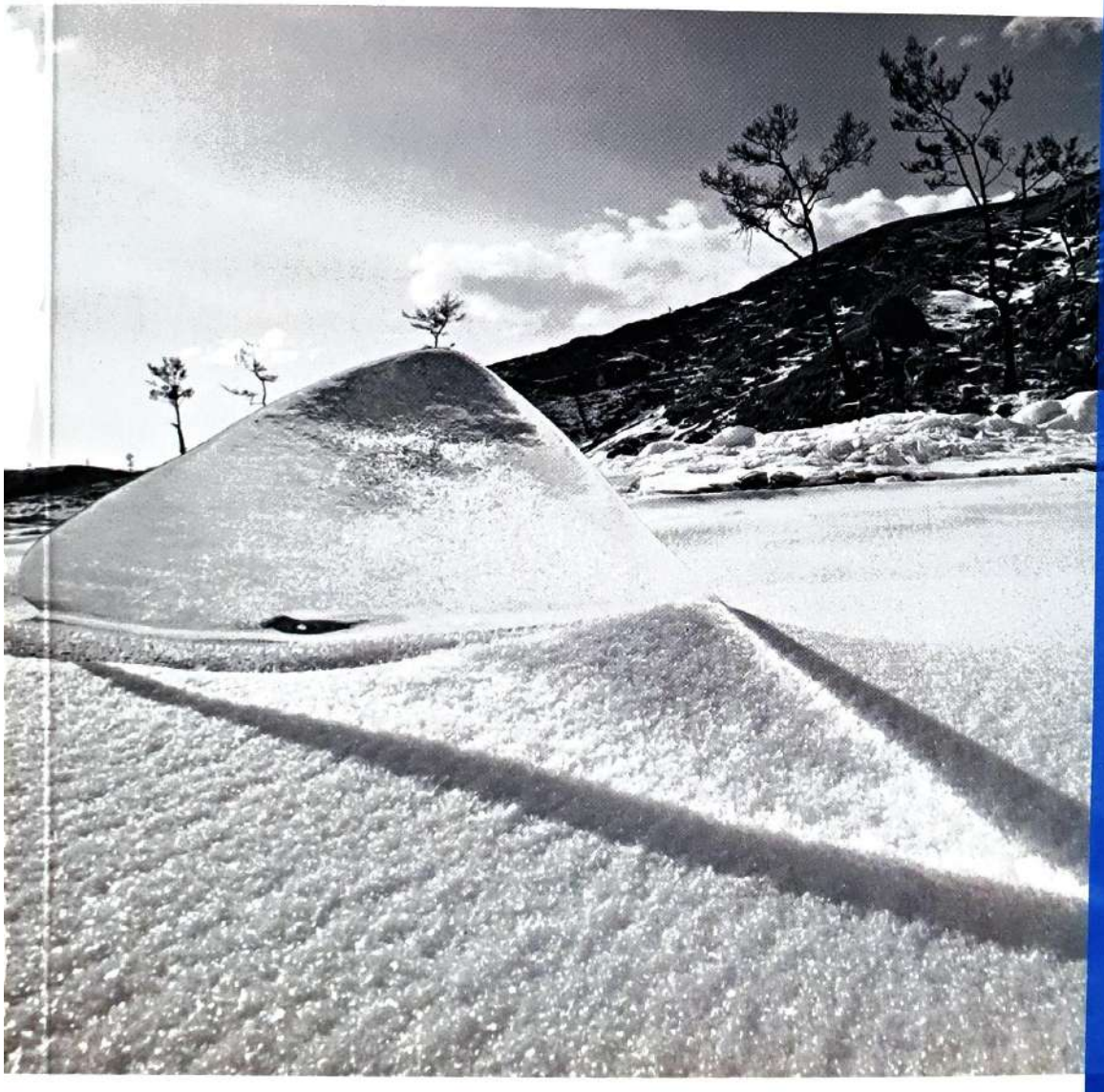
Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA

Zbiór zadań do liceów i techników



ZAKRES ROZSZERZONY

Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA 4

Zbiór zadań do liceów i techników

ZAKRES ROZSZERZONY

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Spis treści

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie 5
Funkcja wykładnicza i jej własności 9
Przekształcenia wykresów funkcji wykładniczych 12
Równania wykładnicze 16
Nierówności wykładnicze 19
Zastosowanie własności funkcji wykładniczej w zadaniach 22
Test sprawdzający do rozdziału 1. 23
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1. 25

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm – powtórzenie wiadomości 29
Funkcja logarytmiczna – powtórzenie i uzupełnienie wiadomości 33
Przekształcenia wykresów funkcji logarytmicznych 37
Równania logarytmiczne 40
Nierówności logarytmiczne 44
Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym 46
Test sprawdzający do rozdziału 2. 48
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2. 49

3. Elementy statystyki

Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej 53
Średnia z próby 55
Mediana z próby i moda z próby. Skala centylowa 58
Wariancja i odchylenie standardowe 63
Test sprawdzający do rozdziału 3. 66
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3. 68

4. Rachunek prawdopodobieństwa

Kombinatoryka – powtórzenie 70
Doświadczenie losowe 74
Zdarzenia. Działania na zdarzeniach 77
Określenie prawdopodobieństwa 81
Obliczanie prawdopodobieństwa 82
Doświadczenia losowe wieloetapowe 90
Prawdopodobieństwo warunkowe 92
Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa 95
Niezależność zdarzeń 98
Schemat Bernoulliego 100
Zmienna losowa. Wartość oczekiwana zmiennej losowej 103
Test sprawdzający do rozdziału 4. 105
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4. 106

5. Geometria przestrzenna. Wielościany
Płaszczyzny i proste w przestrzeni.
Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne 111
Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni 112
Rzut równoległy na płaszczyznę.
Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę 114
Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych 116
Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny 117
Graniastosłupy 119
Ostrosłupy 121
Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu 125
Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów 129
Przekroje wielościanów – konstrukcje 134
Przekroje wielościanów – zadania 135
Test sprawdzający do rozdziału 5. 139
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5. 140

6. Geometria przestrzenna. Bryły obrotowe
Walec 144
Stożek 147
Kula i sfera 150
Bryły obrotowe – zadania różne 151
Podobieństwo figur w przestrzeni 153
Zastosowanie analizy matematycznej
w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej 155
Test sprawdzający do rozdziału 6. 157
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6. 158

Odpowiedzi do zadań
1. Funkcja wykładnicza 161
2. Funkcja logarytmiczna 170
3. Elementy statystyki 179
4. Rachunek prawdopodobieństwa 183
5. Płaszczyzny i proste w przestrzeni.
Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne 195
6. Geometria przestrzenna. Bryły obrotowe 204

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych 210

Symbolem $\mathcal{D}$ zostały oznaczone zadania na dowodzenie.

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie

1.1. Oblicz:

a) $(-1{,}5)^3$ b) -2^4 c) $0{,}75^{-2}$

d) $\left(\frac{2}{3}-2^{-2}\right)^{-1}$ e) $\left(2\sqrt{2}\right)^{-3}$ f) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^{-2}$

1.2. Oblicz:

a) $1{,}21^{\frac{1}{2}}$ b) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{2}{5}}$ c) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}$

d) $\left(8^{-\frac{1}{3}}+9^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ e) $\left[\left(\frac{216}{125}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(1\frac{1}{4}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}$ f) $\left[8^{\frac{2}{3}}-0{,}25^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{4}{3}}$

1.3. Oblicz, korzystając z praw działań na potęgach.

a) $\frac{\left(7^2\cdot 7^4\right)^6}{7^{40}:7^3}$ b) $\frac{\left(16^{-2}\right)^3}{4^{-7}\cdot 2^{-9}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{81}\cdot 9^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{7}{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{27}}}$

d) $8:13^{\frac{1}{2}}\cdot 52^{0{,}5}$ e) $\sqrt{75}:3^{1\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{6}}$ f) $\left(18^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{4}:27^{-\frac{1}{6}}\right)^{-1{,}2}$

1.4. Przedstaw daną liczbę w postaci n^w, gdzie n jest liczbą naturalną, a w jest liczbą wymierną.

a) $\sqrt[3]{16}\cdot 0{,}125^{-0{,}5}$ b) $\sqrt[4]{125^3}\cdot 0{,}008^{-\frac{1}{3}}$ c) $\frac{0{,}5^{-4}\cdot 81}{\sqrt[3]{216^{0{,}6}}}$

d) $\frac{81^{-0{,}75}\cdot 12^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{72}}$ e) $\sqrt[4]{16^{-\frac{2}{3}}\cdot 8\sqrt[3]{4}}$ f) $\frac{\sqrt[5]{\frac{1}{16}}\cdot 5^{-0{,}4}}{50\cdot 2^{0{,}6}}$

1.5. Oblicz wartość wyrażeń.

a) $\sqrt{9}\cdot\left[1{,}5^{-1}+9^{-1{,}5}\right]-27^{-\frac{2}{3}}$

b) $\left[\left(\frac{81}{625}\right)^{-0{,}75}:\left(1\frac{2}{3}\right)^{3}-0{,}125^{\frac{1}{3}}\right]^{-2}$

c) $\sqrt[3]{0{,}375}\cdot\sqrt[3]{9}+\left(3^{-1}-\sqrt[4]{\frac{16}{81}}\right)^{-2}$

d) $\left[\frac{125^{\frac{2}{3}}-0{,}2^{-1}}{0{,}5^{-2}}\cdot 0{,}2^{-3}\right]^{\frac{3}{4}}$

1.6. Oblicz wartość wyrażeń.

a) $\frac{\left(3^{1{,}5}-\sqrt{3}\right)\left(3^{1{,}5}+\sqrt{3}\right)}{12^{\frac{1}{3}}\cdot 12^{\frac{1}{3}}\cdot 12^{\frac{1}{3}}}$

b) $\left(4^{-\frac{2}{3}}+4^{-\frac{2}{3}}+4^{-\frac{2}{3}}+4^{-\frac{2}{3}}\right)^{4}:32^{\frac{1}{3}}$

c) $\left(10\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(10\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

d) $\left[\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{3-\sqrt{5}}\right]^{3+\sqrt{5}}$

D 1.7. Wykaż, że liczba $\frac{6^{-14}+12\cdot 6^{-15}}{0{,}5^{14}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{15}}$ stanowi 3750% liczby $\frac{5^{-20}+5^{-19}}{125^{-6}}$.

D 1.8. Wykaż, że:

a) $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\cdot\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{3}}}{45^{\frac{1}{2}}\cdot 0{,}75^{-1}}=\frac{\sqrt{5}}{30}$

b) $\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^{-3}\cdot 18^{\frac{1}{2}}:6^{-\frac{3}{2}}}{31{,}25^{-\frac{1}{3}}}=\frac{15\sqrt[3]{2}}{4}$

1.9. Wiadomo, że przybliżenie dziesiętne liczby $100^{\frac{1}{3}}$ jest równe 4,641588834. Podaj przybliżenie dziesiętne podanych niżej liczb. Wynik zaokrąglij do piątego miejsca po przecinku.

a) $100^{\frac{4}{3}}$ b) $100^{-\frac{5}{3}}$ c) $100^{\frac{5}{6}}$ d) $100^{\frac{1}{6}}$

1.10. Oblicz, o ile procent:

a) liczba a jest większa od liczby b, jeśli $a=\sqrt{666^2+888^2}$, $b=\frac{\sqrt[3]{32}\cdot 625^{0{,}5}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^{-3}}$,

b) liczba x jest mniejsza od liczy y, jeśli $x=\left(\frac{27^{-9}+81^{-7}}{9^{-13}}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $y=\frac{\sqrt[6]{60}\cdot\sqrt[3]{60}\cdot\sqrt{60}}{15}$.

1.11. Porównaj liczby x i y, jeśli:

a) $x=\left(3\sqrt{3}\right)^{12}$, $y=243\cdot 9^6$

b) $x=\dfrac{8\cdot 0{,}5^{-9}}{16^{-1}}$, $y=81^4$

c) $x=\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, $y=\sqrt[3]{2}$

d) $x=\left(3^{-\frac{1}{2}}+1\right)^{-2}$, $y=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$

e) $x=\left[\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $y=\left(3^{2\sqrt{2}-1}\right)^{2\sqrt{2}-1}$

f) $x=4^{12}-9^6$, $y=2^{12}+3^6$

D 1.12. Wykaż, że dana liczba jest liczbą naturalną.

a) $\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(5\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) $\left[\left(6+\sqrt{11}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(6-\sqrt{11}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

D 1.13. Wykaż, że dana liczba jest liczbą całkowitą.

a) $\left[\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\cdot\left(2-2\sqrt{5}\right)$

b) $\left(9-4\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(6-2\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

c) $\left(5-2\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(49+20\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{4}}$

d) $\left(17-288^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(3+8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

1.14. Rozwiąż równania.

a) $x^2\cdot\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)=\sqrt{48}-\sqrt{32}$

b) $4^{-0{,}25}-2^{0{,}5}=\dfrac{2{,}5-4x}{4^{-0{,}25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$

c) $\dfrac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2\cdot(x-2)}{2}=\dfrac{2}{\left(3+\sqrt{5}\right)^2\cdot(x-2)}$

d) $\dfrac{x+5{,}5}{14}\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)=\dfrac{\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}{8^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{2}}}$

1.15. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(2\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+1\right)>7+\sqrt{3}$

b) $(2x-1)^2 \geqslant \frac{\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1\right)\left(\sqrt[3]{7}+1\right)}{2}$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)x<\frac{x^2+(0{,}25)^{-1}\cdot x+8^{\frac{2}{3}}}{1-\sqrt{2}}$

d) $\frac{x^2+12}{\sqrt{3}+1}>\left(6-2\sqrt{3}\right)\cdot x$

1.16. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{a^{-2}-\frac{4}{b^2}}{a^{-1}-2b^{-1}}$, jeśli $a=1-\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$

b) $\frac{\left(\frac{1}{ab}\right)^{-2}\cdot\left(a^{-3}+b^{-3}\right)}{2a^2-2ab+2b^2}$, jeśli $a=\sqrt{3}-1$, $b=\sqrt{3}+1$

D 1.17. Wykaż, nie korzystając z kalkulatora, że:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)^2>\sqrt[3]{\frac{1}{30}}$

b) $\left(\sqrt{5-\sqrt{2}}+\sqrt{5+\sqrt{2}}\right)^2>10+4\sqrt{5}$

D 1.18. Wykaż, że jeśli $x>0$ i $y>0$, to $\frac{xy^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{xy}$.

D 1.19. Wykaż, że jeśli $a\neq 0$ i $a\neq -b$, to $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-1}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a$.

D 1.20. Wykaż, że jeśli $a<0$ i $b<0$, to $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\geqslant\frac{2b-a}{b}$.

1.21. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci. Pamiętaj o założeniach.

a) $(1+x^{-1})^{-2}-(1-x^{-1})^{-2}$

b) $\left(\dfrac{4x-9x^{-1}}{2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{x-4+3x^{-1}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$

c) $\left[\left(\dfrac{x\sqrt[3]{y}}{y\sqrt{x^3}}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt[8]{y^3}}\right)^2\right]:\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)$

d) $\left(\dfrac{9}{x+8}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+2}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+4}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{4}{3}}+8x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{1}{3}}}$

D 1.22. Wykaż, że jeśli $x=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, to wartość wyrażenia $\frac{1}{3}x^3-x$ jest równa $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

D 1.23. Wykaż, że:

a) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$

b) $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}=3$

1.24. Liczby $\left(4^{0,75}-\sqrt{3}\right)\left(4^{0,75}+\sqrt{3}\right)$, $x^3-4\frac{1}{2}$, $\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$, w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x oraz różnicę tego ciągu.

1.25. Liczby $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}$, $\left(4x^2-12x+9\right)^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$, w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz x.

Funkcja wykładnicza i jej własności

1.26. Dany jest wzór funkcji wykładniczej f. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.

a) $f(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$

b) $f(x)=0{,}4^x$

c) $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$

d) $f(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$

1.27. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby x, y, z, t, jeśli:

a) $x=\left(\sqrt{3}\right)^{2\sqrt{2}}$, $y=\left(\sqrt{3}\right)^{1+\sqrt{2}}$, $z=\left(\sqrt{3}\right)^{\pi}$, $t=\left(\sqrt{3}\right)^{-2+\sqrt{3}}$

b) $x=\left(\frac{1}{7}\right)^{-\sqrt{5}}$, $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{0,(6)}$, $z=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{3}{5}}$, $t=\left(\frac{1}{7}\right)^{0}$

c) $x=0{,}125^{\frac{2}{3}}$, $y=16^{-\sqrt{3}}$, $z=\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\pi}$, $t=\left(\sqrt[6]{128}\right)^{\frac{3\sqrt{2}}{7}}$

d) $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, $y=\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}\right)^{-1}$, $z=\left(\frac{\sqrt{125}+10}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}$, $t=\left|\frac{1}{2-\sqrt{5}}\right|^{\frac{1}{2}}$

1.28. Podaj, jaki związek zachodzi między wykładnikami m i n, jeśli:

a) $\left(1+\sqrt{2}\right)^{m}>\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{n}$

b) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{m}<\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^{n}$

c) $\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)^{m}<\left(\sqrt[4]{8}\right)^{n}$

d) $\left[\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}\right]^{m}<\left(4-2\sqrt{3}\right)^{n}$

1.29. Określ, czy liczba x jest dodatnia, czy ujemna, jeśli:

a) $6^{x}=2$

b) $0{,}12^{x}=4$

c) $\left(\sqrt{5}\right)^{x}=0{,}4$

d) $10^{x}=\sqrt{3}+2$

e) $0{,}75^{x}=2\sqrt{2}-1$

f) $\left(\frac{8}{3}\right)^{x}=8^{-\frac{1}{3}}$

1.30. Napisz wzór funkcji wykładniczej f wiedząc, że do jej wykresu należy punkt:

a) $B\left(-1,\frac{1}{4}\right)$

b) $C(-2, 25)$

c) $D(4, 64)$

1.31. Do wykresu funkcji wykładniczej f należy punkt $A(-2, 4)$.

a) Napisz wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres.

b) Oblicz wartość tej funkcji dla argumentu $-1\frac{1}{2}$.

c) Podaj argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 8.

d) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe od 2.

1.32. Do wykresu funkcji wykładniczej g należy punkt $B\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

a) Napisz wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres.
b) Oblicz wartość tej funkcji dla argumentu $-0{,}75$.
c) Podaj argument, dla którego funkcja g przyjmuje wartość 8.
d) Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $1 \leqslant g(x) < 16$.

1.33. Rozwiąż dane równanie. Skorzystaj z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $2^x = \frac{2}{x}$ b) $(x+2)^2 + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $4^x = \left|1 - \frac{x}{2}\right|$

1.34. Rozwiąż daną nierówność. Skorzystaj z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $\left(\sqrt{2}\right)^x < 6 - 2x$ b) $3^x \geqslant -2x^2 + 4x + 1$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{2}{x} \leqslant 0$

D 1.35. Wykaż, że funkcja:

a) $f(x) = 5^x + 5^{-x}$ jest parzysta
b) $g(x) = \frac{3^{2x} - 1}{3^x}$ jest nieparzysta
c) $h(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \cdot x^3$ jest parzysta
d) $t(x) = \left(7^x - \frac{1}{7^x}\right) \cdot \sin x$ jest parzysta.

D 1.36. Funkcja $f(x) = 4^x + 4^{-x}$ przyjmuje wartość 23 dla pewnego argumentu x_0. Wykaż, że funkcja $g(x) = 2^x + 2^{-x}$ dla argumentu x_0 przyjmuje wartość 5.

D 1.37. Funkcja $g(x) = 3^x - 3^{-x}$ przyjmuje wartość 2 dla pewnego argumentu x_0. Wykaż, że funkcja $h(x) = 27^x - 27^{-x}$ dla argumentu x_0 przyjmuje wartość 14.

1.38. Wyznacz zbiór wartości funkcji f w podanym przedziale liczbowym.

a) $f(x) = \frac{5^{-2x}}{2} - \frac{1}{5^x}$, $x \in \langle -1, 0 \rangle$
b) $f(x) = \frac{2^x + 4}{2^x - 1}$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$
c) $f(x) = 3^{x+|x|}$, $x \in \langle -1, 2 \rangle$
d) $f(x) = 0{,}75^{x^2 - 6x}$, $x \in \langle 1, 2 \rangle$
e) $f(x) = 2^{-x^2+9}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$
f) $f(x) = \left(\sqrt[4]{3}\right)^{2x^2 + 4x - 16}$, $x \in \langle -3, 0 \rangle$

1.39. Wyznacz zbiór wartości funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{-2\cdot 5^x-7}{5^x+4}$, $x \in \mathbf{R}$

b) $f(x)=\frac{2\cdot 3^x-15}{3^x-9}$, $x \in \mathbf{R}-\{2\}$

c) $f(x)=9^x-2\cdot 3^x+4$, $x \in \mathbf{R}$

d) $f(x)=\frac{1}{3}\cdot 8^x-2\cdot 4^x+3\cdot 2^x$, $x \in \mathbf{R}$

e) $f(x)=\frac{-2\cdot 25^x}{\left(5^x+1\right)^2}$, $x \in \mathbf{R}$

f) $f(x)=\frac{3^{3x}}{1-3^{2x}}$, $x \in \mathbf{R}-\{0\}$.

D 1.40. Wykaż, że jeśli ciąg wybranych argumentów $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ funkcji wykładniczej $f(x)=7^x$ jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg wartości $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots)$ jest ciągiem geometrycznym.

Przekształcenia wykresów funkcji wykładniczych

1.41. Wykres funkcji $f(x)=3^x$, $x \in \mathbf{R}$, przekształcono i otrzymano wykres funkcji g. Napisz wzór funkcji g i opisz to przekształcenie.

a) $g(x)=f(x-2)$

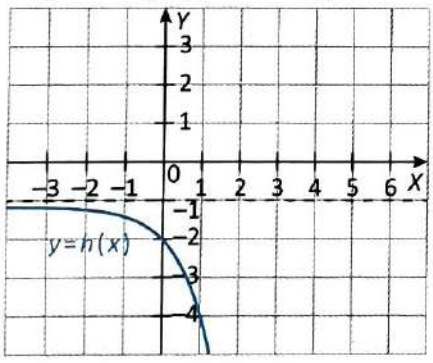
b) $g(x)=1-f(-x)$

c) $g(x)=-f(x+1)-3$

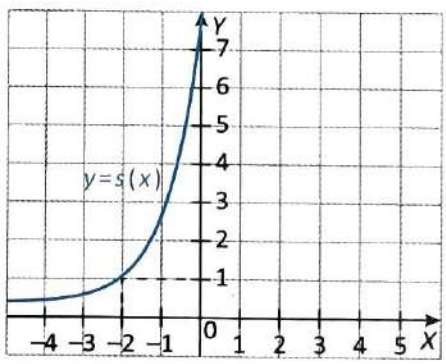
d) $g(x)=f(4-x)+5$

1.42. Na rysunkach poniżej są przedstawione wykresy funkcji, które powstały w pewnym przekształceniu wykresu funkcji wykładniczej $f(x)=3^x$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Podaj wzory tych funkcji.

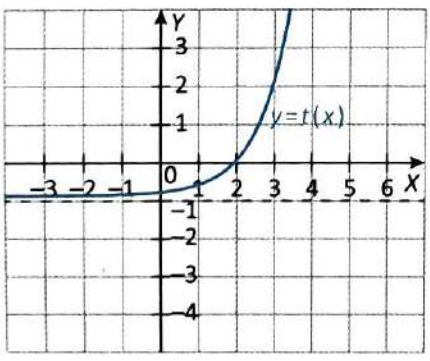
a)



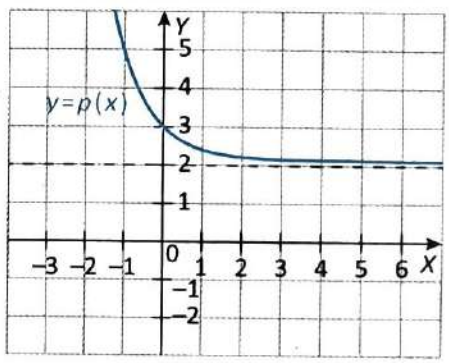
b)



c)



d)



1.43. Dany jest wzór funkcji, określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ b) $y=-1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ c) $y=2^{1-x}+3$ d) $y=2-\left(\frac{1}{4}\right)^{-x-1}$

1.44. Wykres funkcji wykładniczej $f(x)=2^x$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}=[2,-1]$. Następnie otrzymany wykres przekształcono przez symetrię osiową względem osi OY i otrzymano wykres funkcji g.

a) Naszkicuj wykres funkcji g i napisz wzór tej funkcji.

b) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY.

c) Czy punkt $A(-42, 16^{10}-3^0)$ należy do wykresu funkcji g?

1.45. Wykres funkcji wykładniczej $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ przekształcono przez symetrię osiową względem osi OX. Następnie otrzymany wykres przesunięto równolegle o wektor $\vec{v}=[-2,1]$ i otrzymano wykres funkcji g.

a) Naszkicuj wykres funkcji g i napisz wzór tej funkcji.

b) Oblicz wartość funkcji g dla argumentu -6.

c) Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości dodatnie.

1.46. Wykres funkcji wykładniczej $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $O(0, 0)$. Następnie otrzymany wykres przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}=[3,2]$ i otrzymano wykres funkcji g.

a) Naszkicuj wykres funkcji g i napisz wzór tej funkcji.

D b) Uzasadnij, że miejscem zerowym funkcji g jest liczba $3\frac{1}{2}$.

c) Rozwiąż graficznie nierówność $g(x)-\frac{1}{3}x\geqslant 0$.

1.47. Wykres funkcji f przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}$ i otrzymano wykres funkcji h. Podaj wzór funkcji h.

a) $f(x)=4-5^{x-2}$, $\vec{u}=[5,-7]$ b) $f(x)=7^{3-x}+1$, $\vec{u}=[-8,3]$

1.48. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{1}{3^x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=f(x+1)-4$.

b) Oblicz wartość wyrażenia $\left[g(-3)\cdot g(-2)\right]^2$.

c) Na podstawie wykresu funkcji g rozwiąż nierówność $g(x) > -1$.

1.49. Dana jest funkcja $f(x) = 4^{-x}$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)-2$.

b) Sprawdź, czy liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji g. Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartości nieujemne?

c) Czy do wykresu funkcji g należy punkt $C\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-2\right)$?

1.50. Rozwiąż równania, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $2^x = 8$

b) $7^{x-1}=0$

c) $9\cdot 3^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

d) $0{,}5^{x+3}=\frac{1}{8}\cdot 2^{-x}$

e) $4^{x+2}-3=5^{x+1}$

f) $0{,}25^{-\frac{1}{2}x+1{,}5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}-1$

1.51. Rozwiąż równania, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $3^x=\frac{3}{x}$

b) $-2^{x-1}=\frac{1-3x}{2}$

c) $2^{x+3}-4=\frac{-3}{4}\cdot(x+1)^2$

1.52. Rozwiąż nierówności, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $2^{x+1}\leqslant 4$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9^{x+1}+2$

c) $25^{\frac{1}{2}x}-4\leqslant 0{,}5^{x-1}$

d) $3^x-2\leqslant -0{,}5^x$

e) $64^{\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}}\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

f) $\frac{2^{x-1}+8}{2} > 3-2^{x-4}$

1.53. Rozwiąż nierówności, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $2^{x-2}\leqslant 5-x$

b) $\frac{-2}{x} < 2^{-x}$

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geqslant -x^2+3\frac{3}{4}x-1\frac{1}{4}$

1.54. Do wykresu funkcji $f(x) = b \cdot a^x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, $b \in \boldsymbol{R}$ i $x \in \boldsymbol{R}$, należy punkt $P(5, 27)$. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie o rzędnej $\frac{1}{9}$.

a) Wyznacz liczby a i b.

b) Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) \leqslant 4 - 2^{x-3}$.

1.55. Do wykresu funkcji $g(x) = c \cdot a^x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, $c \in \boldsymbol{R}$ i $x \in \boldsymbol{R}$, należą punkty $K\left(-2, \frac{1}{16}\right)$ oraz $L(1, 32)$.

a) Oblicz współczynniki a, c.

b) Naszkicuj wykres funkcji h określonej wzorem $h(x) = g\left(-\frac{x}{3}\right) + 1$.

c) Rozwiąż graficznie równanie $h(x) = 3^x$.

1.56. Dany jest wzór funkcji, określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $y = \left|3^{x+1} - 2\right|$ b) $y = \left|2^{-x} - 1\right| + 1$ c) $y = -3 \cdot 0{,}5^{|x|}$ d) $y = 2^{|2x+4|} - 4$

1.57. Dany jest wzór funkcji, określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $y = 2^{|x+1|+x}$ b) $y = 2^{|x+1|-1} - 3$ c) $y = \left|3^{|x|} - 4\right| - 3$ d) $y = 4 - \left|-3^{|x+2|} + 2\right|$

1.58. Rozwiąż graficznie równania.

a) $\left|2^{-x} - 1\right| = -2x^2 - 8x - 5$ b) $4^{|x|} = 5 - |x|$ c) $4 \cdot 2^{|x-1|} = 4 - |x-1|$

1.59. Rozwiąż graficznie nierówności.

a) $2^{|x|} < 3 - |x|$ b) $\left|2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right| \leqslant |x+2|$ c) $2^x \cdot 2^{|x|} \geqslant \frac{3x+13}{4}$

1.60. Dana jest funkcja $f(x) = 3^x + \frac{2}{3} \cdot 3^x + \frac{4}{9} \cdot 3^x + \frac{8}{27} \cdot 3^x + \ldots$, określona w zbiorze $\boldsymbol{R}$, a prawa strona wzoru tej funkcji jest szeregiem geometrycznym zbieżnym. Funkcja f przyjmuje wartość $\sqrt{5}$ dla pewnego argumentu należącego do przedziału $(k, k+1)$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$.

a) Wyznacz liczbę k.

b) Naszkicuj wykres funkcji g, określonej wzorem $g(x) = 2 - f(-|x|)$.

Równania wykładnicze

1.61. Rozwiąż równania.

a) $6^x = 216$ b) $0{,}4^x = 0{,}16$ c) $\left(2\frac{1}{3}\right)^x = 0$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4}{3}$ e) $\left(\frac{3}{8}\right)^x = 18\frac{26}{27}$ f) $\sqrt{75^x} = 1$

1.62. Rozwiąż równania.

a) $0{,}75^{x+5} = \left(1\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ b) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = 0{,}4^{3x-12}$ c) $\left(1\frac{1}{6}\right)^{2x-4} - \left(\frac{6}{7}\right)^{x+2} = 0$

d) $0{,}5^{3x-4} = 8^{2x+1}$ e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} - 8^{-x} = 0$ f) $5^{\frac{2}{x-1}} = 0{,}04^3$

1.63. Rozwiąż równania.

a) $2^{|x-1|} = 8$ b) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{|2+x|} = 25$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{|x+5|+1} = \left(2\frac{1}{4}\right)^3$

d) $\left(\sqrt{125}\right)^{|3-x|} = 5^{|3-x|}$ e) $4 \cdot 2^{|-x-1|} = 16^{|x+1|}$ f) $\frac{27}{9^{|x-4|}} = 3^{|4-x|}$

1.64. Rozwiąż równania.

a) $3^{x^2} = 9^{x-0{,}5}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2} = \left(2\frac{1}{4}\right)^2$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+x} = \left(2\frac{1}{2}\right)^{2x^2}$

d) $4^{x+2} - 2^{x^2-x} = 0$ e) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{2x-2}{x}} = 0$ f) $2^{\frac{x}{1-x}} - \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{x+2}} = 0$

1.65. Rozwiąż równania.

a) $\frac{4^x}{2} = 4^{\frac{1}{x+1}}$ b) $2^{x^3+x^2} = 32 \cdot 2^{5x}$ c) $\sqrt[3]{3^{x-2}} = 9^{\frac{(x-1)^2}{2x}}$

d) $\left(\frac{25}{81}\right)^{x^3} = \frac{5}{9} \cdot 1{,}8^{2x-x^2}$ e) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x+1}{x}}$ f) $\frac{4^{x^3}}{\sqrt{1024}} = \frac{16^{\frac{x}{2}}}{64^{\frac{x^2}{2}} \left(\sqrt[3]{8}\right)^{2x^2}}$

1.66. Rozwiąż równania.

a) $\left(\sqrt{8}\right)^{x}\cdot 2^{3x-4,5}=\left(\frac{1}{64}\right)^{x-1}$ b) $\left(125\sqrt{5}\right)^{2x}=5^{x^2+10}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}\cdot 8^{x}=\frac{2^{x-1}}{8}$

d) $\frac{3^{x^3}}{\left(\sqrt[4]{3}\right)^{4x+4}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$ e) $\frac{5^{x^2}}{\left(5\sqrt{5}\right)^{x}}=\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{11x-20}{x-1}}$ f) $\sqrt[3]{8^{\frac{1}{x}}\cdot 8^{\frac{2}{x-1}}}=\left(\sqrt[4]{4}\right)^{2x+1}$

1.67. Rozwiąż równania.

a) $2^{x+2}-2^{x-1}=14$ b) $5\cdot 4^{x}-2^{2x-3}=39$

c) $3^{2x}+\frac{4}{27}=2\cdot 3^{2x+1}-9^{x}$ d) $125^{x}-2\cdot 5^{3x+1}=1\frac{4}{5}$

1.68. Rozwiąż równania, wprowadzając pomocniczą niewiadomą.

a) $2^{x+3}+2^{3-x}=65$ b) $2^{4x}+8=5\cdot 4^{x}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}-24\cdot 5^{-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ d) $4^{x}+\frac{3}{2}=4^{-x}$

1.69. Rozwiąż równania, wprowadzając pomocniczą niewiadomą.

a) $\frac{6^{x}-2}{6^{x}+6}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ b) $\frac{3^{x}+2}{3^{x}+3}-\frac{3^{x}-2}{3^{x}-3}=0$

c) $(3^{x}-6^{x})\cdot(9^{x}+18^{x}+36^{x})=0$ d) $4^{3x}-7\cdot 4^{2x}=8-14\cdot 4^{x}$

e) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-2\right]\cdot\left[3^{-2x}+\frac{2}{3^{x}}+4\right]=1$ f) $\frac{25^{x}-5^{x}+1}{126}=\frac{1}{5^{x}+1}$

1.70. Rozwiąż równania.

a) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}=4$ b) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^{x}=6$

1.71. Rozwiąż równania.

a) $5^{3-2x}=2^{2x-3}$ b) $3^{x+2}=25\cdot 5^{x}$

c) $\frac{3\cdot 3^{2x+5}}{3^{x}}=2^{x+6}$ d) $5^{x+2}\cdot 7^{2x+4}=21^{x+2}$

e) $2^{5x-1}\cdot 3^{3x-1}=6^{x+8}\cdot 4^{x}$ f) $9^{3x+2}\cdot 5^{10x+4}=15^{3x+2}\cdot 25^{2x}$

D 1.72. Wykaż, że:

a) jeśli $9^x + 25^x = 2 \cdot 15^x$, to $2^x < \sqrt{3}$ b) jeśli $16^x + 4^{x+1} = 4 \cdot 8^x$, to $3^x > \sqrt{5}$.

1.73. Rozwiąż równania wiedząc, że $n \in \boldsymbol{N}_+$.

a) $5^{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)} = 0{,}2^{100-20n}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3n} = 1{,}5^{-30}$

1.74. Liczby 4, $3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{2x-4}$, $\frac{5}{2^{2-x}}$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n).

a) Wyznacz x.

b) Podaj wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n).

c) Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

1.75. Liczby $2^{x+2} + 4$, $10 \cdot 2^x - 2$, $9 \cdot (2^x + 1)$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n).

a) Oblicz x.

b) Wyznacz iloraz ciągu (b_n).

c) Podaj wyraz ogólny ciągu (b_n).

1.76. Rozwiąż równanie wiedząc, że lewa strona tego równania jest sumą szeregu geometrycznego zbieżnego.

a) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 2\sqrt{7 \cdot 2^x + 8}$ b) $5^x + 5^{x-2} + 5^{x-4} + \ldots = \frac{\sqrt{5 + 4 \cdot 5^{x+2}}}{24}$

1.77. Rozwiąż równania.

a) $8^{\frac{x-3}{3x-7}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3x-1}{2x-2}}} = 1$ b) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\sqrt{9-x}-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}-5}$

c) $2^{2+\frac{x-3}{x}} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3-x}{x}+2} = 11$ d) $\frac{3^{x^2-2}+5}{3^{x^2-1}-9} = \frac{14}{9\left(3^{x^2-3}-1\right)}$

1.78. Rozwiąż równania.

a) $2^{|x+2|} = 4^{|0{,}5x-3|}$ b) $\frac{9^{|x-3|}}{81} = 3^{|2x+4|}$ c) $0{,}2 \cdot 5^{|x+1|} - 5^{|x+2|} = 0$

1.79. Rozwiąż równania.

a) $2^{2x} - 4 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x - 10^x$ b) $6^x - 9 \cdot 2^x - 15^x + 9 \cdot 5^x = 0$

1.80. Rozwiąż układy równań.

a) $\begin{cases} 27^x = 9^y \\ 81^x = 243 \cdot 3^y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75 \\ 3^y \cdot 5^x = 45 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$

Nierówności wykładnicze

1.81. Rozwiąż nierówności.

a) $\frac{1}{2^x} > 16$ b) $0{,}6^{2x} \leqslant 2\frac{7}{9}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-2} > -\left(\frac{4}{3}\right)^0$

d) $0{,}8^{2x-1} \geqslant 1{,}25^{x+2}$ e) $\left(\sqrt[3]{\frac{49}{81}}\right)^{x-4} < \left(\frac{7}{9}\right)^{3x}$ f) $\frac{1}{25} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{3-4x} \leqslant 0{,}04^{x+1}$

1.82. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \leqslant 1{,}5^{|x+2|}$ b) $\left(2\sqrt{2}\right)^{|x-1|} < 4$

c) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{|2-x|} - \left(\frac{5}{2}\right)^{3|x-2|} \geqslant 0$ d) $9 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{|x+4|} \geqslant \left(9\sqrt[4]{3}\right)^{|-x-4|}$

1.83. Rozwiąż nierówności.

a) $4^{2x^2+5x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-4}$ b) $0{,}75^{x^2} < \frac{64}{27} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$ c) $4^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x+1} < 16^{x+3}$

d) $\left(\frac{1}{125}\right)^{x^2-x} < 0{,}2^x \cdot 5^{x^2+1}$ e) $\frac{1}{3^{5x-2}} > 3^{3x^2}$ f) $\left(\sqrt{2}\right)^{4x^2} \geqslant \frac{4^{2x}}{\left(2\sqrt{2}\right)^{-4}}$

1.84. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{1}{64}\right)^{x-1} \cdot 16^{x-4} < 0{,}25^{4x+8}$ b) $\left(\frac{4}{25}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{x-2} < 2{,}5^{2x+5}$

c) $\frac{5^{x+4}}{25^{x-1}} < 0{,}2^{x^2}$ d) $\frac{3^{4-21x}}{9^{-x^2}} > \frac{3^{-7x^2}}{27^{4-x}}$

e) $\frac{16^x}{4^{x^2}} \leqslant \frac{0{,}5^x}{2^{x-4}}$ f) $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{3x+12} \geqslant \frac{49^{1-x^2}}{7^{x+1}}$

1.85. Rozwiąż nierówności.

a) $2^{x+5}+5\cdot 2^{x+2}<34-2^{x+4}$

b) $3^{x-1}+2\cdot 3^{x+1}>48+3^x$

c) $0{,}4^{x+3}+2{,}5^{-x-2}\leqslant\frac{7}{2}$

d) $3\cdot 2^{x-5}+\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0{,}5x}-11\leqslant 0$

1.86. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{27}{8}\right)^{x^2+x}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}<\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}$

b) $\frac{64}{2^{x^2}}>\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^{x^2-1}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-4}\cdot\left(\frac{81}{16}\right)^{x-2}\leqslant 2{,}25^{4x+1}$

d) $\frac{8^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{2x}}{4^{0{,}5x^2}}<\frac{1}{64}$

1.87. Rozwiąż nierówności, wprowadzając pomocniczą niewiadomą.

a) $\left(2^x+3\right)\left(32-2^x\right)\geqslant 0$

b) $\left(5^x-0{,}2\right)\left(5^x-125\right)>0$

c) $16^x+9\cdot 2^{2x}+8<0$

d) $9^x<2\cdot 3^x+3$

e) $8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{8x}+27\geqslant 30\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4x}$

f) $4^{1-3x}+1\leqslant\frac{4}{8^x}$

1.88. Rozwiąż nierówności.

a) $2^{3x-2}\geqslant 5^{x-\frac{2}{3}}$

b) $7^{x+3}<3^{2x+6}$

c) $2{,}1^{x+1}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^{x+1}<\left(\frac{5}{6}\right)^{x}\cdot 1{,}2$

d) $13\cdot 14^{3x}+2^{3x}\cdot 7^{3x}\leqslant 1$

e) $\frac{2^{x-4}}{3^{8-2x}}\leqslant\frac{3^{x-4}}{6^{4-x}}$

f) $6^{2x+4}-3^{3x}\cdot 2^{x+8}>0$

1.89. Rozwiąż nierówności wiedząc, że $n\in\boldsymbol{N}_+$.

a) $0{,}7^{2+4+6+\ldots+2n}\geqslant 0{,}7^{12}$

b) $2^5\cdot 2^8\cdot 2^{11}\cdot\ldots\cdot 2^{3n+2}<16^{31}$

D 1.90. Wykaż, że jeśli $n\in\boldsymbol{N}_+$, to $3^{2n}\geqslant 3^n+6$.

D 1.91. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność:

a) $8^x+2^x\geqslant 2\cdot 4^x$

b) $4^{x-0{,}5}+0{,}5\cdot 25^x\geqslant 10^x$

1.92. Rozwiąż nierówności.

a) $\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{x+1}}{\left(2\sqrt[3]{2}\right)^{x+1}} \geqslant \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}}$

b) $\sqrt[4]{\frac{0{,}08^{x-5}}{2{,}5^{-x+5}}} < \frac{\left(\sqrt{5}\right)^{x^2}}{\sqrt[4]{5}}$

c) $\sqrt{\left(2-3^x\right)^2} < 7$

d) $\sqrt{\left(4^{-x}-5\right)^2} > 27$

1.93. Rozwiąż nierówności.

a) $5^{|x-2|} \leqslant \left(\sqrt{5}\right)^{x-2}$ b) $4^{|2x+4|} \cdot 16^{|x-3|} \leqslant 2^{x+31}$ c) $3^{|x+1|} \leqslant \frac{9^x}{3^{|x-2|+1}}$ d) $\frac{8^{|2-x|}}{2^{|x+3|}} > 2^{|x-1|}$

1.94. Rozwiąż nierówności.

a) $4^x + 10^x - 6^x - 15^x > 0$

b) $6^x + 72 > 9 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^x$

c) $5 \cdot 10^{-x} + 4 < 2^{-x} + 4 \cdot 5^{1-x}$

d) $3^x \cdot \left(8 - 2^{x+3}\right) < 12^x - 24^x$

1.95. Rozwiąż nierówności.

a) $\frac{2^{x^3}}{4^{2x}} > 32^x$

b) $8^{3x} + 8 \geqslant 3 \cdot \left(64^x + 2 \cdot 2^{3x}\right)$

c) $\frac{1}{3^x - 3} \geqslant \frac{1}{3^x + 2}$

d) $2^{-3x} + 8 \cdot \frac{3 - 2^{x+1}}{2^x} \leqslant 9 \cdot 4^{-x}$

e) $\frac{5^x + 4}{5^x - 1} - \frac{2}{5^x - 5} > \frac{22 \cdot 5^x - 18}{25^x - 6 \cdot 5^x + 5}$

f) $1 + \frac{6}{3^{-4x} - 4 \cdot 3^{-2x} + 3} < \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^x}{\left(\frac{1}{9}\right)^x - 1}$

1.96. Rozwiąż nierówności z niewiadomą x wiedząc, że $n \in \boldsymbol{N}_+$.

a) $5^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots} \geqslant 125^{\frac{x+1}{x}}$

b) $\left(\frac{1}{32}\right)^{1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\frac{16}{81}-\ldots+(-1)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\ldots} \leqslant \frac{4^{-x}}{2^{x^3}}$

1.97. Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots \leqslant 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 2^x + 4}$ wiedząc, że jej lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego zbieżnego.

1.98. Lewa strona nierówności $\left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{27}\right)^x - \left(\frac{1}{81}\right)^x + \ldots \geqslant 3^{2-x} - 0{,}9$ jest sumą szeregu geometrycznego zbieżnego. Podaj zbiór rozwiązań tej nierówności.

D 1.99. Wykaż, że jeśli $x < 0$, to $16^x + 64 > 65 \cdot 4^x$.

D 1.100. Dane są funkcje $f(x) = 5^{2x} + 2^{2x}$ oraz $g(x) = 5^{x-4} + 2^{x+2}$, określone w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Wykaż, że jeśli $x \in (-\infty, 3\rangle$, to $g(x+2) \geqslant f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Zastosowanie własności funkcji wykładniczej w zadaniach

1.101. Zbadaj liczbę rozwiązań danego równania w zależności od wartości parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$.

a) $3^{|x|} = m - 4$ b) $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 1\right| = 5 - m^2$ c) $\frac{1}{4^{|x-2|}} = \frac{2}{m^2+1}$

1.102. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, gdzie $k \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie:

a) $\left|2^{x-3} - 4\right| - 1 = \frac{2k-1}{8}$ ma dwa rozwiązania dodatnie,

b) $3^{|x+2|} - 6 = 9^{k-1}$ ma dwa rozwiązania różnych znaków,

c) $\left|4 \cdot 2^x - 2\right| - 25^k = 5^k$ ma dwa rozwiązania ujemne.

1.103. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie:

a) $2x^2 - 2 \cdot \left(3^m - 9\right)x + 40 - 7 \cdot 3^m - 9^m = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie,

b) $x^2 - \left(2^m - 1\right) \cdot x - 3 \cdot \left(4^{m-1} - 2^{m-2}\right) = 0$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

1.104. Dla jakich wartości parametru k, gdzie $k \in \boldsymbol{R}$, równanie:

a) $4^x + (k-2) \cdot 2^x + 4 = 0$ ma dwa różne rozwiązania,

b) $3^{2x} - 2(k-1) \cdot 3^x + k + 5 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie,

c) $(k+1) \cdot 49^x + 2(k-3) \cdot 7^x + k - 1 = 0$ jest sprzeczne?

1.105. Dla jakich wartości parametru a, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$, równanie:

a) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 2^{2x-1} + a$ ma tylko jedno rozwiązanie,

b) $4^x + 4^{x-1} + 4^{x-2} + \ldots = a - \frac{2^{4x}}{3}$ nie ma rozwiązań?

D 1.106. Wykaż, że suma rozwiązań równania $x^2 \cdot 2x + 8 = 2x^2 + 2^{x+2}$ jest równa 1.

D 1.107. Wykaż, że zbiorem rozwiązań nierówności $(4x^2 - 12x + 9)^{x+1} < 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest zbiór $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

D 1.108. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x:

a) $8 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 9^x - 2 \cdot 27^x \leqslant 63$ b) $4 \cdot 8^x + 20 \geqslant 11 \cdot 4^x + 4 \cdot 2^x$.

1.109. Rozwiąż równanie:

a) $2^{1+2\cos 2x} + 16^{\sin^2 x} = 9$ w zbiorze $\langle -\pi, \pi \rangle$,

b) $4^{\operatorname{tg}^2 x} = 80 - 2^{\frac{1}{\cos^2 x}}$ w zbiorze $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

1.110. Rozwiąż nierówność:

a) $4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9 < \frac{1}{3^{\cos 2x}}$ w zbiorze $\boldsymbol{R}$,

b) $4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\cos x}} < \frac{1}{3} \cdot \left(2^{\operatorname{tg} x} + 1\right)$ w zbiorze $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Test sprawdzający do rozdziału 1.

1. Liczba $7^6 + 3 \cdot 7^5 + 7^4$ jest podzielna przez:

A. 35 B. 39 C. 71 D. 14

2. Liczba $\left[\left(3^{1-\sqrt{2}}\right)^{1+\sqrt{2}} - 1\right]^{-1}$ jest równa:

A. 2 B. $1\frac{1}{2}$ C. $\frac{-2}{3}$ D. $-1\frac{1}{2}$

3. Liczba $8^{1,5} - 2^{2,5}$ jest równa:

A. $3 \cdot 2^{2,5}$ B. 4^{-1} C. $6^{\frac{3}{5}}$ D. $\frac{1}{6}$

4. Suma rozwiązań równania $(0{,}2^x - 125)(5^{3x} - 1) = 0$ wynosi:

A. 3 B. $-2\frac{2}{3}$ C. $2\frac{2}{3}$ D. -3

5. Rozwiązaniem równania $2^{-0,5} - 1 = \frac{2x}{2^{-0,5} + 1}$ jest liczba należąca do przedziału:

A. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

6. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt $P\left(-2, \frac{1}{2}\right)$. Wówczas dla argumentu $\frac{2}{3}$ wartość funkcji f wynosi:

A. $\frac{1}{8}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 0,25

7. Wykres funkcji $f(x) = 2^{x-1}$ przesunięto o 3 jednostki w lewo. Wówczas otrzymano wykres funkcji:

A. $y = 4 \cdot 2^x$ B. $y = 8 \cdot 2^x$ C. $y = 2^{x-4}$ D. $y = 2^{x-1} - 3$

8. Wykres funkcji $f(x) = -3^x + 2$ przekształcono przez symetrię środkową względem punktu $(0, 0)$. Wówczas otrzymano wykres funkcji:

A. $y = 3^x + 2$ B. $y = 3^x - 2$ C. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$ D. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

9. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1}{2^x} - 8 > 0$ jest przedział:

A. $(-\infty, 3)$ B. $(-\infty, -3)$ C. $(-3, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$

10. Wiadomo, że $\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^x = \sqrt{6} + \sqrt{5}$. Wówczas:

A. $x = -\frac{1}{2}$ B. $x = 2$ C. $x = -1$ D. $x = -2$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

11. Oblicz:

a) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-4^{-1}\right]^{-2}$

b) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,75}\right]^{2}-2^{2,25}\cdot 3^{0,5}\cdot\sqrt[4]{8}$

c) $\sqrt[8]{\left(3^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt[3]{9}}$

d) $\left(5^{-\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}}+5^{-\frac{1}{2}}\right)^{4}$

12. Oblicz wartość wyrażenia $\left[x^{-1}+0{,}5y^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\frac{2\sqrt{y}-x}{\sqrt{y}}$ dla $x=2$ i $y=\sqrt{3}$.

D 13. Dane są liczby $a=\sqrt[5]{8\cdot\sqrt{2\sqrt{2}}}$ oraz $b=128^{\frac{1}{9}}$. Wykaż, że $b>a$.

D 14. Wykaż, że liczba $\frac{444444444^{-2}}{555555555^{-2}}$ należy do przedziału $\left(1\frac{1}{2},2\right)$.

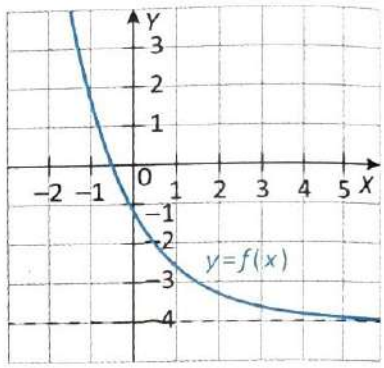
D 15. Wykaż, że liczba $\left[\left(2-\sqrt[3]{7}\right)\left(4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}\right)\right]^{0,4}$ jest rozwiązaniem równania $x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1=0$.

D 16. Wykaż, że liczba $\left(3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{4}}\right)\left(2^{\frac{1}{2}}+3\right)\left(2^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}\right)$ jest liczbą pierwszą.

D 17. Wykaż, że jeśli $a=\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}\cdot\left(4+\sqrt{12}\right)$ i $b=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$, to $a^{b}=0{,}25$.

D 18. Wykaż, że jeśli $a\neq 0$, $b\neq 0$, $ab\neq -1$, to $\left(\frac{1}{a}-b\right)\cdot\frac{2a^{2}}{1+ab}\cdot\left(b+a^{-1}\right)+2ab=2$.

19. Rysunek obok przedstawia wykres funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1,5}-4$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



a) Wyznacz miejsce zerowe funkcji f.

b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $-2,5$.

c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne?

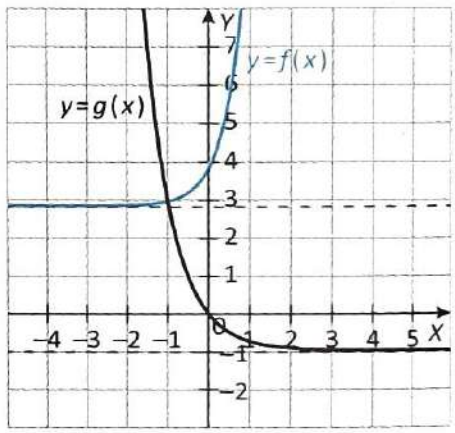
d) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(-x)$ i podaj jej wzór.

20. Funkcje $f(x) = 3^{x-1} - 3$ oraz $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+a+7$ są określone w zbiorze $\boldsymbol{R}$ i mają wspólne miejsce zerowe. Oblicz a. Następnie:

a) naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych,

b) podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > g(x)$.

21. Wykresy funkcji $f(x) = 8^x + b$ oraz $g(x) = a^x - 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, przecinają się w punkcie $P(-1, 3)$, jak na rysunku obok.



a) Odczytaj z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leqslant g(x)$.

b) Wyznacz a i b.

c) Oblicz $f\left(\frac{2}{3}\right)+g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

d) Wykres funkcji g przesunięto wzdłuż osi OY do góry i otrzymano wykres funkcji h, który przecina się z wykresem funkcji f na osi OY. Podaj wzór funkcji h.

22. Do wykresu funkcji $f(x) = a^x + b$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, należą punkty $A(1, -5)$ i $B(2, -3)$.

a) Oblicz a i b.

b) Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 25.

D c) Wykaż, że jeśli $f\left(\frac{k}{2}\right)=1$ i $f(p + 1) = 9$, to $k^2 + p^2$ jest liczbą podzielną przez 5.

23. Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których:

a) funkcje $f(x)=\left(3\sqrt{3}\right)^{2x-1}$ oraz $g(x) = 81^{x-2}$ przyjmują tę samą wartość

b) funkcja $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-5}$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x)=\left(\frac{9}{4}\right)^{5x+1}$

c) funkcja $h(x)=9^{|3x-2|}-1$ przyjmuje wartości większe od 8.

24. Pewna substancja radioaktywna ma masę 50 gramów, a rozpad tej substancji powoduje zmniejszenie jej masy o 20% każdego roku.

a) Napisz wzór funkcji $M(t)$ opisującej masę tej substancji po czasie t, gdzie t – czas liczony w latach.

b) Oblicz, po jakim czasie masa substancji będzie równa 25,6 grama.

25. Rozwiąż równania.

a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{x}=3^{\frac{1}{2x+1}}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+\frac{1}{2}}\cdot\left(6\frac{1}{4}\right)^{-2x}=\left(\sqrt{0,4}\right)^{4x-x^2}$

c) $\frac{2^{x^3}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^{12}}=\frac{4^{2x}}{2^{x^2}}$

d) $4^{x+2}\cdot 3^{2x+4}=25\cdot 0,2^{-x}$

e) $3^{|x+1|+1}-5\cdot 3^{|x+1|-1}=12$

f) $3\cdot 2^{3x-1}+\sqrt{2}\cdot 8^{x+0,5}=4^{1,5(x-1)}+86$

26. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1}>\left(\frac{27}{8}\right)^{x-3}$

b) $0,4^{|x-6|}\leqslant 2,5$

c) $(3^{x+2}-1)(9^{x}+27)<0$

d) $\frac{5^{x^2}}{\left(\sqrt{5}\right)^{x+0,5}}\geqslant\sqrt[4]{5}$

e) $2^{2x+1}-17\cdot 2^{x}+8>0$

f) $6^{x}-3\cdot 5^{x}<10^{x}-3^{x+1}$

27. Rozwiąż równania.

a) $3^{|2x-3|}-3\cdot 9^{|x+1|}=0$

b) $\frac{1}{2^{x}-2}+2^{1-x}=1$

28. Rozwiąż nierówności.

a) $2^{-3x}+64<\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\cdot\left(1+2^{2-x}\right)$

b) $\frac{3}{5^{x}-5}\geqslant\frac{1}{5^{x}-1}$

29. Dane są funkcje $f(x)=4^{x+3}-7\cdot 3^{x+2}$ oraz $h(x)=3^{3x+2}-5\cdot 4^{3x}$, określone w zbiorze liczb rzeczywistych. Rozwiąż nierówność $f(x-2)-h\left(\frac{x}{3}\right)\geqslant 0$.

D 30. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $27^x + 75 \geqslant 7 \cdot 9^x + 5 \cdot 3^x$.

D 31. Wykaż, że funkcja $h(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{x^2-2x+1}$ przyjmuje w przedziale $\langle 0, 3\rangle$ najmniejszą wartość, równą $\frac{1}{9}$.

32. Dany jest wzór funkcji f. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

a) $f(x)=\frac{2^{x+1}-2}{2^x-4}$

b) $f(x)=5-\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos x|-1}$

D 33. Wykaż, że funkcja $f(x)=\frac{3^{2x}-1}{3^{x+1}}$ jest nieparzysta.

34. Rozwiąż dane równanie wiedząc, że lewa strona tego równania jest szeregiem geometrycznym zbieżnym.

a) $3^{-x}+3^{-2x}+3^{-3x}+\ldots=\frac{1}{8}$

b) $2^{\sin x} + 4^{\sin x} + 8^{\sin x} + \ldots = 1$

35. Rozwiąż daną nierówność wiedząc, że lewa strona tej nierówności jest szeregiem geometrycznym zbieżnym.

a) $3^x-3^{x-1}+3^{x-2}-3^{x-3}+\ldots\leqslant\frac{\sqrt{12-3^{x+1}}}{4}$

b) $2^{-\cos x} + 4^{-\cos x} + 8^{-\cos x} + \ldots > 1$

36. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\left|2^{|x+2|}-4\right|$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Na podstawie tego wykresu ustal, dla jakich rzeczywistych wartości parametru m równanie $\left|2^{|x+2|}-4\right|=5-4m$ ma cztery rozwiązania, w tym trzy ujemne.

37. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $p \cdot 16^x + (2p-1) \cdot 4^x + p + 2 = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm – powtórzenie wiadomości

2.1. Oblicz:

a) $\log_2 128$ b) $\log_{\frac{2}{3}} 1{,}5$ c) $\log_\pi 1$ d) $\log_{0,4} 15\frac{5}{8}$

e) $\log_{1,6} \frac{64}{25}$ f) $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$ g) $\log_4 2$ h) $\log_{625} 0{,}2$

2.2. Oblicz:

a) $\log_{\sqrt[3]{3}} 9\sqrt{3}$ b) $\log_{0,2} 5\sqrt[6]{5}$ c) $\log_{\frac{1}{6}} 36\sqrt[3]{6}$ d) $\log_{\sqrt{3}} 27\sqrt[4]{3}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 16\sqrt[3]{2}$ f) $\log_{\frac{\sqrt[4]{3}}{3}} 81\sqrt[3]{3}$ g) $\log_5 \frac{25\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{125}}$ h) $\log_{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}} 16\sqrt[5]{8\sqrt[3]{2}}$

2.3. Liczby A, B, k, p, t, są dodatnie i różne od 1. Wyznacz z danego wzoru wskazaną wielkość.

a) $B = t \cdot A^k - 1;\ k$ b) $t = B \cdot A^{p-k};\ p$ c) $\frac{2A}{B} = 4 \cdot p^{-t} - k;\ t$

d) $B = 2\log_p A;\ A$ e) $A = \log(B + t) - k;\ t$ f) $t = \log\frac{A}{p} + \log\frac{p}{A^2};\ A$

2.4. Oblicz:

a) $\log_2 48 - \log_2 3$ b) $\log_3 \frac{1}{6} + \log_3 \frac{2}{3}$ c) $2\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} + \log_{\frac{1}{2}} 5\frac{1}{3}$

d) $(\log_5 16 - \log_5 80)^2$ e) $\log_{\frac{2}{3}} 4 - 2\log_{\frac{2}{3}} 3$ f) $2\log_{\frac{1}{4}} 8 - 3\log_{\sqrt{3}} 9$

2.5. Przedstaw daną liczbę w postaci $\log_a b$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, $b \in \boldsymbol{R}_+$.

a) $1 + \log_2 5$ b) $\log 3 - 2$ c) $-1 - \log_{\frac{1}{5}} 2$

d) $\frac{1}{3} + 2\log_2 5$ e) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{4}} 27$ f) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log_{81} 16$

2.6. Oblicz:

a) $100^{1+\log 5}$

b) $8^{\log_2 5-\frac{1}{3}}$

c) $4^{-1+\log_2 3}$

d) $16^{\log_2\sqrt{3}+0{,}25}$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 0{,}25+1}$

f) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}5-\frac{1}{2}}$

2.7. Oblicz:

a) $\frac{1}{2}\log_3 4-3\log_3 2+\log_3 36$

b) $3\log_{0,4}2-\log_{0,4}3\cdot\log_3 125$

c) $\frac{1}{2}\log_5 4\cdot\log_2 30-\log_5 6$

d) $\log_4 9\cdot\log_3 128+2\log_5\sqrt{3}\cdot\log_3 25$

e) $\left(\log_5 9+\frac{1}{2\log_9 5}\right)\cdot\log_{27}25$

f) $\frac{-\log_{0,6}225}{2}\cdot\left(\frac{1}{\log_5 15}-\frac{1}{\log_3 15}\right)$

2.8. Rozwiąż równania z niewiadomą x.

a) $\log_3\frac{1}{27}-x\log_{\sqrt{2}}4=(x+1)\cdot\log 100$

b) $\log_5 625^x-(3x+2)\cdot\log_2 0{,}5=\log_3 48-2\log_3 4$

c) $(x+2)\cdot\left(\log_3\frac{3}{7}+\log_3 21\right)=\frac{1}{2}\cdot\log_2 4^{x-1}$

d) $2\log_3\left(\sqrt{3}\right)^{2x-1}-x\log_{\frac{1}{2}}8=3\log_{\sqrt{5}}0{,}2$

D 2.9. Wykaż, że dana liczba jest naturalna.

a) $\log_{\frac{2}{5}}4+\log_{\frac{2}{5}}2+\log_{\frac{2}{5}}\frac{1}{125}$

b) $0{,}4\cdot 5^{\log_5 2}+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[5]{16}$

c) $\frac{1}{\log_2 6}+\frac{1}{\log_3 6}$

d) $\sqrt{10^{2+0{,}5\log 16}}$

e) $9\cdot\log_{125}3\cdot\log_{\sqrt[3]{6}}36\cdot\log_9 5$

f) $\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

D 2.10. Wykaż, że wartość danego wyrażenia jest liczbą całkowitą.

a) $\log_5\log_5\sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{5}}}-\log_{\sqrt{5}}5\sqrt{5}$

b) $3^{\log_9 36}\cdot 10^{1-\log 2}+\log_{\frac{1}{2}}5\cdot\log_5 512$

c) $(3-\log_2 5)\cdot\log_{1,6}\frac{1}{64}$

d) $\log^2_{\frac{1}{3}}18+\log^2_{\frac{1}{3}}2-\left(\log_{\frac{1}{3}}2-2\right)\cdot\log_{\frac{1}{3}}4$

2.11. Skróć ułamki.

a) $\dfrac{\log^2 5-\log^2 2}{\log 2{,}5}$

b) $\dfrac{\log_3^2 6-\log_3^2 2}{1+2\log_3 2}$

c) $\dfrac{\log_5^2 2+\log_5^2 3+\log_5 4\cdot\log_5 3}{\log_5 6}$

d) $\dfrac{\log_2^3 5-\log_2^3 3}{\log_2^2 5+\log_2^2 3+\log_2 5\cdot\log_2 3}$

e) $\dfrac{1+\log_3^3 6}{\log_3 0{,}5+\log_3^2 6}$

f) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}^3 5-27}{\log_{0,5} 40}$

D 2.12. Wykaż, że liczba $\log_{\frac{4}{9}}(\log_3 8)-\log_{\frac{4}{9}}(\log_3 4)$ należy do przedziału $(-1, 0)$.

D 2.13. Wykaż, że liczba $81^{\frac{\log_5 4}{\log_5 16}}$ jest liczbą całkowitą nieparzystą.

D 2.14. Wykaż, że liczba $\left(\log_2\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}+\log_2\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}\right)\cdot\log_{216} 4$ jest wymierna.

D 2.15. Wykaż, że jeśli $\log_3 7 = m$, to $\log_7 5\frac{4}{9}=\dfrac{2m-2}{m}$.

D 2.16. Wykaż, że jeśli $\log_3 2 = k$, to $\log_6 16=\dfrac{4k}{k+1}$.

D 2.17. Wykaż, że jeśli $\log_5 2 = a$ oraz $\log_5 7 = b$, to $\log_{125} 28=\dfrac{2a+b}{3}$.

D 2.18. Wykaż, że jeśli $\log_6 2 = p$ oraz $\log_6 5 = r$, to $\log_{36} 0{,}8=\dfrac{2p-r}{2}$.

D 2.19. Wykaż, że:

a) $\dfrac{1-\log_2^3 3}{(\log_2 3+\log_3 2+1)\cdot\log_2\frac{2}{3}}=\log_2 3$

b) $\dfrac{8+\log_2^3 5}{\log_5 16+\log_2 5-2}+1=\dfrac{1}{\log^2 2}$

c) $\dfrac{(\log_2 7+\log_7 2+2)\cdot\log_7 2}{\log_7 2+1}=\log_7 14$

d) $\dfrac{(\log_5^2 2-1)\cdot\log_2 5}{\log_2 5+\log_5 2+2}=\log 0{,}4$

D 2.20. Wykaż, że jeśli $\log_3 2 = a$ i $\log_6 5 = b$, to $\log_{216} 225=\dfrac{2(1+ab+b)}{3(1+a)}$.

D 2.21. Wykaż, że jeśli $\log_3 20 = a$ i $\log_3 15 = b$, to $\log_2 360 = \frac{3a-b+5}{a-b+1}$.

D 2.22. Wykaż, że jeśli $\log_2 30 = a$ i $\log_2 36 = b$, to $\log 9 = \frac{2b-4}{2+2a-b}$.

D 2.23. Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to $\log_3^2(ab) \geqslant \log_3 a^2 \cdot \log_3 b^2$.

D 2.24. Wykaż, że jeśli dowolne liczby dodatnie x, y spełniają warunek $x + y \neq 1$, to $\log^2(xy)+1 \geqslant 4\cdot\left[\frac{1}{\log_{x+y} 10} - \log^2(x+y)\right]$.

D 2.25. Wykaż, że:

a) $e^{2+\frac{2}{3}\ln 8} = 4e^2$

b) $\frac{\ln(e^2-e+1)+\ln(1+e)}{1-\ln 2} = \log_{\frac{e}{2}}(1+e^3)$

c) $\log_2 4e + \log_5 \frac{e}{25} = \frac{\ln 10}{\ln 2 \cdot \ln 5}$

d) $\log_{\sqrt{5}} e^{\log_{\frac{1}{e}} \pi^2 - 2\ln\frac{1}{\pi}+2} \cdot \ln 25 = 8$

2.26. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{3n-6}$ i $n \in \mathbf{N}_+$. Nieskończony ciąg (b_n) jest zdefiniowany następująco: $b_n = \log_8 a_n$.

D a) Wykaż, że ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym.

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{\frac{3}{4}n^2+5n+1}$, jeśli S_n oznacza sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu (b_n).

2.27. Oblicz granicę nieskończonego ciągu (a_n), w którym

$$a_n = \frac{2n^2 \cdot \log_{n+3} 3}{\left[\log_3(n+3)\right]^{-1} + \left[\log_9(n+3)\right]^{-1} + \left[\log_{27}(n+3)\right]^{-1} + \ldots + \left[\log_{3^n}(n+3)\right]^{-1}}.$$

Funkcja logarytmiczna – powtórzenie i uzupełnienie wiadomości

2.28. Dany jest wzór funkcji f. Naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

2.29. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, gdzie $x \in (0, +\infty)$. Następnie:

a) odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów wartości funkcji g są większe od -1,

b) sprawdź, czy do wykresu funkcji g należy punkt $A\left(\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right), 0\right)$.

2.30. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_3 x$, gdzie $x > 0$. Następnie:

a) oblicz wartość funkcji f dla argumentu $\sqrt[6]{9\sqrt{9}}$,

b) oblicz argument, dla którego wartość funkcji f wynosi $\frac{-1}{2}$.

2.31. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$ oraz $x \in \boldsymbol{R}_+$ należy punkt $(4, -1)$. Wyznacz a. Następnie oblicz:

a) argument, dla którego wartość funkcji f jest równa $2\frac{1}{2}$,

b) wartość wyrażenia $f\left(\frac{1}{64}\right) \cdot \left[2f(1) - \frac{1}{3}f(8)\right]$.

2.32. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$ oraz $x \in \boldsymbol{R}_+$ należy punkt $P(8, 3)$. Oblicz a. Następnie odczytaj z wykresu tej funkcji:

a) zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe od 1,

b) zbiór argumentów, dla których $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

2.33. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby x, y, z, t.

a) $x = \frac{1}{\log_8 3} - \log_3 5$, $y = \log_3 \left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 0{,}25}$, $z = \frac{\log_2 18}{\log_2 3}$, $t = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{-1}$

b) $x = \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$, $y = \log_{\frac{1}{2}} 7 \cdot \log_7 9$, $z = \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}} 125$,

$t = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}125$

2.34. Dany logarytm należy do przedziału $(k, k+1)$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Podaj k.

a) $\log_3 5$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ c) $\log_{15} 7$ d) $\log_{\frac{1}{3}} 4$

e) $\log_6 21$ f) $\log_{\frac{1}{8}} 5$ g) $\log_7 50$ h) $\log_{\frac{1}{3}} 19$

2.35. Określ, czy podana liczba jest dodatnia, ujemna czy równa zero.

a) $\dfrac{\log_2 7}{\log_{\frac{1}{2}} 3+\log_{\frac{2}{3}} 8}$ b) $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 3+\log_5 5}{\log_{\frac{1}{2}} 15}$

c) $\dfrac{\log_5 \sqrt{2}-\log_5 6}{\log_{\frac{1}{3}} 11-\log_{\frac{1}{3}} 17}$ d) $\dfrac{\log_2 \sqrt{3}+\log_{0,8} \frac{\sqrt{2}}{2}}{\log_8 \sqrt{11}-\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}}$

2.36. Rozwiąż nierówności.

a) $x \cdot \log_3 \frac{1}{9} < \log_2 8$ b) $x \cdot \log_{0,5} 5 \geqslant \log_{0,5} 25$

c) $x \cdot (\log_2 3 - \log_2 9) \leqslant 1$ d) $x \cdot \log_3 0{,}1 > (1-x) \cdot \log_3 100$

2.37. Porównaj liczby x i y.

a) $x = 5^{\log_3 8}$, $y = 2^{\log_3 16}$ b) $x = 5^{\log_2 6}$, $y = 7^{\log_2 5}$

c) $x = 3^{\log_7 0,2}$, $y = 5^{\log_7 0,04}$ d) $x = 4^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$, $y = 3^{\log_{\frac{1}{6}} 5}$

2.38. Do wykresu funkcji $g(x) = \log x - b$, gdzie $x > 0$, należy punkt $A\left(\frac{1}{10}, 1\right)$.

a) Oblicz b.

D b) Wykaż, że $g\left(\frac{1}{4}\right) - g\left(\frac{5}{4}\right) + \log 5 = 0$.

D **2.39.** Do wykresu funkcji $f(x) = r\log_{\frac{1}{2}} x + m$, gdzie $x > 0$, należą punkty $A\left(\frac{1}{4}, 7\right)$, $B(8, -3)$. Wykaż, że $r + m$ jest liczbą pierwszą.

2.40. Miejscem zerowym funkcji $h(x) = k \cdot \log_3 x + p$, gdzie $x > 0$, jest liczba 9. Do wykresu funkcji h należy punkt $A(1, 2)$.

a) Wyznacz liczby k i p.

b) Oblicz wartość funkcji h dla argumentu $3\sqrt{3}$.

2.41. Wykres funkcji $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$ przecina wykres funkcji $g(x) = \log_a x$ w punkcie o rzędnej 2.

a) Oblicz a.

b) Naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych i podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > g(x)$.

2.42. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \log(2x + 10)$ b) $f(x) = \log_{(4-x)} 10$ c) $f(x) = \log_x (9 - x^2)$

2.43. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x)=\log_2 \frac{1-x}{x}$

b) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(4x^2+12x+9\right)$

c) $f(x)=\log_\pi\left(x^4-9x^2\right)$

d) $f(x)=\ln\left(4^{2x}-8^x\right)$

e) $f(x)=\log_4\left(3-|2x-5|\right)$

f) $f(x)=\log_{0,8}\left(|x+1|-\frac{2}{x}\right)$

2.44. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$

b) $f(x)=\log_{|2x-3|}(5-x)$

c) $f(x)=\log_{9-x^2}\left(x^3+2x+3\right)$

d) $f(x)=\log_x\left(2^x-16\sqrt{2}\right)$

e) $f(x)=\log_{|x-1|-2}(x-e)$

f) $f(x)=\log_{2x-x^2}(2\sin x-1)$

2.45. Zbadaj, czy funkcje f i g są równe.

a) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4\right)$

b) $f(x) = \ln(x - 1) - \ln(3 - x)$, $g(x)=\ln\frac{1-x}{x-3}$

c) $f(x) = \log_\pi(9x^2 - 6x + 1)$, $g(x) = 2\log_\pi(3x - 1)$

d) $f(x)=\log_{\frac{2}{3}} x^4$, $g(x)=4\cdot\log_{\frac{2}{3}}|x|$

D 2.46. Wykaż, że funkcja:

a) $f(x)=x^3\cdot\log\frac{8-x}{8+x}$ jest parzysta,

b) $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(|x|-x)$ nie jest ani parzysta, ani nieparzysta,

c) $h(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ jest nieparzysta.

D 2.47. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja:

a) $f(x)=\log^2_{0,3}x$ jest rosnąca w zbiorze $(1, +\infty)$,

b) $g(x)=\ln^2 x$ jest malejąca w zbiorze $(0, 1)$,

c) $h(x)=\log_7(x+1)$ jest rosnąca w zbiorze $(-1, +\infty)$,

d) $t(x)=\log_5(2-x)$ jest malejąca w zbiorze $(-\infty, 2)$.

2.48. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k \in \mathbf{R}$, dla których funkcja:

a) $f(x)=\log_{\frac{k+2}{3k-1}}x$ jest rosnąca,

b) $g(x)=\log_{|k+3|-|k|}x$ jest malejąca.

2.49. Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą lub największą liczbę całkowitą, należącą do zbioru rozwiązań tej nierówności.

a) $(1-\log_2 5)x>2$

b) $x\log_2 3<2-x\log_4 5$

c) $x\log_{\frac{1}{3}}4<1+3^{\log_3 2}\cdot x$

d) $x\cdot\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>-x-3$

D 2.50. Wykaż, że funkcja $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+4x+4\right)$ przyjmuje w przedziale $\langle -1, 2\rangle$ najmniejszą wartość, równą -4.

D 2.51. Wykaż, że funkcja $h(x)=\ln\left(x-\frac{ex^2}{4}\right)$ przyjmuje w przedziale $\left\langle\frac{1}{2}, \frac{2}{e}\right\rangle$ największą wartość, równą -1.

2.52. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $f(x)=\log_5(mx^2+4mx+m+3)$

b) $f(x)=\ln\left[(m^2+m-6)x^2+(m-2)x+1\right]$

Przekształcenia wykresów funkcji logarytmicznych

2.53. Naszkicuj wykresy funkcji.

a) $f(x) = \log_3 9x$ b) $f(x) = \log_2 \frac{8}{x}$ c) $f(x) = \log_{0,5}(-2x)$

d) $f(x) = \log_{0,25}(x + 2)$ e) $f(x) = \log_4(1 - x)$ f) $f(x) = \log_2(4x - 12)$

2.54. Dana jest funkcja $f(x) = \log_2(x - 5)$, gdzie $x > 5$.

a) Naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Podaj argument, dla którego wartość funkcji f jest równa 2.

c) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $5\frac{1}{8}$.

2.55. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+3) - 1$, gdzie $x \in (-3, +\infty)$.

a) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.

b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 6.

c) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od -3.

2.56. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\log_2(x + 1)$, gdzie $x \in (-1, +\infty)$.

a) Sprawdź rachunkowo, czy liczba 0 jest miejscem zerowym funkcji f.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie?

c) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są mniejsze od -2?

2.57. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -2 - \log_{0,5}(x - 1)$, gdzie $x \in (1, +\infty)$. Na podstawie tego wykresu podaj zbiór rozwiązań:

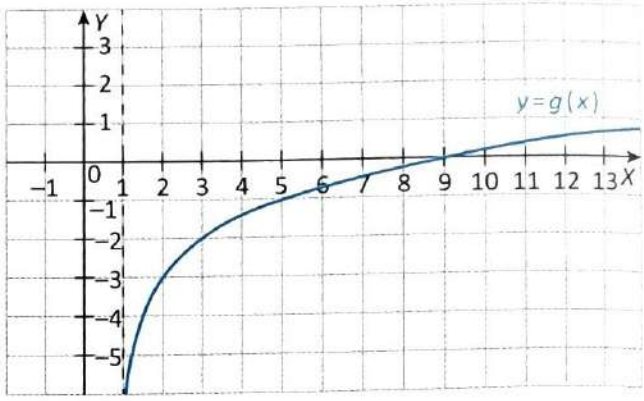
a) równania $g(x) = 1$ b) nierówności $-2 \leqslant g(x) < 1$.

2.58. Naszkicuj wykres funkcji $h(x) = \log_3(-x) - 2$ i podaj jej dziedzinę.

a) Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności $h(x) \leqslant -1$.

b) Sprawdź rachunkowo, czy do wykresu funkcji h należy punkt $A\left(-5^{\log_5 9}, 0\right)$.

2.59. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = g(x)$, który otrzymano, przesuwając równolegle wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$ o wektor $\vec{u} = [1, -3]$.



a) Napisz wzór funkcji g i podaj jej dziedzinę.

b) Rozwiąż graficznie równanie $g(x) = 4 - x$.

2.60. Wykres funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{v} = [0, -2]$.

Następnie otrzymany wykres przekształcono przez symetrię osiową względem osi OX i otrzymano wykres funkcji $y = g(x)$.

a) Napisz wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres.

b) Rozwiąż graficznie nierówność $g(x) \geqslant \frac{x+7}{3}$.

2.61. Funkcja h jest określona wzorem $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x - x^2) - \log_{\frac{1}{2}}(2 - x)$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji h i naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Podaj zbiór wartości funkcji h.

2.62. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \log_3(4 - x^2) - \log_3(2 + x)$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) > x + 2$.

2.63. Rozwiąż graficznie równania.

a) $\log_2(x - 1) = 4 - x$

b) $\log_2(1 - x) = 2 - |x|$

c) $\log_2(-x) = \frac{2}{9}(x+1)^2$

d) $\log_3 x = \frac{3}{x}$

2.64. Rozwiąż graficznie nierówności.

a) $\log_2(x - 2) - 1 \geqslant 4x - x^2$

b) $1 - \log_{\frac{1}{2}} x > \frac{4}{x}$

c) $2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -|x-2|$

d) $\log_3(-x) - 1 > \frac{-x-5}{4}$

2.65. Naszkicuj wykresy funkcji i omów ich własności.

a) $f(x) = \log_3 x^2$

b) $f(x) = \log_4 (x^2 + 2x + 1)$

c) $f(x) = \left|\log_2 \sqrt{x+4}\right|$

d) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{4}x\right|$

e) $f(x) = \left|\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} (x-2)^2\right|$

f) $f(x) = \log_2 \frac{18-2x^2}{3-|x|}$

2.66. Dane są funkcje $f(x) = \frac{1}{2}\log_2 (x^2 - 4x + 4)$ oraz $g(x) = 3\log_2 (x-2)$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz dziedzinę funkcji g.

b) Rozwiąż graficznie nierówność $f(x) + g(x) < 0$.

2.67. Dane są funkcje $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 6x + 9)$ oraz $g(x) = 2\log_{\frac{1}{3}} (3-x)$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji f i dziedzinę funkcji g.

b) Naszkicuj wykresy tych funkcji w osobnych układach współrzędnych.

c) Podaj zbiór wartości funkcji $h(x) = 2^{f(x) - g(x)}$, gdzie $x \in (-\infty, 3)$.

2.68. Rozwiąż graficznie równania.

a) $\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{|x-1|}{2} = 0$

b) $\log_4 |x| = 1 - x^2$

c) $\log_2 (x-3) = 1 - \log_3 (x-1)$

d) $\log_3 (|x|+2) = -x^2 + 2$

2.69. Rozwiąż graficznie nierówności.

a) $2 \cdot |\log_3 x| > x - 5$

b) $\left|\log_{\frac{1}{2}} (x-3) - 1\right| > 3 - 2|x-7|$

c) $|1 - \log_2 (-x)| > 1$

d) $|\log_5 |x|| \geqslant |x| - 4$

2.70. Naszkicuj wykres funkcji f. Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{e^{\ln x^2}}$

b) $f(x) = 3^{\log_9 (x^2 - 2x + 1)}$

c) $f(x) = x^{\log_x 2}$

d) $f(x) = \frac{\log_3 \frac{1}{x}}{\log_9 x}$

Równania logarytmiczne

2.71. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_2(x-1)=5$ b) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)=-2$ c) $\log_{2\sqrt{2}}(5-x)=4$

d) $\log_{27}\left(\frac{3-2x}{4}\right)=\frac{2}{3}$ e) $\log_4|x-7|=0,5$ f) $\log_{0,75}|x+2|=0$

2.72. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_2\frac{1}{x}=3$ b) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2-x}=-2$ c) $\log_{125}\frac{5}{x+1}=\frac{2}{3}$

d) $\log_{16}\frac{5}{2-8x}=-0,75$ e) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+1)=-1$ f) $\log_2\frac{1}{x^2+3}=0$

2.73. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x+3)=-1$ b) $\log_2(x^2-1)=3$

c) $\log_{\sqrt{5}}(9-4x^2)=2$ d) $\log_{0,5}(x^2+4x+4)=-2$

e) $\log_{27}(x^2-4x+3)=\frac{1}{3}$ f) $\log_{2\sqrt{2}}(5+4x-x^2)=2$

2.74. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_9(|x-2|+1)=\frac{1}{2}$ b) $\log_{\frac{2}{5}}|x|=-2$

c) $\log_{81}(|x+3|-2)=0,75$ d) $\log_{216}(4-|5-x|)=\frac{1}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{32}}(|-x-7|+2)=-\frac{1}{5}$ f) $\log_{\sqrt{3}}(3-|1-2x|)=2$

2.75. Rozwiąż równania.

a) $\log_x 27=3$ b) $\log_x 81=2$ c) $\log_{2x}16=-2$

d) $\log_{\frac{x}{5}}1=-1$ e) $\log_{x^2}36=1$ f) $\log_{(x-1)^2}25=2$

2.76. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o określeniu dziedziny tego równania.

a) $\log_{2x-3}25=2$ b) $\log_{3-x}81=4$ c) $\log_{2x+1}27=3$

d) $\log_{2x}(4x-1)=2$ e) $\log_x(6x-9)=2$ f) $\log_{2-x}(2-x)=0$

2.77. Rozwiąż równania.

a) $\log_{2x+3}\frac{1}{3x}=-1$ b) $\log_{x+1}(3x^2+3x)=3$ c) $\log_{x-2}(x^2-4x+4)=1$

d) $\log_{x^2+1}(x^2+7)=2$ e) $\log_{5-x}\frac{1}{x+7}=-1$ f) $\log_{x^2-1}(3x^2-3)=2$

2.78. Rozwiąż równania.

a) $\log_4(\log_3 x)=0$ b) $\log_2(\log_4 x)=1$

c) $\log\left[3+2\log(1+x)\right]=0$ d) $\log_{\frac{1}{2}}\left[1-\log_3(x+4)\right]=-1$

e) $\log_{\sqrt{5}}\left[3+\log_4(\log_2 x+10)\right]=2$ f) $\log_{\frac{4}{25}}\left[3{,}5-3\log_{\frac{1}{8}}(\log_5 x+1)\right]=-\frac{1}{2}$

2.79. Rozwiąż równania.

a) $\log_{\frac{1}{2}} x=4\cdot\log_{\frac{1}{2}} x+6$ b) $\left[\log_2(x-1)\right]^3=125$

c) $\log_{\frac{1}{3}} x\cdot\left(2\log_{\frac{1}{3}} x-7\right)=4$ d) $4\log_9^2(x+5)-1=0$

e) $\frac{2\log_{\sqrt{2}} x+4}{\log_{\sqrt{2}} x}=\log_3 81$ f) $2\cdot\log_5^3(x+3)=\log_5(x+3)+1$

2.80. Rozwiąż równania.

a) $\log_3(x+2)=\log_3(2x+1)$ b) $\log_{\frac{1}{4}}(x-3)+\log_{\frac{1}{4}} x=-1$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=1$ d) $\log_2 x+\log_2(x+2)=\log_2(8x)$

e) $\log_3(3x+1)-\log_3(1-x)=\log_3 x$

f) $\log\frac{1}{2}(x+10)=\log(21x-20)-\log(2x-1)$

2.81. Rozwiąż równania.

a) $\log_5^3 x-2=\log_5 x-2\log_5^2 x$ b) $\ln^3 x+2\ln x+3=0$

c) $\log_2^4(x-1)+3\log_2^2(x-1)=4$ d) $\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1$

e) $\ln^2 x+\frac{4}{\ln^2 x}=5$ f) $\frac{1+\log(x-1)}{1-\log^2(x-1)}+\frac{1}{1-\log(x-1)}=1$

2.82. Rozwiąż równania.

a) $2\log_3(x-5)-\log_3 4=\log_3(3x-20)$

b) $\log\sqrt{5x-4}+\log\sqrt{x+1}=2+\log 0{,}18$

c) $\frac{1}{2}\log(x-5)+\log\sqrt{2x-3}+1=\log 30$

d) $\log_4\sqrt{x}+\frac{1}{2}\log_4(x+4)=1{,}25$

e) $\frac{\log(9-x^3)}{\log(3-x)}=3$

f) $\frac{\ln(2x-19)-\ln(3x-20)}{\ln x}=-1$

2.83. Rozwiąż równania.

a) $\log_2 x^2-2=2\log_2(x+1)$

b) $\log_2(x^2-2)-0{,}5\log_2(x^2-6x+9)=1$

c) $\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2$

d) $\log_2(x+1)^2+\log_2|x+1|=6$

2.84. Rozwiąż równania.

a) $\log_5 x+\log_{\sqrt{5}} x+\log_{\frac{1}{25}} x=5$

b) $\log_{36}(x+2)^2-\log_{\frac{1}{6}}\frac{x}{3}=\log_{216} x^3$

c) $\log_9(x-3)^2=\log_3(x^2+1)$

d) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{16x}2$

e) $\log_x 9\cdot\log_{3x}3=\log_{9\sqrt{x}}3$

f) $\log_x 8-\log_{4x}8=\frac{1}{\log_{16}(2x)}$

2.85. Rozwiąż równania.

a) $2\log_3 x^2-\log_3^2(-x)=4$

b) $\frac{1}{2}\log_{0,4}(x^2+4x+4)=2-\log_{0,4}^2(-x-2)$

c) $x^{2\log^3 x-\frac{3}{2}\log x}=\sqrt{10}$

d) $x^{2-\frac{1}{2}\log x}=100$

e) $x^{\log_3 3x}=9$

f) $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$

2.86. Rozwiąż równania.

a) $\log_3(3^x+8)=2-x$

b) $\log_2(9-2^x)=25^{\log_5\sqrt{3-x}}$

c) $\log_2(25^{x+3}-1)=2+\log_2(5^{x+3}+1)$

d) $9^{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}-6=3^{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$

e) $\log_6(3^{x^2}+1)-\log_6(3^{2-x^2}+9)=\log_6\frac{1}{3}$

f) $7^{\log_5^2 x}=\frac{49}{7^{\log_5 x}}$

2.87. Rozwiąż układy równań.

a) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_2\left(1+\frac{x}{y}\right) = 2 - \log_2 y \\ \log_4(xy) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = 0 \\ 2\log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^x \cdot 5^{\frac{y}{5}} - 80 = 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x-y) = -1 \end{cases}$

D 2.88. Wykaż, że jeśli dla pewnej liczby rzeczywistej x, liczby: $\log_2(x+3)$, $3 + \log_2 2x$, $\log_2(60x+4)$ w podanej kolejności są trzema kolejnymi, początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, to suma n kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $n^2 + n$.

D 2.89. Wykaż, że jeśli dla pewnej liczby rzeczywistej x, liczby: 1, $\log_{16}(x+1)$, $\log_{16}\frac{x+1}{2}$ w podanej kolejności są trzema kolejnymi, początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n), to suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 2.

2.90. Rozwiąż równanie wiedząc, że jego lewa strona jest szeregiem geometrycznym zbieżnym.

a) $\log_3(x-4) + \frac{\log_3(x-4)}{2} + \frac{\log_3(x-4)}{4} + \ldots = 4$

b) $\log^2_{\frac{1}{8}}(1-x^2) - \frac{1}{3}\log^2_{\frac{1}{8}}(1-x^2) + \frac{1}{9}\log^2_{\frac{1}{8}}(1-x^2) - \ldots = \log_{\frac{1}{8}}(1-x^2)$

2.91. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny równania.

a) $3\log_2^2 \sin x + \log_2(1-\cos 2x) = 2$

b) $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x) = 2$

c) $\log_2 \cos x + \log_{\frac{1}{2}}(-\sin x) = 0$

d) $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$

Nierówności logarytmiczne

2.92. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_{\frac{2}{3}}(x-2)<\log_{\frac{2}{3}}(4-x)$

b) $\log_4|x-3|\leqslant\log_4 8$

c) $\log_{\frac{3}{4}}\left|\frac{1}{3}-2x\right|<-1$

d) $\log_{\sqrt{2}}(3x+1)\leqslant 4$

e) $0{,}5+\log_3\left(\sqrt{3}x-1\right)\geqslant\log_3\left(\sqrt{3}-x\right)$

f) $\log_{0,2}(3-x)-2<\log_{0,2}(x+23)$

2.93. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_{\frac{1}{2}}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(2-x)$

b) $\log_2(x^2+x)-2\geqslant\log_2 3$

c) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+1\right)\geqslant 0$

d) $\log_{\sqrt{6}}(x-3)+\log_{\sqrt{6}}(x-2)<2$

e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(5+4x-x^2\right)>-3$

f) $\log_{\frac{2}{3}}x+\log_{\frac{2}{3}}\left(x^2-1\right)\geqslant\log_{\frac{2}{3}}\left(2x^2-2\right)$

2.94. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_{\frac{1}{4}}x-\log_{\frac{1}{4}}(2-x)>-1$

b) $\log_8\frac{x+2}{1-x}\geqslant 1$

c) $\log_3(x^2+1)-\log_3(x-1)<\log_3(x+2)$

d) $\log_{\frac{\sqrt{5}}{5}}(x+2)-\log_{\frac{\sqrt{5}}{5}}(x+10)\leqslant-\log_{\frac{\sqrt{5}}{5}}(x+1)$

2.95. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_{\frac{1}{2}}x\cdot\left(\log_{\frac{1}{2}}x-2\right)<3$

b) $3\log_4 x-1>2\log_4^2 x$

c) $\log_2^3 x-8>7\log_2 x\cdot(\log_2 x-2)$

d) $\frac{2}{\left(\log_{\frac{1}{4}}x-2\right)\cdot\log_{\frac{1}{4}}x}>0$

e) $\frac{1}{\log_3 x-2}\geqslant\frac{1}{\log_3 x}$

f) $\frac{1}{\ln x}-1\leqslant\frac{1}{\ln x-1}$

2.96. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_3 x\cdot\log_{\frac{1}{5}}x<\log_{\frac{1}{5}}81$

b) $\log_5 x\cdot\log_{\frac{2}{3}}x+\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{5}\geqslant 0$

c) $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_4\left(x^2-5\right)\right]>0$

d) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{x}{8-x}\right)\geqslant -1$

2.97. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x)=\log_{x+5}\left(x^2-4\right)+\sqrt{6-2x}$

b) $f(x)=\frac{\sqrt{\log\left(9-x^2\right)}}{2^x-4}$

c) $f(x)=\log_2\left[1-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+6\right)\right]$

d) $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{x^2-1}}$

e) $f(x)=\sqrt{\ln(x-3)-\ln(8-x)}$

f) $f(x)=\ln\left[\ln\left(\frac{x-e}{x}-1\right)\right]$

2.98. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_2(x-1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>\log_2(x+1)$

b) $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_x 3-2{,}5$

c) $[\ln(x+1)-\ln(x+e)+1]\cdot[\ln(4-x)]<0$

d) $\log_{\frac{x}{2}}8+\log_{\frac{x}{4}}8<\frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}$

2.99. Rozwiąż nierówność wiedząc, że lewa strona tej nierówności jest szeregiem geometrycznym zbieżnym.

a) $\log_9 x+\log_9^2 x+\log_9^3 x+\ldots\leqslant\frac{1}{3}$

b) $\log_{\frac{1}{4}}(x-1)+\log_{\frac{1}{4}}^2(x-1)+\log_{\frac{1}{4}}^3(x-1)+\ldots<1$

c) $(1-\log x)^2+(1-\log x)^3+(1-\log x)^4+\ldots\leqslant 3\log x-1$

2.100. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_x(3x+4)<2$ b) $\log_{\frac{2}{x-1}}x>0$ c) $\log_{\frac{x-1}{x+5}}0{,}3<0$ d) $\log_{|x|}\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)>1$

2.101. Rozwiąż nierówności.

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-5x+8\right)}\leqslant 1{,}2$

b) $8^{\log_2\frac{3x-1}{3x+2}}>1$

c) $2^{\log_2(7x+14)}<0{,}5^{\log_2\frac{1}{x^3+8}}$

d) $0{,}2^{6-\frac{3}{\log_4 x}}>\sqrt[3]{0{,}008^{2\log_4 x-1}}$

2.102. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_2\left(2^{x+1}-4\right)\leqslant\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2^x+1}$

b) $\log_2\left(3^{x+1}+1\right)>1+\log_2\left(9^x-2\right)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}\left(3\cdot 2^x+3\right)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}\left(4^x-1\right)-1$

d) $\log_{\frac{1}{2}}\left(9^{x+2}+3^{x+2}\right)+1>0$

2.103. Rozwiąż nierówności.

a) $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}x+2}>\log_{\frac{1}{2}}x$

b) $\sqrt{3-\log_2 x}\leqslant\log_2 x-1$

2.104. Rozwiąż nierówności w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

a) $\log_{\sqrt{2}}\cos x<-1$

b) $\log_{\frac{1}{2}}\cos 2x\geqslant-\log_2\sin x$

c) $\log_{\sqrt{3}}\sin x\leqslant\log_{\sqrt{3}}\cos x-1$

d) $\log^2_{\frac{1}{4}}\sin 2x\leqslant\frac{1}{4}$

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

2.105. W laboratorium wyhodowano pewną kulturę bakterii. Zauważono, że jeśli masa bakterii jest równa 5 g, to dalszy ich rozwój przez 30 dni opisuje funkcja $w(t)=5\cdot 2^{0{,}05\cdot t}$, $t\in\langle 0, 30\rangle$, gdzie $w(t)$ oznacza masę (w gramach) tej kultury bakterii po t dniach od rozpoczęcia obserwacji.

a) Jaka będzie masa bakterii po 4 dniach obserwacji? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 g.

b) Po ilu dniach masa bakterii się podwoi?

c) Po jakim czasie masa bakterii osiągnie 6 g? Wynik podaj z dokładnością do jednej godziny.

d) Jaka będzie masa bakterii po 30 dniach? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 g.

2.106. Ciecz podgrzano do temperatury 100°C, a następnie umieszczono ją w lodówce, w której temperatura była równa 0°C. Wiadomo, że temperaturę T (w °C) tej cieczy po x minutach od włożenia do lodówki opisuje funkcja $T(x)=100\cdot 2^{-0{,}1x}$.

a) Jaka będzie temperatura cieczy po 10 minutach?

b) Jaka będzie temperatura po 30 minutach? Wynik podaj z dokładnością do 0,1°C.

c) Po jakim czasie temperatura będzie równa 25°C?

d) Po jakim czasie temperatura będzie równa 20°C? Wynik podaj z dokładnością do 1 s.

2.107. Pan Nowak założył w banku lokatę w wysokości 10 000 zł na procent składany z kwartalną kapitalizacją odsetek. Roczne oprocentowanie tej lokaty wynosi 8% i się nie zmienia.

a) Oblicz, ile zarobi pan Nowak na tej lokacie po 6 kwartałach.

b) Po ilu kwartałach zysk z lokaty byłby równy co najmniej 500 zł?

W obliczeniach uwzględnij 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.108. Pani Kowalska chce założyć w banku lokatę na 100 000 zł. Ma do wyboru dwie oferty.

I oferta – lokata na 6 kwartałów na procent składany, oprocentowanie w każdym kwartale 4%, kwartalna kapitalizacja odsetek;

II oferta – lokata na 4 kwartały na procent składany, oprocentowanie w każdym kwartale 6%, kwartalna kapitalizacja odsetek.

W obu ofertach trzeba uwzględnić 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

a) Która oferta jest korzystniejsza dla pani Kowalskiej i o ile złotych?

b) O ile kwartałów powinna być przedłużona korzystniejsza lokata, aby zysk pani Kowalskiej był równy co najmniej 30 000 zł?

2.109. W lutym 2022 r. na Morzu Bałtyckim, ok. 100 km od wybrzeża polskiego, miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 2,6 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi, korzystając ze wzoru $R = \log\frac{A}{A_0}$, gdzie R jest siłą trzęsienia ziemi mierzoną w stopniach w skali Richtera, A – amplitudą trzęsienia ziemi mierzoną w centymetrach, A_0 – amplitudą wzorcową o wartości 10^{-4} cm.

2.110. W czerwcu 1996 *r.* w okolicach Augustowa miało miejsce trzęsienie ziemi. Amplituda tego trzęsienia była równa ok. 2 cm. Oblicz siłę tego trzęsienia ziemi w skali Richtera, korzystając ze wzoru z poprzedniego zadania.

2.111. Jedną z największych znanych liczb pierwszych jest liczba $2^{82589933} - 1$. Oblicz, ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma ta liczba.

2.112. Korzystając z kalkulatora zapisz przybliżenia danych liczb w postaci $a \cdot 10^n$, gdzie $a \in \langle 1, 10)$, $n \in \mathbf{N}$.

a) 88^{88} b) 8^{8888} c) 888^8 d) $88^{15} \cdot 15^{88}$

2.113. Czas połowicznego rozpadu polonu ^{210}Po jest równy 138 dni.

D a) Korzystając ze wzoru $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, gdzie λ – stała rozpadu promieniotwórczego, wykaż, że funkcję f, ilustrującą przebieg rozpadu 20 g polonu w zależności od czasu t liczonego w dniach, opisuje wzór $f(t) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}}$.

b) Oblicz, ile gram polonu pozostanie z próbki 20 g po upływie 100 dni.

c) Oblicz, po jakim czasie pozostanie z próbki 1 g polonu. Wynik podaj z dokładnością do 1 godziny.

Test sprawdzający do rozdziału 2.

1. Liczba $\left(2 - \log_{\frac{1}{3}} 27\right)^{-1}$ jest równa:

A. –1 B. 0,2 C. 1 D. 5

2. Liczba $\log_4\left[\left(\sqrt{2}\right)^6 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^9 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{13}\right]$ jest podzielna przez:

A. 7 B. 4 C. 5 D. 6

3. Jeśli $x = \log 12 + (\log_4 10)^{-1}$, to 10^x jest równe:

A. 48 B. 32 C. 24 D. 16

4. Liczba $(3 - \log_2 5) \cdot \log_{\frac{8}{5}} \frac{1}{16}$ jest:

A. liczbą pierwszą
B. liczbą całkowitą ujemną
C. liczbą niewymierną
D. liczbą nieparzystą

5. Jeśli $\log_3 4 = a$, to liczba $\log_3 \sqrt[3]{432}$ jest równa:

A. $\frac{2}{3}a + 3$ B. $\frac{a+3}{3}$ C. $\frac{2}{3}a + 1$ D. $\frac{2a+1}{3}$

6. Niech $x=8^{\log_2 3}$, $y=\log_3 5$, $z=\log_{\frac{1}{2}} 7$. Wówczas:

A. $x<y<z$ B. $z<x<y$ C. $y<z<x$ D. $z<y<x$

7. Do wykresu funkcji logarytmicznej $f(x)=\log_a x$ należy punkt $P(4,-2)$. Wówczas:

A. $f(8)>0$ B. $f(1)=1$ C. $f\left(\sqrt{2}\right)=-0,5$ D. $f\left(\frac{1}{7}\right)=-2$

8. Przekształcając wykres funkcji $f(x)=\log x$ przez symetrię osiową względem prostej $y=x$ otrzymamy wykres funkcji:

A. $y=\log_{\frac{1}{10}} x$ B. $y=\log(-x)$ C. $y=-\log x$ D. $y=10^x$

9. Funkcja $g(x)=\log_{4-0,5m}(x+7)$ jest malejąca tylko wtedy, gdy:

A. $m\in(6,8)$ B. $m<6$ C. $m>8$ D. $m\in(-7,0)$

10. Funkcje $f(x)=\log_{\sqrt{3}} x-2$ oraz $g(x)=4^{x-m}-8$ mają wspólne miejsce zerowe. Wówczas m jest rozwiązaniem równania:

A. $m^2=1$ B. $|m+5|=1$ C. $\left|m-1\frac{1}{2}\right|=0$ D. $(m+3)^2=0$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. Oblicz:

a) $\dfrac{2-\log_2 3+\log_2 12}{\frac{1}{3}\log_4 8+0,5}$

b) $\dfrac{\log_5 1024}{\log_5 2}\cdot 25^{\log_5\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$

12. Uporządkuj liczby a, b, c, d w kolejności od najmniejszej do największej.

$a=2\log_{\frac{2}{5}}\left(\sqrt{5}-1\right)$, $b=\log_{\frac{2}{5}} 0,8+\log_{\frac{2}{5}} 0,2$, $c=\log_{\frac{2}{5}} 4\cdot\log_4 100$, $d=\log_{\frac{2}{5}} 3-\log_{\frac{2}{5}} 4$

13. Do wykresu funkcji $f(x)=\log_a x+b$, $x\in\mathbf{R}_+$, należą punkty $M(1,-1)$ i $N(8,-4)$.

a) Oblicz a i b.

b) Naszkicuj wykres funkcji f.

c) Podaj zbiór rozwiązań równania $f(x)=-3$.

d) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x)>-1$.

14. Wykresy funkcji $f(x) = \log_2(x + a)$ i $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+b} - 1$ przecinają oś OY w punkcie o rzędnej 2.

a) Wyznacz liczby a, b. Podaj dziedzinę funkcji f oraz dziedzinę funkcji g.

b) Oblicz miejsca zerowe obu funkcji.

c) Naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych.

d) Odczytaj zbiór argumentów, dla których obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości dodatnie.

15. W laboratorium podgrzano pojemnik z płynem, a następnie pozwolono, by płyn wystygł. Temperaturę płynu T (°C) opisuje wzór funkcji $T(t) = 90 \cdot 1{,}5^{-0{,}2t}$, gdzie t oznacza czas stygnięcia w minutach.

a) Jaką temperaturę miał płyn, gdy rozpoczynał się proces stygnięcia?

b) Jaka jest temperatura płynu po piątej minucie?

c) Ze wzoru $T = 90 \cdot 1{,}5^{-0{,}2t}$ wyznacz t. Oblicz, ile minut potrzeba, aby płyn osiągnął temperaturę 40°C.

16. Rozwiąż równanie, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $3^{x-2} - 3 = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$

b) $\log_3(-x) + 1 = 4^{x+1}$

17. Rozwiąż nierówność, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \leqslant \log_3(x-6) - 2$

b) $3 - \log_{\frac{1}{4}}(x+2) \leqslant 3^{-x}$

18. Rozwiąż równania.

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x) = -2$

b) $\log_{x-3} 81 = 2$

c) $\log_{x^2}(4x-4) = 1$

d) $\log_{\frac{1}{2}}[\log_3(2-x)] = -1$

e) $\log_3 x \cdot (\log_3 x - 3) + 2 = 0$

f) $\frac{3}{\log(x-2)-1} = \log(x-2) + 1$

D 19. Wykaż, że jeśli $x = 2\log_3 10$ oraz $y = \log 2$, to $3^x - 10^y = 98$.

D 20. Wykaż, że jeśli $x = \frac{1}{3\log_5 2}$ i $y = \frac{2}{\log_3 7}$, to liczba $8^x + 7^y$ jest podzielna przez 7.

D 21. Wykaż, że liczby $\log_{\frac{2}{3}}(\log_{27} 8 \cdot \log_8 9)$ i $1 + \log_{\sqrt{5}}(3 - 2\sqrt{2}) + \log_{\sqrt{5}}(3 + 2\sqrt{2})$ są równe.

D 22. Wykaż, że liczba spełniająca równanie $\log_{0,64} x = 0{,}5$ jest o 50% mniejsza od liczby $\log_{4\sqrt{2}} 16$.

D 23. Wykaż, że jeśli $a > 2$ oraz $9^{\log_3(a-2)} = 16$, to $3\log_{2,16} a = 1$.

D 24. Wykaż, że jeśli $\left(\sqrt{3}\right)^a \cdot 3^b = 243$ i $\frac{\left(\sqrt{2}\right)^a}{2^b} = 8^{\frac{-1}{3}}$, to $2 + \log_{\frac{1}{5}}\left(a^2 + b^2\right) = 0$.

D 25. Wiadomo, że liczby p i q są dodatnie, $q < 6$ oraz $p + 2q = 4$. Wykaż, że $\log_{\sqrt{2}} \frac{8+p}{6-q} = 2$.

26. Liczby -3, $2\log_2(x-3)$, $3\log_2(x-3) + 4$, są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n).

a) Wyznacz x.

b) Podaj ogólny wyraz ciągu (a_n).

c) Oblicz sumę $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + \ldots + a_{15}$.

27. Liczby 1, $\log_2(x+2)$, $\log_2(x+2) + 2$, są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n).

a) Wyznacz x.

b) Podaj wyraz ogólny ciągu (b_n) w przypadku, gdy ten ciąg nie jest monotoniczny.

c) Oblicz dziesiąty wyraz ciągu (b_n) w przypadku, gdy ten ciąg jest rosnący.

D 28. Wykaż, że $\frac{\log_5^2 4 - \log_5^2 2}{\log_5^2 14 + \log_5^2 7 - \log_5 14 \cdot \log_5 49} = 3$.

D 29. Wykaż, że jeśli $\log_2 3 = a$ oraz $\log_3 5 = b$, to $\log_{27} 200 = \frac{3+2ab}{3a}$.

D 30. Wykaż, że jeśli $y = 10^{x^2}$ i $z = 10^{y^2}$, to $x^2 = \frac{\log(\log z)}{2}$.

D 31. Wykaż, że jeśli liczby a, b są dodatnie, $a > 3b$ oraz $a^2 + 9b^2 = 7ab$, to $\log(a-3b) = \log\sqrt{ab}$.

D 32. Wykaż, że jeśli $a > 1$, to $\log_a \pi + \frac{1}{9}\log_\pi a \geqslant \frac{2}{3}$.

D 33. Wykaż, że jeśli $a, b \in (0, 1)$ oraz $\ln\frac{1}{a}\cdot\ln\frac{1}{b}=9$, to $a\cdot b\leqslant\frac{1}{e^6}$.

D 34. Dana jest funkcja $g(x)=\log_{\frac{1}{8}}\frac{x-1}{x+2}$, gdzie $x \in \langle -4, -3\rangle$. Wykaż, że najmniejszą wartością funkcji g jest liczba $-\frac{2}{3}$.

35. Do wykresu funkcji $f(x) = a\cdot\log_2(x+1) + b$, gdzie $x \in (-1, +\infty)$, należą punkty $A(3, 1)$ oraz $B\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

a) Wyznacz liczby a, b.

b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=\left|f(|x|)\right|$ i podaj zbiór wartości tej funkcji.

36. Rozwiąż równania.

a) $\frac{1}{\log_{\sqrt{5}}x}+\frac{1}{\log_{5x}x}=\frac{9}{4}+\left(\log_x\sqrt{5}\right)^2$

b) $\frac{\log_{2\sqrt{3}}\left(x^3-8\right)-2}{\log_{2\sqrt{3}}(x-2)}=1$

37. Rozwiąż nierówności.

a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\frac{x-1}{x+2}\right)+1>0$

b) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x \geqslant 1$

c) $\log_{\frac{1}{3}}x\cdot\log_2 x\leqslant\log_2 3^{-16}$

d) $\log_{3x+4}x^2 < 1$

38. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $4x\cdot(x+2) = \log_2(m+1)^{-1}$ z niewiadomą x ma dwa różne rozwiązania, których suma odwrotności jest równa -8.

39. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których nierówność $x^2\cdot\log_3 m < 1 - 2x$ jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x.

40. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $\log_2(x-m) - \log_2(2x+1) = 0$ z niewiadomą x ma rozwiązanie.

3. Elementy statystyki

Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

3.1. Odpowiedz na następujące pytania.

a) Czym zajmuje się statystyka opisowa?

b) W jaki sposób przeprowadza się obserwację statystyczną?

c) Co nazywamy próbą?

d) Jakie cechy statystyczne nazywamy cechami mierzalnymi, a jakie cechami niemierzalnymi? Podaj po trzy przykłady cech mierzalnych oraz cech niemierzalnych.

3.2. W pewnym mieście komendant policji przeanalizował liczbę wypadków drogowych z ostatniego roku, spowodowanych przez kierowców samochodów osobowych na terenie tego miasta. Badaną cechą była przyczyna wypadku. Wyniki przedstawia tabela obok.

Przedstaw zebrane dane w postaci diagramu kolumnowego i diagramu częstości względnych.

Przyczyna wypadku	Liczebność
Przejazd na czerwonym świetle	81
Jazda z nadmierną prędkością	144
Wymuszenie pierwszeństwa	90
Jazda pod wpływem alkoholu	135

3.3. Wychowawca klasy 4a przeanalizował liczbę spóźnień poszczególnych uczniów tej klasy na pierwsze godziny lekcyjne w listopadzie. Wyniki badań są przedstawione w tabeli liczebności.

a) Ile osób liczy klasa 4a?

b) Sporządź diagram słupkowy oraz diagram kołowy procentowy liczby spóźnień.

Liczba spóźnień przypadająca na jednego ucznia	Liczebność
0	11
1	3
2	2
3	4
4	5

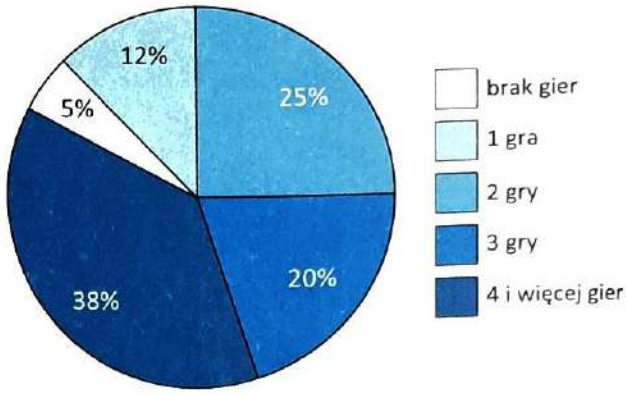
3.4. Wśród 20 uczniów klasy 4b przeprowadzono ankietę, dotyczącą dziennej liczby godzin, przeznaczonych na odrabianie lekcji. Zebrano następujące wyniki:

0,5 1 3 3 2,5 0,5 1,5 2 3 4 0,5 1 1 1 1,5 2,5 4 3 2 1

a) Przedstaw zebrane dane w tabeli liczebności oraz na diagramie kolumnowym.

b) Oblicz, jaki procent badanych uczniów przeznacza co najwyżej 2 godziny na odrabianie prac domowych.

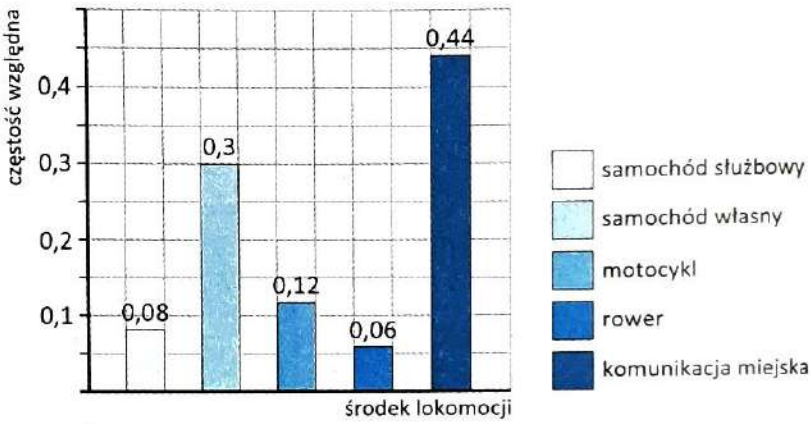
3.5. Firma badająca rynek gier przeprowadziła sondę na próbie 200 losowo wybranych uczniów, w której zapytano o liczbę posiadanych gier komputerowych. Otrzymane wyniki przedstawia diagram obok.



a) Przedstaw zebrane dane na diagramie słupkowym.

b) Ilu spośród badanych uczniów ma co najmniej 3 gry komputerowe?

3.6. W firmie zatrudniającej 50 osób zbadano, jakimi środkami lokomocji pracownicy dojeżdżają do pracy. Wyniki przedstawia diagram częstości względnych.

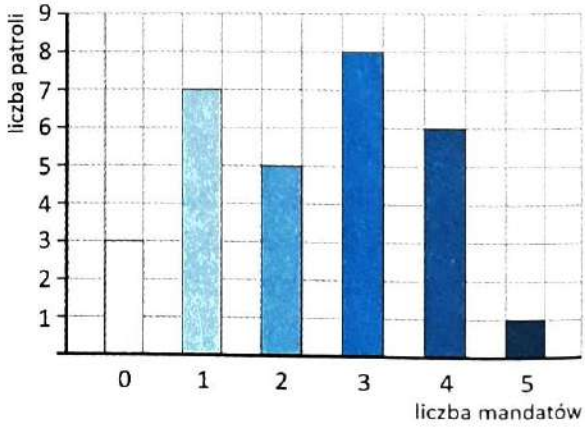


a) Oblicz, jaki procent pracowników firmy dostaje się do pracy innymi środkami transportu, niż komunikacja miejska.

b) Ile osób przyjeżdża do pracy samochodem służbowym, a ile na motocyklu lub na rowerze?

c) Sporządź diagram kołowy zebranych wyników.

3.7. Diagram obok przedstawia liczbę wystawionych mandatów w wybranym dniu przez patrole policji drogowej w pewnej gminie.



a) Jaką liczbę patroli poddano temu badaniu?

b) Ilu kierowców zostało ukaranych mandatami przez badane patrole?

c) Ile mandatów przypada średnio na jeden patrol policji?

d) Przedstaw zebrane dane w tabeli częstości względnych.

Średnia z próby

3.8. Średnia arytmetyczna liczb 2, 3, 3, 5, 4, 2, x, 6, 9, 1 wynosi 4. Oblicz x.

3.9. Średnia arytmetyczna wieku drużyny piłkarskiej jest równa 24 lata. Gdyby uwzględnić wiek trenera, to średnia arytmetyczna wieku wszystkich dwunastu osób wyniosłaby 26 lat. Ile lat ma trener?

3.10. Ankieter przeprowadził sondę telefoniczną na próbie 30 osób. Badaną cechą była dzienna liczba godzin przeznaczana na oglądanie telewizji. Otrzymał następujące wyniki.

1 0,5 2,5 1 3,5 4 6 2 1,5 3 0,5 2 1 1 0

2 0,5 3 4 4,5 5 0,5 2 3 1 4 2 3 1 4

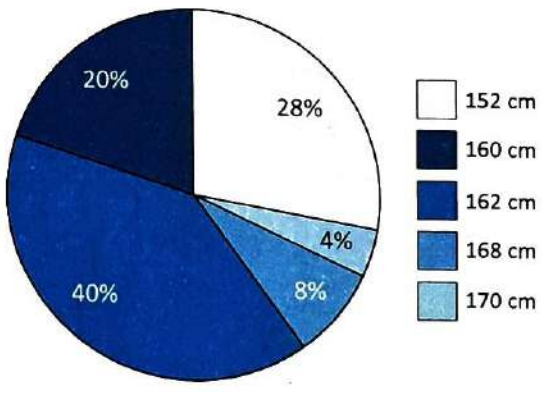
a) Przedstaw zebrane dane na diagramie kolumnowym.

b) Jaka jest średnia czasu oglądania telewizji w ciągu jednego dnia w badanej próbie?

c) Jaki procent badanych osób przeznacza więcej czasu na oglądanie telewizji, niż wynosi średnia? Wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

d) Ile spośród badanych osób ogląda codziennie telewizję w czasie dłuższym, niż podwojony średni czas?

3.11. Na diagramie kołowym procentowym przedstawiono wyniki pomiaru wzrostu trzynastoletnich dziewczynek w pewnej szkole podstawowej.



a) Oblicz średni wzrost trzynastoletniej dziewczynki.

b) Przedstaw zebrane dane na diagramie częstości względnych.

c) Wiedząc dodatkowo, że zmierzono wzrost 75 dziewczynek, sporządź tabelę liczebności.

d) Ile dziewczynek z badanej grupy wiekowej ma wzrost powyżej średniej?

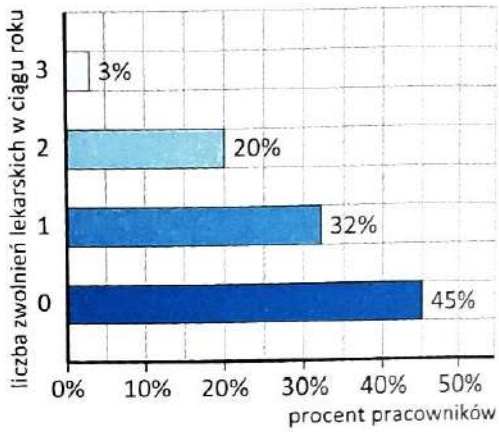
3.12. W bibliotece szkolnej zbadano, ile książek wypożyczyli uczniowie klas drugich pewnego technikum w ciągu pierwszego semestru. Uzyskane wyniki przedstawia poniższa tabela.

Liczba wypożyczonych książek	0	1	2	3	4	5	7	8
Liczba uczniów	13	31	17	32	12	9	2	4

a) Oblicz średnią liczbę wypożyczonych książek w danym semestrze przez ucznia drugiej klasy technikum.

b) Jaki procent uczniów klas drugich wypożycza więcej książek, niż wynosi ta średnia?

3.13. Zbadano liczbę zwolnień lekarskich pracowników pewnej firmy przypadających na ostatni rok. Wyniki przedstawia diagram obok.

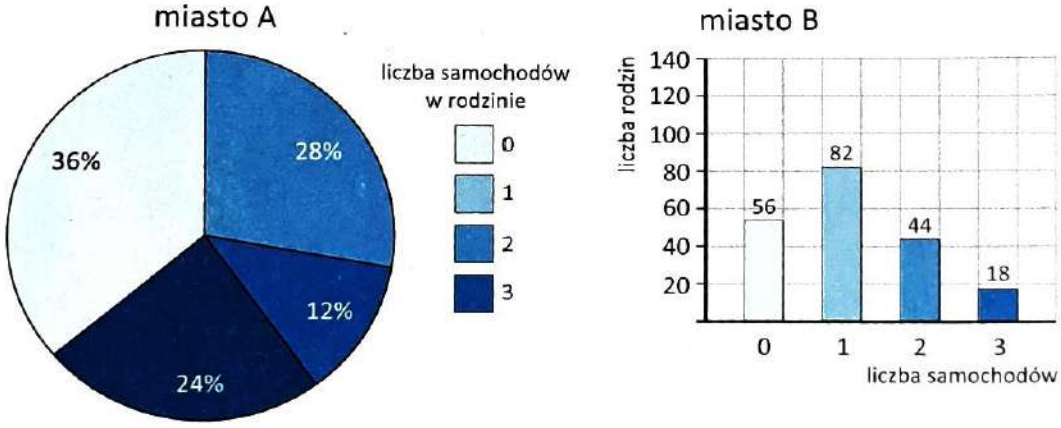


a) Jaka była średnia liczba zwolnień przypadająca na jednego pracownika tej firmy w ostatnim roku?

b) Wiadomo, że w badanym okresie firma zatrudniała 200 osób. Oblicz, ile osób było na zwolnieniu lekarskim co najmniej dwa razy.

c) O ile procent więcej pracowników korzystało ze zwolnienia lekarskiego niż tych, którzy nie byli na zwolnieniach lekarskich ani razu?

3.14. W miastach A i B badano niezależnie liczbę samochodów w rodzinie na równolicznych próbach. Wyniki przedstawiają poniższe diagramy.



a) Ile badanych rodzin z miasta A nie ma samochodu?

b) Jaki procent badanych rodzin z miasta B ma co najmniej dwa samochody?

c) Oblicz średnią liczbę samochodów w rodzinie w każdym z miast A i B.

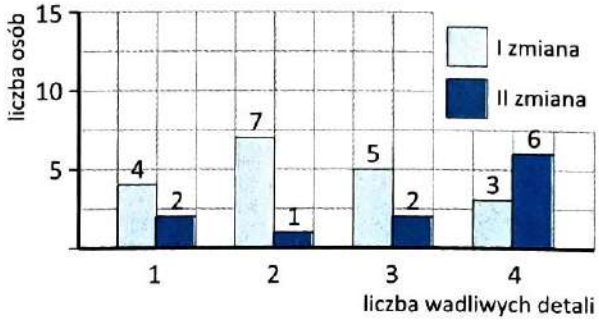
d) Jaka jest średnia liczba samochodów w rodzinie dla obu tych miast?

3.15. W zakładzie produkcyjnym robotnicy wytwarzający jednakowe detale pracują na dwie zmiany: 30 osób na pierwszej zmianie i 20 osób na drugiej zmianie. Zbadano liczbę wadliwych detali, wykonanych przez poszczególnych pracowników w określonym czasie. Poniższy diagram przedstawia liczby robotników każdej zmiany, którzy podczas produkcji wykonali jeden, dwa, trzy albo cztery wadliwe detale. Pozostali robotnicy wyprodukowali detale bez wad.

a) Ilu robotników zakładu wyprodukowało tylko niewadliwe detale? Jaki to procent wszystkich pracowników?

b) Która zmiana wykonuje średnio mniej wadliwych detali, przypadających na jednego robotnika?

c) Oblicz średnią liczbę wadliwych detali wyprodukowanych przez jednego pracownika zakładu.



3.16. W sklepie znajduje się 50 par spodni, wśród których jest 12 par spodni o długości 1,2 m każda. Pozostałe spodnie mają długość 1,24 m oraz 1,3 m. Średnia długość wszystkich spodni w tym sklepie jest równa 1,264 m. Oblicz stosunek liczby spodni o długości 1,24 m do liczby spodni o długości 1,3 m.

3.17. W trzech klasach czwartych pewnego liceum przeprowadzono próbną maturę z matematyki w zakresie podstawowym. Średnia liczba zdobytych punktów w klasie IVa wynosiła 25, w klasie IVb wynosiła 30, a w IVc była równa 32. Sprawdzian pisały 32 osoby z klasy IVa oraz 25 osób z klasy IVb. Oblicz, ile osób z klasy IVc uczestniczyło w tym sprawdzianie, jeśli średnia zdobytych punktów, przypadająca na jednego ucznia tych trzech klas, była równa 28,575.

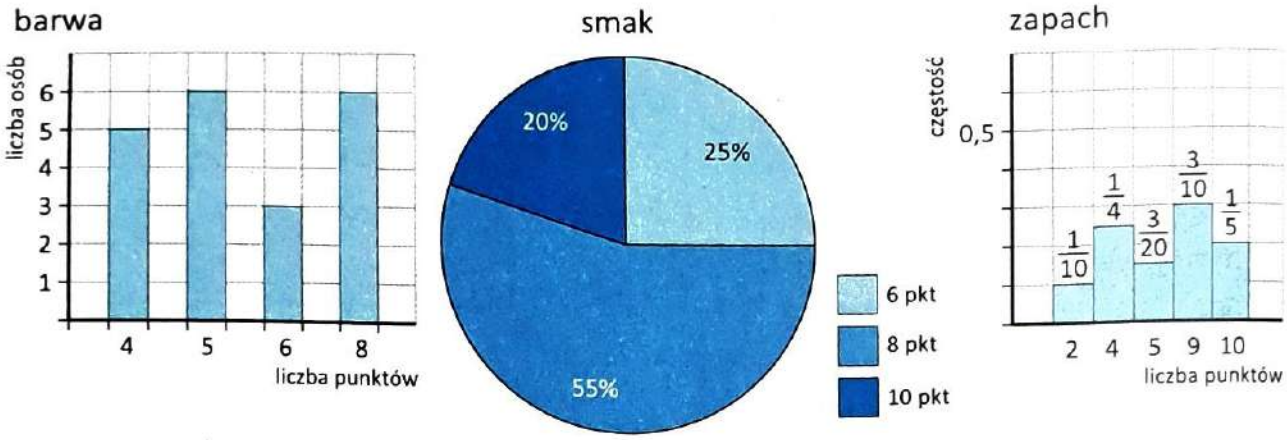
3.18. W pewnej uczelni o przyjęciu na pierwszy rok studiów decyduje średnia ważona punktów, uzyskanych na maturze w zakresie rozszerzonym z matematyki, geografii oraz wybranego języka obcego. Wagi punktów uzyskanych z tych przedmiotów są następujące: z matematyki 0,65, z geografii 0,2, a z języka obcego 0,15. Eliza i Jacek uzyskali na maturze wyniki przedstawione w tabeli.

Która z tych osób ma większe szanse dostania się do tej uczelni na studia?

	Matematyka	Geografia	Język obcy
Eliza	38 pkt	24 pkt	48 pkt
Jacek	26 pkt	40 pkt	50 pkt

3.19. Firma A sprzedała swoje akcje w trzech turach w ilościach 2 : 3 : 5, kolejno w cenie 40 zł, 60 zł i 100 zł za jedną akcję. Firma B sprzedała 30% swoich akcji w cenie 50 zł za jedną akcję, 22,5% akcji – po 70 zł za akcję, a pozostałe akcje – po 80 zł za sztukę. Porównaj średnie ceny akcji obu firm.

3.20. Właściciel kawiarni, chcąc wprowadzić do karty nową kawę, przeprowadził ankietę oceny tej kawy na próbie 20 losowo wybranych klientów. Klienci oceniali kawę w trzech kategoriach: barwa, smak i zapach – przyznając w każdej z tych kategorii liczbę punktów od 1 do 10. Wyniki tej ankiety są przedstawione na diagramach poniżej.



Następnie właściciel chce wyznaczyć średnie arytmetyczne $\overline{x_B}$, $\overline{x_S}$, $\overline{x_Z}$ punktów uzyskanych odpowiednio w kategoriach barwa, smak, zapach i na koniec obliczyć średnią ważoną tych liczb, gdzie $\overline{x_B}$ ma wagę 2,5, $\overline{x_S}$ – wagę 4, a $\overline{x_Z}$ – wagę 3,5. Właściciel wprowadzi tę kawę do stałej sprzedaży tylko wtedy, gdy średnia ważona będzie większa od 70. Czy nowa kawa będzie w stałej ofercie tej kawiarni?

Mediana z próby i moda z próby. Skala centylowa

3.21. Wyznacz modę (dominantę) oraz medianę zestawu danych statystycznych, przedstawionych w postaci zestawu liczb.

a) 2 2 2 2 4 5 5 5 6 7

b) 1 2 4 4 4 5 8 8 8

c) 3 1 3 5 1 2 3 3 5 5 4 2 1 3 2

d) 0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3

3.22. Wyznacz modę oraz medianę zestawu danych statystycznych, przedstawionych w postaci:

a) tabeli liczebności

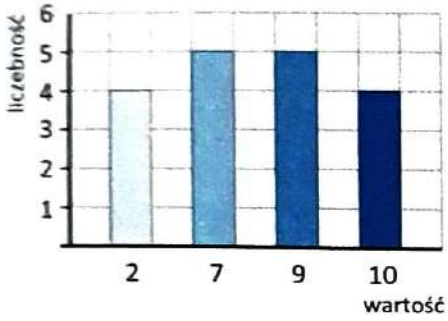
Wartość	3	12	5	9
Liczebność	7	2	4	6

b) tabeli częstości

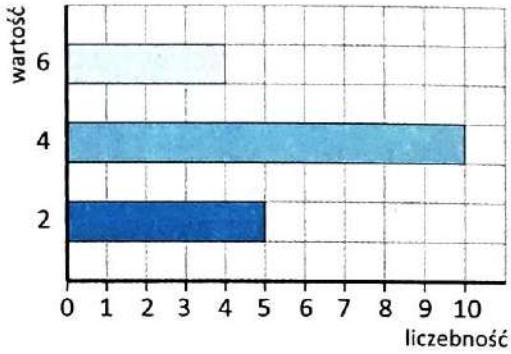
Wartość	3	4	5	8	9
Częstość względna	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3.23. Wyznacz modę oraz medianę zestawu danych statystycznych, przedstawionych w postaci:

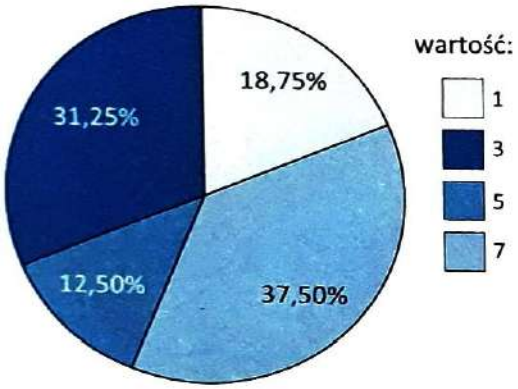
a) diagramu kolumnowego



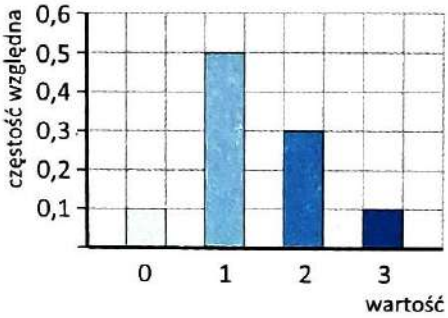
b) diagramu słupkowego



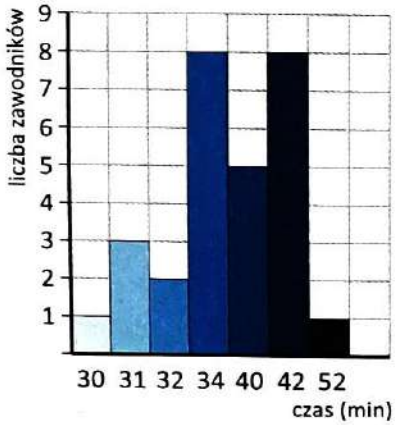
c) diagramu kołowego procentowego



d) diagramu częstości względnych



3.24. W biegu przełajowym zmierzono czas 28 osobom, które pierwsze przekroczyły linię mety. Ich wyniki przedstawia diagram kolumnowy na rysunku obok. Wyznacz modę, medianę oraz średnią arytmetyczną czasu uzyskanego przez tych zawodników.



3.25. Tabela obok przedstawia oceny uczniów klasy czwartej, uzyskane z pracy klasowej z matematyki.

Ocena	1	2	3	4	5
Liczebność	4	8	12	6	2

a) Wyznacz modę i medianę tych ocen.

b) Oblicz średnią ocen z pracy klasowej.

c) Jaki procent uczniów dostało oceny pozytywne?

d) Sporządź diagram kołowy procentowy ocen.

3.26. Pan Kowalski dojeżdża do pracy autobusem i przychodzi na przystanek o stałej porze. Postanowił zapisać czas oczekiwania na autobus z dokładnością do jednej minuty przez kolejne 22 dni robocze. Otrzymał następujące dane.

10 5 10 5 10 7 10 5 2 8 5 3 10 4 3 5 7 10 5 8 10 5

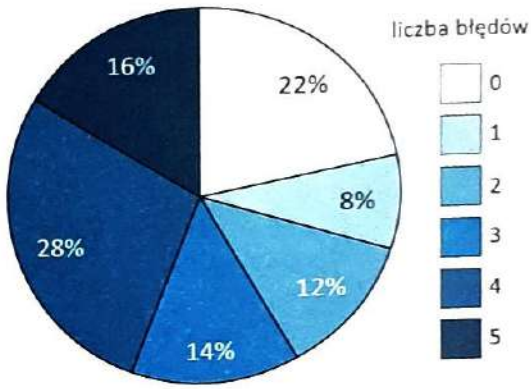
a) Sporządź diagram częstości względnych otrzymanych wyników.

b) Wyznacz modę i medianę czasu oczekiwania.

c) Oblicz średni czas oczekiwania na autobus.

d) Oblicz, jaki procent stanowiły dni, w których czas oczekiwania na autobus był większy od średniej.

3.27. Egzamin testowy z przepisów ruchu drogowego zdawało jednocześnie 50 osób. Liczbę popełnionych błędów w tej próbie przedstawia diagram kołowy procentowy.



a) Aby zdać egzamin, można było popełnić co najwyżej dwa błędy. Ile osób z tej próby zdało egzamin?

b) Oblicz średnią liczbę popełnionych błędów.

c) Jaki procent zdających popełniło więcej błędów, niż wynosi średnia?

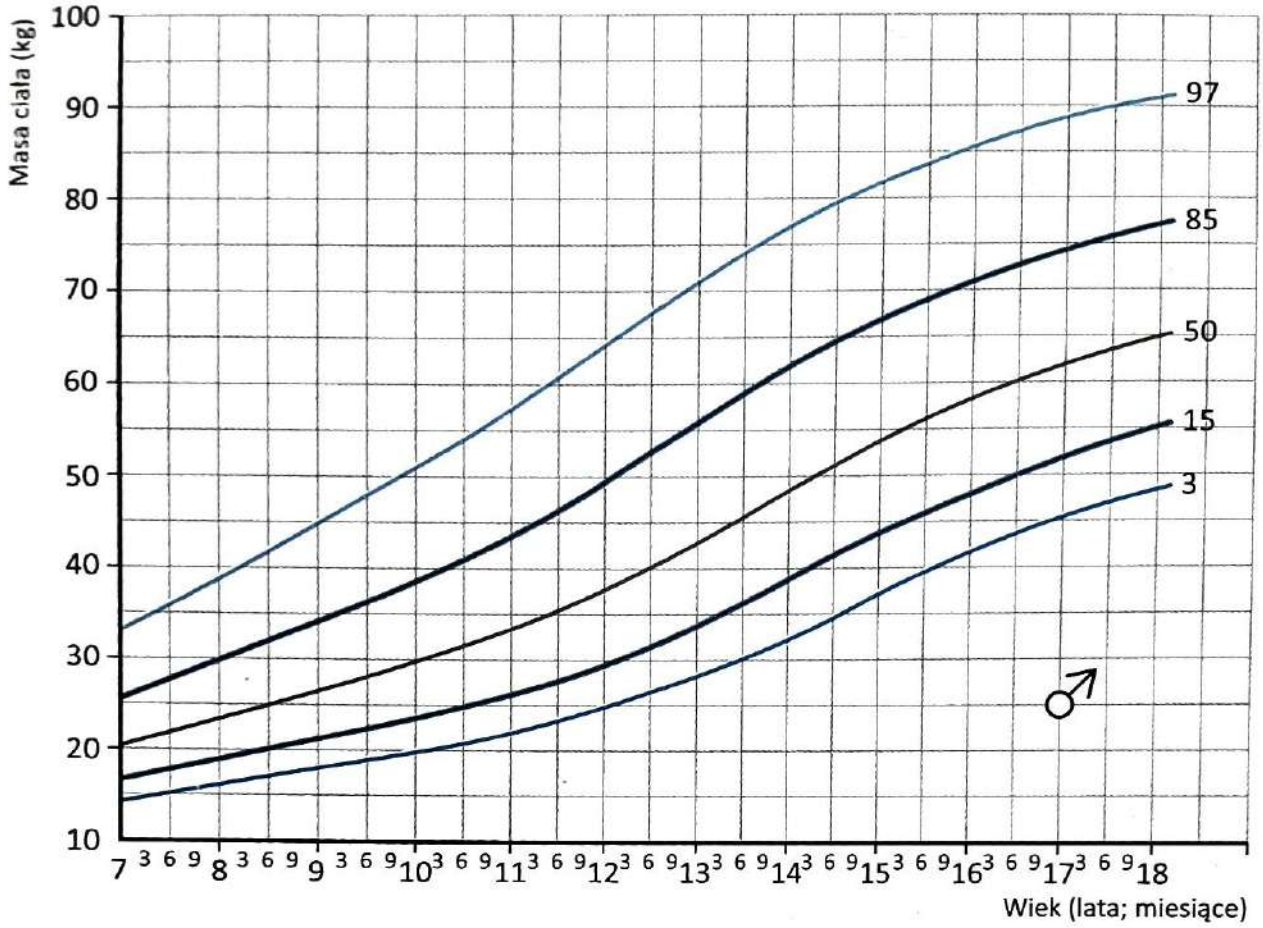
d) Wyznacz medianę popełnionych błędów.

3.28. Wyznacz naturalne liczby a i b, $a > b$, dla których średnia arytmetyczna zestawu danych 3, 2, 4, 1, 3, 1, 4, 5, a, b jest równa 2,8, a jedyną modą tego zestawu jest liczba 3.

3.29. Wyznacz dwie naturalne liczby x i y, $x < y$, dla których zestaw danych: 6, 5, 2, 7, 4, 3, x, y ma tylko jedną modę, a mediana tego zestawu danych jest równa 4.

3.30. Mediana zestawu danych 2, 12, 7, 10, 3, 18, 2, 15, 20, k jest równa 9. Oblicz średnią arytmetyczną tych danych.

3.31. Rysunek poniżej przedstawia siatkę centylową masy ciała chłopców w zależności od ich wieku.



a) Tomek ma 13 lat i 9 miesięcy i waży 60 kg. Któremu centylowi odpowiada waga tego chłopca?

b) Ile procent chłopców w wieku 16 lat i 6 miesięcy ma wagę nie większą niż 50 kg?

3.32. W 2018 roku w pewnej gminie do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym przystąpiło 400 uczniów. Za rozwiązania zadań wystawiano tylko całkowite liczby punktów, maksymalnie można było uzyskać 50 punktów. Poniższa tabela ilustruje wyniki procentowe tego egzaminu, wraz z odpowiadającymi im wartościami centylowymi.

Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki – poziom rozszerzony					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	4	34	53	68	84
2	11	36	55	70	85
4	17	38	57	72	86
6	22	40	59	74	87
8	26	42	61	76	88
10	30	44	63	78	89
12	33	46	65	80	90
14	36	48	67	82	91
16	39	50	69	84	92
18	41	52	70	86	93
20	43	54	72	88	94
22	44	56	76	90	95
24	45	58	77	92	96
26	46	60	79	94	97
28	47	62	80	96	98
30	49	64	81	98	99
32	51	66	83	100	100

a) Z tego egzaminu Antek uzyskał wynik procentowy 56%. Ile to punktów? Ile procent osób przystępujących do tego egzaminu miało wynik co najwyżej taki, jak wynik Antka?

b) Ilu maturzystów uzyskało wynik słabszy od wyniku Antka?

c) Ilu maturzystów uzyskało wynik procentowy z przedziału $\langle 52\%, 58\% \rangle$?

d) Ile osób uzyskało co najmniej 40 punktów? Jaki to procent zdających?

e) Podaj modę i medianę uzyskanych punktów z egzaminu.

f) Oblicz średnią liczbę uzyskanych punktów.

Wariancja i odchylenie standardowe

3.33. Oblicz na dwa sposoby wariancję zestawu danych.

a) 1 1 2 2 3 3 3 4

b) $1\frac{2}{5}$ $1\frac{4}{5}$ $1\frac{9}{10}$ $2\frac{1}{5}$ $2\frac{1}{2}$

c) 3 5 7 20 84

d) −3 −3 −3 −1 6 8 12 15 20 30

3.34. Wyznacz odchylenie standardowe zestawu danych, z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

a) −5 −4 2 7 10 18 21 24

b) 1,1 1,3 1,5 2,1 3,4

3.35. Średnia arytmetyczna liczb x, y, z wynosi 7, a wariancja tych liczb jest równa $4\frac{2}{3}$. Oblicz sumę kwadratów tych liczb.

D 3.36. Suma trzech liczb x, y, z wynosi 6, a ich wariancja jest równa 21. Wykaż, że suma kwadratów tych liczb jest równa 75.

3.37. Średnia arytmetyczna liczb a, b, c, d jest równa 6, a suma kwadratów tych liczb wynosi 170. Wariancja zestawu danych ka, kb, kc, kd wynosi 58,5. Oblicz k.

3.38. Liczby dodatnie x, y, z, t spełniają warunek $4x^2 + t^2 + 2y^2 = 3 \cdot (278 - z^2)$. Odchylenie standardowe zestawu liczb x, x, x, x, y, y, z, z, z, t wynosi $0{,}2\sqrt{641}$. Oblicz średnią arytmetyczną tego zestawu.

D 3.39. Średnia zestawu trzech liczb a, b oraz c jest równa $\overline{x}_1$, a odchylenie standardowe od tej średniej jest równe σ_1. Zestaw trzech liczb $a + 8$, $b + 8$ i $c + 8$ ma średnią arytmetyczną $\overline{x}_2$ i odchylenie standardowe σ_2. Wykaż, że:

a) $\overline{x}_2 = \overline{x}_1 + 8$

b) $\sigma_1 = \sigma_2$

D 3.40. Dany jest zestaw czterech liczb: $a - 2b$, $a - b$, $a + b$ oraz $a + 2b$, gdzie $a > 2b > 0$. Wykaż, że jeśli odchylenie standardowe od średniej tych liczb jest równe $5\sqrt{10}$, to $b = 10$.

D 3.41. Liczby a, b, c, d w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Średnia arytmetyczna tych liczb jest równa 2,5, a ich wariancja wynosi 1,25. Wykaż, że $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100$.

3.42. Poniższa tabela przedstawia miesięczne wynagrodzenia netto pracowników pewnej firmy.

Wynagrodzenie miesięczne (zł)	1700	2480	2600	3640	4420	4860	7680	8500	10800
Liczba pracowników	3	2	1	4	3	2	3	2	1

a) Wskaż modę i medianę miesięcznego wynagrodzenia w tej firmie.

b) Oblicz średnią miesięczną płacę. Wynik podaj z dokładnością do jednego grosza.

c) Jaki procent pracowników ma płacę niższą, niż wynosi miesięczna średnia? Wynik zaokrąglij do 1%.

d) Oblicz odchylenie standardowe od średniej miesięcznej płacy. Wynik zaokrąglij do 1 zł.

3.43. Producent czekolady informuje, że jedna tabliczka czekolady waży średnio 120 g ± 1,8 g. Organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek tego producenta i otrzymała następujące wyniki:

118 g 119 g 121 g 120,5 g 119,5 g 119 g 120 g 122 g 123 g 117 g

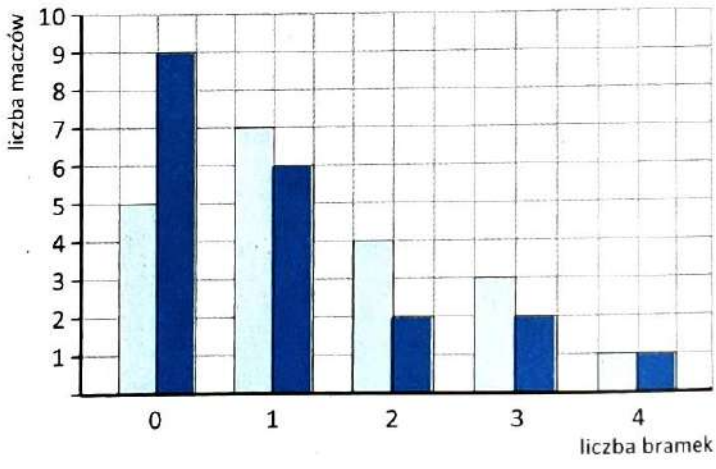
a) Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady w badanej próbie.

b) Oblicz odchylenie standardowe od średniej wagi tabliczki czekolady.

c) Czy wyniki przeprowadzonego badania pokrywają się z informacją producenta?

3.44. Badano skuteczność dwóch drużyn piłkarskich, porównując liczbę zdobytych bramek w 20 zagranych przez każdą z tych drużyn meczach. Wyniki przedstawia diagram obok.

Oblicz średnią i odchylenie standardowe liczby zdobytych bramek przez każdą z tych drużyn. Scharakteryzuj te drużyny, korzystając z obliczonych wielkości.

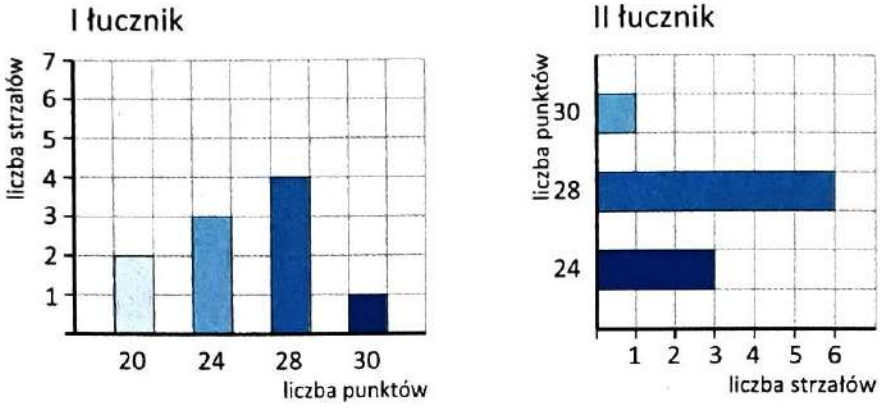


3.45. Na diagramach na następnej stronie przedstawione są wyniki punktowe dwóch łuczników, osiągnięte przez każdego z nich w dziesięciu treningowych strzałach.

a) Podaj medianę punktów zdobytych przez każdego łucznika.

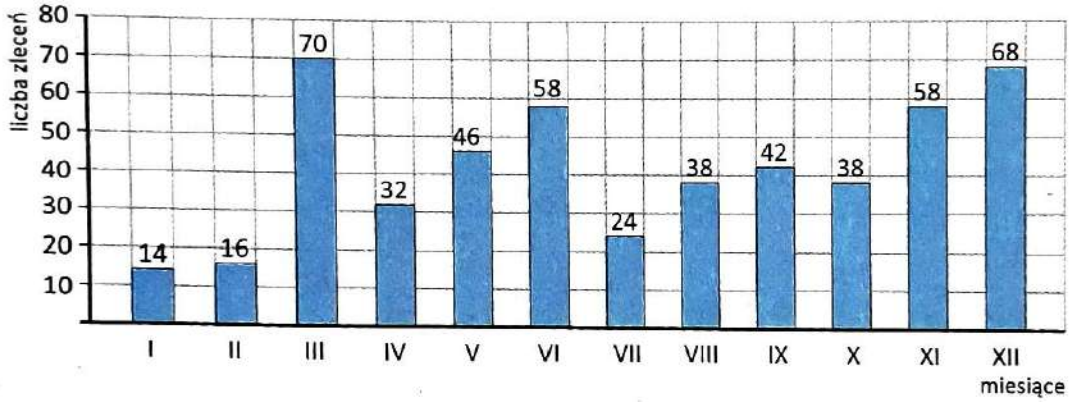
b) Oblicz średnią liczbę punktów w pojedynczym strzale każdego łucznika.

c) Wyznacz odchylenie standardowe od średniej liczby punktów dla każdego łucznika. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.



d) Który z zawodników miał bardziej stabilną formę?

3.46. Firma transportowa „Przeprowadzka", zbadała liczbę otrzymanych zleceń w poszczególnych miesiącach 2021 r. Zebrane dane są przedstawione na diagramie kolumnowym.



a) Wyznacz medianę liczby zleceń.

b) Oblicz średnią miesięczną $\bar{x}$ liczby zleceń. W których miesiącach liczba zleceń przekroczyła średnią?

c) Oblicz odchylenie standardowe σ od średniej miesięcznej liczby zleceń.

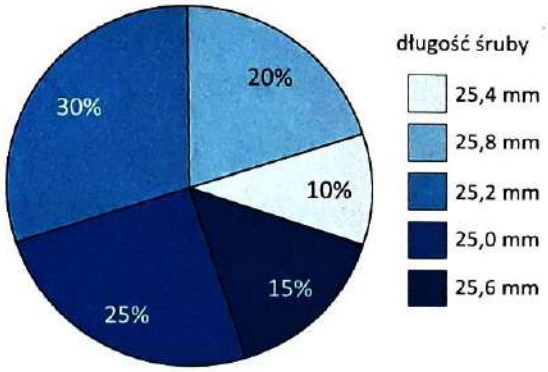
d) W których miesiącach liczba zleceń była mniejsza niż $\bar{x} - \sigma$?

3.47. Zakład produkuje śruby, które mają mieć długość 25,5 mm. Kontrola jakości zmierzyła długości 20 losowo wybranych śrub z danej serii. Poniższy diagram procentowy kołowy ilustruje wyniki pomiarów.

a) Oblicz średnią długość śruby $\bar{x}$ w wylosowanej próbie.

b) Wyznacz odchylenie standardowe σ od średniej długości śruby.

c) Czy wszystkie wyniki pomiarów należą do przedziału $\langle 25{,}5 - \sigma;\ 25{,}5 + \sigma \rangle$?



Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Pewna firma telekomunikacyjna przeprowadziła ankietę telefoniczną na próbie 300 losowo wybranych abonentów, pytając o liczbę posiadanych telefonów komórkowych. Wyniki tej sondy są przedstawione na poniższym diagramie.

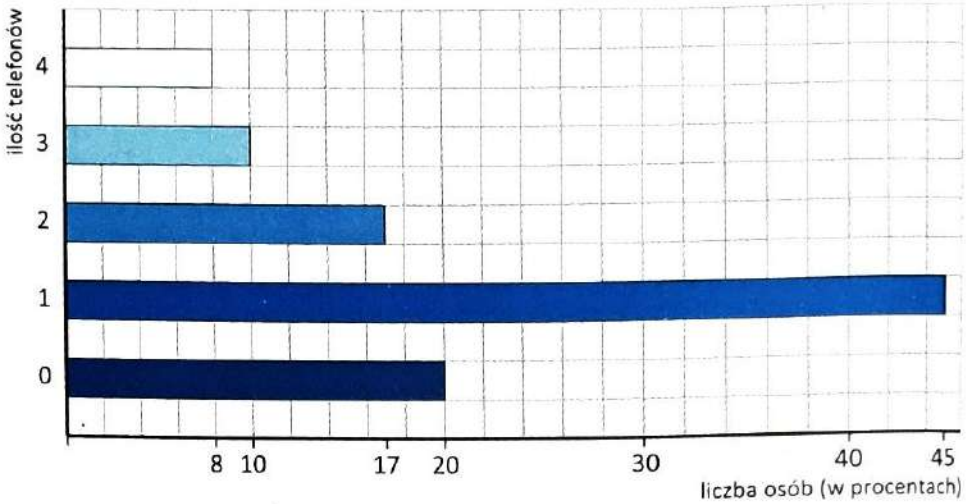
Ile spośród badanych osób ma co najwyżej dwa telefony komórkowe?

A. 82

B. 65

C. 246

D. 186

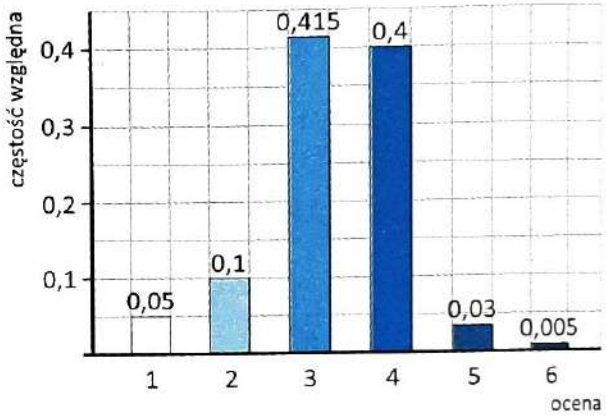


2. Diagram obok ilustruje rozkład ocen z matematyki na półrocze, uzyskanych przez wszystkich uczniów pewnej szkoły średniej.

Średnia semestralna ocen z matematyki w tej szkole jest równa:

A. 3,275 B. 3,315

C. 3,405 D. 3,425



3. Przeprowadzono sondę uliczną, zadając pytanie: „Ile godzin w tygodniu przeznacza Pan (Pani) na zajęcia sportowe?" Wyniki tego badania ilustruje tabela obok.

Liczba godzin	0	1	4	6	9	10	12
Liczba osób	5	12	6	15	4	10	2

Moda liczby godzin przeznaczonych tygodniowo na zajęcia sportowe wyniosła:

A. 6 B. 15 C. 9 D. 12

4. Mediana wszystkich rozwiązań równania $\frac{(x^2-1)(2x^3+18x)(x^2-5x+6)}{3x^2+6x+3}=0$ jest równa:

A. 2 B. $1\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

5. Średnia arytmetyczna dwóch liczb dodatnich jest równa 1,2. Wariancja tych liczb wynosi 0,16. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Suma tych liczb jest równa 0,6.

B. Liczby te są równe 1,3 oraz 1,1.

C. Wartość bezwzględna różnicy tych liczb wynosi 1.

D. Jedna liczba jest dwa razy większa od drugiej.

6. Skoczek narciarski wykonał 5 skoków, których długości były równe: 130 m, 120 m, 100 m, 126 m, 124 m. Odchylenie standardowe w tej serii skoków jest liczbą należącą do przedziału:

A. $\left(9, 9\frac{1}{2}\right\rangle$ B. $\left(9\frac{1}{2}, 10\right\rangle$ C. $\left(10, 10\frac{1}{2}\right\rangle$ D. $\left(10\frac{1}{2}, 11\right\rangle$

7. W zestawie danych x, 4, 7, 5, 8, 7, 3, 5, 9, 2 liczba x jest jedyną dominantą. Mediana tych liczb wynosi 6. Wówczas:

A. $x = 5$ B. $x = 6$ C. $x = 7$ D. $x = 8$

8. Niech M_I, M_{II}, M_{III}, M_{IV} oznaczają mediany danych statystycznych, odpowiednio w przypadkach I, II, III, IV.

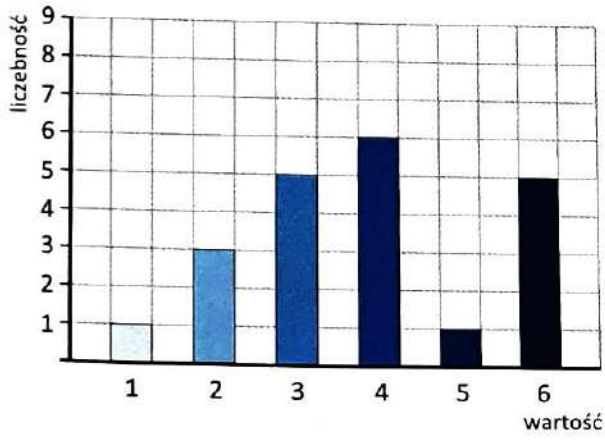
I.

1, 5, 7, 3, 3, 5, 1, 1, 6, 1, 12, 5

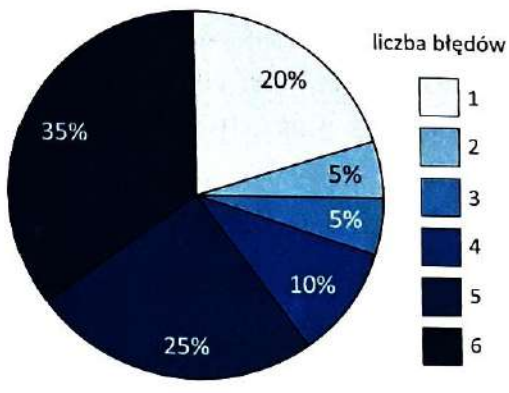
II.

cecha	3	4	5	6	7	8
liczebność	3	4	5	6	7	8

III.



IV



Wskaż zdanie fałszywe.

A. $\frac{M_{III} + M_{IV}}{2} = 4\frac{1}{2}$ B. $M_{II} > M_{IV}$ C. $M_I = M_{III}$ D. $M_{II} + M_{III} = 9$

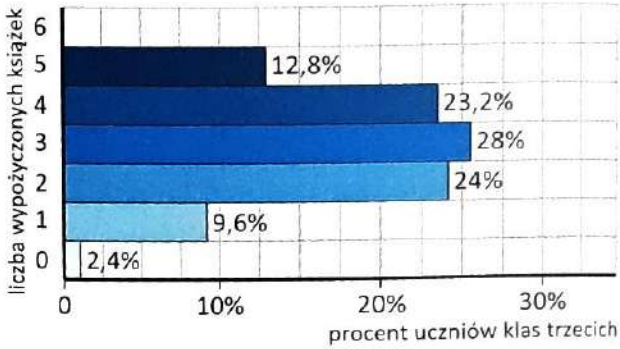
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

9. Liczba lekarzy, pracujących w przychodni zdrowia, jest o 4 większa niż liczba pozostałych pracowników tej przychodni. Średnia pensja lekarzy zatrudnionych w tej przychodni wynosi 3850 zł, zaś średnia pensja pozostałych pracowników jest o 1900 zł niższa. Wiedząc, że średnia płaca wszystkich pracowników tej przychodni jest równa 3090 zł oblicz, ilu lekarzy pracuje w tej przychodni.

10. W pewnym liceum zbadano, ile książek wypożyczyli uczniowie klas trzecich z biblioteki szkolnej w I semestrze. Wyniki przedstawia diagram słupkowy procentowy.

a) Oblicz średnią liczbę książek wypożyczonych przez trzecioklasistę w I semestrze.

b) Wiedząc dodatkowo, że 80 uczniów klas trzecich wypożyczyło więcej książek, niż wynosi średnia przypadająca na jednego ucznia, oblicz liczbę trzecioklasistów tego liceum.



11. Wyznacz liczby naturalne x, y wiedząc, że:

a) średnia arytmetyczna zestawu liczb 3, x, 4, 3, y, 2, 5, 4, 4, 3 wynosi 3,6, a jedyną dominantą tego zestawu jest liczba 3,

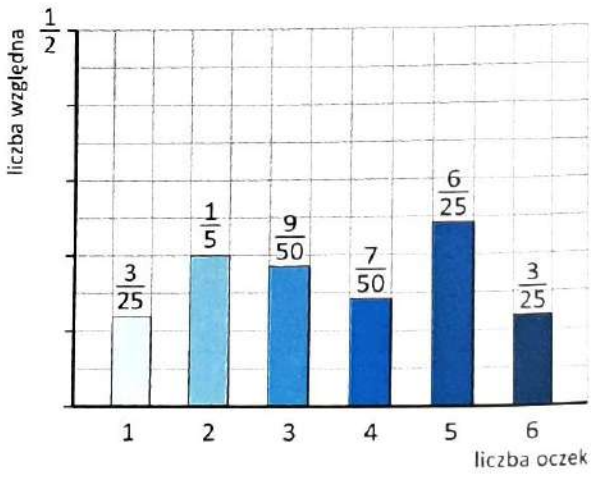
b) średnia arytmetyczna zestawu naturalnych liczb x, y, 3, 5, 1, 7, 8, 12, 15, 10 jest równa 7,1, a mediana tych liczb jest większa od x i wynosi 7,5.

12. Janek zapisał wyniki 50 rzutów sześcienną kostką do gry. Na rysunku obok znajduje się diagram częstości względnych tych wyników.

a) Podaj modę i medianę liczby wyrzuconych oczek.

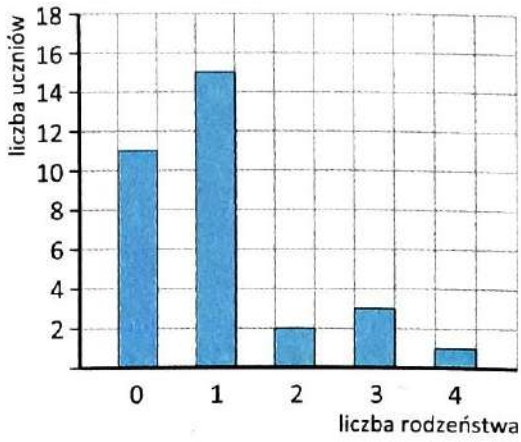
b) Oblicz średnią liczbę oczek, otrzymanych w pojedynczym rzucie.

c) Wyznacz wariancję i odchylenie standardowe od średniej liczby oczek.



13. Maciek ma z matematyki następujące oceny: 4, 4, 2, 5, 5. Tomek również ma 5 ocen, wśród nich są oceny 2, 3, 3. Wyznacz pozostałe oceny Tomka wiedząc, że jego średnia ocen jest o 1 mniejsza od średniej ocen Maćka, a wariancje ocen obu chłopców są takie same.

14. Diagram słupkowy na rysunku obok przedstawia liczby posiadanego rodzeństwa 32 uczniów tworzących klasę 1b w pewnej szkole podstawowej. Wiadomo, że żadne dwie osoby z tej klasy nie są spokrewnione.



a) Podaj medianę i modę liczby wszystkich dzieci w badanych rodzinach.

b) Oblicz średnią liczbę dzieci w tych rodzinach.

c) Wyznacz odchylenie standardowe od średniej liczby dzieci w rodzinie. Wynik podaj z dokładnością do całości.

15. W pewnej szkole średniej przeprowadzono w klasach drugich sprawdzian diagnostyczny z matematyki. Badaniem objęto 100 uczniów. Za rozwiązania zadań przyznawano całkowite liczby punktów, maksymalnie można było uzyskać 20 punktów. Wyniki procentowe uczniów wraz z odpowiadającymi im wartościami centylowymi ilustruje poniższa tabela.

Wyniki sprawdzianu diagnostycznego z matematyki					
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	35	30	70	88
5	3	40	37	75	90
10	6	45	43	80	92
15	10	50	55	85	94
20	15	55	69	90	97
25	19	60	78	95	99
30	25	65	86	100	100

a) Ile punktów zdobyła Kinga, która uzyskała ze sprawdzianu wynik równy 35%?

b) Ile osób osiągnęło wynik lepszy niż Kinga?

c) Ile osób łącznie uzyskało wynik punktowy z przedziału $\langle 13, 17 \rangle$?

d) Wskaż modę uzyskanych punktów.

e) Jaka jest mediana wyników?

f) Oblicz średnią liczbę punktów ze sprawdzianu.

4. Rachunek prawdopodobieństwa

Kombinatoryka – powtórzenie

4.1. Z trzech kolorowych papierów Ola wycięła 22 rozróżnialne figury. Liczby różnych figur w danym kolorze przedstawia tabela obok.

	Kolor figury		
Rodzaj figury	niebieski	żółty	czerwony
trójkąty	3	0	2
kwadraty	4	1	5
koła	1	2	4

Oblicz, na ile sposobów można wybrać jeden trójkąt, jeden kwadrat i jedno koło:

a) w takim samym kolorze

b) tak, aby każda figura była w innym kolorze.

4.2. Tworzymy liczbę trzycyfrową, której cyfra setek należy do zbioru $A = \{8, 9\}$, cyfra dziesiątek do zbioru $B = \{0, 1, 2\}$, a cyfra jedności do zbioru $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Oblicz, na ile sposobów możemy utworzyć liczbę:

a) parzystą,

b) większą od 903,

c) której iloczyn cyfr jest liczbą podzielną przez 8,

d) której suma cyfr jest liczbą nieparzystą.

4.3. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ wybieramy trzy różne cyfry i tworzymy liczbę trzycyfrową. Oblicz, na ile sposobów otrzymamy liczbę:

a) podzielną przez 4

b) większą od 240.

4.4. Oblicz, ile jest liczb czterocyfrowych, które można utworzyć z różnych cyfr należących do zbioru $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i które są:

a) podzielne przez 5

b) mniejsze od 3500.

4.5. Oblicz, na ile sposobów można utworzyć czterocyfrowy kod PIN, w którym:

a) co najmniej jedna cyfra nie jest zerem,

b) pierwsza cyfra jest o 3 większa od ostatniej cyfry,

c) każda kolejna cyfra jest mniejsza od bezpośrednio ją poprzedzającej o 1,

d) suma cyfr jest równa 4.

4.6. Na ile sposobów można utworzyć dziewięciocyfrowy numer telefonu komórkowego, jeśli:

a) wszystkie cyfry tego numeru są różne oraz pierwsza cyfra nie jest równa 0,

b) pierwszą cyfrą tego numeru jest 6 lub 8, a pozostałe cyfry są jednakowe i różne od podanych cyfr,

c) pierwsza i siódma cyfra to cyfry nieparzyste mniejsze od 6, a pozostałe cyfry są większe od 5,

d) początkowe trzy cyfry są różnymi liczbami pierwszymi, a pozostałe cyfry są dowolnymi liczbami parzystymi?

4.7. Mamy prostokątne kawałki materiałów w pięciu różnych kolorach i w jednakowych rozmiarach. Oblicz, na ile sposobów możemy utworzyć chorągiewkę, łącząc ze sobą poziomo trzy takie kawałki:

a) w różnych kolorach,

b) z których dwa są w jednym kolorze, a pozostały kawałek w innym kolorze.

4.8. Oblicz, na ile sposobów można rozmieścić 4 różne listy w pięciu szufladach ponumerowanych kolejno liczbami 1, 2, 3, 4, 5:

a) w dowolny sposób,

b) tak, aby każdy list trafił do innej szuflady,

c) tak, aby każdy list trafił do szuflady oznaczonej liczbą pierwszą,

d) tak, aby co najmniej jeden list trafił do pierwszej szuflady.

4.9. Oblicz, na ile sposobów można ustawić 3 kobiety i 3 mężczyzn w jednej kolejce:

a) dowolnie,

b) tak, aby osoby tej samej płci nie stały obok siebie.

4.10. Oblicz, na ile sposobów można ustawić na półce, w jednym szeregu książki A, B, C, D, E, F, G:

a) w dowolnej kolejności,

b) tak, aby tomy A, B, C stały obok siebie w podanej kolejności,

c) tak, aby książki E i F nie stały obok siebie.

4.11. Oblicz, ile jest różnych:

a) pięciowyrazowych ciągów o wartościach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$,

b) czterowyrazowych ciągów różnowartościowych, o wartościach ze zbioru siedmioelementowego,

c) siedmioelementowych podzbiorów zbioru dziesięcioelementowego,

d) trzywyrazowych ciągów malejących o wartościach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4.12. Klasa IV b składa się z 13 dziewcząt i 12 chłopców. Oblicz, na ile sposobów można wybrać z tej klasy:

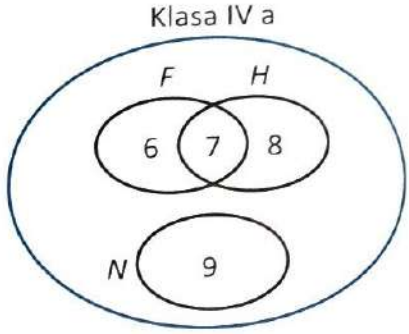
a) kolejno dwie osoby, z których pierwsza będzie przewodniczącą klasy, a druga zastępcą przewodniczącego,

b) dwie osoby, które będą reprezentować klasę poza szkołą,

c) jednego chłopca i jedną dziewczynę,

d) dwie osoby do delegacji, w której będzie co najmniej jedna dziewczyna.

4.13. Wszyscy uczniowie klasy IV a uczą się języka angielskiego oraz co najmniej jednego z trzech języków: francuskiego (F), hiszpańskiego (H) lub niemieckiego (N) – zgodnie z diagramem przedstawionym obok. Na ile sposobów można wybrać z tej klasy jednocześnie dwie osoby:



a) które uczą się języka francuskiego lub języka hiszpańskiego,

b) z których tylko jedna uczy się języka francuskiego,

c) z których co najmniej jedna uczy się języka niemieckiego,

d) z których co najwyżej jedna uczy się zarówno języka francuskiego jak i języka hiszpańskiego.

4.14. W klasie IV c jest 10 dziewcząt i n chłopców, $n > 1$. Oblicz n wiedząc, że liczba możliwych wyborów z tej klasy dwuosobowej delegacji:

a) w której będzie co najwyżej jeden chłopiec, jest równa 185,

b) w której będzie co najmniej jeden chłopiec, jest równa 255.

4.15. Danych jest 8 punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Oblicz:

a) ile różnych prostych można poprowadzić przez te punkty,

b) ile można utworzyć różnych trójkątów, których wierzchołkami są trzy punkty wybrane z danych punktów.

4.16. W klasie jest 17 chłopców i 15 dziewcząt. Oblicz, na ile sposobów można wybrać z tej klasy trzyosobową delegację, składającą się:

a) z jednego chłopca i dwóch dziewczyn,

b) z co najmniej dwóch dziewczyn,

c) z co najmniej jednego chłopca,

d) z co najwyżej dwóch dziewczyn.

4.17. Ile różnych kodów literowych można ułożyć, przestawiając litery wyrazu:
a) MAMA b) BAOBAB c) PRABABCIA d) KAWALKADA?

4.18. Oblicz, na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 5 kart, w których będą:
a) trzy asy i dwie damy
b) jeden as, jeden król i jedna dama
c) co najwyżej jeden król
d) co najmniej trzy asy.

4.19. Oblicz, na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 13 kart, w których będą:
a) dwa piki i jeden trefl,
b) co najwyżej dwa piki,
c) co najmniej jedna karta w czerwonym kolorze,
d) cztery karty w jednym karcianym kolorze i pozostałe po trzy karty w innych karcianych kolorach.

4.20. Oblicz, na ile sposobów można 6 osób:
a) posadzić przy okrągłym stole na nieponumerowanych krzesłach,
b) posadzić przy okrągłym stole na ponumerowanych krzesłach,
c) posadzić w trzech ponumerowanych ławkach, jeśli miejsca w ławkach są rozróżnialne,
d) posadzić w trzech ponumerowanych ławkach, jeśli miejsca w ławkach nie są rozróżnialne,
e) ustawić jednocześnie w trzy pary, jeśli kolejność par nie ma znaczenia i miejsca w parze nie są rozróżnialne.

4.21. Oblicz, ile jest wszystkich piętnastocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym iloczyn cyfr jest równy 8.

4.22. Oblicz, ile jest wszystkich dwudziestocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym iloczyn cyfr jest równy 12.

4.23. Ile jest wszystkich dziesięciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym suma cyfr jest równa 5?

4.24. Ile jest wszystkich jedenastocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym suma cyfr jest równa 6 i nie występują cyfry 3 oraz 5?

Doświadczenie losowe

4.25. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie kostką dwunastościenną. Zapisz przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

a) ścianki kostki mają różne numery od 1 do 12,

b) wszystkie ścianki kostki są rozróżnialne, 5 ścianek jest czerwonych, 4 ścianki są niebieskie, 2 zielone i jedna jest fioletowa.

4.26. Doświadczenie losowe polega na rzucie jedną monetą oraz dziesięciościenną kostką do gry, która na każdej ściance ma umieszczoną inną cyfrę. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tego doświadczenia. Następnie opisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych.

4.27. Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Tworzymy liczbę dwucyfrową, wybierając losowo cyfrę dziesiątek ze zbioru A i cyfrę jedności ze zbioru B. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tego doświadczenia. Następnie opisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych.

4.28. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno dwie cyfry i zapisujemy je w kolejności losowania, tworząc liczbę dwucyfrową. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia w przypadku, gdy:

a) losowanie odbywa się bez zwracania wylosowanej liczby do zbioru A,

b) losowanie odbywa się ze zwracaniem wylosowanej liczby.

4.29. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno dwie cyfry i zapisujemy liczbę dwucyfrową. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego i określ liczbę tych zdarzeń, jeśli losowanie odbywa się:

a) ze zwracaniem

b) bez zwracania.

4.30. Określamy współrzędne punktu P na płaszczyźnie w układzie współrzędnych w następujący sposób. Ze zbioru wszystkich cyfr losujemy kolejno dwie cyfry. Pierwsza wylosowana cyfra oznacza pierwszą współrzędną punktu P, zaś druga cyfra – drugą współrzędną punktu P. Zapisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia i określ liczbę zdarzeń elementarnych, jeśli losowanie odbywa się:

a) ze zwracaniem

b) bez zwracania.

4.31. Ze zbioru $A = \{x, y, z, t\}$ losujemy kolejno trzy różne litery i zapisujemy je w kolejności losowania, tworząc kod trzyliterowy. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tego doświadczenia losowego, korzystając z drzewa stochastycznego. Podaj liczbę tych zdarzeń.

4.32. Ze zbioru $A = \{x, y, z\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno trzy znaki i zapisujemy je w kolejności losowania, tworząc kod trzyliterowy. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych i podaj liczbę tych zdarzeń.

4.33. Na poszczególnych ściankach czworościennej kostki znajdują się różne liczby pierwsze, mniejsze od 10. Rzucamy trzy razy tą kostką. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia losowego i podaj jej moc.

4.34. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, polegającego na pięciokrotnym rzucie jedną monetą, i podaj jej moc.

4.35. Rzucamy trzy razy ośmiościenną kostką do gry z kolejnymi liczbami od 1 do 8 na poszczególnych ściankach. Opisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego i podaj jej moc.

4.36. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy cztery razy jedną cyfrę i tworzymy liczbę czterocyfrową, w której cyfrą tysięcy, setek, dziesiątek i jedności są kolejno wylosowane cyfry. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego i określ liczbę tych zdarzeń, jeśli losowanie odbywa się:

a) ze zwracaniem

b) bez zwracania.

4.37. Rzucamy pięć razy czworościenną kostką, której różne ścianki mają różne kolory: czerwony, niebieski, szary i zielony. Opisz symbolicznie przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego i podaj liczbę tych zdarzeń.

4.38. Zakładamy, że wszystkie kule opisane w zadaniu są rozróżnialne. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla następującego doświadczenia losowego:

a) losowanie jednej kuli z pudełka, w którym są 3 kule białe, 2 czerwone i 1 niebieska,

b) losowanie jednocześnie dwóch kul z pojemnika, w którym są 2 kule białe i 3 czerwone.

4.39. Klasa IV f składa się z 12 dziewcząt i 13 chłopców. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, polegającego na losowym wyborze z tej klasy:

a) kolejno jednej dziewczyny i jednego chłopca,

b) kolejno dwóch osób (kolejność losowania jest ważna),

c) jednocześnie dwóch osób (kolejność losowania nie jest ważna).

W każdym przypadku oblicz liczbę zdarzeń elementarnych.

4.40. Na dworzec kolejowy przyszła grupa składająca się z 7 osób. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych następującego doświadczenia losowego:

a) losowy wybór jednej osoby, która zakupi bilety w kasie dla całej grupy,
b) losowe ustawienie w kolejce wszystkich osób do jednej kasy biletowej.

W obu przypadkach podaj liczbę zdarzeń elementarnych.

4.41. Mamy 7 ponumerowanych szuflad i 4 czapki: białą, czarną, niebieską i szarą. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych i podaj liczbę tych zdarzeń dla następujących doświadczeń losowych:

a) losowe włożenie czapek do szuflad,
b) losowe włożenie czapek do szuflad tak, aby żadne dwie czapki nie były w tej samej szufladzie.

4.42. Piotrek z talii kart wybrał same figury, tzn. po cztery asy, króle, damy i walety. Następnie przetasował wybrane karty i wylosował kolejno trzy spośród nich. Pierwszą kartę otrzymała jego siostra Tosia, drugą – brat Janek, a trzecią kartę zachował dla siebie. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia losowego i podaj ich liczbę.

4.43. Bartek wykonuje rzut trzema monetami o różnych nominałach: 10 gr, 20 gr, 50 gr i zapisuje na kartce poszczególne nominały lub wpisuje dla danej monety wartość 0 – jeśli wypadnie orzeł. Wypisz wszystkie możliwe wyniki takiego doświadczenia losowego.

4.44. Basia ma w dwóch pudełkach kartki z zapisanymi cyframi, po jednej na każdej kartce. W pierwszym pudełku są cztery kartki odpowiednio z cyframi 1, 2, 3, 4, w drugim – dwie kartki odpowiednio z cyframi 5 i 6. Basia chce wybrać losowo jedną kartkę z cyfrą w następujący sposób. Wykona rzut monetą: jeśli wypadnie reszka, to Basia wylosuje kartkę z pierwszego pudełka; jeśli wypadnie orzeł, to dziewczynka wybierze losowo kartkę z drugiego pudełka. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne danego doświadczenia losowego.

4.45. Z klasy IV e liczącej 25 osób wybieramy losowo:

a) trzyosobową delegację na uroczystość szkolną,
b) kolejno trzy osoby, do wykonania trzech różnych zadań.

Opisz symbolicznie przestrzenie zdarzeń elementarnych obu doświadczeń losowych i w każdym przypadku wyznacz liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

4.46. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla następującego doświadczenia losowego:

a) losowanie jednocześnie czterech osób z grupy złożonej z osób A, B, C, D, E, F,

b) losowanie grupy 5 osób z drużyny, składającej się z 9 osób.

W obu przypadkach podaj liczbę zdarzeń elementarnych.

4.47. Na naukę walca przyszło 5 kobiet i 5 mężczyzn. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych następującego doświadczenia losowego:

a) losowy wybór jednej pary kobieta – mężczyzna,

b) losowe ustawienie na parkiecie pięciu par kobieta – mężczyzna.

Podaj liczbę zdarzeń elementarnych w obu przypadkach.

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach

4.48. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednej karty z talii 52 kart. Oznaczmy zdarzenia: A – wylosowana karta jest pikiem, B – wylosowana karta jest koloru czerwonego, C – wylosowana karta jest asem. Opisz słowami zdarzenia: $A \cap C$, $B \cap C$, $A - C$, B', $B' - A$, $A' \cap C$.

4.49. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu jednej liczby ze zbioru $\{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Oznaczmy zdarzenia: A – wylosowana liczba jest liczbą pierwszą, B – wylosowana liczba jest większa od 12, C – wylosowana liczba jest podzielna przez 3. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom: A, B, C, $A - B$, $A' \cup C$, $C \cap B'$, $A' \cup B'$.

4.50. Na poszczególnych ściankach dziesięciościennej kostki znajdują się pojedynczo cyfry od 0 do 9. Wykonujemy jeden rzut tą kostką.

a) Określ przestrzeń zdarzeń elementarnych.

b) Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, sprzyjające poszczególnym zdarzeniom:
A – wypadła liczba pierwsza,
B – wypadła liczba nieparzysta,
C – wypadła liczba podzielna przez 4 lub równa 6.

c) Jaka zależność zachodzi między zdarzeniami $A \cup B$ i C?

4.51. Rzucamy dwa razy monetą.

a) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:
A – co najmniej raz wypadł orzeł, B – reszka wypadła tylko raz. Jaka zależność zachodzi między zdarzeniami A i B?

b) Opisz słownie zdarzenia A' oraz B'.

c) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom $A' \cup B$ oraz $B' \cap A$. Podaj zależność między tymi zdarzeniami.

4.52. Rzucamy jeden raz monetą i jeden raz sześcienną kostką do gry, która na poszczególnych ściankach ma liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:

A – wypadł orzeł lub reszka i liczba 5,

B – wypadła reszka i liczba oczek będąca liczbą pierwszą,

C – wypadła liczba, będąca dzielnikiem liczby 12,

D – wypadł orzeł lub wypadła liczba 1.

4.53. Rzucamy trzykrotnie monetą. Oznaczmy zdarzenia: A – reszka wypadła co najwyżej raz, B – orzeł wypadł co najmniej raz, C – reszka wypadła dwa razy.

a) Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom: A, B, C, A', B', C'.

b) Podaj, jaka zależność zachodzi między następującymi zdarzeniami:
A i B, C i B, $A \cup C$ i B, B' i A.

c) Opisz zdarzenia $B \cup C'$ oraz $B' \cap C$.

4.54. Klasa IV a składa się z 33 osób. 15 uczniów tej klasy trenuje siatkówkę, 12 uczniów trenuje koszykówkę, a tylko 8 osób nie trenuje żadnej z wymienionych dyscyplin. Liczba osób trenujących jednocześnie siatkówkę i koszykówkę jest najmniejsza z możliwych. Wybieramy losowo jedną osobę z tej klasy. Niech S oznacza zdarzenie: wybrana osoba trenuje siatkówkę, zaś K – zdarzenie, że wybrana osoba trenuje koszykówkę. Opisz poniższe zdarzenia i podaj ich moc.

a) $S \cap K'$ b) $(K - S) \cup (S - K)$ c) $K' \cap S'$

4.55. Poniższy diagram przedstawia liczbę uczniów klasy IV c, podzieloną na liczby osób uczących się poszczególnych języków obcych: języka angielskiego (A), języka niemieckiego (N) i języka francuskiego (F). Wiadomo, że każda osoba z tej klasy uczy się co najmniej jednego z tych języków. Z klasy IV c wybrano losowo jedną osobę. Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu, że wybrana osoba:

a) uczy się jednocześnie wszystkich wymienionych języków,

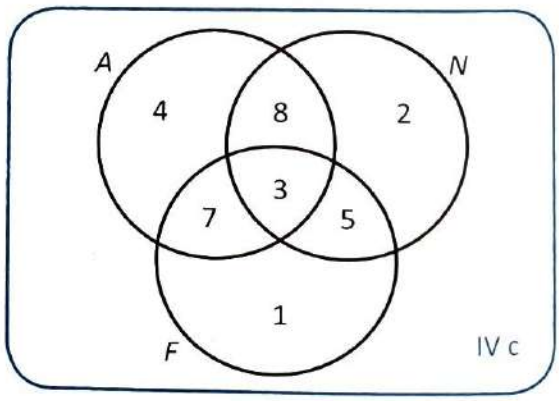
b) uczy się języka niemieckiego lub francuskiego,

c) nie uczy się języka niemieckiego,

d) uczy się co najmniej dwóch języków,

e) uczy się języka angielskiego i nie uczy się języka francuskiego,

f) nie uczy się języka niemieckiego lub nie uczy się języka francuskiego?



Zapisz te zdarzenia za pomocą zdarzeń A, F, N.

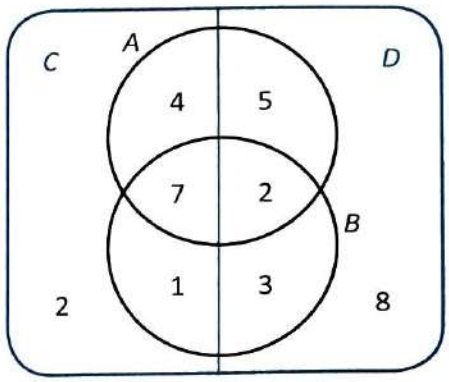
4.56. W klasie IV d jest 18 dziewcząt i 14 chłopców. Wiadomo, że 22 osoby uczęszczają na koło chemiczne lub koło biologiczne jak na diagramie poniżej. Z tej klasy wybrano losowo jedną osobę. Niech zdarzenia A, B, C, D oznaczają odpowiednio zdarzenia:

A – wybrana osoba chodzi na koło chemiczne,

B – wybrana osoba chodzi na koło biologiczne,

C – wybrana osoba jest chłopcem,

D – wybrana osoba jest dziewczyną.



Opisz słownie poniższe zdarzenie. Podaj, ile zdarzeń elementarnych sprzyja temu zdarzeniu.

a) $A \cup C$ b) $D \cap (A \cup B)$

c) $C \cap B'$ d) $A' \cup B'$

e) $A' \cap B' \cap D$ f) $A \cap (C \cup D)$.

4.57. W klasie IV e uczy się 28 osób. Wiadomo, że 7 osób z tej klasy uczęszcza tylko na kółko teatralne, 8 osób tylko na kółko przyrodnicze, a 4 osoby uczęszczają na oba te kółka. Pozostali uczniowie nie mają dodatkowych zajęć. Wybieramy losowo jedną osobę z danej klasy. Niech A oznacza zdarzenie – wybrana osoba uczęszcza na kółko teatralne, zaś B zdarzenie – wybrana osoba uczęszcza na kółko przyrodnicze. Zapisz za pomocą zdarzeń A i B zdarzenia:

a) wybrana osoba nie chodzi na kółko teatralne,

b) wybrana osoba nie uczęszcza na żadne z kół,

c) wybrana osoba uczęszcza na co najmniej jedno koło,

d) wybrana osoba uczęszcza tylko na jedno koło.

Podaj moc każdego z tych zdarzeń.

4.58. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie dwiema sześciennymi kostkami do gry: czarną i zieloną. Oblicz, ile jest takich wyników doświadczenia, dla których:

a) suma oczek na obu kostkach jest podzielna przez 3,

b) iloczyn oczek na obu kostkach jest liczbą większą od 5.

4.59. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu:

a) A – iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 4,

b) B – suma otrzymanych liczb jest liczbą pierwszą.

4.60. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A – suma wylosowanych liczb jest liczbą parzystą, jeśli:

a) losujemy ze zwracaniem b) losujemy bez zwracania.

4.61. Ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu:

a) A – iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 2 i przez 3,

b) B – iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą podzielną przez 2 lub przez 3.

4.62. Ze zbioru cyfr różnych od 0 losujemy kolejno trzy cyfry ze zwracaniem i tworzymy liczbę trzycyfrową. Oblicz, ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu:

a) A – co najmniej dwie cyfry otrzymanej liczby są równe 4,

b) B – tylko jedna cyfra otrzymanej liczby jest większa od 6,

c) C – co najwyżej jedna cyfra otrzymanej liczby jest liczbą pierwszą,

d) D – tylko dwie cyfry otrzymanej liczby są nie mniejsze niż 7.

4.63. Doświadczenie losowe polega na pięciokrotnym rzucie monetą. Niech zdarzenia A i B oznaczają odpowiednio zdarzenia:
A – co najmniej raz wypadł orzeł, B – reszka wypadła co najwyżej 3 razy.

a) Opisz słownie zdarzenia A' i B'. Podaj liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających tym zdarzeniom.

b) Czy prawdziwe są równości: $(A \cup B)' = A' \cup B'$ oraz $(A \cap B)' = A' \cap B'$? Odpowiedź uzasadnij.

4.64. Z grupy dwóch kobiet i czterech mężczyzn losujemy trzyosobową delegację.

a) Ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia?

b) Wyznacz liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A – w wybranej delegacji znajduje się co najmniej dwóch mężczyzn.

c) Wyznacz liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu B – w wybranej delegacji znajduje się co najmniej jedna kobieta.

4.65. Z talii 52 kart losujemy 7 kart. Niech A oznacza zdarzenie – wylosowaliśmy 4 asy, B – wylosowaliśmy 2 damy, C – wylosowaliśmy co najwyżej 3 trefle. Wyznacz liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) C d) $A \cap C'$

Określenie prawdopodobieństwa

4.66. Wiadomo, że A, B są zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω oraz $P(A) = 0{,}4$ i $P(B) = 0{,}5$. Oblicz $P(A \cup B)$, jeśli:

a) $P(A \cap B) = 0{,}3$ b) $A \cap B = \varnothing$ c) $A \subset B$.

4.67. Wiadomo, że A, B są zdarzeniami zawartymi w przestrzeni Ω oraz $P(A) = 0{,}8$ i $P(B) = 0{,}6$. Oblicz $P(A \cap B)$, jeśli:

a) $P(A \cup B) = 0{,}9$ b) $A \cup B = \Omega$ c) $A \cup B = A$.

4.68. Dane są zdarzenia A, $B \subset \Omega$ takie, że $P(A') = 0{,}69$ oraz $P(B') = 0{,}3$.

a) Oblicz $P(A)$ i $P(B)$.

b) Czy zdarzenia A i B się wykluczają? Odpowiedź uzasadnij.

4.69. Dane są zdarzenia A, $B \subset \Omega$ takie, że $P(A \cup B) = 0{,}5$ i $P(A) = P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Oblicz $P(B')$ oraz $P(B - A)$.

4.70. Dane są zdarzenia A, $B \subset \Omega$. Wiadomo, że $P(A') = 0{,}83$ i $P(B') = 0{,}88$ oraz $P(A \cap B) = 0{,}04$. Oblicz:

a) $P(A \cup B)$ b) $P\big((A \cup B) - A\big)$ c) $P(A \cap B')$.

4.71. Dane są zdarzenia A, $B \subset \Omega$. Wiadomo, że $P(A') = 0{,}91$ i $P(A \cap B) = 0{,}01$ oraz $P(A \cup B) = 0{,}21$. Oblicz: $P(B)$, $P\big(B - (A \cap B)\big)$, $P\big((A \cup B) - (A \cap B)\big)$.

4.72. Kostka sześcienna do gry z liczbami oczek od 1 do 6 została wykonana z materiału, który nie jest jednorodny. Ścianka z jednym oczkiem wypada dwa razy częściej niż każda z pozostałych ścianek. Wykonujemy jeden rzut tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania nieparzystej liczby oczek.

4.73. Na ośmiościennej kostce do gry na dwóch ściankach znajduje się liczba 2, na trzech ściankach liczba 3, a na pozostałych ściankach odpowiednio liczby 4, 5, 6. Wykonujemy jeden rzut tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – wypadła liczba oczek będąca liczbą pierwszą.

4.74. W rzucie niesymetryczną sześcienną kostką do gry ścianka z dwoma oczkami i ścianka z sześcioma oczkami wypada trzy razy częściej niż każda z pozostałych ścianek. Rzucamy jeden raz tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia ścianki:

a) z jednym oczkiem b) z sześcioma oczkami c) z parzystą liczbą oczek.

4.75. W pudełku znajdują się kartki z różnymi numerami. Prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem nie większym niż 5 jest równe $\frac{4}{5}$, a prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem nie mniejszym niż 5 jest równe $\frac{1}{3}$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kartki z numerem 5.

4.76. Strzelec strzela 4 razy do celu. Prawdopodobieństwo, że trafi co najmniej trzy razy, jest równe $\frac{4}{5}$. Prawdopodobieństwo, że trafi co najwyżej trzy razy, wynosi $\frac{3}{5}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że strzelec w jednej serii trafi w cel trzy razy?

D 4.77. O zdarzeniach A, $B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A) \leqslant \frac{2}{3}$, $P(B') = \frac{5}{8}$ oraz $P(A \cap B) \geqslant 0{,}125$. Wykaż, że $P(A \cup B) \leqslant \frac{11}{12}$.

D 4.78. O zdarzeniach A, $B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{3}$ oraz $P(B) = \frac{3}{5}$. Wykaż, że $P(A' \cap B) \geqslant \frac{4}{15}$.

D 4.79. O pewnym zdarzeniu $A \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A') \geqslant 0{,}9$. Wykaż, że dla dowolnego zdarzenia $B \subset \Omega$ zachodzi nierówność $P(A \cap B) < 0{,}11$.

D 4.80. O zdarzeniach A, $B \subset \Omega$ wiadomo, że $P(A') \geqslant \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{3}{8}$ oraz $P(A \cap B) \geqslant \frac{1}{8}$. Wykaż, że $P(A - B) < \frac{1}{4}$.

Obliczanie prawdopodobieństwa

4.81. Symetryczna sześcienna kostka ma trzy ścianki niebieskie, jedną czerwoną, jedną zieloną i jedną białą. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo:

a) otrzymania ścianki zielonej lub niebieskiej,

b) nieotrzymania ścianki w kolorze czerwonym.

4.82. Rzucamy jeden raz symetryczną ośmiościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) A – wypadła parzysta liczba oczek lub liczba oczek mniejsza od 4,

b) B – wypadła nieparzysta liczba oczek i jednocześnie nie będąca dzielnikiem liczby 6.

4.83. Rzucamy symetryczną dziesięciościenną kostką do gry, z liczbami od 0 do 9 na poszczególnych ściankach. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby, która jest:

a) liczbą pierwszą i nie jest liczbą nieparzystą,

b) podzielna przez 3 lub jest większa od 7.

4.84. Sześcian pomalowano, a następnie rozcięto na 64 jednakowych wymiarów sześcianiki, które wrzucono do pudełka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego pudełka jednego sześcianika, który będzie miał:

a) trzy ściany pomalowane,

b) jedną lub dwie ściany pomalowane.

4.85. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania karty, która jest:

a) treflem lub pikiem

b) asem i nie jest treflem

c) królem lub kierem

d) kierem lub dwójką i nie jest figurą.

4.86. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wylosowana liczba jest podzielna przez 2 i przez 5,

b) wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub przez 5,

c) wylosowana liczba jest podzielna przez 10 lub przez 15,

d) wylosowana liczba jest podzielna przez 15 i nie jest podzielna przez 20.

4.87. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) liczby, której reszta z dzielenia przez 8 jest równa 2 lub 3,

b) liczby, której reszta z dzielenia przez 6 jest parzysta.

4.88. Ze zbioru liczb trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) liczby podzielnej przez 2 lub przez 3,

b) liczby podzielnej przez 5 i jednocześnie niepodzielnej przez 3.

4.89. Ze zbioru liczb trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) liczby, której reszta z dzielenia przez 4 jest równa 3,

b) liczby, której reszta z dzielenia przez 7 jest równa 2.

4.90. Liczby uczniów z klas II a, II b i II c uczęszczających na SKS pozostają odpowiednio w stosunku 3 : 2 : 5. Z tej grupy uczniów wybrano losowo jedną osobę. Oblicz prawdopodobieństwo wybrania osoby z klasy II a.

4.91. W skrzyni znajdują się piłki niebieskie i piłki czerwone, przy czym niebieskich jest o 5 więcej, niż czerwonych. Prawdopodobieństwo wylosowania jednej piłki czerwonej jest równe $\frac{2}{9}$. Ile piłek niebieskich jest w tej skrzyni?

4.92. W klasie IV a jest o 4 chłopców więcej niż dziewcząt. Prawdopodobieństwo wylosowania z tej klasy chłopca jest równe $\frac{9}{16}$. Oblicz, ile osób jest w klasie IV a.

4.93. Rzucamy jedną symetryczną monetą i jedną kostką do gry. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wypadł orzeł i parzysta liczba oczek,

b) wypadł orzeł lub parzysta liczba oczek.

4.94. Rzucamy kolejno trzy razy symetryczną monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) orzeł wypadnie co najwyżej raz,

b) reszka wypadnie co najmniej raz,

c) za drugim razem wypadnie orzeł, a za trzecim reszka.

4.95. Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – suma liczb wyrzuconych oczek jest:

a) mniejsza od 10

b) liczbą pierwszą.

4.96. Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – wartość bezwzględna różnicy liczb wyrzuconych oczek jest:

a) podzielna przez 3

b) dzielnikiem liczby 12.

4.97. Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest:

a) większy od 4 i mniejszy od 13 b) podzielny przez 4 lub przez 6.

4.98. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – iloraz liczby oczek wyrzuconych w pierwszym rzucie przez liczbę oczek wyrzuconych w drugim rzucie jest:

a) liczbą nie większą od 0,75 b) liczbą całkowitą.

4.99. Ze zbioru cyfr $\{5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne dla tego doświadczenia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) utworzona liczba jest większa od 65,

b) utworzona liczba jest podzielna przez 4,

c) suma cyfr tej liczby jest liczbą pierwszą,

d) cyfra dziesiątek różni się od cyfry jedności o 1.

4.100. Ze zbioru cyfr $\{6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) utworzona liczba jest nie większa od 86,

b) utworzona liczba jest podzielna przez 3,

c) suma cyfr tej liczby jest liczbą nieparzystą,

d) cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

4.101. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) utworzona liczba jest podzielna przez 11,

b) utworzona liczba jest nieparzysta,

c) iloczyn cyfr tej liczby jest większy od 10,

d) co najmniej jedna cyfra tej liczby jest parzysta.

4.102. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno dwie cyfry bez zwracania i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) otrzymana liczba jest większa od 35,

b) otrzymana liczba jest podzielna przez 6.

4.103. Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy ze zwracaniem kolejno dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) utworzona liczba jest podzielna przez 11,

b) utworzona liczba jest nieparzysta,

c) iloczyn cyfr tej liczby jest większy od 50,

d) co najmniej jedna cyfra tej liczby jest parzysta.

4.104. Rzucamy dwiema dziesięciościennymi symetrycznymi kostkami. Każda z nich ma na poszczególnych ściankach liczby: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) suma otrzymanych liczb jest podzielna przez 7,

b) iloczyn otrzymanych liczb jest podzielny przez 3 lub przez 5.

4.105. Kasia w jednej szufladzie ma 3 torebki: białą, czarną i zieloną, a w drugiej szufladzie cztery apaszki: białą, czarną i dwie zielone. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierając losowo jedną torebkę i jedną apaszkę, Kasia otrzyma je w jednym kolorze.

4.106. Z talii 52 kart losujemy kolejno bez zwracania dwa razy po jednej karcie. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) pierwsza z wylosowanych kart jest pikiem, a druga jest asem,

b) co najmniej jedna z wylosowanych kart jest pikiem,

c) co najwyżej jedna z wylosowanych kart jest asem,

d) żadna z wylosowanych kart nie jest asem ani pikiem.

4.107. W klasie IV c jest 21 dziewcząt i 11 chłopców. Wybieramy losowo kolejno dwie osoby z tej klasy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowaliśmy:

a) jedną dziewczynę i jednego chłopca,

b) co najmniej jedną dziewczynę.

4.108. Student umie odpowiedzieć na 30 spośród 50 pytań zamieszczonych w zestawie egzaminacyjnym. Losuje dwa pytania. Jeśli odpowie dobrze na przynajmniej jedno z nich, to zda egzamin. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że student zda egzamin.

4.109. W pudełku znajdują się 4 losy wygrywające i 6 losów pustych. Losujemy dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) dwóch losów wygrywających,

b) co najmniej jednego losu wygrywającego.

4.110. Na loterii znajduje się 6 losów wygrywających: jeden z wygraną 30 zł, dwa z wygraną 20 zł i trzy z wygraną 10 zł. Pozostałe 4 losy są puste. Losujemy dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania 30 zł.

4.111. W pudełku znajdują się rozróżnialne kule: 2 czerwone, 3 białe i 5 niebieskich. Losujemy kolejno bez zwracania dwa razy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) obie wylosowane kule mają taki sam kolor,

b) żadna z wylosowanych kul nie jest czerwona.

4.112. Ze zbioru wierzchołków pewnego wielokąta wypukłego wybieramy losowo dwa wierzchołki. Prawdopodobieństwo wybrania wierzchołków wyznaczających przekątną tego wielokąta jest równe 0,8. Ile wierzchołków ma wielokąt?

4.113. W pudełku jest pewna liczba kul białych i jedna kula czarna, wszystkie kule są rozróżnialne. Losujemy jedną kulę, zatrzymujemy ją, a następnie z pozostałych kul losujemy jedną kulę. Ile powinno być kul białych w pudełku, aby prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych było równe $\frac{2}{3}$?

4.114. W klasie IV b jest 9 dziewcząt i pewna liczba chłopców. Wybieramy losowo kolejno dwie osoby z tej klasy. Prawdopodobieństwo wybrania co najmniej jednej dziewczynki jest równe $\frac{6}{7}$. Ilu chłopców jest w tej klasie?

4.115. W skrzyni jest pewna liczba piłek do siatkówki i mniejsza liczba piłek do koszykówki – razem 9 piłek. Ile jest piłek do siatkówki, jeśli przy jednoczesnym losowaniu z tej skrzyni dwóch piłek prawdopodobieństwo wylosowania piłek do tej samej dyscypliny sportowej jest takie samo, jak prawdopodobieństwo wylosowania do dwóch różnych dyscyplin?

4.116. Przestawiając dowolnie cyfry 1, 2, 3, 4, 5 tworzymy losowo pięciocyfrowy kod. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) najpierw ustawione są wszystkie cyfry, będące liczbami parzystymi; następnie cyfry, będące liczbami nieparzystymi,

b) cyfry 1, 2, 3 stoją w podanej kolejności obok siebie.

4.117. Mały chłopczyk przestawia losowo 4 klocki z literami A, A, M, M. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że chłopiec ułoży słowo MAMA.

4.118. Cztery ponumerowane kule umieszczono losowo w pięciu ponumerowanych szufladach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) A – każda kula trafi do innej szuflady,

b) B – wszystkie kule trafią do jednej szuflady.

4.119. Na parterze bloku, mającego oprócz parteru 6 pięter, wsiadło do windy 5 osób. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wszystkie osoby wysiądą na jednym piętrze (kolejność wychodzenia z windy na jednym piętrze nie jest istotna),

b) każda osoba wysiądzie na innym piętrze.

4.120. W szeregu ustawiamy losowo 4 kobiety i 4 mężczyzn. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) najpierw stoją kobiety, a potem mężczyźni,

b) żadne dwie osoby tej samej płci nie stoją obok siebie.

4.121. Sześciu przyjaciół, wśród nich Jarek i Marek, wybrało się do kina. Mają bilety z kolejnymi miejscami w jednym rzędzie. Zakładając, że usiądą losowo na tych miejscach, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) Jarek i Marek usiądą na miejscach najbardziej od siebie odległych,

b) Jarek i Marek usiądą na dwóch pierwszych miejscach, w podanej kolejności, licząc od lewej strony,

c) między Jarkiem i Markiem usiądzie jeszcze jedna osoba.

4.122. W klasie IV f jest 32 uczniów, a wśród nich jest Darek i Franek. Cała klasa ma bilety do teatru na 20 miejsc od 1. do 20. w piątym rzędzie i 12 miejsc od 21. do 32. w siódmym rzędzie. Wszyscy uczniowie zajmują losowo te miejsca. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że Darek i Franek nie usiądą obok siebie.

4.123. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, ..., n\}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, $n \geqslant 2$, losujemy kolejno dwa razy jedną liczbę ze zwracaniem. Prawdopodobieństwo otrzymania za pierwszym razem liczby mniejszej, niż za drugim razem, jest równe $\frac{7}{16}$. Oblicz n.

4.124. W pudełku znajduje się 8 losów pustych i pewna liczba losów wygrywających. Losujemy kolejno dwa razy po jednym losie. Prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednego losu wygrywającego jest nie większe niż $\frac{17}{45}$. Ile losów wygrywających było w pudełku?

4.125. Rzucamy trzema czworościennymi symetrycznymi kostkami z liczbami 1, 2, 3, 4 na poszczególnych ściankach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – suma otrzymanych liczb jest podzielna przez 3.

4.126. Rzucamy trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – suma otrzymanych oczek jest liczbą podzielną przez 8 i jednocześnie niepodzielną przez 16.

4.127. Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek nie jest podzielna przez 3.

4.128. W pudełku znajduje się 10 rozróżnialnych kul: 2 białe, 3 czerwone i 5 zielonych. Losujemy jednocześnie 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) tylko jedna z wylosowanych kul będzie zielona,

b) co najmniej jedna wylosowana kula będzie biała,

c) każda kula będzie w innym kolorze,

d) co najmniej dwie kule będą czerwone.

4.129. Z talii 52 kart losujemy 13 kart. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród wylosowanych kart:

a) będą 3 piki, 4 kiery i 5 trefli,

b) będzie co najmniej 12 pików,

c) będą 4 kiery i co najwyżej 1 trefl,

d) będą co najmniej 3 kiery.

4.130. Z talii 24 kart (4 asy, 4 króle, 4 damy, 4 walety, 4 dziesiątki, 4 dziewiątki) losujemy 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wylosujemy cztery asy,

b) wylosujemy trzy dziesiątki i jedną parę takich samych figur (dwa asy albo dwa króle, albo dwie damy, albo dwa walety)

c) wylosujemy co najmniej dwa asy,

d) wylosujemy dwa króle lub trzy damy.

4.131. W szufladzie znajduje się 15 rozróżnialnych kopert: 4 białe, 5 niebieskich i 6 szarych. Wybieramy losowo 4 koperty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) co najwyżej jedna z wylosowanych kopert będzie niebieska,

b) wszystkie wylosowane koperty będą w jednym kolorze,

c) wylosujemy po dwie koperty w tym samym kolorze, każda para w innym kolorze,

d) wylosujemy koperty w dwóch kolorach: białym i niebieskim.

4.132. Mamy 12 biletów do kina na ponumerowane miejsca od 1 do 12 w trzynastym rzędzie. Bilety wkładamy losowo do 6 kopert białych i 6 kopert niebieskich, po jednym bilecie do każdej koperty. Koperty tego samego koloru nie są rozróżnialne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) bilety na miejsca oznaczone numerami parzystymi znajdą się tylko w białych kopertach,

b) bilety na miejsca 1, 2, 3 i 4 znajdą się w niebieskich kopertach.

Doświadczenia losowe wieloetapowe

4.133. Symetryczna sześcienna kostka do gry ma cyfrę 1 na jednej ściance, cyfrę 2 na dwóch ściankach i cyfrę 3 na trzech ściankach. Wykonujemy dwukrotny rzut tą kostką i z cyfr, które otrzymaliśmy, tworzymy liczbę dwucyfrową. Wykonaj drzewo dla tego doświadczenia i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) otrzymana liczba dwucyfrowa jest pierwsza,

b) cyfra dziesiątek otrzymanej liczby jest większa od cyfry jedności.

4.134. Na sześciennej symetrycznej kostce do gry cztery ściany są pomalowane na biało, a dwie – na czerwono. Wykonujemy trzy rzuty tą kostką. Wykonaj drzewo dla tego doświadczenia i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy ścianę czerwoną:

a) tylko jeden raz

b) co najmniej 2 razy.

4.135. Na czworościennej symetrycznej kostce jedna ścianka ma cyfrę 1, a pozostałe ścianki – cyfrę 2. Rzucamy 4 razy tą kostką i z otrzymanych cyfr tworzymy liczbę czterocyfrową. Wykonaj drzewo dla tego doświadczenia i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymana liczba:

a) jest większa od 1500

b) jest mniejsza od 2200

c) jest nie mniejsza niż 1222

d) ma cyfrę setek mniejszą od cyfry jedności.

4.136. W rzucie niesymetryczną monetą prawdopodobieństwo otrzymania orła jest równe $\frac{2}{5}$, a reszki wynosi $\frac{3}{5}$. Wykonujemy czterokrotny rzut tą monetą. Narysuj drzewo dla tego doświadczenia i oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) co najmniej raz wypadła reszka

b) wypadły trzy orły i reszka.

4.137. Michał trenuje koszykówkę. Z linii rzutów wolnych trafia do kosza średnio 8 razy na 10 rzutów. Sędzia podyktował trzy rzuty wolne w wykonaniu Michała. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że Michał trafi do kosza:

a) trzy razy

b) co najmniej jeden raz.

4.138. Biatlonistka w pojedynczym strzale trafia do celu z prawdopodobieństwem 0,9. Na zawodach jedna seria strzałów składa się z 5 prób. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że biatlonistka w jednej serii trafi do celu:

a) pięć razy

b) cztery razy.

4.139. Rzucamy kolejno pięć razy symetryczną monetą. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) A – co najmniej raz wypadła reszka,

b) B – co najwyżej raz wypadł orzeł.

4.140. Rzucamy czterokrotnie ośmiościenną kostką do gry, z liczbami odpowiednio 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 na poszczególnych ścianach. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla tego doświadczenia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) co najmniej raz wypadła liczba podzielna przez 3,

b) co najwyżej raz wypadła liczba 8.

4.141. Rzucamy kolejno siedem razy symetryczną czworościenną kostką, z cyframi 1, 2, 3, 4 na poszczególnych ścianach. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia

a) A – co najwyżej sześć razy wypadła ściana z cyfrą 3,

b) B – co najmniej sześć razy wypadła ściana z cyfrą 1.

4.142. Strzelec trafia do tarczy z prawdopodobieństwem 0,7. Ma 4 naboje. Postanowił strzelać do pierwszego trafienia lub do wyczerpania nabojów. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że strzelec trafi w tarczę.

4.143. Na strzelnicy w wesołym miasteczku można wygrać wielkiego, pluszowego misia w następujący sposób. Kupujemy 1 próbę, polegającą na rzucie strzałką do kręcącej się tarczy, na której znajdują się takiej samej wielkości 4 pola czerwone, 8 pól żółtych i 12 pól czarnych. Jeśli strzałka trafi w pole czerwone, to wygrywamy misia; jeśli w pole czarne, to przegrywamy; a jeśli w pole żółte, to powtarzamy rzut. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że kupując 1 próbę, wygramy misia w co najwyżej dwóch rzutach.

4.144. Paweł zaczął trenować strzelanie z łuku. Średnio trafia do tarczy 6 razy na 10 prób. Na koniec treningu chciał jeszcze raz trafić do tarczy, więc postanowił strzelać tyle razy, aż trafi. Oblicz, przy ilu co najmniej próbach prawdopodobieństwo zdarzenia, że Paweł trafi do tarczy, jest większe od 0,96.

Prawdopodobieństwo warunkowe

4.145. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wypadła liczba oczek podzielna przez 2 pod warunkiem, że wypadła liczba oczek podzielna przez 3,

b) wypadło 5 oczek pod warunkiem, że wypadła nieparzysta liczba oczek.

4.146. Ze zbioru liczb $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wypadła liczba pierwsza, jeśli wiadomo, że wypadła liczba większa od 2,

b) wypadła liczba mniejsza od 11, jeśli wiadomo, że wypadła liczba parzysta.

4.147. Klasa IV d liczy 30 uczniów. 12 osób z tej klasy chodzi na kółko fizyczne, 15 na kółko chemiczne, a 10 osób nie chodzi na żadne z tych kółek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba z tej klasy:

a) chodzi na kółko fizyczne pod warunkiem, że chodzi na kółko chemiczne,

b) chodzi na kółko chemiczne pod warunkiem, że nie chodzi na kółko fizyczne.

4.148. W pewnym klubie są dwie sekcje sportów zespołowych: koszykówka i siatkówka, na które uczęszcza łącznie 90 osób. Tabela obok przedstawia, ile kobiet i ilu mężczyzn uprawia każdą z tych dyscyplin.

	Kobiety	Mężczyźni
koszykówka	25	30
siatkówka	15	20

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba z tej grupy:

a) uczęszcza na siatkówkę pod warunkiem, że jest kobietą,

b) jest kobietą pod warunkiem, że uprawia siatkówkę,

c) jest mężczyzną pod warunkiem, że uprawia koszykówkę,

d) uczęszcza na koszykówkę pod warunkiem, że jest mężczyzną.

4.149. Do restauracji dostarczono z hurtowni pudło zawierające 30 paczek herbaty w trzech rodzajach, pochodzące z dwóch krajów. Liczbę paczek herbaty każdego typu przedstawia tabela poniżej.

Rodzaj herbaty \ Pochodzenie	Cejlon	Chiny
czarna	12	8
owocowa	4	3
zielona	1	2

Z pudła wyjęto losowo jedną paczkę herbaty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wyjęto paczkę herbaty owocowej, jeśli wiadomo, że paczka ta została wyprodukowana na Cejlonie,

b) wyjęto paczkę herbaty wyprodukowanej w Chinach, jeśli wiadomo, że wyjęto paczkę herbaty czarnej,

c) wyjęto paczkę herbaty zielonej.

4.150. Do sklepu zakupiono 400 tabliczek czekolady w trzech rodzajach: mleczna, gorzka i biała – które zostały wyprodukowane przez cztery różne firmy A, B, C, D. Liczbę tabliczek każdego typu przedstawia poniższa tabela.

Rodzaj czekolady	Firma A	Firma B	Firma C	Firma D
biała	10	20	15	5
gorzka	40	30	20	10
mleczna	100	50	75	25

Wybieramy losowo jedną tabliczkę czekolady. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana czekolada:

a) jest mleczna, jeżeli wiadomo, że pochodzi z firmy C,

b) nie jest biała, jeżeli wiadomo, że pochodzi z firmy A,

c) jest z firmy B lub z firmy C, jeżeli wiadomo, że jest gorzka,

d) nie jest z firmy D, jeżeli wiadomo, że jest biała lub mleczna.

4.151. Rzucamy raz dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry i dodajemy liczby uzyskanych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek będącej liczbą parzystą, jeśli wiadomo, że na kostkach wypadła różna liczba oczek.

4.152. Rzucamy raz dwiema symetrycznymi, sześciennymi kostkami do gry i dodajemy liczby uzyskanych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek większej od 8, jeśli wiadomo, że przynajmniej na jednej kostce wypadło pięć oczek.

4.153. Ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ losujemy kolejno, bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że druga z wylosowanych liczb będzie nieparzysta, jeśli wiadomo, że pierwsza z wylosowanych liczb jest:

a) nieparzysta

b) parzysta.

4.154. Ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ losujemy kolejno, bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3, jeśli wiadomo, że pierwsza z wylosowanych liczb jest:

a) liczbą pierwszą

b) liczbą podzielną przez 3.

4.155. Rzucamy trzy razy czworościenną symetryczną kostką do gry. Na ściankach tej kostki wypisane są liczby od 1 do 4, po jednej na każdej ściance. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma trzech otrzymanych liczb jest równa 7, jeśli wiadomo, że tylko w jednym rzucie wypadła liczba 1.

4.156. Z talii 52 kart losujemy jednocześnie dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch asów, jeśli wiadomo, że żadna z wyciągniętych kart nie jest damą.

4.157. Oblicz $P(A|B)$, jeśli wiadomo, że:

a) $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A) = \frac{1}{4}$

b) $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A' \cap B) = \frac{1}{3}$

c) $P(B|A) = \frac{3}{8}$, $P(A) = \frac{4}{9}$, $P(A' \cap B) = \frac{1}{8}$

d) $P(A \cap B') = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

D 4.158. Wykaż, że jeśli $A, B \subset \Omega$, $P(A) = 0{,}8$ oraz $P(B) = 0{,}6$, to $P(A|B) \geqslant \frac{2}{3}$.

4.159. Rzucamy trzy razy sześcienną symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że co najmniej raz wypadło pięć oczek, jeśli wiadomo, że za każdym razem wypadła inna liczba oczek.

4.160. Z talii 52 kart losujemy jednocześnie cztery karty. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch króli, jeśli wiadomo, że wśród wyciągniętych kart jest co najmniej jeden as.

4.161. Strzelec A trafia w cel z prawdopodobieństwem 0,7, strzelec B – z prawdopodobieństwem 0,6, a strzelec C – z prawdopodobieństwem 0,5. Strzelcy A, B, C oddali po jednym strzale do celu. Okazało się, że dwa pociski trafiły w cel. Co jest bardziej prawdopodobne:

– strzelec C trafił w cel, czy też

– strzelec C nie trafił w cel?

4.162. Na trasie samochodu znajdują się trzy skrzyżowania z działającą sygnalizacją świetlną. Na pierwszym skrzyżowaniu samochód trafia na zielone światło z prawdopodobieństwem 0,4. Jeśli samochód trafi na skrzyżowaniu na światło zielone, to prawdopodobieństwo, że na następnym skrzyżowaniu będzie miał też światło zielone, wzrasta o 0,15 od analogicznego prawdopodobieństwa na poprzednim skrzyżowaniu. Jeśli samochód trafi na światło czerwone, to prawdopodobieństwo, że na następnym skrzyżowaniu trafi na światło zielone, jest równe 0,4. Oblicz prawdopodobieństwo, że samochód:

a) przejedzie przez trzy skrzyżowania bez zatrzymywania,

b) zatrzyma się po raz pierwszy na trzecim skrzyżowaniu,

c) zatrzyma się tylko raz na drugim skrzyżowaniu?

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa

4.163. W pierwszym pudełku są 4 białe kule i 2 kule czarne, a w drugim – 2 kule białe i 8 kul czarnych. Rzucamy sześcienną symetryczną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko, to losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka. W przeciwnym wypadku – jedną kulę z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

4.164. W pierwszym koszu jest 6 piłek: 2 białe, 2 czerwone, 1 zielona i 1 niebieska. W drugim koszu jest 8 piłek: 3 białe i 5 szarych. Wybieramy losowo jedną piłkę z pierwszego kosza i nie oglądając jej, wkładamy do drugiego kosza. Następnie z drugiego kosza losujemy jedną piłkę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania białej piłki z drugiego kosza.

4.165. Z pierwszego pojemnika zawierającego 6 balonów czerwonych i 4 balony żółte losujemy jeden balon i nie oglądając go, wkładamy do drugiego pojemnika, w którym początkowo było 7 balonów żółtych i 4 czerwone. Następnie z drugiego pojemnika losujemy jednocześnie dwa balony. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch balonów różnego koloru.

4.166. Do szuflady zawierającej 4 piłeczki pingpongowe dorzucono jedną pomarańczową piłeczkę. Następnie z pięciu piłeczek wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania piłeczki pomarańczowej przy założeniu, że wszystkie przypuszczenia o liczbie piłeczek w szufladzie w tym kolorze, przed doświadczeniem losowym, są jednakowo prawdopodobne.

4.167. Rzucamy jeden raz sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadną mniej niż trzy oczka, to rzucamy dwa razy symetryczną monetą. W przeciwnym wypadku wykonujemy trzy rzuty tą monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymamy tylko jednego orła.

4.168. Jedna ścianka symetrycznej sześciennej kostki jest pomalowana na biało, dwie na czerwono i trzy na zielono. Wykonujemy jeden rzut tą kostką. Jeśli wypadnie ścianka w kolorze białym, to losujemy jedną liczbę ze zbioru liczb naturalnych jednocyfrowych. Jeśli wypadnie ścianka w kolorze czerwonym, to losujemy jedną liczbę ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych. Jeśli wypadnie ścianka w kolorze zielonym, to losujemy jedną liczbę ze zbioru liczb naturalnych trzycyfrowych. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana liczba jest podzielna przez 7.

4.169. Dwie fabryki dostarczyły do magazynu kartony, przy czym 70% kartonów pochodzi z pierwszej fabryki, a pozostałe kartony – z drugiej. Kartony wadliwe stanowią 1% dostawy z pierwszej fabryki i 3% dostawy z drugiej fabryki. Z magazynu wzięto losowo jeden karton. Oblicz prawdopodobieństwo wybrania kartonu wadliwego.

4.170. Wśród wyrobów pierwszej i drugiej firmy wyroby wadliwe stanowią odpowiednio 4% i 2%. Pierwsza z tych firm dostarcza do hurtowni trzy razy więcej towaru niż druga. W hurtowni zakupiono losowo jedną sztukę towaru. Oblicz prawdopodobieństwo zakupienia towaru, który nie jest wadliwy.

4.171. W każdym z trzech pojemników znajduje się po 10 opakowań pewnego produktu, przy czym w pierwszym pojemniku jest jedno opakowanie uszkodzone, w drugim są dwa takie opakowania, a w trzecim – trzy. Mamy wylosować dwa opakowania. Możemy to zrobić na dwa sposoby:

1) wszystkie opakowania zsypujemy do jednego pudełka i z niego losujemy jednocześnie dwa opakowania;
2) najpierw losujemy pudełko, a następnie losujemy dwa opakowania z tego pudełka.

Przy którym sposobie losowania prawdopodobieństwo wylosowania dwóch opakowań uszkodzonych jest większe?

4.172. Mamy dwie symetryczne kostki do gry: sześcienną z liczbami od 1 do 6 na poszczególnych ściankach i ośmiościenną z liczbami od 1 do 8 na poszczególnych

ściankach. Rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie reszka, to rzucamy sześcienną kostką. W przeciwnym wypadku rzucamy ośmiościenną kostką.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba większa od 5.

b) Wiadomo, że otrzymaliśmy liczbę większą od 5. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w rzucie monetą wypadł orzeł.

4.173. W pierwszym pudełku mamy 3 kule białe i 5 czarnych, a w drugim pudełku – 4 kule białe i 2 czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie liczba podzielna przez 3, to losujemy kulę z pierwszego pudełka. W przeciwnym wypadku – kulę z drugiego pudełka.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana kula jest czarna.

b) Okazało się, że wylosowana kula jest czarna. Oblicz prawdopodobieństwo, że została wylosowana z pierwszego pudełka.

4.174. W klasie jest trzy razy więcej chłopców niż dziewcząt. Połowa dziewcząt i 60% chłopców z tej klasy uprawia sport. Losujemy jedną osobę z tej klasy.

a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana osoba uprawia sport.

b) Wiadomo, że wylosowana osoba uprawia sport. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowano chłopca.

4.175. W pierwszym pojemniku mamy 2 kule białe i trzy czarne, a w drugim pojemniku – 1 kulę białą i 2 kule czarne. Wyciągamy jedną kulę z pierwszego pojemnika i nie oglądając jej przekładamy do drugiego pojemnika. Następnie z drugiego pojemnika losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że do drugiego pojemnika dołożyliśmy kulę białą, jeśli wiadomo, że kule wylosowane z drugiego pojemnika były w różnych kolorach.

4.176. Do sklepu jest dostarczana herbata z Chin oraz herbata z Indii, przy czym w jednej dostawie jest dwa razy więcej paczek z herbatą chińską niż z herbatą indyjską. Wśród paczek z Chin 75% stanowią paczki z herbatą czarną, a 25% – paczki z herbatą zieloną. Natomiast z Indii paczek z zieloną herbatą jest tyle samo, co paczek z herbatą czarną. Po wylosowaniu jednej paczki herbaty z dostawy okazało się, że jest to herbata czarna. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ta paczka herbaty pochodzi z Indii.

4.177. Zakład dostarczający żarówki do sklepu ma dwie linie produkcyjne. Pierwsza linia dostarcza cztery razy więcej żarówek niż druga. Z pierwszej linii średnio 4 żarówki na 1000 są wadliwe, a z drugiej linii 8 żarówek na 1000 ma wady. Klient kupił sklepie żarówkę, wyprodukowaną przez ten zakład, i okazało się, że jest wadliwa. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że została wyprodukowana przez pierwszą linię produkcyjną.

4.178. Fabryka wyprodukowała ten sam model samochodu w trzech kolorach: białym, czerwonym i niebieskim. Stosunek liczby wyprodukowanych samochodów w tych kolorach był odpowiednio równy 4 : 5 : 3. Prawdopodobieństwo, że samochód będzie miał usterki powłoki lakieru jest równe 0,01 dla koloru białego, 0,04 dla koloru czerwonego oraz 0,02 dla koloru niebieskiego. Wybrano losowo jeden samochód, który nie miał usterek powłoki lakieru. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten samochód jest biały.

4.179. Test wykrywający pewną chorobę jest efektywny w 99% dla osób chorych (tzn. jeśli badany jest chory, test w 99% potwierdza chorobę) i w 98% dla osób zdrowych (tzn. jeśli badany jest zdrowy, test w 98% wyklucza chorobę). W pewnym regionie średnio 150 na 10 000 osób cierpi na tę chorobę.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że test wykonany na losowo wybranej osobie z tego regionu wykaże u niej chorobę.

b) U losowo badanej osoby z tego regionu test wykazał chorobę. Oblicz prawdopodobieństwo, że w rzeczywistości ta osoba cierpi na tę chorobę.

Niezależność zdarzeń

4.180. Wiadomo, że zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$, $P(B')=\frac{1}{2}$. Oblicz $P(A)$.

4.181. Wiadomo, że zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(A'\cup B')=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{2}{3}$. Oblicz $P(A)$.

4.182. Zdarzenia A, B, C są niezależne. Oblicz $P(C)$, wiedząc dodatkowo, że $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{27}$ i $P(A) = 2P(B) = 4P(C)$.

4.183. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Określamy zdarzenia: A – na pierwszej kostce wypadła parzysta liczba oczek, B – na drugiej kostce wypadły trzy oczka. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

4.184. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Określamy zdarzenia: – iloczyn liczby oczek na obu kostkach jest większy od 20, B – na obu kostkach wypadła parzysta liczba oczek. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

4.185. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Określamy zdarzenia:

a) A – wylosowana karta jest figurą (tzn. asem, królem, damą lub waletem),

B – wylosowana karta jest koloru czerwonego;

b) A – wylosowana kartę jest starsza od piątki,

B – wylosowana karta jest damą lub kartą młodszą od siódemki.

Czy zdarzenia A i B są niezależne?

4.186. Ściany pewnego czworościanu foremnego pomalowano w następujący sposób: jedną na niebiesko, drugą na żółto, trzecią na czerwono, a czwartą w pasy w trzech wymienionych wcześniej kolorach. Rzucamy czworościanem i patrzymy na ściankę, na którą upadł. Oznaczamy zdarzenia:

A – na ściance był kolor niebieski,

B – na ściance był kolor żółty,

C – na ściance był kolor czerwony.

Zbadaj niezależność par zdarzeń A i B, B i C oraz A i C. Czy zdarzenia A, B, C są niezależne?

4.187. Wykonano dwa rzuty czworościanem foremnym opisanym w poprzednim zadaniu. Oznaczmy zdarzenia:

A – w pierwszym rzucie czworościan upadł na ściankę, na której był kolor niebieski,

B – w obu rzutach czworościan upadł na ścianki, na których był tylko kolor niebieski lub żółty.

Czy zdarzenia A i B są niezależne?

4.188. Hurtownia otrzymuje dostawy towaru w piątki niezależnie z trzech zakładów Z_1, Z_2, Z_3 z prawdopodobieństwem odpowiednio równym $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$ i $\frac{1}{10}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

a) hurtownia otrzymała w piątek dostawę tylko z jednego zakładu,

b) hurtownia otrzymała w piątek dostawę z co najmniej jednego zakładu.

4.189. Obwód elektryczny składa się z trzech elementów pracujących niezależnie. Prawdopodobieństwa awarii elementów tego obwodu są odpowiednio równe 0,1, 0,2 i 0,3. Oblicz prawdopodobieństwo, że nastąpi awaria obwodu, jeśli:

a) elementy połączone są szeregowo,

b) elementy połączone są równolegle.

4.190. Dane są trzy zdarzenia A, B, C parami niezależne, dla których $P(A \cap B \cap C) = 0$ oraz $2P(A) = 3P(B) = 3P(C)$. Oblicz:

a) największą wartość, jaką może przyjmować prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A, B i C,

b) prawdopodobieństwo zdarzenia A, dla którego prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A, B i C przyjmuje największą wartość.

D 4.191. Wykaż, że jeśli $P(B|A) = P(B|A')$, gdzie $P(A) > 0$ i $P(A') > 0$, to zdarzenia A i B są niezależne.

D 4.192. Strzelec oddaje n niezależnych strzałów do celu, przy czym prawdopodobieństwo nietrafienia w cel w k-tym strzale jest równe $\frac{1}{(k+1)^2}$, gdzie $k = 1, 2, ..., n$. Wykaż, że prawdopodobieństwo trafienia we wszystkich n strzałach jest równe $\frac{n+2}{2(n+1)}$.

Schemat Bernoulliego

4.193. Rzucamy jedenaście razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania orła:

a) cztery razy

b) dziesięć razy

c) co najmniej jeden raz

d) co najwyżej jeden raz.

4.194. Rzucamy sześć razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek będącej liczbą złożoną:

a) pięć razy

b) co najwyżej trzy razy.

4.195. Rzucamy pięciokrotnie czworościenną symetryczną kostką z liczbami 1, 2, 3, 4 na poszczególnych ścianach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) liczba 1 wypadła trzy razy,

b) liczba większa od 1 wypadła trzy lub cztery razy.

4.196. Na poligonie oddano z działa osiem strzałów do celu. Prawdopodobieństwo trafienia w cel w każdym strzale jest równe 0,6. Aby cel został uznany za zniszczony, powinien zostać trafiony co najmniej dwa razy. Oblicz prawdopodobieństwo zniszczenia celu.

4.197. Rzucamy cztery razy trzema symetrycznymi monetami. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów:

a) dwa razy

b) trzy lub cztery razy

c) co najwyżej dwa razy

d) co najmniej dwa razy.

4.198. Rzucamy pięć razy dwiema sześciennymi symetrycznymi kostkami do gry i za każdym razem obliczamy sumę liczby oczek na tych kostkach. Wyznacz prawdopodobieństwo otrzymania sumy podzielnej przez pięć:

a) tylko jeden raz

b) co najwyżej jeden raz.

4.199. Rzucamy siedem razy dwiema sześciennymi symetrycznymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania nieparzystej liczby oczek jednocześnie na obu kostkach:

a) sześć razy

b) co najmniej sześć razy.

4.200. W pudełku znajdują się 4 kule białe i 2 czarne. Z pudełka losujemy sześć razy po dwie kule, zwracając za każdym razem wylosowaną parę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania pary kul w różnych kolorach:

a) trzy razy

b) cztery lub pięć razy.

4.201. W szufladzie znajdują się 4 skarpetki białe i 2 czarne. Z tej szuflady losujemy sześć razy po dwie skarpetki, zwracając za każdym razem wylosowaną parę do szuflady. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania pary skarpetek w takim samym kolorze:

a) trzy razy

b) cztery lub pięć razy.

4.202. Z talii 52 kart losujemy siedem razy po jednej karcie. Kartę oglądamy i odkładamy z powrotem do talii. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania karty będącej asem lub pikiem:

a) trzy razy

b) co najwyżej raz.

4.203. Janek trenuje w szkole koszykówkę. Zakładamy, że prawdopodobieństwo trafienia przez Janka do kosza w każdym rzucie jest takie samo. Wiedząc, że Janek trafia co najmniej raz do kosza w sześciu rzutach z prawdopodobieństwem równym $\frac{665}{729}$, oblicz prawdopodobieństwo trafienia do kosza:

a) w pojedynczym rzucie

b) cztery razy w sześciu rzutach.

4.204. Załóżmy, że rozgrywasz z drugą osobą partię, która zawsze kończy się zwycięstwem jednego gracza. Prawdopodobieństwo wygrania przez Ciebie w pojedynczej partii jest zawsze takie samo i wynosi $\frac{1}{2}$. Co jest bardziej prawdopodobne: wygranie przez Ciebie co najmniej 3 partii z 6 rozegranych, czy wygranie co najmniej 4 partii z 8 rozegranych?

4.205. Rzucono piętnaście razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w pierwszym rzucie orła, jeśli wiadomo, że w tej serii rzutów było 9 orłów.

4.206. Rzucono dwanaście razy sześcienną symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w trzecim rzucie ścianki z pięcioma oczkami, jeśli w tej serii rzutów ścianka z pięcioma oczkami wypadła cztery razy.

4.207. Trener pewnej drużyny piłkarskiej twierdzi, że w czasie każdego meczu jego podopieczni 25% strzałów na bramkę kończą golem. Ile strzałów na bramkę musi oddać ta drużyna w czasie meczu, aby prawdopodobieństwo strzelenia co najmniej jednej bramki było równe co najmniej 0,99?

4.208. Czujnik wykrywa awarię urządzenia z prawdopodobieństwem 0,9. Ile czujników – wykrywających awarię niezależnie jeden od drugiego – należy zainstalować, aby prawdopodobieństwo wykrycia awarii urządzenia było nie mniejsze niż 0,9999?

4.209. Ile razy należy rzucić trzema symetrycznymi monetami, aby prawdopodobieństwo otrzymania jednocześnie trzech orłów co najmniej raz było większe od 0,95?

4.210. Mamy trzy pojemniki typu I, z których każdy zawiera po 2 kule białe i 4 kule czarne oraz dwa pojemniki typu II, z których każdy zawiera po 3 kule białe i 3 kule czarne. Z losowo wybranego pudełka losujemy jedną kulę i wkładamy ją z powrotem do tego samego pudełka. Takie doświadczenie wykonujemy pięć razy. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzy razy kuli czarnej.

4.211. Mamy trzy pudełka typu I, z których każde zawiera po 2 kule białe i 4 kule czarne oraz dwie pudełka typu B, z których każde zawiera po 3 kule białe i 3 kule czarne. Wybieramy losowo jedno pudełko. Z tego pudełka losujemy pięć razy po jednej kuli, zwracając ją po każdym losowaniu.

a) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania trzy razy kuli czarnej.

b) Okazało się, że po pięciu losowaniach trzy razy otrzymaliśmy kulę czarną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia – losowanie odbyło się z pudełka typu I.

4.212. Wykonano rzut pięcioma symetrycznymi monetami, a następnie rzut tymi monetami, na których w pierwszym rzucie wypadła reszka. Oblicz prawdopodobieństwo, że w drugim rzucie wypadły:

a) tylko orły

b) trzy orły.

Zmienna losowa. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

4.213. W pudełku znajduje się 50 kul. Na jednej kuli jest liczba 20, na czterech kulach jest liczba 10, na dziesięciu kulach jest liczba 2, a na pozostałych kulach jest liczba 0. Gracz wyciąga losowo jedną kulę z pudełka. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartość równą liczbie na wyciągniętej kuli. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i oblicz jej wartość oczekiwaną.

4.214. W pudełku znajduje się 40 losów. Dwa losy dają wygraną po 20 zł, dwa losy dają wygraną po 10 zł, pięć losów daje wygraną po 5 zł, trzydzieści losów daje wygraną po 2 zł, a jeden los to przegrana w wysokości 100 zł. Gracz wyciąga jeden los. Niech zmienna losowa X oznacza wygraną w tej grze. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i oblicz jej wartość oczekiwaną.

4.215. W pudełku znajdują się cztery kartki oznaczone odpowiednio numerami: -1, 0, 1, 2. Gracz losuje z pudełka jednocześnie dwie kartki i dodaje liczby, które znajdują się na tych kartkach. Otrzymany wynik jest jego wygraną. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

4.216. W pudełku znajdują się cztery kartki oznaczone odpowiednio numerami: -1, 0, 1, 2. Gracz losuje z pudełka dwa razy po jednej kartce – zwracając po pierwszym losowaniu kartkę do pudełka – i dodaje liczby, które znajdują się na tych kartkach. Otrzymany wynik jest jego wygraną. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

4.217. W pudełku znajduje się pięć kul oznaczonych odpowiednio liczbami: 2, -1, 0, 1, 2. Gracz losuje z pudełka jednocześnie dwie kule i mnoży liczby znajdujące się na tych kulach. Otrzymany wynik jest jego wygraną. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

4.218. W pudełku znajduje się pięć kul oznaczonych odpowiednio liczbami: -2, -1, 0, 1, 2. Gracz losuje z pudełka dwa razy po jednej kuli – zwracając po pierwszym losowaniu kulę do pudełka – i mnoży liczby, które znajdują się na tych kulach. Otrzymany wynik jest jego wygraną. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

4.219. Gracz rzuca dwa razy sześcienną kostką do gry i dodaje liczby uzyskanych oczek. Uzyskany wynik stanowi wygraną gracza w złotych, z takim wyjątkiem, że jeśli wypadną dwie jedynki, to gracz przegrywa 250 zł.

a) Oblicz wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

b) Czy jest to gra sprawiedliwa?

4.220. Gracz rzuca dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jeśli na każdej kostce wypadnie sześć oczek, to wygrywa 110 zł, jeśli wypadną jednakowe liczby oczek, ale różne od sześciu, to wygrywa x zł. W pozostałych przypadkach przegrywa $2x$ zł. Wyznacz x tak, aby wartość oczekiwana wygranej gracza w tej grze była równa 0.

4.221. Na początku gry każdy gracz wpłaca s zł. Następnie rzuca czterema symetrycznymi monetami. Jeśli wypadną cztery orły, to wygrywa 400 zł. Jeśli wypadną trzy orły, to wygrywa 120 zł. W pozostałych przypadkach nic nie wygrywa. Wyznacz rozkład zmiennej losowej, oznaczającej zysk gracza w tej grze i oblicz s tak, aby gra była sprawiedliwa.

4.222. Rzucamy monetą oraz dwa razy czworościenną kostką, której ścianki są oznaczone liczbami: 0, 1, 2, 3, po jednej liczbie na każdej ściance. Jeśli wypadnie orzeł, to otrzymane dwie liczby dodajemy. Jeśli wypadnie reszka, to otrzymane dwie liczby mnożymy. Niech zmienna losowa X oznacza uzyskany wynik. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i oblicz jej wartość oczekiwaną.

4.223. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ wylosowano jednocześnie trzy liczby. Wartością zmiennej losowej X jest największa spośród otrzymanych liczb. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X i oblicz jej wartość oczekiwaną.

4.224. Trzech strzelców trafia w cel odpowiednio z prawdopodobieństwami $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{9}{10}$. Każdy z nich oddał po jednym strzale do tego celu. Wyznacz rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X, będącej liczbą strzałów, które trafiły w cel.

4.225. Uczestnik zawodów strzeleckich trafia w cel w pojedynczym strzale z prawdopodobieństwem 0,8. Na zawodach ma do dyspozycji 5 naboi i strzela do pierwszego trafienia lub do wyczerpania naboi. Wyznacz rozkład i wartość oczekiwaną liczby wystrzelonych przez niego naboi.

4.226. W każdym z dwunastu pojemników typu I znajduje się 8 kul białych i 2 kule czarne, a w każdym z ośmiu pojemników typu II są 3 kule białe i 7 kul czarnych. Doświadczenie polega na losowym wyborze pudełka i wylosowaniu z tego pudełka

jednej kuli, którą po obejrzeniu zwracamy do tego samego pudełka. Takie doświadczenie wykonujemy cztery razy. Wyznacz rozkład i wartość oczekiwaną liczby wylosowanych kul białych.

4.227. Wykonujemy rzut trzema symetrycznymi monetami. Jeśli wypadły same reszki, to zmienna losowa X przyjmuje wartość 0. Jeśli wypadł przynajmniej jeden orzeł, to wykonujemy drugi rzut, ale tylko tymi monetami, na których wypadł orzeł w pierwszym rzucie. Wtedy za wartość zmiennej losowej przyjmujemy liczbę otrzymanych orłów w drugim rzucie. Wyznacz rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

4.228. Doświadczenie losowe polega na jednym rzucie trzema sześciennymi kostkami do gry. Zmienna losowa X przyjmuje wartość równą największej liczbie oczek otrzymanych na jednej z kostek. Znajdź rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

Test sprawdzający do rozdziału 4.

1. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach?

A. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ B. 9^4 C. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ D. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8$

2. Ile jest różnych liczb trzycyfrowych, w zapisie których występuje jedna cyfra 0?

A. 243 B. 162 C. 81 D. 144

3. Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie symetryczną monetą. Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω składa się z:

A. 6 elementów B. 7 elementów C. 8 elementów D. 9 elementów

4. Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Niech A oznacza zdarzenie – wypadła liczba oczek mniejsza niż 4, zaś B oznacza zdarzenie – wypadła liczba oczek nie większa niż 4. Wówczas:

A. $A = B$ B. $A \cup B = \Omega$ C. $A' \cap B = \varnothing$ D. $A \cap B = A$

5. Ze zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno 2 cyfry bez zwracania i tworzymy liczbę dwucyfrową. Niech A oznacza zdarzenie – utworzona liczba jest liczbą parzystą i jednocześnie liczbą większą od 60. Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest równa:

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

6. Ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie – wylosowana liczba jest pierwsza. Wówczas:

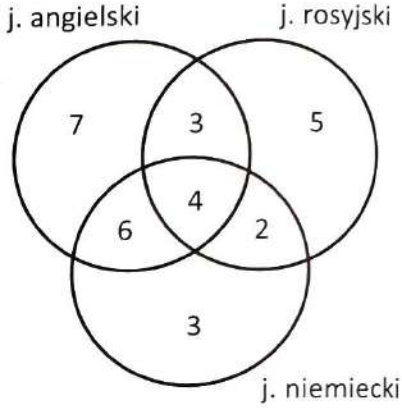
A. $A' = \{2, 3, 5, 7\}$ B. $A' = \{0, 2, 4, 6, 8, 9\}$

C. $A' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ D. $A' = \{0, 4, 6, 8, 9\}$

7. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Ile zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A – w pierwszym rzucie otrzymaliśmy liczbę oczek mniejszą niż w drugim rzucie?

A. 12 B. 15 C. 18 D. 21

8. Wśród 30 pracowników pewnej firmy przeprowadzono ankietę, dotyczącą ich znajomości języków obcych. Diagram obok przedstawia wyniki tej ankiety. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z grupy badanych zna co najmniej dwa języki obce, jest równe:



A. $\frac{11}{15}$ B. $\frac{14}{25}$ C. $\frac{11}{25}$ D. $\frac{1}{2}$

9. W siedmiokącie wypukłym prowadzimy wszystkie proste, łączące dwa dowolne jego wierzchołki. Następnie wybieramy losowo jedną z tych prostych. Prawdopodobieństwo, że wylosowana prosta zawiera przekątną tego siedmiokąta, jest równe:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{5}{6}$

10. Ze zbioru liczb $\{0, 1, 2, 3, 4, ..., 14, 15\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub przez 5 jest równe:

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{16}$ D. $\frac{1}{2}$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

11. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, w których zapisie:

a) występuje jedna cyfra 0, jedna cyfra 1 i dwie cyfry 2,

b) nie występuje żadna z cyfr: 1, 2, 3, 4?

12. Ile można utworzyć dziewięciocyfrowych numerów telefonów komórkowych, których pierwsza cyfra jest większa od 4, wszystkie cyfry są różne, a ostatnią cyfrą jest 0?

13. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych dla następujących doświadczeń losowych:

a) losowanie kolejno dwóch elementów: pierwszego ze zbioru $\{a, b, c\}$, drugiego ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$,

b) losowanie kolejno czterech cyfr ze zwracaniem ze zbioru $\{1, 2, 3\}$,

c) losowanie kolejno bez zwracania trzech liter ze zbioru $\{A, B, C, D, E, F\}$.

14. W grupie 25 osób wszyscy czytają klasykę. Dodatkowo każda z tych osób czyta poezję lub prozę, przy czym 14 osób czyta poezję, a 20 osób czyta prozę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana osoba z tej klasy czyta zarówno poezję, jak i prozę.

15. Rzucamy jeden raz symetryczną dwunastościenną kostką z zapisanymi pojedynczo liczbami 1, 2, 3, ..., 11, 12 na poszczególnych ściankach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wypadła liczba:

a) będąca wielokrotnością liczby 3 lub liczby 4,

b) większa od 3 i niepodzielna przez 6.

16. W pudełku znajduje się 5 kul białych i pewna liczba kul czerwonych. Ile co najwyżej kul czerwonych jest w pudełku, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania jednej kuli czerwonej jest mniejsze od $\frac{4}{7}$?

17. Ze zbioru liczb naturalnych trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

a) wylosowana liczba jest podzielna przez 11,

b) wylosowano liczbę o niepowtarzających się cyfrach i jednocześnie podzielną przez 4.

18. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w pierwszym rzucie wypadła liczba oczek:

a) niepodzielna przez 4,

b) co najmniej o 2 mniejsza niż w drugim rzucie.

19. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczb wyrzuconych oczek jest:

a) nie większa niż 8

b) podzielna przez 2 lub przez 5.

20. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno dwie cyfry ze zwracaniem i tworzymy liczbę dwucyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że powstała liczba dwucyfrowa jest:

a) podzielna przez 6

b) niepodzielna przez 5.

21. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, ..., 7\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby i od pierwszej wylosowanej liczby odejmujemy drugą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania różnicy większej od 2.

22. Tworzymy liczbę dwucyfrową w następujący sposób: ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy cyfrę dziesiątek, zaś ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$ losujemy cyfrę jedności. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że utworzona liczba jest:

a) mniejsza od 53

b) podzielna przez 4 lub przez 3.

23. Z talii 52 kart losujemy kolejno dwa razy po jednej karcie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) jednej damy i jednego króla

b) dwóch kart, które nie są kierami

c) co najmniej jednego pika

d) co najwyżej jednej damy.

24. W worku znajduje się 10 piłeczek pingpongowych: 6 pomarańczowych i 4 białe. Antek wyjmuje losowo jedną piłeczkę i – nie zwracając jej – losuje drugą piłeczkę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) dwie wylosowane piłeczki są w jednym kolorze,

b) druga wylosowana piłeczka jest biała.

25. W klasach trzecich szkoły podstawowej zorganizowano koło taneczne, na które uczęszczają dzieci według tabeli zamieszczonej poniżej.

Klasa	III a	III b	III c
Dziewczęta	5	6	9
Chłopcy	10	3	7

Wybieramy losowo kolejno dwie osoby z tej grupy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy:

a) dwóch chłopców,

b) co najmniej jedną dziewczynkę z klasy III c,

c) chłopca i dziewczynkę z tej samej klasy,

d) dwie dziewczynki z różnych klas.

26. Mamy 5 książek, wśród których są książki A i B. Ustawiamy je losowo na pustej półce w jednym szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) książki A i B będą stały obok siebie na końcu tego rzędu (po lewej lub prawej stronie, w dowolnej kolejności),

b) pomiędzy książkami A i B będzie stała jedna książka.

27. Mamy symetryczną sześcienną kostkę, której jedna ścianka jest biała, dwie ścianki są czerwone i trzy ścianki są zielone. Rzucamy trzy razy tą kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

a) co najwyżej 2 razy wypadła ścianka biała,

b) ścianka zielona wypadła tylko jeden raz.

28. Rzucamy siedem razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) co najmniej raz wypadła reszka,

b) reszka wypadła co najwyżej jeden raz.

29. Na loterii znajdują się 4 losy z wygraną 50 zł i 8 losów pustych. Wyciągamy z pudełka dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wygramy co najmniej 50 zł.

30. W pudełku są 3 losy dające wygraną po 40 zł, 4 losy dające wygraną po 20 zł i 93 losy puste. Gracz wpłaca 10 zł i wyciąga 2 losy z pudełka. Wyznacz rozkład zmiennej losowej, oznaczającej zysk w tej grze i oblicz jej wartość oczekiwaną.

31. Na jednej ściance symetrycznej sześciennej kostki znajduje się cyfra 1, na dwóch ściankach znajduje się cyfra 2, a na trzech pozostałych ściankach – cyfra 3. Rzucamy trzykrotnie tą kostką i z otrzymanych kolejno cyfr tworzymy liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ta liczba:

a) ma wszystkie cyfry jednakowe b) jest większa od 222.

32. Przy okrągłym stole posadzono losowo 4 osoby, wśród nich są osoby A i B. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że:

a) osoby A i B siedzą obok siebie,

b) osoby A i B siedzą naprzeciwko siebie.

33. Ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, losujemy dwa razy jedną liczbę bez zwracania. Oblicz n, jeśli prawdopodobieństwo zdarzenia A – obie wylosowane liczby są parzyste, jest równe $\frac{5}{21}$.

34. W pudełku znajdują się 3 kule czarne i n kul białych, $n \geqslant 2$. Losujemy najpierw jedną kulę i nie zwracając jej, losujemy kolejną kulę. Ile co najmniej kul białych było w pudełku, jeśli prawdopodobieństwo otrzymania dwóch kul tego samego koloru jest większe od 0,5?

35. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Określamy zdarzenia: A – w obu rzutach wypadła parzysta liczba oczek, B – w drugim rzucie wypadły dwa lub trzy oczka. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

36. Z pudełka zawierającego trzy razy więcej kul białych niż czarnych losujemy jedną kulę, oglądamy ją, a następnie wkładamy z powrotem do pudełka. Takie losowanie wykonujemy n razy. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednej kuli białej jest większe od 0,999.

37. Sklep sprzedaje żarówki dwóch producentów A i B. Żarówki wadliwe stanowią 1% produkcji firmy A i 4% produkcji firmy B. Przy losowym zakupie jednej żarówki prawdopodobieństwo zakupu żarówki wadliwej jest równe 0,02. Wyznacz stosunek liczby żarówek z firmy A do liczby żarówek z firmy B w tym sklepie.

38. W pojemniku znajdują się 2 kule białe, 3 zielone i 4 czerwone. Rzucamy jeden raz czworościenną kostką, której dwie ścianki są w kolorze białym, jedna ścianka w kolorze czerwonym i jedna w kolorze zielonym. Następnie do pojemnika dokładamy jedną kulę w takim kolorze, w jakim otrzymaliśmy ściankę kostki. Losujemy dwie kule z tego pojemnika.

a) Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że obie wylosowane kule są czerwone.

b) Wiadomo, że wylosowano dwie kule w kolorze czerwonym. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że na kostce wypadła ścianka w kolorze zielonym.

39. Rzucamy czterokrotnie ośmiościenną kostką do gry z liczbami odpowiednio 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 na poszczególnych ścianach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) dwa razy wypadła liczba pierwsza,

b) co najmniej trzy razy wypadła liczba większa od 5.

40. Wybieramy losowo liczbę naturalną ośmiocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma cyfr tej liczby jest równa 5, jeśli wiadomo, że w zapisie tej liczby nie występują cyfry większe od 3.

5. Geometria przestrzenna. Wielościany

Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne

5.1. Naszkicuj sześcian i wybierz dwie krawędzie k i m prostopadłe do siebie. Następnie wskaż krawędź l, która jest prostopadła do krawędzi m oraz:

a) przecina się z krawędzią k,

b) jest równoległa do krawędzi k,

c) jest skośna do krawędzi k.

5.2. Dane są proste k, l, m. Ustal, jak mogą być położone względem siebie proste k i m, jeśli:

a) proste k i l są skośne oraz $l \parallel m$,

b) proste k, l, m nie leżą w jednej płaszczyźnie, ale prosta l ma jeden punkt wspólny z prostą k i jeden punkt wspólny z prostą m.

D 5.3. Proste m i l wyznaczają płaszczyznę π. Prosta k jest równoległa do prostej l i ma jeden punkt wspólny z prostą m. Wykaż, że prosta k zawiera się w płaszczyźnie π.

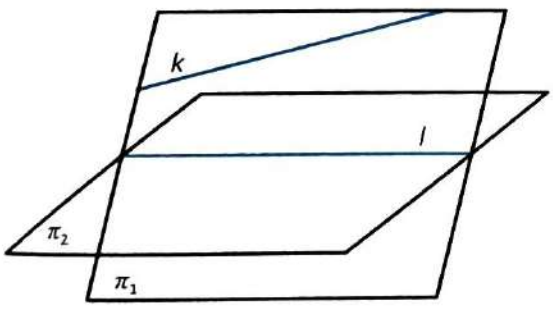
5.4. Niech π oznacza płaszczyznę, natomiast k, l niech będą prostymi w przestrzeni. Czy prawdziwe jest następujące twierdzenie:

a) jeśli $l \subset \pi$ i $k \parallel \pi$, to $k \parallel l$ b) jeśli $l \subset \pi$ i $k \parallel l$, to $k \parallel \pi$?

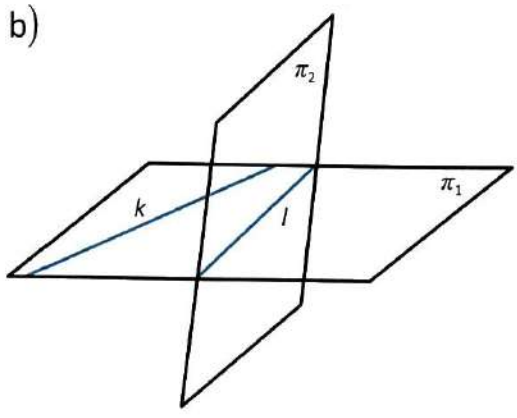
Odpowiedź uzasadnij.

5.5. Na rysunku poniżej prosta l jest krawędzią przecięcia płaszczyzn π_1 oraz π_2. Wskaż punkt, w którym prosta k zawarta w płaszczyźnie π_1 i nierównoległa do krawędzi l przebija płaszczyznę π_2. Odpowiedź uzasadnij.

a)



b)



D 5.6. Dane są punkty A, B należące do płaszczyzny π oraz punkt C poza tą płaszczyzną. Punkt P należy do odcinka AC, a punkt Q – do odcinka BC. Wykaż, że:

a) jeśli $|AP| = |PC|$ oraz $|BQ| = |QC|$, to prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny π.

b) jeśli $|AP| \cdot |CQ| = |PC| \cdot |BQ|$, to prosta PQ jest równoległa do płaszczyzny π.

D 5.7. Punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wiadomo, że $|AB| = |BC|$. Punkty P, Q, R są odpowiednio środkami odcinków AD, BD, CD. Wykaż że:

a) trójkąt PQR jest równoramienny,

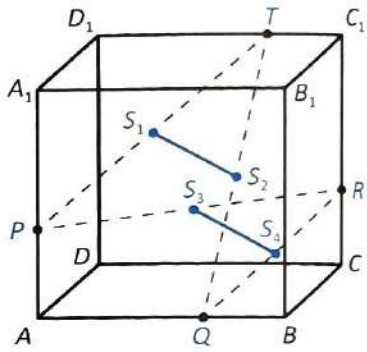
b) płaszczyzna (PQR) jest równoległa do płaszczyzny (ABC).

D 5.8. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punkty P, Q, R, T leżą na krawędziach tego sześcianu, jak na rysunku obok. Środkami odcinków TP, TQ, RP i RQ są odpowiednio punkty S_1, S_2, S_3, S_4. Wykaż, że:

a) prosta S_1S_2 jest równoległa do płaszczyzny (ABB_1A_1),

b) proste S_1S_2 i S_3S_4 są do siebie równoległe,

c) proste BC i RQ są skośne.

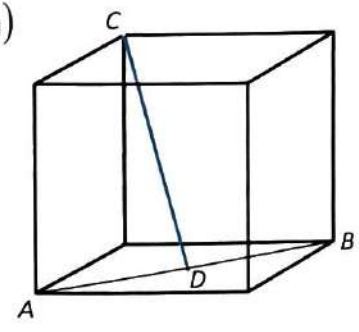


Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni

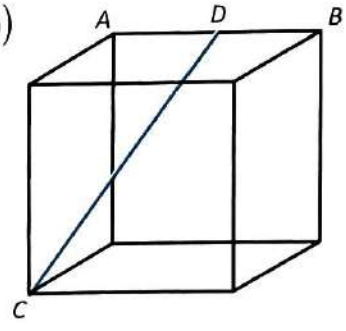
D 5.9. W trójkącie prostokątnym ABC bok AC jest przeciwprostokątną. Odcinek BS jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Punkt D należy do odcinka CS. Wykaż, że trójkąt ABD jest prostokątny.

5.10. Dany jest sześcian, w którym punkt D jest środkiem odcinka AB. Na podstawie danych na rysunku poniżej oceń, czy odcinek AB jest prostopadły do odcinka CD. Odpowiedź uzasadnij.

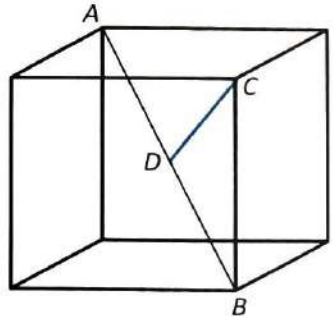
a)

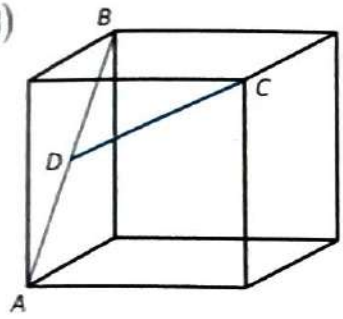


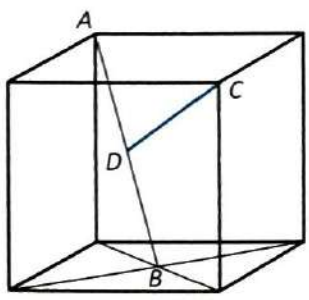
b)

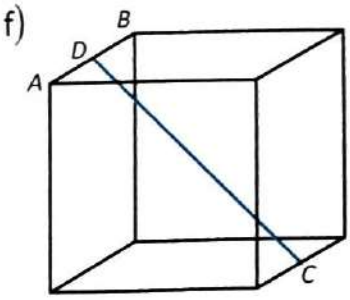


c)



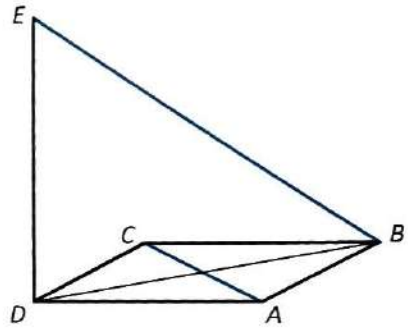
d) 

e) 

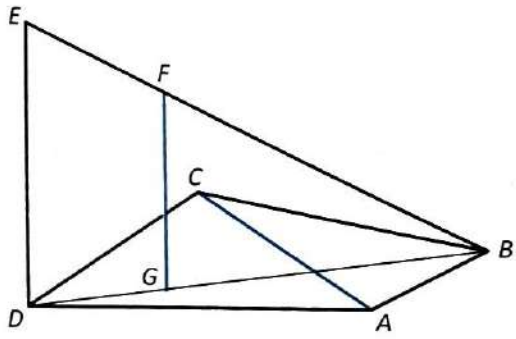
f) 

5.11. Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie O. Punkt S nie należy do płaszczyzny $(ABCD)$. Wiadomo, że $|AS| = |SC|$ oraz $|SD| = |SB|$. Czy odcinek SO jest prostopadły do płaszczyzny $(ABCD)$? Odpowiedź uzasadnij.

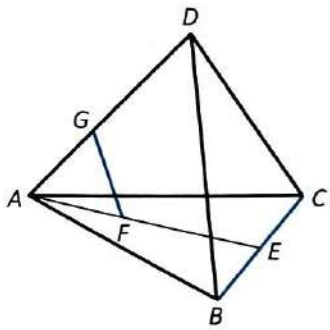
D 5.12. Romb $ABCD$ zawiera się w płaszczyźnie π. Punkt E znajduje się poza płaszczyzną π oraz odcinek ED jest prostopadły do płaszczyzny π (zobacz rysunek obok). Wykaż, że proste AC i BE są prostopadłe.



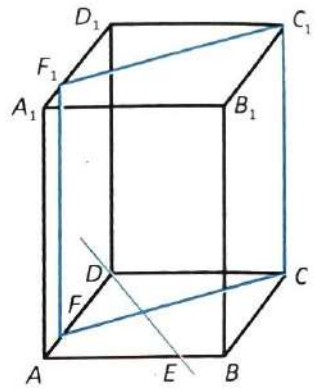
5.13. Na płaszczyźnie π leży czworokąt $ABCD$. Poza płaszczyzną π znajduje się punkt E i odcinek ED jest prostopadły do płaszczyzny π (zobacz rysunek obok). Ponadto wiadomo, że $F \in EB$, $G \in DB$ i $|EF| : |FB| = |DG| : |GB|$. Czy proste FG i AC są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.



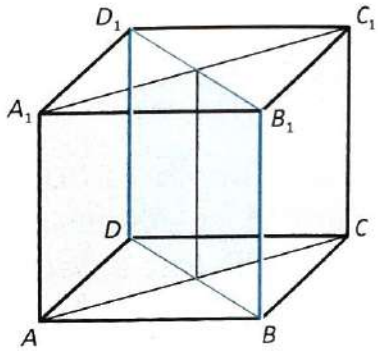
5.14. Punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Wiadomo, że $|AC| = |AB|$, $|CD| = |BD|$. Punkt E jest środkiem boku BC oraz $F \in AE$, $G \in AD$, jak na rysunku obok. Czy proste GF i BC są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.



5.15. Dany jest prostopadłościan $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o podstawie kwadratowej $ABCD$. Punkty E, F, F_1 dzielą odpowiednio krawędzie AB, AD i A_1D_1 tak, że $\frac{|BE|}{|AE|}=\frac{|AF|}{|DF|}=\frac{|A_1F_1|}{|D_1F_1|}=\frac{1}{4}$. Czy prosta DE jest prostopadła do płaszczyzny (FCC_1F_1)? Odpowiedź uzasadnij.



5.16. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Czy płaszczyzny (ACC_1A_1) i (BB_1D_1D) są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.



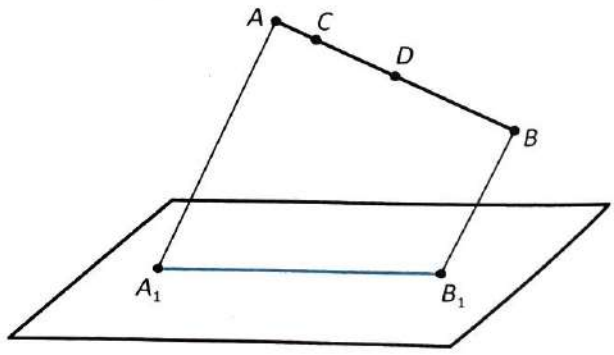
Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę

5.17. W pewnym rzucie równoległym na płaszczyznę obrazem odcinka jest punkt. Jak jest położony ten odcinek względem prostej, wyznaczającej kierunek rzutowania?

5.18. W pewnym rzucie równoległym na płaszczyznę obrazem pięciokąta jest odcinek. Jak jest położona prosta, wyznaczająca kierunek tego rzutowania, względem płaszczyzny, w której zawarty jest pięciokąt?

5.19. W rzucie równoległym na płaszczyznę π obrazem danego koła jest koło do niego przystające. Jak są położone względem siebie rzutnia i płaszczyzna zawierająca dane koło?

5.20. Na rysunku obok dany jest odcinek AB oraz A_1B_1, będący rzutem równoległym odcinka AB na płaszczyznę π w kierunku prostej AA_1. Punkty C, D należą do odcinka AB oraz $|CD| = 2|AC|$ i $|AD| = |DB|$. Wyznacz



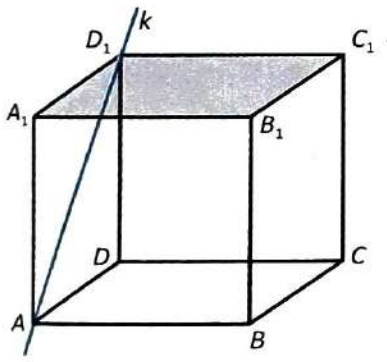
rzuty równoległe punktów C, D na płaszczyznę π. W jakim stosunku punkty C_1, D_1 dzielą odcinek A_1B_1?

5.21. Wysokość CD trójkąta ABC dzieli podstawę AB na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku 1 : 3. Odcinek CE jest środkową tego trójkąta. Narysuj rzut równoległy tego trójkąta w przypadku, gdy bok AB jest równoległy do rzutni, a płaszczyzna (ABC) nie jest równoległa do rzutni i nie jest równoległa do prostej, wyznaczającej kierunek rzutowania. Zaznacz rzut wysokości CD oraz rzut środkowej CE. W jakim stosunku punkty D_1 i E_1 dzielą bok A_1B_1 trójkąta $A_1B_1C_1$?

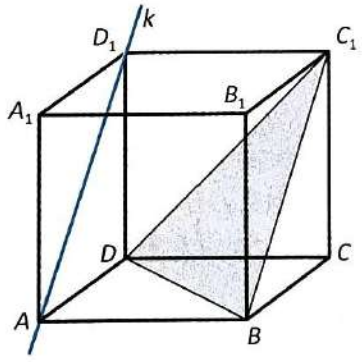
5.22. Naszkicuj rzut równoległy sześciokąta foremnego w przypadku, gdy dwa boki sześciokąta są równoległe do rzutni, ale sześciokąt zawiera się w płaszczyźnie nierównoległej do rzutni i nierównoległej do kierunku rzutowania. Następnie poprowadź przekątne w danym sześciokącie i przekątne w rzucie tego sześciokąta. Co zauważyłeś?

5.23. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Niech płaszczyzna $(ABCD)$ będzie rzutnią, a prosta AD_1 – kierunkiem rzutu równoległego na płaszczyznę $(ABCD)$. Naszkicuj obraz w tym rzucie:

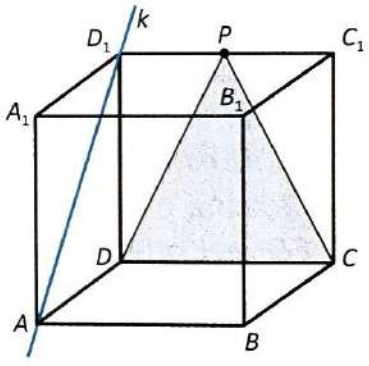
a) kwadratu $A_1B_1C_1D_1$



b) trójkąta DBC_1



c) trójkąta DCP, gdzie punkt P jest środkiem odcinka D_1C_1



D 5.24. W trójkącie prostokątnym ABC punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Punkt S nie należy do płaszczyzny (ABC). Wiadomo, że $|AS| = |SB| = |SC|$. Wykaż, że odcinek SO jest prostopadły do płaszczyzny (ABC).

5.25. Odcinek AB zawarty w płaszczyźnie π ma długość 120 cm. Odległość punktu C leżącego poza płaszczyzną π od punktu A jest taka sama jak od punktu B i wynosi 61 cm. Rzut prostokątny punktu C na płaszczyznę π należy do odcinka AB. Oblicz odległość punktu C od płaszczyzny π.

5.26. Dane są punkty A, B należące do płaszczyzny π oraz punkt C, który leży w odległości 9 cm od płaszczyzny π, w odległości $\sqrt{106}$ cm od punktu A i w odległości 15 cm od punktu B. Punkt C' jest rzutem prostokątnym punktu C na płaszczyznę π oraz $|\sphericalangle AC'B| = 90°$. Oblicz długość odcinka AB.

5.27. Rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π jest punkt A'. Do prostej k zawartej w płaszczyźnie π i przechodzącej przez punkt A' należą punkty B, C, a punkt B leży między punktami A' i C. Wiedząc, że $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 9$ cm oraz $|AC| = 17$ cm, oblicz odległość punktu A od płaszczyzny π.

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

D 5.28. Punkty A, B C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie. Odcinek CD jest prostopadły do odcinka AC i do odcinka BC. Punkt E jest środkiem odcinka AB. Wykaż, że jeśli $ED \perp AB$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

5.29. W trójkącie różnobocznym ABC punkt E jest środkiem odcinka BC. Odcinek AD jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Czy prosta DE jest prostopadła do prostej BC? Odpowiedź uzasadnij.

D 5.30. Dany jest kwadrat $ABCD$. Odcinek DE jest prostopadły do płaszczyzny $(ABCD)$. Wykaż, że trójkąty ABE oraz BCE są prostokątne.

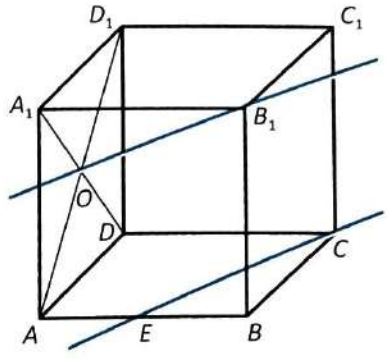
D 5.31. W równoległoboku $ABCD$ przekątna DB jest jednocześnie wysokością poprowadzoną na boki AD i BC. Proste DB i AC przecinają się w punkcie O. Odcinek EO jest prostopadły do płaszczyzny $(ABCD)$. Wykaż, że trójkąty BCE i ADE są prostokątne.

5.32. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AC| = 15$ cm, $|BC| = 20$ cm. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny (ABC) i ma długość 22,5 cm. Oblicz wysokość trójkąta ABD, poprowadzoną na bok AB.

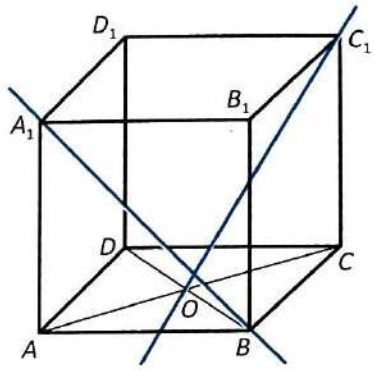
5.33. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD poprowadzona na przeciwprostokątną AB dzieli ją na odcinki długości: $|AD| = 9$ cm i $|DB| = 4$ cm. Odcinek EC jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Wiedząc, że pole trójkąta ABC jest o 26 cm^2 mniejsze od pola trójkąta ABE, oblicz odległość punktu E od płaszczyzny (ABC).

5.34. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 60$ cm, $|AC| = |BC| = 50$ cm. Odcinek AD jest prostopadły do płaszczyzny (ABC). Odległość punktu D od prostej BC jest równa 52 cm. Oblicz odległość punktu D od płaszczyzny (ABC).

5.35. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu ADD_1A_1, punkt E jest środkiem krawędzi AB (zobacz rysunek obok). Czy proste OB_1 i EC są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.



5.36. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Punkt O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$ (zobacz rysunek obok). Czy proste A_1B i OC_1 są prostopadłe? Odpowiedź uzasadnij.



Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny

5.37. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A. Punkt B należy do prostej l, która jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π oraz $|AB| = 8$ cm. Oblicz odległość punktu B od prostej k, jeśli kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π ma miarę:

a) $30°$ b) $45°$ c) $60°$.

5.38. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$, którego bok ma długość a. Oblicz tangens kąta nachylenia przekątnej AC_1 do płaszczyzny (BCC_1B_1).

5.39. Płaszczyzny π_1 i π_2 są prostopadłe, a krawędzią ich przecięcia jest prosta m. Punkt A należy do płaszczyzny π_1 i leży w odległości 8 cm od prostej m. Punkt B należy do płaszczyzny π_2 i leży w odległości 6 cm od prostej m. Wiedząc, że rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę π_2 jest ten sam punkt co rzut prostokątny punktu B na płaszczyznę π_1, oblicz:

a) tangens kąta nachylenia prostej AB do płaszczyzny π_2,

b) cosinus kąta nachylenia prostej AB do płaszczyzny π_1.

5.40. Na płaszczyźnie π dany jest odcinek AB. Odcinek BC jest prostopadły do płaszczyzny π. Punkt D jest środkiem odcinka BC. Wiedząc, że tangens nachylenia prostej AD do płaszczyzny π wynosi $\frac{2}{3}$, oblicz sinus kąta nachylenia prostej AC do płaszczyzny π.

5.41. Punkty A, B, C leżące na płaszczyźnie π wyznaczają trójkąt równoramienny, w którym $|AC| = |BC| = 5$ oraz $|AB| = 6$. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny π, a jego długość jest równa 8. Oblicz:

a) tangens kąta nachylenia prostej BD do płaszczyzny π,

b) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π.

5.42. Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90°$, $|AC| = 20$, oraz $|AB| = 12$, zawiera się w płaszczyźnie π. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny π i ma długość 12. Oblicz:

a) sinus kąta nachylenia prostej AD do płaszczyzny π,

b) sinus kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π.

5.43. Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$, $|AB| = 10$ oraz $|BC| = 6$, zawiera się w płaszczyźnie π. Odcinek CD jest prostopadły do płaszczyzny π i ma długość 8. Oblicz:

a) miarę kąta nachylenia prostej AD do płaszczyzny π,

b) cosinus kąta nachylenia prostej BD do płaszczyzny π,

c) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π.

5.44. Dane są dwa przystające równoległoboki $ABCD$ i $DCEF$ o wspólnym boku DC. Miary kątów ostrych obu równoległoboków są takie same i wynoszą: $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle FDC| = 30°$. Płaszczyzny zawierające te równoległoboki tworzą kąt dwuścienny o mierze 60°. Wiedząc, że $|AD| = |DF| = 2$ dm, oblicz odległość między prostymi AB i EF.

5.45. Dane są dwa przystające romby $ABCD$ i $DCEF$, których wspólny bok DC ma długość 4 cm. Miary kątów ostrych tych rombów są takie same i wynoszą: $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DCE| = 45°$. Płaszczyzny zawierające te romby tworzą kąt dwuścienny, równy 120°. Oblicz odległość między prostymi AB i EF.

Graniastosłupy

D 5.46. Wykaż, że długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a jest równa $a\sqrt{3}$.

a) Wyznacz cosinus kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

b) Oblicz a w przypadku, gdy przekątna sześcianu ma długość 3 cm.

D 5.47. Wykaż, że długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości a, b, c jest równa $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu i miarę kąta nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy w przypadku, gdy krawędzie podstawy mają długość: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, zaś krawędź boczna ma długość $c = 5$ cm.

5.48. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu wynosi 3 : 4 : 12, a długość przekątnej prostopadłościanu jest równa 26 cm. Oblicz długości przekątnych trzech nieprzystających ścian.

5.49. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz:

a) tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) sinus kąta między przekątną ściany bocznej a przekątną podstawy, wychodzącymi z tego samego wierzchołka,

c) cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

5.50. Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $\sqrt{8}$, a krawędź podstawy ma długość 2. Oblicz:

a) cosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) sinus kąta między przekątną jednej ściany bocznej a krawędzią podstawy zawartą w sąsiedniej ścianie bocznej, wychodzącymi z tego samego wierzchołka,

c) miarę kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.

5.51. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego bok ma długość $5\sqrt{3}$ cm. Wiedząc, że wysokość graniastosłupa jest równa 8 cm, a dłuższa przekątna graniastosłupa ma 17 cm długości, oblicz:

a) miarę kąta ostrego rombu,

b) długość krótszej przekątnej tego graniastosłupa.

5.52. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb. Wysokość tego graniastosłupa jest równa 12 cm. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 45^\circ$, a krótsza pod kątem $\beta = 60^\circ$. Oblicz długość krawędzi podstawy.

5.53. Oblicz długości przekątnych graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego długość krawędzi podstawy jest równa 3 cm, a krawędzi bocznej – 8 cm.

5.54. Liczba naturalna parzysta n oznacza liczbę wierzchołków pewnego graniastosłupa.

a) Zapisz liczbę s ścian i liczbę k krawędzi tego graniastosłupa w zależności od n.

b) Oblicz liczbę ścian i liczbę krawędzi graniastosłupa w przypadku, gdy $n = 10$.

5.55. W pewnym graniastosłupie liczba ścian jest o 5 mniejsza od liczby wierzchołków. Oblicz liczbę wierzchołków, liczbę ścian i liczbę krawędzi tego graniastosłupa.

5.56. W pewnym graniastosłupie liczba krawędzi jest dwa i pół razy większa od liczby ścian. Jakie wielokąty są podstawami tego graniastosłupa?

5.57. Stosunek długości przekątnej ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego do długości krawędzi podstawy jest równy $\sqrt{3} : 1$. Oblicz miarę kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.

D 5.58. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny, którego podstawy mają długość a i b, a ramię ma długość c. Wysokość tego graniastosłupa jest równa H. Wykaż, że długość przekątnej d tego graniastosłupa opisuje wzór: $d^2 = H^2 + ab + c^2$.

D 5.59. W graniastosłupie prostym trójkątnym każdy wierzchołek jednej podstawy połączono odcinkiem z punktem przecięcia przekątnych ściany bocznej przeciwległej temu wierzchołkowi. Wykaż, że te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2.

Ostrosłupy

5.60. Oblicz, ile ścian oraz ile krawędzi ma ostrosłup, którego liczba wierzchołków jest równa:

a) 6

b) n, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$ i $n > 3$.

5.61. Oblicz, ile wierzchołków ma ostrosłup, którego liczba ścian jest o 6 mniejsza od liczby krawędzi.

5.62. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa 20 cm, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 60°. Oblicz:

a) długość krawędzi bocznej,

b) wysokość ostrosłupa,

c) wysokość ściany bocznej.

5.63. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa $4\sqrt{2}$ cm, a krawędzi bocznej – 5 cm. Oblicz:

a) wysokość tego ostrosłupa,

b) wysokość ściany bocznej poprowadzoną na krawędź podstawy,

c) odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej.

5.64. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa $3\sqrt{3}$ cm. Oblicz:

a) miarę kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od ściany bocznej.

5.65. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę 90°. Przekątna podstawy ostrosłupa ma długość 5 dm. Oblicz:

a) sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa,

b) miarę kąta zawartego między dwiema sąsiednimi krawędziami bocznymi ostrosłupa.

5.66. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przeciwlegle krawędzie boczne są do siebie prostopadłe. Wyznacz tangens kąta α nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy i podaj przybliżoną miarę tego kąta (z dokładnością do 1°).

5.67. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 12 dm, a krawędź boczna 8 dm. Oblicz:

a) wysokość tego ostrosłupa,

b) miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

D 5.68. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy jest sześć razy dłuższa od wysokości tego ostrosłupa. Wykaż, że ściana boczna w tym ostrosłupie jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°.

5.69. Dany jest czworościan foremny o wysokości H i krawędzi długości a.

D a) Wykaż, że $3H^2 = 2a^2$.

b) Wiedząc dodatkowo, że wysokość jest o 1 krótsza od krawędzi, oblicz a. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c \in \boldsymbol{N}$.

5.70. Dany jest czworościan foremny. Oblicz:

a) tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy,

b) cosinus kąta dwuściennego między sąsiednimi ścianami.

5.71. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 30 cm, a kąt dwuścienny przy jego podstawie jest równy 60°. Oblicz:

a) wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka ostrosłupa,

b) długość krawędzi podstawy.

5.72. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45°. Oblicz:

a) sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy,

b) cosinus kąta między krawędzią boczną ostrosłupa a krawędzią podstawy.

5.73. Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego do płaszczyzny podstawy, jeśli:

a) wysokość ostrosłupa jest trzy razy krótsza od krawędzi podstawy,

b) wysokość ostrosłupa jest równa krawędzi podstawy.

5.74. Oblicz miarę kąta dwuściennego przy podstawie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, jeśli:

a) wysokość ostrosłupa jest trzy razy krótsza od wysokości podstawy,

b) wysokość ostrosłupa jest dwa razy krótsza od krawędzi podstawy.

5.75. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 2 dm, a krawędź boczna – $2\sqrt{2}$ dm. Oblicz:

a) miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) wysokość ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka ostrosłupa.

5.76. Wysokość prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego wynosi $5\sqrt{3}$ cm, a kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest równy 60°. Oblicz:

a) sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa,

b) sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.77. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego boki mają długość 6 cm i 8 cm. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają po 13 cm długości. Oblicz:

a) wysokość ostrosłupa,

b) wysokości h_1 i h_2 dwóch różnych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka tego ostrosłupa.

5.78. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, którego dwa boki mają długość 17 cm, a długość trzeciego boku jest równa 16 cm. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz:

a) wysokość ostrosłupa

b) długość krawędzi bocznych ostrosłupa.

5.79. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt, którego boki mają długość 21 cm, 17 cm i 10 cm. Wysokość ostrosłupa jest równa $5\frac{2}{3}$ cm. Oblicz:

a) długość krawędzi bocznych tego ostrosłupa,

b) cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.80. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego kąt między ramionami jest równy 120°. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $4\sqrt{3}$. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa $\sqrt{33}$, oblicz:

a) długość krawędzi bocznych,

b) cosinusy kątów między krawędziami bocznymi tego ostrosłupa.

5.81. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego jeden z kątów jest równy 150°, a dwa jego boki mają długość $9\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Krawędź boczna ostrosłupa ma długość 15. Wyznacz:

a) wysokość tego ostrosłupa,

b) cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

5.82. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC. Spodek wysokości jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Wiedząc, że ostrosłup ma wysokość 7 cm, a krawędź AC ma długość 8 cm, oblicz:

a) sumę długości krawędzi bocznych tego ostrosłupa,

b) sinus kąta nachylenia krawędzi AS do płaszczyzny podstawy.

5.83. Podstawą ostrosłupa prostego $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych AC i BC, gdzie $|AC| = 6$ i $|BC| = 8$. Wysokość tego ostrosłupa jest równa 12. Oblicz:

a) tangensy kątów nachylenia ścian ACS i BCS do płaszczyzny podstawy,

b) odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznych.

5.84. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym przyprostokątne mają długość: $|AC| = 9$, $|BC| = 16$. Spodkiem wysokości ostrosłupa jest wierzchołek C. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 12, oblicz:

a) długość boków trójkąta ABS,

b) odległość punktu C od krawędzi bocznej BS,

c) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABS) do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

5.85. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, a spodek wysokości znajduje się w jednym z wierzchołków tego kwadratu. Wiedząc, że wysokość tego ostrosłupa jest równa krawędzi podstawy, wyznacz:

a) tangens kąta nachylenia najdłuższej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy,

b) cosinus kąta między najdłuższą krawędzią boczną ostrosłupa a krawędzią podstawy o wspólnym wierzchołku,

c) miarę kąta nachylenia ścian bocznych, które nie zawierają wysokości ostrosłupa, do płaszczyzny podstawy,

d) miarę kąta dwuściennego między dwiema ścianami bocznymi o największej powierzchni.

5.86. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 6 i 8. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α takim, że $\cos\alpha = \frac{8}{17}$. Oblicz:

a) wysokość tego ostrosłupa,

b) długości krawędzi bocznych tego ostrosłupa.

5.87. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego bok ma długość 20 cm, a kąt ostry jest równy 60°. Punkt przecięcia się przekątnych rombu jest spodkiem wysokości ostrosłupa. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa $5\sqrt{6}$ cm, oblicz:

a) wysokość ściany bocznej poprowadzonej na krawędź podstawy,

b) sinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy

5.88. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość $\sqrt{6}$. Kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równy 120°. Oblicz:

a) odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od krawędzi bocznej,

b) wysokość ostrosłupa.

5.89. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny. Krótsza podstawa i ramię tego trapezu są tej samej długości. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 61 cm, a wysokość ostrosłupa to 60 cm. Wiedząc, że środek okręgu opisanego na trapezie jest środkiem dłuższej podstawy trapezu, oblicz pole tego trapezu.

5.90. Podstawą ostrosłupa jest trapez prostokątny, którego podstawy mają długość 6 cm i 3 cm, a ramiona 4 cm i 5 cm. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem ostrym miary α. Wyznacz sinus kąta α, jeśli wysokość ostrosłupa jest równa 6 cm.

Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu

5.91. Narysuj:

a) cztery różne siatki sześcianu,

b) dwie różne siatki prostopadłościanu, którego żadna ściana nie jest kwadratem.

5.92. Narysuj siatkę graniastosłupa:

a) prawidłowego czworokątnego,

b) prawidłowego trójkątnego,

c) prawidłowego sześciokątnego,

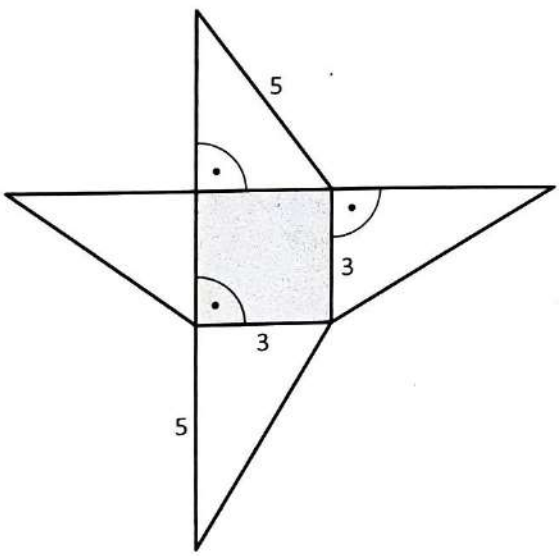
d) prostego, którego podstawą jest równoległobok.

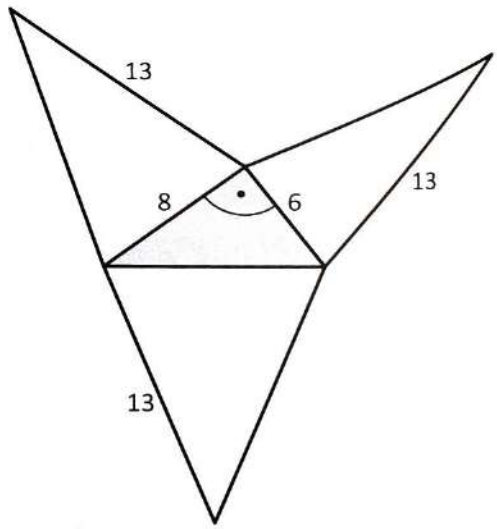
5.93. Narysuj siatkę ostrosłupa:
a) prawidłowego czworokątnego,
b) prawidłowego trójkątnego,
c) prawidłowego sześciokątnego,
d) prostego, którego podstawą jest prostokąt.

5.94. Przekątna prostopadłościanu ma długość 17 cm, a cosinus kąta nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{15}{17}$. Stosunek długości krawędzi podstawy wynosi 3 : 4. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

5.95. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt prostokątny:
a) o przyprostokątnych pozostających w stosunku 2 : 3, a spodek wysokości jest wierzchołkiem tego trójkąta przy kącie prostym,
b) równoramienny, a spodek wysokości jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta.

5.96. Na podstawie informacji umieszczonych poniżej, na siatce ostrosłupa wyznacz wysokość tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego podstawą jest:
a) kwadrat
b) trójkąt prostokątny





5.97. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, jeśli:
a) przekątna ściany bocznej ma długość 2 dm,
b) przekątna sześcianu ma długość 8 cm.

5.98. Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa, jeśli:

a) wysokość graniastosłupa jest równa 5 cm,

b) krawędź podstawy stanowi 75% krawędzi bocznej.

5.99. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym stosunek pola powierzchni całkowitej do pola powierzchni bocznej wynosi 8 : 5. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej jest równe 192 cm^2, oblicz długości krawędzi tego graniastosłupa.

5.100. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu, jeśli przekątna ściany bocznej ma długość 30 cm oraz kąt między tą przekątną i przekątną sąsiedniej ściany bocznej, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, ma 60°.

5.101. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu wynosi $50\left(3+2\sqrt{3}\right)$ cm^2. Przekątna jednej ze ścian bocznych jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°, a przekątna sąsiedniej ściany bocznej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

5.102. Przekątna ściany bocznej i krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, wychodzące z tego samego wierzchołka, tworzą kąt 30°. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $350\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz długość przekątnej ściany bocznej.

5.103. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe sumie pól obu podstaw. Wyznacz tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

5.104. W graniastosłupie prostym podstawa jest rombem, którego przekątne mają długość 30 cm i 16 cm. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

5.105. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok o bokach długości 2 dm i 4 dm, którego kąt ostry jest równy 60°. Krótsza przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

5.106. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm, a kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej ma 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5.107. Oblicz długość krawędzi podstawy prawidłowego ostrosłupa czworokątnego, wiedząc, że krawędź boczna ma długość 5, a pole powierzchni całkowitej jest równe 16.

5.108. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 10 cm.

5.109. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $136\sqrt{3}$ cm^2, a pole podstawy jest równe $64\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

5.110. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego ramię ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 8 cm, oblicz:

a) długość krawędzi bocznych,

b) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

5.111. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 39 : 25. Wysokości różnych ścian bocznych poprowadzone na krawędzie podstawy ostrosłupa są równe: 60 cm i 52 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

5.112. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 1 dm, a spodkiem wysokości ostrosłupa jest jeden z wierzchołków tego kwadratu. Dwie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz:

a) długość krawędzi bocznych ostrosłupa,

b) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5.113. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długość 30 cm i 40 cm. Spodek wysokości ostrosłupa jest wierzchołkiem kąta prostego trójkąta w podstawie. Ściana boczna o największym polu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym α takim, że $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{1}{3}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

D 5.114. Wykaż, że jeśli wysokość czworościanu foremnego jest równa H, to pole powierzchni całkowitej tego czworościanu wynosi $\frac{3\sqrt{3}}{2}H^2$.

D 5.115. Wysokość ściany bocznej prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego jest równa h, a promień okręgu wpisanego w podstawę jest równy r. Wykaż, że pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi $2\sqrt{3}\cdot(r+h)\cdot r$.

5.116. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego przekątne mają długość 6 dm i 8 dm. Wysokość ostrosłupa jest równa 10 dm, a spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w ten romb. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

5.117. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny o boku długości a. Jedna ze ścian bocznych, będąca również trójkątem równobocznym, jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów

5.118. Akwarium do hodowli rybek ma następujące wymiary: długość 0,8 m, szerokość 0,4 m i wysokość 0,5 m. Oblicz, ile co najwyżej litrów wody należy wlać do tego akwarium, aby poziom lustra wody znajdował się w odległości nie mniejszej niż 10 cm od górnej krawędzi akwarium.

5.119. Jeżeli każdą krawędź danego sześcianu przedłużymy o 2 cm, to jego objętość powiększy się o 98 cm^3. Oblicz długość krawędzi danego sześcianu.

5.120. W prostopadłościanie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ podstawa $ABCD$ jest kwadratem. Wysokość C_1E trójkąta BC_1D_1 dzieli przekątną D_1B na odcinki długości: $|D_1E| = 2$ dm, $|EB| = 8$ dm. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

5.121. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego przekątna ma długość 14 cm, jeśli:

a) kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy jest równy 60°,

b) kąt między tą przekątną a przekątną ściany bocznej, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, jest równy 30°.

5.122. Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 6 dm^3, a przekątna ściany bocznej tworzy z krawędzią podstawy kąt 60°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

5.123. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6 cm i jest nachylona do sąsiedniej ściany bocznej pod kątem 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

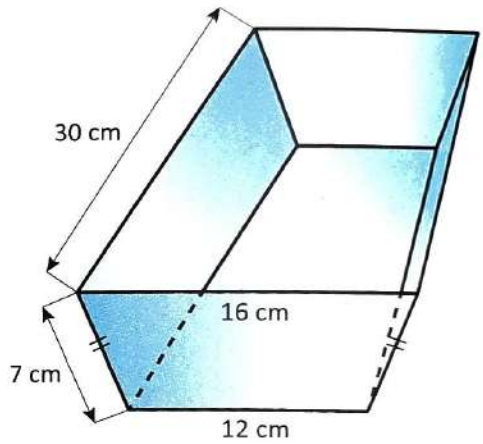
5.124. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym dłuższa przekątna ma długość $\sqrt{5}$ dm, a krótsza przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego graniastosłupa.

5.125. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, którego kąt ostry ma miarę 30°. Wszystkie krawędzie graniastosłupa mają jednakową długość. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe 180 cm^2, oblicz objętość tego graniastosłupa.

5.126. Blaszana forma do pieczenia ciasta ma kształt graniastosłupa prostego. Uwzględniając wymiary podane na rysunku obok, oblicz:

a) ile cm^2 blachy potrzeba na wykonanie tej formy; wynik podaj z dokładnością do 1 cm^2,

b) pojemność formy. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 litra.



5.127. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez, którego podstawy mają długość 3 cm i 24 cm, a ramiona – 10 cm i 17 cm. Ściana boczna o najmniejszym polu powierzchni jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

5.128. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego boki mają długość 10 cm i 18 cm. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa mają jednakową długość, równą $5\sqrt{10}$ cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.129. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 15 cm. Ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.130. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi jest równy 90°. Wiedząc, że krawędzie boczne mają długość 12 cm, oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.131. Podstawą ostrosłupa jest romb, a spodkiem wysokości tego ostrosłupa jest punkt przecięcia się przekątnych rombu. Dwie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 15 cm, a pozostałe dwie – 13 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że jego wysokość jest równa 12 cm.

5.132. Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego wynosi $16\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz objętość tego czworościanu.

5.133. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $1\frac{1}{3}$. Wiedząc, że objętość ostrosłupa wynosi 6 dm^3, oblicz:

a) wysokość ostrosłupa,

b) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

5.134. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa $36\sqrt{2}$ cm^3. Wszystkie krawędzie tego ostrosłupa mają jednakową długość. Oblicz:

a) długość tych krawędzi,

b) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5.135. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Wiedząc, że objętość tego ostrosłupa jest równa $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm^3, oblicz wysokość ostrosłupa i długość jego krawędzi.

5.136. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ dm^3. Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy 45°. Wyznacz odległość spodka wysokości:

a) od krawędzi bocznej

b) od ściany bocznej ostrosłupa.

5.137. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4 dm, a kąt między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy jest równy 45°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.138. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest ośmiokąt. Oblicz objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że jego krawędź boczna ma długość 10 cm, a kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy jest równy 30°.

5.139. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego dwa boki mają długość 6 cm, a długość trzeciego boku wynosi 8 cm. Wszystkie krawędzie boczne mają jednakową długość, równą 9 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.140. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego dwa boki mają długość 39 cm, a długość trzeciego boku wynosi 30 cm. Każda ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.141. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat, a spodek wysokości ostrosłupa jest jednym z wierzchołków tego kwadratu. Suma pól powierzchni dwóch ścian bocznych o większym polu powierzchni jest dwa razy większa od sumy powierzchni pozostałych ścian bocznych. Wiedząc, że objętość tego ostrosłupa jest równa $81\sqrt{3}$ cm^3, oblicz:

a) długość krawędzi podstawy,

b) długość najdłuższej krawędzi tego ostrosłupa.

5.142. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt, którego pole jest równe 1 m^2. Dwie ściany boczne tego ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe tworzą z nią kąty odpowiednio równe 30° i 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.143. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny ABC. Krawędź boczna CS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy ostrosłupa. Kąt nachylenia ściany ABS do płaszczyzny podstawy ma 60°. Wiedząc, że objętość ostrosłupa jest równa $\sqrt{3}$, oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5.144. Podstawą prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest prostokąt. którego boki AB i BC są różnej długości. Objętość ostrosłupa $ACDD_1$ jest równa 12 cm^3.

a) Oblicz objętość prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

b) Wiedząc dodatkowo, że $|AB| : |BC| : |DD_1| = 3 : 4 : 6$, oblicz cosinus kąta między krawędziami AD_1 i CD_1 ostrosłupa $ACDD_1$.

5.145. Punkty K, L, M są środkami krawędzi AB, BC i BB_1 sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

a) Jaką część objętości sześcianu stanowi objętość ostrosłupa $KLMB$?

b) Wiedząc dodatkowo, że odległość wierzchołka B od płaszczyzny (KLM) jest równa $\sqrt{3}$, oblicz długość krawędzi sześcianu.

5.146. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle BAC| = 30°$, $|\sphericalangle ACB| = 105°$. Przekątna ściany bocznej o najmniejszym polu powierzchni tworzy

z płaszczyzną podstawy kąt 45°. Wiedząc, że wysokość graniastosłupa jest równa 2 dm, oblicz jego objętość.

5.147. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego bok ma długość 15 cm. Każda ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe 360 cm^2, oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.148. Podstawą ostrosłupa jest romb $ABCD$. Wysokość rombu DE poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego, dzieli bok AB na odcinki długości: $|AE| = 6$, $|EB| = 4$. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe 170, oblicz:

a) wysokość ostrosłupa

b) objętość tego ostrosłupa.

5.149. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a. Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy wychodzącymi z tego samego wierzchołka ma miarę α, gdzie $\alpha \in (45°, 90°)$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5.150. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź podstawy ma długość a, natomiast kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę α, gdzie $\alpha \in (0°, 90°)$.

5.151. Oblicz objętość prawidłowego ostrosłupa trójkątnego, mając daną długość r promienia okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa i miarę α kąta płaskiego ściany bocznej przy podstawie. Dla jakich wartości α zadanie ma rozwiązanie?

5.152. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym najdłuższa przekątna podstawy ma długość d i tworzy z przekątną ściany bocznej, wychodzącą z tego samego wierzchołka, kąt α. Oblicz objętość graniastosłupa. Wyznacz te wartości α, dla których zadanie ma rozwiązanie.

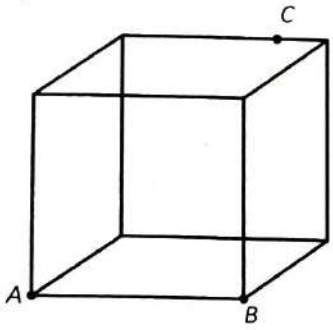
5.153. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między dwiema przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę 2α, gdzie $\alpha \in (0°, 90°)$. Odległość wierzchołka podstawy ostrosłupa od przeciwległej krawędzi bocznej jest równa d. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

5.154. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt między dwiema sąsiednimi krawędziami bocznymi ma miarę 2α, gdzie $\alpha \in (0°, 60°)$. Odległość wierzchołka podstawy, należącego do jednej krawędzi bocznej, od sąsiedniej krawędzi bocznej jest równa d. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

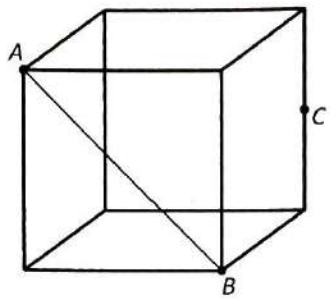
Przekroje wielościanów – konstrukcje

5.155. Na rysunku poniżej odcinek AB i punkt C należą do płaszczyzny π. Wyznacz przekrój sześcianu płaszczyzną π.

a)

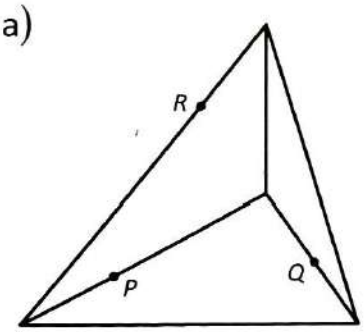


b)

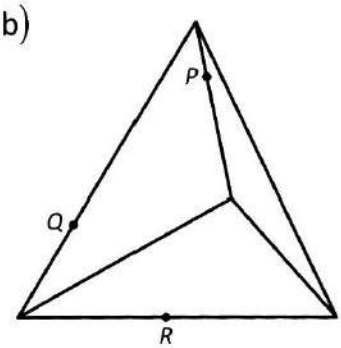


5.156. Na rysunku poniżej punkty P, Q, R należą do płaszczyzny π. Wyznacz przekrój ostrosłupa płaszczyzną π.

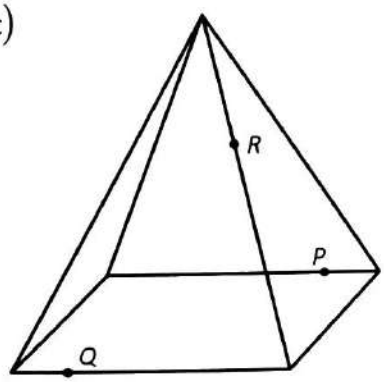
a)



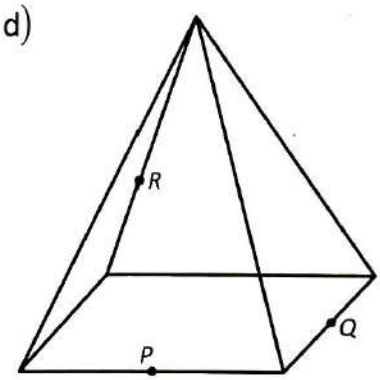
b)



c)

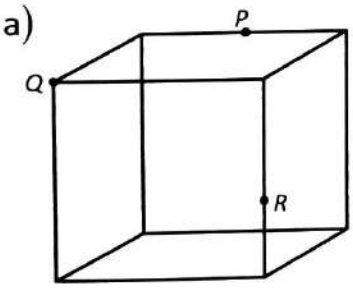


d)

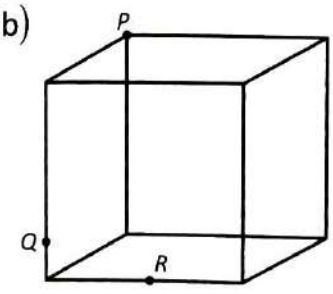


5.157. Na rysunku poniżej punkty P, Q, R należą do płaszczyzny π. Wyznacz przekrój sześcianu płaszczyzną π.

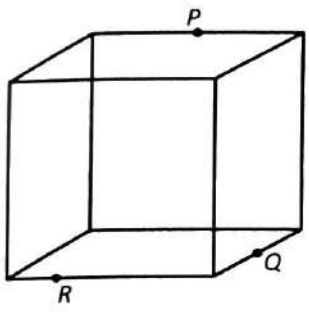
a)



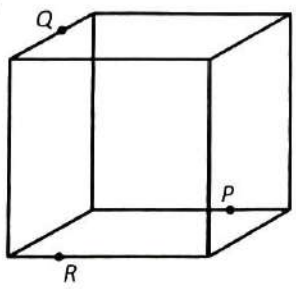
b)



c)



d)



5.158. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Naszkicuj przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną:

a) zawierającą dwie przeciwległe krawędzie boczne ostrosłupa,

b) zawierającą dwie przeciwległe wysokości ścian bocznych,

c) wyznaczoną przez przekątną podstawy ostrosłupa i środek krawędzi bocznej, niemającej punktów wspólnych z tą przekątną,

d) wyznaczoną przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa.

W każdym przypadku zaznacz na rysunku kąt α, który tworzy przekrój daną płaszczyzną z płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa.

5.159. Wykonaj rysunek ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Następnie poprowadź przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną, wyznaczoną przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa. Jakim czworokątem jest otrzymany przekrój?

5.160. Wykonaj rysunek ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Następnie poprowadź przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną wyznaczoną przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej tego ostrosłupa. Wyznacz konstrukcyjnie punkt, w którym wysokość ostrosłupa przebija otrzymany przekrój.

Przekroje wielościanów – zadania

5.161. Przekrój sześcianu płaszczyzną, zawierającą przekątne trzech różnych ścian, jest trójkątem, którego pole wynosi $50\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz objętość tego sześcianu.

5.162. Pole powierzchni całkowitej sześcianu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest równe 600 cm^2. Oblicz pole przekroju tego sześcianu płaszczyzną, zawierającą krawędzie AD i B_1C_1.

5.163. Krawędź boczna prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ma długość 56 cm. Boki podstawy mają długość: $|AB| = 33$ cm, $|AD| = 40$ cm. Oblicz pole przekroju płaszczyzną wyznaczoną przez krawędzie AD i B_1C_1.

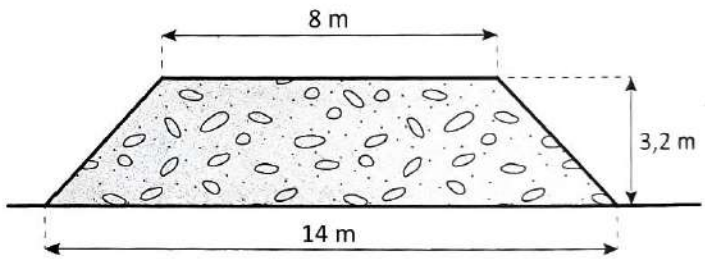
5.164. Długości boków prostopadłościanu pozostają w stosunku 3 : 4 : 5. Przez najdłuższą krawędź i przekątną najmniejszej ściany poprowadzono przekrój, którego pole jest równe 100 cm^2. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

5.165. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDA_1B_1C_1D_1$ krawędź podstawy $ABCD$ jest o 2 cm dłuższa od krawędzi bocznej AA_1. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe 320 cm^2. Oblicz pole przekroju tej bryły wyznaczonego przez przekątną podstawy DB i wierzchołek C_1.

5.166. Krawędzie podstawy graniastosłupa prostego trójkątnego mają długość: 10 cm, 17 cm, 21 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 20 cm. Graniastosłup przecięto płaszczyzną, zawierającą najkrótszą wysokość podstawy i krawędź boczną, która ma punkt wspólny z tą wysokością. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

5.167. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny prostokątny. Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa $\left(28+8\sqrt{2}\right)$ cm. Dwie przystające ściany boczne są kwadratami. Oblicz pole przekroju, wyznaczonego przez przekątne tych kwadratów wychodzące z jednego wierzchołka.

5.168. Rysunek obok przedstawia przekrój nasypu kolejowego. Oblicz, ile m^3 ziemi wykorzystano do utworzenia nasypu o długości 1 km.



5.169. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny, którego wysokość jest równa 5 cm, a odcinek łączący środki ramion ma długość 12 cm. Przekrój graniastosłupa płaszczyzną, zawierającą krawędź boczną i przekątną podstawy, ma pole równe 130 cm^2. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

5.170. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6 cm, a krawędź boczna – 5 cm. Oblicz długość boków przekroju ostrosłupa wyznaczonego przez:

a) wysokości przeciwległych ścian bocznych, poprowadzone ze wspólnego wierzchołka,

b) przeciwległe krawędzie boczne.

5.171. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 10 cm. Przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną, przechodzącą przez wysokości przeciwległych ścian bocznych, jest trójkątem równobocznym. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

5.172. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekrój wyznaczony przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa jest trójkątem prostokątnym. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 128 cm. Oblicz:
a) długość każdej krawędzi ostrosłupa,
b) pole danego przekroju.

5.173. Krawędź podstawy czworościanu foremnego ma długość 4 dm. Oblicz pole przekroju płaszczyzną, wyznaczoną przez krawędź boczną i wysokość podstawy tego czworościanu.

5.174. Sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$ o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty A_1, B, C_1. Oblicz odległość punktu B_1 od otrzymanego przekroju.

5.175. Krawędź boczna prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego ma długość 8 cm, a długość krawędzi podstawy jest równa 4 cm. Przez środki dwóch sąsiednich boków sześciokąta poprowadzono płaszczyznę równoległą do wysokości ostrosłupa. Oblicz pole otrzymanego przekroju tego ostrosłupa.

5.176. Pole podstawy graniastosłupa prostego trójkątnego jest równe P. Przez krawędź podstawy tej bryły poprowadzono płaszczyznę, która przecina przeciwległą krawędź boczną i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz pole przekroju graniastosłupa tą płaszczyzną.

5.177. Krawędź sześcianu ma długość a. Przez przekątną podstawy tego sześcianu poprowadzono płaszczyznę, nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz pole przekroju sześcianu tą płaszczyzną.

5.178. Wszystkie krawędzie pewnego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mają jednakową długość. Pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną, zawierającą dwie przeciwległe krawędzie boczne, jest równe P. Oblicz objętość ostrosłupa.

5.179. Podstawą ostrosłupa jest romb, którego bok ma długość $8\frac{1}{3}$, a jedna z przekątnych ma długość $13\frac{1}{3}$. Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem symetrii podstawy. Przekrój ostrosłupa płaszczyzną, zawierającą dwie wysokości przeciwległych ścian bocznych, poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa, jest trójkątem równobocznym. Wyznacz pole tego przekroju.

5.180. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a, natomiast krawędź boczna ma długość b. Ostrosłup przecięto płaszczyzną, zawierającą przekątną podstawy i jednocześnie równoległą do jednej z krawędzi bocznych. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

5.181. Wysokość prawidłowego ostrosłupa sześciokątnego jest równa H, a krawędź podstawy ma długość a. Oblicz pole przekroju wyznaczonego przez krótszą przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa.

5.182. Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa i środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeżeli krawędź podstawy ma długość 20 cm, a ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°.

5.183. Wszystkie krawędzie prawidłowego ostrosłupa czworokątnego mają długość a. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną poprowadzoną przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i środek wysokości ostrosłupa.

5.184. Przez krawędź AB podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCD$ poprowadzono płaszczyznę, do której należy środek S krawędzi CD. Wiedząc, że otrzymany przekrój tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45°, oblicz cosinus kąta ASB.

5.185. Podstawą ostrosłupa prostego $ABCD$ jest trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątne mają długość: $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 8$ cm. Wysokość ostrosłupa jest równa 12 cm. Środki krawędzi AB, BC, CD i AD wyznaczają płaszczyznę przekroju tego ostrosłupa. Oblicz:

a) tangens kąta nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny podstawy,

b) pole przekroju ostrosłupa tą płaszczyzną.

Test sprawdzający do rozdziału 5.

1. Krawędź pierwszego sześcianu jest dwa razy dłuższa od krawędzi drugiego sześcianu. Ile razy objętość pierwszego sześcianu jest większa od objętości drugiego sześcianu?

A. 2 razy B. 4 razy C. 6 razy D. 8 razy

2. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ma długość 10 cm, a krawędź podstawy – $3\sqrt{2}$ cm. Wysokość tego graniastosłupa jest równa:

A. 4 cm B. 6 cm C. $6\sqrt{2}$ cm D. 8 cm

3. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o wymiarach 6 cm na 8 cm. Jeśli wysokość prostopadłościanu jest równa 24 cm, to tangens kąta nachylenia przekątnej prostopadłościanu do płaszczyzny podstawy wynosi:

A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{12}{13}$

4. Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego i wysokość jego podstawy są równe i wynoszą $\sqrt{3}$ cm. Pole powierzchni całkowitej tej bryły jest równe:

A. $5\sqrt{3}$ cm^2 B. $6\sqrt{3}$ cm^2 C. $7\sqrt{3}$ cm^2 D. $8\sqrt{3}$ cm^2

5. Przekątne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają długość 15 cm i 17 cm. Wysokość tego graniastosłupa jest równa:

A. 8 cm B. $\sqrt{33}$ cm C. 15 cm D. $\sqrt{43}$ cm

6. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt prostokątny. Wówczas spodkiem wysokości tego ostrosłupa jest:

A. punkt przecięcia się środkowych trójkąta w podstawie

B. wierzchołek kąta prostego trójkąta w podstawie

C. środek przeciwprostokątnej trójkąta w podstawie

D. środek okręgu wpisanego w podstawę tego ostrosłupa

7. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Niech α oznacza kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy. Wówczas:

A. $\alpha \in (30°, 45°)$ B. $\alpha = 45°$ C. $\alpha \in (45°, 60°)$ D. $\alpha = 60°$

8. Kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego do płaszczyzny podstawy jest równy 60°. Przekrój ostrosłupa płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny podstawy i zawierającą jedną z krawędzi bocznych jest trójkątem, którego pole wynosi $24\sqrt{3}$ cm^2. Wysokość trójkąta w podstawie ostrosłupa jest równa:

A. $12\sqrt{3}$ cm B. 12 cm C. $8\sqrt{3}$ cm D. 8 cm

9. Pewien ostrosłup ma 6 krawędzi. Trzy spośród tych krawędzi wychodzą z jednego wierzchołka, są do siebie parami prostopadłe i mają odpowiednio długość 3 cm, 4 cm, 5 cm. Objętość tego ostrosłupa wynosi:

A. $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ cm^3 B. $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ cm^3 C. 60 cm^3 D. 10 cm^3

10. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, którego bok ma długość 12 cm. Spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w jednym z wierzchołków podstawy. Ściana boczna ostrosłupa, o największym polu powierzchni, jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:

A. 6 cm B. 8 cm C. 18 cm D. 16 cm

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. Odcinek AB jest równoległy do płaszczyzny π i ma długość 21 cm. Prosta k przecina odcinek AB, jest prostopadła do płaszczyzny π i przebija tę płaszczyznę w punkcie M. Odległości punktu M od punktów A, B wynoszą odpowiednio 10 cm i 17 cm. Oblicz odległość odcinka AB od płaszczyzny π.

D 12. W sześcianie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ punkt P jest środkiem krawędzi B_1C_1, a punkt Q – środkiem krawędzi BB_1. Wykaż, że czworokąt $AQPD_1$ jest trapezem równoramiennym.

13. Jeżeli każdą krawędź sześcianu przedłużymy o 1 dm, to jego objętość powiększy się 125 razy. Oblicz długość krawędzi mniejszego sześcianu.

14. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $\sqrt{136}$ cm, a cosinus kąta nachylenia tej przekątnej do ściany bocznej jest równy $\frac{5}{\sqrt{34}}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

15. Objętość prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest równa 144 cm^3. Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 12 cm^2, a pole przekroju płaszczyzną (ABC_1D_1) wynosi $12\sqrt{10}$ cm^2. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu.

D 16. Graniastosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną, zawierającą krawędź boczną oraz wysokość podstawy, mającą z tą krawędzią punkt wspólny. Wykaż, że jeśli pole otrzymanego przekroju jest równe polu jednej z podstaw, to krawędź podstawy tego graniastosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi bocznej.

17. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym sinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej jest równy $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. Oblicz stosunek wysokości graniastosłupa do długości krawędzi podstawy.

18. Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest trapez prostokątny $ABCD$. Wysokość AD tego trapezu jest równa 4 cm, a długości jego podstaw wynoszą: $|AB| = 6$ cm, $|DC| = 3$ cm. Wiedząc, że wysokość graniastosłupa jest równa 12 cm, oblicz:

a) długości dwóch różnych przekątnych graniastosłupa,

b) cosinus kąta dwuściennego między płaszczyznami (ABC_1D_1) i $(ABCD)$.

19. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 192 cm^3. Pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną, zawierającą dwie przeciwległe krawędzie boczne, wynosi 48 cm^2. Oblicz:

a) długość krawędzi tego ostrosłupa,

b) cosinus kąta między dwiema przeciwległymi krawędziami bocznymi.

20. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 5 dm. Pole przekroju ostrosłupa płaszczyzną, zawierającą krawędź boczną i wysokość ostrosłupa, jest równe 45 dm^2. Oblicz:

a) sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,

b) tangens kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy,

c) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

21. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt, którego przekątne mają długość 16 cm i przecinają się pod kątem 30°. Objętość ostrosłupa wynosi 320 cm^3. Oblicz:

a) wysokość ostrosłupa,

b) sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,

c) odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej.

22. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego boki mają długość 13 cm, 14 cm, 15 cm. Wszystkie krawędzie boczne mają taką samą długość, równą $21\frac{1}{8}$ cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

23. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt, którego boki mają długość: 15 cm, 20 cm, 25 cm. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

24. Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego dwa boki mają długość 10. Cosinus kąta nachylenia dwóch ścian bocznych tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{5}{13}$. Oblicz:

a) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa,

b) tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy.

25. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym przyprostokątne mają długość: $|AC| = 10$ cm, $|BC| = 24$ cm. Spodkiem wysokości ostrosłupa jest wierzchołek C. Wiedząc, że wysokość tego ostrosłupa jest równa 24 cm, oblicz:

a) długość boków trójkąta ABS,

b) tangens kąta dwuściennego między płaszczyzną (ABS) i płaszczyzną podstawy.

26. Przekątne trzech różnych ścian prostopadłościanu mają odpowiednio długość: 5, $3\sqrt{17}$, $4\sqrt{10}$. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

27. Krawędź sześcianu ma długość 20. Sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki trzech różnych krawędzi, wychodzących z tego samego wierzchołka. Oblicz:

a) pole otrzymanego przekroju,

b) odległość płaszczyzny przekroju od punktu wspólnego tych krawędzi.

28. Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $720\sqrt{3}$ cm^3, a wysokość graniastosłupa jest równa 20 cm. Graniastosłup przecięto płaszczyzną, zawierającą krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz pole otrzymanego przekroju graniastosłupa tą płaszczyzną.

29. Podstawą ostrosłupa jest równoległobok, którego boki mają długość 6 cm i 16 cm, a jedna z przekątnych ma długość 14 cm. Spodkiem wysokości ostrosłupa

jest punkt przecięcia przekątnych podstawy. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 24 cm, oblicz:

a) objętość ostrosłupa, b) długości krawędzi bocznych.

30. Podstawa ostrosłupa jest rombem o przekątnych długości 8 cm i 6 cm. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 9 cm, oblicz:

a) długości boków ściany bocznej ostrosłupa,

b) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

31. Podstawa ostrosłupa jest wielokątem, którego obwód jest równy 100 cm, a pole wynosi 600 cm^2. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem. Wyznacz miarę tego kąta, wiedząc, że objętość ostrosłupa wynosi 2400 cm^3.

32. W czworościanie foremnym poprowadzono przekrój płaszczyzną, zawierającą wysokość podstawy i przechodzącą przez środek krawędzi bocznej, która nie ma punktu wspólnego z tą wysokością.

a) Wyznacz cosinus najmniejszego kąta tego przekroju.

b) Wiedząc dodatkowo, że pole tego przekroju jest równe $\frac{9\sqrt{11}}{4}$, oblicz długość krawędzi czworościanu.

D 33. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy jest równy α. Odległość spodka wysokości ostrosłupa od krawędzi bocznej wynosi d. Wykaż, że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{2d^2 \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + 1}}{\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}$.

D 34. Kąt dwuścienny między ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma miarę α, a kąt płaski między krawędziami bocznymi tego ostrosłupa ma miarę β. Wykaż, że $2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} = 1$.

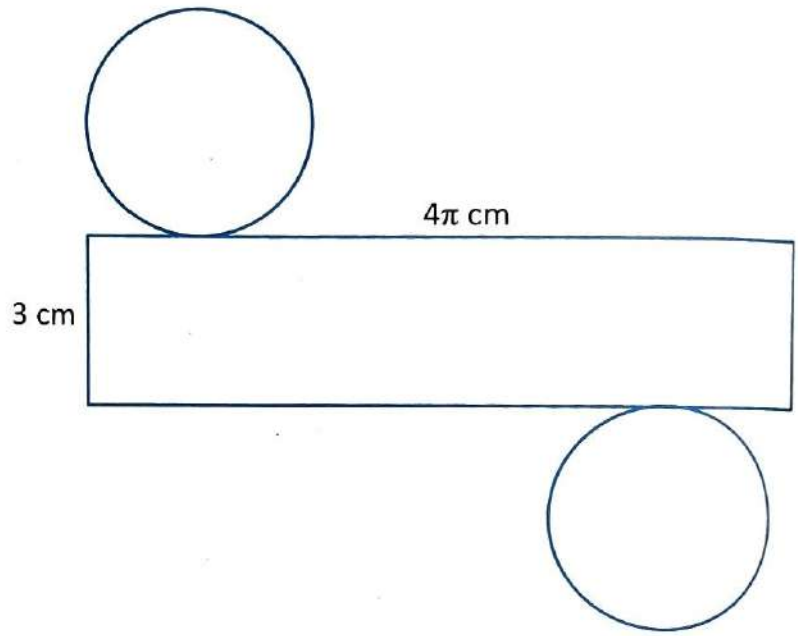
6. Geometria przestrzenna. Bryły obrotowe

Walec

6.1. Siatka walca składa się z prostokąta. Na podstawie siatki walca przedstawionej obok, podaj:

a) wysokość walca i promień podstawy walca,

b) pole powierzchni całkowitej walca.



6.2. Przekrój osiowy walca jest kwadratem, którego bok ma długość 4 cm.

a) Podaj promień i wysokość walca.

b) Narysuj siatkę tego walca w rzeczywistej wielkości.

6.3. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach 3 cm na 5 cm. Narysuj siatkę tego walca. Rozważ dwa przypadki.

6.4. Boki prostokąta mają długość 4 cm i 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca, otrzymanego w wyniku obrotu tego prostokąta wokół:

a) dłuższego boku b) krótszego boku.

6.5. Podstawa walca ma średnicę 1 dm. Wysokość jest równa obwodowi podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej walca.

6.6. Pole powierzchni bocznej walca jest pięć razy większe od sumy pól obu podstaw. Oblicz stosunek wysokości walca do promienia podstawy.

6.7. Prostokąt o obwodzie 14 dm obracamy wokół jednego z jego boków. Pole powierzchni całkowitej otrzymanego walca wynosi 28π dm^2. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca.

6.8. Długości boków prostokąta pozostają w stosunku 1 : 2. W wyniku obrotu tego prostokąta wokół dwóch różnych jego osi symetrii powstają dwa walce. Oblicz stosunek pól powierzchni całkowitych tych walców.

6.9. Stosunek pola przekroju osiowego do pola podstawy walca wynosi $4 : \pi$. Oblicz miarę kąta między przekątnymi przekroju osiowego walca.

6.10. Powierzchnia boczna walca jest prostokątem, którego jeden bok przystający do wysokości walca ma długość 20. Przekątna tego prostokąta tworzy z drugim bokiem kąt równy 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca.

6.11. Wysokość walca jest równa 8 cm. Oblicz objętość tego walca, jeśli:

a) średnica podstawy jest równa 24 cm,

b) przekątna przekroju osiowego ma długość 17 cm,

c) kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego do płaszczyzny podstawy jest równy 60°.

6.12. Oblicz objętość walca, którego pole powierzchni całkowitej jest równe 702π cm^2, a obwód przekroju osiowego wynosi 80 cm.

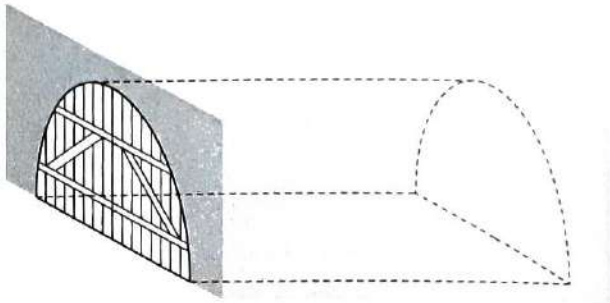
6.13. Przekątna prostokąta ma długość 30 cm. Pole tego prostokąta jest równe 432 cm^2. Oblicz objętość walca otrzymanego przez obrót tego prostokąta dookoła dłuższego boku.

6.14. Pole prostokąta jest równe 3 dm^2, a jego przekątne przecinają się pod kątem 60°. Oblicz objętość walca, powstałego w wyniku obrotu tego prostokąta wokół krótszego boku.

6.15. Prostokątny kawałek blachy o wymiarach 1,6 m długości i 0,8 m szerokości można zwinąć w rurkę na dwa sposoby. W pierwszym przypadku długość rurki będzie wynosić 1,6 m, zaś w drugim – 0,8 m. Oblicz stosunek objętości tych rurek.

6.16. Obwód podstawy blaszanej beczki w kształcie walca wynosi 157 cm. Wysokość beczki jest równa 1,1 m. W beczce zebrano 157 litrów deszczówki. Oblicz odległość lustra wody od brzegu beczki. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

6.17. Piwnica ma kształt połowy walca o długości 6 m i średnicy 5 m (zobacz rysunek obok). Oblicz kubaturę piwnicy oraz jej pole powierzchni całkowitej (sklepienie wraz z podłogą i pionową ścianą na końcu piwnicy). Wyniki zaokrąglij do całości.



6.18. Jeżeli zwiększymy wysokość pewnego walca o 4 cm, to jego objętość wzrośnie o 196π cm^3. Oblicz promień podstawy walca.

6.19. Pole powierzchni bocznej walca wynosi $36\sqrt{3}\pi$ cm^2. Przekątna przekroju osiowego walca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$. Oblicz:

a) promień podstawy i wysokość walca,

b) objętość tego walca.

6.20. Podstawa walca ma obwód równy 6π cm. Powierzchnia boczna walca jest prostokątem, którego przekątna tworzy z bokiem przystającym do wysokości walca kąt równy:

a) $30°$ b) $45°$ c) $60°$.

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość walca.

6.21. Objętość walca wynosi $\frac{54}{\pi}$ cm^3. Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca, wiedząc, że po rozwinięciu na płaszczyznę jest ona kwadratem.

6.22. Wysokość walca jest o 7 cm dłuższa od promienia. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej walca wynosi 120π cm^2, oblicz objętość tego walca.

D 6.23. Pole podstawy walca jest równe P, a pole jego przekroju osiowego wynosi S. Wykaż, że pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe $2P + \pi S$.

D 6.24. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość d i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wykaż, że objętość tego walca jest równa $0{,}25\pi \cdot d^3 \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$.

D 6.25. Pole powierzchni bocznej walca jest równe P, a objętość wynosi V. Wykaż, że tangens kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{P^3}{16\pi \cdot V^2}$.

6.26. Jeśli wysokość walca zwiększymy o k, to jego objętość wzrośnie o v. Oblicz promień podstawy tego walca.

6.27. Objętość walca jest równa 72π, zaś pole powierzchni całkowitej wynosi 66π. Wyznacz wysokość walca, wiedząc, że wyraża się ona liczbą naturalną.

6.28. Wysokość walca jest o 1 cm krótsza od promienia podstawy. Wyznacz tę wysokość, wiedząc, że objętość walca wynosi 448π cm^3.

6.29. Przez dowolny punkt A okręgu górnej podstawy walca poprowadzono przekrój płaszczyzną, zawierającą oś walca. W dolnej podstawie walca poprowadzono średnicę BC, prostopadłą do przekroju osiowego. Wiedząc, że promień podstawy walca jest równy r oraz $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, gdzie $\alpha \in (0°, 90°)$, oblicz wysokość walca.

6.30. Wysokość walca jest równa 6 cm, a promień podstawy wynosi 5 cm. Poprowadzono odcinek AB o długości 10 cm taki, że punkt A należy do okręgu górnej podstawy, punkt B należy do okręgu dolnej podstawy walca. Wyznacz długość najkrótszego odcinka, którego jeden z końców należy do osi obrotu walca, a drugi należy do odcinka AB.

Stożek

6.31. Dany jest promień podstawy r i długość tworzącej l stożka. Wyznacz kąt środkowy wycinka koła, będącego powierzchnią boczną stożka.

a) $r = 1$ dm, $l = 4$ dm b) $r = 3$ cm, $l = 15$ cm

6.32. Narysuj siatkę stożka o promieniu r i tworzącej długości l, jeśli:

a) $r = 3$ cm, $l = 4{,}5$ cm b) $r = 2$ cm, $l = 4$ cm.

6.33. Wysokość stożka jest równa h, a promień podstawy stożka wynosi r. Wyznacz kąt środkowy wycinka koła, tworzącego powierzchnię boczną stożka, jeśli:

a) $h = 4$ cm, $r = 3$ cm b) $h = 4\sqrt{5}$ cm, $r = 1$ cm.

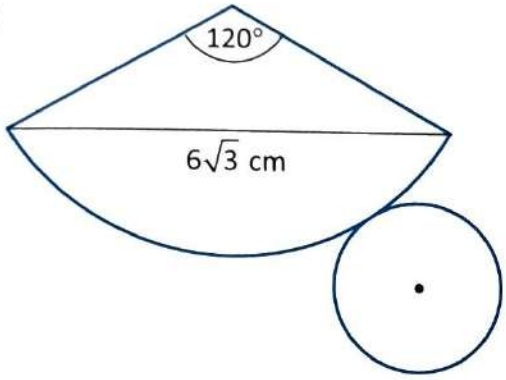
6.34. Narysuj przykładową siatkę stożka o promieniu r i wysokości h, jeśli:

a) $r = 3$ cm, $h = \sqrt{55}$ cm b) $h = r\sqrt{3}$

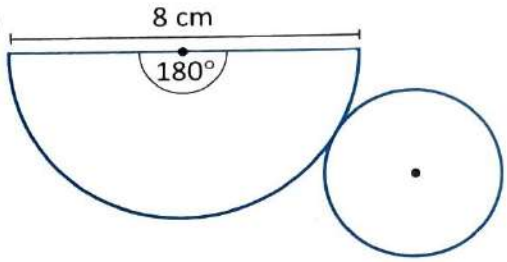
6.35. Promień wycinka kołowego o kącie 120° jest równy 3 m. Wycinek zwinięto i otrzymano powierzchnię boczną pewnego stożka. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka.

6.36. Rysunek poniżej przedstawia siatkę pewnego stożka. Na podstawie danych na rysunku wyznacz promień i wysokość tego stożka.

a)



b)



6.37. Tworząca stożka ma długość 20 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, jeśli:

a) tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°,

b) wysokość stożka jest równa 16 cm.

6.38. Pole powierzchni bocznej stożka wynosi 50π cm^2. Tworząca stożka tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Oblicz wysokość tego stożka.

6.39. Tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest równy 0,75. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej stożka jest równe 80π cm^2, oblicz długość tworzącej stożka.

6.40. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 6 dm i 8 dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, otrzymanej w wyniku obrotu tego trójkąta wokół:

a) krótszej przyprostokątnej b) dłuższej przyprostokątnej.

6.41. Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynosi 4 : 3, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Oblicz objętość bryły, którą otrzymamy, obracając ten trójkąt wokół:

a) krótszej przyprostokątnej b) dłuższej przyprostokątnej.

6.42. Oblicz pole powierzchni całkowitej P i objętość V stożka, którego tworząca ma długość l, promień podstawy r i wysokość h, jeśli:

a) $r = 5$ oraz $h = l - 1$ b) $h = r + 7$ oraz $l = h + 2$.

6.43. Średnica okręgu jest równa 29 cm. Przez jeden z jej końców poprowadzono cięciwę długości 20 cm. Cięciwa ta obraca się wokół danej średnicy. Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły.

6.44. Kąt rozwarcia stożka jest równy 120°. Wiedząc, że pole przekroju osiowego wynosi $9\sqrt{3}$ cm^2, oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej P tego stożka.

6.45. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym, którego pole wynosi 18 cm^2. Oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej P tego stożka.

6.46. Tworząca stożka tworzy z płaszczyzną podstawy kąt, którego sinus jest równy 0,96. Objętość stożka wynosi 392π cm^3. Oblicz:

a) promień podstawy i wysokość stożka,

b) pole powierzchni bocznej stożka.

6.47. Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 96π cm^2, a tworząca ma długość 10 cm. Oblicz objętość tego stożka.

6.48. Oblicz objętość stożka, którego pole powierzchni bocznej wynosi 65π cm^2, a wysokość jest równa 12 cm.

D 6.49. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Wykaż, że pole powierzchni bocznej tego stożka jest dwa razy większe od pola podstawy.

D 6.50. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki, których długości pozostają w stosunku 1 : 3. Wykaż, że stosunek objętości brył powstałych w wyniku obrotu tego trójkąta wokół dłuższej i krótszej przyprostokątnej jest równy $1:\sqrt{3}$.

6.51. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których tworząca ma długość 6. Wyznacz objętość tego stożka, którego przekrój osiowy ma największe pole.

6.52. Długość tworzącej stożka jest równa $\sqrt{10}$. Oblicz wysokość tego stożka, wiedząc, że jego objętość wynosi 3π.

D 6.53. Dany jest stożek o promieniu podstawy r i wysokości h. Wykaż, że sinus kąta rozwarcia tego stożka jest równy $\frac{2rh}{r^2+h^2}$.

6.54. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym. Promień podstawy stożka jest równy R. Oblicz pole przekroju tego stożka płaszczyzną, poprowadzoną przez dwie tworzące, jeśli kąt między tymi tworzącymi jest równy 30°.

6.55. Wysokość stożka i promień podstawy mają taką samą długość, równą R. Przez wierzchołek stożka poprowadzono płaszczyznę, która wyznacza na podstawie stożka cięciwę, odpowiadającą kątowi środkowemu 90°. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Kula i sfera

6.56. Oblicz pole powierzchni i objętość kuli o promieniu r, jeśli:

a) $r = 6$ cm b) $r = 15$ cm.

6.57. Korzystając z kalkulatora wyznacz w przybliżeniu promień kuli, której

a) pole powierzchni jest równe 1 m^2 b) objętość wynosi 1 litr.

6.58. Półkole ma pole równe P. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, powstałej w wyniku obrotu tego półkola wokół:

a) jego średnicy b) jego osi symetrii.

6.59. Pięć kulek ołowianych o promieniu 3 cm i n kulek ołowianych o promieniu 2 cm przetopiono i uformowano jedną kulę. Wiedząc, że pole powierzchni uzyskanej kuli jest równe 196π cm^2, oblicz n.

6.60. Stosunek pól powierzchni dwóch kul jest równy 9, a różnica promieni tych kul wynosi 10 cm. Oblicz te promienie.

6.61. Pola powierzchni dwóch kul różnią się o 644π cm^2, a promień jednej z tych kul jest dłuższy od promienia drugiej kuli o 7 cm. Oblicz pola powierzchni obu kul.

6.62. Objętość kuli K_1 jest 27 razy większa od objętości kuli K_2. Oblicz:

a) stosunek promieni obu kul b) stosunek pól powierzchni tych kul.

6.63. Objętości dwóch kul różnią się o 876π cm^3, a promienie tych kul różnią się o 3 cm. Wyznacz:

a) promienie tych kul, b) różnicę pól powierzchni obu kul.

6.64. Promień kuli ziemskiej jest w przybliżeniu równy 6300 km. Oblicz długość równoleżnika, odpowiadającego szerokości geograficznej:

a) 30° b) 45°.

Wynik podaj z dokładnością do 100 km.

6.65. Pewne miasto leży na równoleżniku 60° szerokości geograficznej północnej. Jaką drogę zakreśla to miasto w ciągu jednej godziny, na skutek obrotu Ziemi dookoła własnej osi? Zakładamy, że Ziemia wykonuje pełny obrót w ciągu 24 godzin.

6.66. Punkty A i B należą do sfery kuli o środku S. Kąt zawarty między odcinkami AB i BS jest równy 45°, a odcinek AB ma długość $6\sqrt{2}$ cm. Oblicz objętość i pole powierzchni tej kuli.

6.67. Kulę o promieniu 41 cm przecięto płaszczyzną w odległości 9 cm od środka kuli. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

6.68. Przekrój kuli płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny koła wielkiego kuli, jest kołem, którego pole jest o $12{,}25\pi$ dm^2 mniejsze od pola koła wielkiego. Oblicz odległość między płaszczyznami obu kół.

6.69. Dwie równoległe płaszczyzny przecinają kulę i wyznaczają przekroje o polach 49π i 4π. Odległość między tymi płaszczyznami jest równa 9. Oblicz pole powierzchni kuli.

6.70. Na powierzchni kuli o promieniu 7 cm znajdują się dwa przystające okręgi, które przecinają się w dwóch punktach, a ich płaszczyzny są do siebie prostopadłe. Odległość między wspólnymi punktami jest równa 2 cm. Wyznacz promień tych okręgów.

Bryły obrotowe – zadania różne

6.71. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 6 dm i 8 dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły, otrzymanej w wyniku obrotu tego trójkąta wokół przeciwprostokątnej.

6.72. Stosunek długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego wynosi 4 : 3, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Oblicz objętość bryły, utworzonej w wyniku obrotu tego trójkąta wokół przeciwprostokątnej.

6.73. Boki równoległoboku mają długość 6 cm i 4 cm, a kąt ostry tego równoległoboku jest równy 60°. Oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej P_c bryły, otrzymanej w wyniku obrotu tego równoległoboku wokół dłuższego boku.

6.74. Kąt ostry trapezu prostokątnego jest równy 45°. Podstawy trapezu mają długość 15 i 9. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły, utworzonej w wyniku obrotu tego trapezu wokół:

a) krótszej podstawy

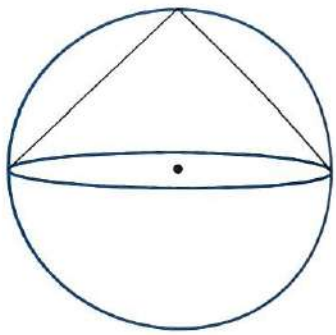
b) najkrótszego boku.

D 6.75. Kwadrat obracamy raz wokół osi symetrii, przechodzącej przez środki dwóch przeciwległych boków i drugi raz wokół osi symetrii, zawierającej przekątną kwadratu. Wykaż, że stosunek objętości pierwszej z otrzymanych brył do objętości drugiej jest równy $3:2\sqrt{2}$.

D 6.76. Kąt ostry rombu jest równy 30°. Wykaż, że objętość bryły, powstałej z obrotu tego rombu wokół jego boku, jest cztery razy mniejsza od objętości bryły, którą otrzymamy, obracając kwadrat o takim samym boku wokół boku.

6.77. W stożek, którego kąt rozwarcia jest równy 90°, wpisano kulę. Wyznacz objętość kuli, wiedząc, że tworząca stożka ma długość $2+\sqrt{2}$.

6.78. W kulę wpisano stożek w taki sposób, że podstawa stożka jest jednocześnie kołem wielkim kuli, jak na rysunku obok. Wyznacz stosunek objętości stożka do objętości kuli.



6.79. W kulę wpisano sześcian w taki sposób, że wszystkie wierzchołki sześcianu należą do sfery tej kuli. Oblicz stosunek objętości kuli do objętości sześcianu.

6.80. Kąt rozwarcia stożka jest równy 60°. Stożek wpisano w kulę o objętości równej 288π cm^3. Oblicz objętość stożka.

D 6.81. Na kuli opisano stożek, którego wysokość jest dwa razy dłuższa od średnicy kuli. Wykaż, że pole powierzchni całkowitej stożka jest dwa razy większe od pola powierzchni kuli.

6.82. Długość tworzącej stożka wynosi d, a promień podstawy jest równy R. Oblicz objętość kuli opisanej na tym stożku.

6.83. Stożek o wysokości H wpisano w kulę. Oblicz objętość kuli, wiedząc, że jest ona cztery razy większa od objętości stożka.

6.84. W czworokątnym ostrosłupie prawidłowym wysokość jest równa 8 cm, a krawędź podstawy ma długość 12 cm. Wyznacz promień r kuli wpisanej w ostrosłup oraz promień R kuli opisanej na tym ostrosłupie.

6.85. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt, którego boki mają długość: 6 cm, 8 cm i 10 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 24 cm. Wyznacz promień kuli, opisanej na tym graniastosłupie.

6.86. Dwie małe kulki o promieniach 2 cm i 3 cm są zawarte w jednej dużej kuli. Odległość między środkami małych kulek wynosi 6 cm. Oblicz promień dużej kuli, mającej możliwie najmniejszą objętość.

Podobieństwo figur w przestrzeni

6.87. Pole powierzchni całkowitej pierwszego sześcianu jest równe 37,5 cm^2. Objętość drugiego sześcianu wynosi 216 cm^3. Oblicz skalę podobieństwa pierwszego sześcianu do drugiego sześcianu.

6.88. Pole powierzchni pierwszej kuli jest 16 razy większe od pola powierzchni drugiej kuli.

a) Podaj skalę podobieństwa pierwszej kuli do drugiej kuli.

b) Ile razy objętość pierwszej kuli jest większa od objętości drugiej kuli?

6.89. Ostrosłup podzielono na dwie bryły płaszczyzną, równoległą do podstawy i przechodzącą przez środek wysokości ostrosłupa. Oblicz:

a) stosunek pola przekroju do pola podstawy danego ostrosłupa,

b) stosunek objętości otrzymanych brył.

6.90. Pole podstawy ostrosłupa jest równe 150 cm^2. Pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną równoległą do podstawy wynosi 54 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że odległość między płaszczyzną przekroju i podstawą ostrosłupa jest równa 14 cm.

6.91. Wysokość ostrosłupa jest równa 21 cm, a pole podstawy wynosi 1350 cm^2.

a) W jakiej odległości od podstawy znajduje się płaszczyzna przekroju, równoległa do płaszczyzny podstawy, jeśli pole tego przekroju jest równe 150 cm^2?

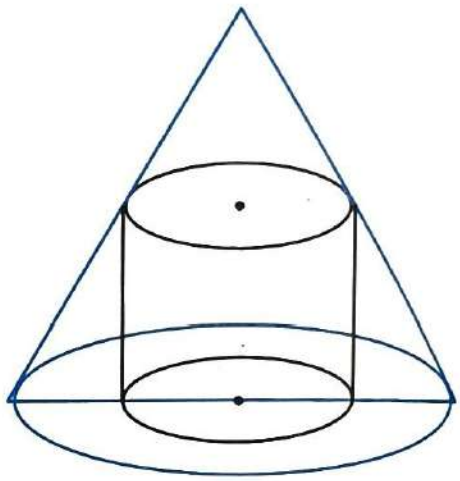
b) Oblicz objętość ostrosłupa odciętego tą płaszczyzną przekroju.

6.92. Wysokość stożka podzielono na cztery równe części. Przez te punkty podziału poprowadzono trzy płaszczyzny, równoległe do podstawy, które podzieliły stożek na cztery różne bryły. Wiedząc, że najmniejsza z tych brył ma objętość równą 1 litr, oblicz objętości pozostałych trzech brył.

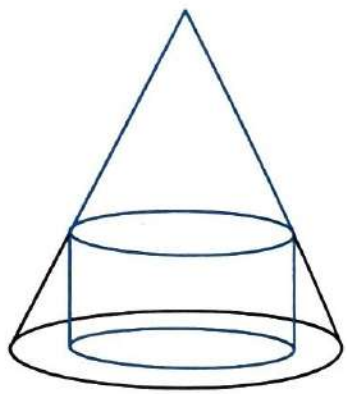
6.93. Pole przekroju płaszczyzną, równoległą do płaszczyzny podstawy stożka, jest o 36% mniejsze od pola powierzchni podstawy. W jakim stosunku ten przekrój dzieli objętość stożka?

6.94. Różnica promieni dwóch kul jest równa 6 cm, a różnica objętości tych kul wynosi 1248π cm^3. Wyznacz promienie tych kul. Jaka jest skala podobieństwa większej kuli do mniejszej?

6.95. W stożek wpisano walec w taki sposób, że jedna podstawa walca zawiera się w podstawie stożka, a okrąg drugiej podstawy walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka – jak na rysunku obok. Jaką część objętości stożka stanowi objętość walca, jeśli promień podstawy stożka jest dwukrotnością promienia podstawy walca?

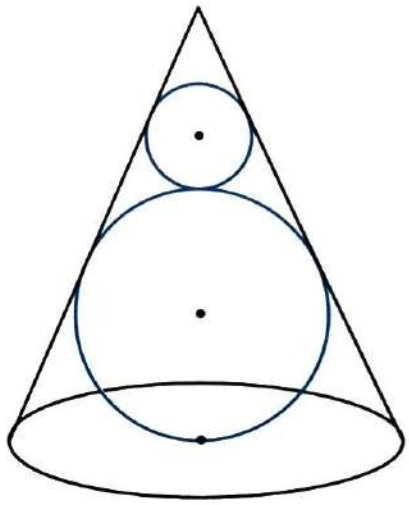


6.96. Z kawałka drewna w kształcie stożka wytoczono na tokarce bryłę, składającą się z walca i małego stożka o takiej samej podstawie. Kąt rozwarcia małego stożka jest taki sam, jak kąt rozwarcia początkowego stożka, zobacz rysunek obok. Wysokość otrzymanej bryły jest równa wysokości początkowego stożka, a stosunek promienia podstawy tego stożka do promienia podstawy walca wynosi 3 : 2. Oblicz, jaką część objętości początkowego stożka stanowią ścinki drewna.



6.97. Dany jest stożek o wysokości h i promieniu podstawy r. Oblicz długość krawędzi sześcianu wpisanego w stożek w taki sposób, że dolna podstawa sześcianu zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki górnej podstawy sześcianu należą do powierzchni bocznej stożka.

D 6.98. W stożek wpisano dwie kule, styczne zewnętrznie do siebie – jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli objętość większej kuli jest 27 razy większa od objętości drugiej kuli, to kąt rozwarcia stożka jest równy 60°.



Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

6.99. Rozpatrujemy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 48 cm. Wyznacz wymiary tego graniastosłupa, który ma największą objętość. Oblicz tę największą objętość.

6.100. Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany, których stosunek długości krawędzi w podstawie jest równy 2 i których objętość jest równa 72 litry.

a) Wyznacz funkcję, opisującą pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu w zależności od krótszej krawędzi podstawy.

b) Podaj wymiary tego prostopadłościanu, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze z możliwych.

6.101. Z drutu długości 120 cm konstruujemy prostokątną ramkę i obracamy ją wokół jej osi symetrii.

a) Wyznacz wymiary ramki, dla której objętość powstałej bryły jest największa z możliwych. Oblicz tę objętość oraz pole powierzchni bocznej bryły.

b) Podaj wymiary ramki, dla której pole powierzchni bocznej otrzymanej bryły jest największe z możliwych. Oblicz to największe pole powierzchni bocznej oraz objętość bryły.

c) Czy można skonstruować prostokątną ramkę tak, aby pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły było największe z możliwych? Odpowiedź uzasadnij.

6.102. Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni bocznej jest równe 12π cm^2.

a) Wyznacz promień podstawy i wysokość tego walca, którego przekątna przekroju osiowego ma najmniejszą długość.

b) Czy walec z punktu a) ma najmniejszą objętość? Odpowiedź uzasadnij.

6.103. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których tworząca ma długość 4 cm.

a) Napisz wzór funkcji opisującej objętość stożka w zależności od wysokości h. Na podstawie otrzymanego wzoru funkcji wyznacz wysokość h i promień podstawy stożka, którego objętość jest największa z możliwych. Podaj tę największą objętość.

b) Napisz wzór funkcji opisującej objętość stożka w zależności od promienia jego podstawy. Na podstawie otrzymanego wzoru funkcji wyznacz promień podstawy, dla którego objętość stożka jest największa z możliwych.

6.104. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których pole powierzchni bocznej jest równe $4\pi\sqrt{3}$ dm^2. Oblicz promień podstawy, długość tworzącej i wysokość tego stożka, którego objętość jest największa z możliwych.

6.105. Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 20.

a) Wyznacz wzór funkcji opisującej objętość ostrosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy.

b) Wyznacz wymiary ostrosłupa, wiedząc, że jego objętość jest największa z możliwych.

6.106. Rozpatrujemy ostrosłupy prawidłowe trójkątne, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24 cm. Wyznacz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, którego przekrój płaszczyzną prostopadłą do podstawy i zawierającą jedną z krawędzi bocznych ostrosłupa ma największe pole powierzchni.

6.107. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym, którego pole wynosi $9\sqrt{3}$ cm^2. W ten stożek wpisujemy walce w taki sposób, że jedna podstawa walca zawiera się w podstawie stożka, a okrąg drugiej podstawy walca jest zawarty w powierzchni bocznej stożka.

a) Wyznacz wzór funkcji opisującej objętość V walca w zależności od promienia r jego podstawy.

b) Oblicz największą możliwą objętość takiego walca.

6.108. Dany jest stożek o promieniu podstawy 6 i wysokości 8. W ten stożek wpisujemy prostopadłościany. Jedna podstawa prostopadłościanu zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki drugiej podstawy należą do powierzchni bocznej stożka. Stosunek długości krawędzi podstawy prostopadłościanu jest równy 3. Oblicz wymiary tego prostopadłościanu, którego objętość jest największa.

6.109. W kulę o promieniu R wpisujemy stożki. Wyznaczymy promień r podstawy i wysokość h tego ze stożków, który ma największą objętość.

6.110. W kuli o promieniu 3 umieszczamy ostrosłupy prawidłowe czworokątne w taki sposób, że wierzchołek ostrosłupa jest środkiem kuli, zaś wierzchołki podstawy należą do powierzchni kuli.

a) Napisz wzór funkcji opisującej objętość V ostrosłupa w zależności od długości x krawędzi jego podstawy.

b) Wyznacz największą możliwą objętość ostrosłupa.

Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Pole powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy 5 cm i wysokości 8 cm, jest równe:

A. 40 cm^2 B. 130π cm^2 C. 40π cm^2 D. 80π cm^2

2. Pole podstawy walca jest równe 9π dm^2, a pole przekroju osiowego wynosi 24 dm^2. Zatem objętość walca wynosi:

A. 36π dm^3 B. 32π dm^3 C. 30π dm^3 D. 24π dm^3

3. Wysokości dwóch walców są równe. Wiadomo, że drugi walec ma 4 razy większą objętość od pierwszego walca. Wówczas promień podstawy drugiego walca jest większy od promienia podstawy pierwszego walca:

A. dwukrotnie B. czterokrotnie C. ośmiokrotnie D. szesnastokrotnie

4. Kąt rozwarcia stożka jest równy 30°, a pole przekroju osiowego wynosi 4 dm^2. Tworząca stożka ma długość:

A. 2 dm B. 4 dm C. $2\sqrt[4]{3}$ dm D. $2\sqrt{3}$ dm

5. Stożek o objętości 800π ma wysokość równą 24. Tworząca stożka ma długość:

A. 10 B. 25 C. 26 D. 30

6. Tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest równy $1\frac{1}{3}$.

Niech P_b oznacza pole powierzchni bocznej, zaś P_c – pole powierzchni całkowitej tego stożka. Wówczas:

A. $P_c = 2P_b$ B. $P_c = 1{,}5P_b$ C. $P_c = \frac{4}{3}P_b$ D. $P_c = 1{,}6P_b$

7. Wysokość stożka jest równa $\sqrt{44}$, a promień podstawy – 10. Zatem kąt środkowy wycinka koła, tworzącego powierzchnię boczną stożka, ma miarę:

A. 180° B. 210° C. 240° D. 300°

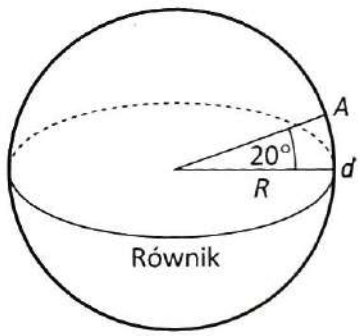
8. Dwa stożki są podobne. Pierwszy stożek ma objętość 27 razy większą od objętości drugiego stożka. Ile razy pole przekroju osiowego pierwszego stożka jest większe od pola przekroju osiowego drugiego stożka?

A. 3 razy B. 9 razy C. 27 razy D. 54 razy

9. Gdyby promień danej sfery był o 1 m dłuższy, to powierzchnia sfery byłaby większa o 20π m^2. Zatem promień danej sfery jest równy:

A. 1 m B. 2 m C. 3 m D. 4 m

10. Miasto A leży na równoleżniku 20° szerokości geograficznej północnej Jeżeli przyjmiemy, że Ziemia jest kulą o promieniu R, gdzie $R = 6300$ km oraz $\pi \approx 3$, to odległość d miasta A od równika (zobacz rysunek obok) jest w przybliżeniu równa:



A. 1050 km B. 2100 km

C. 3150 km D. 4200 km

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

11. Naczynie w kształcie walca o średnicy podstawy 6 cm napełniono częściowo wodą. Następnie do tej wody wrzucono metalową kulkę, która zanurzyła się całkowicie, podnosząc poziom wody w walcu o 0,5 cm. Wyznacz promień metalowej kulki.

12. Objętość walca jest równa 5π dm^2, a pole jego powierzchni całkowitej wynosi 13π dm^2. Wyznacz promień podstawy tego walca.

13. Pole powierzchni bocznej walca jest równe 10π dm^2. Promień podstawy walca jest o 4 dm dłuższy od jego wysokości. Oblicz objętość tego walca.

14. Wysokość walca jest równa 6 dm. Kąt między przekątnymi przekroju osiowego jest równy 60°. Oblicz objtość tego walca. Rozważ dwa przypadki.

15. Wysokość walca jest równa 16 cm, a promień podstawy 25 cm. Oblicz pole przekroju walca płaszczyzną równoległą do osi obrotu walca, poprowadzoną w odległości 24 cm od tej osi.

16. Tworząca stożka jest cztery razy dłuższa od promienia jego podstawy. Oblicz:

a) miarę kąta wycinka koła, tworzącego powierzchnię boczną stożka,

b) tangens kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy,

c) sinus kąta rozwarcia stożka, wykorzystując wzór: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

17. Powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła o promieniu 12 cm, a kąt środkowy tego wycinka wynosi 270°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

18. Stożek przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i dzielącą wysokość stożka w stosunku 1 : 2 – licząc od podstawy stożka. Oblicz stosunek objętości otrzymanych brył.

19. Sinus jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równy 0,96. Trójkąt obracamy wokół krótszej przyprostokątnej. Wiedząc, że objętość otrzymanej bryły wynosi 1344π cm^3, oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

20. Różnica długości boków równoległoboku jest równa 7 cm, a kąt ostry równoległoboku ma miarę 30°. Równoległobok obracamy wokół dłuższego boku. Oblicz objętość otrzymanej bryły, wiedząc, że jej pole powierzchni całkowitej wynosi 184π cm^2.

D 21. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 150°, a pole przekroju osiowego stożka wynosi 9 dm^2. Wykaż, że objętość tego stożka jest równa $9\pi\sqrt{2+\sqrt{3}}$ dm^3.

22. Krawędzie prostopadłościanu mają długość 4 cm, 6 cm, 12 cm. Oblicz objętość kuli opisanej na tym prostopadłościanie.

23. Dwa walce są podobne. Promienie tych walców różnią się o 6 cm, a wysokości walców – o 8 cm. Oblicz różnicę pól powierzchni całkowitych obu walców, wiedząc, że objętość jednego walca jest o 936π cm^3 większa od objętości drugiego walca.

24. Kulę o promieniu R przecięto płaszczyzną, oddaloną od środka kuli o $\frac{R}{2}$. Pole otrzymanego przekroju wynosi 27π cm^2. Oblicz objętość i pole powierzchni kuli.

D 25. Przez środek wysokości stożka poprowadzono prostą, równoległą do jednej z tworzących stożka. Wykaż, że jeśli tworząca tego stożka ma długość d, to długość odcinka, będącego częścią wspólną poprowadzonej prostej i danego stożka jest równa $\frac{3d}{4}$.

D 26. Tworząca stożka tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α. Stożek przecięto płaszczyzną, przechodzącą przez jego wierzchołek i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym β. Przekrój tą płaszczyzną jest trójkątem równoramiennym, w którym kąt między ramionami jest równy γ. Wykaż, że $\sin\alpha = \sin\beta \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$.

D 27. Na kuli opisano stożek, którego wysokość jest dwa razy dłuższa od średnicy kuli. Wykaż, że objętość stożka jest dwa razy większa od objętości kuli.

28. Wśród walców wpisanych w kulę o promieniu 5 cm znajduje się taki, którego pole powierzchni bocznej jest największe. Oblicz objętość tego walca.

D 29. W kulę o promieniu 6 cm wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny o największej objętości. Wykaż, że ten ostrosłup jest czworościanem foremnym, którego krawędzie mają długość $4\sqrt{6}$ cm.

30. W kulę o promieniu R wpisano stożek, którego tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.

Odpowiedzi do zadań

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie

1.1. a) $-3\frac{3}{8}$ b) -16 c) $1\frac{7}{9}$ d) $2\frac{2}{5}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{32}$ f) $1+\frac{2}{3}\sqrt{2}$

1.2. a) 1,1 b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{8}{27}$ d) $1\frac{1}{5}$ e) $1\frac{1}{4}$ f) $2\sqrt[3]{2}$

1.3. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 27 d) 16 e) 5 f) 3

1.4. a) $2^{\frac{17}{6}}$ b) $5^{\frac{13}{4}}$ c) $6^{\frac{17}{5}}$ d) $3^{-\frac{19}{6}}$ e) $2^{\frac{1}{4}}$ f) $10^{-\frac{12}{5}}$

1.5. a) 2 b) 4 c) $10\frac{1}{2}$ d) 125

1.6. a) 2 b) 2 c) 5 d) $7-4\sqrt{3}$

1.9. a) 464,15888 b) 0,00046 c) 46,41589 d) 2,15443

1.10. a) $a = 1110$, $b = 800$, o 38,75% b) $x = 1{,}5$, $y = 4$, o 62,5%

1.11. a) $x > y$ b) $x < y$ c) $x < y$ d) $x = y$ e) $x < y$ f) $x > y$

1.12. a) 3 b) 2

1.13. a) -16 b) -1 c) 1 d) 1

1.14. a) $x \in \{-2, 2\}$ b) $x = 1$ c) $x \in \left\{1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right\}$ d) $x = -4\frac{1}{2}$

1.15. a) $x \in \left(-\infty, 2-\sqrt{3}\right)$ b) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle 1\frac{1}{2}, +\infty\right)$ c) $x \in (-4, -1)$

d) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{2\sqrt{3}\right\}$

1.16. a) $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$; *wskazówka:* Doprowadź wyrażenie do postaci $\frac{b+2a}{ab}$.

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *wskazówka:* Doprowadź wyrażenie do postaci $\frac{a+b}{2ab}$.

1.21. a) $\frac{-4x^3}{\left(x^2-1\right)^2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1\}$ b) $9x$, $x \in \boldsymbol{R}_+ - \left\{1, 1\frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{1}{xy}$, $x \in \boldsymbol{R}_+$, $y \in \boldsymbol{R}_+$ d) $5x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$, $x \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$

1.24. $x = 2, r = 1\frac{1}{2}$

1.25. $x \in \{0, 3\}$

Funkcja wykładnicza i jej własności

1.27. a) $t < y < x < z$ b) $y < z < t < x$ c) $y < x < t < z$ d) $z < y < x < t$

1.28. a) $m > n$ b) $m > n$ c) $m < n$ d) $m > n$

1.29. a) dodatnia b) ujemna c) ujemna d) dodatnia e) ujemna f) ujemna

1.30. a) $f(x) = 4^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ c) $f(x) = \left(2\sqrt{2}\right)^x$

1.31. a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $2\sqrt{2}$ c) -3 d) $x \in (-\infty, -1)$

1.32. a) $g(x) = 16^x$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $x \in \langle 0, 1)$

1.33. a) $x = 1$ b) $x = -1$ c) $x = 0$

1.34. a) $x \in (-\infty, 2)$ b) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty)$ c) $x \in \langle -1, 0)$

1.38. a) $ZW = \left\langle -\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right\rangle$ b) $ZW = \left\langle 2\frac{2}{3}, 6\right\rangle$ c) $ZW = \langle 1, 81\rangle$

d) $ZW = \left\langle \frac{1024}{243}, \frac{65536}{6561}\right\rangle$ e) $ZW = \langle 256, 512\rangle$ f) $ZW = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{243}, \frac{\sqrt{3}}{27}\right\rangle$

1.39. a) $ZW = \left(-2, -1\frac{3}{4}\right)$ b) $ZW = \left(-\infty, 1\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ c) $ZW = \langle 3, +\infty)$

d) $ZW = \langle 0, +\infty)$ e) $ZW = (-2, 0)$ f) $ZW = \left\langle -\infty, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right\rangle \cup (0, +\infty)$

Przekształcenia wykresów funkcji wykładniczych

1.41. a) $g(x) = 3^{x-2}$; przesunięcie równoległe o 2 jednostki w prawo, czyli translacja o wektor $\vec{u} = [2, 0]$

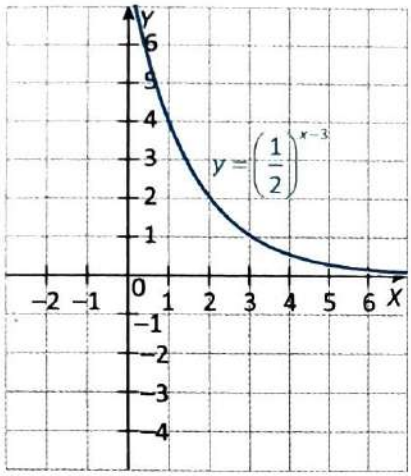
b) $g(x) = 1 - 3^{-x}$; symetria środkowa wykresu funkcji f względem punktu $O(0, 0)$, następnie przesunięcie równoległe otrzymanego wykresu o 1 jednostkę do góry, czyli translacja o wektor $\vec{u} = [0, 1]$

c) $g(x) = -\left(3^{x+1} + 3\right)$; np. przesunięcie równoległe wykresu funkcji f o 1 jednostkę w lewo i 3 jednostki do góry, czyli translacja o wektor $\vec{u} = [-1, 3]$, następnie symetria osiowa otrzymanego wykresu względem osi OX

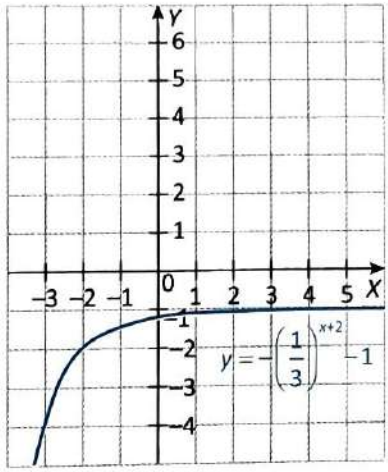
d) $g(x) = 3^{4-x} + 5$; np. przesunięcie równoległe wykresu funkcji f o wektor $\vec{u} = [-4, 5]$, następnie symetria osiowa otrzymanego wykresu względem osi OY

1.42. a) $h(x) = -3^x - 1$ b) $s(x) = 3^{x+2}$ c) $t(x) = 3^{x-2} - 1$ d) $p(x) = 3^{-x} + 2$

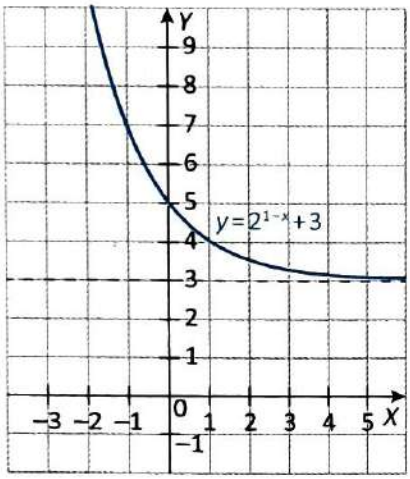
1.43. a)



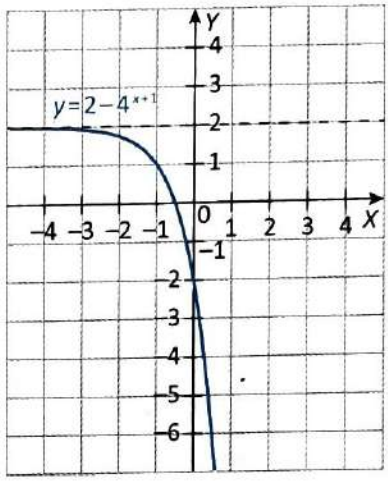
b)



c)



d)



1.44. a) $g(x)=2^{-x-2}-1$ b) $\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ c) tak

1.45. a) $g(x)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ b) -80 c) $x\in(-2,+\infty)$

1.46. a) $g(x)=2-\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$, czyli $g(x)=-4^{x-3}+2$ c) $x\in(-\infty,3\rangle$

1.47. a) $h(x)=-5^{x-7}-3$ b) $h(x)=7^{-5-x}+4$

1.48. a) *wskazówka:* $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-4$ b) 25 c) $x\in(-\infty,-2)$

1.49. a) *wskazówka:* $g(x)=2^x-2$ b) $x\in\langle 1,+\infty)$ c) tak

1.50. a) $x=3$ b) równanie sprzeczne c) $x=-1$ d) $x\in\boldsymbol{R}$ e) $x=-1$ f) $x=4$

1.51. a) $x=1$ b) $x\in\{1,3\}$ c) $x\in\{-3,-1\}$

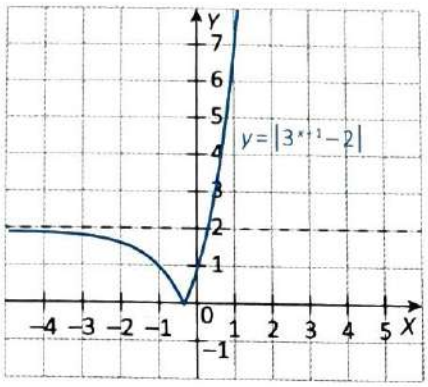
1.52. a) $x\in(-\infty,1\rangle$ b) $x\in(-1,+\infty)$ c) $x\in(-\infty,1\rangle$ d) $x=0$ e) $x\in\langle -3,+\infty)$
f) $x\in\boldsymbol{R}$

1.53. a) $x\in(-\infty,3\rangle$ b) $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ c) $x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle 2,+\infty)$

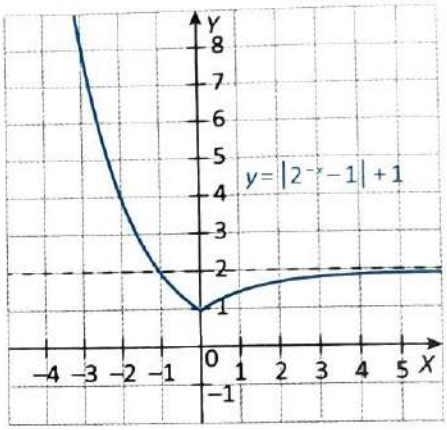
1.54. a) $a=3,\ b=\frac{1}{9}$ b) $x\in(-\infty,3\rangle$

1.55. a) $a=8,\ c=4$ b) $h(x)=2^{2-x}+1$, czyli $h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+1$ c) $x=1$

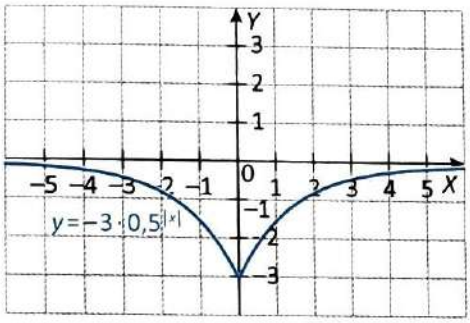
1.56. a)



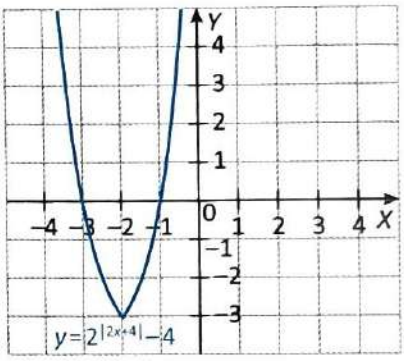
b)



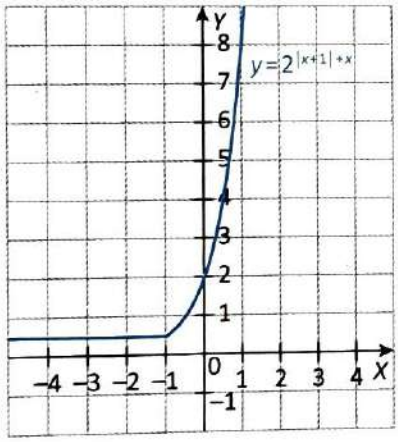
c)



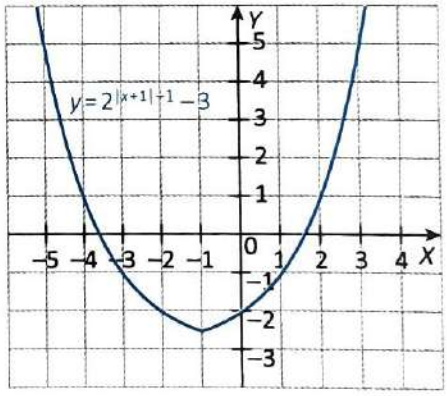
d)



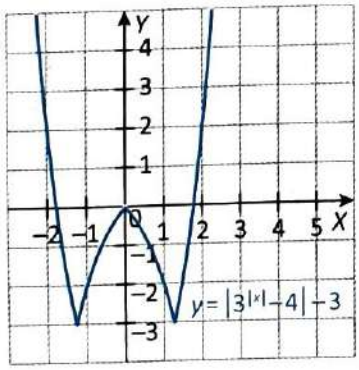
1.57. a) $y=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-1)\\ 4^{x+\frac{1}{2}}, & \text{jeśli } x\in\langle -1,+\infty)\end{cases}$



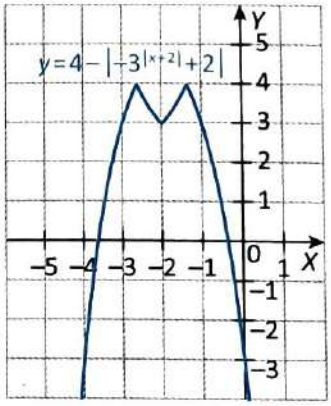
b) $y=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-3, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-1)\\ 2^{x}-3, & \text{jeśli } x\in\langle -1,+\infty)\end{cases}$



c) $y=\left|3^{|x|}-4\right|-3$



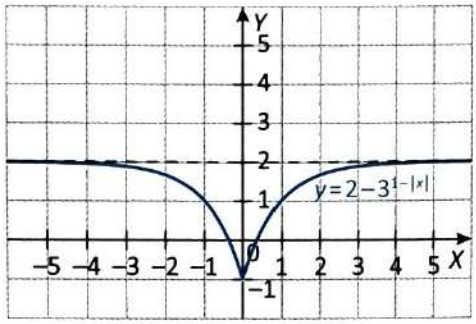
d) $y=4-\left|-3^{|x+2|}+2\right|$



1.58. a) $x \in \{-2, -1\}$ b) $x \in \{-1, 1\}$ c) $x = 1$

1.59. a) $x \in (-1, 1)$ b) $x \in \langle -1, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 1, +\infty)$

1.60. a) $k = -1$ b) $g(x) = 2 - 3^{1-|x|}$, $x \in \boldsymbol{R}$



Równania wykładnicze

1.61. a) $x = 3$ b) $x = 2$ c) równanie sprzeczne d) $x = -1$ e) $x = -3$ f) $x = 0$

1.62. a) $x = -3$ b) $x = 2$ c) $x = \frac{2}{3}$ d) $x = \frac{1}{9}$ e) $x \in \left\{0, 1\frac{1}{2}\right\}$ f) $x = \frac{2}{3}$

1.63. a) $x \in \{-2, 4\}$ b) $x \in \{-8, 4\}$ c) równanie sprzeczne

d) $x = 3$ e) $x \in \left\{-1\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$ f) $x \in \{3, 5\}$

1.64. a) $x = 1$ b) $x \in \{-2, 2\}$ c) $x \in \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$ d) $x \in \{-1, 4\}$ e) $x = 2$

f) równanie sprzeczne

1.65. a) $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, 1\right\}$ b) $x \in \left\{-\sqrt{5}, -1, \sqrt{5}\right\}$ c) równanie sprzeczne

d) $x = \frac{1}{2}$ e) $x \in \{-1, 2\}$ f) $x \in \left\{-2\frac{1}{2}, -1, 1\right\}$

1.66. a) $x = 1$ b) $x \in \{2, 5\}$ c) $x \in \{-1, 4\}$ d) $x \in \{-1, 1\}$ e) $x \in \left\{-2, 2, 2\frac{1}{2}\right\}$

f) $x \in \left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}, 2\right\}$

1.67. a) $x = 2$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $x = -1\frac{1}{2}$ d) równanie sprzeczne

1.68. a) $x \in \{-3, 3\}$ b) równanie sprzeczne c) $x = -2$ d) $x = -\frac{1}{2}$

1.69. a) $x = 1$ b) równanie sprzeczne c) $x = 0$ d) $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ e) $x = \frac{-2}{3}$;

wskazówka: Zastosuj wzór na różnicę sześcianów.

f) $x = 1$; *wskazówka:* Zastosuj wzór na sumę sześcianów.

1.70. a) $x \in \{-1, 1\}$; *wskazówka:* Zauważ, że $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, następnie podstaw $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$. b) $x \in \{-2, 2\}$

1.71. a) $x=1\frac{1}{2}$ b) $x=-2$ c) $x=-6$ d) $x=-2$ e) $x=4\frac{1}{2}$ f) $x=-\frac{2}{3}$

1.73. a) $n=10$ b) $n=4$

1.74. a) $x=4$ b) $a_n=8n-4, n \in \mathbf{N}_+$ c) $S_{10}=400$

1.75. a) $x=1$ b) $q=1\frac{1}{2}$ c) $b_n=8\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n, n \in \mathbf{N}_+$

1.76. a) $x=3$ b) $x=-1$

1.77. a) $x=1\frac{2}{3}$ b) $x \in \{-7, 8\}$ c) $x=-3$ d) $x \in \{-2, 2\}$

1.78. a) $x=2$ b) $x=-\frac{1}{2}$ c) $x \in (-\infty, -2\rangle$

1.79. a) $x=2$ b) $x \in \{0, 2\}$

1.80. a) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$; *wskazówka:* Dane równania najpierw pomnóż stronami, a następnie podziel stronami.

c) $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$; *wskazówka:* Podstaw $3^x=a$, $3^y=b$.

Nierówności wykładnicze

1.81. a) $x \in (-\infty, -4)$ b) $x \in \langle -1, +\infty)$ c) $x \in \mathbf{R}$ d) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right\rangle$

e) $x \in \left(-\infty, -1\frac{1}{7}\right)$ f) nierówność sprzeczna

1.82. a) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle -1, +\infty)$ b) $x \in \left(-\frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}\right)$ c) $x=2$ d) $x \in \left\langle -5\frac{1}{7}, -2\frac{6}{7}\right\rangle$

1.83. a) $x \in \left(-2, \frac{1}{3}\right)$ b) $x \in \mathbf{R}$ c) $x \in \left(-1\frac{1}{2}, 5\right)$ d) $x \in \mathbf{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ e) $x \in \left(-2, \frac{1}{3}\right)$

f) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

1.84. a) $x \in (-\infty, -1)$ b) $x \in (-7, +\infty)$ c) nierówność sprzeczna d) $x \in \mathbf{R}-\left\{1\frac{1}{3}\right\}$

e) $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ f) $x \in \mathbf{R}$

1.85. a) $x \in (-\infty, -1)$ b) $x \in (2, +\infty)$ c) $x \in \langle -3, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, 5\rangle$

1.86. a) $x \in (-2, 0)$ b) $x \in \left(-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ c) $x \in \langle -1, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

1.87. a) $x \in (-\infty, 5\rangle$ b) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ c) nierówność sprzeczna

d) $x \in (-\infty, 1)$ e) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty\right)$ f) $x = \frac{1}{3}$

1.88. a) $x \in \left\langle \frac{2}{3}, +\infty\right)$ b) $x \in (-3, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, 0)$ d) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right\rangle$

e) $x \in \boldsymbol{R}$ f) $x \in (-\infty, 4)$

1.89. a) $n \in \{1, 2, 3\}$ b) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

1.92. a) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 6, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(1\frac{1}{2}, +\infty\right)$ c) $x \in (-\infty, 2)$

d) $x \in \left(-\infty, -2\frac{1}{2}\right)$

1.93. a) $x = 2$ b) $x \in \langle -3, 5\rangle$ c) $x \in \langle 2, +\infty)$ d) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (8, +\infty)$

1.94. a) $x \in (-\infty, 0)$ b) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ c) $x \in (-2, 1)$ d) $x \in \left(0, 1\frac{1}{2}\right)$

1.95. a) $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}, +\infty\right)$ c) $x \in (1, +\infty)$

d) $x \in \langle 0, +\infty) \cup \{-2\}$ e) $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$ f) $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

1.96. a) $x \in \langle -2, 0)$ b) $x \in (-\infty, 1\rangle$

1.97. $(-\infty, 2\rangle$

1.98. $\langle 2, +\infty)$

1.99. *wskazówka:* Wykaż, że zbiorem rozwiązań nierówności $16^x + 64 > 65 \cdot 4^x$ jest suma przedziałów: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Zastosowanie własności funkcji wykładniczej w zadaniach

1.101. a) równanie nie ma rozwiązań, gdy $m \in (-\infty, 5)$, ma jedno rozwiązanie, gdy $m = 5$, ma dwa rozwiązania, gdy $m \in (5, +\infty)$

b) równanie nie ma rozwiązań, gdy $m \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$, ma jedno rozwiązanie, gdy $m \in \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\} \cup \langle -2, 2\rangle$, ma dwa rozwiązania, gdy $m \in \left(-\sqrt{5}, -2\right) \cup \left(2, \sqrt{5}\right)$

c) równanie nie ma rozwiązań, gdy $m \in (-1, 1)$, ma jedno rozwiązanie, gdy $m \in \{-1, 1\}$, ma dwa rozwiązania, gdy $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

1.102. a) $k \in \left(-3\frac{1}{2}, 12\right)$ b) $k \in \left(1\frac{1}{2}, +\infty\right)$ c) $k \in (-\infty, 0)$

1.103. a) $m \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty)$ b) $m \in (0, +\infty)$

1.104. a) $k \in (-\infty, -2)$ b) $k \in (-\infty, -5) \cup \{4\}$ c) $k \in \left(-\infty, -1\right\rangle \cup \left(1\frac{2}{3}, +\infty\right)$

1.105. a) $a \in (-\infty, 0\rangle \cup \{2\}$ b) $a \in (-\infty, 0\rangle$

1.106. *wskazówka:* Doprowadź równanie do postaci $(2^x - 2) \cdot (x^2 - 4) = 0$.

1.107. *wskazówka:* $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$; rozpatrz trzy przypadki: I. $(2x - 3)^2 \geqslant 1$, II. $0 < (2x - 3)^2 < 1$ oraz III. $(2x - 3)^2 = 0$

1.108. *wskazówka:* Dokonaj odpowiedniego podstawienia i rozwiąż najpierw nierówność wielomianową.

1.109. a) $x \in \left\{-\pi, \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$; *wskazówka:* $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

b) $x \in \left\{\frac{-4\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$; *wskazówka:* $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2 x + 1$

1.110. a) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{\alpha : \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ b) $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$;

wskazówka: $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\cos x} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x}{\sqrt{2}\cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{2\cos x} = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{tg}\, x)$

Test sprawdzający do rozdziału 1.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	C	D	A	D	B	B	A	C	B	C

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

11. a) 0,64 b) $-5\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{3}$ d) 25

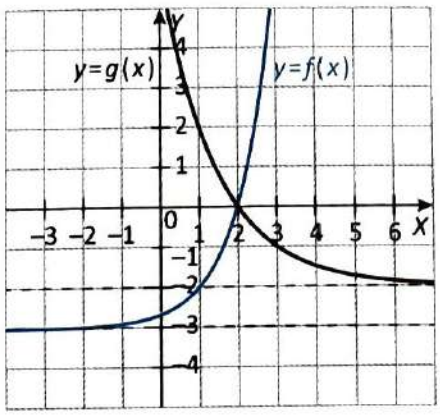
12. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

14. $\frac{25}{16}$

16. 7

19. a) $-\frac{1}{2}$ b) 12 c) $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ d) $g(x) = 4 - 2^{x+\frac{3}{2}}$, $x \in \boldsymbol{R}$

20. $a = -9$ a)



b) $x \in (2, +\infty)$

21. a) $x \in (-\infty, -1\rangle$ b) $a = \frac{1}{4}$, $b = 2\frac{7}{8}$ c) $7\frac{7}{8}$ d) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 2\frac{7}{8}$, $x \in \mathbf{R}$

22. a) $a = 2$, $b = -7$ b) $x \in (-\infty, 5)$

23. a) $x = 6\frac{1}{2}$ b) $x \in \left(-\infty, \frac{3}{13}\right)$ c) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

24. a) $M(t) = 0{,}8^t \cdot 50$, $t \geqslant 0$ b) po trzech latach

25. a) $x \in \left\{-1\frac{1}{2}, 1\right\}$ b) $x \in \left\{-1, \frac{-1}{3}\right\}$ c) $x \in \{-2, -1, 2\}$ d) $x = -2$

e) $x \in \{-3, 1\}$ f) $x = 1\frac{1}{3}$

26. a) $x \in (-\infty, 4)$ b) $x \in \mathbf{R}$ c) $x \in (-\infty, -2)$ d) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 1, +\infty)$

e) $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ f) $x \in (0, +\infty)$

27. a) $x = 0$ b) $x \in \{0, 2\}$

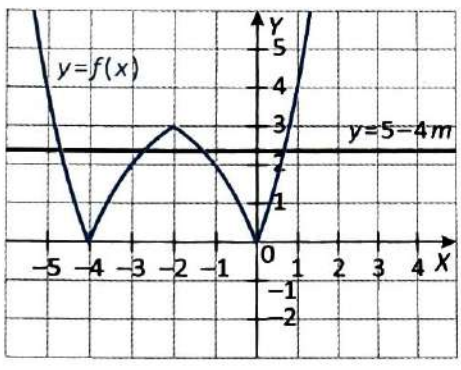
28. a) $x \in (-4, -1)$ b) $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

29. $x \in \langle 2, +\infty)$

32. a) $D = \mathbf{R} - \{2\}$, $ZW = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$ b) $D = \mathbf{R}$, $ZW = \langle 2, 4\rangle$

34. a) $x = 2$ c) $x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

35. a) $x \in (-\infty, 0\rangle$ b) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$

36. 

$m \in \left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}\right)$

37. $p \in \left(-2, \frac{1}{12}\right\rangle$

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm – powtórzenie wiadomości

2.1. a) 7 b) -1 c) 0 d) -3 e) 2 f) 3 g) $\frac{1}{2}$ h) $-\frac{1}{4}$

2.2. a) 7,5 b) $-1\frac{1}{6}$ c) $-2\frac{1}{3}$ d) 6,5 e) $-4\frac{1}{3}$ f) $-5\frac{7}{9}$ g) $1\frac{7}{12}$ h) $5\frac{3}{5}$

2.3. a) $k=\log_A \frac{B+1}{t}$ b) $p=\log_A \frac{t}{B}+k$ c) $t=\log_p \frac{4B}{2A+kB}$ d) $A=\left(\sqrt{p}\right)^B$
e) $t = 10^{A+k}-B$ f) $A = 0{,}1^t$

2.4. a) 4 b) -2 c) -4 d) 1 e) 2 f) -15

2.5. a) $\log_2 10$ b) $\log 0{,}03$ c) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{2}$ d) $\log_2 25\sqrt[3]{2}$ e) $\log_{\frac{1}{4}} 6$ f) $\log_{81} 13{,}5$

2.6. a) 2500 b) $62\frac{1}{2}$ c) $2\frac{1}{4}$ d) 18 e) 0,8 f) 37,5

2.7. a) 2 b) 3 c) 1 d) 9 e) 2 f) 1

2.8. a) $x=\frac{-5}{6}$ b) $x=\frac{-1}{7}$ c) $x=-5$ d) $x=-1$

2.9. a) 3 b) 0 c) 1 d) 20 e) 9 d) 0

2.10. a) -6 b) 21 c) -6 d) 4

2.11. a) 1 b) 1 c) $\log_5 6$ d) $\log_2 \frac{5}{3}$ e) $\log_3 18$ f) $\log^2_{\frac{1}{2}} 5+3\log_{\frac{1}{2}} 5+9$

2.12. $-\frac{1}{2}$

2.13. 9

2.14. $\frac{1}{3}$

2.26. a) *wskazówka:* Wykaż, że $b_n=\frac{n-2}{3}$ b) $\frac{2}{9}$

2.27. 4

Funkcja logarytmiczna – powtórzenie i uzupełnienie wiadomości

2.29. a) $x \in (0, 2)$ b) tak, należy

2.30. a) 0,5 b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.31. $a=\frac{1}{4}$ a) $\frac{1}{32}$ b) $1\frac{1}{2}$

2.32. $a = 2$ a) $x \in (2, +\infty)$ b) $x \in \langle 4, 8\rangle$

2.33. a) $y < x < z < t$ b) $z < y < x < t$

2.34. a) $k = 1$ b) $k = -2$ c) $k = 0$ d) $k = -2$ e) $k = 1$ f) $k = -1$ g) $k = 2$ h) $k = -3$

2.35. a) ujemna b) zero c) ujemna d) dodatnia

2.36. a) $x \in (-6, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 2\rangle$ c) $x \in (-\log_3 2, +\infty)$ d) $x \in (2, +\infty)$

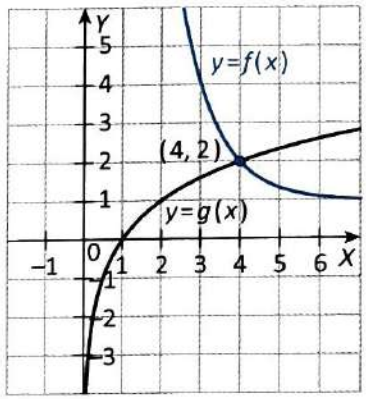
2.37. a) $x > y$ b) $x < y$ c) $x > y$ d) $x > y$

2.38. a) $b = -2$

2.39. $r + m = 5$

2.40. a) $k = -1$, $p = 2$ b) $\frac{1}{2}$

2.41. a) $a = 2$ b) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (0, 4)$



2.42. a) $D_f = (-5, +\infty)$ b) $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, 4)$ c) $D_f = (0, 1) \cup (1, 3)$

2.43. a) $D = (0, 1)$ b) $D = \boldsymbol{R} - \left\{-1\frac{1}{2}\right\}$ c) $D = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ d) $D = (0, +\infty)$ e) $D = (1, 4)$ f) $D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2.44. a) $D = (-1, 0) \cup (0, 2)$ b) $D = (-\infty, 5) - \left\{1, 1\frac{1}{2}, 2\right\}$ c) $D = \left(-1, 2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}, 3\right)$ d) $D = \left(4\frac{1}{2}, +\infty\right)$ e) $D = (3, 4) \cup (4, +\infty)$ f) $D = \left(\frac{\pi}{6}, 1\right) \cup (1, 2)$

2.45. a) nie są równe, bo $D_f = (2, +\infty)$, $D_g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ b) są równe c) nie są równe, bo $D_f = \boldsymbol{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $D_g = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ d) są równe

2.48. a) $k \in \left(\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}\right)$ b) $k \in \left(-1\frac{1}{2}, -1\right)$

2.49. a) $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{2}{5}} 4\right)$, największa liczba całkowita to -2, bo $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} < 4 < \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

b) $x \in \left(-\infty, \log_{3\sqrt{5}} 4\right)$, największa liczba całkowita to 0

c) $x \in \left(\log_{36} \frac{1}{3}, +\infty\right)$, najmniejsza liczba całkowita to 0 d) $x \in \left(\log_{\frac{1}{6}} 8, +\infty\right)$, najmniejsza liczba całkowita to -1

2.50. *wskazówka:* Wyznacz największą wartość funkcji $y = x^2 + 4x + 4$, gdzie $x \in \langle -1, 2 \rangle$; następnie skorzystaj z monotoniczności funkcji f.

2.51. *wskazówka:* Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = x - \frac{ex^2}{4}$, gdzie $x \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{e} \right\rangle$; następnie skorzystaj z monotoniczności funkcji $y = \ln t$, $t > 0$.

2.52. a) $m \in \langle 0, 1)$ b) $m \in \left(-\infty, -4\frac{2}{3}\right) \cup \langle 2, +\infty)$

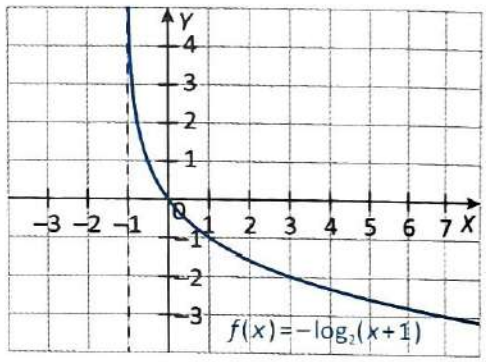
Przekształcenia wykresów funkcji logarytmicznych

2.53. *wskazówka:* a) $f(x) = \log_3 x + 2$, $D_f = (0, +\infty)$ b) $f(x) = -\log_2 x + 3$, $D_f = (0, +\infty)$ c) $f(x) = \log_{0,5}[(-x) \cdot 2]$, skąd $f(x) = \log_{0,5}(-x) - 1$, $D_f = (-\infty, 0)$ d) $D_f = (-2, +\infty)$ e) $D_f = (-\infty, 1)$ f) $f(x) = \log_2(x - 3) + 2$, $D_f = (3, +\infty)$

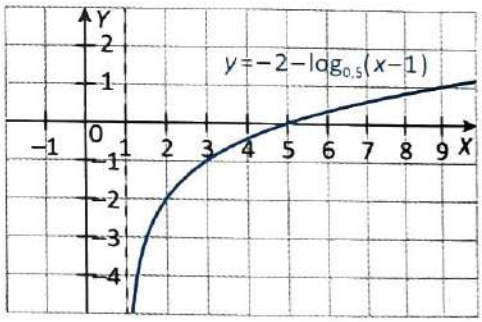
2.54. a) $D_f = (5, +\infty)$ b) 9 c) -3

2.55. a) $(0, -2)$ b) $f(6) = -3$ c) $x \in (-3, 6)$

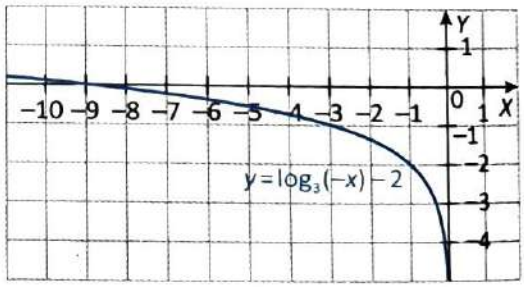
2.56. a) tak, jest b) $x \in (-1, 0)$ c) $x \in (3, +\infty)$



2.57. a) $x = 9$ b) $x \in \langle 2, 9)$



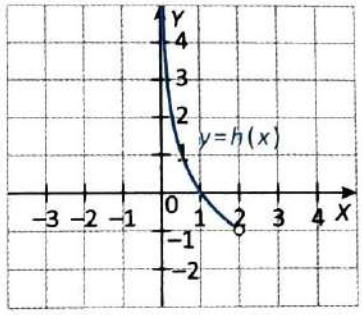
2.58. $D_h = (-\infty, 0)$ a) $x \in \langle -3, 0)$ b) tak, należy



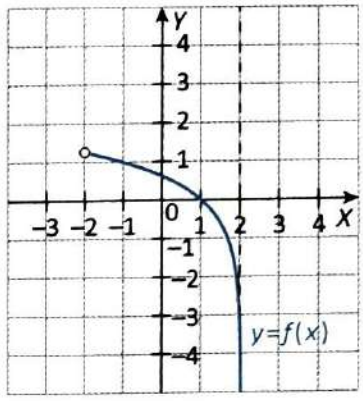
2.59. a) $g(x) = \log_2(x - 1) - 3$, $D_g = (1, +\infty)$ b) $x = 5$

2.60. a) $g(x) = 2 - \log_{\frac{1}{2}} x$, $x \in (0, +\infty)$ b) $x \in \langle 2, 8 \rangle$

2.61. a) $D_h = (0, 2)$, $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ b) $ZW = (-1, +\infty)$



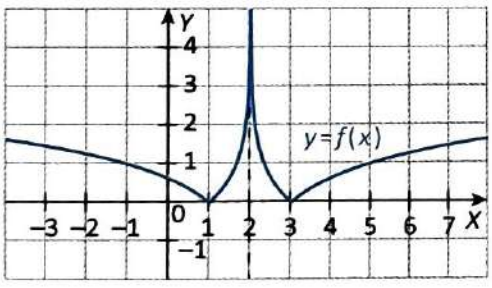
2.62. a) $f(x) = \log_3(2-x)$, $D_f = (-2, 2)$ b) $x \in (-2, -1)$

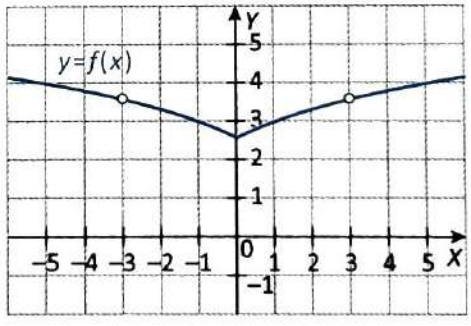


2.63. a) $x = 3$ b) $x = -1$
c) $x \in \{-4, -1\}$ d) $x = 3$

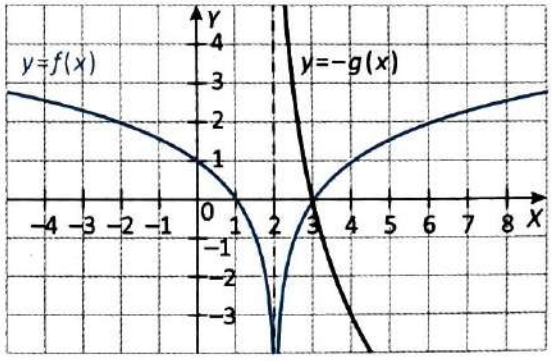
2.64. a) $x \in \langle 4, +\infty)$ b) $x \in (2, +\infty)$ c) $x \in (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-9, -1)$

2.65. *wskazówka:* a) $f(x) = 2\log_3|x|$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$
b) $f(x) = 2\log_4|x+1|$, $x \in \mathbf{R} - \{-1\}$
c) $f(x) = \frac{1}{2}\left|\log_2(x+4)\right|$, $x \in (-4, +\infty)$ d) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}|x| - 2$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$
e) $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{3}}|x-2|\right|$, $x \in \mathbf{R} - \{2\}$ f) $f(x) = \log_2(3+|x|)+1$, $x \in \mathbf{R} - \{-3, 3\}$





2.66. a) $D_f = \mathbf{R} - \{2\}$, $D_g = (2, +\infty)$
b) $f(x) < -g(x) \Leftrightarrow x \in (2, 3)$
wskazówka: Dziedzina nierówności jest równa $D_f \cap D_g$.



2.67. a) $D_f = \mathbf{R} - \{3\}$, $D_g = (-\infty, 3)$ b) *wskazówka:* $f(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} |x-3|$ c) $ZW_h = \{1\}$

2.68. a) $x \in \{1, 3\}$ b) $x \in \{-1, 1\}$ c) $x = 4$ d) $x \in \{-1, 1\}$

2.69. a) $x \in (0, 9)$ b) $x \in (3, 7) \cup (7, +\infty)$ c) $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, 0)$
d) $x \in \langle -5, 0) \cup (0, 5\rangle$

2.70. a) $f(x) = |x|$, $D = \mathbf{R} - \{0\}$, $ZW = (0, +\infty)$
b) $f(x) = |x-1|$, $D = \mathbf{R} - \{1\}$, $ZW = (0, +\infty)$
c) $f(x) = 2$, $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $ZW = \{2\}$
d) $f(x) = -2$, $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $ZW = \{-2\}$

Równania logarytmiczne

2.71. a) $D = (1, +\infty)$, $x = 33$ b) $D = \left(-2\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $x = 2$ c) $D = (-\infty, 5)$, $x = -59$

d) $D = \left(-\infty, 1\frac{1}{2}\right)$, $x = -16\frac{1}{2}$ e) $D = \mathbf{R} - \{7\}$, $x \in \{5, 9\}$

f) $D = \mathbf{R} - \{-2\}$, $x \in \{-3, -1\}$

2.72. a) $D = (0, +\infty)$, $x = \frac{1}{8}$ b) $D = (-\infty, 2)$, $x = 1\frac{2}{3}$ c) $D = (-1, +\infty)$, $x = \frac{-4}{5}$

d) $D = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$, $x = -4\frac{3}{4}$ e) $D = \mathbf{R}$, $x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$ f) $D = \mathbf{R}$, równanie sprzeczne

2.73. a) $D = \mathbf{R}$, $x \in \{-2, 0\}$ b) $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $x \in \{-3, 3\}$

c) $D = \left(-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$, $x \in \{-1, 1\}$ d) $D = \mathbf{R} - \{-2\}$, $x \in \{-4, 0\}$

e) $D = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, $x \in \{0, 4\}$ f) $D = (-1, 5)$, $x \in \{1, 3\}$

2.74. a) $D = \mathbf{R}$, $x \in \{0, 4\}$ b) $D = \mathbf{R} - \{0\}$, $x \in \left\{-6\frac{1}{4}, 6\frac{1}{4}\right\}$

c) $D = (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$, $x \in \{-32, 26\}$ d) $D = (1, 9)$, równanie sprzeczne

e) $D = \mathbf{R}$, $x = -7$ f) $D = (-1, 2)$, $x = \frac{1}{2}$

2.75. a) $D = \mathbf{R}_+ - \{1\}$, $x = 3$ b) $D = \mathbf{R}_+ - \{1\}$, $x = 9$ c) $D = \mathbf{R}_+ - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $x = \frac{1}{8}$

d) $D = \mathbf{R}_+ - \{5\}$, równanie sprzeczne e) $D = \mathbf{R} - \{-1, 0, 1\}$, $x \in \{-6, 6\}$

f) $D = \mathbf{R} - \{0, 1, 2\}$, $x \in \left\{1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\right\}$

2.76. a) $D = \left(1\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$, $x = 4$ b) $D = (-\infty, 2) \cup (2, 3)$, $x = 0$

c) $D = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, $x = 1$ d) $D = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, równanie sprzeczne

e) $D=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, $x=3$ f) $D=(-\infty,1)\cup(1,2)$, równanie sprzeczne

2.77. a) $D=\mathbf{R}_+$, $x=3$ b) $D=\mathbf{R}_+$, równanie sprzeczne c) $D=(2,3)\cup(3,+\infty)$, równanie sprzeczne d) $D=\mathbf{R}-\{0\}$, $x\in\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ e) $D=(-7,4)\cup(4,5)$, $x=-1$

f) $D=\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, $x\in\{-2,2\}$

2.78. a) $x=3$ b) $x=16$ c) $x=-0{,}9$ d) $x=-3\frac{2}{3}$ e) $x=64$ f) $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$

2.79. a) $x=4$ b) $x=33$ c) $x\in\left\{\frac{1}{81},\sqrt{3}\right\}$ d) $x\in\left\{-4\frac{2}{3},-2\right\}$ e) $x=2$ f) $x=2$

2.80. a) $D=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$, $x=1$ b) $D=(3,+\infty)$, $x=4$ c) $D=(-1,1)$, $x=\frac{-1}{3}$

d) $D=(0,+\infty)$, $x=6$ e) $D=(0,1)$, równanie sprzeczne

f) $D=\left(\frac{20}{21},+\infty\right)$, $x\in\left\{1\frac{1}{2},10\right\}$

2.81. a) $x\in\left\{\frac{1}{25},\frac{1}{5},5\right\}$ b) $x=\frac{1}{e}$ c) $x\in\left\{1\frac{1}{2},3\right\}$ d) $x\in\{100,1000\}$

e) $x\in\left\{\frac{1}{e^2},\frac{1}{e},e,e^2\right\}$ f) równanie sprzeczne

2.82. a) $x\in\{7,15\}$ b) $x=8$ c) $x=6$ d) $x=4$ e) $x=1$ f) $x=10$

2.83. a) $D=(-1,0)\cup(0,+\infty)$, ; *wskazówka:* Zapisz równanie w postaci $2\log_2|x|-2=2\log_2(x+1)$ b) $x\in\{-4,2\}$ c) $x\in\left\{\frac{13}{21},2\right\}$ d) $x\in\{-5,3\}$

2.84. a) $x=25$ b) $x=1$ c) $x\in\{-2,1\}$ d) $x\in\left\{\frac{1}{4},4\right\}$ e) $x\in\left\{\frac{1}{9},9\right\}$

f) $x\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{4},2\right\}$

2.85. a) $x=-9$ b) $x\in\left\{-2\frac{2}{5},-8\frac{1}{4}\right\}$ c) $D=(0,+\infty)$, $x\in\left\{\frac{1}{10},10\right\}$; *wskazówka:* Dane równanie można zlogarytmować stronami: $\log x^{2\log^3 x-\frac{3}{2}\log x}=\log\sqrt{10}$. Następnie otrzymujemy równanie $\left(2\log^3 x-\frac{3}{2}\log x\right)\cdot\log x=\frac{1}{2}$.

d) $x=100$ e) $x\in\left\{\frac{1}{9},3\right\}$ f) $x\in\left\{\frac{1}{5},25\right\}$

2.86. a) $x = 0$ b) $x = 0$ c) $x = -2$ d) $x = 2\frac{1}{2}$ e) $x \in \{-1, 1\}$ f) $x \in \left\{\frac{1}{25}, 5\right\}$

2.87. a) $(2, 18), (18, 2)$ b) $(100, 10)$ c) $(2, 2)$ d) $(2, 2), \left(8, \frac{1}{8}\right)$ e) $(2, 6)$ f) $(8, 5)$

2.90. a) $x = 13$ b) $x \in \left\{\frac{-\sqrt{15}}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}\right\}$

2.91. a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ d) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Nierówności logarytmiczne

2.92. a) $x \in (3, 4)$ b) $x \in \langle -5, 3) \cup (3, 11\rangle$ c) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$

d) $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right\rangle$ e) $x \in \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ f) $x \in (-23, 2)$

2.93. a) $x \in (-2, 0) \cup (0, 1)$ b) $x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ c) $x \in \langle -2, -1) \cup (-1, 0\rangle$
d) $x \in (3, 5)$ e) $x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$ f) $x \in (1, 2\rangle$

2.94. a) $x \in \left(0, 1\frac{3}{5}\right)$ b) $x \in \left\langle \frac{2}{3}, 1\right)$ c) $x \in (3, +\infty)$ d) $x \in \langle 2, +\infty)$

2.95. a) $x \in \left(\frac{1}{8}, 2\right)$ b) $x \in (2, 4)$ c) $x \in (2, 4) \cup (16, +\infty)$ d) $x \in \left(0, \frac{1}{16}\right) \cup (1, +\infty)$

e) $x \in (0, 1) \cup (9, +\infty)$ f) $x \in (0, 1) \cup (e, +\infty)$

2.96. a) $x \in \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup (9, +\infty)$ b) $x \in \left\langle \frac{1}{5}, 5\right\rangle$ c) $x \in \left(-3, -\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6}, 3\right)$

d) $x \in \left(4, 7\frac{1}{5}\right\rangle$

2.97. a) $D = (-5, -4) \cup (-4, -2) \cup \langle 2, 3\rangle$ b) $D = \left\langle -2\sqrt{2}, 2\right) \cup \left(2, 2\sqrt{2}\right\rangle$

c) $D = \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ d) $D = \left\langle \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left\langle \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

e) $D = \left\langle 5\frac{1}{2}, 8\right)$ f) $D = (-e, 0)$

2.98. a) $x \in (3, +\infty)$ b) $x \in (0, 1) \cup \left(\sqrt{3}, 9\right)$ c) $x \in (-1, 0) \cup (3, 4)$
d) $x \in (0, 2) \cup (4, +\infty)$

2.99. a) $x \in \left(\frac{1}{9}, \sqrt{3}\right\rangle$ b) $x \in \left(1\frac{1}{2}, 5\right)$ c) $x \in \left\langle\sqrt{10}, 100\right)$

2.100. a) $x \in (0, 1) \cup (4, +\infty)$ b) $x \in (1, 3)$ c) $x \in (-\infty, -5)$

d) $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1\frac{1}{2}, +\infty\right)$

2.101. a) $x \in \langle 1, 4\rangle$ b) $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ c) $x \in (-2, -1) \cup (3, +\infty)$

d) $x \in (1, 2) \cup (64, +\infty)$

2.102. a) $x \in (1, \log_2 5\rangle$ b) $x \in \left(\log_3 \sqrt{2}, \log_3 \frac{5}{2}\right)$ c) $x \in (0, 1\rangle$ d) $x \in (-\infty, -2)$

2.103. a) $x \in \left(\frac{1}{4}, 4\right\rangle$ b) $x \in \langle 4, 8\rangle$

2.104. a) $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$ b) $x \in \left\langle\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\rangle$ c) $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right\rangle$

d) $x \in \left\langle\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\rangle \cup \left\langle\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\rangle$

Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

2.105. a) 5,7 g b) po 20 dniach c) po 5 dniach i 6 godzinach d) 14,1 g

2.106. a) 50°C b) 12,5°C c) po 20 min d) po 23 min i 13 s

2.107. a) 230,18 zł b) po 13 kwartałach

2.108. a) Korzystniejsza jest pierwsza oferta o 180,69 zł b) o 3 kwartały

2.109. 0,04 cm

2.110. ok. 4,3

2.111. 24 862 048 cyfr; *wskazówka:* Zauważ, że liczba pierwsza ma tyle samo cyfr co liczba $2^{82589933}$.

2.112. a) $1{,}30159 \cdot 10^{171}$ b) $8{,}78837 \cdot 10^{801}$ c) $3{,}86637 \cdot 10^{23}$ d) $4{,}60544 \cdot 10^{132}$

2.113. b) 12,1 g c) po 596 dniach i 10 godzinach

Test sprawdzający do rozdziału 2.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	**B**	**A**	**A**	**B**	**C**	**D**	**C**	**D**	**A**	**C**

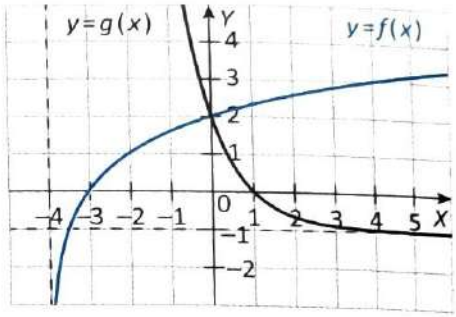
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. a) 4 b) 0,5

12. $c < a < d < b$

13. a) $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$ c) $x=4$ d) $x\in(0,1)$

14. a) $a=4$, $b=-1$, $D_f=(-4,+\infty)$, $D_g=\mathbf{R}$
b) $f(-3)=0$, $g(1)=0$
d) $x\in(-3,1)$



15. a) 90°C b) 60°C c) $t=-5\cdot\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{T}{90}\right)$, 10 minut

16. a) $x=3$ b) $x=-1$

17 a) $x\in\langle 7,+\infty)$ b) $x\in(-2,-1\rangle$

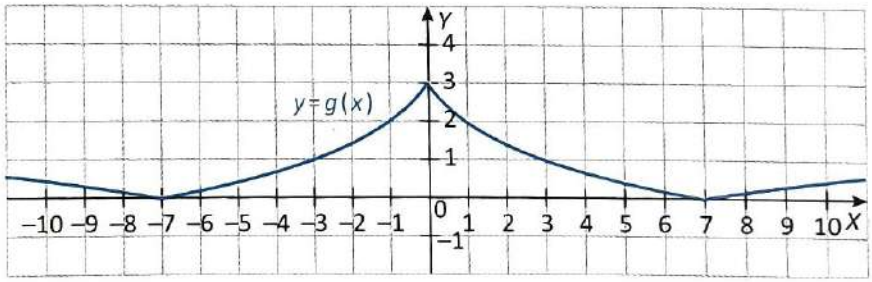
18. a) $x\in\{-1,4\}$ b) $x=12$ c) $x=2$ d) $x=-7$ e) $x\in\{3,9\}$ f) $x\in\left\{2\frac{1}{100},102\right\}$

26. a) $x=5$ b) $a_n=5n-8$, $n\in\mathbf{N}_+$ c) 423

27. a) $x=2$ lub $x=-1\frac{1}{2}$ b) $b_n=(-1)^{n+1}$, $n\in\mathbf{N}_+$ c) $b_{10}=512$

33. wskazówka: Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dwóch liczb dodatnich.

35. a) $a=-1$, $b=3$, b) $g(x)=\left|3-\log_2\left(|x|+1\right)\right|$, $D_g=\mathbf{R}$, $ZW_g=\langle 0,3\rangle$



36. a) $x\in\left\{\sqrt[5]{5},5\right\}$ b) równanie sprzeczne

37. a) $x\in\left(-\infty,-2\frac{3}{8}\right)$ b) $x\in\left\langle 2^{-\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)\cup\left(1,2^{\sqrt{2}}\right\rangle$ c) $x\in\left(0,\frac{1}{81}\right\rangle\cup\langle 81,+\infty)$

d) $x\in\left(-1\frac{1}{3},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,4)$

38. $m=1$

39. $m\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$

40. $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

3. Elementy statystyki

Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

3.2. diagram kolumnowy

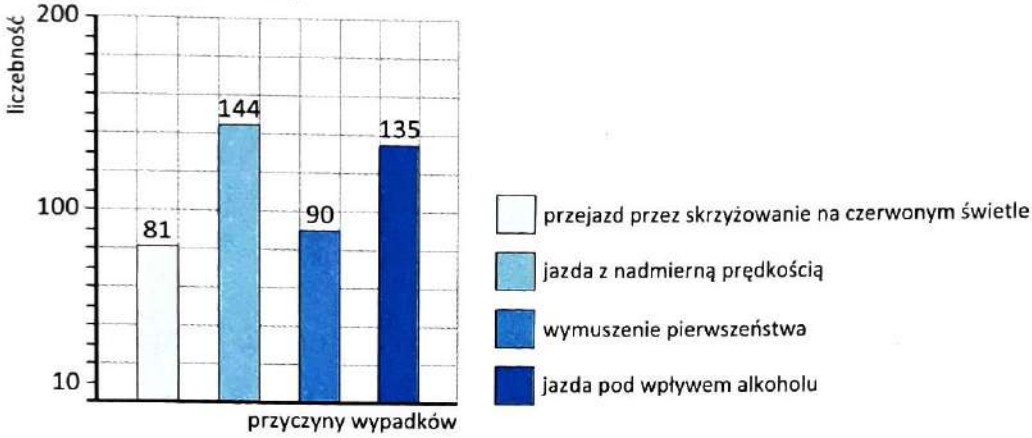


diagram częstości względnych



3.3. a) 25 osób

b) diagram słupkowy

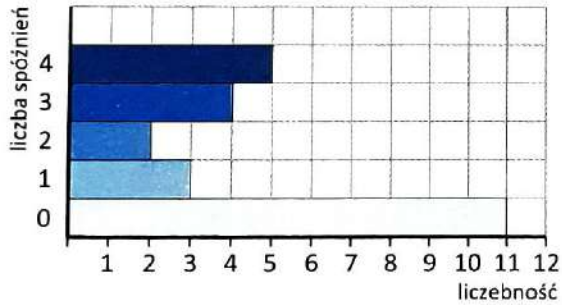
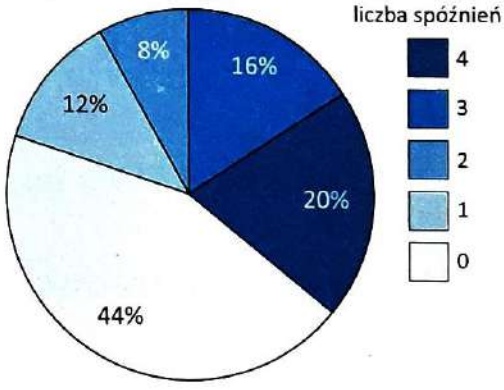


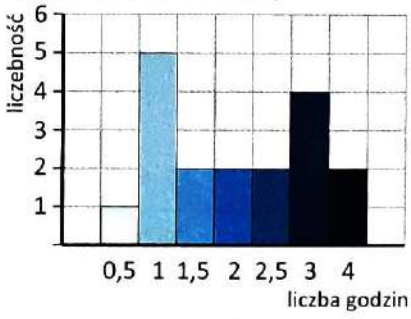
diagram kołowy procentowy



3.4. a) tabela

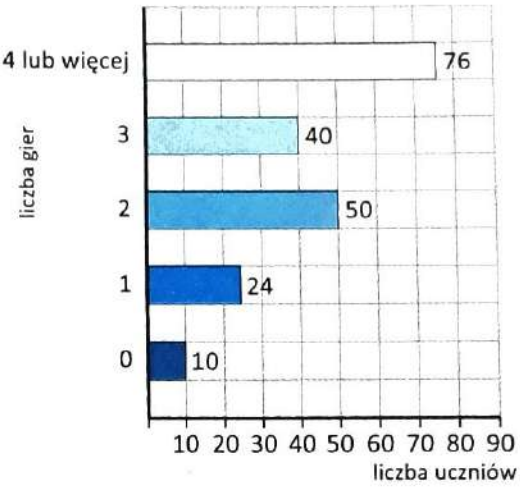
Liczba godzin	Liczebność
0,5	3
1	5
1,5	2
2	2
2,5	2
3	4
4	2

diagram kolumnowy



b) 60%

3.5. a) diagram słupkowy



b) 116 uczniów

3.6. a) 56% b) samochodem służbowym 4 osoby, na motocyklu lub na rowerze 9 osób

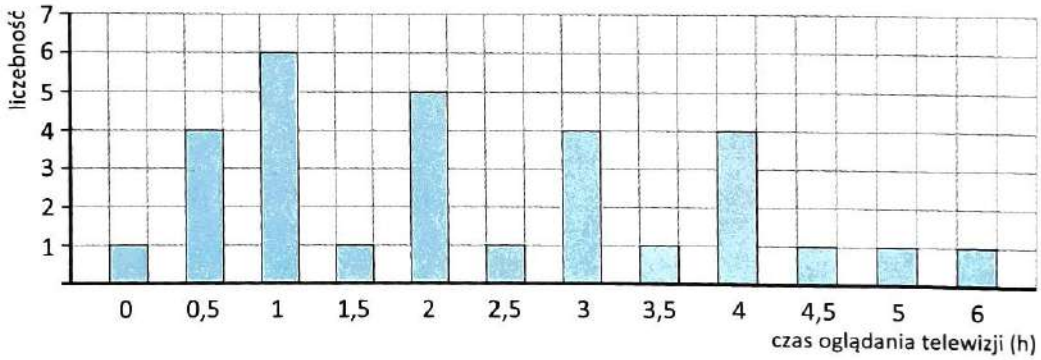
3.7. a) 30 b) 70 c) $2\frac{1}{3}$

Średnia z próby

3.8. $x = 5$

3.9. 48 lat

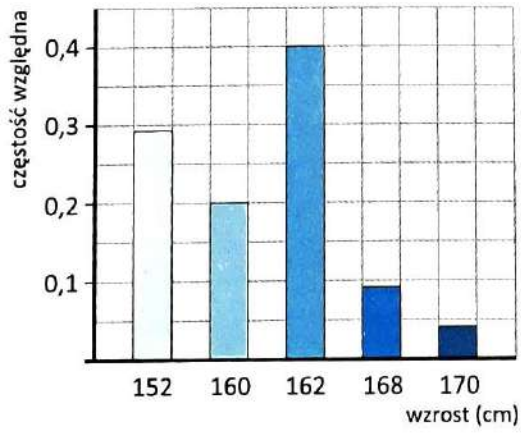
3.10. a) diagram kolumnowy



b) 2,3 godziny c) 43,3% d) 2 osoby

3.11. a) 159,6 cm

b) diagram częstości względnych:



c)

Wzrost (cm)	152	160	162	168	170
Liczebność	21	15	30	6	3

d) 54 dziewczynki

3.12. a) 2,5 b) ok. 49%

3.13. a) 0,81 b) 46 osób c) o $22\frac{2}{9}\%$

3.14. a) 56 b) 31% c) średnia w mieście A to 1,2 średnia w mieście B to 1,12 d) 1,16

3.15. a) 20 pracowników, 40% b) średnia I zmiany to 1,5 sztuki wadliwej, zaś średnia II zmiany to 1,7 sztuki wadliwej c) 1,58

3.16. 5 : 14

3.17. 23 osoby

3.18. Eliza

3.19. Średnia cena akcji firmy B była mniejsza o 7,25 zł od średniej ceny akcji firmy A.

3.20. $\bar{x}_B = 5{,}8$ $\bar{x}_S = 8{,}1$ $\bar{x}_Z = 6{,}65$ $\bar{x}_W > 70$
Kawa będzie w stałej ofercie tej kawiarni.

Mediana z próby i moda z próby. Skala centylowa

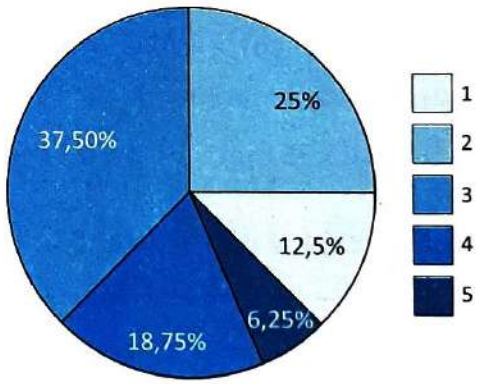
3.21. a) $M_o = 2$, $M_e = 4{,}5$ b) są dwie mody: 4 i 8, $M_e = 4$ c) $M_o = 3$, $M_e = 3$ d) są cztery mody: 0, 1, 2, 3, $M_e = 1{,}5$

3.22. a) $M_o = 3$, $M_e = 5$ b) $M_o = 8$, $M_e = 6{,}5$

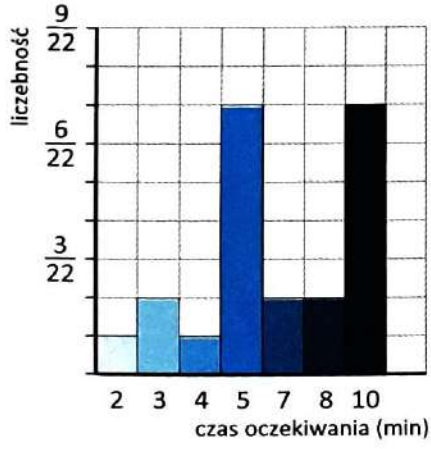
3.23. a) są dwie mody 7 i 9, $M_e = 8$ b) $M_o = 4$, $M_e = 4$ c) $M_o = 7$, $M_e = 4$
d) $M_o = 1$, $M_e = 1$

3.24. Są dwie mody: 34 min oraz 42 min, $M_e = 37$ min, $\bar{x} \approx 37{,}4$ min

3.25. a) $M_o = 3$, $M_e = 3$ b) $\bar{x} \approx 2{,}8$ c) 87,5% d) diagram kołowy procentowy



3.26. a) diagram częstości względnych b) Są dwie mody: 5 i 10, $M_e = 6$.
c) ok. 6 min 41 sek.
d) 50%



3.27. a) 33 osoby b) $\bar{x} = 2{,}02$ c) 34% d) $M_e = 2$

3.28. $a = 3, b = 2$

3.29. $(x = 0, y = 4)$ lub $(x = 1, y = 4)$

3.30. $k = 8, \bar{x} = 9{,}7$

3.31. a) 85 b) 15%

3.32. a) 28 pkt, 76% b) 288 c) 32 d) 44 osoby, 11% zdających e) $M_o = 1, M_e = 16$ f) $\bar{x} = 17{,}83$

Wariancja i odchylenie standardowe

3.33. a) 0,984375 b) 0,1384 c) 941,36 d) 114,09

3.34. a) 10,42 b) 0,83

3.35. 161

3.37. $k \in \{-3, 3\}$

3.38. $\bar{x} = 7{,}6$

3.42. a) $M_o = 3640$ zł, $M_e = 4420$ zł b) 4811,42 zł c) 62% d) ok. 2568 zł

3.43. a) $\bar{x} = 119{,}9$ g b) $\sigma \approx 2{,}15$ g c) nie

3.44. I drużyna: $\bar{x} = 1{,}4$, $\sigma \approx 1{,}16$ II drużyna: $\bar{x} = 1$, $\sigma \approx 1{,}18$

3.45. a) dla I łucznika $M_e = 26$, dla II łucznika $M_e = 28$ b) dla I łucznika $\bar{x}_I = 25{,}4$; dla II łucznika $\bar{x}_{II} = 27$ c) $\sigma_I \approx 3{,}4$; $\sigma_{II} \approx 2{,}1$ d) II zawodnik

3.46. a) $M_e = 40$ b) $\bar{x} = 42$, marzec, maj, czerwiec, listopad, grudzień c) $\sigma \approx 18$ d) w styczniu i w lutym

3.47. a) $\bar{x} = 25{,}35$ mm b) $\sigma \approx 0{,}3$ mm

Test sprawdzający do rozdziału 3.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	**C**	**A**	**A**	**B**	**D**	**D**	**C**	**D**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

9. 12 lekarzy

10. a) 2,984 b) 125

11 a) $(x = 3, y = 5)$ lub $(x = 5, y = 3)$
b) $(x = 0, y = 10)$ lub $(x = 1, y = 9)$ lub $(x = 2, y = 8)$

12. a) $M_o = 5, M_e = 3{,}5$ b) $\bar{x} = 3{,}54$ c) $\sigma^2 = 2{,}5686$, $\sigma \approx 1{,}6$

13. pozostałe oceny Tomka: 5, 2

14. a) $M_e = 2, M_o = 2$ b) $\bar{x} = 2$ c) $\sigma \approx 1$

15. a) 7 pkt b) 70 osób c) 16 osób d) $M_o = 11$ pkt e) $M_e = 10$ pkt f) $\bar{x} = 9{,}63$ pkt

4. Rachunek prawdopodobieństwa

Kombinatoryka – powtórzenie

4.1. a) 52 b) 60

4.2. a) 12 b) 14 c) 21 d) 15

4.3. a) 12 b) 42

4.4. a) 220 b) 320

4.5. a) 9999 b) 700 c) 7 d) 35

4.6. a) $9 \cdot 9!$ b) 18 c) $9 \cdot 4^7$ d) $24 \cdot 5^6$

4.7. a) 60 b) 60

4.8. a) 625 b) 120 c) 81 d) 369

4.9. a) 720 b) 72

4.10. a) 5040 b) 120 c) 3600

4.11. a) 243 b) 840 c) 120 d) 35

4.12. a) 600 b) 300 c) 156 d) 234

4.13. a) 210 b) 221 c) 225 d) 414

4.14. a) $n = 14$ b) $n = 15$

4.15. a) 28 b) 56

4.16. a) 1785 b) 2240 c) 4505 d) 4505

4.17. a) 6 b) 60 c) 30 240 d) 7560

4.18. a) 24 b) 49 920 c) $4 \cdot \binom{48}{4} + \binom{48}{5}$ d) 4560

4.19. a) $\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{26}{10}$ b) $\binom{39}{13} + \binom{13}{1}\binom{39}{12} + \binom{13}{2}\binom{39}{11}$ c) $\binom{52}{13} - \binom{26}{13}$

d) $4 \cdot \binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{3}$

4.20. a) 120 b) 720 c) 720 d) 90 e) 15

4.21. 680

4.22. 4180

4.23. 715

4.24. 2223

Doświadczenie losowe

4.25. b) $\Omega = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, f, n_1, n_2, n_3, n_4, z_1, z_2\}$

4.26. $\Omega = \{(O, 0), (O, 1), (O, 2), (O, 3), (O, 4), (O, 5), (O, 6), (O, 7), (O, 8), (O, 9),$
$(R, 0), (R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6), (R, 7), (R, 8), (R, 9)\}$

przykładowy opis: $\Omega = \{(x, y): x \in \{O, R\} \wedge y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$

4.27. przykładowy opis: $\Omega = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$

4.28. wskazówka: a) $\overline{\overline{\Omega}} = 20$ b) $\overline{\overline{\Omega}} = 25$

4.29. a) np. $\Omega = \{(x, y): x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = 81$

b) np. $\Omega = \{(x, y): x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \wedge x \neq y\}$; $\overline{\overline{\Omega}} = 72$

4.30. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 100$ b) $\overline{\overline{\Omega}} = 90$

4.31. $\overline{\overline{\Omega}} = 24$

4.32. np. Ω – zbiór trzyelementowych wariacji z powtórzeniami o wartościach ze zbioru trzyelementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 27$

4.33. np. $\Omega = \{(x, y, z): x, y, z \in \{2, 3, 5, 7\}\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = 64$

4.34. $\overline{\overline{\Omega}} = 32$

4.35. $\overline{\overline{\Omega}} = 512$

4.36. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 625$ b) $\overline{\overline{\Omega}} = 120$

4.37. $\overline{\overline{\Omega}} = 1024$

4.38. a) np. $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, n\}$

b) np.

$\Omega = \{\{b_1, c_1\}, \{b_1, c_2\}, \{b_1, c_3\}, \{b_2, c_1\}, \{b_2, c_2\}, \{b_2, c_3\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}, \{c_1, c_3\}, \{c_2, c_3\}\}$

4.39. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 156$ b) np. $\Omega = \{(x, y): x, y$ – uczniowie klasy IV f i $x \neq y\}$,

$\overline{\overline{\Omega}} = 25 \cdot 24 = 600$ c) np. $\Omega = \{\{x, y\}: x, y$ – uczniowie klasy IV f$\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{25}{2} = 300$

4.40. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 7$ b) np. Ω – zbiór siedmiowyrazowych ciągów różnowartościowych o wartościach ze zbioru siedmioelementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 5040$

4.41. a) np. Ω – zbiór czteroelementowych wariacji z powtórzeniami o wartościach ze zbioru siedmioelementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 2401$

b) np. Ω – zbiór czteroelementowych wariacji bez powtórzeń o wartościach ze zbioru siedmioelementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 840$

4.42. np. Ω – zbiór trzyelementowych wariacji bez powtórzeń o wartościach ze zbioru 16-elementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = 3360$

4.43. $(0, 0, 0), (0, 0, 50), (0, 20, 0), (0, 20, 50), (10, 0, 0), (10, 0, 50), (10, 20, 0), (10, 20, 50)$

4.44. $(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (O, 5), (O, 6)$

4.45. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 2300$ b) $\overline{\overline{\Omega}} = 13\,800$

4.46. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 15$ b) $\overline{\overline{\Omega}} = 126$

4.47. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 25$ b) np. Ω – zbiór pięcioelementowych permutacji bez powtórzeń, $\overline{\overline{\Omega}} = 120$

Zdarzenia. Działania na zdarzeniach

4.48. $A' \cap C$ – zdarzenie, że wylosowana karta jest asem kier lub asem karo, lub asem trefl

4.49. $A' \cup B' = \{10, 11, 12, 14, 15\}$

4.50. $(A \cup B) \cap C = \varnothing$ – zdarzenia $A \cup B$ i C się wykluczają oraz $(A \cup B) \cup C = \Omega$, więc zdarzenie C jest przeciwne do zdarzenia $A \cup B$.

4.51. a) $A \subset B$, czyli zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B b) A' – zdarzenie, że orzeł nie wypadł ani razu albo zdarzenie, że reszka wypadła dwa razy; B' – zdarzenie, że w obu rzutach otrzymaliśmy taki sam wynik albo zdarzenie, że wypadły dwa orły lub dwie reszki c) $A' \cup B = \{(R,R), (R, O), (O, R)\}$, $B' \cap A = \{(O, O)\}$, $(A' \cup B)' = B' \cap A$

4.52. $C = \{(O, 1), (R, 1), (O, 2), (R, 2), (O, 3), (R, 3), (O, 4), (R, 4), (O, 6), (R, 6)\}$

4.53. b) $A \subset B$, czyli zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B; $C \subset B$; $A \cup C = B$, czyli zdarzenia $A \cup C$ oraz B są identyczne; $B' \cap A = \varnothing$, czyli zdarzenia B' i A się wykluczają c) $B \cup C'$ – zdarzenie pewne; $B' \cap C$ – zdarzenie niemożliwe

4.54. a) 13 b) 23 c) 8

4.55. a) 3 b) 26 c) 12 d) 23, $(A \cap F) \cup (A \cap N) \cup (F \cap N)$ e) 12 f) 22, $N' \cup F'$

4.56. a) 21 b) 10 c) 6 d) 23 e) 8 f) 18

4.57. a) $\overline{\overline{A'}} = 17$ b) $\overline{\overline{A' \cap B'}} = 9$ c) $\overline{\overline{A \cup B}} = 19$ d) $\overline{\overline{(A \cap B') \cup (A' \cap B)}} = 15$

4.58. a) 12 b) 26

4.59. a) 12 b) 14

4.60. a) 25 b) 18

4.61. a) 26 b) 40

4.62. a) 25 b) 324 c) 425 d) 162

4.63. a) $\overline{\overline{A'}} = 1$, $\overline{\overline{B'}} = 6$ b) nie

Niech $\omega = (O, R, R, R, R)$. Wówczas $\omega \in B'$, więc $\omega \in A' \cup B'$. Jednocześnie $\omega \in A$, więc $\omega \in (A \cup B)$, czyli $\omega \notin (A \cup B)'$. Analogicznie $\omega \in (A \cap B)'$ i $\omega \notin A' \cap B'$.

4.64. a) 20 b) $\overline{\overline{A}} = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} + \binom{4}{3} \cdot \binom{2}{0} = 16$ c) 16

4.65. a) $\binom{4}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1}$ b) $\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{48}{5} - \binom{4}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1}$

c) $\binom{39}{7} + \binom{13}{1} \cdot \binom{39}{6} + \binom{13}{2} \cdot \binom{39}{5} + \binom{13}{3} \cdot \binom{39}{4}$ d) $\binom{4}{4} \cdot \binom{12}{3}$

Określenie prawdopodobieństwa

4.66. a) 0,6 b) 0,9 c) 0,5

4.67. a) 0,5 b) 0,4 c) 0,6

4.68. a) $P(A) = 0{,}31$ $P(B) = 0{,}7$ b) Zdarzenia A i B nie wykluczają się, bo $P(A) + P(B) > 1$.

4.69. $P(B') = 0{,}5$ $P(B - A) = \frac{1}{6}$

4.70. $P(A \cup B) = 0{,}25 \quad P\big((A \cup B) - A\big) = 0{,}08 \quad P(A \cap B') = 0{,}13$

4.71. $P(B) = 0{,}13 \quad P\big(B - (A \cap B)\big) = 0{,}12 \quad P\big((A \cup B) - (A \cap B)\big) = 0{,}2$

4.72. $\frac{4}{7}$

4.73. 0,75

4.74. a) 0,1 b) 0,3 c) 0,7

4.75. $\frac{2}{15}$

4.76. $\frac{2}{5}$

Obliczanie prawdopodobieństwa

4.81. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$

4.82. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}$

4.83. a) 0,1 b) 0,5

4.84. a) 0,125 b) 0,75

4.85. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{52}$ c) $\frac{4}{13}$ d) $\frac{3}{13}$; *wskazówka:* figury to walet, dama, król i as

4.86. a) 0,1 b) 0,6 c) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{1}{18}$

4.87. a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{1}{2}$

4.88. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{15}$

4.89. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{43}{300}$

4.90. 0,3

4.91. 7

4.92. 32 osoby

4.93. a) 0,25 b) 0,75

4.94. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{4}$

4.95. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{12}$

4.96. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9}$

4.97. a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{23}{36}$

4.98. a) $\frac{13}{36}$ b) $\frac{7}{18}$

4.99. a) $\frac{11}{16}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{8}$

4.100. a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 0,5

4.101. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{8}{25}$ d) $\frac{16}{25}$

4.102. a) $\frac{13}{18}$ b) $\frac{11}{72}$

4.103. a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{10}{81}$ d) $\frac{56}{81}$

4.104. a) $\frac{7}{50}$ b) $\frac{3}{4}$

4.105. $\frac{1}{3}$

4.106. a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{15}{34}$ c) $\frac{220}{221}$ d) $\frac{105}{221}$

4.107. a) $\frac{231}{496}$ b) $\frac{441}{496}$

4.108. $\frac{207}{245}$

4.109. a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{2}{3}$

4.110. $\frac{2}{9}$

4.111. a) $\frac{14}{45}$ b) $\frac{28}{45}$

4.112. 11 wierzchołków

4.113. 5 kul białych

4.114. 6 chłopców

4.115. 6 piłek do siatkówki

4.116. a) 0,1 b) 0,05

4.117. $\frac{1}{6}$

4.118. a) $\frac{24}{125}$ b) $\frac{1}{125}$

4.119. a) $\frac{1}{1296}$ b) $\frac{5}{54}$

4.120. a) $\frac{1}{70}$ b) $\frac{1}{35}$

4.121. a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{1}{30}$ c) $\frac{4}{15}$

4.122. $\frac{233}{248}$

4.123. $n = 8$

4.124. jeden los lub dwa losy

4.125. $\frac{11}{32}$

4.126. $\frac{7}{72}$

4.127. $\frac{2}{3}$

4.128. a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{8}{15}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{11}{60}$

4.129. a) $\frac{\binom{13}{3}\binom{13}{4}\binom{13}{5}\binom{13}{1}}{\binom{52}{13}}$ b) $\frac{\binom{13}{12}\binom{39}{1}+\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}}$

c) $\frac{\binom{13}{4}\binom{13}{0}\binom{26}{9}+\binom{13}{4}\binom{13}{1}\binom{26}{8}}{\binom{52}{13}}$ d) $1-\frac{\binom{39}{13}+\binom{13}{1}\binom{39}{12}+\binom{13}{2}\binom{39}{11}}{\binom{52}{13}}$

4.130. a) $\frac{5}{10626}$ b) $\frac{4}{1771}$ c) $\frac{635}{3542}$ d) $\frac{947}{5313}$

4.131. a) $\frac{54}{91}$ b) $\frac{1}{65}$ c) $\frac{20}{91}$ d) $\frac{8}{91}$

4.132. a) $\frac{1}{924}$; *wskazówka:* Wybieramy 6 biletów spośród 12, które trafią do białych kopert; pozostałe bilety trafią do niebieskich kopert na 1 sposób. Ω – zbiór kombinacji 6-elementowych o wartościach ze zbioru 12-elementowego, $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{12}{6} = 924$ b) $\frac{1}{33}$

Doświadczenia losowe wieloetapowe

4.133. a) $\frac{13}{36}$ b) $\frac{11}{36}$

4.134. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{7}{27}$

4.135. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{16}$ c) $\frac{219}{256}$ d) $\frac{3}{16}$

4.136. a) $\frac{609}{625}$ b) $\frac{96}{625}$

4.137. a) 0,512 b) 0,992

4.138. a) 0,59049 b) 0,32805

4.139. a) $\frac{31}{32}$ b) $\frac{3}{16}$

4.140. a) $\frac{175}{256}$ b) $\frac{3773}{4096}$

4.141. a) $\frac{16383}{16384}$ b) $\frac{11}{8192}$

4.142. 0,9919

4.143. $\frac{2}{9}$

4.144. przy co najmniej czterech próbach

Prawdopodobieństwo warunkowe

4.145. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$

4.146. a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{3}{4}$

4.147. a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{4}{9}$

4.148. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{6}{11}$ d) $\frac{3}{5}$

4.149. a) $\frac{4}{17}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{10}$

4.150. a) $\frac{15}{22}$ b) $\frac{14}{15}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{9}{10}$

4.151. $\frac{2}{5}$

4.152 $\frac{5}{11}$

4.153. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}$

4.154. a) $\frac{11}{32}$ b) $\frac{1}{4}$

4.155. $\frac{1}{3}$

4.156. $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{48}{2}}$, czyli $\frac{1}{188}$

4.157. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{8}{11}$

4.158. *wskazówka:* $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geqslant 0{,}8 + 0{,}6 - 1$, skąd $P(A \cap B) \geqslant 0{,}4$

4.159. $\frac{1}{2}$

4.160. $\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{44}{1} + \binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{52}{4} - \binom{48}{4}}$, czyli $\frac{1092}{76145}$

4.161. Strzelec C trafił w cel pod warunkiem, że dwa pociski trafiły w cel, z prawdopodobieństwem $\frac{23}{44}$.

4.162. a) 0,154 b) 0,066 c) 0,072

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa

4.163. $\frac{5}{18}$

4.164. $\frac{10}{27}$

4.165. $\frac{169}{330}$

4.166. 0,6

4.167. $\frac{5}{12}$

4.168. $\frac{103}{675}$

4.169. 0,016

4.170. 0,965

4.171. przy pierwszym sposobie losowania

4.172. a) $\frac{13}{48}$ b) $\frac{9}{13}$

4.173. a) $\frac{31}{72}$ b) $\frac{15}{31}$

4.174. a) 0,575 b) $\frac{18}{23}$

4.175. $\frac{8}{17}$

4.176. 0,25

4.177. $\frac{2}{3}$

4.178. $\frac{22}{65}$

4.179. a) 0,03455 b) $\frac{297}{691}$ $(\approx 0{,}43)$

Niezależność zdarzeń

4.180. $\frac{1}{2}$

4.181. 0,5

4.182. $\frac{1}{6}$

4.183. Zdarzenia są niezależne.

4.184. Zdarzenia nie są niezależne.

4.185. a) Zdarzenia są niezależne. b) Zdarzenia nie są niezależne.

4.186. Zdarzenia są parami niezależne. Zdarzenia A, B, C nie są niezależne.

4.187. Zdarzenia A, B są niezależne.

4.188. a) 0,514 b) 0,748

4.189. a) 0,496 b) 0,006

wskazówka: Przy połączeniu szeregowym awaria obwodu nastąpi, jeśli uszkodzeniu ulegnie co najmniej jeden element tego obwodu. Przy połączeniu równoległym awaria obwodu nastąpi, jeśli uszkodzeniu ulegną wszystkie elementy tego obwodu.

4.190. a) $\frac{49}{64}$ b) $\frac{21}{32}$

Schemat Bernoulliego

4.193. a) $\frac{165}{1024}$ b) $\frac{11}{2048}$ c) $\frac{2047}{2048}$ d) $\frac{3}{512}$

4.194. a) $\frac{4}{243}$ b) $\frac{656}{729}$

4.195. a) $\frac{45}{512}$ b) $\frac{675}{1024}$

4.196. $\frac{387297}{390625}$

4.197. a) $\frac{1350}{4096}$ b) $\frac{621}{4096}$ c) $\frac{3475}{4096}$ d) $\frac{1971}{4096}$

4.198. a) $\frac{35 \cdot 29^4}{36^5}$ b) $\frac{64 \cdot 29^4}{36^5}$

4.199. a) $\frac{21}{16384}$ b) $\frac{11}{8192}$

4.200. a) $\frac{20 \cdot 56^3}{15^6}$ b) $\frac{1071 \cdot 8^4}{15^6}$

4.201. a) $\frac{20 \cdot 56^3}{15^6}$ b) $\frac{1296 \cdot 7^4}{15^6}$

4.202. a) $\frac{2240 \cdot 9^4}{13^7}$ b) $\frac{37 \cdot 9^6}{13^7}$

4.203. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{60}{729}$

4.204. wygranie co najmniej 3 partii z 6 rozegranych

4.205. $\frac{3}{5}$

4.206. $\frac{1}{3}$

4.207. 17 strzałów

4.208. cztery czujniki

4.209. 23 razy

4.210. $\frac{216}{625}$

4.211. a) $\frac{209}{648}$ b) $\frac{128}{209}$

4.212. a) $\frac{211}{1024}$ b) $\frac{45}{512}$

Zmienna losowa. Wartość oczekiwana zmiennej losowej

4.213. $\left\{\left(20,\frac{1}{50}\right),\left(10,\frac{2}{25}\right),\left(2,\frac{1}{5}\right),\left(0,\frac{7}{10}\right)\right\}$, $EX = 1{,}6$

4.214. $\left\{\left(20,\frac{1}{20}\right),\left(10,\frac{1}{20}\right),\left(5,\frac{1}{8}\right),\left(2,\frac{3}{4}\right),\left(-100,\frac{1}{40}\right)\right\}$, $EX = 1\frac{1}{8}$

4.215. 1

4.216. 1

4.217. $-0{,}5$

4.218. 0

4.219. a) 0 b) Gra jest sprawiedliwa.

4.220. $x = 2$

4.221. $\left\{\left(400-s,\frac{1}{16}\right),\left(120-s,\frac{1}{4}\right),\left(-s,\frac{11}{16}\right)\right\}$, $s = 55$

4.222. $\left\{\left(0,\frac{8}{32}\right),\left(1,\frac{3}{32}\right),\left(2,\frac{5}{32}\right),\left(3,\frac{6}{32}\right),\left(4,\frac{4}{32}\right),\left(5,\frac{2}{32}\right),\left(6,\frac{3}{32}\right),\left(9,\frac{1}{32}\right)\right\}$, $EX = 2\frac{5}{8}$

4.223. $\left\{\left(3,\frac{1}{84}\right),\left(4,\frac{1}{28}\right),\left(5,\frac{1}{14}\right),\left(6,\frac{5}{42}\right),\left(7,\frac{5}{28}\right),\left(8,\frac{1}{4}\right),\left(9,\frac{1}{3}\right)\right\}$, $EX = 7\frac{1}{2}$

wskazówka: Jeśli największą liczbą jest 3, to pozostałymi liczbami muszą być 1 i 2, zatem mamy tylko jeden taki przypadek. Jeżeli największą liczbą jest np. 7, to pozostałymi mogą być dowolne dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, zatem takich przypadków jest $\binom{6}{2}$, czyli 15.

4.224. $\left\{\left(0,\frac{1}{120}\right),\left(1,\frac{7}{60}\right),\left(2,\frac{17}{40}\right),\left(3,\frac{9}{20}\right)\right\}$, $EX = 2\frac{19}{60}$

4.225. $\left\{\left(1,\frac{4}{5}\right),\left(2,\frac{4}{25}\right),\left(3,\frac{4}{125}\right),\left(4,\frac{4}{625}\right),\left(5,\frac{1}{625}\right),\right\}$, $EX = 1\frac{156}{625}$

4.226. $\left\{\left(0,\frac{16}{625}\right),\left(1,\frac{96}{625}\right),\left(2,\frac{216}{625}\right),\left(3,\frac{216}{625}\right),\left(4,\frac{81}{625}\right),\right\}$, $EX = 2\frac{2}{5}$

4.227. $\left\{\left(0,\frac{27}{64}\right),\left(1,\frac{27}{64}\right),\left(2,\frac{9}{64}\right),\left(3,\frac{1}{64}\right)\right\}$, $EX = \frac{3}{4}$

4.228. $\left\{\left(1,\frac{1}{216}\right),\left(2,\frac{7}{216}\right),\left(3,\frac{19}{216}\right),\left(4,\frac{37}{216}\right),\left(5,\frac{61}{216}\right),\left(6,\frac{91}{216}\right)\right\}$, $EX = 4\frac{23}{24}$

wskazówka: Zdarzeniami elementarnymi są ciągi trójwyrazowe, których wyrazy należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, przy czym wyrazy mogą się powtarzać. Zauważ, że $P(X=1)=P((1,1,1))$. Obliczymy dla przykładu $P(X = 5)$. Zmienna losowa przyjmuje wartość 5 tylko wtedy, gdy na co najmniej jednej kostce wypadnie 5 oczek. Wszystkich ciągów, których wyrazy należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i mogą się

powtarzać, jest 5^3. Należy jednak odrzucić spośród nich te ciągi, których wszystkie wyrazy są różne od 5, czyli należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$; jest 4^3 takich ciągów. Tak więc $P(X=5)=\frac{5^3-4^3}{6^3}$.

Test sprawdzający do rozdziału 4.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	**C**	**B**	**C**	**D**	**D**	**C**	**B**	**D**	**A**	**D**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

11. a) 9 b) 1080

12. 201 600

13. a) np. $\Omega=\{(x,y): x\in\{a,b,c\}, y\in\{1,2,3,4\}\}$

b) np. $\Omega=\{(a,b,c,d): a,b,c,d\in\{1,2,3\}\}$

c) np. $\Omega=\{(x,y,z): x,y,z\in\{A,B,C,D,E,F\}\wedge x\neq y\wedge x\neq z\wedge y\neq z\}$

14. $\frac{9}{25}$

15. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{12}$

16. co najwyżej 6 kul czerwonych

17. a) 0,09 b) $\frac{8}{45}$

18. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{18}$

19. a) $\frac{13}{18}$ b) $\frac{11}{18}$

20. a) $\frac{11}{64}$ b) $\frac{7}{8}$

21. $\frac{5}{21}$

22. a) $\frac{19}{28}$ b) $\frac{13}{28}$

23. a) $\frac{8}{663}$ b) $\frac{19}{34}$ c) $\frac{15}{34}$ d) $\frac{220}{221}$

24. a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{2}{5}$

25. a) $\frac{19}{78}$ b) $\frac{21}{52}$ c) $\frac{131}{780}$ d) $\frac{43}{260}$

26. a) 0,2 b) 0,3

27. a) $\frac{215}{216}$ b) $\frac{3}{8}$

28. a) $\frac{127}{128}$ b) $\frac{1}{16}$

29. $\frac{19}{33}$

30. $\left\{\left(70, \frac{1}{1650}\right), \left(50, \frac{2}{825}\right), \left(30, \frac{19}{330}\right), \left(10, \frac{62}{825}\right), \left(-10, \frac{713}{825}\right)\right\}$, $EX = -6$

31. a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{13}{18}$

32. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$

33. $n = 11$

34. co najmniej 7 kul białych

35. Zdarzenia są niezależne.

36. $n = 5$

37. 2 : 1

38. a) $\frac{7}{45}$ b) $\frac{3}{14}$

39. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{621}{4096}$

40. $3{,}5 \cdot 10^{-6}$

5. Geometria przestrzenna. Wielościany

Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Równoległość prostych i płaszczyzn. Proste skośne

5.2. a) proste k i m są skośne lub proste k i m się przecinają
b) proste k i m są skośne

5.4. a) nie b) tak

5.6. *wskazówka:* Wykaż, że $PQ \parallel AB$.

5.7. *wskazówka:* Wykorzystaj twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.

5.8. c) *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia 6., podręcznik str. 226

Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni

5.9. *wskazówka:* Wykaż, że prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny (BSC).

5.10. a) tak b) nie c) nie d) tak e) nie f) tak

5.11. tak

5.12. *wskazówka:* Wykaż najpierw, że prosta AC jest prostopadła do płaszczyzny (DBE).

5.13. tak; *wskazówka:* Uzasadnij najpierw, że prosta FG jest prostopadła do płaszczyzny π.

5.14. tak; *wskazówka:* Uzasadnij najpierw, że prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny (AED).

5.15. tak; *wskazówka:* Uzasadnij najpierw, że $ED \perp FC$.

5.16. tak

Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę

5.20. $|A_1C_1| : |C_1D_1| : |D_1B_1| = 1 : 2 : 3$

5.21. $|A_1D_1| : |D_1E_1| : |E_1B_1| = 1 : 1 : 2$

5.24. *wskazówka:* Wykaż, że $SO \perp AB$ oraz że trójkąty AOS, BOS i COS są przystające.

5.25. 11 cm

5.26. 13 cm

5.27. 8 cm

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

5.29. nie

5.32. 25,5 cm

5.33. 8 cm

5.34. 20 cm

5.35. tak; *wskazówka:* Wyznacz prostą, będącą rzutem prostokątnym prostej OB_1 na płaszczyznę $(ABCD)$. Następnie wykaż, że wyznaczona prosta jest prostopadła do prostej EC.

5.36. nie; *wskazówka:* Wyznacz prostą, będącą rzutem prostokątnym prostej OC_1 na płaszczyznę (ABB_1A_1). Następnie wykaż, że wyznaczona prosta nie jest prostopadła do prostej A_1B.

Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny

5.37. a) 4 cm b) $4\sqrt{2}$ cm c) $4\sqrt{3}$ cm

5.38. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5.39. a) $1\frac{1}{3}$ b) 0,8

5.40. 0,8

5.41. a) 1,6 b) 2

5.42. a) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$ b) 0,6

5.43. a) 45° b) 0,6 c) $1\frac{2}{3}$

5.44. 1 dm

5.45. $2\sqrt{6}$ cm

Graniastosłupy

5.46. a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\sqrt{3}$ cm

5.47. $d = 5\sqrt{2}$ cm; 45°

5.48. $d_1 = 10$ cm, $d_2 = 8\sqrt{10}$ cm, $d_3 = 6\sqrt{17}$ cm

5.49. a) 2 b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.50. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ c) 30°

5.51. a) 60° b) $\sqrt{139}$ cm

5.52. $4\sqrt{3}$ cm

5.53. $d_1 = 10$ cm, $d_2 = \sqrt{91}$ cm

5.54. a) $s = \frac{n}{2} + 2$, $k = \frac{3n}{2}$ b) $s = 7$, $k = 15$

5.55. $w = 14$, $s = 9$, $k = 21$

5.56. dziesięciokąty

5.57. 30°

Ostrosłupy

5.60. a) 6 ścian, 10 krawędzi b) n ścian, $2(n-1)$ krawędzi

5.61. 8 wierzchołków

5.62. a) $20\sqrt{2}$ cm b) $10\sqrt{6}$ cm c) $10\sqrt{7}$ cm

5.63. a) 3 cm b) $\sqrt{17}$ cm c) 2,4 cm

5.64. a) 30° b) $2\frac{1}{4}$ cm

5.65. a) 40 dm b) 60°

5.66. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $\alpha \approx 55°$

5.67. a) 4 dm b) 30°

5.69. b) $a = 3 + \sqrt{6}$

5.70. a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3}$

5.71. a) $20\sqrt{3}$ cm b) 60 cm

5.72. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

5.73. a) 30° b) 60°

5.74. a) 45° b) 60°

5.75. a) 45° b) $\sqrt{7}$ dm

5.76. a) 90 cm b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5.77. a) 12 cm b) $h_1 = 4\sqrt{10}$ cm, $h_2 = 3\sqrt{17}$ cm

5.78. a) $9\frac{19}{30}$ cm b) $\frac{289\sqrt{2}}{30}$ cm

5.79. a) $12\frac{1}{24}$ cm; *wskazówka:* Wyznacz najpierw promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa. b) $\frac{15}{17}$

5.80. a) 9 b) $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{19}{27}$, $\cos\gamma = \frac{1}{9}$; *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia sinusów do obliczenia długości najdłuższego boku trójkąta w podstawie ostrosłupa.

5.81. a) 12; *wskazówka:* Zastosuj twierdzenie cosinusów do obliczenia długości najdłuższego boku trójkąta w podstawie ostrosłupa. Następnie skorzystaj z twierdzenia sinusów do wyznaczenia promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa. b) 0,6

5.82. a) 27 cm; *wskazówka:* Uzasadnij, że ostrosłup jest prosty. b) $\frac{7}{9}$

5.83. a) $\operatorname{tg}\beta = 3$, $\operatorname{tg}\gamma = 4$ b) $4\frac{8}{13}$

5.84. a) $|AB| = \sqrt{337}$, $|AS| = 15$, $|BS| = 20$ b) 9,6 c) $\frac{\sqrt{337}}{12}$

5.85. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) 45° d) 120°

5.86. a) $3\frac{3}{4}$, b) $\frac{\sqrt{353}}{4}$, $\frac{\sqrt{545}}{4}$, $\frac{\sqrt{865}}{4}$

5.87. a) 15 cm b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

5.88. a) 1 b) $0{,}5\sqrt{6}$

5.89. $\frac{363\sqrt{3}}{4}$ cm^2

5.90. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu

5.94. 552 cm^2

5.96. a) 4 b) 12

5.97. a) 12 dm^2 b) 128 cm^2

5.98. a) 120 cm^2 b) 192 cm^2

5.99. 6 cm, 6 cm, 5 cm

5.100. $2700\ \text{cm}^2$

5.101. $5\ \text{cm},\ 5\sqrt{3}\ \text{cm},\ 5\sqrt{3}\ \text{cm}$

5.102. $20\ \text{cm}$

5.103. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

5.104. $2520\ \text{cm}^2$

5.105. $8\left(3+\sqrt{3}\right)\ \text{dm}^2$

5.106. $48\ \text{cm}^2$

5.107. $\sqrt{2}$

5.108. $100\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

5.109. $5\sqrt{3}\ \text{cm}$

5.110. a) $10\ \text{cm}$ b) $12\left(4+\sqrt{41}\right)\ \text{cm}^2$

5.111. $65\ \text{cm}$

5.112. a) $\sqrt{3}\ \text{dm},\ 2\ \text{dm},\ 2\ \text{dm},\ \sqrt{5}\ \text{dm}$ b) $\left(3+\sqrt{3}\right)\ \text{dm}^2$

5.113. $2720\ \text{cm}^2$

5.116. $26\ \text{dm}^2$

5.117. $\frac{\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)a^2}{4}$

Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów

5.118. 128 litrów

5.119. $3\ \text{cm}$

5.120. $40\sqrt{15}\ \text{dm}^3$

5.121. a) $P_c=49\left(1+2\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2,\ V=\frac{343\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$ b) $P_c=98\left(1+2\sqrt{2}\right)\ \text{cm}^2,\ V=343\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

5.122. $14\sqrt{3}\ \text{dm}^2$

5.123. $18\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

5.124. $P_b=6\ \text{dm}^2,\ V=1{,}5\sqrt{3}\ \text{dm}^3$

5.125. $108\ \text{cm}^3$

5.126. a) $\left(780+84\sqrt{5}\right)\ \text{cm}^2\approx 968\ \text{cm}^2$ b) $1260\sqrt{5}\ \text{cm}^3\approx 2817\ \text{cm}^3\approx 2{,}8\ \text{l}$

5.127. $P_c=378\ \text{cm}^2,\ V=324\ \text{cm}^3$

5.128. $720\ \text{cm}^3$

5.129. $1500\ \text{cm}^3$

5.130. $288\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

5.131. $360\ \text{cm}^3$

5.132. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm^3

5.133. a) 2 dm b) $P_b = 15$ dm^2

5.134. a) 6 cm b) $P_c = 36\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm^2

5.135. wysokość ostrosłupa: $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm, długość wszystkich krawędzi: 4 cm

5.136. a) 1 dm b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ dm

5.137. 48 dm^3

5.138. $250\sqrt{2}$ cm^3

5.139. 48 cm^3

5.140. 1800 cm^3

5.141. a) 9 cm b) $3\sqrt{21}$ cm

5.142. $\frac{1}{3}$ m^3

5.143. $6+3\sqrt{3}$

5.144. a) 72 cm^3 b) $\frac{6}{\sqrt{65}}$

5.145. a) $\frac{1}{24}$ b) 3

5.146. $2\left(1+\sqrt{3}\right)$ dm^3

5.147. $360\sqrt{3}$ cm^3

5.148. a) 7,5; *wskazówka:* Przez punkt przecięcia się przekątnych rombu poprowadź wysokość rombu, równoległą do wysokości DE i zauważ, że dzieli ona bok rombu na odcinki długości 8 i 2. Zatem połowa wysokości rombu jest równa $\sqrt{8\cdot 2}$, czyli 4. b) 200

5.149. $V = \frac{a^3}{6}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}$, $P_c = a^2\left(1+\operatorname{tg}\alpha\right)$

5.150. $V = \frac{a^3\cdot\operatorname{tg}\alpha}{12}$, $P_b = \frac{a^2}{4}\sqrt{12\operatorname{tg}^2\alpha+3}$

5.151. $V = r^3\sqrt{9\operatorname{tg}^2\alpha - 3}$, $\alpha \in (30^\circ, 90^\circ)$

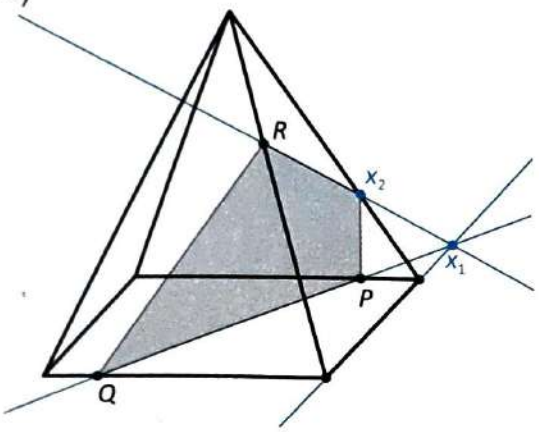
5.152. $\frac{3\sqrt{3}}{16}d^3\sqrt{\frac{1}{4\cos^2\alpha}-1}$ $\left(=\frac{3\sqrt{3}}{16}d^3\frac{\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(\alpha-60^\circ)}}{\cos\alpha}\right)$, $\alpha \in (60^\circ, 90^\circ)$

5.153. $V = \frac{d^3}{6\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}$

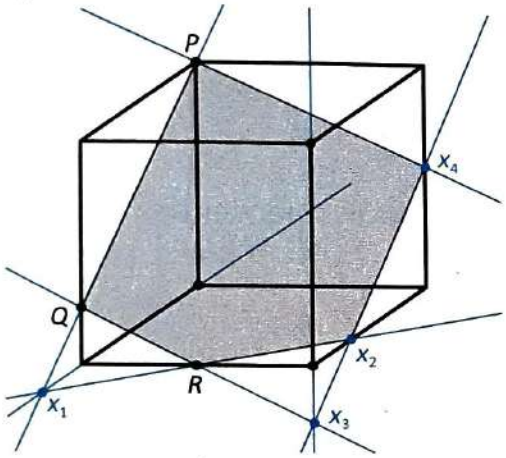
5.154. $V=\dfrac{d^3\sqrt{4\cos^2\alpha-1}}{12\cos^2\alpha\cdot\sin 2\alpha}$

Przekroje wielościanów – konstrukcje

5.156. c)

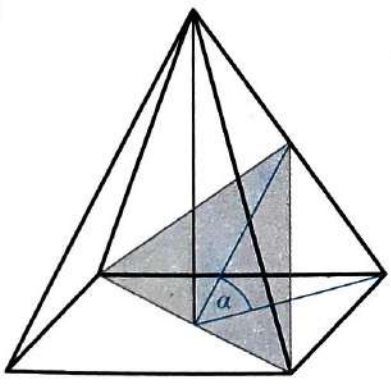


5.157. b)

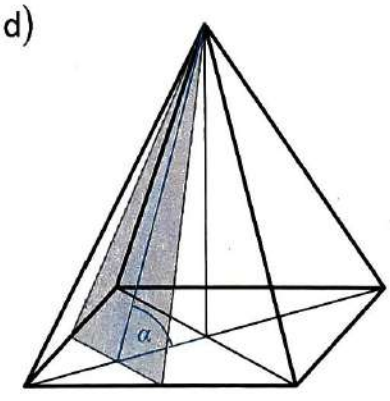


5.158. a) $\alpha=90°$ b) $\alpha=90°$

c)



d)



5.159. Przekrój jest trapezem równoramiennym.

5.160. *wskazówka:* Przekrój jest trójkątem, którego podstawą jest krawędź podstawy ostrosłupa. Poprowadź jego środkową na tę podstawę.

Przekroje wielościanów – zadania

5.161. 1 dm^3

5.162. $100\sqrt{2}$ cm^2

5.163. $2600\ \text{cm}^2$

5.164. $376\ \text{cm}^2$

5.165. $8\sqrt{34}\ \text{cm}^2$

5.166. $160\ \text{cm}^2$

5.167. $8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

5.168. $35\,200\ \text{m}^3$

5.169. $600\ \text{cm}^3$

5.170. a) 6 cm, 4 cm, 4 cm b) $6\sqrt{2}$ cm, 5 cm, 5 cm

5.171. $5\sqrt{5}$ cm

5.172. a) 16 cm b) $128\ \text{cm}^2$

5.173. $4\sqrt{2}\ \text{dm}^2$

5.174. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; *wskazówka:* Odległość punktu B_1 od płaszczyzny (A_1BC_1) jest równa wysokości ostrosłupa o podstawie A_1BC_1 i wierzchołku B_1. Oblicz objętość ostrosłupa $A_1BC_1B_1$ na dwa sposoby.

5.175. $3\ \text{cm}^2$

5.176. $P\sqrt{2}$

5.177. $\frac{2}{3}a^2\left(\sqrt{6}-1\right)$; *wskazówka:* Przekrojem jest trapez równoramienny.

5.178. $\frac{2}{3}\sqrt{P^3}$

5.179. $16\sqrt{3}$

5.180. $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$

5.181. $\frac{a\sqrt{12H^2+3a^2}}{4}$

5.182. $50\sqrt{7}\ \text{cm}^2$

5.183. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$

5.184. $\frac{5}{11}$

5.185. a) 2,5 b) $6\sqrt{29}\ \text{cm}^2$; *wskazówka:* Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem krawędzi AC. Przekrój ostrosłupa daną płaszczyzną jest równoległobokiem. Wyznacz wysokość tego równoległoboku poprowadzoną na krótszy bok.

Test sprawdzający do rozdziału 5.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	D	A	D	B	C	C	B	D	C

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. 8 cm

12. *wskazówka:* Udowodnij, że $PQ \parallel BC_1$ oraz $BC_1 \parallel AD_1$. Następnie wykaż, że $|D_1P| = |AQ|$.

13. 2,5 cm

14. 288 cm^3

15. 13 cm

17. 3 : 4

18. a) $d_1 = 13$ cm, $d_2 = 14$ cm b) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

19. a) krawędź podstawy: $6\sqrt{2}$ cm, krawędź boczna: 10 cm b) $\frac{7}{25}$

20. a) $\frac{5}{13}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $18\sqrt{183}$ dm^2

21. a) 15 cm b) $\frac{15}{17}$ c) $7\frac{1}{17}$ cm

22. 546 cm^3; *wskazówka:* Zauważ, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

23. $V = 250\sqrt{3}$ cm^3, $P_c = 450$ cm^2; *wskazówka:* Zauważ, że podstawa ostrosłupa jest trójkątem prostokątnym, a spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

24. a) $60\left(3+\sqrt{2}\right)$ b) $1{,}2\sqrt{2}$; *wskazówka:* Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego w podstawie.

25. a) $|AB| = |AS| = 26$ cm, $|BS| = 24\sqrt{2}$ cm b) 2,6

26. 13

27. a) $50\sqrt{3}$ b) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$; *wskazówka:* Oblicz objętość odciętego ostrosłupa na dwa sposoby.

28. $72\sqrt{3}$ cm^2; *wskazówka:* Wykaż, że płaszczyzna przekroju przecina jedną z krawędzi bocznych graniastosłupa.

29. a) $V = 384\sqrt{3}$ cm^3; *wskazówka:* Wykaż, że kąt ostry równoległoboku jest równy 60°.
b) krótsze krawędzie boczne: 25 cm, dłuższe krawędzie boczne: $\sqrt{673}$ cm

30. a) 5 cm, $3\sqrt{10}$ cm, $\sqrt{97}$ cm b) $\left(6\sqrt{241}+24\right)$ cm^2

31. 45°

32. a) $\frac{5}{6}$ b) 6

6. Geometria przestrzenna. Bryły obrotowe

Walec

6.1. a) $r = 2$ cm, $h = 3$ cm b) 20π cm^2

6.2. a) $r = 2$ cm, $h = 4$ cm

6.4. a) 80π cm^2 b) 120π cm^2

6.5. π^2 dm^2

6.6. $\frac{h}{r} = 5$

6.7. $r = 2$ dm, $H = 5$ dm

6.8. 5 : 8

6.9. 90°

6.10. $P = \frac{600 + 400\pi\sqrt{3}}{\pi}$

6.11. a) 1152π cm^3 b) 450π cm^3 c) $\frac{128}{3}\pi$ cm^3

6.12. 2366π cm^3

6.13. 7776π cm^3

6.14. $3\sqrt[4]{27}\pi$ dm^3

6.15. $V_1 : V_2 = 1 : 2$

6.16. 30 cm

6.17. 59 m^3, 87 m^2

6.18. 7 cm

6.19. a) $r = 3$ cm, $h = 6\sqrt{3}$ cm b) $V = 54\pi\sqrt{3}$ cm^3

6.20. a) $18\pi\left(1 + 2\sqrt{3}\pi\right)$ cm^2, $54\sqrt{3}\pi^2$ cm^3 b) $18\pi(1 + 2\pi)$ cm^2, $54\pi^2$ cm^3

c) $6\pi\left(3 + 2\sqrt{3}\pi\right)$ cm^2, $18\sqrt{3}\pi^2$ cm^3

6.21. 36 cm^2

6.22. 300π cm^3

6.26. $\sqrt{\frac{v}{\pi \cdot k}}$

6.27. 8

6.28. 7 cm

6.29. $r\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1} = r\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

6.30. 3 cm; *wskazówka:* Poprowadź dwie równoległe do siebie płaszczyzny, zawierające odpowiednio odcinek AB i oś walca, następnie oblicz odległość między tymi płaszczyznami.

Stożek

6.31. a) $90°$ b) $72°$

6.32. *wskazówka:* Uzasadnij, że kąt wycinka koła tworzącego powierzchnię boczną jest równy: a) $240°$ b) $180°$

6.33. a) $216°$ b) $40°$

6.34. *wskazówka:* Oblicz długość tworzącej oraz kąt α wycinka koła, tworzącego powierzchnię boczną stożka. a) $l = 8$ cm, $\alpha = 135°$ b) $l = 2r$, $\alpha = 180°$

6.35. $h = 2\sqrt{2}\ m$, $r = 1$ m

6.36. a) $r = 2$ cm, $h = 4\sqrt{2}$ cm b) $r = 2$ cm, $h = 2\sqrt{3}$ cm

6.37. a) $200\sqrt{2}\pi$ cm^2 b) 240π cm^2

6.38. $5\sqrt{3}$ cm

6.39. 10 cm

6.40. a) 144π dm^2 b) 96π dm^2

6.41. a) 2000π cm^3 b) 1500π cm^3

6.42. a) $P = 90\pi$, $V = 100\pi$ b) $P = 200\pi$, $V = 320\pi$

6.43. $\frac{8400\pi}{29}$ cm^2

6.44. $V = 27\pi$ cm^3, $P = 9\pi\left(3 + 2\sqrt{3}\right)$ cm^2

6.45. $V = 18\pi\sqrt{2}$ cm^3, $P = 18\pi\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm^2

6.46. a) $r = 7$ cm, $H = 24$ cm b) 175π cm^2

6.47. 96π cm^3

6.48. 100π cm^3

6.51. $18\pi\sqrt{2}$; *wskazówka:* Pole przekroju osiowego jest równe $\frac{1}{2}\cdot 6^2 \cdot \sin\alpha$ i jest największe wtedy, gdy $\sin\alpha = 1$.

6.52. $h = 1$ lub $h = \frac{\sqrt{37} - 1}{2}$

6.54. R^2

6.55. $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Kula i sfera

6.56. a) $P = 144\pi$ cm^2, $V = 288\pi$ cm^3 b) $P = 900\pi$ cm^2, $V = 4500\pi$ cm^3

6.57. a) ok. 28,2 cm b) ok. 6,2 cm

6.58. a) $8P$ b) $6P$

6.59. $n = 26$

6.60. 15 cm, 5 cm

6.61. 900π cm^2, 256π cm^2

6.62. a) 3 b) 9

6.63. a) 10 cm, 7 cm b) 204π cm^2

6.64. a) 34 300 km b) 28 000 km

6.65. ok. 825 km

6.66. $V = 288\pi$ cm^3, $P = 144\pi$ cm^2

6.67. 1600π cm^2

6.68. 3,5 dm

6.69. 212π

6.70. 5 cm

Bryły obrotowe – zadania różne

6.71. $67{,}2\pi$ dm^2

6.72. 1200π cm^3

6.73. $V = 72\pi$ cm^3 $P_c = 40\sqrt{3}\pi$ cm^2

6.74. a) $V = 468\pi$, $P_c = 36\pi\left(6+\sqrt{2}\right)$ b) $V = 882\pi$, $P_c = 18\pi\left(17+8\sqrt{2}\right)$

6.77. $\frac{4\pi}{3}$

6.78. 1 : 4

6.79. $\pi\sqrt{3} : 2$

6.80. 81π cm^3

6.82. $\frac{\pi \cdot d^6}{6\left(d^2-R^2\right)\sqrt{d^2-R^2}}$

6.83. $\frac{4}{3}\pi \cdot H^3$ lub $\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\sqrt{5}-2\right) \cdot H^3$

6.84. $r = 3$ cm, $R = 8{,}5$ cm

6.85. 13 cm

6.86. 5,5 cm

Podobieństwo figur w przestrzeni

6.87. $k = \frac{5}{12}$

6.88. a) $k = 4$ b) 64 razy

6.89. a) 1 : 4 b) 1 : 7

6.90. 1750 cm^3

6.91. a) 14 cm b) 350 cm^3

6.92. 7 litrów, 19 litrów, 37 litrów

6.93. 64 : 61

6.94. $R = 10$ cm, $r = 4$ cm, skala podobieństwa: 2,5

6.95. $\frac{3}{8}$

6.96. $\frac{7}{27}$

6.97. $\frac{2hr}{2r+h\sqrt{2}}$

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

6.99. 4 cm, 4 cm, 4 cm, $V = 64$ cm^3; *wskazówka:* $V(x) = -2x^3 + 12x$, gdzie $x \in (0, 6)$, x – długość krawędzi podstawy.

6.100. a) $P_c(x) = 4x^2 + \frac{216}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ b) wymiary podstawy: 60 cm na 30 cm, krawędź boczna ma długość 40 cm

6.101. a) 40 cm na 20 cm, bryła to walec, w którym $r = h = 20$ cm; $V = 8000\pi$ cm^3, $P_b = 800\pi$ cm^2 b) 30 cm na 30 cm; bryła to walec, w którym $r = 15$ cm, $h = 30$ cm; $P_b = 900\pi$ cm^2, $V = 6750\pi$ cm^3 c) nie

6.102. a) $r = \sqrt{3}$ cm, $h = 2\sqrt{3}$ cm b) nie

6.103. a) $V(h) = \frac{\pi}{3}(-h^3 + 16h)$, gdzie $h \in (0, 4)$; $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm, $r = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ cm;

$V = \frac{128\pi\sqrt{3}}{27}$ cm^3; b) $V(r) = \frac{\pi}{3}\sqrt{16r^4 - r^6}$, gdzie $r \in (0, 4)$

6.104. $r = 2$ dm, $l = 2\sqrt{3}$ dm, $h = 2\sqrt{2}$ dm; *wskazówka:* $l = \frac{4\sqrt{3}}{r}$, więc $h^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{r}\right)^2 - r^2$,

stąd $V(r) = \frac{\pi}{3}r^2 \cdot \sqrt{\frac{48}{r^2} - r^2} = \frac{\pi}{3}\sqrt{48r^2 - r^6}$, $r \in \left(0, 2\sqrt[4]{3}\right)$

6.105. a) $V(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^6}{3} - 10x^5 + 25x^4}$, gdzie $x \in \left(0, 10 - 5\sqrt{2}\right)$ b) długość krawędzi podstawy: $\frac{25 - 5\sqrt{13}}{3}$, długość krawędzi bocznej: $\frac{5\sqrt{13} - 10}{3}$

6.106. $9 - \sqrt{33}$ cm; *wskazówka:* $P(x) = \sqrt{\frac{x^4}{8} - 3x^3 + 12x^2}$, gdzie $x \in \left(0, 12 - 4\sqrt{3}\right)$, x – długość krawędzi podstawy ostrosłupa

6.107. a) $V(r) = \pi\sqrt{3}\left(-r^3 + 3r^2\right)$, gdzie $r \in (0, 3)$, b) $4\sqrt{3}\pi$ cm^3

6.108. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$, $\frac{12\sqrt{10}}{5}$, $2\frac{2}{3}$; *wskazówka:* $V(x)=24x^2-2\sqrt{10}x^3$, gdzie $x\in\left(0,\frac{6\sqrt{10}}{5}\right)$, x – długość krótszej krawędzi podstawy prostopadłościanu, $V(x)$ – objętość prostopadłościanu w zależności od x

6.109. $r=\frac{2\sqrt{2}\cdot R}{3}$, $h=\frac{4R}{3}$; *wskazówka:* $V(h)=\frac{\pi}{3}\left(-h^3+2Rh^2\right)$, gdzie $h\in(0,2R)$

6.110. $V(x)=\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{18x^4-x^6}$, gdzie $x\in\left(0,3\sqrt{2}\right)$; $V_{max}\left(2\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}$

Test sprawdzający do rozdziału 6.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	**D**	**A**	**A**	**B**	**C**	**D**	**D**	**B**	**B**	**B**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

11. 1,5 cm
12. 2 dm lub $\frac{\sqrt{14}-2}{2}$ dm
13. 25π dm^3
14. 18π dm^3 lub 162π dm^3
15. 224 cm^2
16. a) 90° b) $\sqrt{15}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{8}$
17. 189π cm^2
18. 19 : 8
19. 1176π cm^2
20. $V=240\pi$ cm^3
21. *wskazówka:* Wyznacz długość d tworzącej stożka, korzystając ze wzoru na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}d^2\sin\alpha$. Następnie skorzystaj z twierdzenia cosinusów i oblicz długość średnicy podstawy stożka.
22. $\frac{1372\pi}{3}$ cm^3
23. 336π cm^2; *wskazówka:* Wykaż, że skala podobieństwa większego walca do mniejszego walca jest równa 3.
24. 288π cm^3, 144π cm^2
28. $\frac{125\pi\sqrt{2}}{2}$ cm^3; *wskazówka:* $P(h)=\pi\sqrt{-H^4+100H^2}$, gdzie $H\in(0,10)$, H – wysokość walca, $P(H)$ – pole powierzchni bocznej walca w zależności od jego wysokości H

29. wskazówka: $V(H)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-H^3+12H^2\right)$, gdzie $H\in(0, 12)$, H – wysokość ostrosłupa, $V(H)$ – objętość ostrosłupa w zależności od jego wysokości H. Oblicz długości wszystkich krawędzi ostrosłupa.

30. $P_c=4\pi R^2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(1+\cos\alpha)=2\pi R^2\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin\alpha\cdot(1+\cos\alpha)$

$V=\frac{8\pi}{3}R^3\cdot\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{2\pi}{3}R^3\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin^2 2\alpha$

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych

α	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\cos\alpha$	
1°	0,017	0,017	57,290	1,000	89°
2°	0,035	0,035	28,636	0,999	88°
3°	0,052	0,052	19,081	0,999	87°
4°	0,070	0,070	14,301	0,998	86°
5°	0,087	0,087	11,430	0,996	85°
6°	0,105	0,105	9,514	0,995	84°
7°	0,122	0,123	8,144	0,993	83°
8°	0,139	0,141	7,115	0,990	82°
9°	0,156	0,158	6,314	0,988	81°
10°	0,174	0,176	5,671	0,985	80°
11°	0,191	0,194	5,145	0,982	79°
12°	0,208	0,213	4,705	0,978	78°
13°	0,225	0,231	4,331	0,974	77°
14°	0,242	0,249	4,011	0,970	76°
15°	0,259	0,268	3,732	0,966	75°
16°	0,276	0,287	3,487	0,961	74°
17°	0,292	0,306	3,271	0,956	73°
18°	0,309	0,325	3,078	0,951	72°
19°	0,326	0,344	2,904	0,946	71°
20°	0,342	0,364	2,747	0,940	70°
21°	0,358	0,384	2,605	0,934	69°
22°	0,375	0,404	2,475	0,927	68°
23°	0,391	0,424	2,356	0,921	67°
24°	0,407	0,445	2,246	0,914	66°
25°	0,423	0,466	2,145	0,906	65°
26°	0,438	0,488	2,050	0,899	64°
27°	0,454	0,510	1,963	0,891	63°
28°	0,469	0,532	1,881	0,883	62°
29°	0,485	0,554	1,804	0,875	61°
30°	0,500	0,577	1,732	0,866	60°
31°	0,515	0,601	1,664	0,857	59°
32°	0,530	0,625	1,600	0,848	58°
33°	0,545	0,649	1,540	0,839	57°
34°	0,559	0,675	1,483	0,829	56°
35°	0,574	0,700	1,428	0,819	55°
36°	0,588	0,727	1,376	0,809	54°
37°	0,602	0,754	1,327	0,799	53°
38°	0,616	0,781	1,280	0,788	52°
39°	0,629	0,810	1,235	0,777	51°
40°	0,643	0,839	1,192	0,766	50°
41°	0,656	0,869	1,150	0,755	49°
42°	0,669	0,900	1,111	0,743	48°
43°	0,682	0,933	1,072	0,731	47°
44°	0,695	0,966	1,036	0,719	46°
45°	0,707	1,000	1,000	0,707	45°
	$\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\sin\alpha$	α