Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA 3

Zbiór zadań do liceów i techników

ZAKRES PODSTAWOWY

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Projekt okładki i strony tytułowej
Bożena Sawicka

Rysunki, skład i łamanie
Artepagina.com – Wojciech Prusakiewicz
Anna Ugniewska

Redakcja
Tomasz Szwed

Fotografia na okładce: *Niech nie wchodzi tu nikt, kto nie zna geometrii*
Autor: Agata Brania
Międzynarodowy Konkurs Fotograficzny „Matematyka w obiektywie"
www.mwo.usz.edu.pl

Druk i oprawa
Druk-Serwis Sp. z o.o.
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydrukowano na papierze *UPM Ultra matt* 65 g
www.antalis.pl

© Copyright by Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
Warszawa 2021 r.

Wydanie I/1, Warszawa 2021 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
pazdro@pazdro.com.pl
www.pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-213-2

Spis treści

1. Ułamki algebraiczne. Równania wymierne
Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzenie ułamków algebraicznych 5
Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych 8
Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych 11
Działania na ułamkach algebraicznych 13
Równania wymierne 15
Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych 17
Funkcja homograficzna 19
Test sprawdzający do rozdziału 1. 22
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1. 23

2. Ciągi
Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów 27
Monotoniczność ciągów 30
Ciąg arytmetyczny 31
Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 33
Ciąg geometryczny 35
Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 38
Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne 40
Lokaty pieniężne i kredyty bankowe 41
Test sprawdzający do rozdziału 2. 43
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2. 44

3. Kombinatoryka
Reguła mnożenia i reguła dodawania 47
Wariacje 50
Permutacje 53
Kombinacje 56
Test sprawdzający do rozdziału 3. 59
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3. 60

4. Czworokąty
Podział czworokątów. Trapezoidy 63
Trapezy 65
Równoległoboki 69
Podobieństwo. Czworokąty podobne 72
Test sprawdzający do rozdziału 4. 75
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4. 76

5. Geometria płaska – pole czworokąta
Pole prostokąta. Pole kwadratu ... 79
Pole równoległoboku. Pole rombu ... 80
Pole trapezu ... 82
Pole czworokąta – zadania różne ... 83
Pola figur podobnych ... 85
Mapa. Skala mapy ... 87
Test sprawdzający do rozdziału 5. ... 87
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5. ... 89

6. Geometria analityczna
Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka ... 91
Proste w układzie współrzędnych ... 92
Odległość punktu od prostej.
Odległość między dwiema prostymi równoległymi ... 94
Pole trójkąta. Pole wielokąta ... 95
Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu ... 97
Zadania różne z geometrii analitycznej ... 99
Wybrane przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych ... 100
Test sprawdzający do rozdziału 6. ... 104
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6. ... 105

Odpowiedzi do zadań ... 107

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych ... 144

Symbolem $\mathcal{D}$ zostały oznaczone zadania na dowodzenie.

1. Ułamki algebraiczne. Równania wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzenie ułamków algebraicznych

1.1. Wśród poniższych wyrażeń znajdują się ułamki algebraiczne. Wskaż je.

a) $\frac{0,5x^3+8x+1}{x^2}$ b) $\frac{2x-5}{3}$ c) $\frac{2|x|}{x^3-8}$

d) $\sqrt{\frac{x}{x+2}}$ e) $\frac{3}{x^3-8x^2+6}$ f) $\frac{7-\sqrt{x}}{x^2+1}$

1.2. Wyznacz dziedzinę danego ułamka algebraicznego.

a) $\frac{9x}{5x-10}$ b) $\frac{1}{(x+1)(5-x)}$ c) $\frac{4x+2}{x^2+4}$

d) $\frac{3x-7}{9x^2-81}$ e) $\frac{3x-5}{x^2+2x+1}$ f) $\frac{x^3-1}{x^3+8}$

1.3. Wyznacz dziedzinę danego ułamka algebraicznego.

a) $\frac{x^2+x+4}{x^2-5x+6}$ b) $\frac{x+1}{x^3-4x^2}$ c) $\frac{3x^3+8x+5}{8x^4-x}$

d) $\frac{x^2+5}{x^3-9x^2+x-9}$ e) $\frac{2x-7}{x^4+x^2-20}$ f) $\frac{2x^3-5x+3}{x^3-3x^2+3x-1}$

g) $\frac{-7x+2}{x^3+4x+5}$ h) $\frac{x-3}{5x^3-15x^2-5x+15}$ i) $\frac{3x^2-2x+1}{x^5+3x^3-4x^2}$

1.4. Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest dany zbiór.

a) $\mathbf{R}$ b) $\mathbf{R}-\{1\}$ c) $\mathbf{R}-\{0\}$ d) $\mathbf{R}-\{0,3\}$

e) $\mathbf{R}-\{-2,3\}$ f) $\mathbf{R}-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ g) $\mathbf{R}-\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\}$ h) $\mathbf{R}-\{-1,1,2,4\}$

1.5. Oblicz wartość danego ułamka algebraicznego dla podanej obok liczby.

a) $\frac{-x^2+3}{(2-x)(2+x)}$, -1

b) $\frac{x^2-5x+6}{x^8+4x^2+7}$, 3

c) $\frac{2x^2+1}{x^3-1}$, 2

d) $\frac{32-x^2}{2x^3+8x^2+5x+20}$, -3

1.6. Oblicz wartość danego ułamka algebraicznego dla podanej obok liczby. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie a, b, $c \in \mathbf{Q}$.

a) $\frac{x}{x-2}$, $3\sqrt{2}+2$

b) $\frac{x+1}{x-2}$, $1-\sqrt{3}$

c) $\frac{x^2}{x^2-3}$, $1+\sqrt{2}$

d) $\frac{(6-x)(2+x)}{(x-1)^2}$, $2-\sqrt{2}$

1.7. Oblicz wartość danego ułamka algebraicznego dla podanej obok liczby. Wynik przedstaw w postaci ułamka o wymiernym mianowniku.

a) $\frac{1}{x+2}$, $2\sqrt[3]{3}$

b) $\frac{x^3}{3(x-1)}$, $\sqrt[3]{2}$

c) $\frac{2x^3}{x^2+x+1}$, $\sqrt[3]{5}$

d) $\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt[3]{3}-1$

1.8. Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{0\}$ i który dla liczby 1 przyjmuje wartość 3.

1.9. Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{2,3\}$ i który dla liczby -1 przyjmuje wartość 5.

1.10. Wyznacz wszystkie wartości m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których dziedziną ułamka algebraicznego jest zbiór liczb rzeczywistych.

a) $\frac{x^2+5}{x^2+2x+m}$

b) $\frac{x}{x^2+5x+9m^2}$

c) $\frac{1-2x}{x^2+3mx+m}$

1.11. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x^{12}}{6x^8}$

b) $\frac{-15(-x)^2}{3x}$

c) $\frac{7(-x)^{13}+5(-x)^{12}}{x^{10}}$

d) $\frac{(x^3)^2-5(x^2)^3}{2x^7}$

e) $\frac{[3(-x)^2]^2-8x^4}{2(-x)^5+3x^5}$

f) $\frac{x^6(-3x)^2+9x^8}{18x^4\cdot x^3}$

1.12. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$

b) $\frac{5+x}{25-x^2}$

c) $\frac{4x^2-9}{(3-2x)(3+2x)}$

d) $\frac{4-81x^2}{-9x-2}$

e) $\frac{x^2-2x+1}{5x-5}$

f) $\frac{9x^2-1}{1-6x+9x^2}$

1.13. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$

b) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}$

c) $\frac{-2x^2-14x+16}{3x^2+15x-72}$

d) $\frac{2x^2-3x-9}{4x^2-11x-3}$

e) $\frac{2x^3-32x}{3x^2+12x}$

f) $\frac{4x^4-400x^2}{x^3-13x^2+30x}$

1.14. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{36x+3x^2-3x^3}{x^2+6x+9}$

b) $\frac{2x^7-8x^3}{3x^5+6x^3}$

c) $\frac{3x^3+2x^2-3x-2}{2x^4-2}$

d) $\frac{8x^4-x}{4x^2+2x+1}$

e) $\frac{75x^2-30x+12}{125x^3+8}$

f) $\frac{x^4-x^2-12}{x^4+8x^2+15}$

1.15. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+3x+2}$

b) $\frac{x^4-3x^2-4}{2x^4-8x^2}$

c) $\frac{2x^3+x-3}{4x^2+4x+6}$

d) $\frac{8x^3+12x^2+6x+1}{4x^3+4x^2+x}$

e) $\frac{2x^2+4x-6}{x^3-3x^2-9x+27}$

f) $\frac{x^4-8x^2-9}{x^4-13x^2+36}$

1.16. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x^2(x-2)+4(x-2)}{9x^4-16}$

b) $\frac{x^3(3x-1)-(1-3x)x}{27x^3-1}$

c) $\frac{25x^3+50x^2-x-2}{5x^2+9x-2}$

d) $\frac{2x^3+2x-4}{x^3-x^2+3x-3}$

e) $\frac{216x^3+8}{12x^2-20x-8}$

f) $\frac{(x-2)^3-1}{x^3-3x^2}$

1.17. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych mianownikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x}{4}=\frac{}{16x}$

b) $\frac{-2x^2}{9}=\frac{}{18x^3}$

c) $\frac{3}{x-2}=\frac{}{2-x}$

d) $\frac{5}{2}=\frac{}{2x-8}$

e) $\frac{x+1}{x}=\frac{}{x(x-2)}$

f) $\frac{2x}{x+3}=\frac{}{x^2-9}$

1.18. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych mianownikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{x}=\frac{\quad}{x^2-6x}$ b) $\frac{x-1}{x-2}=\frac{\quad}{6x^2-3x^3}$ c) $\frac{3}{x-2}=\frac{\quad}{x^2-x-2}$

d) $\frac{x}{x+1}=\frac{\quad}{2x^2+4x+2}$ e) $\frac{5}{x-2}=\frac{\quad}{x^3-8}$ f) $\frac{x+2}{x^2-x+1}=\frac{\quad}{x^3+1}$

1.19. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych mianownikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{\quad}{x^3+3x^2-4x-12}$ b) $\frac{x}{x^2+1}=\frac{\quad}{x^4-3x^2-4}$

c) $\frac{2}{x-1}=\frac{\quad}{x^3-3x^2+3x-1}$ d) $\frac{3}{x-1}=\frac{\quad}{x^3+4x^2-5}$

1.20. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych licznikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{5x}=\frac{3x^2}{\quad}$ b) $\frac{x+1}{x-2}=\frac{x^2+x}{\quad}$ c) $\frac{9-x}{3}=\frac{81-x^2}{\quad}$

d) $\frac{2}{x-3}=\frac{6-2x}{\quad}$ e) $\frac{3x-1}{x^2+5}=\frac{3x^3-x^2}{\quad}$ f) $\frac{x^2-3}{x}=\frac{x^4-9}{\quad}$

1.21. Rozszerz dane ułamki tak, aby otrzymać wyrażenia o podanych licznikach. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2-3x}{x+1}=\frac{x^3-9x}{\quad}$ b) $\frac{2x+3}{x-5}=\frac{4x^2+12x+9}{\quad}$ c) $\frac{x^2-1}{x}=\frac{x^4+2x^2-3}{\quad}$

d) $\frac{x-1}{x}=\frac{3x^3-3x^2+x-1}{\quad}$ e) $\frac{2x-3}{3x}=\frac{8x^3-27}{\quad}$ f) $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{10x^3+5x^2+8x+4}{\quad}$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych

1.22. Wykonaj podane działania.

a) $\frac{x}{2}-\frac{3x+1}{4}+\frac{8-x}{8}$ b) $2x^2-\frac{(x-1)(x+1)}{3}+\frac{5x-7}{6}$

c) $\frac{x-7}{5}-\frac{x^2+2}{3}+\frac{2x^2+31}{15}$ d) $\frac{1-6x}{3}+\frac{x^2+8}{2}-\frac{12x+5x^2}{6}$

e) $\frac{(x+3)(x-2)}{2}-\frac{(x-1)(x+4)}{5}-x$ f) $\frac{(3-x)(3+x)}{8}-\frac{2(x-1)}{4}-\frac{x^2+1}{16}$

1.23. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{x+2}-\frac{x-4}{x+2}$ b) $\frac{2x-7}{x-3}-\frac{3(x-4)}{x-3}$ c) $9-\frac{x+7}{x+1}$

d) $1-\frac{4}{x+5}$ e) $\frac{x+7}{x-5}-\frac{4}{5-x}$ f) $\frac{2x-3}{x-1}+\frac{x+4}{1-x}$

1.24. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x+1}{x^2-1}-\frac{x^2+3x}{x^2-1}$ b) $\frac{2x}{x^3-8x^2}-\frac{4x-16}{x^3-8x^2}$ c) $\frac{5-2x}{x^2+4x}+\frac{3x-5}{x^2+4x}$

d) $\frac{2-2x}{x^2-9}-\frac{x-5}{9-x^2}$ e) $4-\frac{3x^2-8x+4}{x^2-2x}$ f) $\frac{x^2-3x}{(x-3)^2}-1$

1.25. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x}{x-4}-\frac{x+1}{4-x}-\frac{2x+3}{x-4}$ b) $\frac{3x-2}{x-2}+3-\frac{4x+5}{2-x}$

c) $\frac{2x-5}{2x-3}-\frac{5}{2}-\frac{x+1}{3-2x}$ d) $3-\frac{x+2}{4x-1}-\frac{2x+5}{1-4x}$

e) $\frac{3}{4}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{x^2}{1-x^2}$ f) $\frac{2(x-1)}{x^2-4}-\frac{x+6}{4-x^2}+1\frac{1}{2}$

1.26. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2}$ b) $\frac{3x}{2}-\frac{x^2+2x}{x+3}$ c) $\frac{2}{5x}-\frac{1}{x-1}$

d) $\frac{3x-1}{4}-\frac{x^2}{x+2}$ e) $\frac{3}{x-3}+\frac{x+4}{x}$ f) $\frac{x}{x+2}-\frac{3x+1}{3x}$

1.27. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}$ b) $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-1}{x+3}$ c) $\frac{3x}{2x+1}+\frac{x^2}{(2x+1)^2}$

d) $\frac{x^2-1}{4x^2+12x+9}-\frac{2}{2x+3}$ e) $\frac{x+4}{x-1}-\frac{x+1}{x-4}$ f) $\frac{x+5}{x-5}-\frac{2-x}{2+x}$

1.28. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-3$

b) $\frac{x+2}{x}-\frac{x^2-3}{x^2}+\frac{3-x^2}{x^3}$

c) $\frac{5}{x-1}+1+\frac{4}{x+1}$

d) $\frac{3x^3+5x}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-3x$

e) $\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-2}$

f) $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+2}+\frac{1}{2}$

1.29. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{4x^2-25}+\frac{3x}{2x-5}-1$

b) $\frac{x}{x+2}+4+\frac{7}{x-3}$

c) $2+\frac{7-x}{x+3}+\frac{x+3}{x-7}$

d) $\frac{x-2}{x+1}-3+\frac{x-1}{x+2}$

1.30. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2+5}{x^2-3x}-\frac{x-1}{x-3}$

b) $\frac{x-2}{2x-5}+\frac{3x^2+1}{2x^2-5x}$

c) $\frac{x^3}{x^3-1}-\frac{x^2+3}{x^2+x+1}$

d) $\frac{x-2}{x^2+4}+\frac{5x-2x^2}{2x^3+8x}$

e) $\frac{2x^2-11x}{x^2-5x}-\frac{2x-1}{x}$

f) $\frac{x^3-6}{3x^4+x^2}-\frac{x+2}{3x^2+1}$

1.31. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x-1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x+1}$

b) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2-2x}$

c) $\frac{x-1}{2x+3}-\frac{x+1}{3-2x}+\frac{x^2-4}{4x^2-9}$

d) $\frac{2x^2-1}{4-x^2}+\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}$

e) $\frac{2x^2-3x}{x^2-6x+9}-\frac{x+2}{x-3}+1$

f) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{4}{x^2-2x+1}-\frac{x+1}{x}$

1.32. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x-2}{x^2-4x}+\frac{x^2-1}{x^2-8x+16}-\frac{1}{2x}$

b) $\frac{x^2-1}{x^2-5x}-\frac{x^2-3}{x^2-10x+25}-\frac{1}{5-x}$

c) $\frac{2x}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-2x}-\frac{1}{x+1}$

d) $\frac{5x}{x^2-6x+9}-\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x^2+3x}$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

1.33. Wykonaj mnożenie ułamków. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{x}\cdot\frac{x^2}{6}$

b) $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2-x}{2}$

c) $\frac{4}{x+1}\cdot\frac{2x+2}{8x^2}$

d) $\frac{x+3}{2}\cdot\frac{16}{x^2-9}$

e) $\frac{x-1}{3}\cdot\frac{4x}{x^2-x}$

f) $\frac{3x-6}{x^2-4}\cdot\frac{5}{7x}$

1.34. Wykonaj mnożenie ułamków. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2x-4}{5}\cdot\frac{10x}{x^2-4x+4}$

b) $\frac{2x+3}{x^2+6}\cdot\frac{2x^2+12}{4x^2-9}$

c) $\frac{x^2-1}{x^2-81}\cdot\frac{x-9}{x+1}$

d) $\frac{3x^3+6x^2}{x-4}\cdot\frac{6x-24}{9x^2-36}$

e) $\frac{x^3+8}{3x^2-3}\cdot\frac{6x+6}{x^2-2x+4}$

f) $\frac{2x^2+8x}{216-x^3}\cdot\frac{x^2+6x+36}{x^2-16}$

1.35. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x^2+3x}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{6x}$

b) $\frac{4x^3-8x^2}{16x^2-64}\cdot\frac{4x+8}{x^2}$

c) $\frac{49-x^2}{x^2+8x+7}\cdot\frac{x+1}{2x-14}\cdot\frac{x}{2}$

d) $\frac{x^4-1}{2x^2+2}\cdot\frac{4}{3x^2-3}\cdot 9x$

e) $\frac{5x^2-20}{7x+14}\cdot\frac{14x+42}{x^2+x-6}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$

f) $\left(-\frac{x}{21}\right)\cdot\frac{3x^2-3}{x^2-4x-5}\cdot\frac{7x-35}{2x-2}$

1.36. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2-1}{x^2+x-6}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-2}$

b) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2+6x+9}$

c) $\frac{2x^2+5x-3}{3x^2+7x+4}\cdot\frac{9x^2+24x+16}{4x^2-1}$

d) $\frac{5x^2+7x+2}{x^2+2x+1}\cdot\frac{3x^2+2x-1}{25x^2-4}$

e) $\frac{2x^2-x-3}{4x^2-7x-2}\cdot\frac{8x^2-32}{2x^2+x-6}$

f) $\frac{2x^2+9x-5}{5x^2+3x-2}\cdot\frac{x^2+4x+3}{2x^2+5x-3}$

1.37. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x^2+8x+15}$

b) $\frac{x^3+5x^2-2x-10}{x^2-2}\cdot\frac{2}{x^2+10x+25}$

c) $\frac{2x^3-14x^2-8x-56}{2x^2-18}\cdot\frac{3x^2+7x-6}{x^2-9x+14}$

d) $\frac{2x^3-6x^2+x-3}{4x^2+11x-3}\cdot\frac{3x^2+2x-1}{2x^3-2x^2+x-1}$

e) $\frac{x^3-6x^2-5}{x^3-27}\cdot\frac{x^2-3x-9}{4x-4}$

f) $\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}\cdot\frac{8x+1}{3x^2-6x}$

1.38. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{x^2}:\frac{x}{4}$

b) $\frac{2x}{5}:4:x$

c) $\frac{1}{2}+\frac{x-2}{x-1}:\frac{2}{3x}$

d) $4\cdot\frac{3}{x-1}:\frac{2}{x}$

e) $\frac{3}{x+1}:\frac{1}{2x+2}\cdot\frac{2}{x}$

f) $1-\frac{1}{x+6}:\frac{1}{36-x^2}$

1.39. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{x}-\frac{x}{x-3}:\frac{x^2}{4x-12}$

b) $3x-\frac{4}{x-2}:\frac{1}{4-x^2}$

c) $\frac{5x}{x^2+10x+25}:\frac{10}{x^2-25}$

d) $\frac{5x}{9x^2-81}:\frac{1}{27-9x}$

e) $\frac{x^2-2x+1}{4x^2+2x+1}:\frac{3x^2-3}{8x^3-1}$

f) $\frac{125x^3+1}{x^2-4x}:\frac{25x^2-5x+1}{x-4}$

1.40. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x-3}{5x+10}:\frac{3x^2-3}{10x^2-40}$

b) $\frac{2x^2+6x}{x^2+4x+4}:\frac{x^2+6x+9}{x^2-4}$

c) $\frac{25x^2-10x+1}{x^2-9}:\frac{10x-2}{5x+15}$

d) $\frac{2x^2+5x-3}{10x-20}:\frac{4x^2-1}{3x-6}$

e) $\frac{6x^2+13x-5}{4-x^2}:\frac{3x^2+20x-7}{-x^2-5x+14}$

f) $\frac{7x^2+13x-2}{3x^2-19x+20}:\frac{7x^2+6x-1}{2x^2-7x-15}$

1.41. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^3+8x^2-x-8}{x^2+9x+8}:\frac{2x^2-2}{x+3}$

b) $\frac{x^3-5x^2+2x-10}{x^2+x-30}:\frac{x^3+2x}{x+6}$

c) $\frac{x^3-5x^2+3x-15}{x^3+x^2+3x+3}:\frac{2x-10}{3x+3}$

d) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^3+5x^2+x+5}:\frac{2x+4}{7x^2+7}$

e) $\frac{2x^3-x-1}{2x^2+x-3}:\frac{2x^2+2x+1}{4x^2-9}$

f) $\frac{x^3-x^2-4}{x^2+7x+10}:\frac{x^2+3x-10}{x^2+10x+25}$

Działania na ułamkach algebraicznych

1.42. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $3x^2:\left[2x^3:(x+1)\right]$

b) $2:x:\frac{3}{x}-\frac{2x+5}{x-4}$

c) $\left(5-\frac{2}{x}\right)\cdot\left(5+2x:x^2\right)$

d) $\left(1+\frac{1}{x+1}\right):\left(3-\frac{2}{x+1}\right)$

e) $\left(3-\frac{x}{x+2}\right):(x+3)$

f) $2-\frac{x^2-25}{x+3}\cdot\frac{4x+12}{x^2+5x}$

1.43. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2-\frac{1}{x}}{4x^2-4x+1}$

b) $\frac{\frac{x^2-4}{3x-6}}{5-x}$

c) $\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{2}{5}}{1+\frac{3x}{2}}$

d) $\frac{3-\frac{x+2}{x-1}}{-2x^2+7x-5}$

e) $\frac{\frac{x-1}{2}+\frac{x-3}{x}}{2-x}$

f) $\frac{\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{x+2}}{\frac{x+5}{1-x^2}}$

1.44. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\left(\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}\right)\cdot\frac{1}{4a}$

b) $\frac{2+\frac{1}{a}}{a+2}\cdot\frac{a^2+4a+4}{2a+1}-\frac{2}{a}$

c) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4a}{a+2}$

d) $\left(\frac{3}{a}-2+\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{6a}{a^2-9}$

e) $3-\left(a-\frac{a-1}{a}\right):\frac{a^2-a+1}{4}$

f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^3}\right):\left(a-1+\frac{1}{a}\right)$

1.45. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\left(\frac{1}{a^2+a}+\frac{a-2}{a+1}\right):\left(\frac{1}{a}-2+a\right)$

b) $1:\left(1-\frac{1}{a}-\frac{2}{a^2}\right)-\frac{4}{(a+1)(a-2)}$

c) $\left(a+1-\frac{3}{a-1}\right):\left(a-\frac{a^2}{a-1}\right)\cdot\frac{1}{2a^2-8}$

d) $\frac{-2a}{a+3}\cdot\left(a-2:\frac{1}{a+3}-\frac{9}{a}\right)$

e) $\left(\frac{a^4-1}{a^2+1}-3\right)\cdot\frac{a}{2a^2-8}-\frac{3}{a+1}$

f) $\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{3a}+\frac{3}{a+1}\right):\left(\frac{9}{a+1}+\frac{5}{a}\right)$

1.46. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1}{2}+\frac{a^2-1}{2a+6}\cdot\frac{1+\frac{1}{a+2}}{1-\frac{1}{a+2}}$

b) $\frac{25-a^2}{4a+8}:\left[\frac{3-(a^2-1)}{a^2+4a+4}+\frac{3}{a+2}\right]$

c) $\left(a-\frac{a+3}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a-3}-\frac{1}{a+1}\right)$

d) $\left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\frac{3}{a^2-a}\right]:\frac{a^2-3a}{a-1}$

D 1.47. Wykaż, że jeśli $a\neq 0$, to $6a:\left[\left(\frac{a+3}{2}\right)^2-\left(\frac{a-3}{2}\right)^2\right]=2$.

D 1.48. Wykaż, że jeśli $a\in R$, to $\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2+\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2=1$.

D 1.49. Wykaż, że jeśli $a\in R-\left\{-2,\frac{1}{3},1,2\right\}$, to $\left(\frac{3a^2+2a-1}{3a-1}-\frac{3}{a-1}\right):\frac{2a^2-8}{a-1}=\frac{1}{2}$.

D 1.50. Wykaż, że jeśli $a\in R-\{-2,0,2\}$, to wartość wyrażenia $\frac{\frac{a}{4}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}}\cdot\frac{2}{a^2-4}+3$ jest stała.

D 1.51. Wykaż, że jeśli $a\neq -b$ i $a\neq 0$ i $b\neq 0$, to wartość wyrażenia $\left(\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\right):(3a+3b)$ jest stała.

D 1.52. Wykaż, że jeśli $a\in R-\{-2,0\}$, to prawdziwa jest równość:

$$\left(\frac{a^2}{8}+\frac{1}{a}\right):\left(\frac{a}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right):\frac{(a-2)^2+8a}{1+\frac{2}{a}}=\frac{1}{2a}.$$

D 1.53. Wykaż, że jeśli $a\in R-\{-6,3\}$, to zachodzi równość:

$$\left[\left(\frac{a-3}{3}\right)^2-\frac{(3+a)^2-12a}{9-3a}\right]\cdot\frac{9}{a^2+3a-18}=\frac{a}{a+6}.$$

D 1.54. Wykaż, że jeśli $\frac{b}{3a+2b}=\frac{1}{5}$ i $b\neq\frac{-3a}{2}$, to $\frac{4a+5b}{11a-2b}=1$.

D 1.55. Wykaż, że jeśli $a, b, c\in R-\{0\}$ i $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, to $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2}{c^2}$.

D 1.56. Wykaż, że jeśli $a\neq 0$ i $b\neq 0$ oraz $\frac{2}{b}-\frac{3}{a}=2a-3b$, to $b=\frac{2}{3}a$ lub $ab=1$

Równania wymierne

1.57. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{x+2}{x-2}=0$

b) $\frac{4x^2+9}{3x+6}=0$

c) $\frac{(2x-5)(3-x)}{x^2+9}=0$

d) $\frac{x(x-2)}{4x^2-4x+1}=0$

e) $\frac{(1-3x)^2}{(2x-3)(5-x)}=0$

f) $\frac{(x-1)(x+2)(x+5)}{x^2+4x-5}=0$

1.58. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{(x^3-27)(x^2-16)}{6x-18}=0$

b) $\frac{(x^4-1)(x+2)}{x^2(x-1)}=0$

c) $\frac{x^2(x-1)+x-1}{4x+8}=0$

d) $\frac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3}=0$

e) $\frac{2x^3+5x^2-3x}{x^2+6x+9}=0$

f) $\frac{(2x^2+4x)(3-x)}{x^3-4x^2}=0$

1.59. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{x^3-4x^2+3}{x-1}=0$

b) $\frac{x^3-8x-7}{x^2-7}=0$

c) $\frac{3x^3-x^2-6x+2}{4-x^4}=0$

d) $\frac{x^5-8x^3+15x}{x^2+5x}=0$

e) $\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+8}=0$

f) $\frac{x^6-3x^3+2}{x^2-x-2}=0$

1.60. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{x}{2}=\frac{8}{x}$

b) $\frac{x}{3}-\frac{9}{x^2}=0$

c) $\frac{x}{x^2+3}=2$

d) $\frac{(x-2)^2}{2-x}=2-x$

e) $\frac{6}{x}=x-1$

f) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{x+2}{x-3}$

1.61. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{20-15x}{3x-4}-2x=0$

b) $\frac{x^3-x}{3x^2-3}-\frac{4}{6x-6}=0$

c) $\frac{x-5}{x+1}-1=x+1$

d) $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{2x+3}{x+2}=x-2$

e) $\frac{x}{2x-3}+\frac{1}{3-2x}=2x-2$

f) $\frac{2x-1}{x-1}-x=\frac{x+2}{1-x}-1$

1.62. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{4}{3x+2}-\frac{5}{x-2}=0$

b) $\frac{4}{x}-1=\frac{1}{x-1}$

c) $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-1}=1$

d) $\frac{2}{x-3}+\frac{4x}{x+2}=\frac{1}{3}$

e) $\frac{1}{2-x}+\frac{4}{x^3-8}=0$

f) $\frac{4x^2}{x^3+27}=\frac{1}{9-3x+x^2}$

1.63. Rozwiąż równania.

a) $\frac{x+1}{x+2}-\frac{2x}{x+3}=-\frac{1}{5}$

b) $\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{x+2}=\frac{2x-2}{x^2+x-2}$

c) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{x+1}{3-x}=\frac{x^2+x+12}{x^2-2x-3}$

d) $\frac{x}{4-x}+\frac{2}{x+4}=\frac{2x+4}{16-x^2}$

e) $\frac{x^2+5x+4}{x^3+3x^2+3x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=0$

f) $\frac{2x^3+x^2}{16x^2-4}=\frac{2}{2x-1}$

1.64. Rozwiąż dane równania.

a) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}=\frac{1}{9x^3}$

b) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x-1}$

c) $\frac{2}{x^2+x}-\frac{1}{x}=\frac{6}{x^2}$

d) $\frac{3}{x^3+8}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{2}{x^2-2x+4}$

e) $\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2-4x+4}=\frac{1}{x^2-2x}$

f) $\frac{1}{x^2-1}+\frac{4}{4-x^2}=\frac{x}{x^2+x-2}$

Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych

1.65. Licznik i mianownik dodatniego ułamka właściwego różnią się o 4. Wyznacz ten ułamek wiedząc, że jeśli jego licznik zwiększymy o 7, a mianownik podwoimy, to otrzymamy liczbę równą $\frac{5}{7}$.

1.66. Ułamek zwykły jest liczbą dodatnią, a jego licznik jest o 1 większy od mianownika. Wyznacz ten ułamek wiedząc, że różnica tego ułamka i 20% jego odwrotności jest równa 1,09.

1.67. Drogę długości 208 km, kierowca przejechał ze średnią prędkością V [km/h], w pewnym czasie t [h]. Gdyby jechał z prędkością o 13 km/h większą, wówczas trasę pokonałby w czasie o 48 minut krótszym. Oblicz V.

1.68. Turysta przebył pieszo 600 km. Każdego dnia pokonywał taką samą liczbę kilometrów. Gdyby codziennie przebywał o 10 km więcej, byłby w drodze o 5 dni krócej. Ile dni był turysta w drodze?

1.69. Właściciel hotelu zlecił dwóm zakładom krawieckim uszycie 140 zasłon. Pierwszy zakład miał uszyć 80 zasłon, zaś drugi 60 zasłon. W zakładzie pierwszym, zatrudniającym więcej pracowników, szyto dziennie o 8 zasłon więcej niż w zakładzie drugim. Drugi zakład wykonał zamówienie w terminie, a pierwszy o 1 dzień wcześniej niż ustalono. Ile zasłon dziennie szyto w każdym z zakładów?

1.70. Zakład stolarski otrzymał zamówienie na wykonanie 720 stołków. Aby zrealizować zamówienie na czas, postanowiono wykonywać dziennie jednakową liczbę stołków. Po wykonaniu $66\frac{2}{3}\%$ zamówienia usprawniono produkcję tak, że dzienna produkcja wzrosła o 4 stołki, a zamówienie zrealizowano o 5 dni wcześniej, niż planowano. W ciągu ilu dni planowano wykonać zamówienie?

1.71. Pod budowę bloku na osiedlu mieszkaniowym należało wykopać w określonym terminie 8000 m^3 ziemi. Praca została wykonana na 8 dni przed terminem, gdyż ekipa robotników przekraczała stale o 50 m^3 dzienny plan. Oblicz, w ciągu ilu dni miała być wykonana praca i o ile procent przekraczano codziennie plan.

1.72. Trzy zespoły robotników, pracując równocześnie, wykonują pewną pracę w ciągu jednego dnia. Pierwszy zespół wykonałby tę pracę samodzielnie o jeden dzień wcześniej niż drugi, a trzeci o 4 dni później niż pierwszy. W ile dni wykonałby tę pracę każdy z zespołów, pracując samodzielnie?

1.73. Dwie sekretarki wykonały pewną pracę w ciągu 12 godzin. Gdyby pierwsza wykonała sama połowę tej pracy, a następnie druga resztę, to potrzebowałyby na to 25 godzin. W ciągu ilu godzin każda z sekretarek, pracując oddzielnie, może wykonać tę pracę?

1.74. Ojciec i syn pracując razem wykonaliby pewną pracę w ciągu 12 dni. Ponieważ jednak po ośmiu dniach wspólnej pracy syn zachorował, ojciec, pracując sam, potrzebował jeszcze pięciu dni do ukończenia pracy. W ciągu ilu dni każdy z nich pracując sam, mógłby wykonać tę pracę?

1.75. Do mleczarni dostarczono 2400 kg mleka o zwartości 4% tłuszczu. Ile kilogramów śmietanki o zawartości tłuszczu 12% należy odwirować z tego mleka, aby otrzymać mleko o zawartości 2% tłuszczu?

1.76. Kran A napełnia pojemnik w czasie o 6 minut krótszym, niż kran B. Jeśli obydwa krany odkręcimy jednocześnie, to pojemnik zostanie napełniony w ciągu 4 minut. Ile minut potrzeba na napełnienie pojemnika przez każdy z kranów oddzielnie?

1.77. Przez jeden z kranów woda wypływa ze zbiornika, a przez drugi do niego wpływa. Gdy otworzymy oba krany, zbiornik zostanie napełniony wodą w ciągu 12 godzin. W ciągu ilu godzin pierwszy kran opróżnia pełny zbiornik, a drugi napełnia pusty zbiornik, jeżeli wiadomo, że czas napełniania zbiornika jest o godzinę krótszy od czasu jego opróżniania?

1.78. Pusty basen można napełnić wodą z dwóch kranów. Jeżeli otworzymy pierwszy kran na 5 godzin, a następnie zamkniemy go i otworzymy drugi kran na 10 godzin, to basen napełni się w 35%. Jeżeli natomiast otworzymy jednocześnie oba krany, to basen zostanie całkowicie napełniony w ciągu $22\frac{2}{9}$ godzin. Ile godzin potrzeba do napełnienia całego basenu za pomocą każdego kranu oddzielnie?

1.79. Z miejscowości A i B, odległych od siebie o 330 km, wyruszyły naprzeciw siebie po równoległych torach dwa pociągi. Pociąg jadący z miejscowości A do B wyjechał o godzinę wcześniej i jechał ze średnią prędkością o 5 km/h mniejszą niż pociąg jadący z miejscowości B do A. Pociągi spotkały się w odległości 180 km od miasta A.

a) Oblicz średnie prędkości obu pociągów.

b) Ile godzin jechał pociąg z miejscowości A do miejsca spotkania obu pociągów?

1.80. Dwaj rowerzyści wyjechali naprzeciw siebie z miejscowości A i B, odległych od siebie o 96 km. Rowerzysta jadący z miejscowości A do B wyjechał o godzinę później i jechał ze średnią prędkością o 3 km/h mniejszą niż rowerzysta jadący z miejscowości B do A. Rowerzyści spotkali się w odległości 36 km od miasta A. Wiedząc, że obaj jechali z prędkościami większymi niż 10 km/h, oblicz średnie prędkości obu rowerzystów.

Funkcja homograficzna

1.81. Wykres proporcjonalności odwrotnej $y=\frac{2}{x}$ przesunięto o pewien wektor $\vec{u}$ i otrzymano wykres funkcji, przedstawiony na poniższym rysunku.

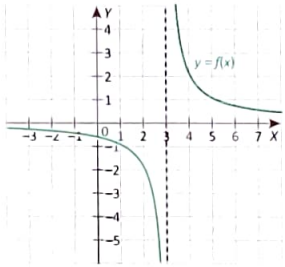
a) Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$.

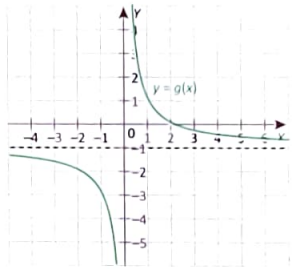
b) Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymano.

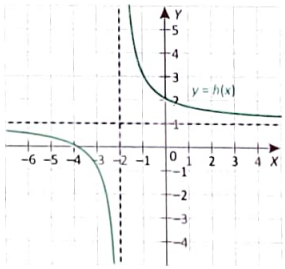
c) Podaj dziedzinę i zbiór wartości otrzymanej funkcji.

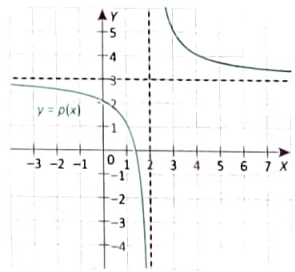
d) Oblicz miejsce zerowe tej funkcji (jeśli istnieje).

e) Odczytaj z rysunku zbiór wszystkich argumentów, dla których otrzymana funkcja przyjmuje wartości ujemne.









1.82. Wykres funkcji $y=\frac{-4}{x}$, gdzie $x\neq 0$, przesunięto równolegle o wektor $\vec{v}=[0,2]$ i otrzymano wykres funkcji f.

a) Napisz wzór funkcji f.

b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.

c) Wyznacz argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość równą -2.

d) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $\sqrt{3}-1$.

1.83. Wykres funkcji $y=\frac{3}{x}$, gdzie $x\neq 0$, przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}=[2,-4]$ i otrzymano wykres funkcji g.

a) Napisz wzór funkcji g i podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Podaj współrzędne punktu, który jest środkiem symetrii wykresu funkcji g.

c) Oblicz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji g z osiami układu współrzędnych.

d) Naszkicuj wykres funkcji g i omów własności tej funkcji.

1.84. Wykres funkcji $y=\frac{1}{x}$, gdzie $x\neq 0$, przesunięto równolegle o wektor $\vec{v}=[-4,3]$ i otrzymano wykres funkcji h.

a) Napisz wzór funkcji h.

b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji h.

c) Sprawdź, czy do wykresu funkcji h należy punkt $A\left(-9, 2\frac{4}{5}\right)$.

d) Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji h i wykresu funkcji liniowej $y = x + 7$.

1.85. Wykres funkcji $y=\frac{-3}{x}$ przesunięto równolegle o pewien wektor i otrzymano wykres funkcji g, którego środkiem symetrii jest punkt $S(2,-1)$.

a) Napisz wzór funkcji g w postaci ilorazu dwóch wielomianów stopnia pierwszego. Podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji g i osi OY.

1.86. Wykres funkcji g otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji $y=\frac{a}{x}$, $x\neq 0$, o wektor $\vec{u}$. Oblicz a i współrzędne wektora $\vec{u}$.

a) $g(x)=\frac{x-4}{x+1}$ b) $g(x)=\frac{3x+8}{x+2}$ c) $g(x)=\frac{-2x+1}{x-1}$ d) $g(x)=\frac{5x-6}{-x-2}$

1.87. Naszkicuj w osobnych układach współrzędnych wykresy funkcji: $f(x)=\frac{x}{x-4}$, $g(x)=\frac{2x+4}{x+2}$, $h(x)=\frac{x+3}{x+2}$. Która z funkcji f, g, h nie jest funkcją homograficzną?

1.88. Dany jest wzór funkcji homograficznej f. Podaj dziedzinę, zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $f(x)=\frac{4}{x+2}$ b) $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ c) $f(x)=\frac{x}{x-1}$ d) $f(x)=\frac{x+1}{x+4}$

1.89. Dany jest wzór funkcji homograficznej f. Wyznacz argument, dla którego ta funkcja przyjmuje wartość w.

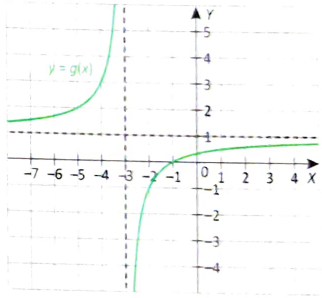
a) $f(x)=\frac{2x-5}{9x+27}$, $w=-5$, b) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $w=2+\sqrt{3}$

1.90. Funkcja homograficzna $f(x)=\frac{2x+b}{x+4}$, gdzie $x\in\mathbf{R}-\{-4\}$, dla argumentu -3 przyjmuje wartość 5. Oblicz współczynnik b i naszkicuj wykres funkcji f.

1.91. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji homograficznej $g(x)=\frac{x+b}{x+c}$, gdzie $x\neq -c$. Miejscem zerowym funkcji g jest liczba -1.

a) Oblicz współczynniki b i c.

b) Rozwiąż graficznie równanie $g(x) = -x - 1$.



1.92. Wykres funkcji homograficznej $f(x)=\frac{ax-10}{x+b}$, gdzie $x\neq -b$, przecina oś OY w punkcie o rzędnej $-3\frac{1}{3}$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba $-2\frac{1}{2}$.

a) Wyznacz wartości współczynników a i b.

b) Naszkicuj wykres funkcji f.

c) Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

1.93. Miejscem zerowym funkcji homograficznej $f(x)=\frac{a-x}{x+b}$ jest liczba 3. Funkcja f jest malejąca w przedziałach: $(-\infty,-8)$, $(-8,+\infty)$.

a) Oblicz wartości współczynników a i b.

b) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja f i funkcja $h(x)=\frac{-2x+6}{x+9}$ przyjmują tę samą wartość.

1.94. Dane są funkcje: $f(x)=\frac{2}{x-3}$, gdzie $x\neq 3$ oraz $g(x)=\frac{-x-2}{x}$, gdzie $x\neq 0$.

a) Naszkicuj wykresy funkcji f i g we wspólnym układzie współrzędnych.

b) Oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji f i g.

1.95. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji homograficznej f i wykresu funkcji kwadratowej g. Naszkicuj wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych.

a) $f(x)=\frac{-2x}{x+1}$, gdzie $x\neq -1$ oraz $g(x)=-x^2$

b) $f(x)=\frac{3x+10}{x+2}$, gdzie $x\neq -2$ oraz $g(x)=(x+1)^2-5$

Test sprawdzający do rozdziału 1.

1. Dziedziną ułamka algebraicznego $\frac{3x}{x(x-2)}$ jest zbiór:

A. $\boldsymbol{R}-\{0\}$ B. $\boldsymbol{R}-\{2\}$ C. $\boldsymbol{R}-\{-2\}$ D. $\boldsymbol{R}-\{0, 2\}$

2. Jeśli $a=2-\sqrt{3}$, to liczba $\frac{a-2}{a+1}$ jest równa:

A. $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ B. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$ D. $1-\sqrt{3}$

3. Po skróceniu ułamka $\frac{2x^2-7x+3}{3-x}$, gdzie $x\neq 3$, otrzymamy wyrażenie:

A. $-2x^2+7x$ B. $1-2x$ C. $2x-1$ D. $\frac{1}{2}-x$

4. Po rozszerzeniu ułamka $\frac{1}{2x-3}$, gdzie $x\neq 1\frac{1}{2}$, otrzymano ułamek, którego mianownik jest wielomianem $2x^3-3x^2+2x-3$. Wówczas licznik otrzymanego ułamka jest równy:

A. $2x^3-3x^2$ B. x^2+1 C. $-3x^2+2x$ D. x^2-1

5. Suma rozwiązań równania $\frac{(3x+2)(6x-18)(3x+1)}{x^2-9}=0$ wynosi:

A. 2 B. -15 C. -1 D. 0

6. Równanie $\frac{x-5}{x^2+4x}=\frac{1}{x}$

A. ma tylko jedno rozwiązanie B. ma dwa rozwiązania

C. jest sprzeczne D. jest tożsamościowe

7. Zbiorem wartości funkcji $f(x)=\frac{5}{x}-2$ jest zbiór:

A. $\boldsymbol{R}-\{0\}$ B. $\boldsymbol{R}-\{5\}$ C. $\boldsymbol{R}-\{-2\}$ D. $\boldsymbol{R}-\{-2, 0\}$

8. Aby otrzymać wykres funkcji homograficznej $y=\frac{3-x}{x+2}$, wystarczy wykres funkcji $f(x)=\frac{5}{x}$ przesunąć równolegle:

A. o 2 jednostki w lewo i 1 jednostkę w dół

B. o 2 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę

C. o 2 jednostki w lewo i 3 jednostki w górę

D. o 2 jednostki w prawo i 3 jednostki w dół

9. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$, gdzie $x\neq 3$. Wskaż zdanie fałszywe.

A. Miejsce zerowe funkcji f jest liczbą ujemną.

B. Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$.

C. Środkiem symetrii wykresu funkcji f jest punkt $(3, 1)$.

D. Wykres funkcji przecina oś OY poniżej punktu $O(0, 0)$.

10 Ile liczb całkowitych należy do dziedziny funkcji homograficznej $f(x)=2-\frac{5}{x+3}$, dla których funkcja f przyjmuje wartości, będące liczbami pierwszymi?

A. jedna B. dwie C. trzy D. cztery

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

11. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{4x-6}{3x}+\left[x-\frac{4(x-1)}{x}\right]:(2-x)$ b) $\left(\frac{5}{x-4}+\frac{4}{4-x}\right)\cdot\left(\frac{x^2+16}{2x}-4\right)+2:\frac{x^2}{x-1}$

12. Rozwiąż dane równanie.

a) $\frac{12x^3+4x^2-3x-1}{2x-1}=0$

b) $(x-2)^2=\frac{8}{2-x}$

c) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{3x}{x^3-1}$

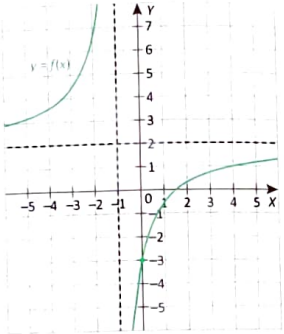
d) $\frac{x}{x+1}+\frac{3}{2}=\frac{2}{x}$

e) $\frac{x+3}{x+2}+1=\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{x-3}{2-x}$

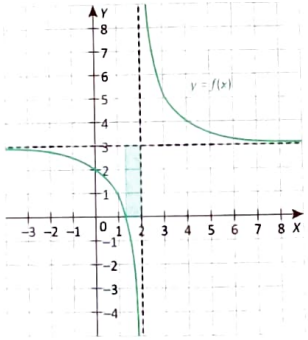
f) $\frac{1}{6}x^2-\frac{1-2x}{x-6}=\frac{x}{6x-36}$

13. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji homograficznej $f(x)=\frac{a}{x+b}+c$, gdzie $a\neq 0$ i $x\neq -b$. Wykres przecina oś OY w punkcie $(0, -3)$.

a) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.
b) Wyznacz współczynniki a, b, c.
c) Oblicz miejsce zerowe funkcji f.
d) Podaj zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



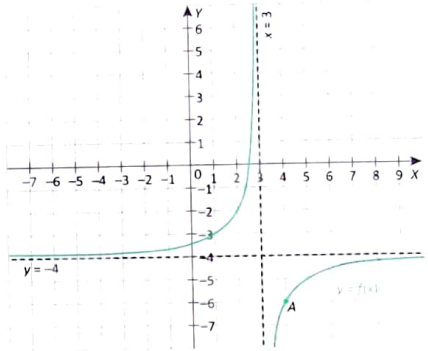
14. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji $f(x)=\frac{3x-4}{x-2}$, gdzie $x\in R-\{2\}$. Oblicz pole prostokąta zaznaczonego na tym rysunku wiedząc, że jeden z jego wierzchołków należy do wykresu funkcji f, a pozostałe odpowiednio do prostych $x = 2$, $y = 3$.



15. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji homograficznej $f(x)=\frac{-4x+b}{x+c}$, gdzie $x\neq -c$.

Wiedząc, że do wykresu funkcji f należy punkt $A(4, -6)$:

a) wyznacz współczynniki b, c,
b) ustal znak liczby $|f(-\pi)|+f(\pi)$,
c) sprawdź, czy punkt $B\left(1-\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2}\right)$ należy do wykresu funkcji f.



16. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykres funkcji homograficznej $f(x)=\frac{2x+11}{x+4}$, gdzie $x\in R-\{-4\}$, oraz wykres funkcji kwadratowej $g(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^2+3$. Następnie oblicz współrzędne punktów wspólnych tych wykresów.

17. Wyznacz wszystkie liczby całkowite, dla których funkcja homograficzna $f(x)=1-\frac{8}{x+1}$, gdzie $x\neq -1$, przyjmuje wartości będące liczbami pierwszymi.

D 18. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie oraz $\frac{3a-b}{2a+b}=1$, to $\frac{2a+3b}{a+4b}=1\frac{1}{6}$.

D 19. Wykaż, że jeśli $a\neq 0$, $b\neq 0$ oraz $a\neq b$, to wartość wyrażenia $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right):\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}{3a-3b}$ jest stała.

D 20. Wykaż, że jeśli $b\in R-\{0, 1\}$ oraz $a-2b=ab$, to wartość wyrażenia $\frac{b}{a}:\left(1-\frac{b+1}{2}\right)$ jest stała.

D 21. Wykaż, że jeśli $a \neq -b$, $a \neq b$ oraz $b \neq 2a$, to

$$\left[\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4a}{a^3+b^3}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}\right):\frac{2a-b}{a^2+2ab+b^2}\right]\cdot\frac{a-b}{4}=a+b.$$

22. Maszynistka przepisywała rękopis książki liczący 240 stron – dziennie przepisując tę samą liczbę stron. Gdyby codziennie przepisywała o 10 stron więcej, to skończyłaby tę pracę o 2 dni wcześniej. W ciągu ilu dni maszynistka przepisała cały rękopis?

23. Zakład stolarski otrzymał zamówienie na wyprodukowanie 192 krzeseł. Dziennie wytwarzano tyle samo krzeseł. Ale po wykonaniu 25% zamówienia usprawniono produkcję i wówczas zakład zaczął produkować o 2 krzesła dziennie więcej. Dzięki temu umowę zrealizowano o 1 dzień wcześniej niż zaplanowano. W ciągu ilu dni zakład wyprodukował krzesła?

24. Zbiornik może być napełniony wodą z dwóch kranów. Pierwszy kran napełnia pusty zbiornik w czasie o 2 godziny krótszym niż drugi kran. Jeśli otworzymy dwa krany jednocześnie, to zbiornik zostanie napełniony w ciągu 2 godzin i 24 minut. Oblicz, ile czasu potrzeba, aby napełnić pusty zbiornik tylko przez pierwszy kran?

25. Z miast A i B odległych od siebie o 252 km wyjechały naprzeciw siebie dwa pociągi. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o 20 minut później i jechał z prędkością o 9 km/h większą niż pociąg jadący z miasta B do miasta A. Pociągi minęły się na stacji leżącej w połowie drogi między miastami A i B. Oblicz, z jakimi średnimi prędkościami jechały te pociągi.

2. Ciągi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów

2.1. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu.

a) $a_n = 2n^2 - 5n + 1$ b) $a_n = \frac{n+4}{2n-3}$ c) $a_n = 3^{n-1} + (-1)^n \cdot (n+1)$

2.2. Ciąg (b_n) ma pięć wyrazów. Naszkicuj wykres tego ciągu.

a) $b_n = (3-n)(n+1)$ b) $b_n = 2 + (-1)^{n+1}$ c) $b_n = \frac{6n}{n+1}$

2.3. Sprawdź, które wyrazy nieskończonego ciągu (a_n) są równe zero.

a) $a_n = (n^2-2)(n^2-4)(n-3)$ b) $a_n = \frac{n^2-4n-21}{n^2+1}$

c) $a_n = \frac{n^4-256}{n^2-n+2}$ d) $a_n = \frac{n^3-8n^2-4n+32}{3n+2}$

2.4. Wyznacz wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{3n-1}{5n+2}$, których wartość jest równa $\frac{1}{2}$,

b) $b_n = (2n-3)^2$, których wartość jest równa 81,

c) $c_n = n^2 \cdot (n^2-5)$, których wartość jest równa -4,

d) $d_n = n^3 - 7n^2 + 11n$, których wartość jest równa 5.

2.5. Dany jest wyraz ogólny ciągu (a_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Które wyrazy tego ciągu są liczbami ujemnymi?

a) $a_n = \frac{2n-6}{n+1}$ b) $a_n = n^2 - 7n + 10$ c) $a_n = 2 - |n-3|$

2.6. Wyznacz wszystkie wyrazy ciągu (b_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, określonego wzorem:

a) $b_n = |2n-3| - 9$, które są mniejsze od 4,

b) $b_n = -n^2 + 4n$, które są większe od -12.

2.7. Ciąg (c_n) jest określony wzorem $c_n = \frac{2}{5}n - 2{,}8$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Czy wśród wyrazów tego ciągu znajduje się liczba 2?

b) Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału $\left\langle \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$?

2.8. Ciąg (d_n) jest określony wzorem $d_n = 3 - |n - 5|$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Sprawdź, czy liczba 4 jest wyrazem tego ciągu.

D b) Wykaż, że ciąg (d_n) ma tylko siedem wyrazów nieujemnych.

D **2.9.** Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{5n^2 - 43n + 24}{5n - 3}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że do przedziału $(3, 14\rangle$ należy jedenaście wyrazów tego ciągu.

2.10. Wyznacz wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), będące liczbami naturalnymi.

a) $a_n = 2 - \frac{6}{n}$ b) $a_n = \frac{3n-6}{n+2}$ c) $a_n = \frac{n^2 - 11n + 8}{n}$.

D **2.11.** Wykaż, że wśród wyrazów nieskończonego ciągu (b_n), gdzie $b_n = 3n - 2 \cdot \frac{n+6}{n}$, tylko dwa wyrazy są liczbami pierwszymi.

D **2.12.** Dany jest ciąg (c_n), gdzie $c_n = \frac{2 + n - 6n^2}{2n - 1}$, $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi ujemnymi.

2.13. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Wyznacz wyrazy: a_{n+1}, a_{2k}, oraz a_{3k-2}, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$.

a) $a_n = \frac{2n-5}{n-1}$ b) $a_n = n^3$ c) $a_n = 2n - n^2$

2.14. Wyznacz wyraz ogólny a_n ciągu (a_n), $n \in \mathbf{N}_+$.

a) $a_{n+1} = n + 4$ b) $a_{n+2} = (n+1)^2$ c) $a_{n+3} = \frac{n+2}{2n-5}$

2.15. Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n), wiedząc, że dla każdego $n \in \mathbf{N}_+$ spełnione są dwie równości: $a_n + a_{n-1} = \frac{2n+1}{n^2+n}$ oraz $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n^2+n}$.

2.16. Wyznacz wyraz ogólny a_n nieskończonego ciągu (a_n) wiedząc, że dla dowolnej liczby naturalnej n:

a) $a_{n+1} - a_{n+2} = 7n$ oraz $a_{n+1} + a_{n+2} = 4 - n$

b) $a_{n+2} - a_{n+1} = n^2$ oraz $a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3 - 2n^2$

2.17. Ciąg (b_n) jest określony za pomocą wzoru rekurencyjnego. Wyznacz b_5.

a) $\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_{n+1} = 2b_n - 1, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} b_1 = \frac{1}{4} \\ b_{n+1} = (b_n)^2 \cdot 4^n, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} b_1 = -3 \\ b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = -1 \\ b_{n+2} = (n-1) \cdot b_n - b_{n+1}, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

2.18. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wyrazy tego ciągu powstały według pewnej reguły. Wyznacz wyraz ogólny tego ciągu.

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots\right)$ b) $\left(1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$

c) $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, 3\frac{3}{4}, 4\frac{4}{5}, \ldots\right)$ d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \ldots\right)$

2.19. Dany jest ciąg (b_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Podaj wyraz ogólny tego ciągu. Następnie zapisz wzór rekurencyjny ciągu (b_n).

a) $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ b) $\left(9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$

2.20. Dany jest ciąg (c_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Podaj wzór rekurencyjny tego ciągu. Oblicz c_{10}.

a) $\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots\right)$ b) $(1, 2, 4, 7, 11, 16, \ldots)$

2.21. Ciąg (d_n) określony jest wzorem rekurencyjnym

$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_{n+1} = d_n - 2n + 1, \text{ jeśli } n \geqslant 1. \end{cases}$

Wyznacz wyraz ogólny tego ciągu.

Monotoniczność ciągów

D 2.22. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Wykaż na podstawie definicji, że ten ciąg jest rosnący.

a) $a_n = \sqrt{3} \cdot n + 1$

b) $a_n = 1 - \frac{4}{n+1}$

c) $a_n = n^2 - n - 2$

d) $a_n = \frac{10n+4}{2n+1}$

D 2.23. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (b_n). Wykaż na podstawie definicji, że ten ciąg jest malejący.

a) $b_n = 2 - \frac{2}{3}n$

b) $b_n = 7 - (n-1)^2$

c) $b_n = \frac{3}{2n+3}$

d) $b_n = 2 - n^3$

2.24. Zbadaj monotoniczność nieskończonego ciągu (c_n).

a) $c_n = n^2 + 3n$

b) $c_n = \frac{2n+3}{n+1}$

c) $c_n = 2 - \frac{5}{n+3}$

d) $c_n = 10n - n^2$

e) $c_n = \frac{n(n-3)}{2} + 1$

f) $c_n = -2(n^2 - 3n + 1)$

2.25. Ciąg (a_n) jest skończony. Zbadaj monotoniczność tego ciągu.

a) $a_n = n^2 - 20n$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$

b) $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $a_n = \begin{cases} 1, \text{ jeśli } n \in \mathbf{N}_+ \text{ i } n \leqslant 7 \\ n, \text{ jeśli } n \in \mathbf{N}_+ \text{ i } 8 \leqslant n \leqslant 15 \end{cases}$

d) $a_n = \begin{cases} -n^2 + 6n - 5, \text{ jeśli } n \in \mathbf{N}_+ \text{ i } n < 4 \\ n + 1, \text{ jeśli } n \in \mathbf{N}_+ \text{ i } 4 \leqslant n \leqslant 10 \end{cases}$

2.26. Podaj przykład:

a) pięciowyrazowego ciągu rosnącego o wyrazach mniejszych od -3,

b) sześciowyrazowego ciągu niemalejącego o wyrazach dodatnich,

c) dziesięciowyrazowego ciągu nierosnącego o wyrazach należących do przedziału $\langle -1, 5)$,

d) pięciowyrazowego ciągu, który nie jest monotoniczny,

e) nieskończonego ciągu malejącego o wyrazach mniejszych od 2,

f) nieskończonego ciągu nierosnącego o wyrazach niedodatnich.

2.27. Podaj przykład:

a) nieskończonego ciągu rosnącego o wyrazach większych od -8,

b) nieskończonego ciągu malejącego o wyrazach mniejszych od 4,

c) nieskończonego ciągu niemalejącego o wyrazach nieujemnych,

d) nieskończonego ciągu rosnącego o wyrazach z przedziału $\langle 4, 5)$.

2.28. Dany jest wyraz ogólny ciągu (b_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Sprawdź, czy ten ciąg jest monotoniczny.

a) $b_n = (-3)^n$

b) $b_n = |n - 5|$

c) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3n}$

d) $b_n = 4^{-n+1}$

2.29. Zbadaj monotoniczność nieskończonego ciągu (a_n), określonego wzorem rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 2, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = a_n + 5n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3}, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{2}{a_n}, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -\frac{3a_n}{2}, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

2.30. Podaj wyraz ogólny przykładowego nieskończonego malejącego ciągu (a_n) o tej własności, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = |a_n|$ jest rosnący.

2.31. Podaj wyraz ogólny przykładowego nieskończonego rosnącego ciągu (a_n) o tej własności, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = |a_n|$ jest malejący.

2.32. Podaj wyraz ogólny przykładowego nieskończonego i niemonotonicznego ciągu (a_n) i takiego, że ciąg (b_n), gdzie $b_n = |a_n|$ jest monotoniczny.

Ciąg arytmetyczny

2.33. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 5n - 3$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

b) Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

c) Podaj wzór rekurencyjny ciągu (a_n).

2.34. Dany jest ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \frac{4 - 7n}{3}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym.
b) Zbadaj monotoniczność tego ciągu.
c) Oblicz $b_{10} + b_{25}$.

2.35. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są $a_1 = -8{,}5$ i $r = 2{,}5$. Oblicz:
a) wyrazy a_6, a_{10} i a_{27} b) wyraz ogólny ciągu c) $a_{2n+1} - a_{n+3}$

2.36. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n(n+1)$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.
D a) Wykaż, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.
b) Drugi i piąty wyraz ciągu (a_n) są odpowiednio równe pierwszemu i siódmemu wyrazowi nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n). Wyznacz wyraz ogólny ciągu (b_n).

2.37. Między liczby 4 i 22 wstaw kolejno pięć liczb tak, aby wraz z danymi liczbami tworzyły rosnący ciąg arytmetyczny.

2.38. Pierwszy wyraz skończonego ciągu arytmetycznego o różnicy 3,1 wynosi 2,3. Ostatni wyraz tego ciągu jest równy 48,8. Ile wyrazów ma ten ciąg?

2.39. W skończonym ciągu arytmetycznym przedostatni wyraz jest równy 38, a ostatni wynosi 41. Wiedząc, że drugi wyraz tego ciągu jest równy 5, oblicz liczbę wyrazów tego ciąg.

2.40. Ciąg arytmetyczny ma siedemnaście wyrazów. Środkowy wyraz ciągu jest równy 8. Wyznacz różnicę tego ciągu wiedząc, że trzeci wyraz ciągu jest równy –22.

2.41. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli:
a) $a_7 + a_{13} = 14$ i $a_{10} + a_{22} = 10$ b) $a_8 - a_3 = 10$ i $2a_5 + 3a_7 = 37$
c) $a_3 + a_5 = 24$ i $a_3 \cdot a_5 = 135$ d) $a_9 - a_6 = 21$ i $a_9 \cdot a_6 = 2146$.

2.42. Oblicz, ile jest liczb naturalnych:
a) należących do przedziału $\langle 200, 895\rangle$, które są podzielne przez 4,
b) mniejszych od 300, które nie są podzielne przez 7,
c) należących do przedziału $(10, 400\rangle$, których reszta z dzielenia przez 3 wynosi 2.

D 2.43. Wykaż że ciąg $\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}, 3, \sqrt{3}+4\right)$ jest ciągiem arytmetycznym.

2.44. Wyznacz liczbę k, dla której ciąg $(3k^2 - 2k + 3, k^2 - k + 1, -2k^2 + k + 5)$ jest ciągiem arytmetycznym. Dla wyznaczonej liczby k podaj ten ciąg.

2.45. Wyznacz liczby x, y tak, aby czterowyrazowy ciąg $(12, x, y, 27)$ był ciągiem arytmetycznym.

2.46. Dla jakiej wartości x liczby x^3, $x^2 + 2$, 4 są w danej kolejności odpowiednio pierwszym, trzecim i piątym wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n)? Dla znalezionej wartości x napisz wyraz ogólny ciągu (a_n).

2.47. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego wiedząc, że te długości ustawione rosnąco tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2.

2.48. Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 27, suma dwóch ostatnich wyrazów wynosi 105. Wiedząc, że siódmy wyraz ciągu wynosi 30, oblicz:
a) pierwszy wyraz tego ciągu b) liczbę wyrazów tego ciągu.

2.49. W skończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_2 = 2$ oraz $a_6 = 22$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Wyznacz liczbę wyrazów ciągu (a_n) wiedząc, że ostatni wyraz wynosi 222.

Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

2.50. Suma n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Oblicz:
a) a_1 b) S_6 c) a_5 d) $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$.
Następnie wyznacz ogólny wyraz ciągu (a_n).

D 2.51. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n(n^2 - 1)$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że:
a) $a_n = 3n(n-1)$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. b) ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

2.52. Sumę n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) określa wzór $S_n = n^2 - 4n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.
D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
b) Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

2.53. Sumę n początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) określa wzór $S_n = 5n - n^2$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.
D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym malejącym.
b) Oblicz $a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}$.

2.54. Suma ośmiu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 17, a suma trzynastu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 32. Oblicz:

a) $a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$ b) a_{11} c) $a_{10} + a_{11} + a_{12}$

2.55. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (b_n), $n \geqslant 1$, dane są: $b_1 = -4$, $r = 7$. Wiedząc, że S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu, oblicz:

a) S_{25} b) $b_{10} + b_{11} + b_{12} + \ldots + b_{25}$

c) $b_{13} + b_{14} + b_{15} + \ldots + b_{22}$

2.56. Nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n) opisuje wzór $a_n = 24 - 4n$, $n \geqslant 1$.

a) Napisz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n).

b) Oblicz, ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć do sumy, aby jej wartość wynosiła 0.

2.57. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n): $b_n = 10{,}5 - n$, $n \geqslant 1$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć do sumy, aby jej wartość była największa? Podaj tę największą wartość.

2.58. Oblicz:

a) $-7 - 4 - 1 + 2 + 5 + \ldots + 227$

b) $8^2 - 10^2 + 12^2 - 14^2 + 16^2 - 18^2 + \ldots + 2012^2 - 2014^2$

2.59. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) parzystych, nie większych od 250,

b) dwucyfrowych, podzielnych przez 4.

2.60. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) mniejszych od 200, których reszta z dzielenia przez 3 jest równa 1,

b) większych od 100 i jednocześnie mniejszych od 500, których reszta z dzielenia przez 5 jest równa 1 lub 4.

2.61. Suma szesnastu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 728. Wiedząc, że $a_{16} = 63$, oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n).

2.62. Ciąg (a_n) jest skończonym ciągiem arytmetycznym, którego suma wszystkich wyrazów jest równa 204. Różnica ciągu jest równa 6, a ostatni wyraz ciągu wynosi 49. Ile wyrazów ma ten ciąg?

2.63. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (b_n) dane są: $b_1 = 58$ oraz $r = -3$. Zsumowano kilkanaście początkowych wyrazów tego ciągu i otrzymano 578. Ile wyrazów ciągu (b_n) wzięto do tej sumy?

2.64. Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny (c_n), w którym $c_1 = 8$, $r = 3$.

D a) Wykaż, że wyrazy ciągu (c_n) o numerach parzystych tworzą ciąg arytmetyczny (b_n). Podaj różnicę ciągu (b_n).

b) Oblicz sumę czternastu początkowych wyrazów ciągu (b_n).

2.65. Rowerzysta w ciągu pierwszej godziny przejechał 20 km, a w ciągu każdej następnej godziny odcinek o 0,75 km krótszy od poprzedniego. Jaką drogę pokonał rowerzysta, jeśli w ciągu ostatniej godziny przejechał 17 km?

2.66. Wykopanie pierwszego metra studni kosztuje 8 zł, a każdego następnego o 3 zł drożej od poprzedniego.

a) Ile kosztuje wykopanie studni głębokości 25 m?

b) Wykopanie studni kosztowało 798 zł. Jaka była jej głębokość?

2.67. Marek chce przekopać swój przydomowy ogródek warzywny o powierzchni 7,83 a. Pierwszego dnia przekopał 27 m^2. Aby przyspieszyć prace postanowił każdego następnego dnia przekopywać o 4 m^2 ogródka więcej niż poprzedniego dnia. Ile najmniej dni musi przeznaczyć Marek na wykonanie tej pracy?

2.68. Z pełnego pojemnika zaczęła wylewać się woda. W pierwszej sekundzie wypłynęło 3,4 litra wody, a w każdej następnej o 0,3 litra mniej niż w poprzedniej. W ostatniej sekundzie wypłynęło tylko 0,1 litra wody.

a) Ile czasu wypływała woda z pojemnika?

b) Jaką pojemność miał pojemnik?

Ciąg geometryczny

2.69. Zbadaj, który z danych ciągów (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), gdzie $n \in N_+$, jest geometryczny.

$a_n = 5^n \cdot 2^{n-1}$ $\quad b_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+2}}$ $\quad c_n = n \cdot 3^{n-1}$ $\quad d_n = \dfrac{n+1}{4^n}$

2.70. Wyznacz wyraz ogólny ciągu geometrycznego, określonego wzorem rekurencyjnym.

a) $\begin{cases} a_1 = 27 \\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{2}, \ n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_1 = -100 \\ b_n = (-0{,}2) \cdot b_{n-1}, \ n > 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} c_1 = -\dfrac{3}{4} \\ c_{n+1} = -c_n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

2.71. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_7 = -510{,}3$ oraz $q = -3$

b) $a_4 = -4\left(\sqrt{3}+2\right)$ oraz $q = \sqrt{3}+1$

2.72. Ciąg $\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, 3, \sqrt[3]{81}, \ldots\right)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym. Oblicz dwudziesty siódmy wyraz tego ciągu i przedstaw go w postaci potęgi liczby 3.

2.73. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) wiedząc, że:

a) $a_1 = 0{,}5$ oraz $a_6 = 512$

b) $a_1 = 6$ oraz $a_5 = \frac{2}{27}$

c) $a_2 = -6$ oraz $a_4 = -8{,}64$

d) $a_1 = \frac{1}{7}$ oraz $a_2 \cdot a_4 = 1$

2.74. Ciąg (b_n) jest skończonym ciągiem geometrycznym, w którym $b_1 = -1$, $q = -\frac{2}{7}$. Wiedząc, że ostatni wyraz ciągu (b_n) jest równy $\frac{8}{343}$, oblicz liczbę wyrazów tego ciągu.

2.75. Dwa środkowe wyrazy sześciowyrazowego, malejącego ciągu geometrycznego są odpowiednio równe $\frac{27}{8}$ i $\frac{9}{4}$. Oblicz różnicę pomiędzy pierwszym i ostatnim wyrazem tego ciągu.

2.76. Iloczyn wszystkich wyrazów pięciowyrazowego ciągu geometrycznego jest równy 32. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu.

D 2.77. W pewnym nieskończonym ciągu geometrycznym iloczyn wyrazu drugiego i ósmego jest równy 36. Wykaż, że piąty wyraz tego ciągu jest równy −6 lub 6.

2.78. Nieskończony ciąg (b_n) o wyrazach dodatnich ma tę własność, że każdy jego wyraz jest o 20% większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego.

a) Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym? Odpowiedź uzasadnij.

b) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeśli jego piąty wyraz jest równy $\frac{1296}{625}$.

2.79. Klient banku spłacił pożyczkę w wysokości 13 923 zł w czterech ratach, z których każda następna była o 10% większa od poprzedniej. Oblicz kwotę pierwszej i czwartej raty.

2.80. W ciągu geometrycznym (c_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, dane są: $c_6 = -\frac{1}{64}$ i $c_9 = \frac{1}{512}$. Wyznacz wyraz ogólny ciągu (c_n). Czy ciąg (c_n) jest monotoniczny?

D 2.81. Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym, w którym $a_3 = -0{,}36$ oraz $a_6 = -1\frac{2}{3}$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący. Wyznacz ogólny wyraz tego ciągu.

2.82. Ciąg geometryczny ma cztery wyrazy. Jeśli trzeci wyraz tego ciągu zmniejszymy o sumę dwóch pierwszych wyrazów, to otrzymamy 3. Jeśli czwarty wyraz zmniejszymy o sumę dwóch środkowych wyrazów, to otrzymamy 6. Wyznacz ten ciąg.

2.83. W czterowyrazowym ciągu geometrycznym iloczyn pierwszego i trzeciego wyrazu jest równy 0,64, zaś iloczyn drugiego i czwartego wyrazu wynosi 2,56. Wyznacz ten ciąg.

2.84. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (b_n), jeśli:

a) $b_5 - b_3 = 1680$ oraz $b_3 + b_4 = 560$ b) $b_7 - b_3 = 120$ oraz $b_7 - b_5 = 96$.

D 2.85. Wykaż, że liczby $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.

2.86. Ciąg $(-9, x, -2)$ jest rosnącym ciągiem geometrycznym. Oblicz x.

2.87. Liczby $7x + 1$, $2x + 2$, $x - 1$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x i wyznacz ten ciąg.

D 2.88. Wykaż, że jeśli ciąg $(x + 15, 8, x - 15)$ jest ciągiem geometrycznym malejącym, to iloraz tego ciągu jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(x) = 4x^4 - x^3 - 32x + 8$.

D 2.89. Wykaż, że jeśli ciąg $(12, a, b, c, d, 2916)$ jest ciągiem geometrycznym, to suma $a + b + c + d$ jest wielokrotnością liczby 5.

2.90. Długości trzech różnych krawędzi prostopadłościennego otwartego zbiornika na wodę tworzą malejący ciąg geometryczny, w którym ostatnim wyrazem jest wysokość tego zbiornika. Pojemność zbiornika wynosi 216 litrów.

D a) Wykaż, że jedna z krawędzi podstawy tego zbiornika ma długość 60 cm.

b) Wiedząc dodatkowo, że długości krawędzi podstawy zbiornika pozostają w stosunku 2 : 1, oblicz pole powierzchni tego zbiornika.

D 2.91. Wykaż, że nieskończony ciąg (c_n) o wyrazie ogólnym $c_n = \frac{6}{3^{2n+1}} + 11 \cdot 9^{-n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, jest ciągiem geometrycznym. Podaj pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

D 2.92. Wykaż, że nieskończony ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = 2^{\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, jest ciągiem geometrycznym. Podaj pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

2.93. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, jeśli:

a) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $q = -2$ b) $a_1 = 8$, $q = \sqrt{2}$

2.94. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n), określonego wzorem:

a) $\begin{cases} b_1 = 1 - \sqrt{3} \\ b_{n+1} = 2b_n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $b_n = \frac{3}{5^n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$

2.95. Suma czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $\frac{65}{81}$. Oblicz pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego, jeśli iloraz tego ciągu wynosi $\frac{2}{3}$.

2.96. Suma dziewięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa $127\frac{3}{4}$. Oblicz dziewiąty wyraz tego ciągu wiedząc, że iloraz ciągu jest równy 2.

2.97. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (b_n), w którym $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać wynik $8\frac{8}{9}$?

2.98. Nieskończony ciąg (96, −48, 24, ...) jest ciągiem geometrycznym. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy wziąć do sumy, aby jej wartość była równa 64,5?

2.99. Oblicz daną sumę wiedząc, że kolejne składniki sumy to kolejne wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Ile składników występuje w tej sumie?

a) $10\frac{1}{8} + 6\frac{3}{4} + 4\frac{1}{2} + \ldots + 1\frac{1}{3}$ b) $-1\frac{7}{8} + 3\frac{3}{4} - 7\frac{1}{2} + \ldots + 240$

2.100. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 729, a ostatni 96. Wiedząc, że suma wyrazów tego ciągu wynosi 1995, oblicz:

a) iloraz tego ciągu b) liczbę wyrazów tego ciągu.

2.101. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 128, a ostatni 1458. Wiedząc, że suma wyrazów tego ciągu wynosi 4118, oblicz:

a) iloraz tego ciągu b) liczbę wyrazów tego ciągu.

2.102. Dyrektor firmy przyznał pracownikom nagrody, o łącznej wartości 14 760 zł. Największa nagroda wynosiła 5000 zł, a każda następna była pewnym stałym ułamkiem poprzedniej. Wartość najmniejszej nagrody to 2560 zł. Oblicz, ile było nagród i jaką wartość miały pozostałe nagrody.

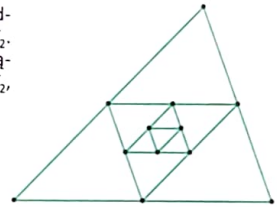
2.103. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów malejącego ciągu geometrycznego wiedząc, że drugi wyraz tego ciągu jest równy 20, a czwarty jest równy 5.

2.104. Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{4}$, a suma jego trzech początkowych wyrazów wynosi 1,75. Wyznacz:

a) iloraz tego ciągu b) wyraz ogólny tego ciągu.

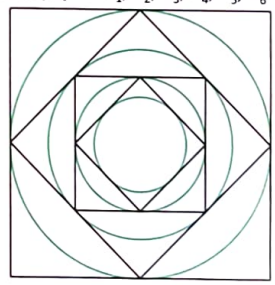
2.105. Ciąg geometryczny ma cztery wyrazy, których suma jest równa 130. Średnia arytmetyczna wyrazów skrajnych jest równa 35. Wyznacz ten ciąg.

2.106. Obwód trójkąta T_1 jest równy 96 cm. Środki boków trójkąta T_1 są wierzchołkami trójkąta T_2. Środki boków trójkąta T_2 są wierzchołkami trójkąta T_3 itd. Oblicz sumę obwodów trójkątów T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7.



2.107. Trójkąt T_1 jest trójkątem równobocznym, którego każdy bok ma długość 8 cm. Środki boków trójkąta T_1 są wierzchołkami trójkąta T_2. Środki boków trójkąta T_2 są wierzchołkami trójkąta T_3 itd. Oblicz sumę pól trójkątów T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6.

2.108. W kwadrat o boku 16 cm wpisano koło K_1. W koło K_1 wpisano kwadrat, a w ten kwadrat koło K_2. W koło K_2 wpisano kwadrat, a w ten kwadrat koło K_3, itd. Oblicz sumę: *a*) obwodów *b*) pól kół K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8.



Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne

2.109. Ciąg $(x, y, 1)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(1, x, y)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz x i y.

2.110. Ciąg $(x - 1, y, 11)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(x, y, 18)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz x i y. Wyznacz te ciągi. Podaj różnicę ciągu arytmetycznego i iloraz ciągu geometrycznego.

2.111. Trzy liczby, których suma jest równa 9, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy $3\frac{1}{8}$, to otrzymamy rosnący ciąg geometryczny. Wyznacz liczby, tworzące ciąg arytmetyczny.

2.112. Trzy liczby tworzą malejący ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 18. Jeśli drugą liczbę zmniejszymy o 3 i trzecią zmniejszymy o 2, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego.

2.113. Pierwszy, drugi i trzeci wyraz ciągu geometrycznego są odpowiednio drugim, szóstym i osiemnastym wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy 2. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n).

2.114. Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 28. Te liczby są odpowiednio drugim, czwartym i piątym wyrazem nieskończonego, malejącego ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę wyrazów ciągu geometrycznego od wyrazu b_4 do wyrazu b_{10} włącznie.

2.115. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz szósty jest o 9 większy od wyrazu trzeciego. Średnia arytmetyczna wyrazów siódmego, dziewiątego i dziesiątego jest równa 15.

a) Wyznacz wyraz ogólny ciągu (a_n).

b) Wiedząc dodatkowo, że dla pewnej liczby naturalnej dodatniej k liczby a_k, a_{k+1}, a_{k+5} są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n), oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

2.116. Suma n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \frac{5}{2}n^2 + \frac{5}{2}n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Wyznacz wyraz ogólny ciągu (a_n).

b) Wiedząc dodatkowo, że dla pewnej liczby naturalnej k, liczby a_{k+1}, a_{k+3}, a_{k+7}, w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego, oblicz k i wyznacz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

D 2.117. Ciąg (x, y, z) jest ciągiem arytmetycznym oraz $x + y + z = 12$. Wykaż, że jeśli $(x + 3, y + 3, z + 3)$ jest ciągiem geometrycznym, to iloczyn xyz jest kwadratem liczby naturalnej.

D 2.118. Wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) są dodatnie i różnią się między sobą. Pierwszy, trzeci i siódmy wyraz ciągu (a_n) są równe odpowiednio pierwszemu, drugiemu i trzeciemu wyrazowi pewnego ciągu geometrycznego (b_n). Wykaż, że iloraz ciągu (b_n) jest liczbą pierwszą.

Lokaty pieniężne i kredyty bankowe

2.119. Pan Jan wpłacił na lokatę 6000 zł na procent prosty. Oprocentowanie roczne lokaty jest równe 4%, a odsetki od lokaty dopisywane są po każdym roku oszczędzania. Oblicz, jaką kwotę będzie miał pan Jan na tej lokacie po trzech latach oszczędzania, jeśli:

a) pominiemy podatek od dochodów kapitałowych,

b) uwzględnimy 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.120. Pani Anna założyła wpłaciła na lokatę 4000 zł na procent prosty. Roczna stopa procentowa tej lokaty wynosi 2,4%, a odsetki od lokaty dopisywane są co kwartał. Oblicz stan lokaty pani Anny

a) po roku oszczędzania

b) po 15 miesiącach oszczędzania,

c) po 2,5 roku oszczędzania

d) po 8 latach oszczędzania.

Uwzględnij 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.121. Pani Marta założyła lokatę, wpłacając 3000 zł na procent prosty o rocznym oprocentowaniu równym 7%. Dodatkowo na początku każdego następnego roku oszczędzania wpłacała na tę lokatę kolejne 3000 zł. Wiedząc, że bank doliczał odsetki po każdym roku oszczędzania, oblicz kwotę na lokacie pani Marty po pięciu latach,

a) z pominięciem podatku dochodowego,

b) z uwzględnieniem 18-procentowego podatku od dochodów kapitałowych.

2.122. Pan Adam założył lokatę na procent prosty, wpłacając do banku 8000 zł. Roczne oprocentowanie tej lokaty wynosiło 4,5%, a odsetki były dopisywane po każdym roku oszczędzania. Po upływie pierwszego i każdego następnego roku pan Adam wpłacał dodatkowo na tę lokatę 1000 zł. Ile lat pan Adam oszczędzał na tej lokacie, jeśli na koniec tego okresu oszczędzania, po dopisaniu odsetek, lokata miała wartość 26 290 zł? Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

2.123. Pan Rafał założył czteroletnią lokatę na procent składany, wpłacając do banku 5000 zł. Roczne oprocentowanie tej lokaty jest równe 6%. Oblicz, jaką kwotę otrzyma pan Rafał z lokaty po tym okresie oszczędzania, jeśli kapitalizacja odsetek jest:

a) roczna b) półroczna c) kwartalna.

Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

2.124. Klient założył w banku lokatę w wysokości 25 000 zł na procent składany, o oprocentowaniu 10% w skali roku. Oblicz, jaką kwotę będzie miał na tej lokacie po trzech latach, jeśli odsetki są kapitalizowane:

a) po każdym roku oszczędzania b) co sześć miesięcy c) co kwartał.

Uwzględnij 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.125. Pani Ewa wpłaciła na lokatę 10 000 zł. Roczne oprocentowanie lokaty jest równe 8%, a kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał. Oblicz kwotę, jaką pani Ewa będzie miała na lokacie:

a) po 9 miesiącach b) po półtora roku c) po trzech latach oszczędzania.

Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

2.126. Pani Stefania założyła w banku lokatę w wysokości 10 000 zł na procent składany. Po dwóch latach bank wypłacił z lokaty całą kwotę, równą 12 155,06 zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty w skali roku, jeśli bank kapitalizował odsetki co sześć miesięcy? Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

2.127. Pani Irena założyła w banku lokatę w wysokości 10 000 zł na procent składany. Po dwóch latach bank wypłacił jej 12 146,04 zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty w skali roku, jeśli bank kapitalizował odsetki co trzy miesiące? Uwzględnij 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2.128. Oblicz, jaką kwotę należy przeznaczyć na lokatę na procent składany, trwającą:

a) sześć miesięcy b) dziewięć miesięcy c) rok

aby po jej zakończeniu otrzymać 20 000 zł. Roczna stopa procentowa tej lokaty jest równa 12%, a kapitalizacja odsetek odbywa się co trzy miesiące. Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

2.129. W pewnym sklepie ze sprzętem RTV można kupić telewizor LCD, płacąc cztery raty po 2000 zł. Pierwszą ratę trzeba spłacić po trzech miesiącach od daty zakupu, a kolejne raty co trzy miesiące. Pan Michał chciałby kupić ten telewizor w systemie ratalnym. Ma na koncie w banku 7700 zł. Oprocentowanie na tym koncie wynosi 8% w skali roku, a kapitalizacja odsetek jest kwartalna. Czy ta kwota jest wystarczająca na zakup telewizora w systemie ratalnym? Odpowiedź uzasadnij.

2.130. Pani Klaudia wzięła w banku kredyt w wysokości 40 000 zł na zakup samochodu. Roczna stopa procentowa kredytu jest równa 16%. Kredyt ma być spłacony w ciągu dwóch lat, w kwartalnych ratach malejących. Pierwsza rata ma być spłacona po trzech miesiącach od daty przyznania kredytu. Oblicz:

a) wysokość pierwszej i ostatniej raty b) łączną kwotę odsetek od kredytu.

2.131. Pan Marcin wziął w banku kredyt w wysokości 40 000 zł na zakup samochodu. Roczna stopa procentowa kredytu jest równa 16%. Kredyt ma zostać spłacony w ciągu dwóch lat, w kwartalnych ratach równych. Pierwsza rata ma być spłacona po trzech miesiącach od daty przyznania kredytu. Oblicz:

a) wysokość raty kredytu b) łączną kwotę odsetek od kredytu.

Test sprawdzający do rozdziału 2.

1. Ciąg $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots\right)$ można dla $n \in \mathbf{N}_+$ opisać wzorem:

A. $a_n = -1^{n+1} \cdot \frac{1}{2n}$ B. $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n}$

C. $a_n = (-1)^{1+n} \cdot \frac{1}{2+n}$ D. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n}$

2. Ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = n^2 - 18n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 40?

A. dziewiętnaście B. osiemnaście C. siedemnaście D. dwadzieścia

3. Suma wszystkich całkowitych wyrazów nieskończonego ciągu (c_n), gdzie $c_n = \frac{6}{2n-3} + 4$, jest równa:

A. 8 B. 14 C. 16 D. 12

4. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n^2 - 3a_{n+1}, \ n \geqslant 1 \end{cases}$. Zatem:

A. $a_5 = 5$ B. $a_5 = -2$ C. $a_5 = -9$ D. $a_5 = 7$

5. Nieskończony ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = \frac{25-4n^2}{2n+5}$, $n \in \mathbf{N}_+$, jest ciągiem:

A. rosnącym B. malejącym C. stałym D. niemonotonicznym

6. W ciągu arytmetycznym (c_n) dane są: $c_2 = 3$ oraz $c_{10} = -37$. Różnica tego ciągu jest równa:

A. -7 B. -3 C. -5 D. -9

7. Ciąg (a_n) jest malejącym ciągiem geometrycznym, w którym $a_3 = 18$ oraz $a_5 = 10\frac{1}{8}$. Iloraz tego ciągu jest równy:

A. $-\frac{3}{4}$ lub $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 0,75

8. Dane są wyrazy ogólne ciągów (b_n) i (c_n): $b_n = 3^{n-1}$ oraz $c_n = \frac{5}{2}n - 5\frac{3}{4}$, $n \in \mathbf{N}_+$.

Ile razy suma ośmiu początkowych wyrazów ciągu (b_n) jest większa od sumy dwudziestu początkowych wyrazów ciągu (c_n)?

A. 8 razy B. 6 razy C. 5 razy D. 2 razy

9. Ciąg $(x, y, 2 - x)$ jest jednocześnie ciągiem arytmetycznym i geometrycznym. Zatem liczba $2x^2 + y^2$ jest podzielna:

A. przez 5 B. przez 3 C. przez 2 D. przez 7

10. Klient banku wpłacił kwotę K na trzyletnią lokatę terminową, z półroczną kapitalizacją odsetek. Oprocentowanie lokaty wynosi 0,08%. Jeśli uwzględnimy 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych, to po trzech latach na lokacie będzie kwota:

A. $K \cdot (1 + 0{,}328 \cdot 10^{-3})^6$ B. $K \cdot \left(1 + 0{,}18 \cdot \frac{4}{100}\right)^6$

C. $K \cdot (1 + 0{,}82 \cdot 0{,}04)^6$ D. $K \cdot (1 + 0{,}82 \cdot 8 \cdot 10^{-4})^6$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 15n, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

Nieskończony ciąg (b_n) ma postać $(1, 8, 27, 64, \ldots)$. Oblicz $a_6 - b_6$.

12. Dany jest wyraz ogólny ciągu (c_n): $c_n = \frac{5 - 6n}{2n + 1}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (c_n) jest malejący.

b) Które wyrazy ciągu (c_n) należą do przedziału $\left\langle -2\frac{1}{2}, -2 \right)$?

D 13. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 6n + 4$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż, że suma dowolnych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

14. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{6n^2 - 11n - 7}{3n - 7}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, a jego wyrazy są liczbami nieparzystymi.

b) Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od 100 i jednocześnie przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1.

15. Dany jest trzywyrazowy ciąg $\left(k^2 - \frac{5}{2}k, \frac{(2k-3)^2}{8}, \frac{9-2k}{4}\right)$, gdzie $k \in \mathbf{R}$.

a) Podaj wyrazy tego ciągu w przypadku, gdy $k = -3$.

D b) Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej k dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

16. Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy -3, a różnica tego ciągu jest równa 4. Oblicz największą liczbę n, dla której $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < 1650$.

17. Suma n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (b_n) wyraża się wzorem $S_n = n^2 - 9n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Oblicz, ile początkowych wyrazów ciągu (b_n) należy zsumować, aby otrzymać liczbę 322.

b) Wyznacz wyraz ogólny ciągu (b_n).

18. Suma n kolejnych początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^2 + 10n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.

a) Oblicz piętnasty wyraz ciągu (a_n).

D b) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

19. Ciąg $(5, 9, 13, \ldots, 121)$ ma trzydzieści wyrazów. Iloraz wyrazu stojącego na miejscu k – licząc od początku, do wyrazu stojącego na miejscu k – licząc od końca, wynosi $\frac{11}{31}$. Oblicz k.

20. Liczby $7x + 1$, $2(x + 1)$, $x - 1$ są w podanej kolejności drugim, trzecim i czwartym wyrazem pewnego nieskończonego, monotonicznego ciągu geometrycznego (a_n).

a) Oblicz x.

b) Wyznacz wyraz ogólny ciągu (a_n).

c) Wiedząc, że suma k początkowych wyrazów ciągu jest równa $161\frac{25}{27}$, oblicz k.

21. Na trzech półkach ustawiono 42 książki. Okazało się, że liczby książek kolejno na półce górnej, półce środkowej i półce dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoi 12 książek. Oblicz, ile książek stoi na górnej półce, a ile na dolnej półce.

22. Dany jest trójkąt równoboczny T_1 o boku długości 10 cm. Wysokość trójkąta T_1 jest bokiem trójkąta równobocznego T_2, natomiast wysokość trójkąta T_2 jest bokiem trójkąta równobocznego T_3, itd. Oblicz sumę

a) obwodów

b) pól trójkątów $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$.

23. Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest ciągiem różnowartościowym. Wiedząc, że $a_3 - a_2 = 5(a_2 - a_1)$ oraz $S_3 = 62$, oblicz pięć kolejnych początkowych wyrazów tego ciągu.

24. W skończonym ciągu geometrycznym (b_n) pierwszy wyraz jest równy 3, a wyraz ostatni jest równy 768. Wiedząc, że suma wszystkich wyrazów ciągu (b_n) wynosi 1533, oblicz iloraz tego ciągu. Ile wyrazów ma ten ciąg?

25. Nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n) jest ciągiem rosnącym, a jego trzeci wyraz jest równy 5. Pierwszy, drugi i piąty wyraz ciągu (a_n) w podanej kolejności są jednocześnie początkowymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego (b_n). Oblicz:

a) $a_2 - a_6 - a_7 - \ldots + a_{20}$,

b) sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu (b_n).

26. Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym pierwszy wyraz jest równy −15, a różnica wynosi 6. Dla pewnej naturalnej liczby dodatniej k ciąg (a_k, a_{k+1}, a_{2k}) jest ciągiem geometrycznym.

a) Oblicz liczbę k.

b) Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego.

D 27. Ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(a + 5, b + 1, c)$ jest malejącym ciągiem geometrycznym. Wykaż, że jeśli $a + b + c = 15$, to iloczyn abc jest liczbą podzielną przez 35.

28. Firma informatyczna zanotowała comiesięczny wzrost zysku według następującej reguły: zysk w każdym kolejnym miesiącu był większy od zysku z poprzedniego miesiąca o 10% zysku z pierwszego miesiąca. Podaj z dokładnością do 1%, o ile procent więcej zysku miałaby ta firma w przeciągu całego roku, gdyby zysk z każdego kolejnego miesiąca był o 10% wyższy od zysku z poprzedniego miesiąca.

29. Pan Jerzy wpłacił 15 000 zł na trzyletnią lokatę, której oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 6%. Kapitalizacja odsetek odbywa się co kwartał. Jaką kwotą będzie dysponować pan Jerzy po trzech latach? Uwzględnij 20-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

30. Pani Ada wpłaciła 20 000 zł na czteroletnią lokatę, z półroczną kapitalizacją odsetek. Jakie było roczne oprocentowanie tej lokaty, jeśli po czterech latach pani Ada miała na lokacie 23 433,18 zł? Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.

3. Kombinatoryka

Reguła mnożenia i reguła dodawania

3.1. Na ile sposobów możemy utworzyć parę dziewczynka – chłopiec, jeśli mamy do dyspozycji cztery dziewczynki: Agatkę, Beatkę, Celinkę i Dorotkę oraz trzech chłopców: Edwina, Franka i Grześka.
Wypisz wszystkie możliwe pary w tabeli.

3.2. Poniższa tabela przedstawia wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe utworzone w taki sposób, że cyfra dziesiątek jest cyfrą ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, a cyfra jedności – ze zbioru $\{6, 7, 8, 9\}$. Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

c.d. / c.dz.	6	7	8	9
1	16	17	18	19
2	26	27	28	29
3	36	37	38	39
4	46	47	48	49

3.3. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których cyfra jedności jest równa 1 lub 2, zaś cyfra dziesiątek jest większa od 5? Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

3.4. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfra setek jest równa 1, 2 lub 3; cyfra dziesiątek jest liczbą podzielną przez 5, a cyfra jedności jest większa od 6? Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają wszystkie utworzone liczby.

3.5. Dane są zbiory: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$, $Z = \{6, 7, 8, 9, 0\}$. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfra setek należy do zbioru X, cyfra dziesiątek – do zbioru Y, a cyfra jedności – do zbioru Z i które są:

a) parzyste b) nieparzyste c) większe od 299?

W każdym przypadku narysuj trzyetapowe drzewo przedstawiające te liczby.

3.6. Dane są trzy zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfra setek należy do zbioru A, cyfra dziesiątek – do zbioru B, a cyfra jedności – do zbioru C i które są:

a) podzielne przez 5 b) mniejsze od 300 c) nie mniejsze niż 279?

3.7. Z cyfr ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe, przy czym cyfry w liczbie mogą się powtarzać. Zapisz w tabeli wszystkie utworzone liczby. Ile spośród utworzonych liczb ma cyfrę dziesiątek mniejszą od cyfry jedności?

3.8. Z cyfr ze zbioru $B = \{6, 7, 8, 9\}$ tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe, w których cyfry nie mogą się powtarzać. Zapisz w tabeli wszystkie utworzone liczby. Ile jest wśród nich liczb podzielnych przez 4?

3.9. Z cyfr ze zbioru $X = \{0, 1, 2, 3\}$ tworzymy wszystkie liczby trzycyfrowe, przy czym cyfry w liczbie nie mogą się powtarzać. Narysuj drzewo, w którym gałęzie przedstawiają utworzone liczby trzycyfrowe. Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 3?

3.10. Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ wybieramy kolejno dwie różne cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Ile jest możliwości utworzenia:

a) takiej liczby dwucyfrowej

b) liczby podzielnej przez 2?

3.11. Ile jest punktów o współrzędnych całkowitych (x, y), takich, że $x \in (4, 20)$, $y \in \langle 0, 100 \rangle$?

3.12. Ile jest punktów, których współrzędne (x, y) są różnymi liczbami całkowitymi, jeśli:

a) $x, y \in (6, 25)$ b) $x \in \langle 0, 10)$, $y \in (1, 10\rangle$ c) $x \in \langle 3, 23\rangle$, $y \in (9, 39)$?

3.13. Dane są zbiory: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5\}$, $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ile jest par uporządkowanych (a, b) takich, że liczba a jest elementem zbioru X i jednocześnie liczba b jest elementem zbioru Z lub liczba a jest elementem zbioru Y i jednocześnie liczba b jest elementem zbioru X?

3.14. Dane są zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{6, 7, 8\}$. Na ile sposobów można wybrać parę liczb (a, b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$ tak, aby suma $a + b$ była liczbą:

a) nieparzystą b) parzystą c) większą od 9?

3.15. Dane są zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Na ile sposobów można wybrać parę liczb (a, b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$ tak, aby iloczyn $a \cdot b$ był liczbą:

a) podzielną przez 7 b) parzystą c) podzielną przez 3?

3.16. W klasie III A jest 14 dziewcząt i 16 chłopców, a w klasie III B – 17 dziewcząt i 12 chłopców. Na ile sposobów można wybrać dwuosobową delegację tych dwóch klas składającą się z chłopca i dziewczyny tak, aby każda klasa miała swego przedstawiciela w tej delegacji?

3.17. Restauracja „Międzynarodowa" serwuje 12 dań kuchni polskiej, 10 dań kuchni węgierskiej i 8 dań kuchni czeskiej. Na ile sposobów można w tej restauracji wybrać dwa różne dania, z których:

a) jedno należy do kuchni polskiej, a drugie nie należy do kuchni polskiej,

b) co najmniej jedno należy do kuchni polskiej?

3.18. Pewna dama ma 14 różnych torebek, oraz 16 różnych par pantofelków w różnych kolorach – według tabeli umieszczonej poniżej.

	Kolor czarny	Kolor brązowy	Kolor czerwony	Kolor beżowy
Torebki	5	4	2	3
Pantofelki	6	3	2	5

Na ile sposobów owa dama może skompletować parę torebka – pantofelki:

a) w jednym kolorze,

b) w dwóch różnych kolorach – w brązie i w beżu?

3.19. Grupa pięciolatków z przedszkola z okazji Dnia Matki zaprosiła swoje mamy na przedstawienie, w których wystąpią jako skrzaty, mające czapki w trzech kolorach: czerwonym, niebieskim i zielonym. Liczbę osób mających czapkę w danym kolorze przedstawia tabela poniżej.

	Czapka czerwona	Czapka niebieska	Czapka zielona
Dziewczynki	7	4	2
Chłopcy	3	6	3

Ile jest możliwości wyboru pary – dziewczynka, chłopiec, w której:

a) obie osoby mają czapkę w takim samym kolorze,

b) co najmniej jedna osoba ma czerwoną czapkę?

3.20. Dany jest zbiór $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Ile jest par uporządkowanych (a, b) takich, że liczby a, b należą do zbioru X oraz:

a) liczba a jest mniejsza od 3 lub liczba b jest większa od 7,

b) liczba a jest większa od b lub liczba b jest większa od liczby a,

c) liczba a jest nie mniejsza niż 4 i jednocześnie liczba b jest podzielna przez 3 lub przez 5,

d) liczba a jest liczbą pierwszą lub liczba b jest nie większa niż 6?

3.21. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których zapisie występuje:

a) cyfra 1 i cyfra 7 b) cyfra 1 lub cyfra 7?

3.22. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których cyfra 8 występuje:

a) tylko jeden raz b) co najwyżej jeden raz?

3.23. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których:
a) co najmniej jedna cyfra jest parzysta,
b) co najmniej jedna cyfra jest nieparzysta?

3.24. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfra 3 występuje tylko raz?

3.25. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfra 0 występuje:
a) co najwyżej raz b) co najmniej raz?

3.26. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie cyfra 1 występuje:
a) co najwyżej raz b) co najmniej raz?

3.27. Ile liczb dwucyfrowych podzielnych przez 3 można utworzyć z cyfr:
a) 1, 2, 4, 5, 7, 8 b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

3.28. Ile liczb dwucyfrowych:
a) parzystych b) podzielnych przez 4
można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

3.29. Ile liczb dwucyfrowych podzielnych przez 6 można utworzyć z cyfr $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

3.30. Ile jest liczb dwucyfrowych:
a) podzielnych przez 2 lub przez 3,
b) podzielnych przez 4 lub 7,
c) większych od 40 lub podzielnych przez 8,
d) podzielnych przez 2 lub 5 i niepodzielnych przez 6?

Wariacje

3.31. Ile jest liczb trzycyfrowych utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

3.32. Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter A, B, C?

3.33. Oblicz, ile jest czterocyfrowych:
a) liczb b) kodów PIN,
w których cyfry mogą się powtarzać.

3.34. Na ile sposobów sekretarka może wrzucić do trzech różnych szuflad 4 listy zaadresowane do różnych osób?

3.35. Oblicz, ile jest liczb siedmiocyfrowych, utworzonych tylko z cyfr będących liczbami pierwszymi.

3.36. Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych, utworzonych:
a) tylko z cyfr nieparzystych b) tylko z cyfr parzystych.

3.37. Do zamku na górze prowadzą 4 różne szlaki. Na ile sposobów turysta może wejść na górę i wrócić z powrotem, jeśli zamierza zejść z góry innym szlakiem, niż na nią wejść?

3.38. Przedsiębiorca chce produkować chorągiewki składające się z trzech poziomych pasów równej szerokości, każdy w innym kolorze. Ile rodzajów takich chorągiewek może produkować, jeśli ma do dyspozycji 8 kolorów?

3.39. Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, zbudowanych z cyfr należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, jeśli cyfry w liczbie nie mogą się powtarzać.

3.40. Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, w których cyfry w liczbie nie mogą się powtarzać, jeśli są one zbudowane tylko z cyfr
a) będących liczbami nieparzystymi b) będących liczbami parzystymi.

3.41. Ile jest czterocyfrowych:
a) liczb b) kodów PIN,
w których cyfry nie mogą się powtarzać?

3.42. Pewna firma chce produkować ulotki, których każda ze stron ma mieć dwukolorowe tło: górna połowa danej strony ma mieć inny kolor, niż dolna połowa. Ile jest wzorów takich ulotek, jeśli firma ma do dyspozycji 7 kolorów?

3.43. Na ile sposobów można wrzucić 5 ponumerowanych kul do 6 różnych szuflad, jeżeli:
a) kule wrzucamy dowolnie,
b) każda kula ma trafić do innej szuflady?

3.44. Każdej z pięciu osób przyporządkowujemy dzień tygodnia, w którym się urodziła. Ile jest możliwych wyników takiego przyporządkowania, jeżeli:
a) każda z tych osób mogła urodzić się w dowolnym dniu tygodnia,
b) każda z tych osób urodziła się w innym dniu tygodnia?

3.45. Każdemu spośród czterech uczniów przyporządkowujemy ocenę roczną z matematyki. Ile jest możliwych wyników tego przyporządkowania, jeżeli:
a) każdy z uczniów będzie miał inną ocenę,
b) każdy z uczniów może uzyskać dowolną ocenę?

3.46. Na peronie czekają na pociąg cztery osoby. Podjeżdża skład złożony z siedmiu wagonów. Na ile sposobów czekające osoby mogą wsiąść do pociągu, jeśli:
a) każda z nich ma wsiąść do innego wagonu,
b) każda z nich wybiera wagon dowolnie?

3.47. Ile sześcioliterowych napisów można utworzyć, posługując się literami należącymi do zbioru $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$, jeśli:
a) litery mogą się powtarzać,
b) litery nie mogą się powtarzać?

3.48. Na parterze wieżowca mającego 8 pięter do windy wsiada 5 osób. Na ile sposobów te osoby mogą wysiąść na piętrach, jeśli:
a) każda z tych osób wybiera piętro dowolnie,
b) każda z tych osób wysiada na czwartym, piątym lub szóstym piętrze,
c) żadne dwie osoby nie wysiadają na tym samym piętrze,
d) co najmniej jedna osoba wysiada na siódmym piętrze.
Pomijamy kolejność wysiadania z windy na poszczególnych piętrach.

3.49. Numer karty płatniczej MasterCard składa się z 16 cyfr. Pierwszą cyfrą jest 5, drugą – jedna z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5. Zakładamy, że pozostałe cyfry mogą być dowolne. Ile jest numerów kart płatniczych MasterCard?

3.50. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:
a) nieparzystych b) parzystych?

3.51. Ile jest numerów telefonów stacjonarnych, składających się z 7 cyfr takich, że:
a) pierwszą cyfrą jest 6, a pozostałe cyfry są różne od 6 i różne między sobą,
b) trzy początkowe cyfry są większe od 5, a pozostałe – mniejsze od 6,
c) dwie początkowe cyfry są liczbami nieparzystymi, a pozostałe cyfry są różnymi liczbami parzystymi,
d) pierwsza i ostatnia cyfra to jednakowe liczby pierwsze, a cyfra 7 występuje tylko jeden raz?

3.52. Ile jest telefonicznych numerów komórkowych, składających się z dziewięciu cyfr takich, że:
a) pierwszą cyfrą jest 5 lub 6, trzecią cyfrą jest 0, a pozostałe cyfry nie są ani piątką, ani szóstką, ani zerem,
b) każda cyfra jest inna i na pierwszym miejscu nie występuje 0,
c) każda kolejna cyfra tego numeru jest liczbą o 1 mniejszą od poprzedniej,
d) pierwsza, trzecia, piąta, siódma i dziewiąta cyfra jest taka sama i jest liczbą nieparzystą, zaś pozostałe cyfry są różnymi liczbami parzystymi?

3.53. Ile liczb czterocyfrowych nieparzystych, w których wszystkie cyfry są różne, można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

3.54. Ile liczb pięciocyfrowych parzystych, w których wszystkie cyfry są różne, można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

3.55. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jednocześnie większych od 666?

3.56. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i jednocześnie mniejszych od 444?

3.57. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, utworzonych z cyfr należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jednocześnie mniejszych od 780?

3.58. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, podzielnych przez:
a) 25 b) 4?

3.59. Ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:
a) podzielnych przez 25 b) większych od 5238?

3.60. Ile jest liczb pięciocyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:
a) podzielnych przez 4 b) większych od 60 000?

Permutacje

3.61. Oblicz:

a) $4! - 2! \cdot 3!$ b) $5! - 2! \cdot 4!$ c) $\frac{10!}{8! \cdot 3!}$

d) $\frac{12!}{10! \cdot 4!}$ e) $\frac{9! \cdot 7!}{(6!)^3}$ f) $\frac{(9!)^3}{10! \cdot (8!)^2}$

3.62. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci wiedząc, że $n \in \mathbf{N}$.

a) $(n-2)!(n-1)n,\ n > 1$ b) $(2n+1)(2n)!$ c) $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$

d) $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}$ e) $\frac{(n+4)!(3n)!}{3n(n+3)!}$ f) $\frac{(n-1)!n}{(n+2)!},\ n > 0$

3.63. Na ile sposobów można ustawić osoby A, B, C w szeregu?. Wypisz wszystkie możliwe permutacje tych osób.

3.64. Na ile sposobów Marek może wysłać pięć różnych widokówek z wakacji do pięciu swoich kolegów?

3.65. Mamy siedem dziewcząt i siedmiu chłopców. Na ile sposobów można utworzyć:
a) siedem par dziewczyna – chłopiec do wspólnego tańca,
b) jedną parę taneczną dziewczyna – chłopiec?

3.66. W biegu finałowym uczestniczy ośmiu sprinterów. Na ile sposobów mogą oni zająć kolejne miejsca, jeśli wszyscy ukończą bieg?

3.67. Na ile sposobów można ustawić w szereg grupę złożoną z pięciu dziewcząt i pięciu chłopców tak, aby:
a) od lewej stały najpierw wszystkie dziewczęta,
b) dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

3.68. Siedmiu chłopców i pięć dziewcząt mają 12 biletów do kina: 5 biletów na miejsca w IX rzędzie i 7 biletów na miejsca w X rzędzie. Na ile sposobów mogą zająć te miejsca:
a) dowolnie,
b) tak, aby wszystkie dziewczęta siedziały w IX rzędzie,
c) w obu rzędach na zmianę: chłopak, dziewczyna, chłopak, dziewczyna, itd.?

3.69. W liceum uczą się po 4 klasy pierwsze, drugie, trzecie i czwarte. Na ile sposobów można położyć na biurku jeden na drugim dzienniki lekcyjne tych klas, jeśli:
a) na samym spodzie mają leżeć wszystkie dzienniki klas pierwszych,
b) na samej górze leżą dzienniki klas A, niżej dzienniki klas B, jeszcze niżej dzienniki klas C i najniżej dzienniki klas D?

3.70. Mamy 5 książek, w tym książki A i B. Ustawiamy je losowo na pustej półce, jedna obok drugiej. Na ile sposobów można ustawić je tak, aby:
a) książki A i B nie stały obok siebie,
b) pomiędzy książkami A i B stały dwie inne książki?

3.71. Sześć osób, które oznaczymy literami A, B, C, D, E, F, ma zająć sześć sąsiednich miejsc w jednym rzędzie w kinie. Na ile sposobów mogą one usiąść, tak aby:
a) osoby D, E siedziały obok siebie w podanym porządku,
b) osoby A, B, C, D siedziały obok siebie w podanym porządku,

c) osoby A, B, C siedziały obok siebie w dowolnym porządku,
d) między osobami A i B siedziały dwie osoby?

3.72. Na ile sposobów można ustawić w szereg 8 osób tak, aby:
a) osoby A, B, C zajmowały odpowiednio pierwsze, drugie i trzecie miejsce w tym szeregu,
b) osoby A i B stały obok siebie oraz pomiędzy tą parą osób a osobą C stały dwie inne osoby,
c) osoby A i B nie stały obok siebie,
d) osoba A stała pierwsza w szeregu, a w dalszej części szeregu osoba B stała bliżej A niż osoba C?

3.73. Ile jest liczb siedmiocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jednocześnie:
a) mniejszych od 5 000 000
b) większych od 6 500 000?

3.74. Ile jest liczb pięciocyfrowych, zbudowanych z różnych cyfr należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ i jednocześnie:
a) nieparzystych
b) podzielnych przez 5?

3.75. Ile jest liczb siedmiocyfrowych, o niepowtarzających się cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i jednocześnie:
a) parzystych
b) podzielnych przez 4?

3.76. Ile jest liczb sześciocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i jednocześnie:
a) podzielnych przez 5
b) podzielnych przez 25?

3.77. Przy okrągłym stole ustawiono 6 jednakowych krzeseł. Na ile sposobów może usiąść przy tym stole 6 osób, tak aby:
a) osoby A i B siedziały obok siebie,
b) osoby A i B usiadły naprzeciwko siebie,
c) między osobami A i B siedziała tylko osoba C,
d) osoby A i B siedziały naprzeciwko siebie i jednocześnie osoby C i D siedziały naprzeciwko siebie?

Uwaga: Dwa rozmieszczenia przy stole uznajemy za różne, jeżeli w tych rozmieszczeniach co najmniej jedna osoba ma różnych sąsiadów z co najmniej jednej strony.

3.78. Przy okrągłym stole ustawiono 12 krzeseł. Na ile sposobów może usiąść przy tym stole 12 osób, tak aby:

a) osoby A, B usiadły obok siebie,

b) osoby A, B usiadły naprzeciwko siebie,

c) między osobami A, B siedziały tylko dwie osoby,

d) osoby A, B siedziały naprzeciwko siebie i jednocześnie osoby C, D siedziały naprzeciwko siebie?

Uwaga: Dwa rozmieszczenia przy stole uznajemy za różne, jeśli w tych rozmieszczeniach co najmniej jedna osoba ma różnych sąsiadów z co najmniej jednej strony.

3.79. W przedziale wagonu kolejowego jest osiem ponumerowanych miejsc od 1 do 8 w dwóch jednakowych rzędach. Do przedziału wchodzą cztery dziewczyny: Ala, Julka, Kornelia i Maja oraz czterech chłopaków: Antek, Janek, Kacper i Michał. Na ile sposobów te osoby mogą zająć miejsca w przedziale:

a) dowolnie,

b) tak, aby dziewczęta siedziały na miejscach o numerach parzystych,

c) tak, aby Julka i Antek siedzieli obok siebie,

d) tak, aby naprzeciwko siebie siedziały osoby, których imiona zaczynają się tą samą literą?

3.80. Stonoga – wbrew nazwie – ma tylko siedem par nóg. Na nogi ma włożyć siedem par kaloszy (każda para jest w innym kolorze). Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

a) nie rozróżnia kolorów ani butów lewych i prawych,

b) rozróżnia kolory (na każdą parę nóg włoży buty w tym samym kolorze), lecz nie rozróżnia butów lewych i prawych,

c) nie rozróżnia kolorów, lecz rozróżnia buty lewe i prawe,

d) rozróżnia kolory i rozróżnia buty lewe i prawe?

Kombinacje

3.81. Oblicz:

a) $\binom{10}{3}$ b) $\binom{8}{4}$ c) $\binom{7}{3}-\binom{5}{2}$

d) $\binom{8}{2}-\binom{6}{4}$ e) $\dfrac{\binom{12}{3}}{\binom{14}{5}}$ f) $\dfrac{\binom{13}{6}}{\binom{12}{5}}$

3.82. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci, wiedząc, że $n \in \mathbf{N}$:

a) $\dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{3}}$ b) $\dfrac{\binom{n+2}{3}}{\binom{n+1}{2}}$

3.83. Wyznacz n wiedząc, że $n \in \mathbf{N}_+$:

a) $n + \binom{n}{2} = 15$ b) $\binom{n}{n-1}+\binom{2n}{2n-2}=18$

3.84. Oblicz, ile jest trójelementowych podzbiorów zbioru sześcioelementowego.

3.85. Oblicz, na ile sposobów można wybrać czteroosobową delegację z grupy 7 osób.

3.86. Z grupy 3 kobiet i 4 mężczyzn wybieramy trzy osoby. Ile jest takich sposobów wyboru, aby wśród wybranych osób:

a) były same kobiety,

b) byli sami mężczyźni,

c) były dwie kobiety i jeden mężczyzna?

3.87. Na płaszczyźnie zaznaczono n $(n > 2)$ punktów, z których dowolne trzy nie były współliniowe. Punkty te wyznaczyły 36 prostych. Oblicz n.

3.88. Na egzaminie było n tematów $(n \geq 2)$, z których student losował dwa. Oblicz n, wiedząc, że student miał 190 możliwości wylosowania zestawu tematów.

3.89. W turnieju szachowym każdy z zawodników rozegrał z każdym dwie partie. Ilu było zawodników, jeśli rozegrano w sumie 42 partie?

3.90. W pudełku znajdują się cztery ponumerowane kule: 2 białe i 2 czarne. Na ile sposobów można wybrać 2 kule, wśród których co najwyżej jedna będzie czarna?

a) Wypisz wszystkie możliwości.

b) Dlaczego liczby sposobów w punkcie *a)* nie można obliczyć w następujący sposób: wybieramy jedną kule białą na $\binom{2}{1}$ sposoby i drugą kulę jakąkolwiek z pozostałych kul na $\binom{3}{1}$ sposoby, czyli razem mamy $2 \cdot 3 = 6$ sposobów?

3.91 Pewien niepusty zbiór ma 211, co najwyżej dwuelementowych podzbiorów. Ile elementów ma ten zbiór?

3.92. W klasie jest 15 dziewcząt i 16 chłopców. Spośród uczniów tej klasy trzeba wybrać czteroosobową delegację. Na ile sposobów można to zrobić, tak aby w delegacji znalazły się:
a) tylko dwie dziewczynki,
b) co najmniej dwie dziewczynki,
c) co najwyżej dwie dziewczynki?

3.93. W grupie 20 osób jest 12 kobiet. Ile jest sposobów wybrania pięcioosobowej delegacji z tej grupy, tak aby:
a) znalazły się tam co najwyżej dwie kobiety,
b) znalazła się tam co najmniej jedna kobieta,
c) znalazły się tam co najmniej dwie i nie więcej niż cztery kobiety?

3.94. W klasie jest 8 chłopców i 9 dziewcząt. Wybieramy cztery osoby. Ile jest możliwych sposobów wyboru tych czterech osób, tak by wśród nich:
a) byli sami chłopcy
b) połowę stanowiły dziewczęta
c) były trzy dziewczynki i jeden chłopiec
d) był co najmniej jeden chłopiec?

3.95. Rodzina składająca się z rodziców i trojga dzieci: Ady, Mai i Filipa mają w pudełku zdjęcia ze wspólnych wakacji. W tabeli przedstawione są liczby zdjęć, na których znajdują się tylko wymienione osoby.

Rodzice	Cała rodzina	Ada, Maja i Filip	Ada i Maja	Ada i Filip	Maja i Filip
2	3	4	5	6	7

Oblicz, na ile sposobów można wybrać trzy zdjęcia do oprawy w ramki tak, aby:
a) na jednym zdjęciu byli tylko rodzice, na drugim było tylko troje dzieci, a na trzecim – cała rodzina w komplecie,
b) na każdym wybranym zdjęciu było co najmniej dwoje dzieci,
c) na co najmniej dwóch zdjęciach była Ada,
d) rodzice byli co najwyżej na dwóch zdjęciach.

3.96. W pudełku znajdują się ponumerowane kule: 7 białych, 2 czarne i 1 zielona. Na ile sposobów można wybrać dwie kule tak, aby:
a) kule były różnych kolorów
b) obie kule były białe
c) kule były tego samego koloru
d) przynajmniej jedna z nich była biała?

3.97. W szufladzie znajdują się rozróżnialne cienkopisy: 5 zielonych, 4 czarne i 6 niebieskich. Na ile sposobów można wybrać trzy cienkopisy tak, aby:
a) każdy z nich był innego koloru,
b) wszystkie były tego samego koloru,
c) tylko dwa z nich były tego samego koloru?

3.98. Na biurku leżą ponumerowane kartki w różnych kolorach: 3 kartki czerwone z numerami od 1 do 3, 5 kartek żółtych z numerami od 1 do 5, 6 kartek niebieskich z numerami od 1 do 6 i 7 kartek białych z numerami od 1 do 7. Na ile sposobów można wybrać cztery kartki tak, aby:
a) wszystkie były tego samego koloru,
b) co najwyżej jedna kartka była biała,
c) miały różne numery od 1 do 4,
d) co najmniej dwie miały parzysty numer?

3.99 Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli wśród tych czterech kart mają być:
a) dwie damy i dwa asy,
b) trzy karty młodsze od dziewiątki i jeden król,
c) trzy figury (figury to: as, dama, król i walet) i jedna karta nie będąca figurą?

3.100. Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli wśród nich mają być:
a) trzy kiery,
b) co najwyżej trzy kiery,
c) dwa kiery, jeden pik i jeden trefl?

Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Ile istnieje podzbiorów zbioru czteroelementowego?
A. 10 B. 12 C. 14 D. 16

2. Pewna firma cateringowa ma w ofercie danego dnia trzy różne zupy, dwa drugie dania i dwa desery. Na ile sposobów można wybrać jeden zestaw obiadowy, składający się z zupy, drugiego dania i deseru?
A. na 12 sposobów B. na 10 sposobów
C. na 8 sposobów D. na 7 sposobów

3. Ile jest możliwych rozmieszczeń trzech różnych długopisów w dwóch szufladach?
A. 9 B. 8 C. 6 D. 5

4. Ile jest liczb trzycyfrowych o niepowtarzających się cyfrach?

A. $10 \cdot 9 \cdot 8$ B. $9 \cdot 8 \cdot 7$ C. $9 \cdot 9 \cdot 8$ D. $8 \cdot 8 \cdot 7$

5. Ile jest liczb naturalnych większych od 150 i jednocześnie mniejszych od 900, których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 1?

A. 186 B. 187 C. 188 D. 189

6. Ile jest liczb trzycyfrowych, w zapisie których występuje jedna cyfra 1 i jedna cyfra 0?

A. 8 B. 16 C. 24 D. 32

7. Na przyjęciu spotkało się 6 osób, przy czym każda osoba przywitała się z każdą inną osobą. Liczba wszystkich powitań była równa:

A. 9 B. 12 C. 15 D. 18

8. Na ile sposobów można 4 dziewczynki i 4 chłopców połączyć w pary dziewczynka – chłopiec, jeśli pominiemy kolejność par i kolejność osób w parze?

A. na 4 sposoby B. na 8 sposobów
C. na 16 sposobów D. na 24 sposoby

9. Ile jest możliwości ustawienia 8 osób w dwóch rzędach po 4 osoby w jednym rzędzie?

A. $8!$ B. $\binom{8}{4} \cdot 4!$ C. $\binom{2}{1}\binom{8}{4}$ D. $2^4 \cdot 4! \cdot 4!$

10. Ile jest liczb naturalnych, które spełniają nierówność $\binom{n}{n-2} < 15$?

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

11. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ wybieramy dwie cyfry ze zwracaniem i tworzymy liczbę dwucyfrową. Zapisz w tabeli wszystkie liczby, jakie możemy w ten sposób otrzymać. Ile jest wśród nich liczb podzielnych przez 3?

12. Ze zbioru cyfr $\{0, 1, 2, 3\}$ wybieramy kolejno trzy cyfry bez zwracania i tworzymy liczbę trzycyfrową. Posługując się drzewem wypisz wszystkie liczby, jakie możemy w ten sposób otrzymać. Ile jest wśród nich liczb parzystych?

13. W klasach trzecich szkoły podstawowej zorganizowano koło taneczne, na które uczęszczają dzieci według tabeli zamieszczonej poniżej.

Klasa	IIIa	IIIb	IIIc
Dziewczęta	5	6	9
Chłopcy	10	3	7

Na ile sposobów można utworzyć parę dziewczynka – chłopiec, jeśli dzieci w tej parze:

a) mają chodzić do tej samej klasy,

b) mają chodzić do klasy IIIa lub do klasy IIIb?

14. W szufladzie znajdują się różne czapki, szaliki i pary rękawiczek. Tabela poniżej opisuje liczby tych czapek, szalików i par rękawiczek według kolorów.

	Kolor czarny	Kolor niebieski	Kolor zielony
Czapki	3	4	2
Szaliki	1	2	3
Pary rękawiczek	2	1	1

Oblicz, na ile sposobów można wybrać jedną czapkę, jeden szalik i jedną parę rękawiczek:

a) w jednakowym kolorze,

b) tak, aby czapka i szalik były w tym samym kolorze, a para rękawiczek – w innym kolorze,

c) w różnych kolorach?

15 W pewnej grupie osób wszyscy czytają klasykę, z czego 14 osób uwielbia lirykę, a 20 osób chętnie czyta prozę. Oblicz, ile osób liczy ta grupa, jeżeli 9 spośród nich czyta zarówno lirykę, jak i prozę?

16. Ile jest liczb w zbiorze $\{1, 2, 3, 4, ..., 2021\}$, które są:

a) podzielne przez 2 i przez 3,

b) podzielne przez 3 lub przez 4,

c) podzielne przez 5 i jednocześnie niepodzielne przez 7?

17. Oblicz, ile jest liczb dwucyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ i jednocześnie suma tych cyfr:

a) jest większa od 3 b) jest liczbą podzielną przez 4.

18. Oblicz, ile jest liczb dwucyfrowych, o różnych cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i których iloczyn cyfr:

a) jest mniejszy od 8 b) nie jest podzielny przez 5.

19. Oblicz, ile jest liczb dwucyfrowych utworzonych z różnych cyfr należących do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i jednocześnie:

a) parzystych
b) nie większych od 56
c) niepodzielnych przez 3
d) podzielnych przez 7.

20. Oblicz, ile jest numerów telefonów komórkowych (numerów dziewięciocyfrowych), których:

a) pierwszą cyfrą jest cyfra większa od 6, ostatnie cztery cyfry są jednakowe, a każda z pozostałych cyfr jest różna od innych cyfr,
b) początkowe 4 cyfry są kolejnymi liczbami nieparzystymi, ustawionymi malejąco, a ostatnie trzy cyfry są kolejnymi liczbami parzystymi, ustawionymi rosnąco.

21. Na ile sposobów można 8 osób, wśród których są osoby A i B, posadzić:

a) w jednym rzędzie tak, aby osoby A i B były rozdzielone dwiema innymi osobami,
b) przy okrągłym stole tak, aby osoby A i B siedziały naprzeciw siebie? Przyjmij, że dwa umiejscowienia osób przy okrągłym stole są różne wtedy, gdy co najmniej jedna z tych osób ma innego sąsiada z co najmniej jednej strony.

22. Na ile sposobów można wrzucić 5 piłeczek w różnych kolorach do trzech ponumerowanych szuflad:

a) dowolnie,
b) tak, aby co najwyżej jedna piłeczka była w pierwszej szufladzie?

23. Oblicz, na ile sposobów można wybrać spośród 4 dziewcząt i 3 chłopców dwuosobową delegację, w której będzie:

a) tylko jeden chłopiec
b) co najmniej jedna dziewczyna

24. W skrzyni znajduje się 12 piłek różnej wielkości, w tym 5 czerwonych, 4 niebieskie i 3 białe. Oblicz, na ile sposobów można wybrać trzy piłki:

a) każdą w innym kolorze,
b) wszystkie w jednakowym kolorze,
c) z których tylko jedna jest czerwona,
d) z których dwie są białe.

4. Czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy

4.1. Oblicz miary kątów czworokąta, jeśli:

a) pierwszy kąt jest o 20° mniejszy od drugiego, trzeci kąt jest o 70° większy od pierwszego, a czwarty jest średnią arytmetyczną trzech pozostałych,
b) miary kolejnych kątów pozostają w stosunku 2 : 3 : 5 : 5,
c) miara kąta drugiego stanowi 75% miary kąta pierwszego, kąt trzeci jest o 25% większy od kąta drugiego, a miara kąta czwartego stanowi $\frac{29}{16}$ miary kąta pierwszego.

4.2. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$, wiedząc, że:

a) przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A i w dwusiecznej kąta przy wierzchołku C oraz kąt ACB jest o 20° mniejszy od kąta DAC, a kąt ADC jest o 50° większy od kąta CAB,
b) przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta przy wierzchołku A oraz suma miar kątów DAC i DCA jest równa 90°, kąt DCA ma miarę dwa razy większą niż kąt ACB, a kąt ABC jest o 60° większy od kąta DAC.

Czy czworokąt $ABCD$ jest deltoidem? Odpowiedź uzasadnij.

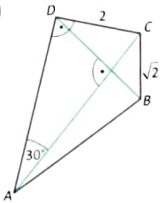
4.3. Jedna przekątna pewnego czworokąta dzieli ten czworokąt na dwa trójkąty o obwodach 20 cm i 40 cm, a druga – na dwa trójkąty o obwodach 30 cm i 50 cm. Wiedząc, że suma długości przekątnych jest równa 26 cm, oblicz obwód tego czworokąta.

4.4. Kawałek czworokątnego materiału o obwodzie 3 m przecięto wzdłuż jednej z jego przekątnych. Powstały dwie chusty w kształcie trójkąta równoramiennego: pierwsza o obwodzie 1,8 m, a druga o obwodzie 2,8 m. Linia rozcięcia stanowi podstawę pierwszego trójkąta, a dla drugiego jest ramieniem. Wyznacz wymiary obu chust.

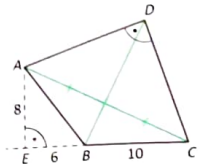
4.5. Z dwóch cienkich listewek o długościach 0,8 m i 1,05 m wykonano szkielet latawca. Dłuższa listewka wyznacza oś symetrii krótszej listewki i jest podzielona przez punkt przecięcia się z krótszą listewką na odcinki, których długości mają się do siebie jak 2 : 5. Następnie końce tych listewek połączono kolejno żyłką, wyznaczając w ten sposób boki latawca. Oblicz długość tej żyłki.

4.6. Oblicz długość przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$, wykorzystując dane na rysunku poniżej:

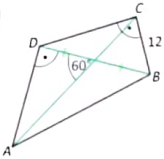
a)



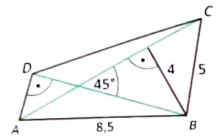
b)



c)



d)



4.7. Odcinek AB jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC. Środkowe AM i CN tego trójkąta przecinają się w punkcie S. Wiedząc, że $|SM| = 2{,}5$ oraz $|SN| = 3$, oblicz długości przekątnych czworokąta wklęsłego $ABCS$.

4.8. Boki trójkąta ABC mają długości: $|AB| = 7$, $|BC| = 5$, $|AC| = 8$. Symetralne boków trójkąta ABC przecinają się w punkcie O. Wyznacz:

a) miarę kąta wklęsłego AOB,

b) długość przekątnej OC czworokąta wklęsłego $AOBC$.

4.9. W deltoidzie $ABCD$ kąt przy wierzchołku A jest różny od pozostałych kątów, a miara tego kąta jest średnią arytmetyczną miar pozostałych kątów. Wiedząc, że $|BD| = 8$ oraz $|AC| = 7$, oblicz:

a) długości boków deltoidu $ABCD$,

b) przybliżone miary kątów tego deltoidu przy wierzchołkach B, C i D.

4.10. Dwa boki deltoidu mają długość $2\sqrt{3}$, a pozostałe dwa mają długość $3\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Wiedząc, że kąt deltoidu leżący między dwoma dłuższymi bokami ma miarę 45°, oblicz miarę kąta deltoidu leżącego między dwoma krótszymi bokami.

Trapezy

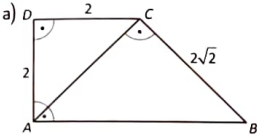
4.11. W trapezie $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$, miara kąta przy wierzchołku B jest o 25% większa od miary kąta przy wierzchołku A, natomiast miara kąta przy wierzchołku C jest o 13° mniejsza od miary kąta przy wierzchołku D. Wyznacz miary kątów tego trapezu.

4.12. Miary kątów kolejno przy wierzchołkach A, B, C, D trapezu $ABCD$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 20°. Wyznacz kąty tego trapezu.

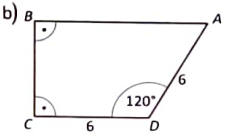
D 4.13. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąt przy wierzchołku A jest prosty, zaś kąt przy wierzchołku B jest równy 50°. Wykaż, że jeśli kąt BCD jest o 40° większy od kąta ADC, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym, którego kąt rozwarty ma miarę 130°.

4.14. Trapez $ABCD$ jest prostokątny. Na podstawie danych na rysunku poniżej podaj miarę kąta ostrego trapezu i długość dłuższej podstawy AB.

a)



b)



D 4.15. Wykaż, że jeśli krótsza podstawa trapezu równoramiennego ma taką samą długość, jak jego ramiona, to przekątne tego trapezu zawierają się w dwusiecznych kątów przy dłuższej podstawie.

D 4.16. W trapezie równoramiennym $ABCD$ przekątna AC tworzy z ramieniem BC kąt prosty i jest jednocześnie dwusieczną kąta przy wierzchołku A. Wykaż, że:

a) kąty ostre trapezu mają miarę 60°,

b) jedna z podstaw tego trapezu jest dwa razy dłuższa od drugiej.

4.17. W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają jednakową długość, równą 6 cm. Wiedząc, że kąt rozwarty trapezu jest równy 120°, oblicz długość dłuższej podstawy trapezu.

4.18. Kąt ostry trapezu równoramiennego jest równy 60°. Wiedząc, że wysokość trapezu jest równa $3\sqrt{3}$ cm, a długość przekątnej wynosi $2\sqrt{19}$ cm, oblicz obwód tego trapezu.

4.19. Kąty ostre trapezu równoramiennego mają miarę 45°, a wysokość jest równa 4 cm. Wiedząc że obwód trapezu wynosi $\left(18+8\sqrt{2}\right)$ cm, oblicz długości boków tego czworokąta.

4.20. Różnica długości podstaw trapezu prostokątnego wynosi 5 cm, a dłuższe ramię ma długość 13 cm. Wiedząc, że wysokość trapezu i krótsza podstawa pozostają w stosunku 3 : 4, oblicz długości podstaw tego trapezu.

4.21. W trapezie prostokątnym suma długości krótszej podstawy i wysokości jest równa 17 cm, a suma długości dłuższej podstawy i dłuższego ramienia wynosi 29 cm. Wiedząc, że krótsza przekątna ma długość 13 cm, oblicz:

a) długości boków trapezu b) długość dłuższej przekątnej.

4.22. Krótsza podstawa trapezu ma długość 1 cm, a wysokość trapezu jest równa 3 cm. Wiedząc, że kąty przy dłuższej podstawie są równe 30° i 45°, oblicz:

a) obwód trapezu b) długości przekątnych trapezu.

4.23. Obwód trapezu $ABCD$ jest równy 60 cm, a ramię AD ma długość 13 cm. Wiedząc, że tangens kąta BAD jest równy 2,4 oraz sinus kąta CBA wynosi 0,6, oblicz:

a) wysokość trapezu b) długości boków $|AB|$, $|BC|$, $|DC|$.

4.24. Krótsza podstawa i ramiona trapezu równoramiennego mają taką samą długość, równą 13. Wiedząc, że długość przekątnej tego trapezu jest równa $6\sqrt{13}$, oblicz:

a) cosinus kąta rozwartego trapezu

b) wysokość trapezu c) długość dłuższej podstawy.

4.25. Wysokość trapezu $ABCD$ jest równa 8 cm, a podstawa AB ma długość 30 cm. Ramię AD jest o 1 cm dłuższe od podstawy DC. Wiedząc, że przekątna AC i ramię BC mają jednakową długość, oblicz:

a) obwód trapezu $ABCD$ b) długość przekątnej BD c) sinus kąta ADC.

4.26. W trapezie równoramiennym wysokość jest równa długości krótszej podstawy, a ramię ma długość 13 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu wiedząc, że ich suma jest równa 34 cm.

4.27. Wyznacz wysokość trapezu, jeśli:

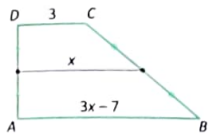
a) podstawy mają długości 28 cm i 7 cm, a ramiona 10 cm i 17 cm,

b) podstawy mają długości 2 cm i 30 cm, a ramiona 25 cm i 17 cm.

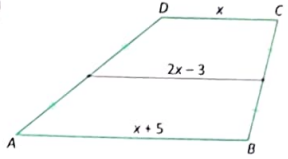
4.28. Podstawy trapezu mają długość 30 cm i 9 cm, a jedno ramię jest dłuższe od drugiego o 7 cm. Wiedząc, że obwód trapezu wynosi 72 cm, oblicz wysokość tego trapezu.

4.29. Ramiona AD i BC trapezu $ABCD$ na rysunku poniżej podzielono na tyle samo odcinków równej długości. Na podstawie informacji przedstawionych na rysunku oblicz x.

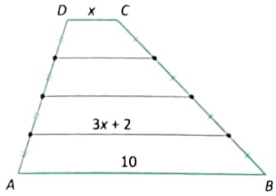
a)



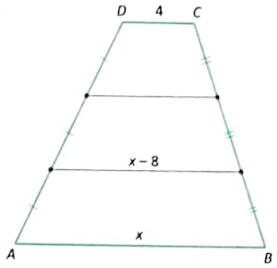
b)



c)



d)



4.30. Długości podstaw trapezu mają się do siebie jak 5 : 2, a ich różnica wynosi 9 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

4.31. Kąty rozwarte trapezu mają miary 120° i 150°. Krótsza podstawa i krótsze ramię trapezu mają jednakową długość, równą 5 cm. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu. Rozważ dwa przypadki.

4.32. W trapezie równoramiennym $ABCD$, $AB \parallel CD$, wysokość CE dzieli dłuższą podstawę na odcinki mające długość: $|AE| = 15$ cm, $|EB| = 6$ cm. Długość przekątnej DB jest równa 17 cm. Oblicz:

a) długości podstaw trapezu b) długość ramienia trapezu.

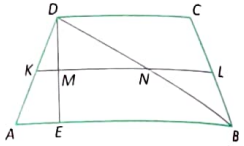
Jaką długość ma odcinek łączący środki ramion tego trapezu?

4.33. Odcinek łączący środki ramion trapezu równoramiennego ma długość 12 cm. Wiedząc, że długości przekątnych są równe 13 cm, oblicz wysokość tego trapezu.

D 4.34. Punkt E jest spodkiem wysokości trapezu równoramiennego $ABCD$, poprowadzonej z wierzchołka D. Wykaż, że jeśli $|EB| = |BC|$, to wysokość jest średnią geometryczną długości podstaw tego trapezu.

D 4.35. W trapezie równoramiennym $ABCD$ punkty K i L są odpowiednio środkami ramion AD i BC. Odcinek DE jest wysokością tego trapezu. Wykaż, że jeśli obwód czworokąta $EBLK$ jest równy podwojonej długości dłuższej podstawy, to kąt ostry trapezu ma miarę $60°$.

4.36. Trapez $ABCD$ na rysunku obok jest równoramienny. Punkty K i L są środkami ramion AD i BC. Odcinek KL przecina wysokość DE w punkcie M i przekątną DB w punkcie N.



D a) Wykaż, że $|MN| = |KM| + |NL|$.

b) Wiedząc, że $|KM| = 3$ oraz $|NL| = 4$, oblicz długości podstaw tego trapezu.

4.37. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ oraz punkty K, L, M, N, E – opisane w poprzednim zadaniu. Wiedząc, że $|DB| = 10$ cm, $|KM| = 1$ cm oraz $|MN| = 4$ cm, oblicz obwód tego trapezu.

D 4.38. Punkty K, L są odpowiednio środkami ramion AD i BC trapezu $ABCD$. Odcinek KL przecina przekątną AC w punkcie M oraz przekątną DB w punkcie N. Wykaż, że:

a) $|AM| = |MC|$

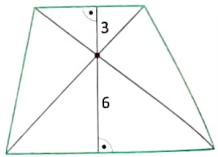
b) $|MN| = \frac{|AB| - |DC|}{2}$.

4.39. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 10 cm, a odcinek łączący środki przekątnych ma długość 3 cm. Oblicz długości podstaw trapezu.

4.40. Jedna przekątna trapezu ma długość $9\sqrt{2}$ cm, a druga 15 cm. Punkt przecięcia się przekątnych znajduje się w odległości 3 cm od krótszej podstawy i 6 cm od dłuższej podstawy. Oblicz:

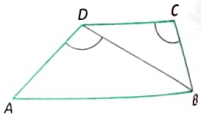
a) długości podstaw trapezu,

b) długości ramion trapezu.



4.41. Podstawy trapezu mają długość 18 cm i 4 cm, a ramiona – 13 cm i 15 cm. Oblicz odległość punktu przecięcia się przekątnych od podstaw trapezu.

D 4.42. W trapezie $ABCD$ przekątna BD tworzy z ramieniem AD kąt równy kątowi DCB. Wykaż, że $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBD|$.



4.43. W trapezie $ABCD$ długość podstawy DC jest równa 18 cm, a ramiona AD i BC mają odpowiednio długość 15 cm i 25 cm. Wiedząc, że kąty rozwarte ADC i ACB są równe, oblicz długość podstawy AB.

4.44. W trapezie $ABCD$ długość podstawy AB jest równa 16 cm, a ramiona BC i AD mają odpowiednio długości 6 cm i 8 cm. Wiedząc, że kąty ostre BAD i CBD są równe, oblicz długość podstawy DC.

Równoległoboki

4.45. Wyznacz miary dwóch kolejnych kątów równoległoboku wiedząc, że jeden z tych kątów jest o $38°$ mniejszy od drugiego.

4.46. W równoległoboku $ABCD$ kąt przy wierzchołku D jest rozwarty. Z punktu D poprowadzono dwie wysokości równoległoboku, które tworzą kąt równy $53°$. Wyznacz kąty równoległoboku.

4.47. Przekątne rombu tworzą z jednym z boków rombu kąty, których różnica miar jest równa $36°$. Wyznacz kąty tego rombu.

4.48. Wyznacz kąty rombu wiedząc, że symetralna boku tego rombu przechodzi przez jeden z wierzchołków rombu.

4.49. Oblicz długość boku kwadratu, jeśli:

a) przekątna kwadratu jest o 2 cm dłuższa od boku,

b) odległość środka boku od końców przeciwległego boku jest równa $3\sqrt{5}$ cm.

4.50. Na przekątnej AC kwadratu $ABCD$ zaznaczono punkt P tak, że $|AP| = |AB|$. Wiedząc, że boki kwadratu mają długość 2, oblicz odległość punktu P:

a) od boku AB b) od punktu B.

4.51. Oblicz szerokość prostokątnej ramy obrazu, wiedząc, że obwód zewnętrzny ramy jest o 28 cm większy od wewnętrznego obwodu tej ramy.

4.52. W prostokącie różnica odległości punktu przecięcia przekątnych od dwóch nierównoległych boków wynosi 8 cm. Oblicz długości boków tego prostokąta wiedząc, że jego obwód jest równy 44 cm.

4.53. Obwód prostokąta jest równy 142 cm. Oblicz długości boków prostokąta wiedząc, że jego przekątna jest o 1 cm dłuższa od jednego z tych boków.

4.54. Przekątna prostokąta tworzy z dłuższym bokiem kąt równy 30°. Oblicz długości boków tego prostokąta wiedząc, że ich różnica jest równa 2.

4.55. Przekątne prostokąta mają długość 10. a kąt ostry przecięcia tych przekątnych jest równy 30°. Oblicz obwód tego prostokąta.

4.56. W prostokącie $ABCD$ wysokość DE trójkąta ACD dzieli przekątną AC prostokąta na odcinki, których długości różnią się o 3. Wiedząc, że $|DE| = 2$, oblicz:
a) długości przekątnych AC i DB b) obwód prostokąta.

4.57. W prostokącie $ABCD$ tangens kąta między przekątną DB, a bokiem AB jest równy $1\frac{1}{3}$. Wiedząc, że odległość punktu C od przekątnej DB jest równa 12 cm, oblicz długości boków tego prostokąta.

4.58. Kąt ostry rombu ma miarę 30°. Wysokość rombu jest równa 2 cm. Oblicz:
a) obwód rombu b) długości przekątnych rombu.

4.59. Bok rombu ma długość 13, a tangens kąta ostrego wynosi 2,4. Oblicz długości przekątnych tego rombu.

4.60. Stosunek długości przekątnych rombu wynosi $\sqrt{3}$. Wiedząc, że obwód rombu jest równy 40, oblicz wysokość tego rombu.

4.61. Bok rombu ma długość 41 cm. Wyznacz długości przekątnych tego rombu, wiedząc, że różnica ich długości jest równa 62 cm.

4.62. Jaką figurę otrzymamy, łącząc kolejno środki boków:
a) równoległoboku b) rombu c) prostokąta d) kwadratu?
Odpowiedź uzasadnij.

4.63. W równoległoboku $ABCD$ wysokość DE jest równa 8 cm i dzieli bok AB na odcinki długości: $|AE| = 4{,}5$ cm, $|EB| = 6$ cm. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

4.64. W równoległoboku $ABCD$ z wierzchołka D kąta rozwartego poprowadzono dwie różne wysokości DE i DF, przy czym $DE \perp AB$, $DF \perp BC$.

D a) Wykaż, że trójkąty AED i FCD są podobne.

b) Wiedząc dodatkowo, że $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{4}{5}$ oblicz, o ile procent wysokość DF jest dłuższa od wysokości DE.

4.65. W równoległoboku $ABCD$ kąt przecięcia przekątnych AC i BD ma miarę 60°. Na dłuższej przekątnej AC zaznaczono punkt E w taki sposób, że odcinek DE jest prostopadły do przekątnej AC. Wiedząc, że $|DE| = \sqrt{3}$ oraz $|\sphericalangle ADE| = 45^\circ$, oblicz długości przekątnych równoległoboku.

4.66. W równoległoboku $ABCD$ krótsza przekątna DB jest jednocześnie wysokością, poprowadzoną na bok BC. Odcinek DE jest wysokością równoległoboku, poprowadzoną na bok AB. Wiedząc, że $|EB| = 2\sqrt{3}$ i $|DB| = 4\sqrt{3}$, oblicz długości boków tego równoległoboku.

4.67. Długości boków równoległoboku są równe 6 cm i 10 cm. Oblicz wysokości równoległoboku poprowadzone z wierzchołka kąta rozwartego wiedząc, że tworzą one kąt 60°.

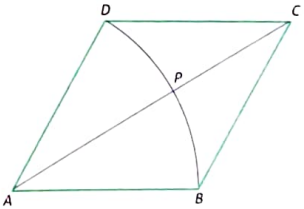
4.68. Kąt między wysokościami równoległoboku poprowadzonymi z wierzchołka kąta rozwartego jest równy 45°. Oblicz obwód tego równoległoboku wiedząc, że odległości środka symetrii równoległoboku od boków są odpowiednio równe 2 cm i 4,5 cm.

4.69. Boki równoległoboku mają długości 6 i 8. Wiedząc, że długość jednej przekątnej jest równa 12 cm, oblicz:
a) cosinus kąta ostrego równoległoboku
b) długość drugiej przekątnej c) sinus kąta między przekątnymi.

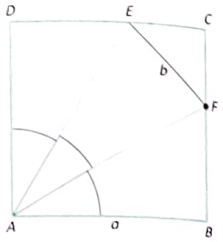
4.70. Kąt ostry równoległoboku jest równy 60°. Dłuższa przekątna ma długość $5\sqrt{3}$ i tworzy z krótszym bokiem kąt równy 45°. Oblicz obwód tego równoległoboku.

4.71. W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono wysokości DE i DF. Wiedząc, że $|EF| = 8$ oraz $|\sphericalangle EDC| = 45^\circ$ i $|\sphericalangle DFE| = 30^\circ$, oblicz:
a) wysokości równoległoboku b) długości boków równoległoboku.

D **4.72.** Kąt ostry BAD rombu $ABCD$ jest równy 60°. Przez wierzchołki B i D poprowadzono okrąg o środku w punkcie A, który przeciął przekątną AC w punkcie P. Wykaż, że $\frac{|PC|}{|AP|} = \sqrt{3} - 1$.



D 4.73. W kwadracie $ABCD$ punkty E i F należą odpowiednio do boków DC i BC oraz odcinki AE i AF dzielą kąt BAD na trzy równe kąty. Wykaż, że jeśli boki kwadratu mają długość a, $a > 0$, zaś odcinek EF ma długość b, $b > 0$, to $3b^2 = 4a^2\left(2-\sqrt{3}\right)$.



D 4.74. Wykaż, że jeśli jeden z dwóch sąsiednich boków równoległoboku jest dwa razy dłuży od drugiego i kąt ostry równoległoboku jest równy 60°, to stosunek długości krótszej przekątnej do dłuższej przekątnej jest równy $\sqrt{3}:\sqrt{7}$.

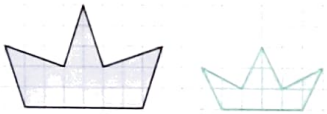
Podobieństwo. Czworokąty podobne

4.75. Czy podane figury są podobne? Odpowiedź uzasadnij.

a) dowolne dwa odcinki
b) dowolne dwie proste
c) dowolne dwa prostokąty
d) dowolne dwa kwadraty
e) dowolne dwa kąty ostre
f) dowolne dwa wycinki jednego koła

4.76. Czy figury F_1 i F_2 na rysunku poniżej są podobne? Odpowiedź uzasadnij.

a)



b)

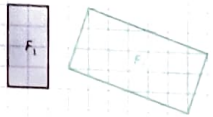


4.77. Obrazem figury F_1 w pewnym podobieństwie jest rysunek F_2. Podaj skalę tego podobieństwa.

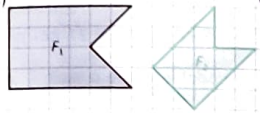
a)



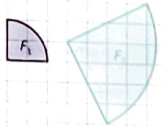
b)



c)



d)



4.78. Obrazem okręgu O_1 o promieniu r_1 w pewnym podobieństwie jest okrąg o_2 o promieniu r_2. Wyznacz skalę tego podobieństwa, jeśli:

a) promień r_2 jest o 20% krótszy od promienia r_1,

b) długość promienia r_1 stanowi 68% długości promienia r_2.

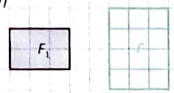
4.79. Obrazem półkola F w podobieństwie o skali $\frac{6}{5}$ jest półkole F_1, którego obwód wynosi 12. Oblicz długość promienia półkola F.

4.80. Czy na rysunku poniżej czworokąt F_1 jest podobny do czworokąta F? Jeśli tak, podaj skalę tego podobieństwa.

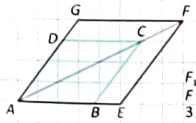
a)



b)

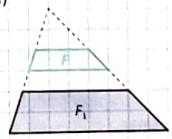


c)



F_1 – romb $AEFG$
F – romb $ABCD$
$3|CF| = |AC|$

d)



4.81. Długości boków jednego czworokąta mają się do siebie jak 2 : 5 : 1 : 3, a jego obwód jest równy 66 cm. Oblicz długości boków drugiego czworokąta, będącego obrazem pierwszego w podobieństwie o skali 2,5.

4.82. Obrazem czworokąta $ABCD$ w podobieństwie o skali k, $k > 0$, jest czworokąt $A_1B_1C_1D_1$. Oblicz, o ile procent obwód czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ jest mniejszy od obwodu czworokąta $ABCD$, jeśli:

a) $k = \frac{1}{5}$ b) $k = \frac{17}{20}$ c) $k = \frac{3}{8}$

4.83. W deltoidzie $ABCD$ mamy dane: $|AB| = 15$ cm, $|AC| = 21$ cm oraz $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 120°$. Obrazem deltoidu $ABCD$ w podobieństwie o skali $\frac{1}{4}$ jest deltoid $A_1B_1C_1D_1$. Oblicz obwód deltoidu $A_1B_1C_1D_1$.

4.84. W prostokącie $ABCD$ długości boków pozostają w stosunku 3 : 4. Obrazem prostokąta $ABCD$ w podobieństwie o skali $\frac{2}{3}$ jest prostokąt, którego przekątna ma długość 7,5 cm. Oblicz różnicę obwodów tych prostokątów.

4.85. Jedna przekątna rombu $ABCD$ jest o 25% krótsza od drugiej. Obrazem rombu $ABCD$ w podobieństwie o skali 2 jest romb $A_1B_1C_1D_1$, którego suma długości przekątnych wynosi 56 cm. Oblicz długość boku rombu $ABCD$.

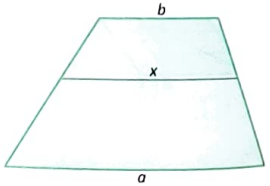
4.86. Bok AB równoległoboku $ABCD$ jest trzy razy dłuższy od boku BC. W jakim stosunku prosta równoległa do boku BC podzieli bok AB, jeśli w wyniku podziału otrzymamy dwa równoległoboki, z których jeden będzie podobny do równoległoboku $ABCD$?

D 4.87. Bok rombu $ABCD$ ma długość 4 cm, a kąt ostry rombu jest równy 60°. Wysokość rombu $EFGH$ jest równa 9 cm, krótsza przekątna tego rombu ma długość $6\sqrt{3}$ cm. Wykaż, że romb $EFGH$ jest podobny do rombu $ABCD$. Oblicz skalę tego podobieństwa.

4.88. W trapezie podstawy mają długości a, b. Odcinek równoległy do obu podstaw dzieli dany trapez na dwa trapezy podobne. Oblicz długość tego odcinka, jeśli:

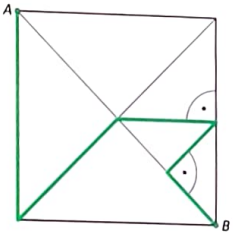
a) $a = 8$ cm, $b = 2$ cm,

b) $a = 18\sqrt{2}$ cm, $b = 4\sqrt{2}$ cm.



Test sprawdzający do rozdziału 4.

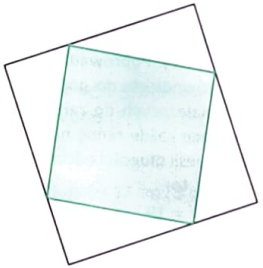
1. Bok kwadratu na rysunku obok ma długość 2. Długość łamanej o początku w punkcie A i końcu w punkcie B, zbudowanej z pięciu odcinków w kolorze zielonym, jest równa:



A. $4+\sqrt{2}$ B. $3+2\sqrt{2}$

C. $3+4\sqrt{2}$ D. $4+2\sqrt{2}$

2. Wierzchołki mniejszego kwadratu należą do boków większego kwadratu i dzielą te boki w stosunku 1 : 2. Wówczas mniejszy kwadrat jest podobny do większego kwadratu w skali:



A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Boki równoległoboku mają długości 3 i $\sqrt{3}$, a kąt ostry jest równy 30°. Dłuższa przekątna tego równoległoboku ma długość:

A. $\sqrt{21}$ B. 4 C. $\sqrt{15}$ D. $\sqrt{12+3\sqrt{3}}$

4. Wierzchołki prostokąta są środkami boków deltoidu. Jeśli przekątne deltoidu mają długość $4-\sqrt{2}$ oraz $4+\sqrt{2}$, to obwód tego prostokąta jest równy:

A. 8 B. 12 C $12\sqrt{2}$ D. 14

5. Wysokość rombu jest równa 12, a długość dłuższej przekątnej wynosi 20 cm. Bok tego rombu ma długość:

A. 12 cm B. 12,5 cm C. 13 cm D. 13,5 cm

6. Ramiona trapezu prostokątnego mają długość 8 cm i 10 cm. Różnica długości podstaw tego trapezu jest równa:

A. 10 cm B. 8 cm C. 6 cm D. 2 cm

7. Obwód rombu jest równy 40. Jeśli różnica długości przekątnych rombu jest równa 4, to suma długości tych przekątnych wynosi:

A. 14 B. 21 C. 24 D. 28

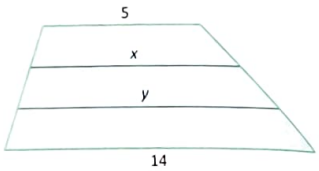
8. Wysokość trapezu równoramiennego jest równa 12 cm, a jego przekątna ma długość 15 cm. Długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu wynosi:

A. 6 cm B. 9 cm C. 12 cm D. 13,5 cm

9. Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadzono dwie różne wysokości h_1 i h_2, które utworzyły kąt 30°. Obwód tego równoległoboku jest równy:

A. $\sqrt{3}\cdot(h_1+h_2)$ B. $2(h_1+h_2)$ C. $3(h_1+h_2)$ D. $4(h_1+h_2)$

10. W trapezie podstawy mają długości 5 i 14. Poprowadzono dwa odcinki równoległe do podstaw, o końcach należących do ramion trapezu i dzielące każde ramię na trzy równe części. Jeśli długości odcinków są równe x i y, to:

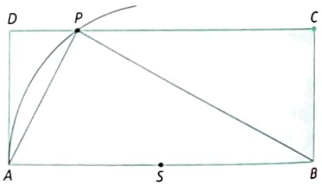


A. $x + y = 19$ B. $x + y = 18$ C. $x + y = 17$ D. $x + y = 16$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

11. Przekątne prostokąta mają długość 18, a sinus kąta między przekątnymi wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Oblicz długości boków tego prostokąta.

12. Punkt S jest środkiem boku AB prostokąta $ABCD$. Łuk okręgu o środku w punkcie S i promieniu $|AS|$ przecina bok DC w punkcie P, jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|AP| = 7{,}5$ oraz $|PB| = 10$, oblicz obwód prostokąta $ABCD$.

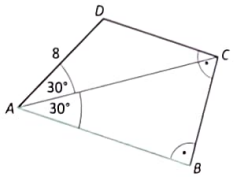


13. Długość boku rombu jest równa 5. Cosinus kąta ostrego rombu wynosi 0,6. Oblicz długości przekątnych tego rombu.

14. Jedna z wysokości równoległoboku jest trzy razy dłuższa od drugiej, a różnica długości dwóch różnych boków równoległoboku wynosi 4 cm. Oblicz obwód tego równoległoboku.

15. Krótszy bok równoległoboku ma długość 7 cm. Jedna z przekątnych tego równoległoboku ma długość 16 cm, a kąt ostry między przekątnymi jest równy 60°. Oblicz długość drugiej przekątnej i długość dłuższego boku.

16. Trapez $ABCD$ na rysunku obok jest prostokątny. Na podstawie danych na rysunku oblicz długość podstawy AB.



17. Kąty BAD i ADC trapezu $ABCD$ są proste. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P pod kątem prostym. Wiedząc, że $|PC| = 4$ cm oraz $|PD| = 6$ cm, oblicz długości przekątnych trapezu $ABCD$.

18. Oblicz wysokość trapezu, którego podstawy mają długości 17 cm i 3 cm, a ramiona – 13 cm i 15 cm.

19. Podstawy trapezu mają długości 15 cm i 20 cm, a wysokość jest równa 14 cm. Oblicz odległości punktu przecięcia przekątnych od obu podstaw.

20. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 134 cm. Wysokość trapezu wynosi 30 cm, a ramię jest dwa razy dłuższe od krótszej podstawy. Oblicz długości boków tego trapezu.

21. W trapezie równoramiennym ramię ma długość 7 cm, a przekątna – 13 cm. Oblicz długości podstaw tego trapezu wiedząc, że kąty ostre mają miarę 60°.

D 22. W trapezie równoramiennym przekątna zawiera się w dwusiecznej kąta przy podstawie i jest prostopadła do jednego z ramion. Wykaż, że kąt ostry trapezu jest równy 60°.

D 23. W trapezie równoramiennym $ABCD$ punkty K i L są środkami ramion AD i BC. Odcinek KL przecina wysokość DE trapezu w punkcie M i przekątną DB w punkcie N. Wykaż, że $|MN| = \frac{|KL|}{2}$.

D 24. Boki czworokąta wypukłego mają kolejno długości a, b, c, d. Wykaż, że jeśli przekątne czworokąta przecinają się pod kątem prostym, to $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

D 25. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i DC. Wykaż, że jeśli dwusieczne wszystkich kątów wewnętrznych trapezu przecinają się w punkcie P, to $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle CPD| = 180^\circ$.

5. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu

5.1. Pole pierścienia wyznaczonego przez okrąg wpisany w kwadrat i okrąg opisany na tym kwadracie jest równe π cm^2. Oblicz pole kwadratu.

5.2. W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $A_1B_1C_1D_1$ w taki sposób, że do każdego boku kwadratu $ABCD$ należy jeden wierzchołek kwadratu $A_1B_1C_1D_1$. Wyznacz stosunek pól tych kwadratów, jeśli boki kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ tworzą z bokami kwadratu $ABCD$:

a) kąt 45° b) kąty odpowiednio 30° i 60°.

5.3. Wierzchołek C prostokąta $ABCD$ znajduje się w odległości 3 cm od przekątnej BD. Wiedząc, że kąt ostry między przekątnymi jest równy 30°, oblicz pole prostokąta $ABCD$.

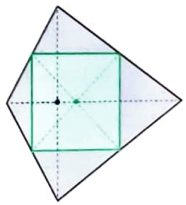
5.4. Wyznacz wymiary prostokąta, którego obwód jest równy 18 cm, a pole wynosi 20 cm^2.

5.5. Pole prostokąta jest równe 9 cm^2. Wierzchołki prostokąta należą do okręgu, którego średnica jest równa 6 cm. Oblicz miarę kąta ostrego między przekątnymi prostokąta.

5.6. W prostokącie $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Odcinek DE jest wysokością trójkąta ACD, a punkt E dzieli przekątną prostokąta na odcinki długości 3 cm i 12 cm. Oblicz pole prostokąta $ABCD$.

5.7. Punkt P dzieli przekątną BD prostokąta w stosunku 1 : 2. Przez punkt P poprowadzono dwie proste równoległe do boków prostokąta, które podzieliły prostokąt na cztery mniejsze prostokąty. Oblicz, jaką część pola prostokąta $ABCD$ stanowi pole największego prostokąta po podziale.

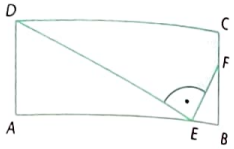
5.8. Z kawałka kartonu w kształcie deltoidu wycięto kwadrat o polu 1,44 m^2, którego wierzchołkami są środki boków deltoidu. Wiedząc, że punkt przecięcia przekątnych deltoidu leżał w odległości 20 cm od punktu przecięcia się przekątnych kwadratu (rysunek obok), oblicz:



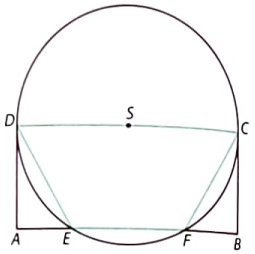
a) pole powierzchni pozostałych skrawków kartonu,

b) obwód deltoidu; wynik podaj z dokładnością do 0,01 m.

5.9. Dwa sąsiednie boki prostokąta $ABCD$ mają długość: $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 3$ cm. Punkt E należy do boku AB, punkt F – do boku BC oraz $|\sphericalangle FED| = 90°$. Wiedząc, że $|DE| = 3|EF|$, oblicz pole czworokąta $DEFC$.



5.10. Boki prostokąta $ABCD$ mają długość: $|AB| = 10$ cm, $|AD| = 4$ cm. Punkt S jest środkiem odcinka DC. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu 5 przecina bok AB w punktach E i F. Oblicz pole czworokąta $EFCD$.



Pole równoległoboku. Pole rombu

5.11. Dwa sąsiednie boki równoległoboku mają długości 6 cm i 13 cm. Oblicz pole tego równoległoboku wiedząc, że kąt między tymi bokami ma miarę:

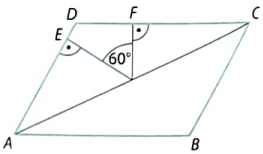
a) 30° b) 45° c) 120°.

5.12. Boki równoległoboku mają długości 12 i 8. Jedna z wysokości równoległoboku jest równa h_1. Wyznacz długość drugiej wysokości, jeśli:

a) $h_1 = 4$ b) $h_1 = 10$ c) $h_1 = 9$.

5.13. Wysokości równoległoboku są równe 4 cm i 7 cm, a sinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz pole tego równoległoboku.

5.14. Punkt O jest środkiem przekątnej AC równoległoboku $ABCD$. Punkt E należy do boku AD, punkt F należy do boku DC i $|\sphericalangle AEO| = |\sphericalangle OFC| = 90°$. Wiedząc, że $|FO| = 3$ cm, $|EO| = 4{,}5$ cm oraz $|\sphericalangle EOF| = 60°$, oblicz pole równoległoboku $ABCD$.



5.15. Obwód równoległoboku jest równy 35 cm, a odległości punktu przecięcia przekątnych od dwóch sąsiednich boków równoległoboku są odpowiednio równe 3 cm i 4 cm. Oblicz pole tego równoległoboku.

5.16. Pole równoległoboku jest równe 24 cm^2, a obwód wynosi 26 cm. Oblicz długości boków równoległoboku wiedząc, że sinus kąta między sąsiednimi bokami jest równy 0,8.

D 5.17. Wykaż, że przekątne równoległoboku dzielą równoległobok na cztery trójkąty o jednakowych polach. Wiedząc dodatkowo, że przekątne równoległoboku mają długości 10 cm i 14 cm, a pole równoległoboku jest równe 35 cm^2, oblicz miarę kąta ostrego między przekątnymi.

5.18. Krótsza przekątna DB równoległoboku $ABCD$ ma długość 20 cm. Wysokość trójkąta ACD, poprowadzona z wierzchołka D, dzieli przekątną AC na odcinki mające długości 9 cm i 25 cm. Oblicz:

a) pole równoległoboku b) sinus kąta ostrego tego równoległoboku.

5.19. Przekątne równoległoboku mają długości 14 cm i 48 cm i zawierają się w dwusiecznych jego kątów. Oblicz pole i obwód równoległoboku.

5.20. Pole rombu jest równe 156. Wysokość rombu jest równa 12. Oblicz długości jego przekątnych.

5.21. Pole rombu wynosi 16. Oblicz długość boku rombu wiedząc, że kąt rozwarty ma miarę trzy razy większą niż kąt ostry tego rombu.

5.22. Oblicz pole rombu, którego bok ma długość 6 cm, a suma długości przekątnych jest równa 16 cm.

5.23. Pole rombu jest równe 4,8 dm^2. Odcinek łączący środki sąsiednich boków rombu przy kącie rozwartym ma długość 2,4 dm. Oblicz:

a) długości przekątnych rombu b) obwód rombu

c) wysokość rombu d) sinus kąta ostrego rombu.

5.24. Przekątne rombu mają długości 10 i 24.

a) Oblicz wysokość tego rombu.

b) Wyznacz długości odcinków, na jakie spodek wysokości poprowadzonej przez środek symetrii rombu dzieli bok rombu.

5.25. Dłuższa przekątna rombu jest równa $\sqrt{30}$, a cosinus kąta rozwartego wynosi $-\frac{2}{3}$. Oblicz:

a) długość boku rombu b) pole tego rombu.

Pole trapezu

5.26. Dane są długości podstaw a, b oraz długości ramion c, d trapezu. Oblicz pole tego trapezu.

a) $a = 15$ cm, $b = 9$ cm, $c = d = 5$ cm

b) $a = 44$ cm, $b = 16$ cm, $c = 17$ cm, $d = 25$ cm

c) $a = 11$ cm, $b = 6$ cm, $c = 12$ cm, $d = 13$ cm

d) $a = 28$ cm, $b = 7$ cm, $c = 17$ cm, $d = 10$ cm

5.27. Pole trapezu jest równe 54 cm^2, a wysokość ma długość 9 cm. Oblicz długości podstaw trapezu, wiedząc, że jedna z nich jest:

a) o 5 cm krótsza od drugiej b) o 25% dłuższa od drugiej.

5.28. Miary kątów trapezu przy dłuższej podstawie wynoszą 45° i 30°. Wiedząc, że podstawy mają długości 10 cm i 4 cm, oblicz pole tego trapezu.

5.29. Krótsza podstawa trapezu ma długość $3\sqrt{6}$ cm. Kąty przy tej podstawie mają miary 135° i 60°, a dłuższe ramię ma długość 18 cm. Oblicz pole tego trapezu.

5.30. W trapezie równoramiennym $ABCD$ wysokość DE ma taką samą długość, jak krótsza podstawa DC i dzieli dłuższą podstawę AB na odcinki w stosunku 1 : 2.

a) Oblicz miary kątów trapezu.

b) Wiedząc dodatkowo, że pole trapezu jest równe 162 cm^2, oblicz $|AB|$ i $|DC|$.

5.31. W trapezie równoramiennym ramię ma długość 12 cm, a jeden z kątów przy tym ramieniu jest dwa razy większy od drugiego. Wiedząc, że przekątna jest prostopadła do ramienia, oblicz pole tego trapezu.

5.32. W trapezie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego podzieliła dłuższą podstawę na odcinki, z których dłuższy ma 8 cm długości. Wiedząc, że wysokość trapezu jest równa 7 cm, oblicz pole tego trapezu.

5.33. Przekątna trapezu równoramiennego ma długość 10 cm i tworzy z dłuższą podstawą kąt równy 45°. Oblicz pole tego trapezu.

5.34. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 38 cm, a jego ramię ma długość 5 cm. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na odcinki, z których jeden jest o 10 cm krótszy od drugiego. Oblicz:

a) długości podstaw trapezu b) pole tego trapezu.

5.35. Dłuższa podstawa AB trapezu $ABCD$ ma długość $4\sqrt{5}$, a długość ramienia AD wynosi 4. Odległość wierzchołka C od przekątnej DB jest równa 3. Wiedząc, że $|\sphericalangle ADB| = 90°$, oblicz:

a) pole trapezu b) wysokość trapezu c) długość krótszej podstawy.

5.36. W trapezie równoramiennym jedna podstawa jest dwa razy dłuższa od drugiej. Przekątna trapezu dzieli kąt przy dłuższej podstawie na połowy. Wiedząc, że pole trapezu jest równe $3\sqrt{3}$ cm^2, oblicz długości boków tego trapezu.

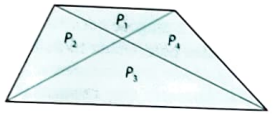
5.37. Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 15 cm, a wysokość jest równa 9 cm. Długość odcinka łączącego środki przekątnych wynosi 4 cm. Oblicz pole tego trapezu.

5.38. Ramię trapezu równoramiennego ma długość 25 cm, a odcinek łączący środki przekątnych – 7 cm. Wiedząc, że pole trapezu jest równe 360 cm^2, oblicz długości podstaw tego trapezu.

5.39. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, przekątne przecinają się w punkcie E. Pole trójkąta AED jest równe 15 cm^2, a pole trójkąta DEC wynosi 10 cm^2. Oblicz:

a) $|EC| : |AE|$ b) pole trapezu $ABCD$.

5.40 Przekątne trapezu dzielą trapez na cztery trójkąty. Niech P_1, P_2, P_3, P_4 oznaczają pola tych trójkątów, jak na rysunku obok. Oblicz pole trapezu, jeśli:



a) $P_1 = 14$, $P_2 = 35$ b) $P_3 = 7$, $P_4 = 3$ c) $P_1 = 5$, $P_3 = 45$.

5.41. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie, który dzieli je w stosunku 1 : 2. Wiedząc, że pole trapezu jest równe 27 cm^2, oblicz pola powstałych trójkątów.

Pole czworokąta – zadania różne

5.42. Dane są długości d_1 i d_2 przekątnych czworokąta wypukłego oraz miara kąta między tymi przekątnymi. Oblicz pole czworokąta, jeśli:

a) $d_1 = 10$, $d_2 = 6$, $\alpha = 30°$ b) $d_1 = 8\sqrt{3}$, $d_2 = 4$, $\alpha = 60°$

c) $d_1 = 21$, $d_2 = 6\frac{2}{3}$, $\alpha = 120°$ d) $d_1 = 12$, $d_2 = 5\sqrt{2}$, $\alpha = 135°$.

5.43. W czworokącie wypukłym przekątne mają długość 12 cm oraz 15 cm i tworzą z jednym bokiem tego czworokąta kąty równe α i β. Oblicz pole czworokąta, jeśli:

a) $\alpha = 70°$, $\beta = 80°$ b) $\alpha = 35°$, $\beta = 25°$.

5.44. Dane są długości d_1 i d_2 przekątnych czworokąta wypukłego oraz jego pole P. Oblicz miarę kąta ostrego przecięcia przekątnych, jeśli:

a) $P = 20\ \text{cm}^2$, $d_1 = 8\ \text{cm}$, $d_2 = 10\ \text{cm}$ b) $P = 3\ \text{cm}^2$, $d_1 = \sqrt{6}\ \text{cm}$, $d_2 = \sqrt{8}\ \text{cm}$

c) $P = 5\sqrt{2}\ \text{dm}^2$, $d_1 = d_2 = 2\sqrt{5}\ \text{dm}$ d) $P = 60\ \text{cm}^2$, $d_1 = 1\ \text{dm}$, $d_2 = 0{,}12\ \text{m}$.

5.45. Rozpatrujemy równoległoboki, których obwód wynosi 16 cm, a kąt ostry jest równy 45°.

a) Wyznacz długości boków równoległoboku, którego pole jest równe $6\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

b) Wyznacz długości boków równoległoboku, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.

5.46. Rozpatrujemy trapezy prostokątne, których suma długości podstaw i wysokości jest równa 30 cm.

a) Wyznacz wysokość trapezu, którego pole jest równe $100\ \text{cm}^2$.

b) Wyznacz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu, który ma największe pole. Oblicz to pole.

5.47. Rozpatrujemy czworokąt wypukły, którego przekątne przecinają się pod kątem 60°, a suma ich długości jest równa 52 cm. Ile jest równe największe z możliwych pole takiego czworokąta?

D **5.48.** Wykaż, że:

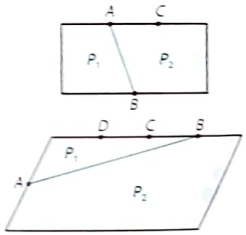
a) równoległobok o danych długościach boków ma największe pole wtedy, gdy jest prostokątem,

b) równoległobok o danych długościach przekątnych ma największe pole wtedy, gdy jest rombem.

5.49. Oblicz stosunek pol $P_1 : P_2$ figur, na które odcinek AB dzieli:

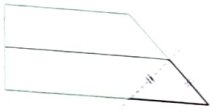
a) prostokąt na rysunku obok, jeśli punkty A, C wyznaczają na jednym boku trzy równe odcinki, a punkt B jest środkiem przeciwległego boku,

b) równoległobok na rysunku obok, jeśli A jest środkiem krótszego boku, a punkty B, C, D wyznaczają na dłuższym boku cztery równe odcinki.



5.50. Przekątne czworokąta wypukłego dzielą ten czworokąt na cztery trójkąty. Wiedząc, że pola trzech trójkątów są równe 20, 30 i 40, oblicz pole tego czworokąta. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

5.51. Drużyna harcerska przeznaczyła kawałek materiału w kształcie trapezu prostokątnego na chorągiewkę. Materiał został złożony wzdłuż linii łączącej środki ramion trapezu o długości 90 cm. Następnie odcięto wystający skrawek, mający kształt trójkąta równoramiennego, jak na rysunku obok. Wiedząc, że trójkątny ścinek ma pole 600 cm^2, a jego podstawa ma długość 40 cm, oblicz:



a) obwód chorągiewki z dokładnością do 1 cm,

b) pole powierzchni chorągiewki.

D **5.52.** W czworokącie połączono kolejno środki boków. Wykaż, że powstały w ten sposób równoległobok ma pole dwa razy mniejsze od pola danego czworokąta.

5.53. Oblicz pole czworokąta, wiedząc, że środki kolejnych boków tego czworokąta tworzą:

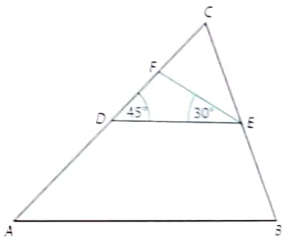
a) prostokąt o obwodzie 20, którego jeden z boków jest o 3 dłuższy od drugiego,

b) romb, którego krótsza przekątna ma długość 17, a wysokość jest równa 8,

c) równoległobok, którego boki mają długość 12 i 7, a kąt rozwarty jest równy 150°.

5.54. W trapezie równoramiennym $ABCD$ ramiona AD i BC mają długość 7 cm. Krótsza podstawa DC ma długość 3 cm i tworzy z przekątną AC kąt równy 60°. Oblicz pole tego trapezu.

5.55. W trójkącie ABC na rysunku obok punkty D i E są środkami boków AC i BC, a punkt F – środkiem odcinka DC. Wiedząc, że $|\sphericalangle EDC| = 45°$, $|\sphericalangle FED| = 30°$ oraz $|FE| = 8$, oblicz pole czworokąta $ABEF$.



Pola figur podobnych

5.56. Obrazem figury F w podobieństwie o skali 0,2 jest figura F_1. Oblicz pola figur F_1 i F wiedząc, że pole figury F_1 jest o $72\ \text{cm}^2$ mniejsze od pola figury F.

5.57. Figura F_1 jest podobna do figury F w skali 1,5. Oblicz pola tych figur, wiedząc, że ich różnica jest równa $85\ \text{cm}^2$.

5.58. Figura F_1 jest podobna do figury F w skali k. Oblicz k, jeśli:

a) pole figury F_1 stanowi 144% pola figury F,

b) pole figury F_1 jest o 21% większe od pola figury F,

c) pole figury F_1 jest o 36% mniejsze od pola figury F,

d) pole figury F stanowi 56,25% pola figury F_1.

5.59. Figury F_1 i F są podobne. O ile procent pole figury F_1 jest mniejsze od pola figury F, jeśli:

a) obwód figury F_1 stanowi $\frac{3}{4}$ obwodu figury F,

b) obwód figury F_1 jest o 20% mniejszy od obwodu figury F,

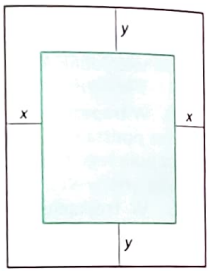
c) obwód figury F stanowi $\frac{5}{3}$ obwodu figury F_1,

d) obwód figury F jest o 40% większy od obwodu figury F_1.

5.60. Zakupiono antyramę do zdjęcia o wymiarach 10 cm na 15 cm. Rama wyznacza prostokąt podobny w skali 1,4 do brzegu zdjęcia. Zdjęcie umieszczono w centralnym miejscu antyramy tak, że odpowiednie krawędzie są równoległe do siebie, jak na rysunku obok. Oblicz:

a) odległość x i y zdjęcia od krawędzi antyramy,

b) jaki procent pola zdjęcia stanowi pole widocznego tła.



5.61. W równoległoboku $ABCD$ nierównoległe boki mają długość 7 i 8. Obrazem równoległoboku $ABCD$ w pewnym podobieństwie jest równoległobok $A_1B_1C_1D_1$. Wiedząc, że pole równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$ jest równe 336, a kąt rozwarty jest równy 150°, oblicz:

a) skalę tego podobieństwa b) obwód równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$.

5.62. W trapezie $ABCD$ odcinki AB i DC są podstawami. Na ramieniu AD zaznaczono punkt E, a na ramieniu BC – punkt F w taki sposób, że trapez $EFCD$ jest podobny do trapezu $ABFE$. Wiedząc, że $|AB| = 18$ cm i $|DC| = 2$ cm, oblicz stosunek:

a) wysokości trapezów $EFCD$ i $ABFE$ b) pól trapezów $EFCD$ i $ABFE$.

5.63. W trapezie $ABCD$ zaznaczono punkt E na ramieniu AD oraz punkt F na ramieniu BC i otrzymano trapezy $CDEF$ oraz $ABFE$, które są do siebie podobne. Wiedząc, że stosunek pól trapezów podobnych wynosi 4 : 9, a długość odcinka EF jest równa 18 cm, oblicz długości podstaw trapezu $ABCD$.

Mapa. Skala mapy

5.64. Długość Wisły wynosi 1047 km. Oblicz, jaką długość (w cm) ma niebieska linia obrazująca Wisłę na mapie, która została wykonana w skali 1 : 3 000 000.

5.65. Droga z Rzeszowa do Radomia, zaznaczona na mapie wykonanej w skali 1 : 250 000, ma długość 80 cm. Oblicz, ile kilometrów ma w rzeczywistości.

5.66. Oblicz skalę, w jakiej został wykonany plan, jeśli:

a) 1 cm na mapie odpowiada 4 m w rzeczywistości,

b) 1 cm^2 na mapie odpowiada 4 m^2 w rzeczywistości.

5.67. Budynek parterowy o powierzchni równej 150 m^2 zaznaczono na planie zagospodarowania terenu jako prostokąt o wymiarach 20 cm na 30 cm.

a) Oblicz skalę tego planu.

b) Wyznacz wymiary prostokąta, przedstawiającego dany budynek na mapie w skali 1 : 500.

5.68. Działka ma kształt prostokąta o wymiarach 50 m na 40 m. Ile cm^2 będzie zajmować obszar tej działki na planie sporządzonym w skali 1 : 2000?

5.69. Prostokątna działka na planie, sporządzonym w skali 1 : 1000, ma wymiary 15 cm na 20 cm. Ile hektarów ma ta działka w rzeczywistości?

5.70. Puszcza Solska zajmuje na mapie w skali 1 : 2 000 000 powierzchnię równą 3,1 cm^2. Oblicz, ile wynosi rzeczywista powierzchnia tej puszczy w km^2.

5.71. Jezioro Dąbie ma powierzchnię równą 5600 ha. Oblicz, jaką powierzchnię zajmuje to jezioro na mapie, wykonanej w skali 1 : 400 000.

Test sprawdzający do rozdziału 5.

1. Przekątna kwadratu ma długość 6 cm. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 12 cm^2 B. 18 cm^2 C. 24 cm^2 D. 36 cm^2

2. Boki równoległoboku mają długość 4 i 8, a jedna z wysokości jest równa 6. Druga wysokość jest równa:

A. 12 B. 9 C. 4,5 D. 3

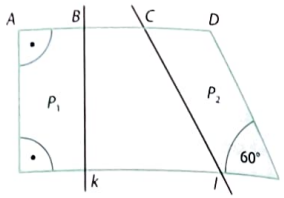
3. Sąsiednie boki równoległoboku mają długość 4 cm i 5 cm. Pole tego czworokąta nie może być równe:

A. 21 cm^2 B. $17\frac{8}{9}$ cm^2 C. $6\sqrt{7}$ cm^2 D. $4\sqrt{5}$ cm^2

4. Przekątne rombu mają długości 10 cm i 24 cm. Wysokość rombu jest równa:

A. 13 cm B. $9\frac{3}{13}$ cm C. $18\frac{6}{13}$ cm D. $4\frac{8}{13}$ cm

5. Kąt ostry trapezu prostokątnego jest równy 60°. Prosta k jest prostopadła do podstaw trapezu. Prosta l jest równoległa do dłuższego ramienia, jak na rysunku obok. Niech P_1 i P_2 oznaczają pola figur odciętych z trapezu przez te proste. Jeśli $|AB| = |CD|$, to:



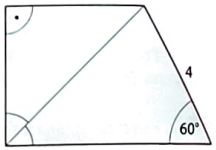
A. $P_1 < P_2$ B. $P_1 = \sqrt{2}P_2$

C. $P_1 = P_2$ D. $P_1 = \sqrt{3}P_2$

6. Pole trapezu wynosi 108, a odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 9. Wysokość tego trapezu jest równa:

A. 10 B. 12 C. $10\sqrt{3}$ D. $12\sqrt{3}$

7. Dłuższe ramię trapezu prostokątnego ma długość 4 i tworzy z dłuższą podstawą kąt równy 60°. Krótsza przekątna trapezu jest dwusieczną kąta prostego przy podstawie. Pole tego trapezu jest równe:



A. $2\left(\sqrt{3}+6\right)$ B. $2\left(\sqrt{3}+2\right)$

C. $6\sqrt{3}$ D. $2\left(2\sqrt{3}+3\right)$

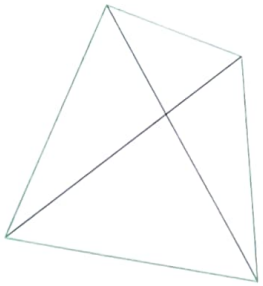
8. Obwód wielokąta w jest o 40% większy od obwodu podobnego do niego wielokąta w_1. Pole wielokąta w jest większe od pola wielokąta w_1 o:

A. 16% B. 20% C. 40% D. 96%

9. Przekątne czworokąta wypukłego mają długość 8 cm oraz 9 cm i przecinają się pod kątem 30°. Pole tego czworokąta wynosi:

A. $9\sqrt{3}$ cm^2 B. 18 cm^2 C. $18\sqrt{2}$ cm^2 D. $18\sqrt{3}$ cm^2

10. Przekątne czworokąta dzielą go na cztery trójkąty. Pola trzech z tych trójkątów dane są na rysunku obok. Zatem pole czworokąta jest równe:

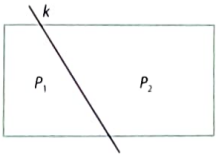


A. 48 B. 50

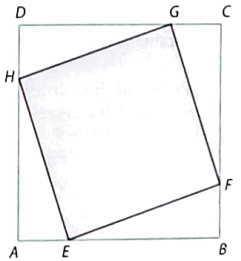
C. 52 D. 56

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. Na rysunku obok prosta k dzieli jeden z dłuższych boków prostokąta na odcinki, których długości pozostają w stosunku 1 : 4, a drugi dłuższy bok dzieli na połowy. Oblicz pole prostokąta wiedząc, że różnica pól powstałych trapezów jest równa 6.



12. W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $EFGH$, jak na rysunku obok. Wierzchołki E, F, G, H dzielą boki kwadratu $ABCD$ w stosunku 1 : 3.



a) Oblicz, jaką część pola kwadratu $ABCD$ stanowi pole kwadratu $EFGH$.

b) W jakiej skali kwadrat $EFGH$ jest podobny do kwadratu $ABCD$?

13. Przekątne prostokąta wypukłego przecinają się pod kątem 45°. Pole tego prostokąta jest równe $16\sqrt{2}$ cm^2. Podaj wymiary tego prostokąta.

14. Dłuższy bok równoległoboku ma długość $5\sqrt{5}$, a cosinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Wiedząc, że pole równoległoboku wynosi 50, oblicz:

a) długość krótszego boku,

b) długości przekątnych i miarę kąta ostrego między przekątnymi.

15. W równoległoboku $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie O. Punkt M należy do boku AB i odcinek OM jest równoległy do boku AD. Wiedząc, że $|AM| = 8$ cm, $|AC| = 26$ cm oraz $|OM| = 7$ cm, oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

16. Pole rombu jest równe 96 cm^2, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{24}{25}$. Oblicz:

a) długość boku rombu b) wysokość rombu c) długości przekątnych.

17. Podstawy trapezu mają długość 30 cm i 2 cm, a ramiona – 17 cm i 25 cm. Oblicz pole tego trapezu.

18. Pole trapezu wynosi 169 cm^2. Punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą z nich na odcinki, których długości pozostają w stosunku 5 : 8. Oblicz pola trójkątów, na jakie przekątne podzieliły trapez.

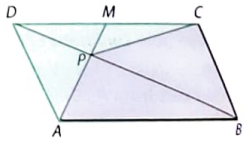
19. Pole trapezu równoramiennego wynosi 108 cm^2, a wysokość trapezu jest równa 9 cm. Oblicz długość przekątnej tego trapezu.

20. Przekątne trapezu prostokątnego mają długość 13 cm i 15 cm, a różnica długości podstaw jest równa 4 cm. Oblicz pole tego trapezu.

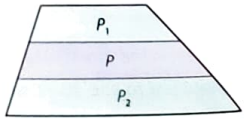
21. Przekątne czworokąta wypukłego mają długość 12 cm i 5 cm. Oblicz, jakie największe pole może mieć ten czworokąt.

22. Rozpatrujemy czworokąty wypukłe, których suma długości przekątnych jest równa 20 cm, a kąt ostry między przekątnymi ma miarę 45°. Wyznacz długości przekątnych czworokąta, którego pole jest największe z możliwych. Oblicz to największe pole.

D 23. Punkt M jest środkiem boku DC równoległoboku $ABCD$. Przekątna DB przecina odcinek AM w punkcie P. Wykaż, że pole czworokąta wypukłego $ABCP$ jest dwa razy większe od pola czworokąta wklęsłego $APCD$.



D 24. W trapezie poprowadzono dwa odcinki równoległe do podstaw, które podzieliły ramiona trapezu na trzy równe odcinki, jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli pola powstałych w ten sposób trapezów są równe odpowiednio P_1, P, P_2, to $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$.



25. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są: $|AD| = |BC| = 6$, $|DC| = 3\sqrt{5}$ oraz $|AC| = 3\sqrt{17}$. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta przy wierzchołkach A i B jest równa 90°, oblicz pole tego czworokąta.

6. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka

6.1. Dane są punkty: $A(-3, 2)$, $B(4, -1)$, $C(5, 3)$. Oblicz współrzędne punktu D, jeśli:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$

6.2. Dany jest punkt A oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Oblicz współrzędne punktu B.

a) $A(0, -3)$, $\overrightarrow{AB} = [2, -1]$ b) $A(-4, 0)$, $\overrightarrow{AB} = [3, 5]$

c) $A\left(7\frac{1}{2}, -6\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[-4, 7\frac{3}{4}\right]$ d) $A\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[\sqrt{3} + 3, 1 - 2\sqrt{3}\right]$

6.3. Dany jest punkt B oraz wektor $\overrightarrow{AB}$. Oblicz współrzędne punktu A.

a) $B(0, -8)$, $\overrightarrow{AB} = [-3, -2]$ b) $B\left(2\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left[1\frac{1}{6}, -\sqrt{2}\right]$

6.4. Sprawdź, korzystając z równoległości wektorów, czy odcinki AB i CD są równoległe, jeśli:

a) $A(-4, -1)$, $B(3, 6)$, $C(1, -3)$, $D(2, -2)$

b) $A(0, 2)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(0, 6)$

6.5. Wyznacz liczbę m, dla której wektory $\vec{u} = [m^2 - 1, -m]$ oraz $\vec{v} = [-1, m]$ są:

a) równe b) przeciwne c) równoległe.

6.6. Dane są wektory: $\vec{u} = [2, -4]$, $\vec{v} = [-3, 4]$, $\vec{z} = [10, -2]$. Oblicz współrzędne i długość wektora:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{z} - \vec{u}$ c) $3\vec{v}$ d) $\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{z}$

6.7. Dane są punkty $A(-3, 7)$, $B(5, 3)$. Odcinek AB podzielono na cztery odcinki równej długości. Oblicz współrzędne punktów podziału.

6.8. Punkt P jest środkiem odcinka AB. Wyznacz punkt B, jeśli:

a) $A(-3, 0)$, $P(-1, 2)$ b) $A(30, -20)$, $P(-6, -14)$

6.9. Dane są punkty $A(-10, 7)$, $B(2, -11)$. Odcinek AB podzielono na
a) trzy odcinki równej długości b) pięć odcinków równej długości.
Oblicz współrzędne punktów podziału.

6.10. Dane są punkty: $A(3, 5)$, $B(9, -7)$. Wyznacz współrzędne punktu P, należącego do odcinka AB wiedząc, że
a) $|AP| : |PB| = 5 : 1$ b) $|AP| : |PB| = 2 : 3$

6.11. Dane są wierzchołki trójkąta ABC: $A(-4, -5)$, $B(1, -2)$, $C(-2, 3)$. Punkty D i E są środkami boków AC i BC. Oblicz współrzędne punktu M, będącego środkiem odcinka DE.

6.12. Punkt $S(1, 2)$ jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Wiedząc, że $A(-5, 3)$, $B(-2, -4)$, oblicz współrzędne punktów C i D.

6.13. Punkty $A(-4, 3)$, $B(-2, -3)$, $C(6, 1)$ oraz P są wierzchołkami równoległoboku. Oblicz współrzędne punktu P. Rozważ wszystkie przypadki.

6.14. Dane są punkty: $A(-3, -2)$, $B(9, 2)$, $C(-3, 8)$. Oblicz:
a) długości środkowych AD, BE i CF trójkąta ABC,
b) współrzędne środka ciężkości tego trójkąta,
c) obwód trójkąta DEF.

6.15. Punkty $D(4, -2)$, $E(6, 1)$, $F(0,3)$ są środkami boków odpowiednio AB, BC i AC trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Proste w układzie współrzędnych

6.16. Dane jest równanie kierunkowe prostej k i punkt P. Wyznacz równanie kierunkowe prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) $k: y = -2x + 3$, $P(-4, 1)$ b) $k: y = \frac{x+5}{3}$, $P(9, -5)$

6.17. Dane jest równanie ogólne prostej k i punkt P. Wyznacz równanie ogólne prostej równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.

a) $k: 3x - 4y + 5 = 0$, $P(2, -9)$ b) $k: -2x + y + 7 = 0$, $P(-6, 5)$

6.18. Wyznacz równanie kierunkowe prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P, jeśli:

a) $k: y = \frac{x-1}{2}$, $P\left(2\frac{1}{2}, -1\right)$ b) $k: y = 7x - 3$, $P(-14, -3)$

6.19. Wyznacz równanie ogólne prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P, jeśli:

a) $k: 3x - y + 5 = 0$, $P(-2, 1)$ b) $k: -5x + 2y - 4 = 0$, $P(12, -8)$

6.20. Wyznacz miarę kąta nachylenia prostej k do osi OX, jeśli:

a) $k: \sqrt{3}x - y + 1 = 0$ b) $k: \sqrt{12}x + 6y - 5 = 0$

c) $k: x + \sqrt{2} - 2 = 0$ d) $k: 2y - \sqrt{3} + 1 = 0$

6.21. Dane są punkty A, B. Wyznacz tangens kąta α nachylenia prostej k do osi OX wiedząc, że punkty A, B należą do prostej k.

a) $A(3, -8)$, $B(-4, 6)$ b) $A\left(\sqrt{2}, 1\right)$, $B\left(-\sqrt{8}, -5\right)$

6.22. Wyznacz równanie kierunkowe prostej, przechodzącej przez punkty A, B, jeśli:

a) $A(-5, 12)$, $B(4, -3)$ b) $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

6.23. Wyznacz równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty A i B, jeśli:

a) $A(-4, 7)$, $B(-1, -2)$ b) $A\left(\sqrt{2}+2, -1\right)$, $B\left(\sqrt{2}-2, 3\right)$

c) $A\left(-4, 1+\sqrt{5}\right)$, $B\left(10, \sqrt{5}+1\right)$ d) $A\left(-1, \sqrt{3}\right)$, $B\left(-1, -\sqrt{6}\right)$

6.24. Punkty $A(-6, 5)$, $B(-1, -3)$, $C(2, 1)$, $D(4, 7)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się przekątnych AC i BD.

6.25. Dane są punkty $A(-3, -4)$, $B(5, 2)$, $C(-1, 6)$.
a) Wyznacz równania prostych, zawierających środkowe trójkąta ABC.
b) Oblicz współrzędne punktu przecięcia się środkowych w tym trójkącie.

6.26. Dane są punkty $A(-2, -5)$, $B(7, 1)$, $C(-2, 3)$.
a) Wyznacz równania symetralnych dwóch dowolnych boków trójkąta ABC.
b) Oblicz współrzędne punktu przecięcia się symetralnych boków trójkąta ABC.

6.27. Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta. Oblicz współrzędne punktu D, jeśli:
a) $A(-2, -5)$, $B(7, -2)$, $C(-1, 2)$ b) $A(-4, 1)$, $B(2, -1)$, $C(8, 2)$.

6.28. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się wysokości w trójkącie ABC, jeśli $A(-3, 0)$, $B(9, -6)$, $C(5, 6)$.

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

6.29. Oblicz odległość punktu $P(-2, 3)$ od prostej k, jeśli:
a) $k: x - 7 = 0$ b) $k: y + 1 = 0$
c) $k: 7x - y + 17 = 0$ d) $k: 3x + 4y + 5 = 0$

6.30. Dana jest prosta k: $4x - 3y + C = 0$ oraz punkt $P(-1, 1)$. Wyznacz liczbę C, dla której odległość punktu P od prostej k jest równa:
a) 1 b) 15 c) 0 d) $\sqrt{7}$

6.31. Dana jest prosta k: $8x - 15y + 7 = 0$. Wyznacz liczbę a, dla której odległość punktu $P(a, 3)$ od prostej k jest równa:
a) 2 b) 0 c) 13 d) 10

6.32. Dana jest prosta k: $-2x + y + 3 = 0$. Wyznacz liczbę a, dla której punkt P leży w odległości $2\sqrt{5}$ od prostej k, jeśli:
a) $P(1, a)$ b) $P(3a, 4)$ c) $P(a, 2a)$ d) $P(a + 2, a - 1)$

6.33. Oblicz odległość między prostymi równoległymi k i l, jeśli:
a) $k: x + y + 2 = 0$ $l: x + y - 4 = 0$
b) $k: x + 6 = 0$ $l: 5x - 10 = 0$
c) $k: 2x - y + 3 = 0$ $l: -3x + 1{,}5y - 2 = 0$
d) $k: 5y + 7 = 0$ $l: 3y - 20 = 0$

D 6.34. Wykaż, że prosta k: $2x - y - 1 = 0$ jest równo oddalona od prostych m: $2x - y + 9 = 0$ oraz n: $2x - y - 11 = 0$.

6.35. Wyznacz równanie prostej l, równoległej do prostej k: $8x - 15y + 21 = 0$ i leżącej w odległości 4 od prostej k.

6.36. Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $A(3, -2)$, $B(3, 3)$, $C(0, 4)$, $D(-15, 4)$.
a) Które boki trapezu są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.
b) Oblicz wysokość tego trapezu.

6.37. Wyznacz równanie prostej l, równoległej do prostej k: $6x - 8x + 1 = 0$ i leżącej w odległości 3 od punktu $P(-7, -2)$.

6.38. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(-2, 3)$, $B(-2, 2)$, $C(2, 0)$. Wyznacz:
a) równania ogólne prostych zawierających boki tego trójkąta,
b) wysokości tego trójkąta.

6.39. Punkty $A(-1, 7)$, $B(-2, 0)$, $C(3, -5)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Bez wyznaczania współrzędnych wierzchołka D, oblicz:
a) wysokość rombu b) długość przekątnej BD.

6.40. Punkty $A(-6, 2)$, $B(-4, -2)$, $C(4, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Bez wyznaczania współrzędnych wierzchołka D, oblicz dwie różne wysokości tego równoległoboku.

6.41. Wyznacz równanie prostej l, prostopadłej do prostej k: $2x - 3y + 1 = 0$ i leżącej w odległości $2\sqrt{13}$ od punktu $P(-3, 4)$.

Pole trójkąta. Pole wielokąta

6.42. Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli:
a) $A(1, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 3)$ b) $A(-4, 5)$, $B(6, -2)$, $C(3, 4)$

6.43. Dane są punkty $A(-5, -2)$, $B(3, -3)$, $C(-1, 5)$.
D a) Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny.
b) Oblicz pole trójkąta ABC.

6.44. Dane są punkty $A(-3, 2)$, $B(5, 0)$, $C(-2, 6)$.
D a) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.
b) Oblicz pole trójkąta ABC.

6.45. Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach:
$3x - y - 9 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$. Oblicz pole tego trójkąta.

6.46. Oblicz pole trójkąta równobocznego ABC wiedząc, że punkt S jest środkiem ciężkości tego trójkąta oraz $\overrightarrow{AS} = [2\sqrt{2}, -4]$.

6.47. Oblicz pole sześciokąta foremnego $ABCDEF$ wiedząc, że $\overrightarrow{AD} = [\sqrt{39}, 5]$.

6.48. Punkt S jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu $ABCD$. Wiedząc, że $\overrightarrow{AS} = \left[-12, 3\frac{1}{2}\right]$, oblicz pole kwadratu $ABCD$.

6.49. Oblicz pole prostokąta $ABCD$ wiedząc, że $A(-5, -7)$, $B(4, 5)$, a do prostej DC należy punkt $E(-3, 4)$.

6.50. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$ wiedząc, że odległość punktu A od prostej DC jest równa 6 oraz $\overrightarrow{DC} = [4, -3]$.

6.51. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$ wiedząc, że:

a) $A(2, 4)$, $B(6, 3)$, $C(4, -1)$

b) $A(-2, 5)$, $C(3, 0)$, $D(7, 2)$.

6.52. Dane są punkty $A(-3, -2)$, $B(6, 4)$, $C(2, 5)$, $D(-1, 3)$.

D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

b) Oblicz pole tego trapezu.

6.53. Punkty $A(-2, -1)$, $B(5, 3)$, $C(2, 7)$, $D(-5, 8)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.

D a) Wykaż, że przekątne AC i BD są prostopadłe.

b) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

6.54. Oblicz pole czworokąta $ABCD$ wiedząc, że:

a) $A(-5, 3)$, $B(1, -3)$, $C(4, 6)$, $D(-3, 6)$

b) $A(-4, 2)$, $B(-4, -3)$, $C(0, -4)$, $D(6, 5)$

6.55. Dane są punkty: $A(0, 1)$, $B(8, 4)$. Wyznacz na osi OX taki punkt C, aby pole trójkąta ABC było równe 10.

6.56. Dane są punkty: $A(1, 2)$, $B(4, 6)$. Wyznacz na osi OY taki punkt C, aby pole trójkąta ABC było równe 13.

Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu

6.57. Przekształć dane równanie okręgu do postaci kanonicznej. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

a) $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 14x + 18y + 9 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 5x - 3y - 0{,}5 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 11x - y + 5{,}5 = 0$

6.58. Sprawdź, które z poniższych równań opisuje okrąg. Wyznacz środek i promień tego okręgu.

a) $x^2 + y^2 - 2xy = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6y = 0$

c) $x^2 + y + 3x = 0$

d) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$

6.59. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S wiedząc, że punkt A należy do tego okręgu.

a) $A(3, 10)$, $S(-3, 2)$

b) $A(4, 7)$, $S(-2, 1)$

6.60. Dany jest punkt A oraz proste k i l. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt A wiedząc, że środek tego okręgu należy jednocześnie do prostej k i do prostej l.

a) $A(-2, 2)$, $k: y = -3x + 6$, $l: x - 1 = 0$

b) $A(8, -1)$, $k: y = -3x + 13$, $l: x - 2y - 2 = 0$

6.61. Dany jest promień r okręgu oraz punkty A i B należące do tego okręgu. Wyznacz współrzędne środka tego okręgu.

a) $A(-3, 4)$, $B(5, 0)$, $r = 5$

b) $A(1, 3)$, $B(5, -1)$, $r = 2\sqrt{2}$

6.62. Dane są punkty A i B oraz prosta k. Wyznacz współrzędne środka S i promień r okręgu, przechodzącego przez punkty A, B wiedząc, że środek okręgu należy do prostej k.

a) $A(1, 4)$, $B(7, 0)$, $k: x + 2y = 0$

b) $A(0, -8)$, $B(4, 0)$, $k: 2x - 3y + 5 = 0$

6.63. Oblicz, o ile istnieją, punkty wspólne okręgu o i prostej k, jeśli:

a) $o: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$, $k: x - y + 7 = 0$

b) $o: (x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 18$, $k: 2x - 2y - 1 = 0$

c) $o: x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$, $k: x + 2y + 6 = 0$

d) $o: x^2 + y^2 + 2x + 10y + 17 = 0$, $k: x + 3y + 19 = 0$

6.64. Określ położenie prostej k względem okręgu o, jeśli:

a) $k: x + y - 4 = 0$, $o: x^2 + y^2 = 8$

b) $k: x - 2y - 1 = 0$, $o: (x - 1)^2 + y^2 = 4$

c) $k: y - 3x + 5 = 0$, $o: x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

d) $k: x - 4y - 4 = 0$, $o: x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

6.65. Wyznacz równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i przechodzącego przez dany punkt A.

a) $A(3, 0)$ b) $A(8, 1)$ c) $A(-4, 2)$ d) $C(-9, -8)$

6.66. Wyznacz równanie okręgu:

a) stycznego do prostych $k: y = 2x + 4$ oraz $l: y = 2x - 6$ wiedząc, że środek tego okręgu należy do osi OX,

b) stycznego do prostych $k: 4x + 3y = 0$ oraz $l: 4x + 3y + 8 = 0$ wiedząc, że środek tego okręgu należy do osi OY.

6.67. Dany jest okrąg $o: x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$. Wyznacz równanie ogólne prostej k, która jest styczna do tego okręgu w punkcie:

a) $A(9, 1)$ b) $B(4, -4)$ c) $C(0, 4)$ d) $D(7, 5)$

6.68. Napisz równanie kierunkowe stycznych do danego okręgu o i równoległych do prostej k, jeśli:

a) $o: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ $k: y = 2x$

b) $o: (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$ $k: y = x$

c) $o: x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ $k: y = -3x$

d) $o: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ $k: y = -x$

6.69. Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i prostopadłych do prostej k, jeśli:

a) $o: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ $k: y = x$

b) $o: (x - 5)^2 + y^2 = 9$ $k: y = -x$

c) $o: x^2 + y^2 - 2x + 12y + 28 = 0$ $k: y = -0{,}5x$

d) $o: x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$ $k: y = -0{,}75x$

6.70. Napisz równania kierunkowe stycznych do danego okręgu o i nachylonych do osi OX pod kątem α, jeśli:

a) $x^2 + y^2 = 1$; $\alpha = 60^\circ$ b) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; $\alpha = 120^\circ$

c) $x^2 + y^2 - 10x = 0$; $\alpha = 150^\circ$ d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$; $\alpha = 135^\circ$

Zadania różne z geometrii analitycznej

D 6.71. Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-3, 2)$, $B(7, -4)$, $C(9, 2)$, $D(-1, 8)$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

D 6.72. Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-5, -4)$, $B(2, 0)$, $C(1, 8)$, $D(-6, 4)$, to czworokąt $ABCD$ jest rombem.

D 6.73. Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-5, -2)$, $B(-1, -4)$, $C(3, 4)$, $D(-1, 6)$, to czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

D 6.74. Wykaż dwoma sposobami, że jeśli $A(-4, -2)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 5)$, $D(-6, 3)$, to czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

6.75. Dane są punkty $A(1, -4)$, $B(11, 1)$, $C(2, 4)$, $D(-2, 2)$.

D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym.

b) Oblicz obwód i pole tego trapezu.

6.76. Dane są punkty: $A(-1, 0)$, $B(5, 2)$, $C(2, 6)$, $D(-3, 6)$.

D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest deltoidem.

b) Oblicz obwód i pole tego deltoidu.

6.77. Dane są punkty: $A(-4, -1)$, $B(2, -3)$, $C(5, 6)$.

D a) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

b) Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

6.78. Dane są punkty: $C(0, 5)$ oraz $D(3, -4)$. Wiedząc, że odcinek CD jest wysokością trójkąta równobocznego ABC, wyznacz:

a) równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC,

b) równanie okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

6.79. Okrąg o jest styczny do osi OX w punkcie $A(4, 0)$ i jednocześnie jest styczny do ujemnej półosi OY.

a) Napisz równanie okręgu o.

b) Wyznacz na okręgu punkty B i C tak, aby trójkąt ABC był równoboczny.

6.80. Dane są wierzchołki $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ rombu $ABCD$. Wiedząc, że kąt BAD rombu jest równy 30°, oblicz współrzędne wierzchołków C i D.

6.81. Dane są wierzchołki $A(-1, -4)$, $B(7, 2)$ równoległoboku $ABCD$. Wiedząc, że pole równoległoboku jest równe 50, wyznacz równanie ogólne prostej, zawierającej bok CD.

6.82. Dane są punkty $A(-6, -3)$, $B(3, 0)$. Wyznacz punkt C, leżący na prostej $k: y = 4$ tak, aby pole trójkąta ABC było równe 30.

6.83. Dane są wierzchołki $A(0, 1)$ i $C(6, 5)$ kwadratu $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D.

6.84. Punkty $A(-5, -4)$, $B(3, -2)$ są wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D.

6.85. Punkty przecięcia paraboli $y = x^2 - 2x - 8$ z prostą $k: 2x + y - 1 = 0$ są końcami przekątnej rombu, którego pole jest równe 60. Oblicz współrzędne wierzchołków tego rombu.

6.86. Dana jest prosta $k: y = 2x + 7$ oraz punkt $C(-5, 2)$.

a) Wyznacz na prostej k punkty A i B leżące w odległości 5 od punktu C.

b) Oblicz pole trójkąta ABC.

c) Oblicz cosinus kąta ACB.

6.87. Dane są punkty $A(-2, 5)$, $B(4, 3)$. Wyznacz na prostej $k: x + 2y - 4 = 0$ punkt C tak, aby kąt BCA był równy 90°.

6.88. Punkt W jest wierzchołkiem paraboli opisanej równaniem: $y = \frac{1}{3}(x-4)^2$. Na ramionach paraboli wyznacz punkty A i B tak, aby kąt AWB był prosty, a trójkąt AWB był trójkątem równoramiennym.

Wybrane przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych

Przesunięcie równoległe

6.89. Obrazem odcinka AB w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-3, 0]$ jest odcinek A_1B_1. Wiedząc, że $A(-1, 5)$, $B(2,1)$ oblicz:

a) współrzędne punktów A_1, B_1,

b) odległość między odcinkami AB i A_1B_1.

6.90. Obrazem trójkąta ABC w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [5, -6]$ jest trójkąt $A_1B_1C_1$. Wiedząc, że $A_1(-3, -2)$, $B_1(4, -7)$, $C_1(2, 0)$, oblicz współrzędne punktów A, B, C.

6.91. Okrąg $o: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 2$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{u}$ i otrzymano okrąg o_1. Podaj równanie okręgu o_1, jeśli:

a) $\vec{u} = [7, 0]$ b) $\vec{u} = [0, -6]$ c) $\vec{u} = [-2, 3]$

6.92. Wyznacz równanie okręgu o_1, będącego obrazem okręgu o:

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-1, 2]$.

6.93. Dany jest wektor $\vec{u}$. Wyznacz równanie ogólne prostej l, będącej obrazem prostej $k: 2x + y - 1 = 0$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$. Następnie oblicz odległość między prostymi k i l.

a) $\vec{u} = [0, 4]$ b) $\vec{u} = [-5, 0]$ c) $\vec{u} = [-5, 4]$

6.94. Wyznacz równanie paraboli, będącej obrazem paraboli $p: y = x^2 - 2x - 7$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-2, 8]$. Podaj współrzędne punktu wspólnego obu parabol.

Symetria środkowa

6.95. Okrąg o_1 jest obrazem okręgu $o: x^2 + (y + 1)^2 = 4$ w symetrii środkowej względem punktu $P(3, 2)$. Wyznacz środek i promień okręgu o_1.

6.96. Dane są punkty $A(-1, -4)$, $B(3, -2)$. Obrazem odcinka AB w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$ jest odcinek A_1B_1.

a) Wyznacz współrzędne punktów A_1 i B_1.

b) Jakim czworokątem jest wielokąt wypukły o wierzchołkach A, B, B_1, A_1?

6.97. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$. Wiedząc, że $A_1(-2, 0)$, $B_1(3, -2)$, $C_1(5, 4)$

a) oblicz współrzędne punktów A, B, C,

b) naszkicuj te trójkąty we wspólnym układzie współrzędnych.

6.98. Obrazem prostej k w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$ jest prosta l. Podaj równanie ogólne prostej l oraz oblicz odległość między prostymi k i l, jeśli:

a) $k: x - 4 = 0$ b) $k: x + y = 0$ c) $k: y - 3 = 0$

d) $k: 3x - 4y + 5 = 0$ e) $k: x - y - 2 = 0$ f) $k: 5x + 12y - 26 = 0$

6.99. Wyznacz równanie paraboli, będącej obrazem paraboli $p: y = x^2 + 2x - 4$ w symetrii środkowej względem punktu $O(0, 0)$.

a) Oblicz współrzędne punktów przecięcia obu parabol.

b) Naszkicuj te parabole w jednym układzie współrzędnych.

6.100. Wyznacz równanie okręgu, będącego obrazem okręgu $o: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$ w symetrii środkowej względem punktu S, jeśli:

a) $S(0, 0)$ b) $S(0, 4)$ c) $S(3, 0)$ d) $S(5, -7)$

6.101. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, w którym $A(-2, 4)$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 90°$. Punkt $O(0, 0)$ jest środkiem ciężkości tego trójkąta. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest obrazem trójkąta ABC w symetrii środkowej względem punktu O. Oblicz współrzędne punktów A_1, B_1, C_1.

Symetria osiowa

6.102. Punkt B jest obrazem punktu $A(-8, 6)$ w symetrii osiowej względem osi OX, punkt C jest obrazem punktu B w symetrii względem osi OY, punkt D jest obrazem punktu C w symetrii względem osi OX.

a) Wyznacz współrzędne punktów B, C, D.

b) Oblicz długości przekątnych czworokąta $ABCD$.

6.103. Punkt A_1 jest obrazem punktu $A(a, 3)$ w symetrii osiowej względem osi OY i należy do prostej $k: 2x - y + 7 = 0$. Oblicz a.

6.104. Wyznacz równanie okręgu, będącego obrazem okręgu o w symetrii względem osi OX, jeśli:

a) $o: (x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 1$ b) $o: x^2 - 4x + y^2 + 10y - 7 = 0$

6.105. Wyznacz równanie prostej l, będącej obrazem prostej k w symetrii osiowej względem osi OX, jeśli:

a) $k: 2x + 3y = 0$ b) $k: x - y + 8 = 0$ c) $k: 5x + 4y - 1 = 0$

6.106. Wyznacz równanie prostej l, będącej obrazem prostej k z poprzedniego zadania w symetrii osiowej względem osi OY.

6.107. Obraz punktu P w symetrii osiowej względem osi OX należy do prostej k, zaś obraz punktu P w symetrii osiowej względem osi OY należy do prostej l. Wyznacz współrzędne punktu P, jeśli:

a) $k: x + y - 3 = 0$, $l: y + 4x = 0$ b) $k: x + 3y + 5 = 0$, $l: x - 5y + 3 = 0$.

6.108. Punkt B jest obrazem punktu A w symetrii osiowej względem prostej k. Wyznacz równanie ogólne prostej k, jeśli:

a) $A(-7, -4)$, $B(1, -4)$ b) $A(-1, 3)$, $B(4, -2)$ c) $A(2, 7)$, $B(-8, 1)$

6.109. Dany jest punkt C oraz prosta k. Wyznacz współrzędne punktu D wiedząc, że jest on obrazem punktu C w symetrii osiowej względem prostej k.

a) $C(3, -2)$, $k: x + 4 = 0$ b) $C(4, 2)$, $k: x + y = 0$

c) $C(1, -5)$, $k: 2x + 4y - 6 = 0$ d) $C(-3, -7)$, $k: 3x - y + 2 = 0$

Przekształcenia zdefiniowane za pomocą wzoru

6.110. Przekształcenie P punktów płaszczyzny jest zdefiniowane dla dowolnego punktu płaszczyzny o współrzędnych (x, y) w następujący sposób: $P((x, y)) = (-y, x + 3)$.

a) Wyznacz współrzędne punktu A_1 będącego obrazem punktu $A(-1, 9)$ w przekształceniu P.

D b) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.

6.111. Przekształcenie P punktów płaszczyzny jest zdefiniowane dla dowolnego punktu płaszczyzny o współrzędnych (x, y) w następujący sposób: $P((x, y)) = (x - 5, 3y)$.

a) Wyznacz współrzędne punktu A_1 będącego obrazem punktu $A(4, -2)$ w przekształceniu P.

D b) Wykaż, że przekształcenie P nie jest izometrią.

6.112. Dane jest przekształcenie P płaszczyzny określone wzorem: $P((x, y)) = (-x, y + 1)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$.

D a) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.

b) Wyznacz równanie obrazu okręgu $o: x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ w tym przekształceniu.

6.113. Przekształcenie P określone jest wzorem $P((x, y)) = (y + 2, -x + 1)$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$.

D a) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.

b) Wyznacz równanie obrazu okręgu $o: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ w przekształceniu P.

6.114. Przekształcenie P punktów płaszczyzny (x, y) jest określone wzorem $P((x,y)) = (-2y, x+2)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

D a) Wykaż, że przekształcenie P nie jest izometrią.

b) Wyznacz równanie prostej l, będącej obrazem prostej k: $y = -x + 3$ w tym przekształceniu.

Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Wektory $\vec{u} = [a, a+3]$ oraz $\vec{v} = [2, 5]$ są równoległe tylko wtedy, gdy:

A. $a = -1$ B. $a = 0$ C. $a = 1$ D. $a = 2$

2. Symetralna odcinka PQ, gdzie $P(4, 7)$, $Q(-2, 10)$, jest nachylona do osi OX pod kątem α. Wówczas:

A. $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$ B. $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}5$ C. $\operatorname{tg}\alpha = 2$ D. $\operatorname{tg}\alpha = -2$

3. Odległość punktu $P(-3, 2)$ od prostej k: $y = \frac{4}{3}x - 10\frac{2}{3}$ jest:

A. liczbą niewymierną B. kwadratem liczby naturalnej
C. liczbą naturalną podzielną przez 3 D. iloczynem dwóch liczb pierwszych

4. Środek ciężkości trójkąta ABC, gdzie $A(-2, 7)$, $B(3, -4)$, $C(5, 9)$ ma współrzędne:

A. $(2, 4)$ B. $(3, 6)$ C. $(4, 2)$ D. $(6, 3)$

5. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Jeśli $A(-5, 0)$, $B(3, -4)$, $C(6, 2)$, to:

A. $D(13, -2)$ B. $D(-2, 6)$ C. $D(-7, -6)$ D. $D(0, 1)$

6. Prostą prostopadłą do prostej k: $3x - 2y + 1 = 0$ i przechodzącą przez punkt $P(0, 0)$ opisuje równanie:

A. $3x + 2y = 0$ B. $2x + 3y = 0$ C. $2x - 3y = 0$ D. $-x - 2y = 0$

7. Dane są punkty $A(4, -1)$, $B(11, 1)$, $C(4, 7)$. Pole trójkąta ABC jest równe:

A. 14 B. 21 C. 28 D. 56

8. Dana jest prosta k: $2x - y - 5 = 0$ oraz okrąg o: $x^2 + y^2 = 5$. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Prosta k przechodzi przez środek okręgu o.
B. Prosta k przecina okrąg o w punktach $(-2, -1)$ oraz $(-1, -2)$.
C. Prosta k jest styczna do okręgu o.
D. Prosta k jest rozłączna z okręgiem o.

9. Odcinek AC jest przekątną kwadratu $ABCD$. Jeśli $A(1, 5)$, $C(5, -3)$, to pole tego kwadratu jest równe:

A. 40 B. $40\sqrt{2}$ C. $40\sqrt{5}$ D. 80

10. Odległość między prostymi równoległymi k: $3x - 4y + 7 = 0$ oraz l: $3x - 4y - 5 = 0$ jest równa:

A. 12 B. 6 C. 3 D. 2,4

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

11. Wyznacz na prostej k: $x - 2y + 7 = 0$ punkt P, który jest równoodległy od punktów A i B, gdzie $A(3, -2)$, $B(7, 2)$.

12. Dane są wierzchołki $A(-3, -5)$ i $B(9, 1)$ trójkąta ABC. Wiedząc, że punkt $S(1, 1)$ jest punktem przecięcia się środkowych trójkąta ABC, oblicz:

a) współrzędne punktu C b) pole trójkąta ABC.

13. Dane są punkty $A(-5, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, 6)$. Oblicz współrzędne punktu będącego ortocentrum tego trójkąta.

14. Dwie wysokości trójkąta ABC zawierają się w prostych k: $2x - y + 6 = 0$ oraz l: $x + y = 0$. Wiedząc, że $A(-5, 1)$, wyznacz równanie ogólne prostej zawierającej trzecią wysokość tego trójkąta.

15. Dane są punkty $A(-6, -5)$, $B(6, 3)$, $C(-6, 9)$. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

16. Dane są punkty $A(-3, 2)$, $B(5, 3)$, $C(6, 8)$, $D(1, 9)$.

D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest deltoidem.

b) Oblicz pole tego czworokąta.

17. Dane są trzy wierzchołki czworokąta $ABCD$: $A(-7, 0)$, $B(-3, -2)$, $C(-1, 2)$. Wiadomo, że czworokąt $ABCD$ ma środek symetrii.

a) Oblicz współrzędne wierzchołka D.

D b) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

c) Wyznacz współrzędne wierzchołków kwadratu $A_1B_1C_1D_1$, będącego obrazem kwadratu $ABCD$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [2, 0]$.

18. Prosta $k\colon x + 2 = 0$ jest osią symetrii trójkąta równobocznego ABC. Wiedząc, że $A(-5, -1)$, wyznacz współrzędne wierzchołków B i C.

19. Dana jest prosta $k\colon y = 3x + 1$ oraz punkt $A(-3, 5)$. Wyznacz obraz punktu A w symetrii osiowej względem prostej k.

20. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(3, 1)$ wiedząc, że punkty wspólne tego okręgu i prostej $k\colon x - 7y + 29 = 0$ są końcami cięciwy mającej długość $5\sqrt{2}$.

21. Dany jest okrąg $o\colon x^2 + y^2 + 6x - 4y - 27 = 0$. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o i są wierzchołkami czworokąta wypukłego $ABCD$. Wiadomo, że bok AB zawiera się w prostej $k\colon y = -2x - 14$, a bok DC zawiera się w prostej $y = -x + 3$.

a) Wyznacz współrzędne wierzchołków czworokąta $ABCD$.

D b) Wykaż, że jedna z przekątnych tego czworokąta jest średnicą okręgu o.

c) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

22. Dany jest okrąg $o\colon (x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 169$ oraz punkt $A(1, 5)$.

a) Sprawdź, że punkt A należy do okręgu o.

b) Wyznacz równanie ogólne stycznej do okręgu o w punkcie A.

23. Wyznacz równania kierunkowe stycznych do okręgu $o\colon x^2 + y^2 + 8x - 29 = 0$, które są prostopadłe do prostej $k\colon 2x - y - 8 = 0$.

24. Dane są punkty $A(-5, 2)$, $B(1, 4)$ oraz prosta $k\colon x - y + 9 = 0$. Wyznacz na prostej k punkt C tak, aby kąt ACB był prosty.

25. Dane są punkty $A(-3, -1)$, $C(3, 5)$. Odcinek AC jest przekątną rombu $ABCD$, którego pole jest równe 24. Oblicz współrzędne punktów B i D.

Odpowiedzi do zadań

1. Ułamki algebraiczne. Równania wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzenie ułamków algebraicznych

1.1. a), b), e)

1.2. a) $R - \{2\}$ b) $R - \{-1, 5\}$ c) R d) $R - \{-3, 3\}$ e) $R - \{-1\}$ f) $R - \{-2\}$

1.3. a) $R - \{2, 3\}$ b) $R - \{0, 4\}$ c) $R - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ d) $R - \{9\}$ e) $R - \{-2, 2\}$
f) $R - \{1\}$ g) $R - \{-1\}$ h) $R - \{-1, 1, 3\}$ i) $R - \{0, 1\}$

1.5. a) $\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\frac{9}{7}$ d) 1

1.6. a) $1 + \frac{1}{3}\sqrt{2}$ b) $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ c) $1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$ d) $42 + 28\sqrt{2}$

1.7. a) $\frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}{8}$ b) $\frac{2\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)}{3}$ c) $\frac{5\left(\sqrt[3]{5} - 1\right)}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{3} + 1}{4}$

1.10. a) $m \in (1, +\infty)$ b) $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$ c) $m \in \left(0, \frac{4}{9}\right)$

1.11. a) $\frac{1}{2}x^4$, $x \in R - \{0\}$ b) $-5x$, $x \in R - \{0\}$ c) $-7x^3 + 5x^2$, $x \in R - \{0\}$
d) $\frac{-2}{x}$, $x \in R - \{0\}$ e) $\frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$ f) x, $x \in R - \{0\}$

1.12. a) $\frac{x-2}{3}$, $x \in R - \{-2\}$ b) $\frac{1}{5-x}$, $x \in R - \{-5, 5\}$ c) -1, $x \in R - \left\{-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$
d) $9x - 2$, $x \in R - \left\{-\frac{2}{9}\right\}$ e) $\frac{x-1}{5}$, $x \in R - \{1\}$ f) $\frac{3x+1}{3x-1}$, $x \in R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

1.13. a) $\frac{x-3}{x-2}$, $x \in R - \{-2, 2\}$ b) $\frac{x-3}{x+5}$, $x \in R - \{-5, 3\}$ c) $\frac{-2x+2}{3x-9}$, $x \in R - \{-8, 3\}$
d) $\frac{2x+3}{4x+1}$, $x \in R - \left\{-\frac{1}{4}, 3\right\}$ e) $\frac{2x-8}{3}$, $x \in R - \{-4, 0\}$
f) $\frac{4x^2 + 40x}{x-3}$, $x \in R - \{0, 3, 10\}$

1.14. a) $\frac{-3x^2+12x}{x+3}$, $x \in R - \{3\}$ b) $\frac{2x^2-4}{3}$, $x \in R - \{0\}$ c) $\frac{3x+2}{2x^2+2}$, $x \in R - \{-1, 1\}$

d) $2x^2 - x$, $x \in R$ e) $\frac{3}{5x+2}$, $x \in R - \left\{-\frac{2}{5}\right\}$ f) $\frac{x^2-4}{x^2+5}$, $x \in R$

1.15. a) $x - 2$, $x \in R - \{-2, 1\}$ b) $\frac{x^2+1}{2x^2}$, $x \in R - \{-2, 0, 2\}$ c) $\frac{x-1}{2}$, $x \in R$

d) $\frac{2x+1}{x}$, $x \in R - \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$ e) $\frac{2x-2}{(x-3)^2}$, $x \in R - \{-3, 3\}$

f) $\frac{x^2+1}{x^2-4}$, $x \in R - \{-3, -2, 2, 3\}$

1.16. a) $\frac{x-2}{3x^2-4}$, $x \in R - \left\{-\frac{2\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{2}\right\}$ b) $\frac{x^3+x}{9x^2+3x+1}$, $x \in R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ c) $5x + 1$,

$x \in R - \left\{-2, \frac{1}{5}\right\}$ d) $\frac{2x^2+2x+4}{x^2+3}$, $x \in R - \{1\}$ e) $\frac{18x^2-6x+2}{x-2}$, $x \in R - \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$

f) $\frac{x^2-3x+3}{x^2}$, $x \in R - \{0, 3\}$

1.17. a) $\frac{12x^2}{16x}$, $x \in R - \{0\}$ b) $\frac{-4x^5}{18x^3}$, $x \in R - \{0\}$ c) $\frac{-3}{2-x}$, $x \in R - \{2\}$

d) $\frac{5x-20}{2x-8}$, $x \in R - \{4\}$ e) $\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$, $x \in R - \{0, 2\}$

f) $\frac{2x^2-6x}{x^2-9}$, $x \in R - \{-3, 3\}$

1.18. a) $\frac{3x-18}{x^2-6x}$, $x \in R - \{0, 6\}$ b) $\frac{-3x^3+3x^2}{6x^2-3x^3}$, $x \in R - \{0, 2\}$

c) $\frac{3x+3}{x^2-x-2}$, $x \in R - \{-1, 2\}$ d) $\frac{2x^2+2x}{2x^2+4x+2}$, $x \in R - \{-1\}$

e) $\frac{5x^2+10x+20}{x^3-8}$, $x \in R - \{2\}$ f) $\frac{x^2+3x+2}{x^3+1}$, $x \in R - \{-1\}$

1.19. a) $\frac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2-4x-12}$, $x \in R - \{-3, -2, 2\}$ b) $\frac{x^3-4x}{x^4-3x^2-4}$, $x \in R - \{-2, 2\}$

c) $\frac{2x^2-4x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$, $x \in R - \{1\}$ d) $\frac{3x^2+15x+15}{x^3+4x^2-5}$, $x \in R - \{1\}$

1.20. a) $\frac{3x^2}{5x^3}$, $x \in R - \{0\}$ b) $\frac{x^2+x}{x^2-2x}$, $x \in R - \{0, 2\}$ c) $\frac{81-x^2}{27+3x}$, $x \in R - \{-9\}$

d) $\frac{6-2x}{-x^2+6x-9}$, $x \in R - \{3\}$ e) $\frac{3x^3-x^2}{x^4+5x^2}$, $x \in R - \{0\}$ f) $\frac{x^4-9}{x^3+3x}$, $x \in R - \{0\}$

1.21. a) $\frac{x^3-9x}{x^2+4x+3}$, $x \in R - \{-3, -1\}$ b) $\frac{4x^2+12x+9}{2x^2-7x-15}$, $x \in R - \left\{-1\frac{1}{2}, 5\right\}$

c) $\frac{x^4+2x^2-3}{x^3+3x}$, $x \in R - \{0\}$ d) $\frac{3x^3-3x^2+x-1}{3x^3+x}$, $x \in R - \{0\}$

e) $\frac{8x^3-27}{12x^3+18x^2+27x}$, $x \in R - \{0\}$ f) $\frac{10x^3+5x^2+8x+4}{5x^3+5x^2+4x+4}$, $x \in R - \{-1\}$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych

1.22. a) $\frac{-3x+6}{8}$ b) $\frac{10x^2+5x-5}{6}$ c) $\frac{-x^2+x}{5}$ d) $\frac{-x^2-12x+13}{3}$

e) $\frac{3x^2-11x-22}{10}$ f) $\frac{-3x^2-8x+25}{16}$

1.23. a) $\frac{7-x}{x+2}$, $x \in R - \{-2\}$ b) $\frac{5-x}{x-3}$, $x \in R - \{3\}$ c) $\frac{8x+2}{x+1}$, $x \in R - \{-1\}$

d) $\frac{x+1}{x+5}$, $x \in R - \{-5\}$ e) $\frac{x+11}{x-5}$, $x \in R - \{5\}$ f) $\frac{x-7}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$

1.24. a) -1, $x \in R - \{-1, 1\}$ b) $\frac{-2}{x^2}$, $x \in R - \{0, 8\}$ c) $\frac{1}{x+4}$, $x \in R - \{-4, 0\}$

d) $\frac{-1}{x-3}$, $x \in R - \{-3, 3\}$ e) $\frac{x+2}{x}$, $x \in R - \{0, 2\}$ f) $\frac{3}{x-3}$, $x \in R - \{3\}$

1.25. a) $\frac{-2}{x-4}$, $x \in R - \{4\}$ b) $\frac{10x-3}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ c) $\frac{-4x+7}{4x-6}$, $x \in R - \left\{1\frac{1}{2}\right\}$

d) $\frac{13x}{4x-1}$, $x \in R - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ e) $\frac{x^2+11}{4(1-x^2)}$, $x \in R - \{-1, 1\}$

f) $\frac{3x^2+6x-4}{2x^2-8}$, $x \in R - \{-2, 2\}$

1.26. a) $\frac{2x-1}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$ b) $\frac{x^2+5x}{2(x+3)}$, $x \in R - \{-3\}$ c) $\frac{-3x-2}{5x(x-1)}$, $x \in R - \{0, 1\}$

d) $\frac{-x^2+5x-2}{4(x+2)}$, $x \in R - \{-2\}$ e) $\frac{x^2+4x-12}{x(x-3)}$, $x \in R - \{0, 3\}$

f) $\frac{-7x-2}{3x(x+2)}$, $x \in R - \{-2, 0\}$

1.27. a) $\frac{2x}{(x-2)(x+2)}$, $x \in R - \{-2, 2\}$ b) $\frac{5x-9}{(x-3)(x+3)}$, $x \in R - \{-3, 3\}$

c) $\frac{7x^2+3x}{(2x+1)^2}$, $x \in R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ d) $\frac{x^2-4x-7}{(2x+3)^2}$, $x \in R - \left\{-1\frac{1}{2}\right\}$

e) $\frac{-15}{(x-1)(x-4)}$, $x \in R - \{1, 4\}$ f) $\frac{2x^2+20}{(x-5)(2+x)}$, $x \in R - \{-2, 5\}$

1.28. a) $\frac{-3x^2+2x+1}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$ b) $\frac{x^2+3x+3}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$

c) $\frac{x^2+9x}{x^2-1}$, $x \in R - \{-1, 1\}$ d) $\frac{-6x^2+3x+1}{(x+1)^2}$, $x \in R - \{-1\}$

e) $\frac{-3x^2+5x-6}{x^2(x-2)}$, $x \in R - \{0, 2\}$ f) $\frac{x^2+3x-4}{2(x+3)(x+2)}$, $x \in R - \{-3, -2\}$

1.29. a) $\frac{2x^2+15x+26}{(2x-5)(2x+5)}$, $x \in R - \left\{-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right\}$ b) $\frac{5x^2-10}{(x+2)(x-3)}$, $x \in R - \{-2, 3\}$

c) $\frac{2x^2+12x-82}{(x+3)(x-7)}$, $x \in R - \{-3, 7\}$ d) $\frac{-x^2-9x-11}{(x+1)(x+2)}$, $x \in R - \{-2, -1\}$

1.30. a) $\frac{5-x}{x(x-3)}$, $x \in R - \{0, 3\}$ b) $\frac{4x^2-2x+1}{x(2x-5)}$, $x \in R - \left\{0, 2\frac{1}{2}\right\}$

c) $\frac{x^2-3x+3}{x^3-1}$, $x \in R - \{1\}$ d) $\frac{1}{2(x^2+4)}$, $x \in R - \{0\}$

e) $\frac{-5}{x(x-5)}$, $x \in R - \{0, 5\}$ f) $\frac{-2x^2-6}{x^2(3x^2+1)}$, $x \in R - \{0\}$

1.31. a) $\frac{x^3+x^2-4x-3}{x^2(x-1)}$, $x \in R - \{-1, 0\}$ b) $\frac{1}{x(x-2)}$, $x \in R - \{0, 2\}$

c) $\frac{5x^2+2}{4x^2-9}$, $x \in R - \left\{-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$ d) $\frac{2x^2-5x-7}{4-x^2}$, $x \in R - \{-2, 2\}$

e) $\frac{2x^2-8x+15}{(x-3)^2}$, $x \in R - \{3\}$ f) $\frac{2x^2-5x-1}{x(x-1)^2}$, $x \in R - \{0, 1\}$

1.32. a) $\frac{2x^2+x-6}{2(x-4)^2}$, $x \in R - \{0, 4\}$ b) $\frac{-4x^2-3x+5}{x(x-5)^2}$, $x \in R - \{0, 5\}$

c) $\frac{7x-2}{(x+1)(x-2)^2}$, $x \in R - \{-1, 0, 2\}$ d) $\frac{x^3+16x^2+30x+9}{(x-3)^2x(x+3)}$, $x \in R - \{-3, 0, 3\}$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

1.33. a) $\frac{x}{2}$, $x \in R - \{0\}$ b) $\frac{x-1}{2x}$, $x \in R - \{0\}$ c) $\frac{1}{x^2}$, $x \in R - \{-1, 0\}$ d) $\frac{8}{x-3}$, $x \in R - \{-3, 3\}$ e) $\frac{4}{3}$, $x \in R - \{0, 1\}$ f) $\frac{15}{7x(x+2)}$, $x \in R - \{-2, 0, 2\}$

1.34. a) $\frac{4x}{x-2}$, $x \in R - \{2\}$ b) $\frac{2}{2x-3}$, $x \in R - \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

c) $\frac{x-1}{x+9}$, $x \in R - \{-9, -1, 9\}$ d) $\frac{2x^2}{x-2}$, $x \in R - \{-2, 2, 4\}$

e) $\frac{2x+4}{x-1}$, $x \in R - \{-1, 1\}$ f) $\frac{-2x}{(x-6)(x-4)}$, $x \in R - \{-4, 4, 6\}$

1.35. a) $\frac{1}{2}$, $x \in R - \{-1, 0, 1\}$ b) 1, $x \in R - \{-2, 0, 2\}$ c) $-\frac{x}{4}$, $x \in R - \{-7, -1, 7\}$

d) $6x$, $x \in R - \{-1, 1\}$ e) -2, $x \in R - \{-3, -2, 2\}$ f) $-\frac{x}{2}$, $x \in R - \{-1, 1, 5\}$

1.36. a) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-4}$, $x \in R - \{-3, -2, 1, 2\}$ b) $\frac{x^2+x-2}{x^2+x-6}$, $x \in R - \{-3, -2, 2\}$

c) $\frac{3x^2+13x+12}{2x^2+3x+1}$, $x \in R - \left\{-1\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ d) $\frac{3x-1}{5x-2}$, $x \in R - \left\{-1, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}$

e) $\frac{8x+8}{4x+1}$, $x \in R - \left\{-2, -\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\right\}$ f) $\frac{x+5}{5x-2}$, $x \in R - \left\{-3, -1, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right\}$

1.37. a) $\frac{1}{x+5}$, $x \in R - \{-5, -3, -1, 1\}$ b) $\frac{2}{x+5}$, $x \in R - \{-5, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

c) $\frac{3x^2+4x-4}{x-3}$, $x \in R - \{-3, 2, 3, 7\}$ d) $\frac{3x-1}{4x-1}$, $x \in R - \left\{-3, -1, \frac{1}{4}\right\}$

e) $\frac{x^2-5x-5}{4x-12}$, $x \in R - \{1, 3\}$ f) $\frac{8x+1}{3x}$, $x \in R - \{0, 2\}$

1.38. a) $\frac{4}{x^3}$, $x \in R - \{0\}$ b) $\frac{1}{10}$, $x \in R - \{0\}$ c) $\frac{3x^2-5x-1}{2x-2}$, $x \in R - \{0, 1\}$

d) $\frac{6x}{x-1}$, $x \in R - \{0, 1\}$ e) $\frac{12}{x}$, $x \in R - \{-1, 0\}$ f) $x - 5$, $x \in R - \{-6, 6\}$

1.39. a) $\frac{5}{x}$, $x \in R - \{0, 3\}$ b) $7x - 8$, $x \in R - \{-2, 2\}$ c) $\frac{x^2-5x}{2x+10}$, $x \in R - \{-5, 5\}$

d) $\frac{-5x}{x+3}$, $x \in R - \{-3, 3\}$ e) $\frac{2x^2-3x+1}{3x+3}$, $x \in R - \left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$

f) $\frac{5x+1}{x}$, $x \in R - \{0, 4\}$

1.40. a) $\frac{2x-4}{x+1}$, $x \in R - \{-2, -1, 1, 2\}$ b) $\frac{2x^2-4x}{x^2+5x+6}$, $x \in R - \{-3, -2, 2\}$

c) $\frac{25x-5}{2x-6}$, $x \in R - \left\{-3, \frac{1}{5}, 3\right\}$ d) $\frac{3x+9}{20x+10}$, $x \in R - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$

e) $\frac{2x+5}{x+2}$, $x \in R - \left\{-7, -2, \frac{1}{3}, 2\right\}$ f) $\frac{2x^2+7x+6}{3x^2-x-4}$, $x \in R - \left\{-1\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{7}, 1\frac{1}{3}, 5\right\}$

1.41. a) $\frac{x+3}{2x+2}$, $x \in R - \{-8, -3, -1, 1\}$ b) $\frac{1}{x}$, $x \in R - \{-6, 0, 5\}$
c) $\frac{3}{2}$, $x \in R - \{-1, 5\}$ d) $\frac{7x-14}{2}$, $x \in R - \{-5, -2\}$
e) $2x - 3$, $x \in R - \left\{-1\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}\right\}$ f) $\frac{x^2+x+2}{x+2}$, $x \in R - \{-5, -2, 2\}$

Działania na ułamkach algebraicznych

1.42. a) $\frac{3x+3}{2x}$, $x \in R - \{-1, 0\}$ b) $\frac{4x+23}{12-3x}$, $x \in R - \{0, 4\}$
c) $\frac{25x^2-4}{x^2}$, $x \in R - \{0\}$ d) $\frac{x+2}{3x+1}$, $x \in R - \left\{-1, \frac{-1}{3}\right\}$
e) $\frac{2}{x+2}$, $x \in R - \{-3, -2\}$ f) $\frac{20-2x}{x}$, $x \in R - \{-5, -3, 0\}$

1.43. a) $\frac{1}{2x^2-x}$, $x \in R - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\frac{-x^2+3x+10}{3}$, $x \in R - \{2, 5\}$
c) $\frac{2}{5x-5}$, $x \in R - \left\{\frac{-2}{3}, 1\right\}$ d) $\frac{-1}{x^2-2x+1}$, $x \in R - \left\{1, 2\frac{1}{2}\right\}$
e) $\frac{-x-3}{2x}$, $x \in R - \{0, 2\}$ f) $\frac{-x^2-x}{x+2}$, $x \in R - \{-5, -2, -1, 1\}$

1.44. a) $\frac{1}{1-a^2}$, $a \in R - \{-1, 0, 1\}$ b) 1, $a \in R - \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ c) $\frac{2-a}{2}$, $a \in R - \{-2, 0\}$
d) $\frac{2a-6}{a+3}$, $a \in R - \{-3, 0, 3\}$ e) $\frac{3a-4}{a}$, $a \in R - \{0\}$ f) $\frac{a+1}{2a^2}$, $a \in R - \{0\}$

1.45. a) $\frac{1}{a+1}$, $a \in R - \{-1, 0, 1\}$ b) $\frac{2-a}{2}$, $a \in R - \{-1, 0, 2\}$
c) $\frac{-1}{2a}$, $a \in R - \{-2, 0, 1, 2\}$ d) $2a + 6$, $a \in R - \{-3, 0\}$
e) $\frac{a^2+a-6}{2a+2}$, $a \in R - \{-2, -1, 2\}$ f) $\frac{1}{3}$, $a \in R - \left\{-1, -\frac{5}{14}, 0\right\}$

1.46. a) $\frac{a}{2}$, $a \in R - \{-3, -2, -1\}$ b) $\frac{a+5}{4}$, $a \in R - \{-2, 5\}$
c) $\frac{4}{a-1}$, $a \in R - \{-1, 1, 3\}$ d) $\frac{1}{a^2}$, $a \in R - \{-1, 0, 1, 3\}$

Równania wymierne

1.57. a) $x = -2$ b) równanie sprzeczne c) $x \in \left\{2\frac{1}{2}, 3\right\}$ d) $x \in \{0, 2\}$ e) $x = \frac{1}{3}$
f) $x = -2$

1.58. a) $x \in \{-4, 4\}$ b) $x \in \{-2, -1\}$ c) $x = 1$ d) $x \in \{-3, -1\}$ e) $x \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$
f) $x \in \{-2, 3\}$

1.59. a) $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right\}$ b) $x \in \left\{-1, \frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right\}$ c) $x = \frac{1}{3}$
d) $x \in \{-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ e) równanie sprzeczne f) $x = \sqrt[3]{2}$

1.60. a) $x \in \{-4, 4\}$ b) $x = 3$ c) równanie sprzeczne d) $x \in R - \{2\}$
e) $x \in \{-2, 3\}$ f) $x = -1\frac{1}{6}$

1.61. a) $x = -2\frac{1}{2}$ b) $x = 2$ c) równanie sprzeczne d) $x \in \{0, 1\}$ e) $x \in \left\{1, 1\frac{3}{4}\right\}$
f) $x \in \{0, 5\}$

1.62. a) $x = -1\frac{7}{11}$ b) $x = 2$ c) równanie sprzeczne d) $x \in \left\{1, 1\frac{7}{11}\right\}$
e) $x \in \{-2, 0\}$ f) $x \in \left\{\frac{-3}{4}, 1\right\}$

1.63. a) $x \in \left\{-1\frac{3}{4}, 3\right\}$ b) $x = -1$ c) $x = 5$ d) równanie sprzeczne
e) $x = -2$ f) $x \in \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

1.64. a) $x \in \left\{\frac{-1}{3}, \frac{1}{12}\right\}$ b) $x \in \left\{\frac{-1}{2}, 3\right\}$ c) $x \in \{-3, -2\}$ d) $x \in \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$
e) $x \in \left\{1, 4\frac{2}{3}\right\}$ f) $x \in \{-1-\sqrt{3}, 0, -1+\sqrt{3}\}$

Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych

1.65. $\frac{3}{7}$

1.66. $\frac{5}{4}$

1.67. $V = 52$ km/h

1.68. 20 dni

1.69. w pierwszym 20 zasłon, w drugim 12 zasłon

1.70. 60 dni; *wskazówka:* Niech x, gdzie $x \in N_+$, oznacza liczbę dni potrzebnych na wykonanie zamówienia. Wówczas po uprawnieniu produkcji pozostało do zrobienia jeszcze 240 stołków, a planowany czas na ich wykonanie to $\frac{1}{3}x$ dni.

1.71. Praca miała być wykonana w ciągu 40 dni. Dziennie przekraczano plan o 25%.

1.72. pierwszy w 2 dni, drugi w 3 dni, trzeci w 6 dni

1.73. 20 godzin, 30 godzin

1.74. ojciec 15 dni, syn 60 dni

1.75. 480 kg

1.76. kran A – 6 minut, kran B – 12 minut

1.77. Drugi kran napełnia pusty zbiornik w ciągu 3 godzin, pierwszy kran opróżnia pełny zbiornik w czasie 4 godzin.

1.78. 50 godzin, 40 godzin

1.79. a) 45 km/h, 50 km/h b) 4 h

1.80. 12 km/h, 15 km/h

Funkcja homograficzna

1.81. I. a) $\vec{u}=[3,0]$ b) $f(x)=\frac{2}{x-3}$ c) $D=\mathbf{R}-\{3\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{0\}$ d) funkcja f nie ma miejsc zerowych e) $x\in(-\infty,3)$

II. a) $\vec{u}=[0,-1]$ b) $g(x)=\frac{2}{x}-1$ c) $D=\mathbf{R}-\{0\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{-1\}$ d) 2 e) $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

III. a) $\vec{u}=[-2,1]$ b) $h(x)=\frac{2}{x+2}+1$ c) $D=\mathbf{R}-\{-2\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{1\}$ d) -4 e) $x\in(-4,-2)$

IV. a) $\vec{u}=[2,3]$ b) $p(x)=\frac{2}{x-2}+3$ c) $D=\mathbf{R}-\{2\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{3\}$ d) $1\frac{1}{3}$ e) $x\in\left(1\frac{1}{3},2\right)$

1.82. a) $f(x)=\frac{-4}{x}+2$ b) $D=\mathbf{R}-\{0\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{2\}$ c) 1 d) $-2\sqrt{3}$

1.83. a) $g(x)=\frac{3}{x-2}-4$, $D=\mathbf{R}-\{2\}$ b) $(2,-4)$ c) $\left(2\frac{3}{4},0\right)$, $\left(0,-5\frac{1}{2}\right)$

1.84. a) $h(x)=\frac{1}{x+4}+3$ b) $D=\mathbf{R}-\{-4\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{3\}$ c) tak d) $(-3,4)$, $(-5,2)$

1.85. a) $g(x)=\frac{-x-1}{x-2}$, $x\in\mathbf{R}-\{2\}$ b) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

1.86. a) $a=-5$, $\vec{u}=[-1,1]$ b) $a=2$, $\vec{u}=[-2,3]$ c) $a=-3$, $\vec{u}=[1,-2]$ d) $a=16$, $\vec{u}=[-2,-5]$

1.87. I. $f(x)=\frac{4}{x-4}+1$, gdzie $x\in\mathbf{R}-\{4\}$; funkcja f jest funkcją homograficzną

II. $g(x)=2$, gdzie $x\in\mathbf{R}-\{-2\}$; funkcja g nie jest funkcją homograficzną

III. $h(x)=\frac{1}{x+2}+1$, gdzie $x\in\mathbf{R}-\{-2\}$; funkcja h jest funkcją homograficzną

1.88. a) $D=\mathbf{R}-\{-2\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{0\}$; funkcja jest malejąca w przedziałach: $(-\infty,-2)$, $(-2,+\infty)$ b) $D=\mathbf{R}-\{0\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{2\}$; funkcja jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ c) $D=\mathbf{R}-\{1\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{1\}$; funkcja jest malejąca w przedziałach: $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$ d) $D=\mathbf{R}-\{-4\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{1\}$; funkcja jest rosnąca w przedziałach: $(-\infty,-4)$, $(-4,+\infty)$.

1.89. a) $\frac{-130}{47}$ b) $\sqrt{3}$

1.90. $b=11$, $f(x)=\frac{3}{x+4}+2$

1.91. a) $b=1$, $c=3$ b) $x\in\{-4,-1\}$

1.92. a) $a=-4$, $b=3$ c) $(-\infty,-3)\cup\left(-2\frac{1}{2},+\infty\right)$

1.93. a) $a=3$, $b=8$ b) $x\in\{-7,3\}$

1.94. b) $(2,-2)$, $\left(-3,\frac{-1}{3}\right)$

1.95. a) $(-2,-4)$, $(0,0)$, $(1,-1)$ b) $(2,4)$, $(-3,-1)$

Test sprawdzający do rozdziału 1.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	A	B	B	C	C	D	A	B	B

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

11. a) $\frac{1}{3}$, $x\in\mathbf{R}-\{0,2\}$ b) $\frac{x^2-4}{2x^2}$, $x\in\mathbf{R}-\{0,1,4\}$

12. a) $x\in\left\{\frac{-1}{2},\frac{-1}{3}\right\}$ b) $x=0$ c) $x=2$ d) $x\in\left\{\frac{-4}{5},1\right\}$ e) równanie sprzeczne f) $x\in\{1,2,3\}$

13. a) $D=\mathbf{R}-\{-1\}$, $ZW=\mathbf{R}-\{2\}$ b) $a=-5$, $b=1$, $c=2$ c) $1\frac{1}{2}$ d) $(-\infty,-1)\cup\left(1\frac{1}{2},+\infty\right)$

14. $P=2$

15. a) $b=10$, $c=-3$ b) $|f(-\pi)|+f(\pi)<0$ c) tak

16. $(-5,-1),(-1,3),\left(0,2\frac{3}{4}\right)$
17. $-3,-5,-9$
19. 3
20. 1
22. w ciągu 8 dni
23. w ciągu 11 dni
24. 4 godziny
25. 63 km/h, 54 km/h

2. Ciągi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów

2.1. a) $a_1=-2, a_2=-1, a_3=4, a_4=13, a_5=26$

b) $a_1=-5, a_2=6, a_3=2\frac{1}{3}, a_4=1\frac{3}{5}, a_5=1\frac{2}{7}$

c) $a_1=-1, a_2=6, a_3=5, a_4=32, a_5=75$

2.3. a) a_2, a_3 b) a_7, c) a_4 d) a_2, a_8

2.4. a) a_4 b) b_6 c) c_1, c_2 d) d_1, d_5

2.5. a) a_1, a_2 b) a_3, a_4 c) wszystkie wyrazy ciągu o numerach większych od 5: $a_6, a_7, a_8, \ldots$

2.6. a) $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$ b) b_1, b_2, b_3, b_4, b_5

2.7. a) tak, $a_{12}=2$ b) dziewięć wyrazów

2.8. a) liczba 4 nie jest wyrazem ciągu (d_n)

2.9. wskazówka Rozłóż licznik ułamka $\frac{5n^2-43n+24}{5n-3}$ na czynniki i skróć ułamek.

2.10. a) $a_3=0, a_6=1$ b) $a_2=0, a_4=1, a_{10}=2$ c) $a_2=a_4=17, a_1=a_8=20$

2.11. wskazówka Najpierw wyznacz wszystkie wyrazy ciągu (b_n), które są liczbami naturalnymi.

2.13. a) $a_{n+1}=\frac{2n-3}{n+2}, a_{2k}=\frac{4k-5}{2k+1}, a_{3k-2}=\frac{6k-9}{3k-1}$ b) $a_{n+1}=n^3+3n^2+3n+1, a_{2k}=8k^3$, $a_{3k-2}=27k^3-54k^2+36k-8$ c) $a_{n+1}=1-n^2, a_{2k}=4k-4k^2, a_{3k-2}=-9k^2+18k-8$

2.14. a) $a_n=n+3$ b) $a_n=(n-1)^2$ c) $a_n=\frac{n-1}{2n-1}$

2.15. $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$

2.16. a) $a_n=3n-1$ b) $a_n=n^2+2n$

2.17. a) $b_5=33$ b) $b_5=4^{10}$ c) $b_5=1\frac{2}{7}$ d) $b_5=28$

2.18. a) $a_n=\frac{1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{(2n-1)^2}$ c) $a_n=n+\frac{n}{n+1}=\frac{n^2+2n}{n+1}$ d) $a_n=\frac{n}{n^2+1}$

2.19. a) $b_n=2n-1$; wzór rekurencyjny: $\begin{cases}b_1=1\\ b_{n+1}=b_n+2, \text{ jeśli } n\geqslant 1\end{cases}$

b) $b_n=3^{3-n}$; wzór rekurencyjny: $\begin{cases}b_1=9\\ b_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot b_n, \text{ jeśli } n\geqslant 1\end{cases}$

2.20. a) $\begin{cases}c_1=2\\ c_{n+1}=\frac{1}{c_n}, \text{ jeśli } n\geqslant 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}c_1=1\\ c_{n+1}=c_n+n, \text{ jeśli } n\geqslant 1\end{cases}$

2.21. $d_n=n^2$

Monotoniczność ciągów

2.24. a) rosnący b) malejący c) rosnący d) nie jest monotoniczny e) niemalejący f) nierosnący

2.25. a) malejący b) stały c) niemalejący d) rosnący

2.27. c) np. $a_n=|n-1{,}5|-0{,}5$, gdzie $n\in\mathbf{N}_+$, d) np. $a_n=5-\frac{1}{n}$, gdzie $n\in\mathbf{N}_+$

2.28. a) nie jest monotoniczny b) nie jest monotoniczny c) jest rosnący d) jest malejący

2.29. a) malejący b) rosnący c) malejący d) nie jest monotoniczny e) nie jest monotoniczny f) niemalejący

2.30. $a_n=-n$

2.31. np. $a_n=-\frac{1}{n}$

2.32. np. $a_n=(-1)^n$

Ciąg arytmetyczny

2.33. b) $a_1=2, r=5$ c) $a_n=\begin{cases}a_1=2\\ a_{n+1}=a_n+5, \ n\geqslant 1\end{cases}$

2.34. b) malejący c) -79

2.35. a) $a_6=4, a_{10}=14, a_{27}=56\frac{1}{2}$ b) $a_n=\frac{5}{2}n-11$ c) $\frac{5}{2}n-5$

2.36. b) $b_n=4n+2$, gdzie $n\in\mathbf{N}_+$

2.37. 7, 10, 13, 16, 19

2.38. szesnaście

2.39. czternaście

2.40. $r = 5$

2.41. a) $a_1 = 10,\ r = -\frac{1}{3}$ b) $a_1 = -3,\ r = 2$ c) $(a_1 = 3,\ r = 3)$ lub $(a_1 = 21,\ r = -3)$ d) $(a_1 = 2,\ r = 7)$ lub $(a_1 = -93,\ r = 7)$

2.42. a) 174 b) 257 c) 130

2.44. $k = -2$ lub $k = 3$; jeśli $k = -2$, to ciąg ma postać $(19, 7, -5)$; jeśli $k = 3$, to ciąg ma postać $(24, 7, -10)$

2.45. $x = 17,\ y = 22$

2.46. I. $x = 0;\ a_n = n - 1,\ n \in \boldsymbol{N}_+$. II. $x = 2;\ a_n = -n + 9,\ n \in \boldsymbol{N}_+$; wskazówka: Wykaż, że $a_5 + a_1 = 2a_3$.

2.47. 6, 8, 10

2.48. a) $a_1 = 12$ b) 15 wyrazów

2.49. $a_1 = -3$; ciąg ma 46 wyrazów

Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

2.50. a) 3 b) 28 c) 6 d) 46; $a_n = n + 1,\ n > 1$

2.52. a) wskazówka: Wykaż, że $a_n = 2n - 5,\ n \in \boldsymbol{N}_+$. b) $a_1 = -3,\ r = 2$

2.53. a) wskazówka: Wykaż, że $a_n = -2n + 6,\ n \in \boldsymbol{N}_+$. b) -114

2.54. a) 15 b) 3 c) 9

2.55. a) 2000 b) 1784 c) 1115

2.56. a) $S_n = 22n - 2n^2,\ n \in \boldsymbol{N}_+$ b) jedenaście początkowych wyrazów

2.57. $n = 10;\ S_{10} = 50$

2.58. a) 8690 b) −2 030 088; wskazówka: Pogrupuj składniki sumy po dwa i zastosuj do każdej grupy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

2.59. a) 15 750 b) 1188

2.60. a) 6700 b) 48 000

2.61. $a_1 = 28,\ r = 2\frac{1}{3}$

2.62. sześć

2.63. siedemnaście

2.64. a) 6 b) 700

2.65. 92,5 km

2.66. a) 1100 zł b) 21 m

2.67. 15 dni

2.68. a) 12 sekund b) 21 litrów

Ciąg geometryczny

2.69. $(a_n), (b_n)$

2.70. a) $a_n = 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ b) $b_n = 500 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^n$ c) $c_n = \frac{3}{4} \cdot (-1)^n$

2.71. a) $a_1 = -0{,}7$ b) $a_1 = 1 - \sqrt{3}$

2.72. 3^9

2.73. a) $q = 4$ b) $q = \frac{1}{3} \vee q = -\frac{1}{3}$ c) $q = 1{,}2 \vee q = -1{,}2$ d) $q = -\sqrt{7} \vee q = \sqrt{7}$

2.74. cztery

2.75. $6\frac{19}{32}$

2.76. 2

2.78. a) tak b) $a_1 = 1$

2.79. I. rata: 3000 zł, IV. rata: 3993 zł

2.80. $c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; ciąg (c_n) nie jest monotoniczny

2.81. $a_n = -\frac{81}{625} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1},\ n \in \boldsymbol{N}_+$

2.82. $(3, 6, 12, 24)$

2.83. $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ lub $\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$, lub $\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right)$, lub $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

2.84. a) $b_1 = 7,\ q = 4$ b) $(b_1 = 2,\ q = -2)$ lub $(b_1 = 2,\ q = 2)$

2.86. $x = -3\sqrt{2}$

2.87. Jeśli $x = -\frac{1}{3}$, to ciąg ma postać $\left(-1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3}\right)$. Jeśli $x = 5$, to otrzymujemy ciąg $(36, 12, 4)$.

2.88. $q = \frac{1}{4}$

2.90. b) 180 dm²

2.91. $c_1 = 1\frac{4}{9},\ q = \frac{1}{9}$

2.92. $b_1 = 2,\ q = \sqrt{2}$

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

2.93. a) 7 b) $56\left(1 + \sqrt{2}\right)$

2.94. a) $31 \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right)$ b) $\frac{2343}{3125}$

2.95. $\frac{1}{3}$

2.96. 64

2.97. cztery

2.98. siedem

2.99. a) $27\frac{17}{24}$, sześć wyrazów b) $159\frac{3}{8}$, osiem wyrazów

2.100. a) $q=\frac{2}{3}$ b) sześć

2.101. a) $q=\frac{3}{2}$ b) siedem

2.102. cztery nagrody; 4000 zł, 3200 zł

2.103. $79\frac{59}{64}$

2.104. a) $q=-3$ lub $q=2$

b) jeśli $q=-3$, to $a_n=\frac{1}{4}\cdot(-3)^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}_+$; jeśli $q=2$, to $a_n=2^{n-3}$, $n\in\mathbf{N}_+$

2.105. (54, 36, 24, 16) lub (16, 24, 36, 54)

2.106. 190,5 cm

2.107. $\frac{1365\sqrt{3}}{64}$ cm^2

2.108. a) $15\pi\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm b) $\frac{255\pi}{2}$ cm^2

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne

2.109. $(x=1\wedge y=1)$ lub $(x=-0{,}5\wedge y=0{,}25)$

2.110. I. $x=2$ i $y=6$; wówczas ciąg (1, 6, 11) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 5, a ciąg (2, 6, 18) – ciągiem geometrycznym o ilorazie 3

II. $x=50$ i $y=30$; wówczas ciąg (49, 30, 11) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy −19, a ciąg (50, 30, 18) – ciąg geometrycznym o ilorazie $\frac{3}{5}$

2.111. −2, 3, 8

2.112. $q=\frac{1}{3}$

2.113. 110

2.114. $3\frac{31}{32}$

2.115. a) $a_n=3n-11$, $n\in\mathbf{N}_+$ b) $q=4$

2.116. a) $a_n=5n$, $n\in\mathbf{N}_+$ b) $k=1$; $S_6=630$

Lokaty pieniężne i kredyty bankowe

2.119. a) 6720 zł b) 6583 zł 20 gr

2.120. a) 4078,72 zł b) 4098,40 zł c) 4196,80 d) 4629 zł 76 gr

2.121. a) 18 150 zł b) 17 583 zł

2.122. 12 lat

2.123. a) 6 312,38 zł b) 6 333,85 zł c) 6 344,93 zł

2.124. a) 31 668,08 zł b) 31 815,91 zł c) 31 893,05 zł

2.125. a) 10 612,08 zł b) 11 261,62 zł c) 12 682,42 zł

2.126. 10%

2.127. 12%

2.128. a) 18 8511,92 zł b) 18 302,84 zł c) 17 769,75 zł

2.129. tak

2.130. a) 6600 zł, 5200 zł b) 7200 zł

2.131. a) 5941,11 zł b) 7528,88 zł

Test sprawdzający do rozdziału 2.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	A	B	D	B	C	D	A	B	A

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

11. 150

12. b) c_4, c_5, c_6, c_7

14. a) $a_n=2n+1$, $n\in\mathbf{N}_+$ b) 1224

15. a) $\left(16\frac{1}{2}, 10\frac{1}{8}, 3\frac{3}{4}\right)$

16. $n=29$

17. a) 23 wyrazy b) $b_n=2n-10$, $n\in\mathbf{N}_+$

18. a) $a_{15}=39$ b) $a_n=2n+9$, $n\in\mathbf{N}_+$

19. $k=8$

20. a) $x=5$ b) $a_n=108\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}_+$ c) $k=7$

21. Na górnej półce stoi 6 książek, a na dolnej stoją 24 książki.

22. a) $\frac{555\left(2+\sqrt{3}\right)}{16}$ cm b) $\frac{84175\sqrt{3}}{1024}$ cm^2

23. $a_1=2$, $a_2=10$, $a_3=50$, $a_4=250$, $a_5=1250$

24. $q=2$; 9 wyrazów

25. a) 384 b) 364

26. a) $k=4$ b) $q=3$

28. o ok. 15%

wskazówka: Niech z_1 oznacza wielkość zysku w pierwszym miesiącu. Zauważ, że ciąg $(z_1, z_1 + 0{,}1 \cdot z_1, z_1 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot z_1, \ldots z_1 + 11 \cdot 0{,}1 z_1)$ przedstawiający wielkości rzeczywistych zysków firmy w poszczególnych miesiącach całego roku jest ciągiem arytmetycznym. Wówczas $S_{12} = 18{,}6 \cdot z_1$. W drugim przypadku otrzymujemy ciąg geometryczny $(z_1, 1{,}1 \cdot z_1, 1{,}1^2 \cdot z_1, \ldots, 1{,}1^{11} \cdot z_1)$. Wówczas suma wszystkich zysków w ciągu całego roku byłaby równa w przybliżeniu $21{,}384 \cdot z_1$.

29. 17 308,42 zł

30. 4%

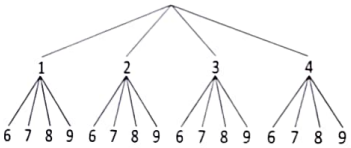
3. Kombinatoryka

Reguła mnożenia i reguła dodawania

3.1. Na 12 sposobów

	E	F	G
A	AE	AF	AG
B	BE	BF	BG
C	CE	CF	CG
D	DE	DF	DG

3.2.



3.3. 8 liczb

3.4. 18 liczb

3.5. a) 18 liczb b) 12 liczb c) 10 liczb

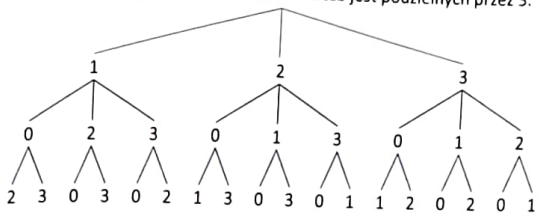
3.6. a) 15 liczb b) 50 liczb c) 26 liczb

3.7. Wszystkich liczb jest 25. Cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności w dziesięciu takich liczbach.

3.8. Wszystkich liczb jest 12. Wśród nich trzy liczby są podzielne przez 4.

	6	7	8	9
6	X	67	68	69
7	76	X	78	79
8	86	87	X	89
9	96	97	98	X

3.9. Wszystkich liczb jest 18. Wśród nich 10 liczb jest podzielnych przez 3.



3.10. a) 72 liczby b) 32 liczby

3.11. 1515 punktów

3.12. a) 306 liczb b) 82 liczby c) 595 liczb

3.13. 24 pary

3.14. a) na 10 sposobów b) na 11 sposobów c) na 12 sposobów

3.15. a) na 9 sposobów b) na 19 sposobów c) na 16 sposobów

3.16. na 440 sposobów

3.17. a) na 216 sposobów b) na 282 sposoby

3.18. a) na 61 sposobów b) na 29 sposobów

3.19. a) 51 możliwości b) 102 możliwości

3.20. a) 44 b) 90 c) 35 d) 76

3.21. a) 2 b) 34

3.22. a) 17 b) 89

3.23. a) 65 b) 70

3.24. 225

3.25. a) 891 b) 171

3.26. a) 873 b) 252

3.27. a) 18 b) 14

3.28. a) 24 b) 12

3.29. 9

3.30. a) 60 b) 32 c) 63 d) 39

Wariacje

3.31. $9^3 = 729$

3.32. 243

3.33. a) 9000 b) 10 000

3.34. 81

3.35. 4^7

3.36. a) 5^6 b) $4 \cdot 5^5$

3.37. na 12 sposobów

3.38. $8 \cdot 7 \cdot 6$, czyli 336

3.39. $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

3.40. a) 60 b) $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

3.41. a) 4536 b) 5040

3.42. $(7 \cdot 6)^2$, czyli 1764

3.43. a) na 7776 sposobów b) na 720 sposobów

3.44. a) 16 807 b) 2520

3.45. a) 360 b) 1296

3.46. a) na 840 sposobów b) na 2401 sposobów

3.47. a) 531 441 b) 60 480

3.48. a) 8^5 b) 243 c) 6720 d) $8^5 - 7^5$

3.49. $5 \cdot 10^{14}$

3.50. a) 320 b) 328

3.51. a) 60 480 b) 82 944 c) 3000 d) 98 415

3.52. a) 1 647 086 b) 3 265 920 c) 2 d) 600

3.53. 480

3.54. 6720

3.55. 72

3.56. 105

3.57. 378

3.58. a) 22 b) 160

3.59. a) 154 b) 2388

3.60. a) 6720 b) 12 096

Permutacje

3.61. a) 12 b) 72 c) 15 d) 5,5 e) 4,9 f) 8,1

3.62. a) $n!$ b) $(2n+1)!$ c) $n+3$ d) $(2n+1)(2n+2)$
e) $(n+4)\cdot(3n-1)!$ f) $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

3.63. na 6 sposobów

3.64. na 120 sposobów

3.65. a) na 7! sposobów b) na 49 sposobów

3.66. na 8! sposobów

3.67. a) $5! \cdot 5!$ b) $2 \cdot 5! \cdot 5!$

3.68. a) 12! b) $5! \cdot 7!$ c) $5! \cdot 7!$

3.69. a) na $4! \cdot 12!$ sposbów b) na $(4!)^4$ sposobów

3.70. a) na 72 sposoby b) na 24 sposoby

3.71. a) na 120 sposobów b) na 6 sposobów c) na 144 sposoby d) na 144 sposoby

3.72. a) na 120 sposobów b) na 1920 sposobów; wskazówka: Rozważ przypadki, gdy osoby A i B stoją na dwóch pierwszych lub dwóch ostatnich miejscach, na drugim i trzecim miejscu lub na szóstym i siódmym miejscu itd.
c) $8! - 14 \cdot 6! = 30\,240$ d) 2520

3.73. a) 1440 b) 2640 $(= 5! + 3 \cdot 5! + 3 \cdot 6!)$; wskazówka: Niech a oznacza liczbę siedmiocyfrową. Rozpatrz trzy przypadki:
$a \in (6\,500\,000, 6\,600\,000)$, $a \in (6\,700\,000, 7\,000\,000)$ oraz $a > 7\,000\,000$.

3.74. a) 36 b) 24

3.75. a) $6! + 15 \cdot 5!$, czyli 2520 b) $4 \cdot 5! + 8 \cdot (5! - 4!)$, czyli 1248

3.76. a) 216 b) 42

3.77. a) na 48 sposobów b) na 24 sposoby c) na 12 sposobów d) na 8 sposobów

3.78. a) na $2 \cdot 10!$ sposobów b) na $10!$ sposobów c) na $2 \cdot 10!$ sposobów
d) na $10 \cdot 8!$ sposobów

3.79. a) $8!$ b) $4! \cdot 4!$ c) $12 \cdot 6!$ d) $2^4 \cdot 4!$

3.80. a) na $14!$ sposobów b) na $2^7 \cdot 7!$ sposobów c) na $7! \cdot 7!$ sposobów
d) na $7!$ sposobów

Kombinacje

3.81. a) 120 b) 70 c) 25 d) 13 e) $\frac{10}{91}$ f) $2\frac{1}{6}$

3.82. a) $\frac{3}{n+1}$ b) $\frac{n+2}{3}$

3.83. a) $n = 5$ b) $n = 3$

3.84. 20

3.85. 35

3.86. a) 1 b) 4 c) 12

3.87. $n = 9$

3.88. $n = 20$

3.89. 7

3.90. a) $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1, c_1\}$, $\{b_1, c_2\}$, $\{b_2, c_1\}$, $\{b_2, c_2\}$
b) para $\{b_1, b_2\}$ jest liczona podwójnie

3.91. 20

3.92. a) na 12 600 sposobów b) na 21 245 sposobów c) na 22 820 sposobów

3.93. a) 4592 sposoby b) 15 448 sposobów c) 13 816 sposobów

3.94. a) 70 b) 1008 c) 672 d) 2254

3.95. a) 24 b) 2300 c) $\binom{18}{2}\binom{9}{1}+\binom{18}{3}$ d) $\binom{27}{3}-\binom{5}{3}$

3.96. a) 23 b) 21 c) 22 d) 42

3.97. a) 120 b) 34 c) 301

3.98. a) $\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}$ b) $\binom{14}{4}+\binom{7}{1}\binom{14}{3}$ c) $\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$

d) $\binom{9}{2}\binom{12}{2}+\binom{9}{3}\binom{12}{1}+\binom{9}{4}$

3.99. a) 36 b) 13 104 c) 20 160

3.100. a) 11 154 b) 270 010 c) 13 182

Test sprawdzający do rozdziału 3.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	A	B	C	B	D	C	D	A	C

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

11. Jest 9 liczb podzielnych przez 3
12. Jest 10 liczb parzystych
13. a) 131 b) 143
14. a) 20 b) 48 c) 53
15. 25 osób
16. a) 336 b) 1010 c) 347
17. a) 14 b) 5
18. a) 15 b) 12
19. a) 32 b) 37 c) 48 b) 11
20. a) 54 432 b) 600
21. a) na 7200 sposobów b) na 720 sposobów
22. a) na 243 sposoby b) na 112 sposobów
23. a) na 12 sposobów b) na 18 sposobów.
24. a) na 60 sposobów b) na 15 sposobów c) na 105 sposobów
    d) na 27 sposobów

4. Czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy

4.1. a) 60°, 80°, 130°, 90° b) 48°, 72°, 120°, 120° c) 80°, 60°, 75°, 145°

4.2 a) $|\sphericalangle A|=100°$, $|\sphericalangle B|=100°$, $|\sphericalangle C|=60°$, $|\sphericalangle D|=100°$; tak

b) $|\sphericalangle A|=100°$, $|\sphericalangle B|=110°$, $|\sphericalangle C|=60°$, $|\sphericalangle D|=90°$; nie

4.3. 44 cm

4.4. I. 0,5 m; 0,5 m; 0,8 m II. 0,8 m; 0,8 m; 1,2 m

4.5. 2,7 m

4.6. a) $|AC|=4$, $|BD|=\sqrt{3}+1$ b) $|AC|=8\sqrt{5}$, $|BD|=6\sqrt{5}$ c) $|AC|=36$, $|BD|=24$

d) $|AC|=10{,}5$, $|BD|=\frac{23\sqrt{2}}{4}$

4.7. $|BS|=5$, $|AC|=\sqrt{97}$

4.8. a) 240°; *wskazówka:* Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Oblicz miarę kąta ACB, następnie skorzystaj z własności kąta środkowego i kąta wpisanego w okrąg, które są oparte na tym samym łuku. b) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

4.9. a) $|AB|=|AD|=4\sqrt{2}$, $|BC|=|CD|=5$; *wskazówka:* Wykaż, że $|\sphericalangle BAD|=90°$.

b) $|\sphericalangle B|=|\sphericalangle D|\approx 82°$, $|\sphericalangle C|\approx 106°$

4.10. 120°; *wskazówka:* Skorzystaj dwukrotnie z twierdzenia cosinusów.

Trapezy

4.11. $|\sphericalangle A|=52°$, $|\sphericalangle B|=65°$, $|\sphericalangle C|=115°$, $|\sphericalangle D|=128°$

4.12. $|\sphericalangle A|=60°$, $|\sphericalangle B|=80°$, $|\sphericalangle C|=100°$, $|\sphericalangle D|=120°$

4.14. a) 45°; $|AB|=4$ b) 60°, $|AB|=9$

4.17. 12 cm

4.18. 26 cm

4.19. 13 cm, $4\sqrt{2}$ cm, 5 cm, $4\sqrt{2}$ cm

4.20. 16 cm, 21 cm

4.21. Dwa trapezy spełniają warunki zadania. I. podstawy: 5 cm, 14 cm; ramiona: 12 cm, 15 cm II. podstawy: 12 cm, $19\frac{13}{17}$ cm; ramiona: 5 cm, $9\frac{4}{17}$ cm

4.22. a) $11+3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ cm b) 5 cm, $\sqrt{37+6\sqrt{3}}$ cm

4.23. a) $h=12$ cm b) $|AB|=24$ cm, $|BC|=20$ cm, $|DC|=3$ cm

4.24. a) $-\frac{5}{13}$ b) 12 c) 23

4.25. a) 66 cm b) $8\sqrt{10}$ cm c) 0,8

4.26. (5 cm i 29 cm) lub (12 cm i 22 cm)

4.27. a) 8 cm b) 15 cm

4.28. 12 cm

4.29. a) $x=4$ b) $x=5{,}5$ c) $x=2$ d) $x=28$

4.30. 10,5 cm

4.31. 10 cm lub 7,5 cm

4.32. a) 21 cm, 9 cm b) 10 cm; Odcinek łączący środki ramion ma długość 15 cm.

4.33. $h=5$ cm

4.34. wskazówka Niech $|AB| = a$, $|DC| = b$, $a > b$. Poprowadź wysokość CF tego trapezu. Zauważ, że $|CF| = \frac{a-b}{2}$, $|BC| = \frac{a+b}{2}$.

4.35. wskazówka Uzasadnij, że czworokąt $EBLK$ jest równoległobokiem i wyznacz długości jego boków w zależności od długości podstaw trapezu. Następnie wykaż, że trójkąt AEK jest równoboczny.

4.36. $|AB| = 20$, $|DC| = 8$

4.37. $16 + 4\sqrt{10}$ cm

4.38. wskazówka Wykaż, że punkty M i N dzielą przekątne odpowiednio AC i BD na połowy. Następnie skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.

4.39. 13 cm, 7 cm; wskazówka Skorzystaj z poprzedniego zadania.

4.40. a) 14 cm, 7 cm; wskazówka Skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów.
b) $\sqrt{85}$ cm, $\sqrt{106}$ cm

4.41. $2\frac{2}{11}$ cm, $9\frac{9}{11}$ cm

4.43. $|AB| = 50$ cm; wskazówka Zauważ, że trójkąty ADC i ACB są podobne.

4.44. $|DC| = 9$ cm

Równoległoboki

4.45. 71°, 109°

4.46. 53°, 127°, 53°, 127°

4.47. 54°, 126°, 54°, 126°

4.48. 60°, 120°, 60°, 120°

4.49. a) $\left(2 + 2\sqrt{2}\right)$ cm b) 6 cm

4.50. a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

4.51. 3,5 cm

4.52. 19 cm, 3 cm

4.53. 60 cm, 11 cm

4.54. $1 + \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$

4.55. $Obw = 10\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

4.56. a) 5 b) $Obw = 6\sqrt{5}$

4.57. 15 cm, 20 cm; wskazówka Skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów prostokątnych.

4.58. a) 16 cm b) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ cm, $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm

4.59. $4\sqrt{13}$, $6\sqrt{13}$

4.60. $h = 5\sqrt{3}$

4.61. 18 cm, 80 cm

4.62. a) równoległobok b) prostokąt c) romb d) kwadrat

4.63. 10 cm, 17 cm

4.64. o 25%

4.65. $|DB| = 4$, $|AC| = 2 + 2\sqrt{3}$

4.66. $|AB| = |DC| = 8\sqrt{3}$, $|AD| = |BC| = 12$

4.67. $3\sqrt{3}$ cm, $5\sqrt{3}$ cm,

4.68. $26\sqrt{2}$ cm

4.69. a) $\frac{11}{24}$ b) $2\sqrt{14}$ c) $\frac{\sqrt{130}}{12}$

4.70. $5\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$; wskazówka Skorzystaj z twierdzenia sinusów w trójkącie rozwartokątnym o kątach 45°, 120° i 15° i oblicz długość dłuższego boku równoległoboku.

4.71. a) $h_1 = 4\sqrt{2}$, $h_2 = 4 + 4\sqrt{3}$ (bo $h_2 > 8$); wskazówka Skorzystaj z twierdzenia sinusów, a następnie z twierdzenia cosinusów w trójkącie DEF. b) 8, $4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

Podobieństwo. Czworokąty podobne

4.75. a) tak b) tak c) nie d) tak e) nie f) nie

4.76. a) nie b) tak

4.77. a) $k = \frac{2}{3}$ b) $k = \frac{\sqrt{10}}{2}$ c) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $k = \sqrt{5}$

4.78. a) $k = 0{,}8$ b) $k = \frac{25}{17}$

4.79. $\frac{10}{\pi + 2}$

4.80. a) tak, $k = \frac{3}{2}$ b) nie c) tak, $k = \frac{4}{3}$ d) tak, $k = 2$

4.81. 30 cm, 75 cm, 15 cm, 45 cm

4.82. a) o 80% b) o 15% c) o 62,5%

4.83. 12 cm

4.84. 10,5 cm

4.85. 10 cm

4.86. 1 : 8 (lub 8 : 1)

4.87. $k = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

4.88. a) 4 cm b) 12 cm

Test sprawdzający do rozdziału 4.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	D	A	A	B	C	D	B	D	A

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

11. $6\sqrt{6}$, $6\sqrt{3}$
12. 37
13. $2\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$
14. 16 cm
15. I. długość przekątnej: 6 cm, długość boku: $\sqrt{97}$ cm II. długość przekątnej: 10 cm, długość boku: $\sqrt{129}$ cm
16. 12
17. $|AC| = 13$ cm, $|BD| = 19{,}5$ cm
18. $h = 12$ cm
19. 6 cm, 8 cm
20. podstawy: 17 cm, 49 cm; ramię: 34 cm
21. 8 cm, 15 cm

5. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu

5.1. 4 cm^2

5.2. a) 1 : 2 (lub 2 : 1) b) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ $\left(\text{lub } \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$

5.3. 36 cm^2

5.4. 4 cm, 5 cm

5.5. 30°

5.6. 90 cm^2

5.7. $\frac{4}{9}$

5.8. a) 1,44 m^2 b) 6,88 m

5.9. 11 cm^2; *wskazówka:* Skorzystaj z podobieństwa trójkątów AED i EBF. Oblicz pola tych trójkątów.

5.10. 32 cm^2; *wskazówka:* $P_{EFCD} = P_{ABCD} - 2P_{AED}$, $|ES| = |DS| = 5$. Aby wyznaczyć $|AE|$, poprowadź promień ES i wysokość EG i zastosuj twierdzenie Pitagorasa w trójkącie ESG.

Pole równoległoboku. Pole rombu

5.11. a) 39 cm^2 b) $39\sqrt{2}$ cm^2 c) $39\sqrt{3}$ cm^2

5.12. a) $h_2 = 6$ lub $h_2 = 2\frac{2}{3}$ b) $h_2 = 6\frac{2}{3}$ c) $h_2 = 6$

5.13. 42 cm^2

5.14. $36\sqrt{3}$ cm^2; *wskazówka:* Zauważ, że jedna wysokość równoległoboku jest równa $2|OE|$, a druga $2|OF|$. Następnie uzasadnij, że kąt ostry równoległoboku jest równy 60°.

5.15. 60 cm^2; *wskazówka:* Ułóż układ równań z niewiadomymi a i b, gdzie a, b są długościami boków równoległoboku. Zastosuj dwukrotnie wzór na pole równoległoboku dla dwóch różnych podstaw.

5.16. 10 cm, 3 cm

5.17. 30°

5.18. a) 204 cm^2; *wskazówka:* Oblicz pole trójkąta ACD. b) $\frac{68}{\sqrt{8593}} \approx 0{,}73$

5.19. $P = 336$ cm^2, $Obw = 100$ cm

5.20. $4\sqrt{13}$, $6\sqrt{13}$

5.21. $4\sqrt[4]{2}$

5.22. 28 cm^2

5.23. a) 2 dm; 4,8 dm b) 10,4 dm c) $1\frac{11}{13}$ dm d) $\frac{120}{169}$

5.24. a) $h = 9\frac{3}{13}$ b) $11\frac{1}{13}$, $1\frac{12}{13}$

5.25. a) 3 b) $3\sqrt{5}$

Pole trapezu

5.26. a) 48 cm^2 b) 450 cm^2 c) 102 cm^2 d) 140 cm^2

5.27. a) 3,5 cm; 8,5 cm b) $6\frac{2}{3}$ cm; $5\frac{1}{3}$ cm

5.28. $21\left(\sqrt{3}-1\right)$ cm^2

5.29. $27\left(\sqrt{3}+3\right)$ cm^2

5.30. a) $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B| = 45°$, $|\sphericalangle C| = |\sphericalangle D| = 135°$ b) $|AB| = 27$ cm, $|DC| = 9$ cm

5.31. $108\sqrt{3}$ cm^2

5.32. 56 cm^2

5.33. 50 cm^2

5.34. a) 18 cm, 10 cm b) 42 cm^2

5.35. a) 28 b) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ c) $3\sqrt{5}$

5.36. 2 cm, 2 cm, 2 cm, 4 cm

5.37. 99 cm^2

5.38. 22 cm, 8 cm

5.39. a) 2 : 3 b) 62,5 cm^2

5.40. a) $171\frac{1}{2}$ b) $14\frac{2}{7}$ c) 80

5.41. 3 cm^2, 6 cm^2, 6 cm^2, 12 cm^2

Pole czworokąta – zadania różne

5.42. a) 15 b) 24 c) $35\sqrt{3}$ d) 30

5.43. a) 45 cm^2 b) $45\sqrt{3}\text{ cm}^2$

5.44. a) 30° b) 60° c) 45° d) 90°

5.45. a) 6 cm, 2 cm b) 4 cm, 4 cm; $P = 8\sqrt{2}\text{ cm}^2$

5.46. a) $h = 10\text{ cm}$ b) $\frac{a+b}{2} = 7{,}5\text{ cm}$; $P = 112{,}5\text{ cm}^2$

5.47. $169\sqrt{3}\text{ cm}^2$

5.49. a) 5 : 7 b) 3 : 13

5.50. 60 albo $26\frac{2}{3}$, albo 15; *wskazówka:* Wykonaj odpowiednie rysunki, poprowadź wspólne wysokości dla dwóch par trójkątów. Następnie skorzystaj z własności: *Stosunek pól trójkątów mających wspólną wysokość jest równy stosunkowi długości podstaw, na które ta wysokość została poprowadzona.*

5.51. a) 272 cm b) 4800 cm^2

5.52. Skorzystaj z własności pól trójkątów podobnych.

5.53. a) 45,5 b) $154\frac{2}{15}$ c) 84

5.54. $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$; *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia cosinusów dla kąta 60° i oblicz $|AC|$.

5.55. $P = 56\left(1+\sqrt{3}\right)$; *wskazówka:* Zauważ, że $P_{FEC} = P_{DEF}$. Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC wynika, że $P_{ABC} = 4P_{DEC}$. Zatem $P_{ABEF} = 7P_{DEF}$. Aby obliczyć pole trójkąta DEF, skorzystaj z twierdzenia sinusów i oblicz $|DF|$, następnie oblicz $|DE|$ z twierdzenia cosinusów dla kąta 45° lub kąta 30°.

Pola figur podobnych

5.56. $P_1 = 3\text{ cm}^2$, $P = 75\text{ cm}^2$

5.57. $P_1 = 153\text{ cm}^2$, $P = 68\text{ cm}^2$

5.58. a) $k = 1\frac{1}{5}$ b) $k = 1{,}1$ c) $k = 0{,}8$ d) $k = 1\frac{1}{3}$

5.59. a) o $43\frac{3}{4}\%$ b) o 36% c) o 64% d) o ok. 49%

5.60. a) $x = 2\text{ cm}$, $y = 3\text{ cm}$ b) 96%

5.61. a) $k = 2\sqrt{3}$ b) $60\sqrt{3}$

5.62. a) 1 : 3 b) 1 : 9

5.63. 27 cm, 12 cm

Mapa. Skala mapy

5.64. 34,9 cm

5.65. 200 km

5.66. a) 1 : 400 b) 1 : 200

5.67. a) 1 : 50 b) 2 cm, 3 cm

5.68. 5 cm^2

5.69. 3 ha

5.70. 1240 km^2

5.71. $3{,}5\text{ cm}^2$

Test sprawdzający do rozdziału 5.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	B	D	A	B	C	B	A	D	B	D

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

11. $P = 20$

12. a) $\frac{5}{8}$ b) $k = \frac{\sqrt{10}}{4}$

13. $4\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$

14. a) 5 b) 10, $10\sqrt{2}$, miara kąta między przekątnymi: 45°

15. $P = 112\sqrt{3}\text{ cm}^2$; *wskazówka:* Oblicz cosinus kąta rozwartego równoległoboku, a następnie sinus tego kąta.

16. a) 10 cm b) 9,6 cm c) 16 cm, 12 cm

17. 240 cm^2

18. 25 cm^2, 40 cm^2, 40 cm^2, 64 cm^2

19. 15 cm

20. 84 cm^2

21. 30 cm^2

22. 10 cm, 10 cm; największe pole: $25\sqrt{2}\text{ cm}^2$

23. *wskazówka:* Niech P oznacza pole trójkąta DPM. Uzasadnij, że $P_{PCM} = P$, $P_{APD} = 2P$, $P_{ABP} = P_{PBC} = 4P$.

25. $P = 45$; *wskazówka:* Niech P oznacza punkt przecięcia prostych AD i BC. Wówczas $|\sphericalangle APB| = 90°$ oraz $P_{ABCD} = P_{ABP} - P_{DCP}$. Oblicz cosinus kąta ADC, następnie cosinus kąta CDP i długości boków trójkąta DCP.

6. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka

6.1. a) $D(12, 0)$ b) $D(-2, 6)$ c) $D(-9, 9)$ d) $D\left(2\frac{2}{3}, 4\right)$

6.2. a) $B(2, -4)$ b) $B(-1, 5)$ c) $B\left(3\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right)$ d) $B\left(2\sqrt{3}+3, 1\right)$

6.3. a) $A(3, -6)$ b) $A\left(1\frac{1}{3}, 2\sqrt{2}\right)$

6.4. a) tak b) nie

6.5. a) $m = 0$ b) $m = \sqrt{2} \vee m = -\sqrt{2}$ c) $m \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

6.6. a) $\vec{u}+\vec{v} = [-1, 0]$; 1 b) $\vec{z}-\vec{u} = [8, 2]$; $2\sqrt{17}$ c) $3\vec{v} = [-9, 12]$; 15

d) $\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}+2\vec{z} = [24, -10]$; 26

6.7. $(-1, 6)$, $(1, 5)$, $(3, 4)$

6.8. a) $B(1, 4)$ b) $B(-4, -8)$

6.9. a) $(-6, 1)$, $(-2, -5)$ b) $\left(-7\frac{3}{5}, 3\frac{2}{5}\right)$, $\left(-5\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, $\left(-2\frac{4}{5}, -3\frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{2}{5}, -7\frac{2}{5}\right)$

6.10. a) $P(8, -5)$ b) $P\left(5\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

6.11. $M\left(-1\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

6.12. $C(7, 1)$, $D(4, 8)$

6.13. $P(-12, -1)$ lub $P(8, -5)$, lub $P(5, 7)$

6.14. a) $|AD| = \sqrt{85}$, $|BE| = \sqrt{145}$, $|CF| = 10$ b) $S\left(1, 2\frac{2}{3}\right)$ c) $2\sqrt{10}+3\sqrt{5}+5$

6.15. $A(-2, 0)$, $B(10, -4)$, $C(2, 6)$; *wskazówka:* Niech punkt M będzie środkiem odcinka DF. Uzasadnij, że punkt M jest również środkiem środkowej AE.

Proste w układzie współrzędnych

6.16. a) $y = -2x - 7$ b) $y = \frac{1}{3}x - 8$

6.17. a) $3x - 4y - 42 = 0$ b) $-2x + y - 17 = 0$

6.18. a) $y = -2x + 4$ b) $y = -\frac{1}{7}x - 5$

6.19. a) $x + 3y - 1 = 0$ b) $2x + 5y + 16 = 0$

6.20. a) 60° b) 150° c) 90° d) 0°

6.21. a) $\operatorname{tg}\alpha = -2$ b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$

6.22. a) $y = \frac{-5}{3}x + \frac{11}{3}$ b) $y = -6x + 5$

6.23. a) $3x + y + 5 = 0$ b) $x + y - 1 - \sqrt{2} = 0$ c) $y - \sqrt{5} - 1 = 0$ d) $x + 1 = 0$

6.24. $\left(1\frac{1}{5}, 1\frac{2}{5}\right)$

6.25. a) np. $7x + 2y - 5 = 0$, $8x - 5y + 4 = 0$, $x - 7y + 9 = 0$ b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

6.26. a) np. $y = -1$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$ b) $\left(\frac{11}{6}, -1\right)$

6.27. a) $D(1, -4)$ b) $D\left(6\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}\right)$

6.28. $(3, 2)$

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

6.29. a) 9 b) 4 c) 0 d) $2\frac{1}{5}$

6.30. a) $C = 12$ lub $C = 2$ b) $C = -68$ lub $C = 82$ c) $C = 7$

d) $C = 7 - 5\sqrt{7}$ lub $C = 7 + 5\sqrt{7}$

6.31. a) $a = 9$ lub $a = 0{,}5$ b) $a = 4{,}75$ c) $a = 32\frac{3}{8}$ lub $a = -22\frac{7}{8}$

d) $a = 26$ lub $a = -16{,}5$

6.32. a) $a = 9$ lub $a = -11$ b) $a = -\frac{1}{2}$ lub $a = 2\frac{5}{6}$

c) nie istnieje taka liczba a d) $a = 8$ lub $a = -12$

6.33. a) $3\sqrt{2}$ b) 8 c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ d) $8\frac{1}{15}$

6.35. l: $8x - 15y + 89 = 0$ lub l: $8x - 15y - 47 = 0$

6.36. a) $DA \parallel CB$ b) $h = 1{,}5\sqrt{10}$

6.37. $3x - 4y + 28 = 0$ lub $3x - 4y - 2 = 0$

6.38. a) pr. AB: $x + 2 = 0$, pr. BC: $x + 2y - 2 = 0$, pr. AC: $3x + 4y - 6 = 0$

b) $h_A = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $h_B = 0{,}8$, $h_C = 4$

6.39. a) $h = d(A, \text{pr. } BC) = 4\sqrt{2}$ b) $|BD| = 2 \cdot d(B, \text{pr. } AC) = 2\sqrt{10}$

6.40. $h_1 = \frac{18}{\sqrt{17}}$, $h_2 = \frac{18}{\sqrt{5}}$

6.41. $3x + 2y - 25 = 0$ lub $3x + 2y + 27 = 0$

Pole trójkąta. Pole wielokąta

6.42. a) 6 b) 19,5

6.43. b) 30

6.44. 17

6.45. 10

6.47. $24\sqrt{3}$

6.48. 312,5

6.49. 75

6.50. 30

6.51. a) 18 b) 30

6.52. b) 22

6.53. b) 50

6.54. a) 46,5; wskazówka: $P = P_{DAC} + P_{ABC}$ b) 46

6.55. $C(4, 0)$ lub $C\left(-9\frac{1}{3}, 0\right)$

6.56. $C(0, -8)$ lub $C\left(0, 9\frac{1}{3}\right)$

Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu

6.57. a) $(x+4)^2 + y^2 = 1$; $S(-4, 0)$, $r = 1$ b) $(x-7)^2 + (y+9)^2 = 121$; $S(7, -9)$, $r = 11$

c) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = 9$; $S\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $r = 3$

d) $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 25$; $S\left(-\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $r = 5$

6.58. Równanie opisuje: a) prostą b) okrąg o środku $S(0, 3)$ i promieniu 3 c) parabolę d) punkt

6.59. a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 100$ b) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 72$

6.60. a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ b) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 20$

6.61. a) $(0, 0)$ lub $(2, 4)$ b) $(3, 1)$

6.62. a) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$ b) $S(-4, -1)$, $r = \sqrt{65}$

6.63. a) $(-6, 1)$, $(-2, 5)$ b) nie istnieją c) $(2, -4)$ d) $(-4, -5)$, $\left(1\frac{2}{5}, -6\frac{4}{5}\right)$

6.64. a) styczna do okręgu b) sieczna okręgu c) prosta rozłączna z okręgiem d) sieczna okręgu

6.65. a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ lub $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$

b) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ lub $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$

c) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ lub $(x+10)^2 + (y-10)^2 = 100$

d) $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$ lub $(x+29)^2 + (y+29)^2 = 841$

6.66. a) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 5$ b) $x^2 + \left(y+\frac{4}{3}\right)^2 = 0{,}64$

6.67. a) $k: x - 9 = 0$ b) $k: y + 4 = 0$ c) $k: 4x - 3y + 12 = 0$ d) $k: 3x + 4y - 41 = 0$

6.68. a) $y = 2x - 3 + 2\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 3 - 2\sqrt{5}$ b) $y = x + 8 + 4\sqrt{2}$ lub $y = x + 8 - 4\sqrt{2}$

c) $y = -3x + 3 + 4\sqrt{10}$ lub $y = -3x + 3 - 4\sqrt{10}$

d) $y = -x + 7 + 3\sqrt{2}$ lub $y = -x + 7 - 3\sqrt{2}$

6.69. a) $y = -x + 1 - \sqrt{2}$ lub $y = -x + 1 + \sqrt{2}$ b) $y = x - 5 + 3\sqrt{2}$ lub $y = x - 5 - 3\sqrt{2}$

c) $y = 2x - 8 + 3\sqrt{5}$ lub $y = 2x - 8 - 3\sqrt{5}$ d) $y = \frac{4}{3}x - 1$ lub $y = \frac{4}{3}x - 17\frac{2}{3}$

6.70. a) $y = \sqrt{3}x + 2$ lub $y = \sqrt{3}x - 2$ b) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 4$ lub $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 4$

c) $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x - \frac{5\sqrt{3}}{3}$ lub $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x + 5\sqrt{3}$ d) $y = -x + 3$ lub $y = -x - 5$

Zadania różne z geometrii analitycznej

6.71. wskazówka: I sposób: Sprawdź, czy odpowiednie wektory są równe. II sposób: Sprawdź, czy środek przekątnej AC jest jednocześnie środkiem przekątnej BD.

6.72. wskazówka: I sposób: Wykaż, że długości wszystkich boków czworokąta są jednakowe. II sposób: Wykaż, że czworokąt jest równoległobokiem, którego przekątne są do siebie prostopadłe.

6.73. wskazówka: I sposób: Wykaż, że przekątne AC i BD mają jednakową długość i dzielą się na połowy. II sposób: Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, którego co najmniej jeden kąt wewnętrzny jest prosty.

6.74. wskazówka: I sposób: Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest rombem, którego co najmniej jeden kąt wewnętrzny jest prosty. II sposób: Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, którego sąsiednie boki mają jednakową długość.

6.75. b) $Obw = 10\sqrt{5} + 3\sqrt{10}$, $P = 52{,}5$

6.76. a) wskazówka: Wykaż, że $|AB| = |AD|$ oraz $|DC| = |BC|$. b) $Obw = 10 + 4\sqrt{10}$, $P = 30$

6.77. b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{65}{2}$

6.78. a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 40$ b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$

6.79. a) $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$ b) $B\left(4-2\sqrt{3}, -6\right)$, $B\left(4+2\sqrt{3}, -6\right)$

6.80. $C\left(3\sqrt{3}+6, 3\right)$, $D\left(3\sqrt{3}, 3\right)$ lub $C\left(3\sqrt{3}+6, -3\right)$, $D\left(3\sqrt{3}, -3\right)$

6.81. $3x - 4y + 12 = 0$ lub $3x - 4y - 38 = 0$

6.82. $C(-5, 4)$ lub $C(35, 4)$

6.83. $B(5, 0)$, $D(1, 6)$

6.84. $C(1, 6)$, $D(-7, 4)$ lub $C(5, -10)$, $D(-3, -12)$

6.85. $(-3, 7)$, $(-4, -1)$, $(3, -5)$, $(4, 3)$

6.86. a) $A(-5,-3)$, $B(-1,5)$ b) $P=10$ c) $-\frac{3}{5}$

6.87. $C(-2,3)$ lub $C(2,1)$

6.88. $A(1,3)$, $B(7,3)$

Wybrane przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych

6.89. a) $A_1(-4,5)$, $B_1(-1,1)$ b) 2,4

6.90. $A(-8,4)$, $B(-1,-1)$, $C(-3,6)$

6.91. a) $(x-3)^2+(y-1)^2=2$ b) $(x+4)^2+(y+5)^2=2$ c) $(x+6)^2+(y-4)^2=2$

6.92. $x^2+(y+1)^2=25$

6.93. a) $2x+y-5=0$; $d(k,l)=0{,}8\sqrt{5}$ b) $2x+y+9=0$; $d(k,l)=2\sqrt{5}$

c) $2x+y+5=0$; $d(k,l)=1{,}2\sqrt{5}$

6.94. $y=x^2+2x+1$; punkt wspólny ma współrzędne $(-2,1)$; wskazówka: Wyznacz obraz wierzchołka paraboli p i obraz punktu wspólnego tej paraboli z osią OY.

6.95. $S(6,5)$, $r=2$

6.96. a) $A_1(1,4)$, $B_1(-3,2)$ b) To jest równoległobok.

6.97. a) $A(2,0)$, $B(-3,2)$, $C(-5,-4)$

6.98. a) $l\colon x+4=0$, $d(k,l)=8$ b) $l\colon x+y=0$, $d(k,l)=0$ c) $l\colon y+3=0$, $d(k,l)=6$

d) $l\colon 3x-4y-5=0$, $d(k,l)=2$ e) $l\colon x-y+2=0$, $d(k,l)=2\sqrt{2}$

f) $l\colon 5x+12y+26=0$, $d(k,l)=4$

6.99. $y=-x^2+2x+4$; wskazówka: Wyznacz obraz wierzchołka paraboli p i obraz punktu przecięcia tej paraboli z osią OY. a) $(-2,-4)$, $(2,4)$

6.100. a) $(x-2)^2+(y+1)^2=10$ b) $(x-2)^2+(y-7)^2=10$ c) $(x-8)^2+(y+1)^2=10$

d) $(x-12)^2+(y+15)^2=10$

6.101. $A_1(2,-4)$, $B_1(5,5)$, $C_1(-7,-1)$

6.102. a) $B(-8,-6)$, $C(8,-6)$, $D(8,6)$ b) 20

6.103. $a=2$

6.104. a) $(x+5)^2+(y+7)^2=1$ b) $(x-2)^2+(y-5)^2=36$

6.105. a) $l\colon 2x-3y=0$ b) $l\colon x+y+8=0$ c) $l\colon 5x-4y-1=0$

6.106. a) $l\colon -2x+3y=0$ b) $l\colon -x-y+8=0$ c) $l\colon -5x+4y-1=0$

6.107. a) $P(-1,-4)$ b) $P(-2,1)$

6.108. a) $x+3=0$ b) $x-y-1=0$ c) $5x+3y+3=0$

6.109. a) $D(-11,-2)$ b) $D(-2,-4)$ c) $D\left(5\frac{4}{5},4\frac{3}{5}\right)$ d) $D(-3,-7)$

6.110. a) $A_1(-9,2)$

6.111. a) $A_1(-1,-6)$

6.112. b) $x^2+y^2-4y-1=0$

6.113. b) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

6.114. b) $x-2y+10=0$

Test sprawdzający do rozdziału 6.

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	C	D	A	B	B	C	C	A	D

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

11. $P(1,4)$; wskazówka: Punkt P to punkt przecięcia prostej k z symetralną odcinka AB.

12. a) $C(-3,7)$ b) $P=72$

13. $(-2,4)$; wskazówka: Ortocentrum to punkt przecięcia się wysokości trójkąta lub ich przedłużeń.

14. $x-3y+8=0$; wskazówka: Szukana prosta przechodzi przez punkt A oraz przez punkt wspólny prostych k i l (ortocentrum trójkąta).

15. $(x+2)^2+(y-2)^2=65$; wskazówka: Środek tego okręgu jest punktem wspólnym symetralnych boków trójkąta ABC.

16. b) $P=39$

17. a) $D(-5,4)$ c) $A_1(-5,0)$, $B_1(-1,-2)$, $C_1(1,2)$, $D_1(-3,4)$

18. $B(1,-1)$, $C\left(-2,3\sqrt{3}-1\right)$ lub $C\left(-2,-1-3\sqrt{3}\right)$

19. $A_1\left(4\frac{4}{5},2\frac{2}{5}\right)$

20. $(x-3)^2+(y-1)^2=25$

21. a) $A(-9,4)$, $B(-5,-4)$, $C(3,0)$, $D(-5,8)$ c) 72

22. b) $5x+12y-65=0$

23. $y=-\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$ oraz $y=-\frac{1}{2}x-9\frac{1}{2}$

24. $C(-5,4)$ lub $C(-3,6)$

25. $B(2,0)$, $D(-2,4)$