy o prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do wyrzucenia sumy 6. Sumę oczek różną od 6 otrzymamy w $(36 - 5)$ przypadkach. Zatem prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $\frac{36-5}{36}$, czyli $1 - \frac{5}{36}$.

W każdym losowaniu suma liczby wyników dowolnego zdarzenia i liczby wyników zdarzenia przeciwnego jest równa sumie wszystkich możliwych wyników. Stąd wynika, że suma prawdopodobieństwa dowolnego zdarzenia i prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego jest równa 1.

Sprawdź, czy potrafisz

1. W urnie są dwie kule białe, jedna czarna i jedna niebieska. Losujemy jednocześnie dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie będą białe?

Wskazówka: nie zapomnij ponumerować białych kul, wypisując wszystkie możliwe wyniki losowania.

2. Ze zbioru liczb $3, -3, -10, 10, -\pi$ losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jej wartość bezwzględna jest:

a) większa od 3, b) nie mniejsza od 3, c) mniejsza od 3?

3. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie równa 4?

1. $\frac{1}{6}$.

2. a) $\frac{3}{5}$, b) 1, c) 0.

3. $\frac{3}{36}$, czyli $\frac{1}{12}$.

Przegląd zadań maturalnych

Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek wynosi 3?

Jest 6 możliwych wyników pierwszego rzutu, a przy każdym z nich mamy 6 wyników drugiego rzutu. Wszystkich możliwych wyników obu rzutów jest zatem $6 \cdot 6$, czyli 36.

Suma oczek 3 jest osiągnięta tylko w dwóch przypadkach: w pierwszym rzucie mamy 1, a w drugim 2, lub odwrotnie. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{36}$, czyli $\frac{1}{18}$.

Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy Twoja rodzina?" Wyniki przedstawiono w tabeli:

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia arytmetyczna osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Oblicz x.

Zapisujemy warunek, że średnia arytmetyczna jest równa 4, otrzymując $\frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + x \cdot 2}{20} = 4$.

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$3 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + x \cdot 2 = 80, \quad 2x = 80 - 18 - 48, \quad 2x = 14, \quad x = 7.$

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest równa 7.

W pierwszym losowaniu możemy otrzymać jedną z 7 liczb, a w każdym przypadku dochodzi jeszcze 7 możliwości wylosowania drugiej liczby. Wszystkich możliwych wyników jest więc $7 \cdot 7$, czyli 49.

Wypiszmy wszystkie wyniki, w których suma otrzymanych liczb jest równa 7:

Pierwsze losowanie	Drugie losowanie
1	6
6	1
2	5
5	2
3	4
4	3

Jak widać, sumę 7 otrzymujemy w 6 przypadkach, więc szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{6}{49}$.

W czterech rzutach sześcienną kostką do gry otrzymano następujące liczby oczek: $6, 3, 1, 4$. Oblicz medianę tych danych.

Trzeba ustawić liczby według kolejności wzrastania: $1, 3, 4, 6$.

Mediana jest średnią arytmetyczną środkowej pary liczb, więc jest równa $\frac{3+4}{2}$, czyli $3{,}5$.

W karcie jest 5 zup i 4 drugie dania. Na ile sposobów można zamówić obiad składający się z zupy i drugiego dania?

Każda zupa wchodzi w skład 4 zestawów, a ponieważ zup jest 5, więc mamy $5 \cdot 4$, czyli 20, zestawów.

Wybieramy liczbę a za zbioru $\{2, 3, 4, 5\}$ oraz liczbę b ze zbioru $\{1, 4\}$. Ile jest takich par liczb (a, b), że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą?

Wszystkich możliwych wyników jest $4 \cdot 2$, czyli 8. Korzystając z tego, że iloczyn liczb jest parzysty tylko wtedy, kiedy co najmniej jeden czynnik jest parzysty, wypiszmy wszystkie pary liczb a, b spełniające podany warunek:

a	2	2	3	4	4	5
b	1	4	4	1	4	4

Ponieważ iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą w 6 przypadkach, więc szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{6}{8}$, czyli $\frac{3}{4}$.

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, których pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste.

Pierwszą cyfrą może być $2, 4, 6, 8$, a każdą kolejną $1, 3, 5, 7, 9$. Zatem mamy 4 możliwości wybrania pierwszej cyfry, przy każdej z nich mamy 5 możliwości wybrania drugiej cyfry, potem mamy po 5 możliwości wybrania trzeciej i czwartej cyfry. Zatem liczb czterocyfrowych jest $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, czyli $4 \cdot 5^3$.

Średnia arytmetyczna cen sześciu akcji na giełdzie jest równa 500 zł. Za pięć z tych akcji zapłacono 2300 zł. Ile wynosi cena szóstej akcji?

Oznaczmy przez x szukaną cenę. Z określenia średniej arytmetycznej wynika równanie $\frac{2300 + x}{6} = 500$, skąd $x = 700$. I tyle złotych kosztuje szósta akcja.

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb w obu rzutach będzie podzielny przez 12.
Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

Wszystkich możliwych wyników jest $6 \cdot 6$, czyli 36.
Wypiszmy wyniki sprzyjające zdarzeniu, o którym mowa w zadaniu:

Pierwszy rzut	Drugi rzut
2	6
4	3
4	6
6	2
6	4
6	6

Wyników sprzyjających zdarzeniu jest 6, więc szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{6}{36}$, czyli $\frac{1}{6}$.

Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że liczba oczek w drugim rzucie jest o 1 większa od liczby oczek w pierwszym rzucie.

Jak wiemy, wszystkich możliwych wyników jest $6 \cdot 6$, czyli 36.
Wyniki sprzyjające zdarzeniu są następujące: $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$.
Jest ich 5, skąd szukane prawdopodobieństwo to $\frac{5}{36}$.

Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:

a) w każdym rzucie wypadnie parzysta liczba oczek,

b) suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest większa od 9,

c) suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą większą od 9.

Wszystkich możliwych wyników jest 36.

a) Parzysta liczba oczek to 2, 4 lub 6. Liczba oczek na każdej kostce ma więc być jedną z trzech liczb. Takich wyników jest $3 \cdot 3$, czyli 9.
Szukane prawdopodobieństwo jest zatem równe $\frac{9}{36}$, czyli $\frac{1}{4}$.

b) Jeżeli suma oczek jest większa od 9, to może być równa 10, 11 lub 12.
Oznacza to, że wynikiem pierwszego i drugiego rzutu jest jedna z par liczb:
$(4, 6), (6, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6)$. Par tych jest 6, więc szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{6}{36}$, czyli $\frac{1}{6}$.

c) Jeżeli suma oczek jest większa od 9 i nieparzysta, to jest równa 11.
Oznacza to, że wynikiem pierwszego i drugiego rzutu jest para $(5, 6)$ lub $(6, 5)$.
Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{36}$, czyli $\frac{1}{18}$.

A jest zdarzeniem losowym, A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A, $P(A) = 5 \cdot P(A')$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Ponieważ $P(A) + P(A') = 1$, więc $5 \cdot P(A') + P(A') = 6 \cdot P(A') = 1$,
skąd $P(A') = \frac{1}{6}$ oraz $P(A) = \frac{5}{6}$.

W pudełku są trzy białe kule i pięć czarnych. Do pudełka można albo dołożyć jedną kulę białą albo usunąć z niego jedną kulę czarną, a następnie wylosować z tego pudełka jedną kulę. W którym z tych przypadków wylosowanie białej kuli jest bardziej prawdopodobne? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

W pierwszym przypadku w pudełku znajdą się 4 białe kule i 5 czarnych, więc prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej będzie równe $\frac{4}{9}$. W drugim przypadku w pudełku będą 3 białe kule i 4 czarne, więc prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej będzie równe $\frac{3}{7}$. Pozostaje porównać oba ułamki.
Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymamy: $\frac{4}{9}=\frac{4\cdot 7}{9\cdot 7}$, $\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 9}{7\cdot 9}$.
Ponieważ $4\cdot 7>3\cdot 9$, więc wylosowanie białej kuli jest bardziej prawdopodobne w pierwszym przypadku.

Tabela przedstawia oceny uzyskane przez uczniów na sprawdzianie.

Oceny	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	1	2	6	5	9	2

Oblicz średnią arytmetyczną i kwadrat odchylenia standardowego uzyskanych ocen.

Średnia arytmetyczna to $\frac{6+5\cdot 2+4\cdot 6+3\cdot 5+2\cdot 9+1\cdot 2}{25}$, czyli 3.
W odchyleniu standardowym występują kwadraty różnic między średnią arytmetyczną i poszczególnymi ocenami, a każdy z nich powtarza się tyle razy, ilu uczniów orzymało daną ocenę. Jeżeli ocena pokrywa się ze średnią arytmetyczną, to odpowiadający jej składnik jest zerem.
W danym przypadku kwadrat odchylenia standardowego (tzw. wariancja) jest równy $\frac{(6-3)^2+2\cdot(5-3)^2+6\cdot(4-3)^2+9\cdot(2-3)^2+2\cdot(1-3)^2}{25}$, czyli 1.6.

Flagę należy zszyć z trzech jednakowych pasów materiału, jeden pod drugim. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Ile różnych takich flag można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach?

Kolor pasów zewnętrznych możemy wybrać 10 sposobami, a przy każdym z tych kolorów mamy jeszcze 9 możliwości wyboru koloru pasa środkowego.
Razem więc można uszyć $10 \cdot 9$, czyli 90 różnych flag.

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

Ponieważ za każdym razem losujemy liczbę ze zbioru 7-elementowego, więc za każdym razem mamy 7 możliwości wylosowania liczby, skąd liczba wszystkich możliwości przy losowaniu dwukrotnym jest równa $7 \cdot 7$, czyli 49.

Przedstawmy w tabelce wyniki, w których iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6:

Pierwsze losowanie	1	2	3	4	5	6	7
Drugie losowanie	6	3, 6	2, 4, 6	3, 6	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	6

Wyników pokazanych w tabelce jest 17, więc szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{17}{49}$.

LINGO
języki nieobce
www.wydawnictwolingo.pl

Wydawnictwo
LINGO
nowa jakość
w nauce języków obcych

■ angielski ■ niemiecki ■ rosyjski ■ hiszpański ■ francuski ■ włoski ■



KURSY „RAZ A DOBRZE”

**Samouczki nowej generacji:
książka + pakiet multimedialny**

- 30 lekcji, w tym powtórkowe
- żywy, współczesny język
- ćwiczenia z kluczem, testy na rozumienie ze słuchu
- audio CD z dialogami i słownictwem
- CD-ROM z programem komputerowym, grami językowymi i nagraniami MP3



REPETYTORIA

**Egzaminy językowe:
nowa matura, FCE, CAE**

- kompletny zestaw repetytoriów do nauki angielskiego
- najważniejsze zagadnienia językowe
- gramatyka, frazeologia, słownictwo
- testy, ćwiczenia z kluczem, quizy
- wzory wypracowań angielskich i niemieckich



ROZMÓWKI „POWIEDZ TO!”

Książka + audio CD

- zwroty i słówka na każdą okazję
- dialogi, słowniczek, tablice
- nagrania z udziałem native speakerów i polskiego lektora
- do nauki i słuchania w podróży, w domu, w samochodzie

**Wydawnictwo
LINGO
www.wydawnictwolingo.pl**

**tel.: +48 22 353 84 22
faks: +48 22 353 84 23
e-mail: lingo@wydawnictwolingo.pl**