

Alicja Cewe • Maria Kruk
Alina Magryś-Walczak • Halina Nahorska

MATEMATYKA

i przykłady jej zastosowań

zakres podstawowy

Podręcznik

3

- licea ogólnokształcące
- technika

Podręcznik dla absolwentów
ośmioletniej szkoły podstawowej



Alicja Cewe • Maria Kruk
Alina Magryś-Walczak • Halina Nahorska

MATEMATYKA

i przykłady jej zastosowań

zakres podstawowy

Podręcznik

3



Gdańsk

Autorki: Alicja Cewe, Maria Kruk, Alina Magryś-Walczak,
Halina Nahorska

Opracowanie edytorskie i redakcyjne: Alicja Cewe, Halina Nahorska, Alina Magryś-Walczak

Projekt okładki: Alicja Cewe

Skład i ilustracje: Jarosław Mach

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez Ministra Edukacji Narodowej i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. Macieja Bryńskiego, mgr Elżbiety Krzysztofiak, dr hab. Elżbiety M. Kur.

Zakres kształcenia: podstawowy.

Etap edukacyjny: III.

Typ szkoły: szkoły ponadpodstawowe.

Rok dopuszczenia: 2021.

Numer ewidencyjny w wykazie: 1003/3/2021.

Podręcznik zgodny z podstawą programową kształcenia ogólnego w liceach ogólnokształcących i technikach – zakres podstawowy i rozszerzony, określoną w rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz.U. z 2018 r., poz. 467.)

ISBN 978-83-65120-68-7

© Copyright by Wydawnictwo Podkowa
Gdańsk, ul. Paganiniego 17/17



Dystrybucja i zamówienia:

✉ Skr. pocztowa 18, 80-460 Gdańsk 6	} dział zamówień i reklamacji
tel. 602 211 526	
tel./fax 585 208 745	

pinia@podkowa.gda.pl • www.podkowa.gda.pl

Spis treści

Wstęp	5	5. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów	123
1. Funkcja wykładnicza	7	Twierdzenie sinusów (Snelliusa)	123
Potęga o wykładniku rzeczywistym	7	Twierdzenie cosinusów (Carnota)	131
Funkcja wykładnicza i jej własności	13	Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów	137
Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej	19	<i>Zestaw powtórkowy</i>	141
Funkcja wykładnicza w zastosowaniach	24	6. Obliczanie długości odcinków i pól trójkątów	144
<i>Zestaw powtórkowy</i>	31	Związki miarowe w trójkącie	144
2. Funkcja logarytmiczna	34	Wzory na pola trójkątów i ich zastosowanie	149
Logarytm i jego własności	34	<i>Zestaw powtórkowy</i>	156
Funkcja logarytmiczna i jej własności ..	39	7. Obliczanie długości odcinków i pól czworokątów	158
Przekształcanie wykresu funkcji logarytmicznej	44	Klasyfikacja i pola czworokątów wypukłych	158
Funkcja logarytmiczna w zastosowaniach	47	Prostokąty	161
<i>Zestaw powtórkowy</i>	52	Kwadraty	163
3. Ciągi liczbowe określone wzorem ogólnym i rekurencyjnym	54	Równoległoboki	167
Pojęcie ciągu liczbowego	54	Romby	171
Przykłady i sposoby określania ciągu ..	57	Trapezy	175
Ciąg określony rekurencyjnie	64	Rozwiązywanie zadań optymalizacyjnych z planimetrii	182
Monotoniczność ciągu liczbowego	67	<i>Zestaw powtórkowy</i>	185
<i>Zestaw powtórkowy</i>	71	Odpowiedzi i wskazówki	188
4. Ciągi arytmetyczne i geometryczne	73	1. Funkcja wykładnicza	188
Pojęcie ciągu arytmetycznego	73	2. Funkcja logarytmiczna	191
Własności ciągu arytmetycznego	80	3. Ciągi liczbowe określone wzorem ogólnym i rekurencyjnym	195
Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	85	4. Ciągi arytmetyczne i geometryczne, w tym lokaty i kredyty	197
Pojęcie ciągu geometrycznego	92	5. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów	204
Własności ciągu geometrycznego	97	6. Obliczanie długości odcinków i pól trójkątów	207
Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	103	7. Obliczanie długości odcinków i pól czworokątów	209
Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zadaniach	109		
Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny w bankowości	114		
<i>Zestaw powtórkowy</i>	120		

Wstęp

„Podręcznik 3 – zakres podstawowy” z serii **Matematyka i przykłady jej zastosowań** jest adresowany do uczniów klasy trzeciej liceum ogólnokształcącego i technikum, którzy ukończyli ośmioletnią szkołę podstawową.

Jest w nim wystarczająca liczba zadań i ćwiczeń, by nabyć umiejętności wymienione w podstawie programowej z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz.U. z 2018 r., poz. 467).

W końcowej części każdego realizowanego tematu lekcji zamieszczono zadania pozwalające na utrwalenie wiadomości (zadania utrwalające). Odpowiedzi do zadań utrwalających znajdują się na ostatnich stronach książki. Odpowiedzi do ćwiczeń są umieszczone w fioletowej ramce przed każdym zestawem zadań utrwalających.

Prosimy, aby w podręczniku nie umieszczać szkiców rozwiązań oraz odpowiedzi i nie zamieszczać ich w zadaniach zamkniętych.

Każdy rozdział kończy się zestawem powtórkowym, w którym są zadania otwarte i zamknięte.

Przy rozwiązywaniu problemów można korzystać z dostępnych narzędzi, czyli encyklopedii, tablic matematycznych, kalkulatorów i komputerów.

Autorki

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym

Przypomnijmy

W klasie pierwszej poznaliście definicje potęg o wykładnikach wymiernych:

- potęga o wykładniku naturalnym $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, przy czym $a^0 = 1$, gdy $a \neq 0$,
- potęga o wykładniku całkowitym ujemnym $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, gdzie $a \neq 0$ i $n \in N$,
- potęga o wykładniku wymiernym $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, gdzie $a \in R^+$, $n \in N^+$ i $n > 1$, $m \in C$.

W klasie drugiej poznaliście działania na wyrażeniach wymiernych, znajomość których pozwoli nam udowodnić twierdzenie dotyczące działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych wymiernych wykładników x i y prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned} \bullet a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & \bullet (a^x)^y &= a^{x \cdot y} & \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \\ \bullet a^x : a^y &= a^{x-y} & \bullet (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \end{aligned}$$

Dowód:

Wprowadzamy oznaczenia $x = \frac{m}{n}$ i $y = \frac{p}{q}$, gdzie $m \in Z$, $p \in Z$, $n \in Z^+$, $q \in Z^+$.

$$\bullet a^x \cdot a^y = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} =$$

$$= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \cdot \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np} =$$

$$= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np} = a^{\frac{1}{nq} \cdot (mq+np)} =$$

$$= a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{x+y}, \text{ czyli } a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

ckd.

Ułamki $\frac{m}{n}$ i $\frac{p}{q}$ sprowadzamy do wspólnego mianownika nq .

$mq \in Z$, $np \in Z$, więc $a^{mq} \cdot a^{np} = a^{mq+np}$.

- $$(a^x)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} =$$

$$= \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = a^{x \cdot y}, \text{ czyli } (a^x)^y = a^{x \cdot y}. \quad \text{ckd.}$$
- $$(a \cdot b)^x = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left[(ab)^{\frac{1}{n}}\right]^m = \left(\sqrt[n]{a \cdot b}\right)^m =$$

$$= \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^x \cdot b^x, \text{ czyli}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x. \quad \text{ckd.}$$

Analogicznie można przeprowadzić dowód pozostałych dwóch wzorów.

Ćwiczenie 1. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych wymiernych wykładników x i y zachodzą równości:

a) $a^x : a^y = a^{x-y},$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$

Przykład 1. Przedstaw w postaci potęgi liczby $\frac{1}{9}$ wyrażenie $\frac{\sqrt[3]{4\sqrt{27}}}{\sqrt{3}}.$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{27}}}{\sqrt{3}} &= \frac{\left[\left(3^3\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3^2}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{3^2}} = \\ &= 3^{-\frac{1}{4}} = \left(3^{-1}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[\left(3^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{4}} = \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

Przedstawiamy 3^{-2} w postaci potęgi liczby $\frac{1}{9} = 3^{-2}.$

Ćwiczenie 2. Przedstaw w postaci potęgi liczby 8 wyrażenie $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}.$

Ćwiczenie 3. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^5}{(-2)^3 \cdot (-2)^6},$ b) $\left[\left(3\frac{1}{3}\right)^{-1} - 5^{-1}\right]^{-1},$ c) $\frac{\sqrt[3]{25} \cdot 5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}},$ d) $\left[(64^2)^0\right]^{\frac{1}{2}}.$

Cwiczenie 4. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i oblicz wartość wyrażenia:

$$\text{a) } \left(2^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(2^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}\right), \quad \text{b) } \left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Dotychczas obliczaliście potęgi o wykładnikach wymiernych.

Obecnie nauczymy się obliczać potęgi o wykładnikach niewymiernych.

Przykład 2. Wskaż kilka kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby $\sqrt{5}$ i odpowiadający im ciąg przybliżeń liczby $3^{\sqrt{5}}$.

Rozwiązanie

z dokładnością do 1: $\sqrt{5} \approx 2$, skąd $3^{\sqrt{5}} \approx 3^2$, czyli $3^{\sqrt{5}} \approx 9$,
 z dokładnością do 0,1: $\sqrt{5} \approx 2,2$, skąd $3^{\sqrt{5}} \approx 3^{2,2}$, czyli $3^{\sqrt{5}} \approx 11,21$,
 z dokładnością do 0,01: $\sqrt{5} \approx 2,24$, skąd $3^{\sqrt{5}} \approx 3^{2,24}$, czyli $3^{\sqrt{5}} \approx 11,72$,
 z dokładnością do 0,001: $\sqrt{5} \approx 2,236$, skąd $3^{\sqrt{5}} \approx 3^{2,236}$, czyli $3^{\sqrt{5}} \approx 11,66$,
 z dokładnością do 0,0001: $\sqrt{5} \approx 2,2361$, skąd $3^{\sqrt{5}} \approx 3^{2,2361}$, czyli $3^{\sqrt{5}} \approx 11,67$,
 ...
 Z kalkulatora odczytujemy, że $3^{\sqrt{5}} \approx 11,664753321\dots$

Uwaga

Wartość potęgi liczby rzeczywistej dodatniej o wykładniku niewymiernym x szacujemy, wykorzystując potęgi o wykładnikach wymiernych, będących kolejnymi przybliżeniami liczby x .

Przykład 3. Za pomocą kalkulatora wielofunkcyjnego lub komputera oszacuj liczbę 5^{π} , gdy przybliżenie liczby π jest podane z dokładnością do 0,0001.

Rozwiązanie

Z kalkulatora lub tablic odczytujemy, że $\pi = 3,141592653\dots$, więc

$$3,1415 < \pi < 3,1416,$$

$$\text{zatem } 5^{3,1415} < 5^{\pi} < 5^{3,1416},$$

$$\text{skąd } 156,96 < 5^{\pi} < 156,99.$$

$$\text{Odp.: } 156,96 < 5^{\pi} < 156,99.$$

Ćwiczenie 5. Za pomocą kalkulatora wielofunkcyjnego lub komputera oszacuj liczbę $2^{\sqrt{7}}$, gdy przybliżenie liczby $\sqrt{7}$ jest podane z dokładnością do 0,0001.

Potęgi o dodatnich podstawach i niewymiernych wykładnikach mają te same własności, co potęgi o wykładnikach wymiernych (w tym naturalnych i całkowitych).

Prawdziwe jest twierdzenie o działaniach na potęgach o dodatnich podstawach i rzeczywistych wykładnikach.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych rzeczywistych wykładników x i y zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \bullet a^x \cdot a^y &= a^{x+y} & \bullet (a^x)^y &= a^{x \cdot y} & \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \\ \bullet a^x : a^y &= a^{x-y} & \bullet (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \end{aligned}$$

Przykład 4. Wykonaj działania:

a) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$, b) $5^{\sqrt{3}-1} \cdot 5^{1-\sqrt{3}}$, c) $\frac{9^{3\sqrt{2}}}{81^{\sqrt{2}-1}}$.

Rozwiązanie

a) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 5^3 = 125,$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

b) $5^{\sqrt{3}-1} \cdot 5^{1-\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}-1+1-\sqrt{3}} = 5^0 = 1,$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

c) $\frac{9^{3\sqrt{2}}}{81^{\sqrt{2}-1}} = \frac{9^{3\sqrt{2}}}{(9^2)^{\sqrt{2}-1}} = \frac{9^{3\sqrt{2}}}{9^{2(\sqrt{2}-1)}} = 9^{3\sqrt{2}-2(\sqrt{2}-1)} = 9^{\sqrt{2}+2}.$

$$81 = 9^2$$

Ćwiczenie 6. Wykonaj działania:

a) $\left[(\sqrt{5}-1)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, b) $(3^{1-\sqrt{3}})^{1+\sqrt{3}}$, c) $\left(\frac{3^{3\sqrt{2}}}{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}.$

Odpowiedzi do ćwiczeń

2. $\frac{1}{8^4}$. 3. a) -2, b) 10, c) $\frac{1}{5}$, d) 1. 4. a) -3, b) 4. 5. $6,2580 < 2^{\sqrt{7}} < 6,2584.$

6. a) $6-2\sqrt{5}$, b) $\frac{1}{9}$, c) 81.

Zadania utrwalające

1.1. Oblicz:

$$\text{a)} \left(125^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{2}} + 343^{\frac{1}{3}} - 3 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{b)} \left(16^{-\frac{1}{4}} - 3^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot \left[16^{-0,25} + (\sqrt{3})^{-1} \right],$$

$$\text{c)} 16^{-0,75} + 0,125^{\frac{4}{3}} + \left(1\frac{61}{64} \right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\text{d)} \sqrt{9} \cdot \left[1,5^{-1} + 9^{-1,5} \right] - 27^{-\frac{2}{3}},$$

$$\text{e)} \left[\frac{125^{\frac{2}{3}} - 0,2^{-1}}{0,5^{-2}} \cdot 0,2^{-3} \right]^{\frac{3}{4}},$$

$$\text{f)} \sqrt[3]{0,375} \cdot \sqrt[3]{9} + \left(3^{-1} - \sqrt[4]{\frac{16}{81}} \right)^{-2}.$$

1.2. Wykonaj działanie:

$$\text{a)} \left(2^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}} \right) \left(2^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$\text{b)} \left(m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(m^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$\text{c)} \left[(3 - \sqrt{5})^{\frac{1}{2}} + (3 + \sqrt{5})^{\frac{1}{2}} \right]^2,$$

$$\text{d)} \left[(3 + 2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} - (3 - 2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \right]^2,$$

$$\text{e)} \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left[a^{\frac{2}{3}} + (ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right],$$

$$\text{f)} \left(3^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}} \right) : \left[3 - (3a)^{\frac{1}{2}} + a \right].$$

1.3. W miejsce ■ wstaw jeden ze znaków: „<”, „=”, „>”, gdy:



$$\text{a)} 81^{10} \text{ } \blacksquare \text{ } 1024^4,$$

$$\text{b)} \left(\frac{1}{27 \cdot \sqrt[3]{9}} \right)^{-6} \text{ } \blacksquare \text{ } \left(\frac{\sqrt[3]{81}}{9\sqrt[4]{27}} \right)^{-12},$$

$$\text{c)} \left(\frac{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{125}}{\sqrt[5]{625}} \right)^{40} \text{ } \blacksquare \text{ } 0,2^{-18}, \quad \text{d)} \left(4^{-0,25} - 2^{0,5} \right) \cdot \left(4^{-0,25} + (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \right) \text{ } \blacksquare \text{ } \left(-\frac{2}{3} \right)^{-1}.$$

1.4. Wiedząc, że $a > 0$, $b > 0$ i $x \in \mathbf{R}$ oraz stosując prawa działań na potęgach, przedstaw w prostszej postaci wyrażenie:

$$\text{a)} a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}},$$

$$\text{b)} a^{-3\sqrt{2}} : a^{\sqrt{2}},$$

$$\text{c)} 3^x \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^x,$$

$$\text{d)} \frac{3^x}{2^x}.$$

1.5. Uzasadnij, że:

D

$$\text{a)} \sqrt[12]{625} = \sqrt[3]{5},$$

$$\text{b)} \left[\left(\frac{3}{5} \right)^0 \right]^{\frac{3}{4}} - 7\frac{1}{2} \cdot 4^{-1,5} - 2^{-4} + 9^{0,5} = 3.$$

1.6. Przedstaw w postaci potęgi liczby 2 wyrażenie:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 2^{\sqrt{2}} \cdot 2, & \text{b)} 2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{2}}, & \text{c)} 2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{1+\sqrt{2}}, & \text{d)} \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}, \\ \text{e)} \frac{2^{\sqrt{2}}}{2}, & \text{f)} 2^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}, & \text{g)} \frac{8^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}}, & \text{h)} \left(\frac{16}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}. \end{array}$$

1.7. Oblicz:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}}, & \text{b)} \left[(\sqrt{3})^{-\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}}, & \text{c)} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\sqrt{2}} \right]^{1+\sqrt{2}}, \\ \text{d)} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\sqrt{3}} \right]^{1+\sqrt{3}}, & \text{e)} \left[(2\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right]^{-\sqrt{2}}, & \text{f)} \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} \right]^{\sqrt{12}}. \end{array}$$

1.8. Oblicz:

$$\text{a)} \left[(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}}, \quad \text{b)} \left(2^{\sqrt{2}-\sqrt{5}} \right)^{\sqrt{5}+\sqrt{2}}, \quad \text{c)} \left(3^{\sqrt{7}-1} \right)^{\sqrt{7}+1}.$$

1.9. Wykaż, że:

D

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (8 - 2\sqrt{7})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot (8 + 2\sqrt{7})^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6^{\sqrt{2}}, & \text{b)} (12 - \sqrt{19})^{\frac{\sqrt{5}}{3}} \cdot (12 + \sqrt{19})^{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 5^{\sqrt{5}}, \\ \text{c)} \left[(\sqrt{2})^{2\sqrt{2}-2} \right]^{2\sqrt{2}+2} - \left[(\sqrt{5})^{\sqrt{5}+2} \right]^{2\sqrt{5}-4} = -1. \end{array}$$

1.10. Przedstaw w postaci jednej potęgi wyrażenie:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\sqrt{3} \cdot 27^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}, & \text{b)} \left(\frac{32^{\sqrt{2}} \cdot 0,5^{-1}}{8} \right)^{5\sqrt{2}+2}, \\ \text{c)} \left[\frac{(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{3})^3}{36^{\sqrt{2}}} \right]^{1,5+2\sqrt{2}}, & \text{d)} \left[\frac{(\sqrt[4]{10})^2 \cdot (\sqrt[4]{10})^3}{0,01^{\sqrt{5}}} \right]^{1,25-2\sqrt{5}}. \end{array}$$

1.11. Oblicz za pomocą kalkulatora wielofunkcyjnego lub komputera i zapisz wynik z dokładnością do 0,1.

$$\text{a)} \pi^{\pi}, \quad \text{b)} 3^{\sqrt{3}}, \quad \text{c)} 2^{\sqrt{2}}, \quad \text{d)} (\sqrt{5})^{\sqrt{5}}, \quad \text{e)} 5^{\sqrt{5}}.$$

1.12. Wykaż, że jeśli $m = 4^{\sqrt{3}+2}$ i $n = 2^{\sqrt{3}+5}$, to $n = 8\sqrt{m}$.

D

Funkcja wykładnicza i jej własności

Jeżeli a jest liczbą dodatnią ($a > 0$), to każdej liczbie rzeczywistej x ($x \in \mathbb{R}$) możemy przyporządkować potęgę a^x . Określamy w ten sposób funkcję, którą nazywamy wykładniczą.

Definicja

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą oraz a jest liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1.

$$f(x) = a^x, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ i } a \neq 1.$$

Wykresem funkcji wykładniczej jest krzywa wykładnicza o równaniu $y = a^x$.

Przykłady wzorów funkcji wykładniczych:

$$f(x) = 2^x, \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad f(x) = (\sqrt{2})^x, \quad f(x) = 10^x, \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = \pi^x.$$

Przykład 5. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = 2^x$, b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Rozwiązanie

Sporządzamy tabele wartości funkcji f i g dla wybranych argumentów.

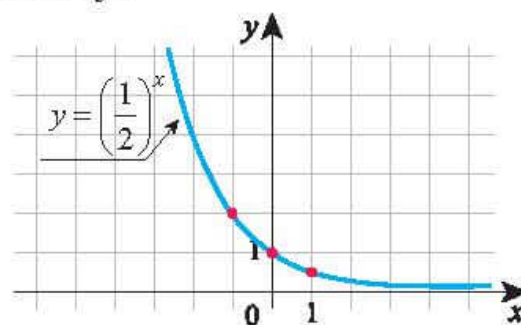
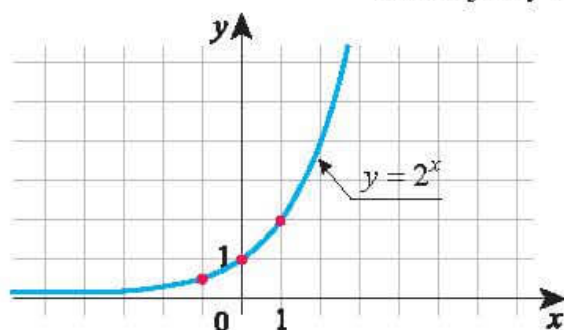
a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Szkicujemy wykresy funkcji.



Do naszkicowania wykresu funkcji wykładniczej wystarczą punkty:

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 1), (1, 2).$$

$$(-1, 2), (0, 1), \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Ćwiczenie 7. Odczytaj z wykresu funkcji **1** $f(x) = 2^x$, **2** $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- przedział, w którym funkcja rośnie (maleje),
- współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią y ,
- miejsca zerowe funkcji, o ile istnieją.

Uwaga

Aby naszkicować wykres funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$,

będziemy zaznaczać punkty o współrzędnych $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$, $(1, a)$.

Ćwiczenie 8. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem: a) $f(x) = 4^x$, b) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Ćwiczenie 9. Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem $f(x) = a^x$ należy punkt A . Podaj wartość a i napisz wzór tej funkcji, gdy:

- $A = (1, 4)$,
- $A = (-1, 5)$,
- $A = (1, 10)$,
- $A = \left(-1, \frac{1}{6}\right)$.

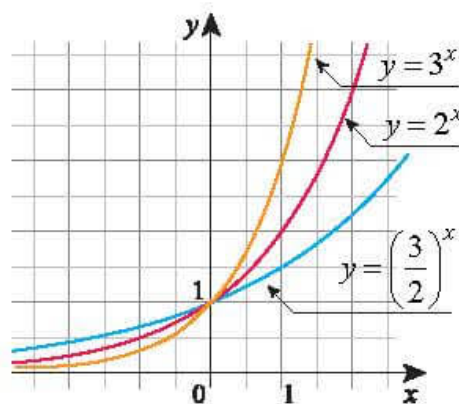
Ćwiczenie 10. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji wykładniczych f , g i h , gdzie:

$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \quad g(x) = 2^x, \quad h(x) = 3^x.$$

- Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią y .

- Czy funkcje f , g i h są rosnące w przedziale $(-\infty; +\infty)$?

- Uzasadnij, że funkcje f , g i h nie mają miejsc zerowych.

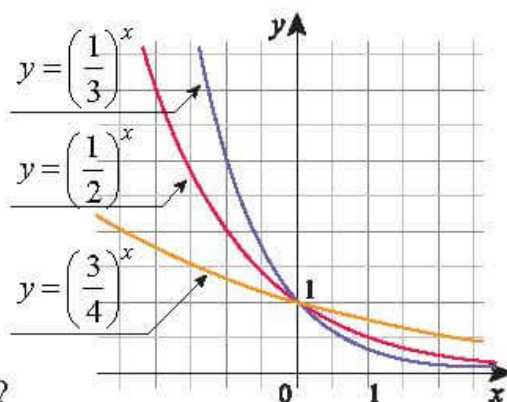


Ćwiczenie 11. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji wykładniczych f , g i h , gdzie:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x.$$

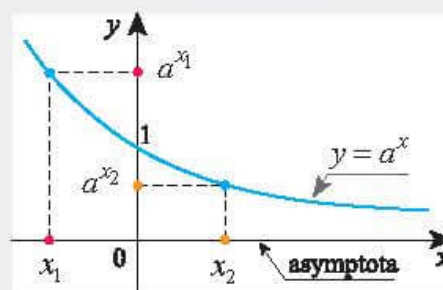
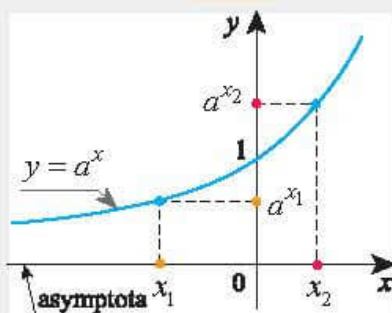
- Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią y .

- Czy funkcje są malejące w przedziale $(-\infty; +\infty)$?



Uwaga

- Zbiorem wartości funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$ jest zbiór $Y_f = \mathbb{R}^+$.
- Funkcja wykładnicza jest:
 - rosnąca, gdy $a > 1$,
 - malejąca, gdy $0 < a < 1$.



Jeżeli $x_1 < x_2$, to

$$a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$a^{x_1} > a^{x_2}$$

- Wykres każdej funkcji wykładniczej o równaniu $y = a^x$ leży nad osią x i przechodzi przez punkt $(0, 1)$. Funkcja wykładnicza nie ma miejsc zerowych.
- Prosta o równaniu $y = 0$ (oś x) jest asymptotą*) poziomą wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$.

Ćwiczenie 12. Spośród wzorów funkcji: $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $f(x) = \frac{1}{4^x}$, $f(x) = (2\sqrt{2})^x$, $f(x) = (0,1)^{-x}$, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, $f(x) = (\log_2 3)^x$ wybierz te, które określają funkcje malejące.

Przykład 6. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej i uporządkuj rosnąco liczby:

a) $2^{3,2}$, $2^{\frac{22}{7}}$, 2^π , b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,(73)}$.

Rozwiązanie

a) Podstawą potęg $2^{3,2}$, $2^{\frac{22}{7}}$, 2^π jest liczba 2.

Funkcja określona wzorem $f(x) = 2^x$ jest rosnąca, więc najmniejszą spośród liczb jest ta, której wykładnik jest najmniejszy.

$$\frac{22}{7} = 3,1428\dots, \quad \pi = 3,1415\dots, \quad \text{więc} \quad \pi < \frac{22}{7} < 3,2.$$

$$\text{Odp: } 2^\pi < 2^{\frac{22}{7}} < 2^{3,2}.$$

*) Asymptota – prosta, do której wykres funkcji się „zbliża” i zbliżając się – nie przecina jej.

b) Podstawą potęg $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,(73)}$ jest liczba $\frac{1}{5}$.

Funkcja określona wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ jest malejąca, więc najmniejszą spośród potęg liczby $\frac{1}{5}$ jest ta, której wykładnik jest największy.

$\sqrt{3} = 1,73205\dots$, $1,(73) = 1,7373\dots$, więc $1,(73) > \sqrt{3} > 1,7$.

Odp.: $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,(73)} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$.

Ćwiczenie 13. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej i uporządkuj malejąco liczby:

a) $3^{1,5}$, $3^{\sqrt{2}}$, $3^{1,4(6)}$, b) $(0,5)^\pi$, $(0,5)^{\frac{10}{3}}$, $(0,5)^{\sqrt{9,83}}$.

Uwaga

Jeżeli $f(x) = a^x$ i $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ oraz:

- $0 < a < 1$ (funkcja wykładnicza jest malejąca), to $a^{x_1} > a^{x_2}$, gdy $x_1 < x_2$,
- $a > 1$ (funkcja wykładnicza jest rosnąca), to $a^{x_1} < a^{x_2}$, gdy $x_1 < x_2$.

Przypomnijmy

Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$, to $a^x = b$, gdy $\log_a b = x$.

Przykład 7. Oblicz, jeśli to możliwe, dla jakiego argumentu x funkcja wykładnicza f określona wzorem $f(x) = 3^x$ przyjmuje wartość równą: a) 27, b) 2, c) -3.

Rozwiązanie

Obliczenie argumentu x , dla którego funkcja $f(x) = 3^x$ przyjmuje określoną wartość, sprowadza się do rozwiązania równania:

a) $f(x) = 27$, czyli $3^x = 27$, więc $3^x = 3^3$, skąd $x = 3$.

b) $f(x) = 2$, czyli $3^x = 2$, więc $x = \log_3 2$.

Korzystamy z definicji logarytmu.

c) $f(x) = -3$, czyli $3^x = -3$.

Dla każdej liczby rzeczywistej x każda funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie ($a^x > 0$), więc równanie $3^x = -3$ nie ma rozwiązania.

Odp.: a) $x = 3$, b) $x = \log_3 2$, c) nie istnieje takie x .

Uwaga

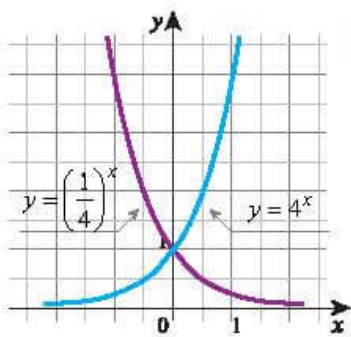
Jeżeli $y = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, to:

- $a^x > 0$
- $x = \log_a y$.

Ćwiczenie 14. Oblicz, jeśli to możliwe, dla jakiego argumentu x funkcja określona wzorem $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość równą:

- a) 32, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{1024}$, d) 1, e) 5, f) 0.

Odpowiedzi do ćwiczeń

7. 1 a) $D_f = \mathbb{R}$, b) $Y_f = \mathbb{R}^+$, c) funkcja f rośnie w przedziale $(-\infty; +\infty)$, d) $(0, 1)$,
 e) funkcja f nie ma miejsc zerowych, 2 a) $D_g = \mathbb{R}$, b) $Y_g = \mathbb{R}^+$,
 c) funkcja g maleje w przedziale $(-\infty; +\infty)$, d) $(0, 1)$, e) funkcja g nie ma miejsc zerowych.
8. 
9. a) $a = 4$, $f(x) = 4^x$, b) $a = \frac{1}{5}$, $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$,
 c) $a = 10$, $f(x) = 10^x$, d) $a = 6$, $f(x) = 6^x$.
10. a) $D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$, $Y_f = Y_g = Y_h = (0; +\infty)$, $(0, 1)$, b) tak.
11. Dla wszystkich funkcji a) $D = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^+$, $(0, 1)$, b) tak.
12. $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $f(x) = \frac{1}{4^x}$.
13. a) $3^{1,5} > 3^{1,4(6)} > 3^{\sqrt{2}}$, b) $(0,5)^{\sqrt{9,83}} > (0,5)^\pi > (0,5)^{\frac{10}{3}}$.
14. a) 5, b) -2, c) -10, d) 0, e) $\log_2 5$, f) nie istnieje takie x .

Zadania utrwalające

1.13. Do wykresu funkcji wykładniczej f należą punkty o podanych współrzędnych x : $(-1, \dots)$, $(0, \dots)$, $(1, \dots)$. Oblicz współrzędną y , zaznacz te punkty na płaszczyźnie kartezjańskiej i naszkicuj wykres funkcji f , gdy:

- a) $f(x) = 4^x$, b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, c) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, d) $f(x) = (0,4)^x$.

1.14. Do wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$ należy punkt P . Podaj wartość a i określ, czy funkcja f jest rosnąca czy malejąca, gdy:

- a) $P = \left(1, \frac{3}{5}\right)$, b) $P = \left(-1, \frac{3}{5}\right)$, c) $P = \left(1, 1\frac{2}{3}\right)$, d) $P = \left(-1, 1\frac{2}{3}\right)$.

1.15. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g , a następnie z wykresów odczytaj rozwiązanie nierówności:

a) $2^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x$, gdy $f(x) = 2^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

b) $3^x \leq 2^x$, gdy $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 2^x$,

c) $4^x > 2^x$, gdy $f(x) = 4^x$ i $g(x) = 2^x$.

1.16. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $3^{-2\sqrt{2}}$, $3^{-\frac{11}{4}}$, 3^0 , $3^{2\pi}$, $\sqrt{3}$,

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{\pi}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$,

c) 6^{-2} , $6^{-\sqrt{6}}$, $6^{\sqrt{6}}$, 6^2 , $6^{-\sqrt{3}}$,

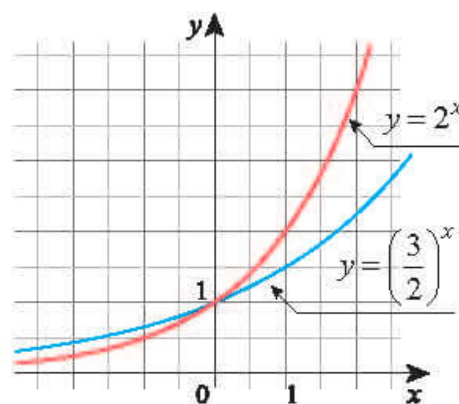
d) $(0,2)^{\frac{1}{2}}$, $(0,2)^{-\frac{1}{2}}$, $(0,2)^{-\sqrt{7}}$, $(0,2)^{-4}$.

1.17. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów

funkcji $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ i $g(x) = 2^x$.

a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią y .

b) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nierówności: **1** $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 2^x$, **2** $\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 2^x$.

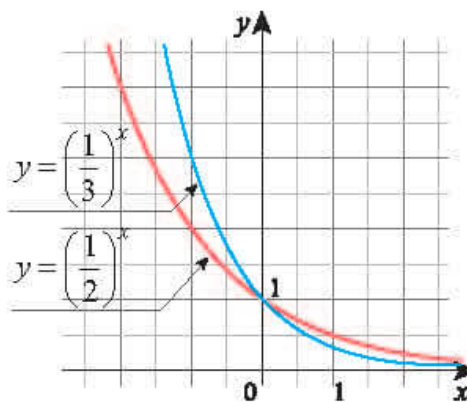


1.18. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów

funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu z osią y .

b) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nierówności: **1** $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^x$, **2** $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



1.19. Oblicz $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, gdy:

a) $f(x) = 2^x$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = \log_2 5$,

b) $f(x) = 3^x$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = 2\log_3 4$,

c) $f(x) = (0,2)^x$, $x_1 = -2$, $x_2 = \log_5 3$, $x_3 = \log_5 \frac{1}{12}$,

d) $f(x) = 4^{-x}$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \log_2 3$, $x_3 = \log_4 7$.

1.20. Oblicz, dla jakiego argumentu x funkcja wykładnicza f przyjmuje wartość równą b , gdy:

a) $f(x) = 2^x$ i $b = 16$,

b) $f(x) = 3^x$ i $b = \frac{1}{81}$,

c) $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ i $b = \frac{64}{27}$,

d) $f(x) = (\sqrt{5})^x$ i $b = 125$,

e) $f(x) = 2^x$ i $b = 24$,

f) $f(x) = 3^x$ i $b = 405$.

1.21. Rozwiąż równanie:

a) $2^x = 2\sqrt{2}$,

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 64$,

c) $(\sqrt{2})^x = \sqrt[3]{2}$,

d) $10^x = 0,0001$,

e) $10^x = \sqrt{0,001}$,

f) $(0,1)^x = 200$.

1.22. Określ, dla jakich wartości parametru m ma rozwiązanie równanie:

a) $3^x = m$,

b) $4^x = m - 1$,

c) $5^x = 2 - m$,

d) $2^x + 3 = m$,

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 = m$,

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = |m|$.

Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej

Przypomnijmy

Wykres funkcji g otrzymujemy z przekształcenia wykresu funkcji f :

• w symetrii względem osi x , gdy	• w symetrii względem osi y , gdy	• w przesunięciu równoległe do osi x o p jednostek ($p > 0$), gdy	• w przesunięciu równoległe do osi y o q jednostek ($q > 0$), gdy
$g(x) = -f(x)$	$g(x) = f(-x)$	$g(x) = f(x \pm p)$	$g(x) = f(x) \pm q$

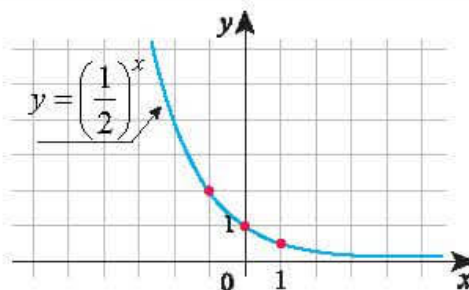
Przykład 8. Na rysunku przedstawiony jest wykres

funkcji f określonej wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Naszkicuj wykres funkcji g , gdy:

a) $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$, b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$,

c) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$, d) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$.

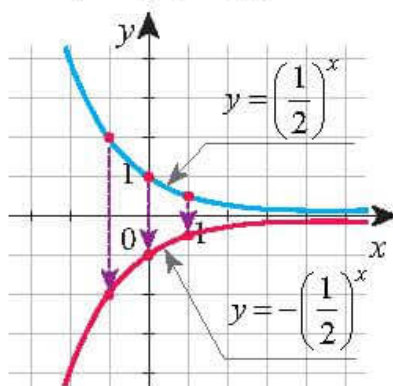


Rozwiązanie

a) Zapis $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ oznacza,

że $g(x) = -f(x)$.

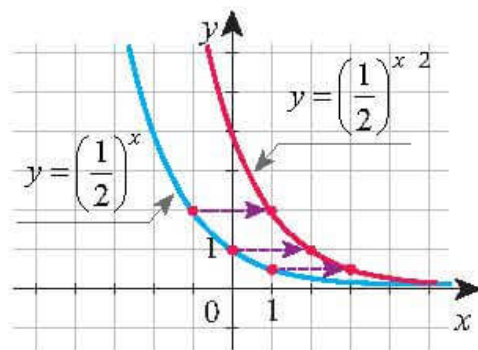
Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi x .



c) Zapis $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ oznacza, że

$g(x) = f(x-2)$.

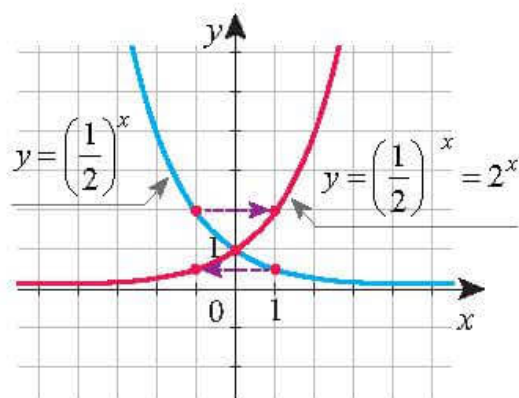
Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji f równolegle do osi x o 2 jednostki w prawo.



b) Zapis $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ oznacza,

że $g(x) = f(-x)$.

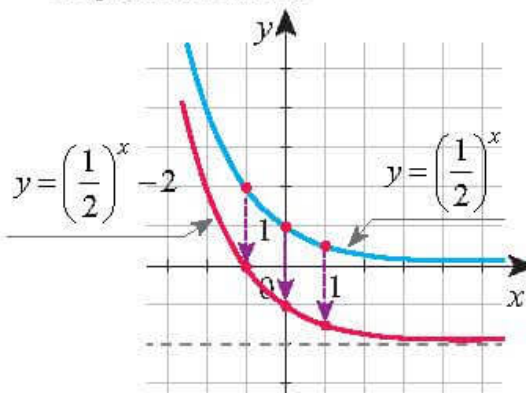
Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y .



d) Zapis $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ oznacza,

że $g(x) = f(x) - 2$.

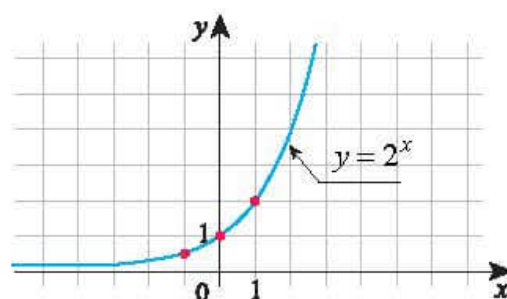
Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji f równolegle do osi y o 2 jednostki w dół.





Ćwiczenie 15. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = 2^x$. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji g , gdy:

- a) $g(x) = 2^{-x}$, b) $g(x) = -2^x$,
c) $g(x) = 2^x + 3$, d) $g(x) = 2^{x+1}$.



Przykład 9. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g określonych

wzorami $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ i $g(x) = 2^{x+3}$.

Rozwiązanie

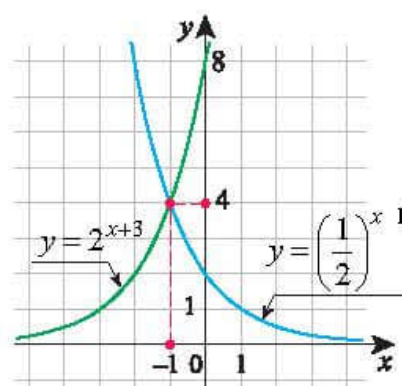
Aby obliczyć współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g , należy rozwiązać równanie $f(x) = g(x)$, którego rozwiązaniem jest odcięta x punktu przecięcia się wykresów.

$$f(x) = g(x), \text{ gdy } \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^{x+3}, \text{ skąd}$$

$$2^{-(x-1)} = 2^{x+3}$$

$$-(x-1) = x+3$$

$$x = -1.$$



$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$a^x = a^y$, gdy $x = y$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$

Rzędna y punktu przecięcia obliczamy, podstawiając do wzoru funkcji f lub g w miejsce x liczbę -1 . Zatem $y = g(-1) = 2^{-1+3} = 2^2 = 4$.

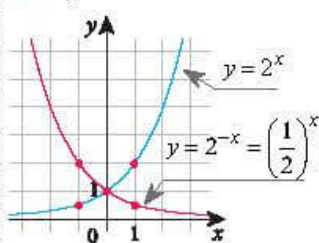
Odp.: Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie o współrzędnych $(-1, 4)$.

Ćwiczenie 16. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g , gdy:

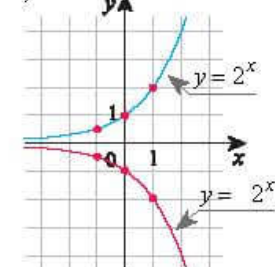
- a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$ i $g(x) = 3^{x+1}$, b) $f(x) = \left(1\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ i $g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

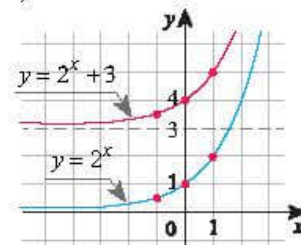
15. a)



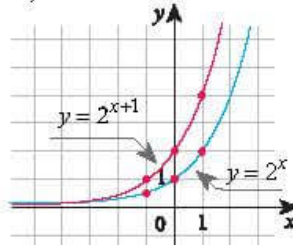
b)



c)



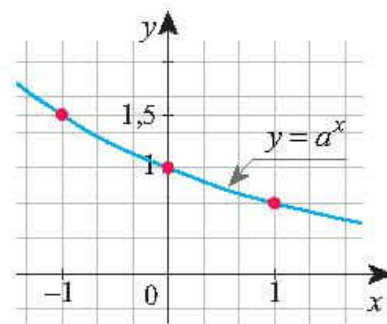
d)



16. a) $(1, 9)$, b) $\left(1, 2\frac{7}{9}\right)$.

Zadania utrwalające

1.23. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$.



- Podaj wartość a .
- Narysuj wykres funkcji g , gdy $g(x) = f(-x)$.
- Narysuj wykres funkcji h , gdy $h(x) = f(x-2)$.

1.24. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = (1,5)^x$, a następnie narysuj wykres funkcji g i podaj jej zbiór wartości, gdy:

- $g(x) = -f(x)$,
- $g(x) = f(x) - 1$.

1.25. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 4^x$. Narysuj wykres funkcji g i ustal, czy funkcja g jest rosnąca czy malejąca, gdy:

- $g(x) = -4^x$,
- $g(x) = 4^{-x}$,
- $g(x) = 4^{x-1}$,
- $g(x) = 4^x + 2$.

1.26. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 2^x - 4$.

- Narysuj wykres funkcji f .
- Czy funkcja f jest malejąca?
- Podaj miejsce zerowe funkcji f .
- Podaj argument x , dla którego $f(x) = -2$.

1.27. Narysuj wykres funkcji f i podaj wartość $f(0)$, gdy:

- $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$,
- $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^x}$,
- $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$,
- $f(x) = 8 \cdot \frac{1}{2^x}$,
- $f(x) = 16 \cdot 2^x$,
- $f(x) = \frac{2}{3} \cdot (1,5)^x$.

1.28. Wykres funkcji g otrzymano, przekształcając wykres funkcji f . Opisz to przekształcenie, gdy:

- $f(x) = (0,75)^x$ i $g(x) = \left(1\frac{1}{3}\right)^x$,
- $f(x) = \frac{1}{5^x}$ i $g(x) = 5^x$,
- $f(x) = (2,5)^x$ i $g(x) = (0,4)^x$,
- $f(x) = 49 \cdot 7^x$ i $g(x) = 7^x$,
- $f(x) = 9^{x-3}$ i $g(x) = 9^{x+3}$,
- $f(x) = (0,1)^x - 2$ i $g(x) = (0,1)^x - 6$.

1.29. Podaj współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g , gdy:

- a) $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 4^x$, b) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ i $g(x) = (0,1)^x$,
 c) $f(x) = 1024^x$ i $g(x) = (0,01)^x$, d) $f(x) = (\sqrt{2})^x$ i $g(x) = (\sqrt{3})^x$.

1.30. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g , gdy:

- a) $f(x) = 2^{x+4}$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$, b) $f(x) = 3^{x-3}$ i $g(x) = 3 \cdot \frac{1}{3^x}$,
 c) $f(x) = 5^{x-1}$ i $g(x) = 125 \cdot \frac{1}{5^x}$, d) $f(x) = 0,1 \cdot 10^{x+1}$ i $g(x) = 0,01 \cdot \frac{1}{10^x}$.

1.31. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g , a następnie odczytaj argument x , dla którego obie funkcje mają tę samą wartość, gdy:

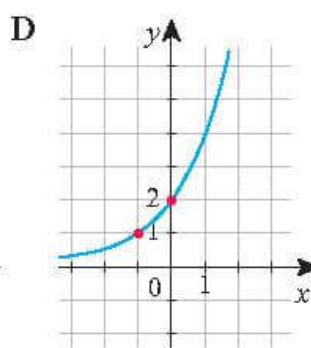
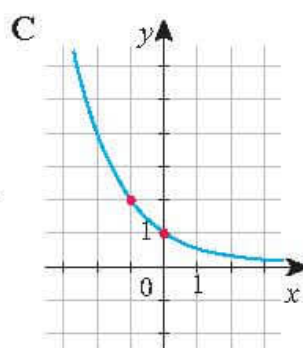
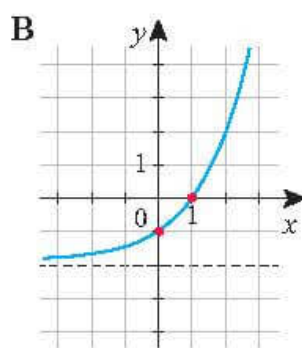
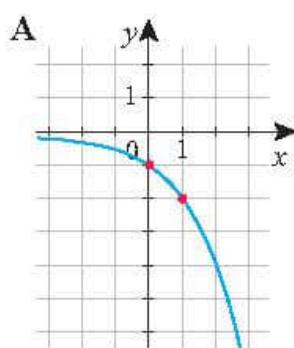
- a) $f(x) = 4^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$, b) $f(x) = 9^{x+1}$ i $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$,
 c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$ i $g(x) = 2^{-x}$, d) $f(x) = 8^{x+2}$ i $g(x) = 4^{x+3}$.

1.32. Oblicz argument x , dla którego funkcje f i g przyjmują tę samą wartość, gdy:

- a) $f(x) = 4^x$ i $g(x) = 8^x$, b) $f(x) = 9^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$,
 c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ i $g(x) = 4^{x+1}$, d) $f(x) = 16^{x+5}$ i $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$.

1.33. Do każdego wzoru oznaczonego cyfrą od **1** do **4** dobierz wykres funkcji oznaczony literą A, B, C lub D, który otrzymano, przekształcając wykres funkcji o równaniu $y = 2^x$.

1 $y = 2^{-x}$, **2** $y = 2^{x+1}$, **3** $y = 2^x - 2$, **4** $y = -2^x$.



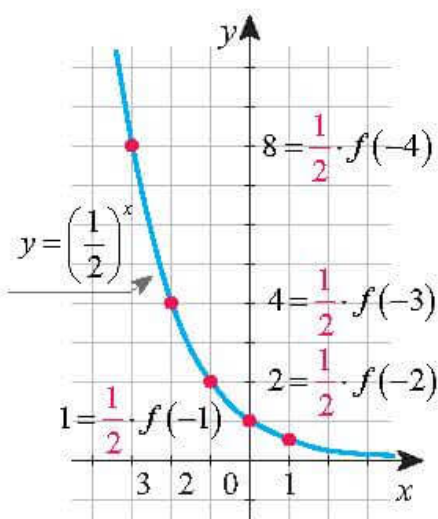
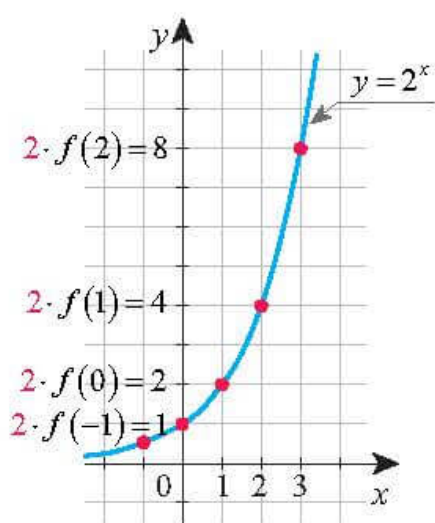
Funkcja wykładnicza w zastosowaniach

Obserwując określone zjawisko zachodzące w przyrodzie lub społeczeństwie, bada się jego proces zmian w jednostkach czasu (np. co sekundę, co miesiąc, co rok itp.) i szuka się jakiejś prawidłowości, którą można określić wzorem matematycznym.

Badacze zauważyli, iż wiele procesów zmienia się wykładniczo. Z własności funkcji wykładniczej wynika, że jeśli:

$$f(x) = a^x, \text{ to } \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{a^{x+1}}{a^x} = a, \text{ więc } f(x+1) = a \cdot f(x).$$

Zatem funkcja wykładnicza ma tę szczególną własność, że na równych odcinkach rośnie (maleje) tyle samo razy.



$$\dots \xrightarrow{\cdot 2} f(-1) \xrightarrow{\cdot 2} f(0) \xrightarrow{\cdot 2} f(1) \xrightarrow{\cdot 2} f(2) \dots \quad \bigg| \quad \dots f(-4) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} f(-3) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} f(-2) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} f(-1) \dots$$

Uwaga

Zmiany są wykładnicze, gdy w każdej jednostce czasu wartość zmiany rośnie (maleje) tyle samo razy.

Wykładniczy proces zmiany opisuje funkcja określona wzorem:

$$y = f(t) = y_0 \cdot a^t$$

t – czas, jaki upłynął od momentu rozpoczęcia obserwacji, czyli czasu $t_0 = 0$

a – stała wielokrotność zmiany, więc $a^{t_0} = 1$

y_0 – wartość początkowa obserwowanego zjawiska

Jeżeli $y = f(t)$, to $f(t) = f(t_0) \cdot a^t$, gdzie $f(t_0)$ jest wartością początkową obserwowanego zjawiska, a t_0 jest momentem rozpoczęcia obserwacji. Obserwując proces zmiany zjawiska w czasie, staramy się ustalić wartość a we wzorze $f(t) = f(t_0) \cdot a^t$.

Uwaga

Jeżeli w ciągu określonej jednostki czasu t nastąpiło:

- podwojenie wartości początkowej $f(t_0)$, to $a = 2$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot 2^t,$$

- zmniejszenie o połowę wartości początkowej $f(t_0)$, to $a = \frac{1}{2}$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

- zmniejszenie o jedną trzecią wartości początkowej $f(t_0)$, to $a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t,$$

- zwiększenie o 6% wartości początkowej $f(t_0)$, to $a = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot (1,06)^t,$$

- zmniejszenie o 10% wartości początkowej $f(t_0)$, to $a = 1 - \frac{10}{100} = 0,9$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot (0,9)^t.$$

Ćwiczenie 17. Ustal wartość a i napisz wzór określający zmianę w postaci $f(t) = f(t_0) \cdot a^t$, jeżeli w ciągu określonej jednostki czasu t nastąpiło:

- potrojenie wartości początkowej $f(t_0)$,
- trzykrotne zmniejszenie wartości początkowej $f(t_0)$,
- zwiększenie o 75% wartości początkowej $f(t_0)$,
- zmniejszenie o 3% wartości początkowej $f(t_0)$.

Ćwiczenie 18. Podaj wartość początkową obserwowanego zjawiska i określ, jaka następuje zmiana w jednostce czasu, jeżeli zmianę tę opisuje wzór:

- $f(t) = 20 \cdot (0,2)^t$,
- $f(t) = 3000 \cdot (1,04)^t$,
- $f(t) = 1000 \cdot (0,92)^t$,
- $f(t) = 1200 \cdot 4^t$.

Przykład 10. Pracownicy dziekanatu zauważyli, że liczba studentów pewnej uczelni w ciągu ostatnich dziesięciu lat powiększała się co roku o 5%. Zakładając, że proces ten w następnych latach nie ulegnie zmianie oraz że obecnie na uczelni studiuje 3000 osób:

- a) napisz wzór wyrażający zależność liczby studentów uczelni od liczonego w latach czasu t ,
- b) oblicz, ilu studentów może być na uczelni za 10 lat.

Rozwiązanie

a) Zauważmy, że liczba studentów uczelni po upływie:

- roku to $3000 + 0,05 \cdot 3000 = 3000(1 + 0,05) =$
 $= 3000 \cdot 1,05,$
- dwóch lat to $3000 \cdot 1,05 + 0,05 \cdot 3000 \cdot 1,05 = 3000 \cdot 1,05(1 + 0,05) =$
 $= 3000 \cdot (1,05)^2.$

Wzór określający liczbę studentów uczelni ma postać $f(t) = 3000(1,05)^t$.

- b) $f(10) = 3000 \cdot (1,05)^{10}$
 $(1,05)^{10} \approx 1,628895$, więc $f(10) \approx 4887$.

Odp.: a) $f(t) = 3000(1,05)^t$, b) 4887.

Ćwiczenie 19. Zaobserwowano, że liczba ryb w stawie w ciągu 5 lat powiększała się co roku o 2%. Zakładając, że proces ten w następnych latach nie ulegnie zmianie oraz że obecnie w stawie jest 1200 ryb:

- a) napisz wzór wyrażający zależność liczby ryb w stawie od liczonego w latach czasu t ,
- b) oblicz, ile ryb może być w tym stawie za 5 lat.

Przykład 11. Populacja pewnego małego miasteczka wzrasta wykładniczo. Planiści potrzebują modelu pozwalającego przewidzieć liczbę mieszkańców tego miasteczka w dowolnym momencie w przyszłości. Wiadomo, że w 2016 roku miasteczko liczyło 10 000 mieszkańców, a dwa lata później 10 201.

- a) Zbuduj model matematyczny opisujący wzrost liczby mieszkańców miasteczka.
- b) Sprawdź poprawność zbudowanego modelu, korzystając z faktu, że w 2020 roku miasteczko liczyło 10 406 mieszkańców.
- c) Oblicz, ilu mieszkańców może być w 2026 roku w tym miasteczku.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że $f(t) = y_0 \cdot a^t$ jest wzorem funkcji opisującej zmianę mierzoną w latach t liczby mieszkańców miasteczka od roku 2016.

Zatem $f(t) = 10\,000 a^t$, gdzie $a > 0$.

a) Obliczamy wartość a z warunku

$$f(2) = 10\,201, \text{ więc } 10\,000 a^2 = 10\,201$$

$$a^2 = 1,0201.$$

$$a = 1,01.$$

$$a = 2$$

$$a = \sqrt{1,0201}$$

b) Sprawdzamy, czy spełniona jest równość $f(4) = 10\,406$.

$$(1,01)^4 = 1,04060401, \text{ więc}$$

$$f(4) = 10\,000 \cdot 1,04060401 = 10\,406,0401, \text{ czyli } f(4) \approx 10\,406.$$

c) $f(10) = 10\,000 \cdot (1,01)^{10}$, czyli $f(10) \approx 10\,000 \cdot 1,10462212539$, więc

$$f(10) \approx 11\,046.$$

Odp.: a) $f(t) = 10\,000 \cdot (1,01)^t$, b) model jest poprawny, c) 11 046.

Ćwiczenie 20. Populacja pewnego miasteczka wzrasta wykładniczo. Wiadomo, że w 2013 roku miasteczko liczyło 12 500 mieszkańców, a dwa lata później 13 520.

a) Zbuduj model matematyczny opisujący wzrost liczby mieszkańców miasteczka.

b) Oblicz, ilu mieszkańców może być w 2023 roku w tym miasteczku.

Uwaga

Zmianę wykładniczą zjawiska, o wartości początkowej y_0 , która następuje ze stałą wielokrotnością a razy w każdym z okresów r czasu t , można opisać wzorem

$$y = y_0 \cdot a^{\frac{t}{r}} \text{ lub } f(t) = f(t_0) \cdot a^{\frac{t}{r}}.$$

Przykłady wzorów stosowanych w różnych dziedzinach wiedzy.

- $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie:
 - $m(t)$ – masa pierwiastka promieniotwórczego po upływie czasu t ,
 - T – okres połowicznego rozpadu pierwiastka mierzony w tych samych jednostkach co czas t ,
 - m_0 – masa początkowa pierwiastka promieniotwórczego.

- $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$, gdzie:
 - N – liczba osobników populacji po upływie t lat,
 - N_0 – początkowa liczba osobników populacji,
 - k – stała, charakteryzująca daną populację,
 - $e = 2,718281828\dots$

Przykład 12. Każdy pierwiastek radioaktywny rozpada się z właściwą sobie prędkością. Czas, w którym rozpadnie się połowa atomów, nazywamy okresem połowicznego rozpadu tego pierwiastka. Chemicy ustalili, że pewna odmiana bizmutu ^{214}Bi ma okres połowicznego rozpadu równy 20 minutom. Próbkę radioaktywnego bizmutu, którą obserwujesz, waży 1024 gramy.

- a) Zbuduj model matematyczny opisujący zmianę ilości radioaktywnego bizmutu w czasie.
- b) Po ilu godzinach obserwacji pozostanie tylko 1 gram radioaktywnego bizmutu?

Rozwiązanie

- a) Przyjmujemy za jednostkę czasu t godzinę. 20 minut to $\frac{1}{3}$ godziny, więc w ciągu jednej godziny nastąpią 3 rozpady połowiczne atomów bizmutu. Zatem masę m bizmutu po upływie t godzin można określić wzorem

$$m(t) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t \cdot \frac{1}{3}}, \text{ czyli}$$

$$m_0 = 1024, \quad a = \frac{1}{2}$$

$$m(t) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}.$$

- b) $m(t) = 1$, czyli $1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t} = 1 \quad / : 1024$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3t} = \frac{1}{1024}$$

$$1024 = 2^{10}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3t} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$3t = 10$$

$$t = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

Odp.: a) $m(t) = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, b) po 3 godzinach i 20 minutach.

Ćwiczenie 21. Okres połowicznego rozpadu jodu ^{131}J jest równy 8 dniom. Wiedząc, że pewna próbka zawiera 120 g tego jodu, oblicz:

- masę ^{131}J po upływie 24 dni,
- liczbę dni, po których masa ^{131}J będzie równa 3,75 g.

W rozważaniach teoretycznych i praktycznych zastosowaniach matematyki wyższej bardzo dużą rolę odgrywają logarytmy, których podstawą jest liczba $e^{*)}$, czyli logarytmy naturalne. Symbolem takiego logarytmu jest $\ln$, tzn. $\ln x = \log_e x$.

Przykład 13. Na pustynną wyspę wpuszczono króliki, których liczebność N populacji wzrasta w czasie t miesięcy zgodnie z zależnością $N(t) = 20 \cdot e^{0,1t}$. Oblicz (podaj):

- liczbę królików wypuszczonych na wyspę,
- liczbę królików po upływie 20 miesięcy,
- liczbę miesięcy potrzebną na podwojenie się populacji królików.

W obliczeniach przyjmij $e \approx 2,72$, $e^2 \approx 7,4$, $\ln 2 \approx 0,7$.

Rozwiązanie

a) Z zależności $N(t) = 20 \cdot e^{0,1t}$ odczytujemy, że na wyspę wypuszczono 20 królików.

b) $N(20) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot 20} = 20 \cdot e^2$, skąd
 $N(20) = 148$.

c) $N(t) = 2 \cdot 20$, więc $20 \cdot e^{0,1t} = 40 \quad / : 20$ $e^a = b$, więc $a = \log_e b$
 $e^{0,1t} = 2$ $\log_e 2 = \ln 2$
 $0,1t = \log_e 2 \quad / \cdot 10$
 $t = 10 \cdot \ln 2$
 $t = 10 \cdot 0,7$, skąd $t = 7$.

Odp.: a) 20 królików, b) 148 królików, c) 7 miesięcy.

Ćwiczenie 22. Wzrost populacji P (w milionach osób) pewnego kraju od 2010 roku określa zależność $P(t) = 18 \cdot e^{0,05t}$. Oblicz (podaj):

- liczbę ludności (w milionach) tego kraju w 2010 roku,
- prognozowaną liczbę ludności (w milionach) tego kraju w 2030 roku.

W obliczeniach przyjmij $e \approx 2,7$.

*) e – stała Nepera, $e = 2,718281828\dots$

Odpowiedzi do ćwiczeń

17. Zauważ, że $t_0 = 0$. a) $f(t) = f(t_0) \cdot 3^t$, b) $f(t) = f(t_0) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$, c) $f(t) = f(t_0) \cdot (1,75)^t$,
 d) $f(t) = f(t_0) \cdot (0,97)^t$. 18. a) 20 i pięciokrotne zmniejszenie, b) 3000 i zwiększenie o 4%,
 c) 1000 i zmniejszenie o 8%, d) 1200 i czterokrotne zwiększenie.
 19. a) $f(t) = 1200 \cdot (1,02)^t$, b) około 1325 ryb. 20. a) $f(t) = 12\,500 \cdot (1,04)^t$, b) około 18 503.
 21. a) 15 g, b) 40 dni. 22. a) 18 milionów, b) 48,6 milionów.

Zadania utrwalające

1.34. Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednie wielkości.

Nazwa towaru	Obecna cena	Wskaźnik rocznego wzrostu ceny	Cena po t latach
prześcieradło	29 zł	2%	■
samochód	32 000 zł	10%	■
zyrandol	■	■	$270 \cdot (1,07)^t$

1.35. Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednie wielkości.

Obecna wielkość populacji	Czas podwojenia populacji	Wartość populacji po t latach
1 000	10 lat	■
1 000 000	25 lat	■
■	■	$250\,000 \cdot 2^{0,01t}$

1.36. Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednie wielkości.

Pierwiastek promieniotwórczy	Czas połowicznego rozpadu	Obecna ilość materiału radioaktywnego	Wielkość materiału radioaktywnego po czasie t
ołów: ^{210}Pb	■	■	$10 \cdot (0,5)^{\frac{t}{22}} \text{ lat}$
polon: ^{210}Po	■	■	$100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{140}} \text{ dni}$
tal: ^{209}Tl	■	■	$500 \cdot (0,5)^{0,5t} \text{ minut}$

- 1.37. Na początku obserwacji kolonia bakterii liczyła 100 osobników. Bakterie te rozmnażają się przez podział komórki i liczebność ich populacji wzrasta wykładniczo w pierwszych 24 godzinach obserwacji. Wiedząc, że kolonia bakterii podwaja swoją liczebność w ciągu 30 minut, oblicz, ile bakterii będzie liczyła po upływie:
- a) godziny, b) 5 godzin, c) doby.
- 1.38. Liczba bakterii w pewnej kolonii powiększa się co godzinę o 25%. Kolonia ta o godzinie 15⁰⁰ liczyła 1 000 000 komórek.
- a) Napisz wzór opisujący liczbę bakterii kolonii w zależności od czasu t .
b) Oblicz, ile bakterii będzie liczyła kolonia o godzinie 18⁰⁰.
- 1.39. Liczebność populacji żuków wzrasta w ciągu miesiąca o 5%. Wiedząc, że na początku było 10 000 żuków, oblicz:
- a) liczebność populacji żuków po 3 miesiącach,
b) liczbę miesięcy, po upływie których będzie 11 025 żuków.
- 1.40. Wartość samochodu maleje w taki sposób, że kiedy ma on t lat, jego wartość W określona jest wzorem $W(t) = 30\,000 \cdot (0,9)^t$.
- a) Podaj wartość początkową samochodu.
b) O ile procent rocznie maleje cena tego samochodu?
c) Podaj cenę tego samochodu po upływie dwóch lat.
d) Po ilu latach samochód ten będzie wart 19 683 zł?
- 1.41. Podgrzewany garnek z zupą gospodarz zdejmuję z palnika i odstawia. Temperatura T garnka, wyrażona w stopniach Celsjusza, jest w procesie stygnięcia opisana wzorem $T(t) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{10}}$, gdzie czas t mierzony jest w minutach.
- a) Podaj temperaturę garnka zaraz po zdjęciu z palnika.
b) Oblicz temperaturę garnka po upływie 10 minut.
c) Czy po 30 minutach można podnieść garnek gołymi rękoma, nie dotykając uchwytów?



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\left(4^{1-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}+1}$ jest równa:

- A. -4 , B. $\frac{1}{4}$, C. 4 , D. 16 .

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartością wyrażenia $\left[(\sqrt[3]{2})^{\sqrt[3]{54}} \right]^{\sqrt[3]{4}}$ jest liczba:

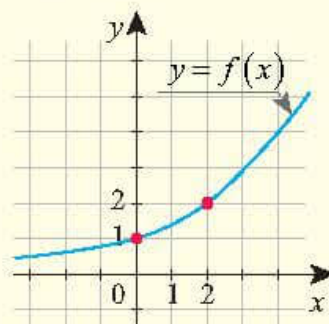
- A. 2, B. 4, C. 6, D. 8.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$.

Wynika z tego, że:

- A. $a = \sqrt{2}$, B. $a = 2$, C. $a = \frac{1}{2}$, D. $a = \sqrt{3}$.

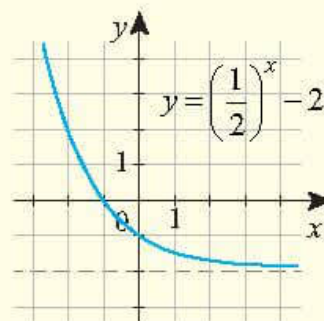


4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji określonej

wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$. Prawdą jest, że:

- A. funkcja f nie ma miejsca zerowego,
 B. $Y_f = \langle -2; +\infty \rangle$,
 C. do wykresu funkcji f nie należy punkt $(-1, 0)$,
 D. funkcja f jest funkcją malejącą.



5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$ należy punkt

$A = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$. Punkt B należy do tego wykresu, gdy:

- A. $B = \left(2, \frac{5}{2}\right)$, B. $B = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, C. $B = \left(-2, \frac{4}{9}\right)$, D. $B = \left(0, \frac{3}{2}\right)$.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Funkcje $f(x) = 2^x$ i $g(x) = a$ mają jeden punkt wspólny, gdy:

- A. $a = 0$, B. $a > 0$, C. $a < 0$, D. $a \leq 0$.

7. Funkcja wykładnicza f określona jest wzorem $f(x) = a^x$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli $a = 5$, to $f(x) = 4$, gdy $x = \log_5 4$.	P	F
Jeżeli $a = 3$, to $f(x) = \frac{1}{27}$, gdy $x = -3$.	P	F
$a^5 > a^4$, gdy $a > 1$.	P	F
$a^3 > a^7$, gdy $a > 1$.	P	F

8. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Jeżeli $g(x) = 2^{x+3}$ i $f(x) = 2^x$, to wykres funkcji g można otrzymać, przesuwając wykres funkcji f wzdłuż osi x o 3 jednostki w prawo.	P	F
Jeżeli $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = 2^x$, to wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi y .	P	F
Jeżeli $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ i $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, to wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi x .	P	F

9. Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = \frac{64^{\frac{x}{3}}}{4^x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Czy funkcja g jest funkcją wykładniczą?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$g(x) = \frac{64^{\frac{x}{3}}}{4^x} = \frac{\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^x}{4^x} = \left(\frac{\sqrt[3]{64}}{4}\right)^x$, zatem funkcja g nie jest funkcją wykładniczą.
N	Nie,		B.	$g(x) = \frac{64^{\frac{x}{3}}}{4^x} = \frac{\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^x}{4^x} = \left(\frac{\sqrt[3]{64}}{4}\right)^x$, zatem funkcja g jest funkcją wykładniczą.

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm i jego własności

Przypomnijmy

$$\begin{array}{c} \text{liczba logarytmowana} \\ b > 0 \\ \log_a b = c \\ \text{podstawa logarytmu} \\ a > 0 \text{ i } a \neq 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{logarytm} \\ c \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$$

- Logarytm przy podstawie 10 nazywany **logarytmem dziesiętnym**, zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$ lub $\lg b$.
- Logarytm przy podstawie e (gdzie $e = 2,718281828\dots$) nazywamy **logarytmem naturalnym**, zamiast $\log_e b$ piszemy $\ln b$.

Bezpośrednio z definicji logarytmu i własności potęg, przeprowadzając dowód nie wprost, można udowodnić, że $\log_2 5$ jest liczbą niewymierną należącą do przedziału $(2; 3)$.

Dowód nie wprost

Zakładamy, że $\log_2 5$ jest liczbą wymierną, czyli że

$$\log_2 5 = \frac{m}{n}, \text{ gdzie } m \in \mathbb{N}^+, n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\} \text{ i } \text{NWD}(m, n) = 1. \quad \frac{m}{n} - \text{ułamek nieskracalny.}$$

$$\log_2 5 = \frac{m}{n}, \text{ więc } 5 = 2^{\frac{m}{n}}$$

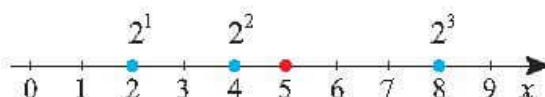
Korzystamy z definicji logarytmu.

$$5^n = \left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n$$

Obustronnie podnosimy równość do potęgi n .

$$5^n = 2^m.$$

$$\begin{aligned} 2^2 &< 5 < 2^3 \\ \log_2 2^2 &< \log_2 5 < \log_2 2^3 \\ 2 &< \log_2 5 < 3 \end{aligned}$$



Równość $5^n = 2^m$ jest fałszywa, bo każda dodatnia naturalna potęga liczby 5 jest liczbą nieparzystą, a potęga liczby 2 – liczbą parzystą.

Liczba $\log_2 5$ należy do przedziału $(2; 3)$ i nie jest liczbą wymierną. **c.k.d.**

Ćwiczenie 1. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz:

a) $\log_2 \frac{1}{8}$, b) $\log 100$, c) $\log_{\frac{1}{3}} 9$, d) $\log_{\sqrt{2}} 4$, e) $\ln e$.

Ćwiczenie 2. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz x , gdy:

a) $\log_x 8 = 2$, b) $\log_x \frac{1}{2} = -1$, c) $\log_x 16 = 2$,
d) $\log_x 5 = -1$, e) $\log_x 1000 = 3$, f) $\log_x 16 = -2$.

Ćwiczenie 3. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz x , gdy:

a) $\log_2 x = -2$, b) $\log_3 x = 3$, c) $\log_5 x = -2$,
d) $\log_3 x = 0$, e) $\ln x = 1$, f) $\ln x = 2$.

Liczbą logarytmowaną może być również wyrażenie zawierające logarytm. Sposób obliczania wartości takiego wyrażenia pokażemy na przykładach.

Przykład 1. Oblicz: a) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_2 (\log 10\,000)]$, b) x , gdy $2 \cdot \log_2 (1 + \log_3 x) = 4$.

Rozwiązanie

a) $\log_{\frac{1}{2}} [\log_2 (\log 10\,000)] = \log_{\frac{1}{2}} [\log_2 4] = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$.

obliczamy w pierwszej kolejności

obliczamy wartość

b) $2 \cdot \log_2 (1 + \log_3 x) = 4 \quad / : 2$

$\log_2 (1 + \log_3 x) = 2$

liczba logarytmowana

$1 + \log_3 x = 2^2$

$\log_3 x = 3$

$x = 27$.

Korzystamy z definicji logarytmu.

Odp.: a) -1 , b) $x = 27$.

Ćwiczenie 4. Oblicz:

a) $\log_6 [5 + \log_5 (\log_3 243)]$, b) x , gdy $2 \log_3 [1 + \log_2 x] = 2$.

Przypomnijmy

W klasie pierwszej poznaliście własności logarytmu wynikające bezpośrednio z definicji.

Jeżeli a jest liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1 oraz b liczbą rzeczywistą dodatnią, to:

$$\begin{aligned} &\bullet \log_a 1 = 0 & \bullet \log_a a = 1 & \bullet \log_a a^k = k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{R} \\ &\bullet a^{\log_a b} = b & \bullet \log_{a^p} a^k = \frac{k}{p}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R} \text{ i } p \neq 0 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5. Oblicz:

a) $\log_{2\sqrt{2}} 1$, b) $\log_{0,5} 2^{-1}$, c) $\log_7 343$, d) $6^{\log_6 3}$.

Przykład 2. Oblicz:

a) $16^{\log_2 3}$, b) $\log_{\frac{1}{8}} 16$.

Rozwiązanie

a) $16^{\log_2 3} = (2^4)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^4 = 3^4 = 81$.

$$a^{\log_a b} = b$$

b) $\log_{\frac{1}{8}} 16 = \log_{2^{-3}} 2^4 = \frac{4}{-3}$.

$$\log_{a^p} a^k = \frac{k}{p}$$

Odp.: a) 81, b) $-\frac{4}{3}$.

Ćwiczenie 6. Oblicz: a) $27^{\log_3 2}$, b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$, c) $\log_{25} 0,2$.

Przypomnijmy

Pojęcie logarytmu jest związane z pojęciem potęgi, więc z praw działań na potęgach wynikają prawa działań na logarytmach.

Jeśli a , b i c są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$, to:

• $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, *logarytm iloczynu*

• $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, *logarytm ilorazu*

• $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$, gdy $m \in \mathbb{R}$. *logarytm potęgi*

Ćwiczenie 7. Oblicz:

a) $\log_6 18 + \log_6 2$, b) $\log_3 108 - \log_3 4$.

Przykład 3. Oblicz: a) $\log_2 10 + \log_2 80 - \log_2 200$, b) $\frac{\log_5 81}{\log_5 27}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_2 10 + \log_2 80 - \log_2 200 &= \log_2 \frac{10 \cdot 80}{200} = \\ &= \log_2 4 = 2. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{\log_5 81}{\log_5 27} = \frac{\log_5 3^4}{\log_5 3^3} = \frac{4 \cdot \log_5 3}{3 \cdot \log_5 3} = \frac{4}{3}.$$

Odp.: a) 2, b) $\frac{4}{3}$.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c),$$

$$\log_a b \quad \log_a c = \log_a \frac{b}{c}.$$

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

Ćwiczenie 8. Oblicz:

a) $\log_4 20 + \log_4 60 - \log_4 2400$, b) $\frac{\log_4 125}{\log_4 5}$.

Przykład 4. Wykaż, że $2^{1+\log_2 3} = 6$.

Rozwiązanie

$$\underbrace{2^{1+\log_2 3}}_L = \underbrace{6}_P$$

L – lewa strona P – prawa strona

$$L = 2^1 \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6. \quad \text{Zatem } L = P.$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,$$

gdzie $m = 1$ i $n = \log_2 3$.

Ćwiczenie 9. Wykaż, że:

a) $3^{1+\log_3 5} = 15$, b) $4^{2+\log_4 10} = 160$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) -3, b) 2, c) -2, d) 4, e) 1. 2. a) $x = 2\sqrt{2}$, b) $x = 2$, c) $x = 4$, d) $x = \frac{1}{5}$, e) $x = 10$, f) $x = \frac{1}{4}$.

3. a) $x = \frac{1}{4}$, b) $x = 27$, c) $x = \frac{1}{25}$, d) $x = 1$, e) $x = e$, f) $x = e^2$. 4. a) 1, b) $x = 4$.

5. a) 0, b) 1, c) 3, d) 3. 6. a) 8, b) 3, c) $-\frac{1}{2}$. 7. a) 2, b) 3. 8. a) $-\frac{1}{2}$, b) 3.

Zadania utrwalające**2.1.** Oblicz:

a) $\log_2 0,125$,

b) $\log_{\frac{1}{3}} 243$,

c) $\log_{3\sqrt{3}} (9\sqrt{3})$,

d) $\log_{625} 125$,

e) $\log_8 2 + \log_8 16$,

f) $\frac{\log 18 + \log 8}{\log 2 + \log 6}$.

2.2. Oblicz:

a) $3^{\log_3 5} \cdot 5^{\log_5 3}$,

b) $10^{1+\log 3}$,

c) $27^{\log_3 2 - \frac{1}{3}}$,

d) $2^{5 - \frac{1}{3} \log_2 27}$.

2.3. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz x , gdy:

a) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16} = x$,

b) $\log_4 (8\sqrt[4]{2}) = x$,

c) $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}$,

d) $\log_{2\sqrt{2}} x = -3$,

e) $\log_x 2 = \frac{1}{3}$,

f) $\log_x 64 = -3$.

2.4. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz x , gdy:

a) $\log_{\frac{1}{4}} (\log_5 x) = 0$,

b) $\log_3 (7 + \log_5 x) = 2$,

c) $\log_5 [3 + \log_4 (\log_2 x + 10)] = 1$,

d) $\log_7 [\log_4 (\log_3 x)] = 0$.

2.5. Przedstaw w postaci jednego logarytmu wyrażenie:

a) $3 + \log_3 5$,

b) $\log_{0,5} 5 - 1$,

c) $1 + \log_2 3 + \log_4 5$.

2.6. Wiedząc, że $a = \log 2$, wyraż za pomocą a liczbę:

a) $\log 20$,

b) $\log 5$,

c) $\log 80$,

d) $\log \frac{5}{4}$.

2.7. Wyznacz liczby całkowite m i n takie, że $n - m = 1$, będące końcami przedziału (m, n) , do którego należy liczba:

a) $\log_7 2$,

b) $\log_5 15$,

c) $\log_7 120$,

d) $\log_3 \frac{2}{7}$,

e) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5}$.

2.8. Wykaż, że:**D**

a) $\log_3 2 = \log_3 128 - 3 \log_3 4$,

b) $\log_2 10 = 1 + \log_2 5$.

Funkcja logarytmiczna i jej własności

Definicja

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $x > 0$ oraz a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1.

- $f(x) = \log_a x$, gdzie $x \in \mathbb{R}^+$ i $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
- Wykresem funkcji logarytmicznej jest **krzywa logarytmiczna**.

Ćwiczenie 10. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \log_a x$. Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji f , gdy:

- a) $a = 2$ i $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$, b) $a = 3$ i $P = \left(\frac{1}{9}, 2\right)$,
 c) $a = \sqrt{2}$ i $P = (4, 4)$, d) $a = \frac{1}{3}$ i $P = (27, -3)$.

Ćwiczenie 11. Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ należy punkt P . Oblicz a , gdy: a) $P = (4, 2)$, b) $P = \left(2, \frac{1}{2}\right)$, c) $P = (3, 1)$.

Przykład 5. Naszkicuj wykresy funkcji f i g określonych wzorami **1** $f(x) = \log_2 x$ i **2** $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Podaj ich dziedziny i zbiory wartości.

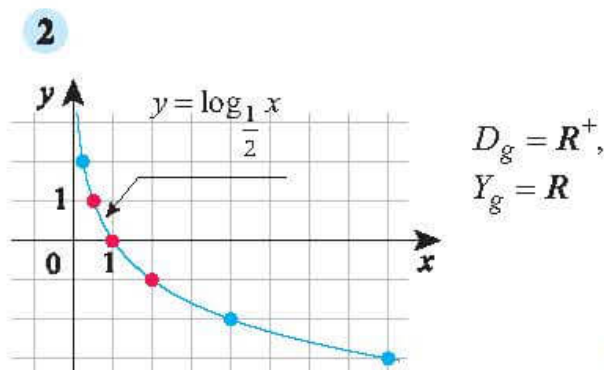
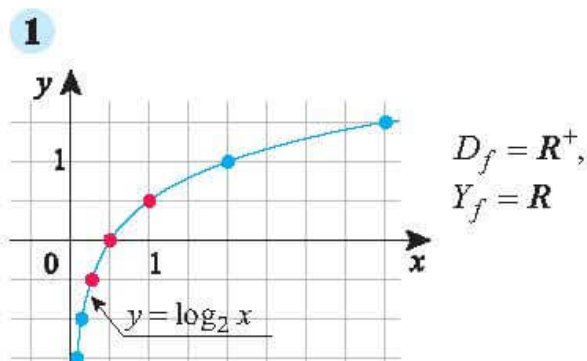
Rozwiązanie

Sporządzamy tabele wartości funkcji f i g dla wybranych argumentów.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x) = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3

Szkicujemy wykresy funkcji.



Ćwiczenie 12. Odczytaj z wykresu funkcji **1** $f(x) = \log_2 x$ **2** $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$:

- a) przedział, w którym funkcja rośnie (maleje), b) miejsce zerowe funkcji,
c) współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią y (o ile istnieją).

Uwaga Aby naszkicować wykres funkcji logarytmicznej określonej wzorem $y = \log_a x$, zwykle będziemy zaznaczać punkty o współrzędnych: $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$.

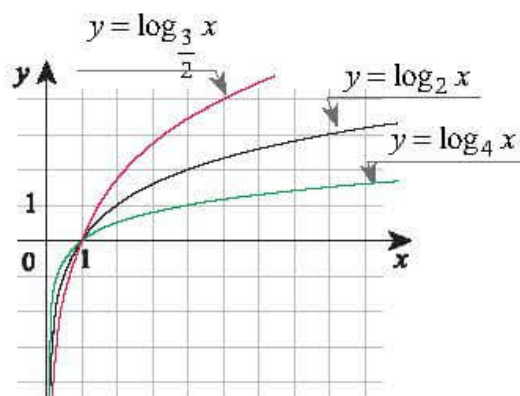
Ćwiczenie 13. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji logarytmicznych:

$$f(x) = \log_{\frac{3}{2}} x, \quad g(x) = \log_2 x, \quad h(x) = \log_4 x.$$

- a) Podaj dla każdej funkcji f , g i h jej dziedzinę i zbiór wartości.

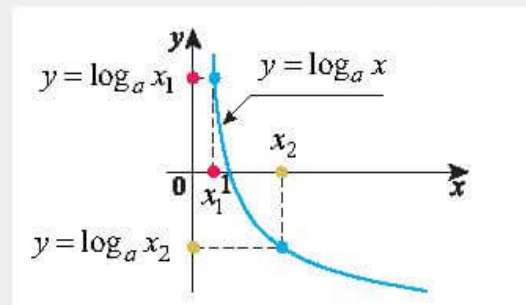
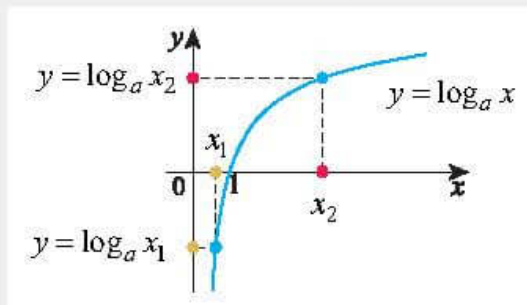
- b) Czy funkcje f , g i h są rosnące czy malejące?

- c) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nierówności: $\log_{\frac{3}{2}} x \geq \log_4 x$, $\log_2 x < \log_4 x$, $\log_2 x \geq \log_{\frac{3}{2}} x$.



Uwaga

- Dziedziną funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ jest zbiór liczby rzeczywistych dodatnich, czyli $D_f = \mathbf{R}^+$.
- Prosta o równaniu $x = 0$ (oś y) jest asymptotą^{*)} pionową wykresu funkcji logarytmicznej.
- Funkcja logarytmiczna jest:
 - rosnąca, gdy $a > 1$,
 - malejąca, gdy $0 < a < 1$.



Jeśli $x_1 < x_2$, to:

$$\log_a x_1 < \log_a x_2,$$

$$\log_a x_1 > \log_a x_2$$

- Wykres każdej funkcji logarytmicznej o równaniu $y = \log_a x$ przechodzi przez punkt $(1, 0)$.

^{*)} Asymptota – prosta, do której wykres funkcji się zbliża i zbliżając się – nie przecina jej.

Ćwiczenie 14. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji logarytmicznych:

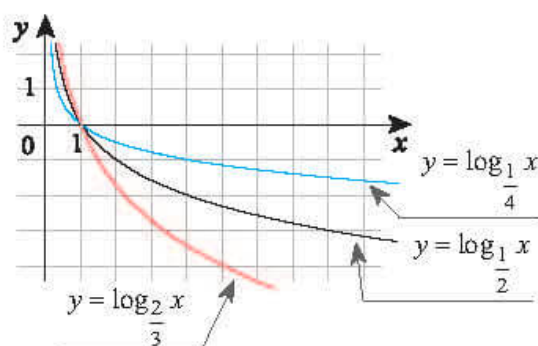
$$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x, \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad h(x) = \log_{\frac{2}{3}} x.$$

a) Podaj dla każdej funkcji f , g i h jej dziedzinę i zbiór wartości.

b) Czy funkcje f , g i h są rosnące czy malejące?

c) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nie-

$$\text{równości: } \log_{\frac{2}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{4}} x, \quad \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{2}{3}} x, \quad \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{4}} x.$$



Ćwiczenie 15. Spośród warunków ponumerowanych od **1** do **6** wskaż te, które są prawdziwe.

- | | |
|---|--|
| 1 $\log_2 x > 0$, gdy $x > 1$, | 2 $\log_{\frac{1}{4}} x < 0$, gdy $x > 1$, |
| 3 $\log_{\frac{3}{2}} x > 0$, gdy $x > 1$, | 4 $\log_{\frac{3}{5}} x < 0$, gdy $0 < x < 1$, |
| 5 $\log_2 x > 3$, gdy $x > 3^2$, | 6 $\log_{\frac{1}{3}} x > 4$, gdy $0 < x < \left(\frac{1}{3}\right)^4$. |

Ćwiczenie 16. Spośród wzorów funkcji: **1** $f(x) = \log_5 x$, **2** $f(x) = \log_{2\sqrt{2}} x$,

3 $f(x) = \log_{5^{-1}} x$, **4** $f(x) = \log_{(\sqrt{2}-1)} x$, **5** $f(x) = \log_{0,01^{-2}} x$

wybierz te, które określają funkcje malejące.

Przykład 6. Uporządkuj rosnąco liczby $\log_4 5$, $\log_2 5$, $\log_3 5$.

Rozwiązanie

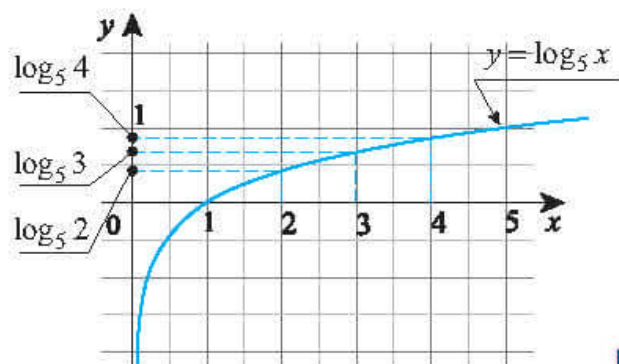
$$\log_4 5 = \frac{1}{\log_5 4}, \quad \log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}, \quad \log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}.$$

$\log_5 2 < \log_5 3 < \log_5 4$
(bo funkcja $y = \log_5 x$ jest rosnąca), więc

$$\frac{1}{\log_5 2} > \frac{1}{\log_5 3} > \frac{1}{\log_5 4}.$$

Zatem $\log_4 5 < \log_3 5 < \log_2 5$.

Odp.: $\log_4 5$, $\log_3 5$, $\log_2 5$.



Ćwiczenie 17. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $\log_3 4, \log_3 \frac{1}{4}, \log_3 \frac{1}{2}, \log_3 2$ b) $\log_4 3, \log_5 3, \log_6 3, \log_2 3$.

Przykład 7. Wyznacz dziedzinę funkcji f , gdy: a) $f(x) = \log_3(4 - 2x)$, b) $f(x) = \log_x 2$.

Rozwiązanie

Dziedziną jest zbiór tych argumentów x , które spełniają warunki:

a) $4 - 2x > 0$, skąd *(liczba logarytmowana jest dodatnia)*

$$x < 2, \text{ czyli}$$

$$x \in (-\infty; 2).$$

b) $x > 0$ i $x \neq 1$, czyli *(podstawa logarytmu jest liczbą dodatnią i różną od 1)*

$$x \in (0; 1) \text{ oraz } x \in (1; +\infty).$$

Odp.: a) $(-\infty; 2)$, b) $(0; 1), (1; +\infty)$.

$$\log_a b = c$$

$b > 0$

$a > 0$ i $a \neq 1$

Ćwiczenie 18. Wyznacz dziedzinę funkcji f , gdy:

a) $f(x) = \log_3(4 - x)$, b) $f(x) = \log_3(x-2)^5$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

10. a) Tak, b) nie, c) tak, d) tak. 11. a) $a = 2$, b) $a = 4$, c) $a = 3$.

12. 1 a) Funkcja rośnie w przedziale $(0; +\infty)$, b) $x_0 = 1$, c) brak, 2 a) funkcja maleje w przedziale $(0; +\infty)$,

b) $x_0 = 1$, c) brak. 13. a) $D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}^+$, $Y_f = Y_g = Y_h = \mathbf{R}$, b) funkcje f, g, h są rosnące,

c) kolejno: $x \in (1; +\infty)$; $x \in (0; 1)$; $x \in (0; 1)$. 14. a) $D_f = D_g = D_h = \mathbf{R}^+$, $Y_f = Y_g = Y_h = \mathbf{R}$,

b) funkcje f, g, h są malejące, c) kolejno $x \in (0; 1)$, $x \in (0; 1)$; $x \in (0; 1)$. 15. 1, 2, 3, 5 i 6.

16. 3 i 4. 17. a) $\log_3 \frac{1}{4} < \log_3 \frac{1}{2} < \log_3 2 < \log_3 4$, b) $\log_6 3 < \log_5 3 < \log_4 3 < \log_2 3$.

18. a) $x \in (-\infty; 4)$, b) $x \in \left(2; 2\frac{1}{3}\right)$ lub $x \in \left(2\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Zadania utrwalające

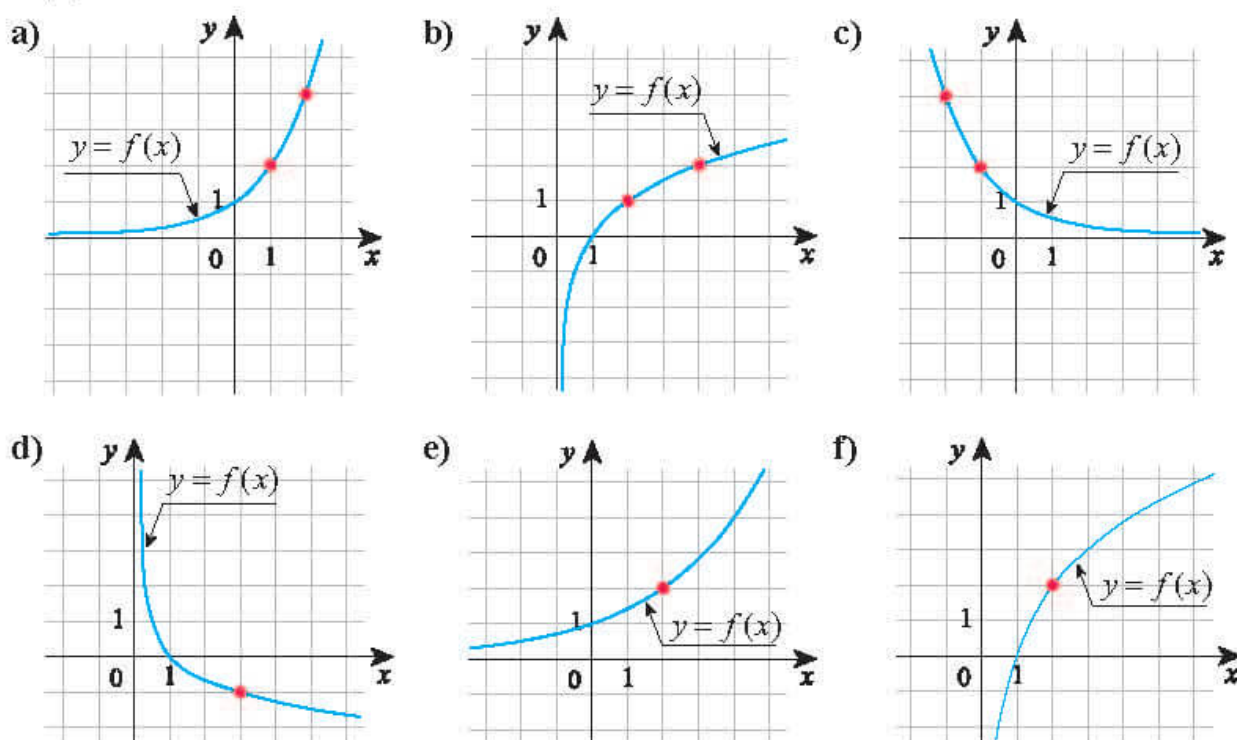
2.9. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \log_a x$. Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji f , gdy:

a) $a = 4$ i $P = (0,0625, -2)$,

b) $a = 0,001$ i $P = \left(10^4, -\frac{4}{3}\right)$,

c) $a = 2\sqrt{2}$ i $P = \left(32, 3\frac{1}{3}\right)$.

2.10. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f , która jest albo funkcją wykładniczą określoną wzorem $f(x) = a^x$, albo funkcją logarytmiczną określoną wzorem $f(x) = \log_a x$. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór funkcji f .



2.11. Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ należy punkt P . Oblicz a , gdy:

- a) $P = (4, 1)$, b) $P = \left(3, \frac{1}{2}\right)$, c) $P = (16, 2)$,
d) $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$, e) $P = (\sqrt{2}, -1)$, f) $P = \left(5, \frac{1}{3}\right)$.

2.12. Uporządkuj rosnąco liczby:

- a) $\log_4 3$, $\log_4 \frac{1}{3}$, $\log_4 5$, $\log_4 0,1$, b) $\log_{\frac{1}{4}} 5$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$, $\log_{\frac{1}{4}} 3$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3}$,
c) $\log_3 4$, $\log_{\frac{1}{3}} 4$, $\log_5 4$, $\log_{0,1} 4$, d) $\log_5 \frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$, $\log_3 \frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$.

2.13. Podaj współrzędne trzech punktów, które są liczbami wymiernymi i punkty te należą do wykresu funkcji f , gdy:

- a) $f(x) = \log_{\frac{3}{4}} x$, b) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$, c) $f(x) = \log_{2\sqrt{3}} x$, d) $f(x) = \log_{\sqrt[3]{2}} x$.

2.14. Określ dziedzinę D_f funkcji f , gdy:

- a) $f(x) = \log_2(-x)$, b) $f(x) = \log_3(x+2)$, c) $f(x) = \log(x-5)$.

Przekształcanie wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 8. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

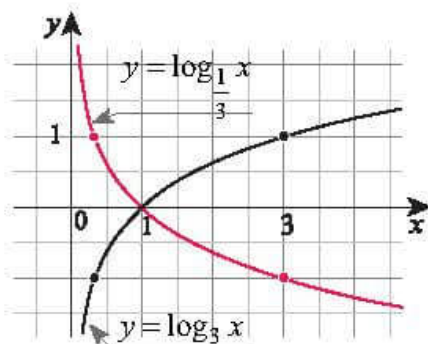
a) $f(x) = \log_3 x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, b) $f(x) = \log_3 x$ i $g(x) = \log_3 \frac{1}{x}$.

Uzasadnij, że gdy $x > 0$, to $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$.

Rozwiązanie

a) Do wykresu funkcji:

- $f(x) = \log_3 x$ należą punkty:
 $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(3, 1)$,
- $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ należą punkty:
 $(3, -1)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.



b) Zauważamy, że

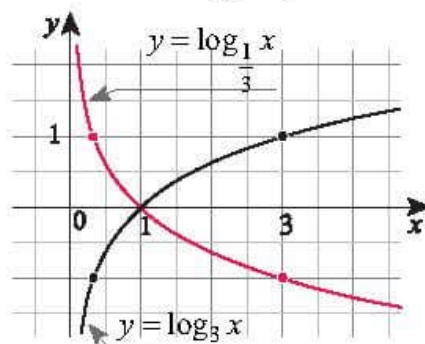
$$g(x) = \log_3 \frac{1}{x} = \log x^{-1} = -\log_3 x,$$

czyli $g(x) = -f(x)$.

Do wykresu funkcji

$$g(x) = -\log_3 x \text{ należą punkty:}$$

$$(3, -1), (1, 0), \left(\frac{1}{3}, 1\right).$$



Jeżeli $x > 0$ oraz:

$$\left. \begin{array}{l} a = \log_{\frac{1}{3}} x, \text{ to } x = \left(\frac{1}{3}\right)^a = 3^{-a} \\ b = \log_3 x, \text{ to } x = 3^b \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^a = 3^b, \text{ więc } 3^{-a} = 3^b, \text{ skąd } -a = b.$$

Zatem $\log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$.

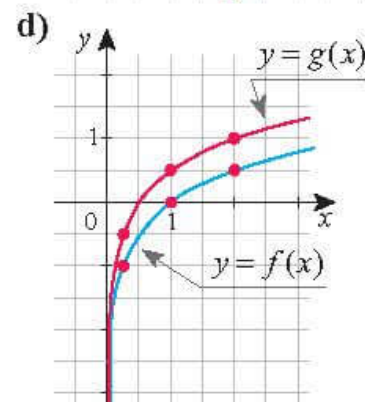
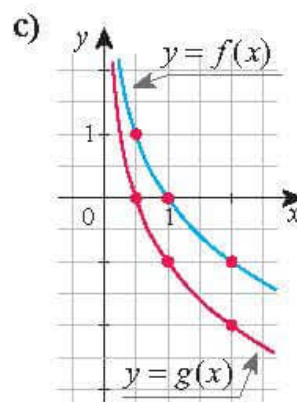
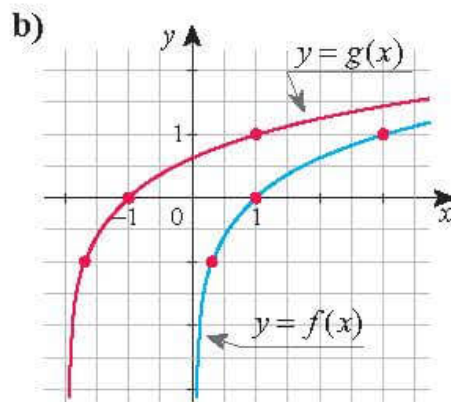
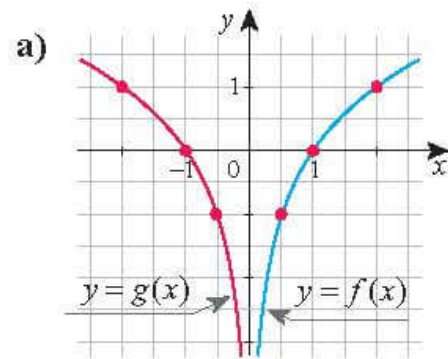
c.n.u.

$$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$$

Ćwiczenie 19. Naskicuj wykres funkcji g , który jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem osi x , gdy:

a) $f(x) = \log_2 x$, b) $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$. Podaj wzór funkcji g .

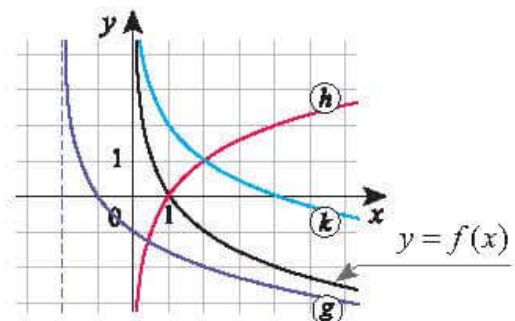
Ćwiczenie 20. Na rysunku przedstawione są wykresy funkcji logarytmicznych f i g . Określ, jakie przekształcenie należy wykonać, aby z wykresu funkcji f otrzymać wykres funkcji g . Napisz wzory tych funkcji.



Ćwiczenie 21. Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych, gdy:

a) $f(x) = \log_7(x+1)$, b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 3$, c) $f(x) = \log_8(x+4) - 2$.

Ćwiczenie 22. Wykresy funkcji g , h , k są figurami przystającymi do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Napisz wzór każdej z tych funkcji.



Odpowiedzi do ćwiczeń

19. a) $g(x) = -\log_2 x$ lub $g(x) = \log_2 \frac{1}{x}$, b) $g(x) = -\log_2 \frac{1}{x}$ lub $g(x) = \log_2 x$.

20. a) $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = \log_2(-x)$, $g(x) = f(-x)$,

b) $f(x) = \log_3 x$ i $g(x) = \log_3(x+2)$, $g(x) = f(x+2)$, c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ i $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$, $g(x) = f(x) - 1$,

d) $f(x) = \log_4 x$ i $g(x) = \log_4(2x)$ lub $g(x) = \frac{1}{2} + \log_4 x$, $g(x) = f(2x)$ lub $g(x) = \frac{1}{2} + f(x)$.

21. a) $(0, 0)$, b) $(8, 0)$, c) $(60, 0)$ i $(0, -\frac{4}{3})$. 22. $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$, $h(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x$, $k(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$.

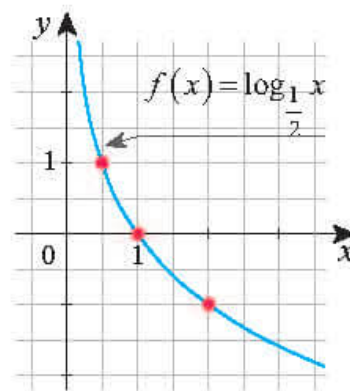
Zadania utrwalające

2.15. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Naszkicuj w zeszytcie wykres

funkcji g i określ jej dziedzinę, gdy:

a) $g(x) = f(-x)$, b) $g(x) = f(x-1)$,

c) $g(x) = f(x) - 1$, d) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, e) $g(x) = f(2x)$.



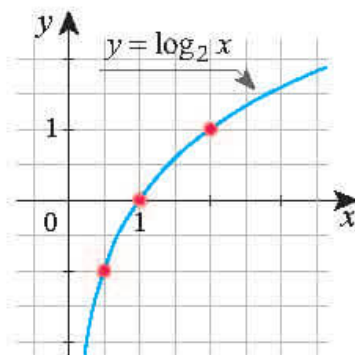
2.16. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_2 x$. Naszkicuj w zeszytcie wykres funkcji g , podaj jej dziedzinę i miejsca zerowe (o ile istnieją), gdy:

a) $g(x) = -f(x)$,

b) $g(x) = f(x) + 2$,

c) $g(x) = f(x-3)$,

d) $g(x) = f(-x)$.



2.17. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $g(x) = \log_2 x$, a następnie, wykonując odpowiednie przekształcenie, naszkicuj wykres funkcji f , gdy:

a) $f(x) = \log_2(x+4)$,

b) $f(x) = \log_2(2x)$,

c) $f(x) = \log_2 \frac{x}{4}$,

d) $f(x) = \log_2(x-1)$,

e) $f(x) = \log_2(x+2)$,

f) $f(x) = \log_2 x - 2$.

2.18. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ i korzystając z jej wykresu, określ:

a) dziedzinę D_f funkcji f ,

b) zbiór wartości Y_f funkcji f ,

c) wartość argumentu x , dla którego wartość funkcji f jest równa -2 ,

d) wartości argumentów x , dla których wartości funkcji f są większe od -1 .

2.19. Napisz wzór funkcji f w postaci $f(x) = \log_3 x + b$, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt P , gdy:

a) $P = (1, 2)$,

b) $P = (3, 5)$,

c) $P = \left(\frac{1}{3}, -1\right)$,

d) $P = (\sqrt{3}, -2)$.

2.20. Napisz wzór funkcji f w postaci $f(x) = a \cdot \log_2 x + b$, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty A i B , gdy:

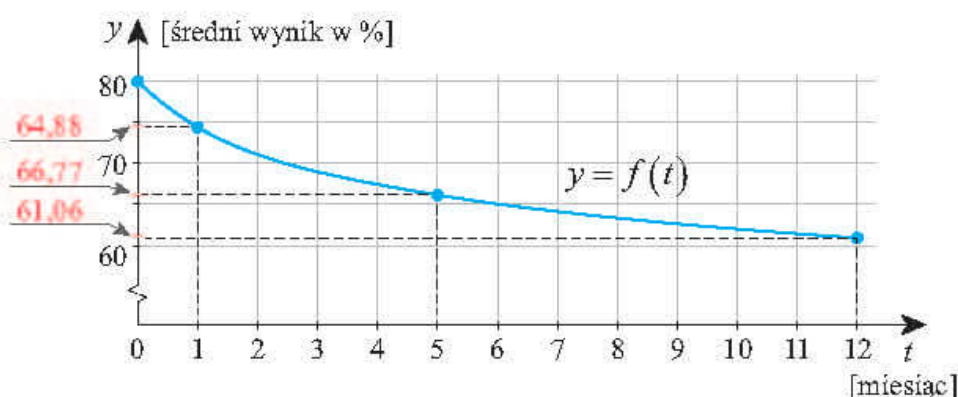
a) $A = (2, 4)$ i $B = (8, 10)$,

b) $A = (\sqrt{2}, -2)$ i $B = (4\sqrt{2}, 10)$.

Funkcja logarytmiczna w zastosowaniach

Wyniki niektórych badań i obserwacji można opisywać wzorami funkcji, w których wykorzystuje się logarytmy. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 9. Studenci matematyki pewnej uczelni, za ich zgodą, zostali poddani eksperymentowi badającemu pamiętanie, którego efektem miał być wzór przedstawiający model ludzkiej pamięci. Studenci napisali egzamin testowy z geometrii analitycznej, a następnie co miesiąc przez najbliższy rok rozwiązywali ten sam test. Po eksperymencie ich średnie procentowe wyniki określono wzorem $f(t) = 80 - 17 \cdot \log(t+1)$, gdzie $t \in \langle 0; 12 \rangle$, i sporządzono wykres.



- Odczytaj z wykresu, jakim średnim procentem wiedzy z geometrii analitycznej wykazali się studenci:
a) na egzaminie, b) na zakończenie eksperymentu.
- Sprawdź, czy po upływie 50 lat od eksperymentu dawni studenci będą posiadali co najmniej 40% wiedzy z geometrii analitycznej. W obliczeniach przyjmij $\log 613 \approx 2,412$.

Rozwiązanie

- Odczytujemy z wykresu funkcji $f(t) = 80 - 17 \cdot \log(t+1)$ wartość funkcji f , gdy:
a) $t = 0$, więc $f(0) = 80$, b) $t = 12$, więc $f(12) = 61,08$.
- Obliczamy wartość funkcji f , gdy $t = (50 \cdot 12 + 12)$ miesięcy, czyli $t = 612$.

$$f(612) = 80 - 17 \cdot \log(612+1) = 80 - 17 \cdot \log 613$$

$$f(612) \approx 80 - 17 \cdot 2,412$$

$$f(612) \approx 38,996$$

$$f(612) \approx 39.$$

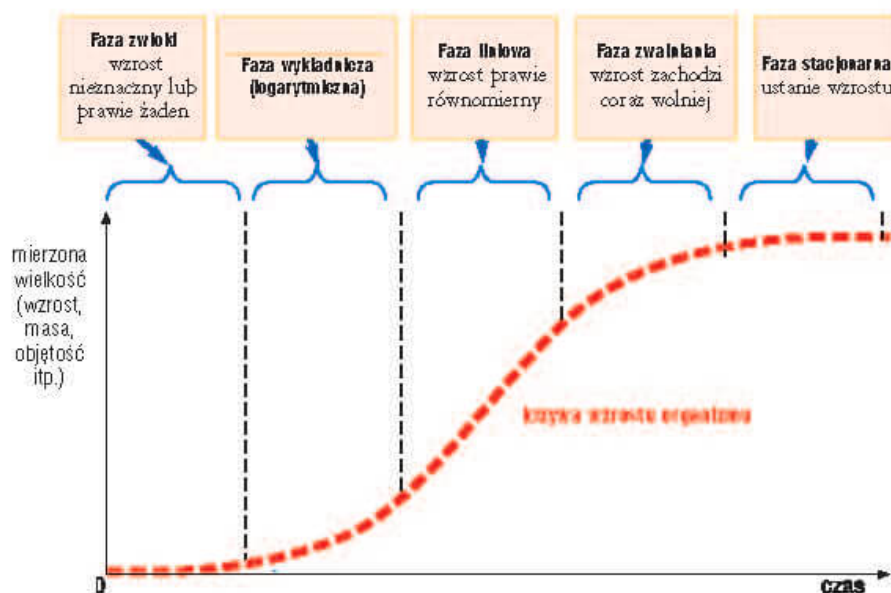
Odp.: **1** a) 80%, b) 61,08%. **2** Nie, ponieważ studenci będą pamiętali co najwyżej 39% wiedzy z geometrii analitycznej.

Ćwiczenie 23. Przyjmij dane z przykładu 9. i oblicz:

- jakim procentem wiedzy z geometrii analitycznej wykazali się studenci po upływie 9 miesięcy od egzaminu,
- po ilu miesiącach studenci będą pamiętali 46% wiedzy z geometrii analitycznej.

Zjawiska obserwowane w przyrodzie w większości zmieniają się liniowo albo wykładniczo. Przykładem takich zmian jest krzywa wzrostu organizmu.

Krzywa wzrostu organizmu to linia w kształcie litery S (kształt sigmoidalny) ilustrująca przebieg wzrostu mierzonej wielkości (masy, powierzchni, objętości itp.) w czasie od momentu urodzenia lub poczęcia. Krzywe wzrostu osobników i populacji mają podobny kształt.



Wielu naukowców wyniki swoich doświadczeń i obserwacji opisało wzorami, w których wykorzystano logarytmy. Oto kilka przykładów.

Prawo Webera-Fechnera
(psychologia)

$$w = k \cdot \ln \frac{B}{B_0}$$

Wzór opisuje zależność pomiędzy fizyczną miarą bodźca B a reakcją zmysłową (np. wzroku, słuchu, węchu) na jego siłę.

Wzór Ciołkowskiego
(kosmonautyka)

$$v = \omega \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

Wzór opisuje zależność między prędkością v rakiety a jej masą m_0 z paliwem i masą m bez paliwa oraz prędkością ω gazów wylotowych.

Skala Richtera
(sejsmologia)

$$R = \log \frac{A}{A_0}$$

Wzór określa wielkość trzęsienia ziemi na podstawie amplitudy A drgań wstrząsów sejsmicznych, gdzie $A_0 = 10^{-4}$ [cm].

Poziom głośności dźwięku L mierzony w decybelach [dB] określono wzorem

$$L = L(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}, \text{ gdzie:}$$

I – natężenie dźwięku $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$,

$I_0 = 10^{-12} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ – natężenie dźwięku odpowiadające progowi słyszalności przez człowieka.

Przykład 10. Oblicz poziom głośności młota pneumatycznego pracującego w odległości metra od ciebie. Młot ten emituje dźwięk o natężeniu równym $10^{-2} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$.

Rozwiązanie

Stosujemy wzór $L(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$, gdy $I = 10^{-2}$

$$\begin{aligned} L(10^{-2}) &= 10 \cdot \log \frac{10^{-2}}{10^{-12}} = \\ &= 10 \cdot \log 10^{10} = 10 \cdot 10 = 100. \end{aligned}$$

Odp.: Poziom głośności młota pneumatycznego jest równy 100 decybeli.



Ćwiczenie 24. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

Dźwięk (odległość od źródła)	Szept (1 m)	Cicha rozmowa (1 m)	Krzyk (1 m)	Orkiestra symfoniczna (5 m)	Startujący odrzutowiec (20 m)
Natężenie dźwięku $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$	10^{-10}		10^{-5}		1
Poziom głośności dźwięku L [dB]		40		80	

Ćwiczenie 25. Oblicz:

- poziom głośności startującego samolotu, dla którego $I = 10^{-3} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$,
- ile razy większe natężenie ma grzmot pioruna, dla którego $L = 120$ dB (decybeli), od najcichszego dźwięku, dla którego $L = 0$ dB,
- ile razy mniejszą siłę ma trzęsienie ziemi o skali Richtera 3 od trzęsienia ziemi o skali Richtera 5.

Ciekawostka

Maksymalna granica słyszalności dźwięków dla ucha ludzkiego jest równa 110-120 decybeli. Przekroczenie o 30 decybeli maksymalnej granicy uszkadza słuch bezpowrotnie. Za próg szkodliwości dla człowieka przyjmuje się poziom głośności równy 65 decybeli. Dźwięków o natężeniu 85 decybeli można słuchać 8 godzin, a o natężeniu 100 decybeli tylko 15 minut.

Logarytmy przez długie lata przed erą kalkulatorów i komputerów służyły do wykonywania niezbędnych obliczeń przy tworzeniu projektów lub opracowywaniu wyników badań naukowych. W tym celu stworzono tablice logarytmów dziesiętnych oraz tablice logarytmów naturalnych. Zastosowanie logarytmów dziesiętnych pokażemy na przykładzie.

Przykład 11. W tabeli przedstawione są przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych kilku liczb naturalnych.

Liczba	2	3	4	5	6	7	8	9
Wartość logarytmu	0,3010	0,4171	0,6021	0,6990	0,7782	0,8451	0,9034	0,9542

Skorzystaj z tabeli i przedstaw przybliżoną wartość liczby x w postaci potęgi liczby 10, gdy $x = 3^{128}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
 x &= 3^{128} \\
 \log x &= \log 3^{128} && \text{Logarytmujemy obie strony równości.} \\
 \log x &= 128 \cdot \log 3 && \text{Korzystamy z wzoru } \log_a b^m = m \cdot \log_a b. \\
 \log x &\approx 128 \cdot 0,4171 && \text{Korzystamy z tabeli: } \log 3 \approx 0,4171. \\
 \log x &\approx 53,389 && \text{Korzystamy z definicji logarytmu.} \\
 x &\approx 10^{53}.
 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 26. Skorzystaj z tabeli przykładu 14. i przedstaw wartość liczby x w postaci potęgi liczby 10, gdy: a) $x = 9^{100}$, b) $x = 4^{100}$, c) $x = 36^{100}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

23. a) 63%, **b)** 99 miesięcy. *Wskazówka.* a) $f(9) = 80 - 17 \cdot \log(9+1)$, b) $46 = 80 - 17 \cdot \log(t+1)$.

24. Kolejno: natężenie dźwięku 10^{-8} , 10^{-4} , poziom głośności dźwięku: 20, 70, 120.

Wskazówka. Szept: $L(10^{-10}) = 10 \cdot \log \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^2$; cicha rozmowa: $40 = 10 \cdot \log \frac{10^x}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{x+12}$, skąd $40 = 10 \cdot (x+12)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń – ciąg dalszy

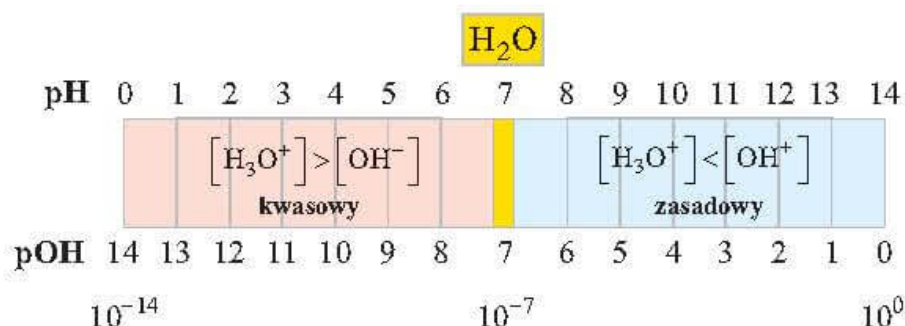
25. a) 90 dB, b) 10^{12} razy (bilion razy), c) 100 razy. *Wskazówka.* Zauważ, że: a) $L(10^{-3}) = 10 \cdot \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}}$,
 b) $120 = L(1)$ i $0 = L(10^{-12})$, więc $1:10^{-12} = 10^{12}$, c) $3 = R(10^{-1})$ i $5 = R(10)$, więc $10:10^{-1} = 10^2$.
 26. a) $x \approx 10^{95}$, b) $x \approx 10^{60}$, c) $x \approx 10^{156}$.

Zadania utrwalające

- 2.21. Chemicy do określenia kwasowości roztworu wodnego posługują się określeniem czynnika pH:

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+],$$

gdzie $[\text{H}^+]$ określa stężenie w roztworze jonów wodorowych.



Oblicz pH soku z pomarańczy, jeśli stężenie $[\text{H}^+]$ jest równe $1,26 \cdot 10^{-5}$.

W obliczeniach przyjmij $\log 1,26 \approx 0,1$.

- 2.22. Oblicz:

a) pH octu, wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w occie jest równe $1,26 \cdot 10^{-3}$ (w obliczeniach przyjmij $\log 1,26 \approx 0,1$),

b) stężenie jonów wodorowych w mleku, wiedząc, że pH mleka jest równe 6,6.

W obliczeniach zastosuj wzór $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$.

- 2.23. Cichy szept to 30 dB (decybeli), głośna rozmowa 60 dB, a intensywny ruch uliczny to 90 dB. Oceń, ile razy od szeptu większe natężenie głośności ma:

a) głośna rozmowa, b) ruchliwa ulica?

W obliczeniach zastosuj wzór $L(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$, gdzie L to poziom głośności dźwięku, a I to jego natężenie.

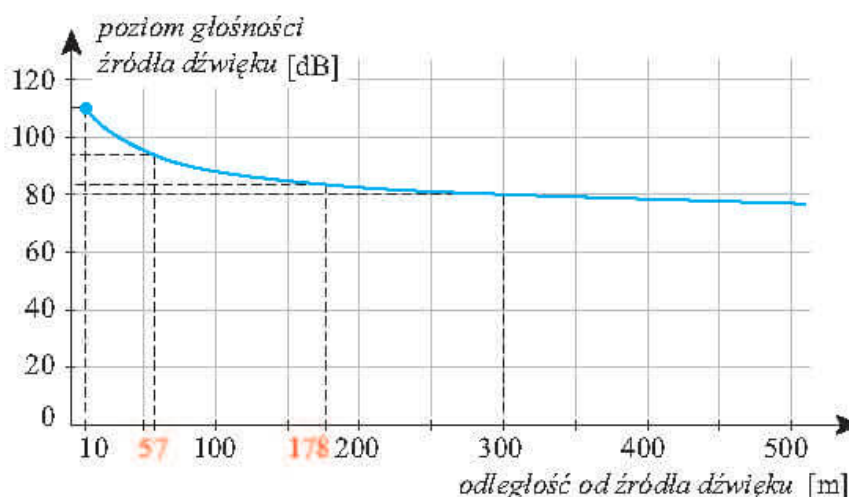
2.24. Oblicz amplitudę A trzęsienia ziemi o sile w skali Richtera:

- a) 2, b) 4, c) 4,7 (trzęsienie ziemi w Polsce – 1993 r.),
 d) 9,5 (najsilniejsze trzęsienie ziemi na świecie – Chile, 1960 r.)
 e) 9 (trzęsienie ziemi w Japonii – 2011 r.)

W obliczeniach zastosuj wzór $R(A) = \log \frac{A}{10^{-4}}$.

2.25. O ile wzrośnie głośność dźwięku, gdy jego natężenie wzrośnie trzykrotnie?

2.26. Na rysunku przedstawiony jest wykres poziomu głośności dźwięku L w zależności od odległości x mierzonej w metrach od jego źródła. Zależność ta określona jest wzorem $L(x) = 130 - 20 \cdot \log x$, gdzie $x \geq 10$.



- a) Koncert muzyki rockowej emituje hałas rzędu 100-110 decybeli. Odczytaj z wykresu i oceń, czy w odległości 100 metrów od sceny można słuchać tego koncertu bez szkody dla organizmu.
 b) Oceń, czy twój krzyk o głośności 65 dB zagłuszy startujący kilometr dalej odrzutowiec.



Zestaw powtórkowy

1. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Wartość wyrażenia $\log 3 + \log 4$ jest:

- A. mniejsza od 2, B. większa od 2.

Prawdziwa jest nierówność:

- C. $2^{\log_2 3} < 3^{\log_3 2}$, D. $\log_4 64 < \log_2 16$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt{8}}$ jest równa:

- A. $\frac{1}{2}$, B. $\frac{3}{2}$, C. $\sqrt{8}$, D. 2.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli punkt $P = (2, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$, to a jest równe:

- A. $-\frac{1}{2}$, B. $\frac{1}{2}$, C. $\sqrt{2}$, D. 2.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

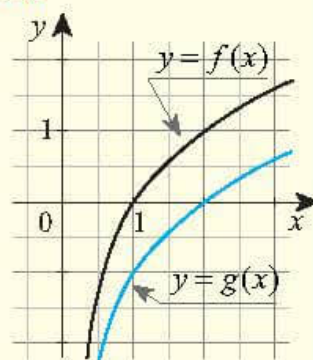
Dziedziną D funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_2(x-2)$ jest:

- A. $D = \mathbb{R}^+$, B. $D = (2; +\infty)$, C. $D = \{2; +\infty\}$, D. $D = (-2; +\infty)$.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku przedstawione są wykresy funkcji f i g , gdzie $f(x) = \log_2 x$. Wykres funkcji g określony jest wzorem:

- A. $g(x) = f(x+1)$, B. $g(x) = f(x-1)$,
C. $g(x) = f(2x)$, D. $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.*

Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ należy punkt $P = (81, 4)$, gdy $a = 3$.	P	F
Nierówność $\log_5 \frac{1}{5} < \log_5 0,2$ nie jest prawdziwa.	P	F
Jeżeli $-2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 0$, to $x \in (1; 4)$.	P	F
$\log 10^2 = 10$.	P	F

3. Ciągi liczbowe określone wzorem ogólnym i rekurencyjnym

Pojęcie ciągu liczbowego

Ustawienie uczniów w szeregu według pewnej zasady (np. wg wzrostu) ustala ich kolejność w tym szeregu. Na przykład: „Pięciu najwyższych uczniów z klasy wytypowano do szkolnej reprezentacji koszykówki. Wzrost poszczególnych uczniów podany w centymetrach to:

190,5; 176,3; 184; 180; 178”.

Ustawiono ich od najwyższego do najniższego, co ilustruje poniższa tabelka.

Numer miejsca, na którym stał uczeń (n)	1	2	3	4	5
Wzrost w cm (a_n)	190,5	184	180	178	176,3

Określono w ten sposób funkcję a , która liczbom naturalnym zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ przyporządkowuje liczby rzeczywiste.

1 $\rightarrow$ 190,5 co zapisujemy $a_1 = a(1) = 190,5$

2 $\rightarrow$ 184 co zapisujemy $a_2 = a(2) = 184$

3 $\rightarrow$ 180 co zapisujemy $a_3 = a(3) = 180$

4 $\rightarrow$ 178 co zapisujemy $a_4 = a(4) = 178$

5 $\rightarrow$ 176,3 co zapisujemy $a_5 = a(5) = 176,3$.

Liczby wyrażające wzrost poszczególnych uczniów ustawionych na kolejnych miejscach, nazywamy wyrazami ciągu i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

Definicja

Ciągiem liczbowym skończonym nazywamy funkcję określoną w zbiorze liczb naturalnych dodatnich $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.

Najczęściej funkcje będące ciągami oznaczamy małymi literami alfabetu a, b, c, d .

Zapisy $a(n), b(n), c(n), d(n)$ oznaczają funkcje a, b, c i d zmiennej n , gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią.

Przyjęto następujące oznaczenia dla opisu funkcji będących ciągami:

$a(n) = a_n$ – oznacza, że $a(1) = a_1, a(2) = a_2, \dots, a(n) = a_n$,

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – oznacza wartości funkcji nazywane **wyrazami ciągu liczbowego**,

$a_n = a(n)$ – oznacza wzór na n -ty wyraz ciągu lub wyraz ogólny ciągu,

$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ lub (a_n) – oznacza ciąg a_n .

Na przykład kolejne liczby naturalne dwucyfrowe 10, 11, ..., 99 tworzą skończony ciąg liczbowy $(10, 11, \dots, 99)$, w którym

$$a_1 = 10, a_2 = 11, \dots, a_{90} = 99, \text{ czyli } a_n = n + 9, \text{ gdzie } n \in \{1, 2, \dots, 90\}.$$

Ćwiczenie 1. Podaj pięć początkowych wyrazów i ostatni wyraz ciągu, który tworzą kolejne lata XX wieku.

Przykład 1. Liczbom naturalnym dodatnim przyporządkuj kolejne przybliżenia dziesiętne wartości ilorazu 1:3. Rozpocznij od przybliżenia $\frac{1}{3} = 0,3$.

Rozwiązanie

Numer kolejnego (n) przybliżenia	1	2	3	4	...
Wartość kolejnego a_n przybliżenia	0,3	0,33	0,333	0,3333	...

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 0,3 & \text{co zapisujemy} & a_1 = 0,3 \\ 2 &\rightarrow 0,33 & \text{co zapisujemy} & a_2 = 0,33 \\ 3 &\rightarrow 0,333 & \text{co zapisujemy} & a_3 = 0,333. \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

Określiliśmy funkcję a , taką że $a: N^+ \rightarrow R$, której argumentami są kolejne dodatnie liczby naturalne, a jej wartościami kolejne przybliżenia dziesiętne ilorazu 1:3.

Wartości funkcji a dla kolejnych argumentów nazywamy wyrazami ciągu, które oznaczamy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, gdzie $a_n = 0, \underbrace{333\dots3}_{n \text{ cyfr}}$.

Definicja

Ciągiem liczbowym nieskończonym nazywamy funkcję a określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich N^+ , o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych R i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

- $a_1, a_2, a_3, \dots$ – kolejne wyrazy ciągu (a_n) ,
- a_n – n -ty wyraz ciągu (a_n) .

Na przykład kolejne liczby naturalne dodatnie 1, 2, 3, ... tworzą nieskończony ciąg liczbowy (a_n) , w którym n -ty wyraz ciągu a_n określony jest wzorem $a_n = n$.

Ćwiczenie 2. Podaj cztery początkowe wyrazy ciągu, w którym wyraz a_1 jest równy:

- 5, a każdy następny wyraz jest trzykrotnie większy niż poprzedni,
- 8, a każdy następny wyraz jest o 2 większy od poprzedniego,
- $\frac{1}{2}$, a każdy następny wyraz jest dwukrotnie mniejszy od poprzedniego.

Przykład 2. Pitagoras i jego uczniowie obliczali kolejne przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ według pewnej reguły.

$$p_1 = \frac{3}{2}$$

$$p_2 = \frac{3 + 2 \cdot 2}{3 + 2} = \frac{7}{5}$$

$$p_3 = \frac{7 + 2 \cdot 5}{7 + 5} = \frac{17}{12}$$

$$p_4 = \frac{17 + 2 \cdot 12}{17 + 12} = \frac{41}{29}$$

.....

$$p_n = \frac{l_{n-1} + 2 \cdot m_{n-1}}{l_{n-1} + m_{n-1}}, \quad \text{gdzie } p_1, p_2, \dots, p_n \text{ – kolejne przybliżenia liczby } \sqrt{2},$$

l_{n-1} – licznik przybliżenia p_{n-1} ,

m_{n-1} – mianownik przybliżenia p_{n-1} .

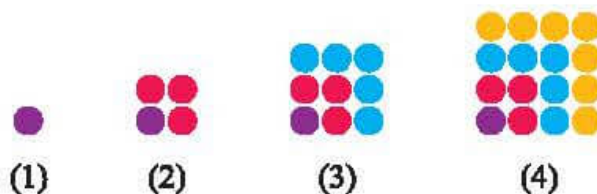
Wynik z kalkulatora

$\sqrt{2} =$	1,4142135623730950488016887242097
$p_1 =$	1,5
$p_2 =$	1,4
$p_3 =$	1,416666666666666666666666666667
$p_4 =$	1,4137931034482758620689655172414
$p_5 =$	1,4142857142857142857142857142857
$p_6 =$	1,4142011834319526627218934911243

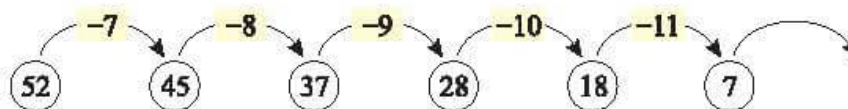
Ćwiczenie 3. Skorzystaj z danych zawartych w powyższym przykładzie i oblicz przybliżenia p_5 , p_6 , p_7 liczby $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 4. Figury przedstawione na rysunku składają się z kół. Ustal regułę tworzenia tych figur i dorysuj dwie następne figury według tej reguły.

Określ funkcję f , która każdej liczbie naturalnej dodatniej n przyporządkowuje liczbę kół potrzebnych do narysowania figury (n) .



Ćwiczenie 5. Poniższy graf ilustruje sposób wyznaczania kolejnych wyrazów pewnego ciągu liczbowego (a_n) .



Wyznacz wyrazy ciągu (a_n) od siódmego do jedenastego.

Przykłady i sposoby określania ciągu

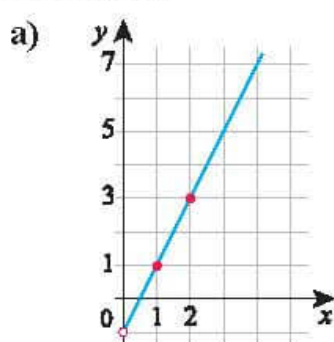
Ciąg liczbowy można określić tak jak każdą funkcję. Ciąg uważa się za określony, jeżeli znamy przepis, według którego można wyznaczyć jego kolejne wyrazy. Prawo, według którego tworzymy wyrazy ciągu, podajemy w postaci przepisu słownego lub wzoru. Różne sposoby określania ciągu liczbowego omówimy na przykładach.

Przykład 3. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = 2x - 1$:

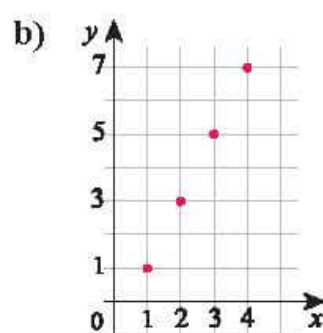
a) gdy $x \in \mathbb{R}^+$, b) $x \in \mathbb{N}^+$.

Który z wykresów funkcji jest wykresem ciągu?

Rozwiązanie



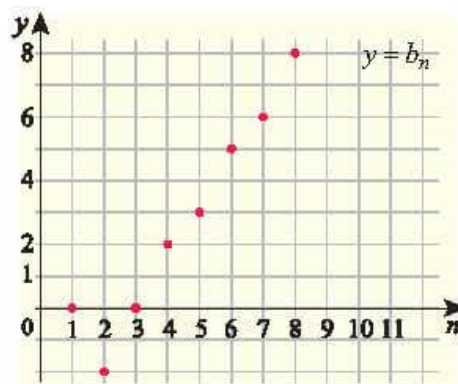
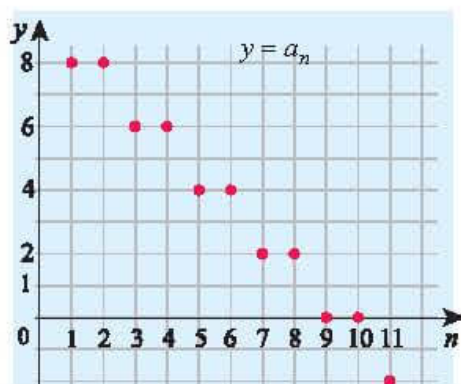
Wykresem funkcji f , gdy $x \in \mathbb{R}^+$, jest półprosta bez początku.



Wykresem funkcji f , gdy $x \in \mathbb{N}^+$, jest zbiór punktów, których odcięte są liczbami naturalnymi dodatnimi.

Odp.: Wykresem ciągu jest wykres funkcji f z przykładu b).

Przykład 4. Na rysunku przedstawione są wykresy skończonych ciągów liczbowych (a_n) i (b_n) .



a) Podaj dziedzinę D_a ciągu (a_n) oraz dziedzinę D_b ciągu (b_n) .

b) Określ ciągi przez wypisanie ich kolejnych wyrazów.

Rozwiązanie

a) Dziedziną każdego ciągu jest podzbiór zbioru $\mathbb{N}^+$.

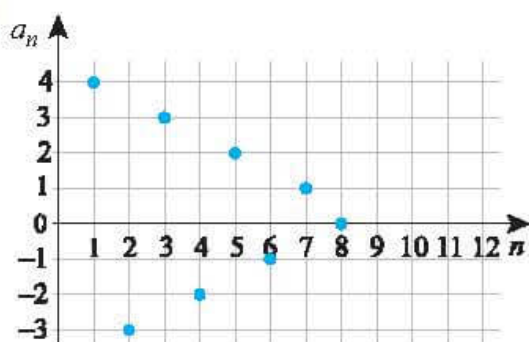
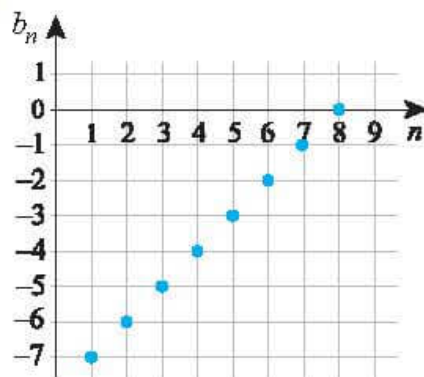
$$D_a = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},$$

$$D_b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

b) $(8, 8, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 0, 0, -2)$,

$(0, -2, 0, 2, 3, 5, 6, 8)$.

Ćwiczenie 6. Na rysunkach **1** i **2** przedstawione są wykresy ciągów (a_n) i (b_n) .

1**2**

- a) Podaj dziedzinę D_a ciągu (a_n) oraz dziedzinę D_b ciągu (b_n) .
 b) Określ ciągi poprzez wypisanie ich kolejnych wyrazów.

Przykład 5. Napisz pięć początkowych wyrazów ciągu, jeżeli jego n -ty wyraz określony jest wzorem:

a) $a_n = 3n - 2$, b) $b_n = (-1)^n$, c) $c_n = \frac{n}{n+1}$.

Rozwiązanie

a)

n	$a_n = 3n - 2$
1	$a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$
2	$a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$
3	$a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$
4	$a_4 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$
5	$a_5 = 3 \cdot 5 - 2 = 13$

b)

n	$b_n = (-1)^n$
1	$b_1 = (-1)^1 = -1$
2	$b_2 = (-1)^2 = 1$
3	$b_3 = (-1)^3 = -1$
4	$b_4 = (-1)^4 = 1$
5	$b_5 = (-1)^5 = -1$

c)

n	$c_n = \frac{n}{n+1}$
1	$c_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
2	$c_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$
3	$c_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$
4	$c_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$
5	$c_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$

Ćwiczenie 7. Wypisz pięć początkowych wyrazów ciągu, jeżeli jego n -ty wyraz określony jest wzorem:

a) $a_n = -n^2 + 1$, b) $b_n = 2 \cdot (-1)^n$, c) $c_n = \frac{1}{n^2 + 2n + 1}$.

Przykład 6. Ustal regułę wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu (a_n) i zachowując ją, podaj wzór na n -ty wyraz tego ciągu. Oblicz wyrazy a_{10} i a_{19} ciągu (a_n) o początkowych wyrazach: a) 1, 3, 5, 7, 9, ..., b) 1, -1, 1, -1, 1, ..., c) 2, 2, 2, ...

Rozwiązanie

Zauważmy, że kolejnymi wyrazami ciągu są:

a) liczby nieparzyste,

b) potęgi liczby -1,

c) liczby 2.

n	$(a_n) = (1, 3, 5, 7, \dots)$
1	$a_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$
2	$a_2 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
3	$a_3 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
4	$a_4 = 7 = 2 \cdot 4 - 1$
...	
n	$a_n = 2 \cdot n - 1$

n	$(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$
1	$a_1 = 1 = (-1)^{1+1}$
2	$a_2 = -1 = (-1)^{2+1}$
3	$a_3 = 1 = (-1)^{3+1}$
4	$a_4 = -1 = (-1)^{4+1}$
...	
n	$a_n = (-1)^{n+1}$

n	$(a_n) = (2, 2, 2, \dots)$
1	$a_1 = 2$
2	$a_2 = 2$
3	$a_3 = 2$
...	
n	$a_n = 2$

$$a_{10} = 2 \cdot 10 - 1 = 19$$

$$a_{19} = 2 \cdot 19 - 1 = 37$$

$$a_{10} = (-1)^{10+1} = -1$$

$$a_{19} = (-1)^{19+1} = (-1)^{20} = 1$$

$$a_{10} = 2$$

$$a_{19} = 2.$$

Ćwiczenie 8. Ustal regułę wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu (a_n) i zachowując ją, podaj wzór na n -ty wyraz tego ciągu. Oblicz wyrazy a_8 i a_{20} ciągu (a_n) o początkowych wyrazach:

a) 2, 4, 6, 8, 10, ..., b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$, c) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$

Przykład 7. Wyznacz wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} ciągu a_n , gdy:

a) $a_n = -3n + 6$, b) $a_n = n^2 - 4n$.

Rozwiązanie

a) $a_n = -3n + 6$

$$a_{n-1} = -3(n-1) + 6 = -3n + 9$$

$$a_{n+1} = -3(n+1) + 6 = -3n + 3,$$

b) $a_n = n^2 - 4n$

$$a_{n-1} = (n-1)^2 - 4(n-1) = n^2 - 6n + 5$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 4(n+1) = n^2 - 2n - 3.$$

Ćwiczenie 9. Wyznacz wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} ciągu (a_n) , gdy:

a) $a_n = -3$, b) $a_n = 4n - 1$, c) $a_n = -n^2 + n$.

Ciąg liczbowy (a_n) możemy wyznaczyć, gdy znany jest wzór na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

Definicja

Sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n) nazywamy wyrażenie

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$ gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

$S_1 = a_1$	$a_1 = S_1$
$S_2 = \underbrace{a_1 + a_2}_{S_1} = S_1 + a_2$	$a_2 = S_2 - S_1$
$S_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{S_2} + a_3 = S_2 + a_3$	$a_3 = S_3 - S_2$
.....	
$S_{n-1} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}}_{S_{n-2}} + a_{n-1} = S_{n-2} + a_{n-1}$	$a_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2}$
$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n = S_{n-1} + a_n$	$a_n = S_n - S_{n-1}$, gdy $n \geq 2$.

Przykład 8. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona jest

wzorem $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Oblicz wyrazy a_1, a_2, a_{20} ciągu (a_n) .
- Oblicz sumę $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20}$ wyrazów tego ciągu (a_n) .
- Wyznacz wzór na n -ty wyraz tego ciągu (a_n) .

Rozwiązanie

a) $a_1 = S_1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)}{6} = 1$

$$a_2 = S_2 - S_1 = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} - \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 4,$$

$$a_{20} = S_{20} - S_{19} = \frac{20(20+1)(2 \cdot 20 + 1)}{6} - \frac{19 \cdot (19+1) \cdot (2 \cdot 19 + 1)}{6} = 400.$$

b) $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20} = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{20}}_{S_{20}} - \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_9)}_{S_9} = S_{20} - S_9 =$

$$= \frac{20(20+1)(2 \cdot 20 + 1)}{6} - \frac{9(9+1)(2 \cdot 9 + 1)}{6} = 2870 - 285 = 2585.$$

$$\text{c) } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1) \cdot (n-1+1)[2(n-1)+1]}{6} = \frac{6n^2}{6} = n^2,$$

czyli $a_n = n^2$, gdy $n \geq 2$.

Odp.: a) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{20} = 400$, b) 2585, c) $a_n = n^2$.

Ćwiczenie 10. Oblicz wyrazy a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 ciągu (a_n) , w którym suma n początkowych jego wyrazów określona jest wzorem:

$$\text{a) } S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{b) } S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad \text{c) } S_n = n^2 + n.$$

Uwaga

Ciąg można określić między innymi poprzez:

- podanie wzoru ogólnego na n -ty wyraz ciągu,
- podanie wszystkich wyrazów ciągu, jeżeli jest to ciąg skończony,
- podanie wzoru na sumę jego n początkowych wyrazów,
- podanie jego pierwszego wyrazu lub kilku początkowych wyrazów i reguły wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu w zależności od poprzednich, czyli podanie wzoru rekurencyjnego ciągu.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, ..., 2000.

2. a) 5, 15, 45, 135, b) -8, -6, -4, -2, c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$.

3. $p_5 = \frac{99}{70}$, $p_6 = \frac{239}{169}$, $p_7 = \frac{577}{408}$. 4. $f(n) = n^2$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

5. $a_7 = -5$, $a_8 = -18$, $a_9 = -32$, $a_{10} = -47$, $a_{11} = -63$.

6. a) $D_a = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = D_b$,

b) $(a_n) = (4, -3, 3, -2, 2, -1, 1, 0)$, $(b_n) = (-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0)$.

7. a) 0, -3, -8, -15, -24, b) -2, 2, -2, 2, -2, c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}$.

8. a) $a_n = 2n$, $a_8 = 16$, $a_{20} = 40$, b) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_8 = \frac{1}{64}$, $a_{20} = \frac{1}{400}$,

c) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, $a_8 = -\frac{1}{15}$, $a_{20} = -\frac{1}{39}$.

9. a) $a_{n-1} = -3$, $a_{n+1} = -3$, b) $a_{n-1} = 4n-5$, $a_{n+1} = 4n+3$, c) $a_{n-1} = -n^2 + 3n - 2$, $a_{n+1} = -n^2 - n$.

10. a) 1, 2, 3, 4, 5, b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, c) 2, 4, 6, 8, 10.

Zadania utrwalające

3.1. Wszystkie wyrazy ciągu tworzy się według pewnej reguły. Ustal przykładową regułę tworzenia kolejnych wyrazów ciągu i zachowując ją, podaj dwa następne jego wyrazy, gdy:

a) 1024, 512, 256, 128, ... ,

b) 52, 48, 44, 40, ... ,

c) -3, 6, -12, 24, ... ,

d) 21, 25, 28, 30,

3.2. Ustal przykładową regułę tworzenia kolejnych wyrazów ciągu i zachowując ją, podaj liczby, które należy wpisać w nawiasy:

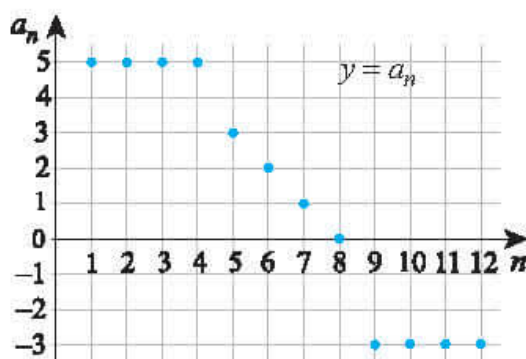
a) 21, 25, 28, (...), (...), 31, 30,

b) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, (...), (...), $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$.

3.3. Na rysunku przedstawiono wykres skończonego ciągu (a_n) .

a) Podaj dziedzinę D_a tego ciągu.

b) Określ ciąg przez wypisanie jego kolejnych wyrazów.



3.4. Wyrazy ciągu (31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31) są liczbami dni poszczególnych miesięcy roku nieprzestępnego (zwykłego).

a) Czy kwartały w roku zwykłym i w roku przestępnym mają równe liczby dni?

b) Czy półrocza w roku zwykłym i w roku przestępnym mają równe liczby dni?

c) Którym dniem roku jest dzień 1 września w roku zwykłym, a którym w roku przestępnym?

3.5. Podaj pięć początkowych wyrazów ciągu, jeżeli jego wyraz a_n określony jest wzorem:

a) $a_n = n^2 - 1$,

b) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$,

c) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

d) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{2n}$,

e) $a_n = \frac{1}{(-2)^n}$,

f) $a_n = (-1)^n (n^2 + 1)$.

3.6. Podaj cztery początkowe wyrazy nieskończonego ciągu (a_n) , który jest funkcją przyporządkowującą liczbie naturalnej dodatniej:

a) jej kwadrat, b) jej sześćcian.

Napisz wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

3.7. Dla ciągu o początkowych wyrazach $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$, którego wszystkie wyrazy tworzy się według określonej reguły, ustal regułę wyznaczania kolejnych jego wyrazów i zachowując ją, podaj wzór na n -ty wyraz ciągu.

3.8. Rozstrzygnij, czy liczba 100 jest wyrazem nieskończonego ciągu (a_n) określonego wzorem:

a) $a_n = 2n - 1$,

b) $a_n = 4n + 4$,

c) $a_n = 2^n$,

d) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

e) $a_n = 2n(12n+1)$,

f) $a_n = (n+1)^4$.

3.9. Rozstrzygnij, czy w ciągu (a_n) określonym wzorem $a_n = 4n^2 + 15n - 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$, wszystkie wyrazy są liczbami podzielnymi przez 9. Odpowiedź uzasadnij.

3.10. Określ, które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne, gdy:

a) $a_n = n^2 - 9$,

b) $a_n = n^2 - 6n$,

c) $a_n = 3n^2 - 4n + 5$,

d) $a_n = -2n^2 - 4$,

e) $a_n = 2n^2 - 16$,

f) $a_n = 16 - n^2$.

3.11. Uzasadnij, że wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych, gdy:

D a) $a_n = -n^2 - 5n$, $b_n = n$,

b) $a_n = 2n^3$, $b_n = 2n^2 - n$.

3.12. Określ, które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero, gdy:

a) $a_n = 2n(n-4)$,

b) $a_n = 4n^2(n^2+1)$,

c) $a_n = n^2 + 4n + 4$,

d) $a_n = n^3 - 4n^2 + 4n$.

3.13. Wyznacz wyrazy ciągu (a_n) , które są liczbami całkowitymi, gdy:

a) $a_n = \frac{n+3}{n}$,

b) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$,

c) $a_n = \frac{100-n^2}{n^2}$.

3.14. Napisz wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) , którego suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem:

a) $S_n = \frac{(3n-1) \cdot n}{2}$,

b) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

c) $S_n = (9-n) \cdot n$.

3.15. Oblicz dwunasty wyraz ciągu (a_n) , wiedząc, że suma n jego początkowych wyrazów określona jest wzorem $S_n = (-1)^n \cdot n^2$.

Ciąg określony rekurencyjnie

Jednym ze sposobów przedstawienia ciągu jest określenie go na podstawie definicji rekurencyjnej, tj. poprzez podanie jego pierwszego wyrazu lub kilku początkowych i reguły wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu w zależności od wartości wyrazów poprzednich.

Przykład 9. Wypisz pięć początkowych wyrazów nieskończonego ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie w następujący sposób

$$\text{a) } \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = b_{n-1} + n, \text{ gdy } n \geq 2 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 4 \\ c_n = \frac{c_{n-2} + c_{n-1}}{2}, \text{ gdy } n \geq 3 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

a)

n	$b_n = b_{n-1} + n, \text{ gdy } n \geq 2$
1	$b_1 = 1$
2	$b_2 = b_1 + 2 = 3$
3	$b_3 = b_2 + 3 = 6$
4	$b_4 = b_3 + 4 = 10$
5	$b_5 = b_4 + 5 = 15$

b)

n	$c_n = \frac{c_{n-2} + c_{n-1}}{2}, \text{ gdy } n \geq 3$
1	$c_1 = 2$
2	$c_2 = 4$
3	$c_3 = \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$
4	$c_4 = \frac{c_2 + c_3}{2} = \frac{4 + 3}{2} = \frac{7}{2}$
5	$c_5 = \frac{c_3 + c_4}{2} = \frac{13}{4}$

Odp.: a) $(b_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \dots)$, b) $(c_n) = \left(2, 4, 3, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \dots\right)$.

Ćwiczenie 11. Wypisz pięć początkowych wyrazów ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n - 3, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}, & \text{b) } & \begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = b_n - n^2 + 3, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}, \\ \text{c) } & \begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \\ c_{n+1} = 4(c_n)^2, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}, & \text{d) } & \begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 2 \\ d_n = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}, \text{ gdy } n \geq 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Przykład 10. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie w następujący sposób

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases} \text{ Wyznacz wzór na } n\text{-ty wyraz tego ciągu.}$$

Rozwiązanie

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) oraz staramy się odkryć zależność między n i wartością a_n .

Zauważamy, że $a_n = 7 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 3$.

Odp.: $a_n = 4n + 3$.

n	$a_{n+1} = a_n + 4$
	$a_1 = 7$
1	$a_2 = a_1 + 4 = 7 + (2-1) \cdot 4$
2	$a_3 = a_2 + 4 = 7 + (3-1) \cdot 4$
3	$a_4 = a_3 + 4 = 7 + (4-1) \cdot 4$
4	$a_5 = a_4 + 4 = 7 + (5-1) \cdot 4$

Ćwiczenie 12. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu określonego wzorem rekurencyjnym:

$$\text{a) } \begin{cases} a_1 = -10 \\ a_{n+1} = a_n + 9 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$$

Przykład 11. Ciąg (a_n) jest określony wzorem ogólnym $a_n = n^2 - 2$. Określ ten ciąg wzorem rekurencyjnym.

Rozwiązanie

$$a_1 = 1^2 - 2 = -1$$

Wyznaczamy wyraz a_{n+1} :

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 2 = n^2 + 2n + 1 - 2$$

$$a_{n+1} = \underbrace{n^2 - 2}_{a_n} + 2n + 1$$

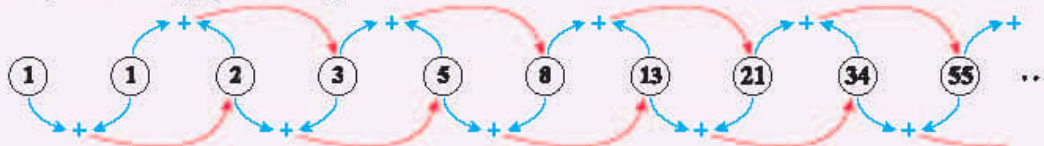
Wyraz a_{n+1} zapisujemy w zależności od wyrazu a_n :

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

Odp.: Wzór rekurencyjny ciągu (a_n) ma postać $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \text{ gdy } n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$

Ćwiczenie 13. Ciąg (a_n) jest określony wzorem ogólnym. Określ ten ciąg wzorem rekurencyjnym, gdy: a) $a_n = 4n + 2$, b) $a_n = 3^{n-1}$.

Ćwiczenie 14. Włoski uczony Fibonacci^{*)} opisał ciąg liczbowy nieskończony $(1, 1, 2, 3, 5, \dots)$, nazywany ciągiem Fibonacciego. Kolejne wyrazy tego ciągu można wyznaczyć według poniższego schematu:



Odszukaj w literaturze lub w Internecie informacje o Fibonaccim i opisanym przez niego ciągu. Podaj przykłady zjawisk ze świata przyrody, które opisuje ten ciąg.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $(a_n) = (7, 4, 1, -2, -5, \dots)$, b) $(b_n) = (5, 7, 6, 0, -13, \dots)$, c) $(c_n) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots\right)$,

d) $(d_n) = \left(1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots\right)$. 12. a) $a_n = 9n - 19$, b) $b_n = 2^n$.

13. a) $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + 4, \text{ gdy } n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$, b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n, \text{ gdy } n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$.

Zadania utrwalające

3.16. Wypisz pięć początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) zdefiniowanego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -\frac{1}{a_n}, \text{ gdy } n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$,

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n, \text{ gdy } n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$,

c) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n, \text{ gdy } n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$,

d) $\begin{cases} a_1 = \frac{3}{4} \\ a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) a_n, \text{ gdy } n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$.

3.17. Zapisz wzór rekurencyjny ciągu (a_n) określonego za pomocą opisu słownego i oblicz wyraz piąty.

- Pierwszy wyraz ciągu jest równy -2 . Każdy kolejny wyraz jest równy różnicy kwadratu wyrazu poprzedniego i liczby 4.
- Pierwszy wyraz ciągu jest równy $\sqrt{2}$. Każdy kolejny wyraz jest o połowę mniejszy od poprzedniego.
- Pierwszy wyraz ciągu jest równy 0, a drugi wyraz 1. Każdy kolejny wyraz jest podwojoną sumą dwóch poprzednich wyrazów.

^{*)} Czytaj: Fibonaczi.

3.18. Oblicz $a_3 + a_4 + a_5$, gdy $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$.

3.19. Ciąg (p_n) jest ciągiem pól kwadratów o boku n , gdzie $n \in \mathbb{N}^+$. Określ ten ciąg:

a) wzorem ogólnym,

b) wzorem rekurencyjnym.

3.20. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu ($n \in \mathbb{N}^+$) określonego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 10 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{5} \\ a_{n+1} = a_n \cdot (-1) \end{cases}$,

e) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{-1}{a_n} \end{cases}$,

f) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^3 \end{cases}$.

3.21. Ciąg (a_n) , gdzie $n \in \mathbb{N}^+$, jest określony wzorem ogólnym. Określ ten ciąg wzorem rekurencyjnym, gdy:

a) $a_n = 5n$,

b) $a_n = 3 - 4n$,

c) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Monotoniczność ciągu liczbowego

Każdy ciąg liczbowy jest funkcją, której dziedziną jest zbiór lub podzbiór zbioru liczb naturalnych dodatnich.

Definicje określające monotoniczność funkcji odnoszą się również do ciągów liczbowych.

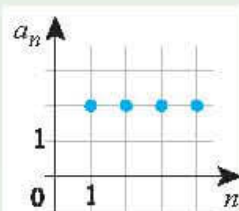
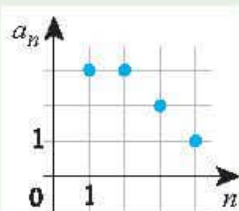
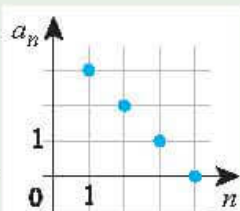
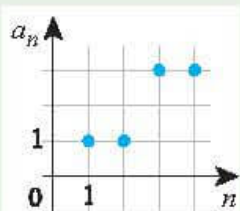
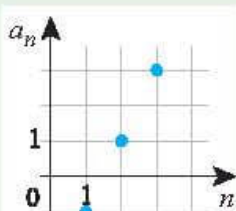
Wśród ciągów liczbowych można wyróżnić ciągi: rosnące, niemalejące, malejące, nierosnące oraz ciągi stałe. O takich ciągach mówimy, że są **monotoniczne**.

Monotoniczność ciągu (a_n) określamy, badając znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.

Definicja

Dla każdej liczby naturalnej dodatniej n ($n \in \mathbb{N}^+$) ciąg (a_n) nazywamy:

- rosnącym,
 - niemalejącym,
 - malejącym,
 - nierosnącym,
 - stałym,
- gdy $a_{n+1} - a_n > 0$, gdy $a_{n+1} - a_n \geq 0$, gdy $a_{n+1} - a_n < 0$, gdy $a_{n+1} - a_n \leq 0$, gdy $a_{n+1} - a_n = 0$.



Ćwiczenie 15. Ciąg (a_n) ma pięć wyrazów. Narysuj wykres ciągu (a_n) i określ, czy ciąg ten jest rosnący lub niemalejący, malejący lub nierosnący czy też stały, gdy:

a) $a_n = \frac{12}{n}$, b) $a_n = n^2 - 4$, c) $a_n = \sqrt{2}$.

Przykład 12. Zbadaj monotoniczność ciągu określonego wzorem ogólnym:

a) $a_n = 3n - 5$, gdy $n \in N^+$, b) $b_n = \frac{1}{2^n}$, gdy $n \in N^+$, c) $c_n = n^2 - 4$, gdy $n \in N^+$.

Rozwiązanie

Aby określić monotoniczność ciągu, badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.

a) $a_{n+1} = 3(n+1) - 5 = 3n + 3 - 5 = 3n - 2$,

$$a_{n+1} - a_n = 3n - 2 - (3n - 5) = 3n - 2 - 3n + 5 = 3, \text{ czyli } a_{n+1} - a_n > 0.$$

Ciąg (a_n) jest rosnący.

b) $b_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2 \cdot 2^n}$,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2 \cdot 2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{1-2}{2 \cdot 2^n} = -\frac{1}{2 \cdot 2^n} = -\frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$2^{n+1} > 0$$

$$-\frac{1}{2^{n+1}} < 0, \text{ czyli } b_{n+1} - b_n < 0.$$

Ciąg (b_n) jest malejący.

c) $c_{n+1} = (n+1)^2 - 4 = n^2 + 2n - 3$,

$$c_{n+1} - c_n = n^2 + 2n - 3 - (n^2 - 4) = n^2 + 2n - 3 - n^2 + 4 = 2n + 1,$$

$$2n + 1 > 0, \text{ gdy } n \in N^+, \text{ czyli } c_{n+1} - c_n > 0.$$

Ciąg (c_n) jest rosnący.

Odp.: a) (a_n) jest ciągiem rosnącym, b) (b_n) jest ciągiem malejącym,

c) (c_n) jest ciągiem rosnącym.

Ćwiczenie 16. Zbadaj monotoniczność ciągu określonego wzorem ogólnym:

a) $a_n = n + 2$, gdy $n \in N^+$, b) $b_n = \frac{1}{3^n}$, gdy $n \in N^+$, c) $c_n = \frac{1}{n}$, gdy $n \in N^+$.

Przykład 13. Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem

ogólnym $a_n = \frac{(-2)^n}{n}$ i zaznacz je w układzie współrzędnych.

Czy jest to ciąg monotoniczny?

Rozwiązanie

$$a_1 = \frac{(-2)^1}{1} = -2,$$

$$a_2 = \frac{(-2)^2}{2} = 2,$$

$$a_3 = \frac{(-2)^3}{3} = -2\frac{2}{3},$$

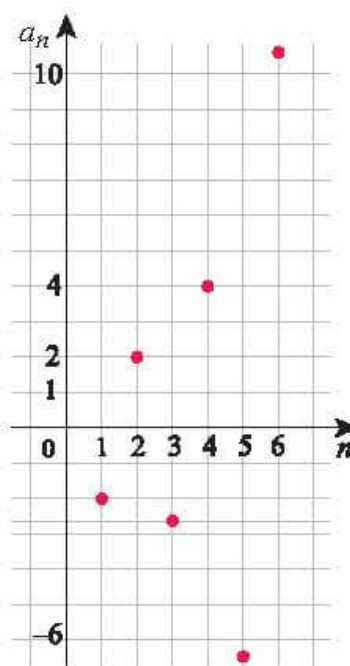
$$a_4 = \frac{(-2)^4}{4} = 4,$$

$$a_5 = \frac{(-2)^5}{5} = -6\frac{2}{5},$$

$$a_6 = \frac{(-2)^6}{6} = 10\frac{2}{3}.$$

Zauważamy, że $a_1 < a_2$ ale $a_2 > a_3$ zatem żaden z warunków monotoniczności ciągu nie jest spełniony.

Odp.: Ciąg (a_n) nie jest ciągiem monotonicznym.



Ćwiczenie 17. Sporządź wykres ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(-3)^n}{n+1}$, gdy $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Określ, czy ciąg jest monotoniczny. Odpowiedź uzasadnij.

Przykład 14. Uzasadnij, że ciąg określony wzorem ogólnym $a_n = (-1)^n$ nie jest monotoniczny.

Rozwiązanie*I sposób*

Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1} = -1 \cdot (-1)^n,$$

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = (-1)^n \cdot (-1 - 1) = -2 \cdot (-1)^n.$$

Zauważamy, że $-2 \cdot (-1)^n = \begin{cases} 2, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ -2, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases}$,

więc ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

II sposób

Zauważamy, że $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, ...

Kolejne wyrazy ciągu na przemian są różnych znaków, więc ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 18. Uzasadnij, że nie jest monotoniczny ciąg o wzorze ogólnym:

a) $a_n = (-1)^{n+1}$, b) $a_n = 5 \cdot (-1)^n$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. Ciąg (a_n) jest: a) malejący, b) rosnący, c) stały. 16. Ciąg (a_n) jest: a) rosnący, b) malejący, c) malejący. 17. Ciąg (a_n) nie jest monotoniczny (ciąg naprzemienny). 18. Wskazówka. Zauważ, że ciąg (a_n) ma wyrazy: a) $1, -1, 1, -1, \dots$, b) $-5, 5, -5, 5, \dots$

Zadania utrwalające

3.22. Sporządź wykres ciągu określonego wzorem $a_n = (-1)^n \cdot n + n$, gdy $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Czy jest to ciąg monotoniczny?

3.23. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) , gdy:

- a) $a_n = n^2 - 1$, b) $a_n = 2n^2$, c) $a_n = \frac{3n}{n+1}$,
d) $a_n = 3n - n^2$, e) $a_n = \frac{2-3n}{n+1}$, f) $a_n = \frac{1-n^2}{2n^2}$.

3.24. Zbadaj monotoniczność ciągu określonego wzorem:

- a) $a_n = 2 - 5n$, b) $a_n = n^2 + n$, c) $a_n = n^2 - 1$, d) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$.

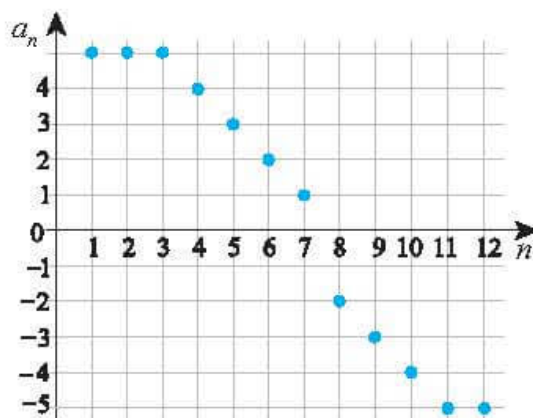
3.25. Ciąg (a_n) określony jest wzorem

$$a_n = \begin{cases} 3n, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą naturalną parzystą} \\ 2n+1, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą naturalną nieparzystą} \end{cases}$$

- a) Podaj 10 początkowych wyrazów ciągu (a_n) .
b) Czy ciąg (a_n) jest ciągiem monotonicznym? Odpowiedź uzasadnij.

3.26. Na rysunku przedstawiono wykres skończonego ciągu (a_n) .

- a) Określ ten ciąg przez wypisanie jego wyrazów.
b) Czy ciąg ten jest ciągiem monotonicznym? Odpowiedź uzasadnij.



3.27. Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny:

- a) $a_n = 4 - n$, b) $a_n = n^2 - 2n$, c) $a_n = n^2 + 4n$,
d) $a_n = \frac{n+1}{n}$, e) $a_n = \frac{2n}{n+2}$, f) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, gdy $n \in \mathbb{N}^+$. Wynika z tego, że:

A. $a_k = \frac{k-1}{k}$, B. $a_{2n+1} = \frac{2n}{n+1}$, C. $a_{100-n} = \frac{99-n}{101-n}$, D. $a_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Szósty wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = 2^n - n + 1$ jest równy:

A. 16, B. 27, C. 28, D. 59.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Malejący jest ciąg (a_n) określony wzorem:

A. $a_n = -n^2 + 6n$, B. $a_n = 2 - \frac{3}{4}n$, C. $a_n = 3 + \frac{2}{3}n$, D. $a_n = (-1)^{n-1}$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba wyrazów niedodatnich ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = n^2 - 6n + 5$ jest równa:

A. 3, B. 4, C. 5, D. 6.

5. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + n - 4 \end{cases}$.

$a_1 = 2a_2$	P	F
$a_3 = a_1 + a_2$	P	F
$a_2 \cdot a_3 = a_3$	P	F
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 12$	P	F

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona jest wzorem $S_n = 3n - 2$. Trzeci wyraz ciągu (a_n) jest równy:

A. 3, B. -1, C. 7, D. 1.

7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

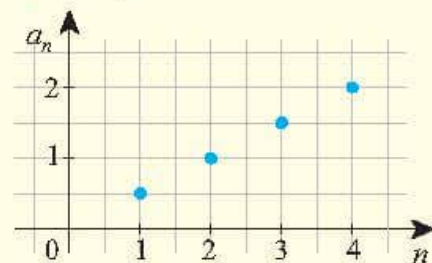
Ciąg (a_n) , w którym $S_n = n^2 + 2n$ ma wzór ogólny:

- A. $a_n = 2n - 1$, B. $a_n = n^2$, C. $a_n = 2n + 1$, D. $a_n = n^2 + 2n$.

8. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku przedstawiono wykres ciągu (a_n) określonego wzorem:

- A. $a_n = 2n$, B. $a_n = n - 2$,
C. $a_n = \frac{n}{2}$, D. $a_n = -\frac{1}{2}n$.



9. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ciąg (b_n) określony jest wzorem $b_n = n^2 - 4n + 3$. Wyrazy ciągu równe zero to:

- A. b_1 i b_2 , B. b_1 i b_4 , C. b_1 i b_3 , D. b_2 i b_3 .

10. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Malejący jest ciąg określony wzorem:

- A. $a_n = -(n+1)^2$, B. $a_n = (-\sqrt{3}n)^n$, C. $a_n = \left(\frac{-2}{n}\right)^n$, D. $a_n = n^2 - 6n$.

11. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{n-1}{2}$. Różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa:

- A. $\frac{n}{2}$, B. $\frac{2n+1}{2}$, C. $\frac{1}{2}$, D. $\frac{n+2}{2}$.

12. Suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ciągu (a_n) jest równa 2^n .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Piąty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. 16, B. 32, C. 8, D. 2.

13. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ósmy wyraz ciągu $a_n = \log_2 n + \log_8 n$ jest równy:

- A. 4, B. 8, C. 6, D. 0.

4. Ciągi arytmetyczne i geometryczne

Pojęcie ciągu arytmetycznego

Wśród ciągów liczbowych wyróżniamy ciągi arytmetyczne i geometryczne.

Definicja

Ciągiem arytmetycznym (a_n) nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu.



Ćwiczenie 1. Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest grafem. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakujące liczby. Podaj wyraz a_1 i różnicę r .

- a) b)

Ćwiczenie 2. Podaj różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) , gdy:

- a) $(a_n) = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \dots)$, b) $(a_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \dots\right)$, c) $(a_n) = (1,95; 1,82; 1,69; \dots)$.

Przykład 1. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 3n - 2$.

- a) Oblicz wyrazy: a_1, a_2, a_3, a_5, a_6 .
b) Oblicz różnice: $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_6 - a_5, a_{20} - a_{19}$.
c) Wyznacz różnicę $a_{n+1} - a_n$.
d) Czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym?

Rozwiązanie

a) $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$
 $a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$
 $a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$
 $a_5 = 3 \cdot 5 - 2 = 13$
 $a_6 = 3 \cdot 6 - 2 = 16$

b) $a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$
 $a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3$
 $a_6 - a_5 = 16 - 13 = 3$
 $a_{20} - a_{19} = 3 \cdot 20 - 2 - (3 \cdot 19 - 2) = 3$

c) $a_{n+1} - a_n = 3 \cdot (n+1) - 2 - (3n - 2) = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3$

d) Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3n - 2$ jest ciągiem arytmetycznym,

bo $r = a_{n+1} - a_n = 3$, gdy $n \in \mathbb{N}^+$.

Ćwiczenie 3. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 3 - 2n$.

a) Oblicz wyrazy: $a_1, a_2, a_6, a_{20}, a_{161}$.

b) Wyznacz wyrazy: $a_{n+1}, a_{n-1}, a_{2n}, a_{n+4}$.

c) Wyznacz różnicę $a_{n+1} - a_n$.

Czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym?

Uwaga

- W ciągu arytmetycznym (a_n) różnica r określona jest wzorem

$$r = a_{n+1} - a_n, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}^+.$$

- Ciąg arytmetyczny można określić wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r, \text{ gdy } n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}, \quad \text{gdzie } \begin{array}{l} a - \text{pierwszy wyraz ciągu,} \\ r - \text{różnica ciągu arytmetycznego.} \end{array}$$

Przykład 2. Oblicz różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) oraz podaj trzy następne jego wyrazy, wiedząc, że dwa początkowe wyrazy tego ciągu to:

a) 0 i 0,25, b) 10 i 7.

Rozwiązanie

Z warunków zadania:

a) $a_1 = 0$ i $a_2 = 0,25$

$$r = a_2 - a_1 = 0,25 - 0 = 0,25$$

$$a_3 = a_2 + r = 0,25 + 0,25 = 0,50$$

$$a_4 = a_3 + r = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

$$a_5 = a_4 + r = 0,75 + 0,25 = 1.$$

b) $a_1 = 10$ i $a_2 = 7$

$$r = a_2 - a_1 = 7 - 10 = -3$$

$$a_3 = a_2 + r = 7 - 3 = 4$$

$$a_4 = a_3 + r = 4 - 3 = 1$$

$$a_5 = a_4 + r = 1 - 3 = -2.$$

Odp.: a) 0,5; 0,75; 1, b) 4, 1, -2.

Ćwiczenie 4. Oblicz różnicę r i podaj trzy następne wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) , gdy jego kolejne początkowe wyrazy to liczby:

a) 7, 12, 17, ... ,

b) 4, 4, 4, 4, ... ,

c) 1; 0,9; 0,8; 0,7;

Ćwiczenie 5. Zapisz w postaci rekurencyjnej ciąg arytmetyczny (a_n) , gdy:

a) $a_n = 2n - 1$,

b) $a_n = 3n + 2$,

c) $a_n = -5n + \sqrt{2}$.

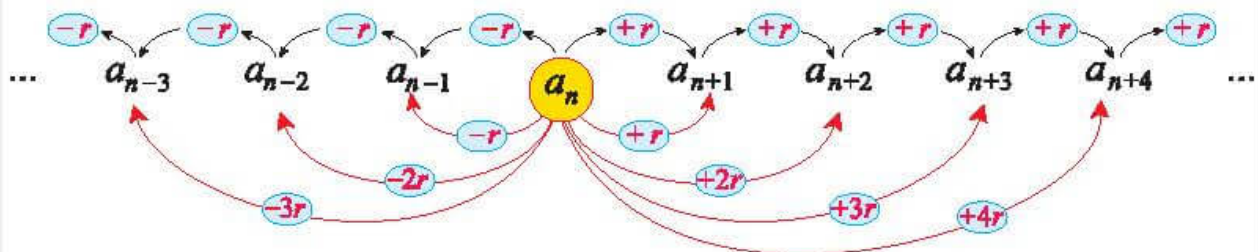
Uwaga

Z definicji ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r wynika, że:

$$a_n + r = a_{n+1}, \quad a_n + 2r = a_{n+2}, \quad \dots, \quad a_n + kr = a_{n+k},$$

$$a_n - r = a_{n-1}, \quad a_n - 2r = a_{n-2}, \quad \dots, \quad a_n - kr = a_{n-k}.$$

Ilustruje to poniższy graf.



Ćwiczenie 6. Oblicz, który wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r otrzymamy, gdy do jego pięćdziesiątego wyrazu dodamy:

- a) r , b) $7r$, c) $-7r$, d) $15r$, e) $-46r$, f) $-49r$.

Przykład 3. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r i pierwszym wyrazie a_1 .

Rozwiązanie

Z definicji ciągu arytmetycznego:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= a_1 + r = a_1 + (2-1) \cdot r \\ a_3 &= a_2 + r = \underbrace{a_1 + r}_{a_2} + r = a_1 + 2 \cdot r = a_1 + (3-1) \cdot r \\ a_4 &= a_3 + r = \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3} + r = a_1 + 3 \cdot r = a_1 + (4-1) \cdot r \\ a_5 &= a_4 + r = \underbrace{a_1 + 3r}_{a_4} + r = a_1 + 4 \cdot r = a_1 + (5-1) \cdot r \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Odp.: $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Twierdzenie

Jeżeli w ciągu arytmetycznym (a_n) wyrazem pierwszym jest a_1 i różnicą jest r , to ciąg ten określony jest wzorem $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

Ćwiczenie 7. Oblicz wyrazy: a_7 , a_{20} , a_{43} , a_{100} , a_n ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r , w którym:

- a) $a_1 = 4$, $r = 2$, b) $a_1 = 0$, $r = -3$, c) $a_1 = 5$, $r = 0$,
 d) $a_2 = 5$, $r = -1$, e) $a_3 = 5$, $r = 4$, f) $a_{60} = 60$, $r = -2$.

Uwaga

Liczby naturalne a_n , gdzie $n \in \mathbb{N}^+$, które przy dzieleniu przez dodatnią liczbę naturalną k dają resztę p , tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = p + k(n-1)$.

Na przykład, jeżeli: $a_n = 1 + 3(n-1)$, to $(a_n) = (1, 4, 7, 10, 13, \dots)$,
 $a_n = 3 + 4(n-1)$, to $(a_n) = (3, 7, 11, 15, 19, \dots)$.

Ćwiczenie 8. Podaj własność, jaką mają liczby tworzące ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem: a) $a_n = 2n + 1$, b) $a_n = 2n - 1$, c) $a_n = 5n + 3$, d) $a_n = 5n - 2$.
 Podaj trzy początkowe wyrazy tego ciągu.

Ćwiczenie 9. Napisz ogólną postać wszystkich liczb naturalnych, które:

- a) dzielą się przez 5 bez reszty, b) przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2,
 c) przy dzieleniu przez 8 dają resztę 7, d) przy dzieleniu przez 4 dają resztę 2.

Przykład 4. W 1582 roku papież Grzegorz XIII w wyniku odkryć astronomów epoki renesansu wprowadził reformę kalendarza. Ustalono, że lata podzielne przez 4 będą przestępne, z wyjątkiem tych lat, które kończą się cyframi 00 i nie są podzielne przez 400. Pozostałe lata to lata zwykłe.

- a) Wypisz te lata zwykłe, które minęły od czasu powstania kalendarza gregoriańskiego i które kończyły się cyframi 00. Czy tworzą one ciąg arytmetyczny?
 b) Który rok był setnym rokiem przestępnym, licząc od czasu powstania kalendarza gregoriańskiego?

Rozwiązanie

- a) Lata: 1700, 1800, 1900, tj. liczby 1700, 1800, 1900, tworzą trójwyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 1700$ i $r = 100$.
 b) Zauważamy, że lata przestępne są liczbami naturalnymi większymi od 1582 i podzielnymi przez 4. Zatem liczby wyrażające lata podzielne przez 4 od roku 1584 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = 1584$ oraz $r = 4$. Wyraz a_{100+3} (bo lata 1700, 1800 i 1900 nie były przestępne) jest setnym rokiem przestępnym, czyli

$$a_{103} = a_1 + 102r = 1584 + 102 \cdot 4 = 1992. \qquad a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Odp.: Rok 1992 był setnym rokiem przestępnym od czasu powstania kalendarza gregoriańskiego.

Ćwiczenie 10. Ile było lat przestępnych od czasu powstania kalendarza gregoriańskiego do końca XIX wieku? Pamiętaj, że lata 1700, 1800 i 1900 nie były przestępne.

Przykład 5. Ile jest liczb naturalnych dodatnich podzielnych przez 7 i mniejszych niż 1000?

Rozwiązanie

Zauważamy, że liczby naturalne dodatnie podzielne przez 7 i mniejsze niż 1000 tworzą skończony ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r , w którym

$$a_1 = 7, \quad r = 7.$$

Największą liczbą naturalną mniejszą niż 1000 i podzielną przez 7 jest 994, więc

$$a_n = 994.$$

Zatem $994 = 7 + (n-1) \cdot 7$, skąd $n = 142$.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Odp.: Liczb naturalnych dodatnich podzielnych przez 7 i mniejszych niż 1000 jest 142.

Ćwiczenie 11. Oblicz, ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez:

a) 2, b) 3, c) 4, d) 6, e) 11, f) 7.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $a_1 = 100$, $r = -12$, b) $a_1 = 14$, $r = 3$. 2. $r = \sqrt{2}$, b) $r = \frac{1}{2}$, c) $r = 0,13$.

3. a) $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_6 = -9$, $a_{20} = -37$, $a_{161} = -319$,

b) $a_{n+1} = 1 - 2n$, $a_{n-1} = 5 - 2n$, $a_{2n} = 3 - 4n$, $a_{n+4} = -5 - 2n$, c) $a_{n+1} - a_n = -2$, tak.

4. a) $r = 5$, 22, 27, 32, b) $r = 0$, 4, 4, 4, c) $r = -0,1$; 0,6; 0,5; 0,4.

5. a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$, c) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} - 5 \\ a_{n+1} = a_n - 5 \end{cases}$. Wskazówka. Oblicz $r = a_{n+1} - a_n$.

6. a) a_{51} , b) a_{57} , c) a_{43} , d) a_{65} , e) a_4 , f) a_1 .

7. a) $a_7 = 16$, $a_{20} = 42$, $a_{43} = 88$, $a_{100} = 202$, $a_n = 2n + 2$,

b) $a_7 = -18$, $a_{20} = -57$, $a_{43} = -126$, $a_{100} = -297$, $a_n = -3n + 3$, c) $a_7 = a_{20} = a_{43} = a_{100} = a_n = 5$,

d) $a_7 = 0$, $a_{20} = -13$, $a_{43} = -36$, $a_{100} = -93$, $a_n = -n + 7$,

e) $a_7 = 21$, $a_{20} = 73$, $a_{43} = 165$, $a_{100} = 393$, $a_n = 4n - 7$,

f) $a_7 = 166$, $a_{20} = 140$, $a_{43} = 94$, $a_{100} = -20$, $a_n = -2n + 180$.

8. a) Liczby, które przy dzieleniu przez 2 dają resztę 1; 3, 5, 7, b) liczby, które przy dzieleniu przez 2 dają resztę 1; 1, 3, 5, c) liczby, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3; 8, 13, 18, d) liczby, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3; 3, 8, 13.

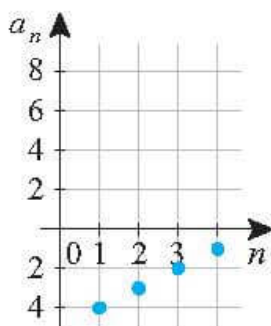
9. a) $a_n = 5n$, b) $a_n = 5n - 3$, c) $a_n = 8n - 1$, d) $a_n = 4n - 2$. 10. 77.

11. a) 45, b) 30, c) 22, d) 15, e) 9, f) 13.

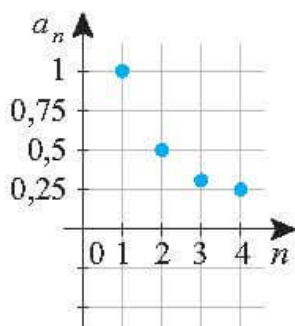
Zadania utrwalające

4.1. Na rysunku przedstawiony jest wykres ciągu. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

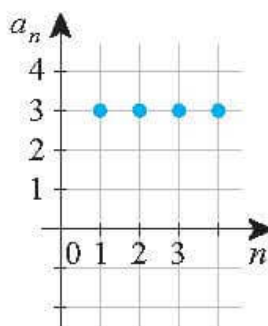
a)



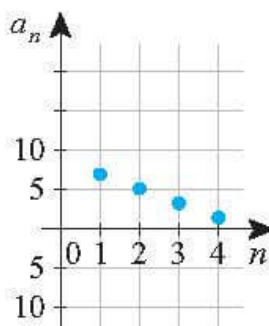
b)



c)



d)



4.2. Przepisz przykład do zeszytu i wiedząc, że ciąg arytmetyczny ma pięć wyrazów, w miejsce ■ wpisz brakujące liczby.

a) $(1, 5, 9, \blacksquare, \blacksquare)$,

b) $(-6, \blacksquare, -34, \blacksquare, -62)$,

c) $(\blacksquare, 9, \blacksquare, 1, \blacksquare)$,

d) $(\blacksquare, 0, \blacksquare, \frac{4}{5}, \blacksquare)$.

4.3. Napisz wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, którego dwoma początkowymi wyrazami są liczby:

a) 5, 9,

b) 10, 3,

c) $-\sqrt{2}$, 0,

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 0.

4.4. Oblicz wyraz pierwszy a_1 i różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = 15n - 12$,

b) $a_n = 3 - 14n$,

c) $a_n = 8 - 6n$,

d) $a_n = 4 + 3n$.

4.5. Przerysuj tabelę do zeszytu i wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r , w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę.

a_1	r	n	a_n
3	2	20	■
63	$-2\frac{1}{3}$	■	28
■	8	15	-88
0,5	■	21	10,5

4.6. Oblicz wyrazy a_1 i a_8 ciągu arytmetycznego (a_n) , gdy $a_5 = 3$, $r = 2$.

4.7. Sprawdź, czy ciąg określony podanym wzorem jest arytmetyczny.

a) $a_n = 3n - 2$,

b) $b_n = 3n^2 - 2$,

c) $c_n = \frac{1}{n}$,

d) $d_n = 2^{n-2}$,

e) $e_n = -n - 1$,

f) $f_n = (n+2)^2 - n^2$,

g) $h_n = g_{n+1} - g_n$, gdzie $g_n = n^2 + 1$.

4.8. Podaj, który wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r otrzymamy, gdy do jego:

- a) dwudziestego wyrazu dodamy jednomian $-12 \cdot r$,
- b) trzydziestego wyrazu dodamy jednomian $113 \cdot r$,
- c) setnego wyrazu dodamy jednomian $-98 \cdot r$.

4.9. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r . Oblicz:

- a) a_6 i a_{12} , gdy $a_1 = -3$ i $r = 3$,
- b) a_{20} i a_{40} , gdy $a_{11} = 30$ i $a_{21} = 20$,
- c) a_1 i a_{100} , gdy $a_5 = 8$ i $r = -2$,
- d) a_5 i a_{10} , gdy $a_7 = 0$ i $r = \log 2$.

4.10. Przepisz przykład do zeszytu i wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r , w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę.

- a) $a_1 = 5$, $a_5 = 1$, $a_9 = \blacksquare$,
- b) $a_7 = 11$, $a_{11} = 7$, $a_{20} = \blacksquare$,
- c) $a_1 = 4$, $a_4 = 19$, $a_{10} = \blacksquare$,
- d) $a_1 = \blacksquare$, $a_8 = 32$, $a_{20} = 92$.

4.11. Podaj własność, jaką mają liczby tworzące ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem:

- a) $a_n = 7n - 6$,
- b) $a_n = 6n + 3$,
- c) $a_n = 6n - 3$,
- d) $a_n = 9n + 7$,
- e) $a_n = 9n - 2$,
- f) $a_n = 8n + 5$.

4.12. Czy liczba 1000 jest wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n) , gdy:

- a) $a_n = 3n + 1$,
- b) $a_n = 5n - 4$,
- c) $a_n = 15n + 10$.

4.13. Liczby 2 i 7 są dwoma początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego. Które wyrazy tego ciągu należą do przedziału $(500; 520)$?

4.14. Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

Wykaż, że ciąg (a_n) może być określony wzorem $a_n = 2n + 8$.

4.15. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$. Sprawdź, czy jego wyrazy a_7 , a_{21} , a_{24} w podanej kolejności tworzą trzywyrazowy ciąg arytmetyczny.

4.16. Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, gdy:

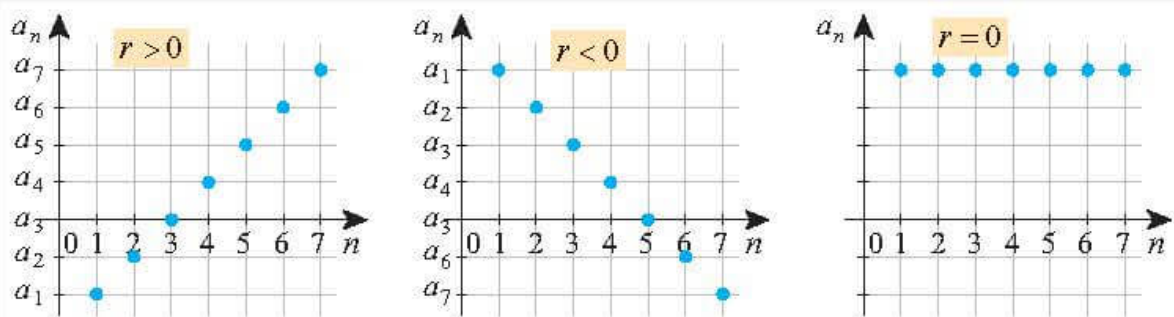
- a) $a_n = n - 5$,
- b) $a_n = 2 - 3n$,
- c) $a_n = (n+3)^2 - n^2$.

Własności ciągu arytmetycznego

Monotoniczność ciągu arytmetycznego zależy od różnicy r tego ciągu.

Uwaga

- Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:
 - rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy $r > 0$,
 - malejący wtedy i tylko wtedy, gdy $r < 0$,
 - stały wtedy i tylko wtedy, gdy $r = 0$.



- Wykresem ciągu arytmetycznego (a_n) jest zbiór odosobnionych punktów (n, a_n) , gdzie $n \in \mathbb{N}^+$ i $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

Przykład 6. Oblicz różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) i podaj, czy jest to ciąg rosnący, malejący czy stały, gdy jest on określony wzorem: a) $a_n = 7n + 3$, b) $b_n = 7 - 3n$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{7(n+1) + 3}_{a_{n+1}} - \underbrace{(7n + 3)}_{a_n} = 7, \quad r = 7 \text{ i } r > 0.$$

$$\text{b) } r = b_{n+1} - b_n = \underbrace{7 - 3(n+1)}_{b_{n+1}} - \underbrace{(7 - 3n)}_{b_n} = -3, \quad r = -3, \quad r < 0.$$

Odp.: a) $r = 7$, (a_n) jest ciągiem rosnącym, b) $r = -3$, (b_n) jest ciągiem malejącym.

Ćwiczenie 12. Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem:

$$\text{a) } a_n = 3n - 1, \quad \text{b) } a_n = 4 - 5n, \quad \text{c) } a_n = 7, \quad \text{d) } a_n = \frac{\sqrt{7n} - 2}{3}.$$

Ćwiczenie 13. Określ, czy nieskończony ciąg jest ciągiem arytmetycznym, gdy jego wyrazy spełniają warunek:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_{n+1} - a_n = 2, & \text{b) } b_{n+2} - b_n = -8, & \text{c) } c_{n+1} - c_n = 6, \\ \text{d) } d_{n+1} - d_n = n, & \text{e) } e_{n+3} - e_{n+1} = -10, & \text{f) } f_{n+1} - f_n = 2x, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Twierdzenie

W ciągu arytmetycznym (a_n) każde trzy kolejne wyrazy a_{n-1} , a_n , a_{n+1} ,

gdzie $n \geq 2$, spełniają warunek $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Z (założenie): (a_n) – ciąg arytmetyczny o różnicy r ,
 $n \in \mathbb{N}^+$ i $n \geq 2$, | T (teza): $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Dowód: $a_{n-1} + a_{n+1} = \underbrace{a_{n-1}}_{a_n - r} + \underbrace{a_{n+1}}_{a_n + r} = 2a_n$ $a_n - r - a_{n-1}$
 $a_n + r - a_{n+1}$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{cnw.}$$

Uwaga

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz, oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Przykład 7. Czy liczby $\sqrt{3}$, 2 , $4 - \sqrt{3}$, w podanej kolejności, są wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego?

Rozwiązanie

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} a_{n-1} = \sqrt{3} \\ a_n = 2 \\ a_{n+1} = 4 - \sqrt{3} \end{array} & \begin{array}{l} \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 4 - \sqrt{3}}{2} = 2, \text{ czyli} \\ \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n \end{array} \end{array}$$

Odp.: Liczby $\sqrt{3}$, 2 , $4 - \sqrt{3}$ są trzema kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego, ponieważ $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$.

Ćwiczenie 14. Sprawdź, czy trzy liczby w podanej kolejności, są wyrazami tego samego ciągu arytmetycznego.

a) $2 - 3\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3} + 2}$, $2 + \sqrt{3}$, b) $74 - \sqrt{37}$, 37 , $\sqrt{37}$, c) $\sqrt{3}$, 4 , $\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 15. Dla jakiej wartości x liczby w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego? a) 3 , x , 12 , b) $2x - 1$, 4 , 7 , c) 2 , $4x + 1$, $2x^2$, d) 2 , $x^2 + 1$, $2x^2$.

Przykład 8. Wyznacz różnicę dwóch różnych dowolnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ i wyraż jego różnicę r w zależności od tych wyrazów.

Rozwiązanie

Niech a_k i a_m będą różnymi wyrazami ($k \neq m$) ciągu (a_n) , wtedy:

$$a_k - a_m = \underbrace{a_1 + (k-1) \cdot r}_{a_k} - \underbrace{[a_1 + (m-1) \cdot r]}_{a_m} = kr - mr,$$

zatem $a_k - a_m = (k-m) \cdot r$, czyli $r = \frac{a_k - a_m}{k - m}$.

Przykład 9. Między liczby 16 i 4 wstaw pięć liczb takich, żeby łącznie z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie

Niech (a_n) będzie szukanim ciągiem arytmetycznym, w którym $a_1 = 16$ i $a_7 = 4$.

I sposób

$$a_7 = a_1 + 6r$$

$$4 = 16 + 6r$$

$$r = -2$$

II sposób

$$\begin{array}{ccccccc} 16, & \bullet, & \bullet, & \bullet, & \bullet, & \bullet, & 4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array}$$

$$r = \frac{a_7 - a_1}{7 - 1} = \frac{4 - 16}{7 - 1} = -2 \quad r = \frac{a_k - a_m}{k - m}$$

Mając dane $a_1 = 16$ i $r = -2$, znajdujemy $a_2 = 14$, $a_3 = 12$, $a_4 = 10$, $a_5 = 8$, $a_6 = 6$.

Odp.: Należy wstawić liczby: 14, 12, 10, 8, 6.

Ćwiczenie 16. Między dwie liczby a i b wstaw takie trzy liczby, aby łącznie z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny, gdy:

a) $a=3$ i $b=251$, b) $a=304$ i $b=80$.

Przykład 10. Oblicz wyraz pierwszy a_1 i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_7 = 132$ i $a_{15} = 196$.

Rozwiązanie

I sposób $\begin{cases} a_7 = 132 \\ a_{15} = 196 \end{cases}$, więc $\begin{cases} a_1 + 6r = 132 \\ a_1 + 14r = 196 \end{cases}$, skąd $\begin{cases} a_1 = 84 \\ r = 8 \end{cases}$.

II sposób
$$r = \frac{a_{15} - a_7}{15 - 7} = \frac{196 - 132}{8} = 8,$$

$$a_7 = a_1 + 6r, \text{ czyli } 132 = a_1 + 6 \cdot 8, \text{ skąd } a_1 = 132 - 48 = 84.$$

Odp.: $a_1 = 84, r = 8$.

Ćwiczenie 17. Oblicz wyraz pierwszy a_1 i różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym: a) $a_5 = -13$ i $a_{11} = -31$, b) $a_3 = 7$ i $a_5 = 11$, c) $a_4 = -1$ i $a_8 = 15$.

Uwaga

Wyznaczyć ciąg arytmetyczny (a_n) , to znaczy znaleźć jego wyraz pierwszy a_1 i różnicę r .

Odpowiedzi do ćwiczeń

12. Ciąg: a) rosnący, b) malejący, c) stały, d) rosnący. 13. a) Tak, b) tak, c) tak, d) nie, e) tak, f) tak.

14. a) Tak, b) tak, c) nie.

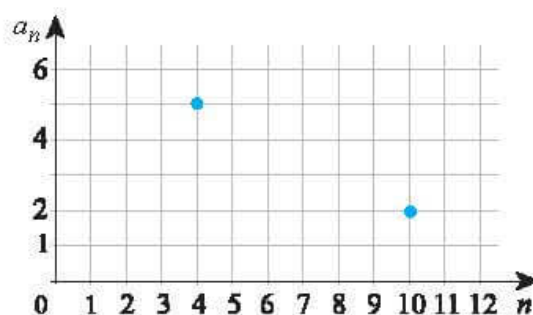
15. a) $x = 7,5$, b) $x = 1$, c) $x_1 = 0, x_2 = 4$, d) $x \in \mathbb{R}$.

16. a) 65, 127, 189, b) 248, 192, 136.

17. a) $a_1 = -1, r = -3$, b) $a_1 = 3, r = 2$, c) $a_1 = -13, r = 4$.

Zadania utrwalające

4.17. Na wykresie zaznaczono dwa punkty należące do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n) . Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest malejący.



4.18. Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ i $a_7 = 3a_5$.

4.19. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym:

a)
$$\begin{cases} a_5 = 10 \\ a_9 = -6 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} a_6 = 7 \\ a_3 + a_7 = 15 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} a_3 + a_{12} = -10 \\ a_8 + a_{10} = -4 \end{cases}$$

4.20. Między liczby 1 i 15 wstaw:

a) pięć innych liczb,

b) sześć innych liczb,

takich żeby łącznie z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny.

4.21. Oblicz x , wiedząc, że kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego są:

a) 7, x , 2,

b) $3x + 2$, $4x - 1$, $5x - 4$,

c) $x^2 + 1$, x^3 , $x^2 - 1$,

d) $\frac{1}{x}$, 3, $\frac{1}{2x}$,

e) $x + 4$, $4x$, $x^2 + 8$,

f) $x^2 - 10$, $10x$, $x^2 + 60$.

4.22. Uzasadnij, że trzy liczby w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego.

D

a) $-4, 0, 4$,

b) $3, 9; 3, 3; 2, 7$,

c) $\sqrt{2}-1, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}+1$,

d) $2\sqrt{3}-3, \sqrt{3}+1, 5$,

e) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}, 2\sqrt{2}+1, \frac{17}{3\sqrt{2}-1}$,

f) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}, \frac{12}{\sqrt{5}-1}+1, 3\sqrt{5}+2$,

g) $\log_2 4, 8\log_4 2, 2\log_2 8$,

h) $20 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^5, 0,8 \cdot 10^6$.

4.23. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz:

a) $a_5 + a_{13}$, jeśli $a_1 + a_{17} = 5$,

b) $a_2 + a_5 + a_7 + a_{10}$, jeśli $a_6 = 3$,

c) $a_5 + a_8 + a_{11}$, jeśli $a_7 + a_9 = 10$,

d) $a_4 + a_7 + a_9 + a_{12}$, jeśli $a_3 + a_8 + a_{10} + a_{11} = 4$.

4.24. Na autostradzie kierowca utrzymuje stałą prędkość równą 120 kilometrów na godzinę.

Co trzy minuty sprawdza na liczniku liczbę przejechanych kilometrów. Jeśli pierwszy odczyt z licznika był równy 7115, to jakie liczby powinien odczytać ten kierowca w ciągu najbliższego kwadransa?

4.25. Rok słoneczny jest równy 365,2422 dni, a rok gregoriański 365,2425 dni. Kalendarz papieża Grzegorza XIII wyprzedza więc przyrodę o 0,0003 dnia na rok. Po ilu latach kalendarz gregoriański wyprzedzi przyrodę o jeden dzień?

4.26. Wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, wykaż, że również ciągiem

D

arytmetycznym jest ciąg (b_n) , gdy:

a) $b_n = 2a_n$

b) $b_n = a_n + 3$,

c) $b_n = a_n - 4$,

d) $b_n = 4a_n - 5$,

e) $b_n = a_{n+1} - 3a_n$,

f) $b_n = 2a_{n+2} + a_{n+1}$.

4.27. Długości boków trójkąta są liczbami naturalnymi i tworzą ciąg arytmetyczny, którego suma jest równa 12. Wyznacz te długości.

4.28. W ciągu arytmetycznym (a_n) suma czterech początkowych wyrazów jest trzykrotnie większa od sumy czterech następnych wyrazów. Oblicz różnicę r tego ciągu, jeśli $a_1 = 1$.

4.29. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Wykaż, że różnica

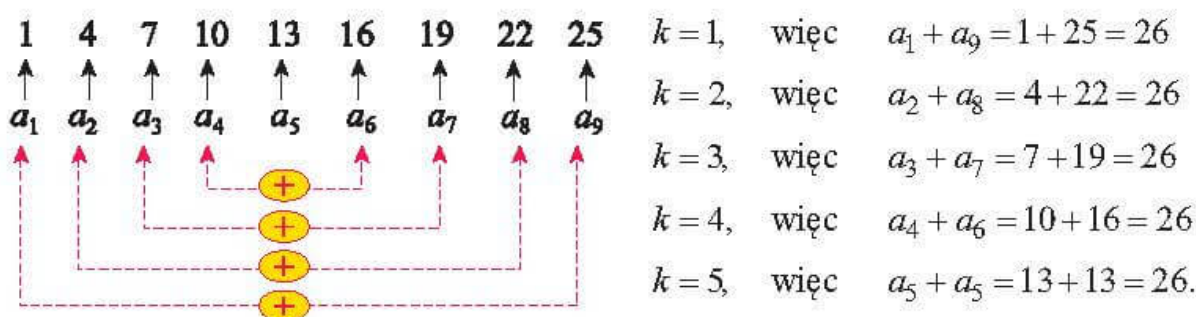
D

tego ciągu jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Przykład 11. Kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są liczby: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25. Oblicz sumę wyrazów $a_k + a_{10-k}$, gdy $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

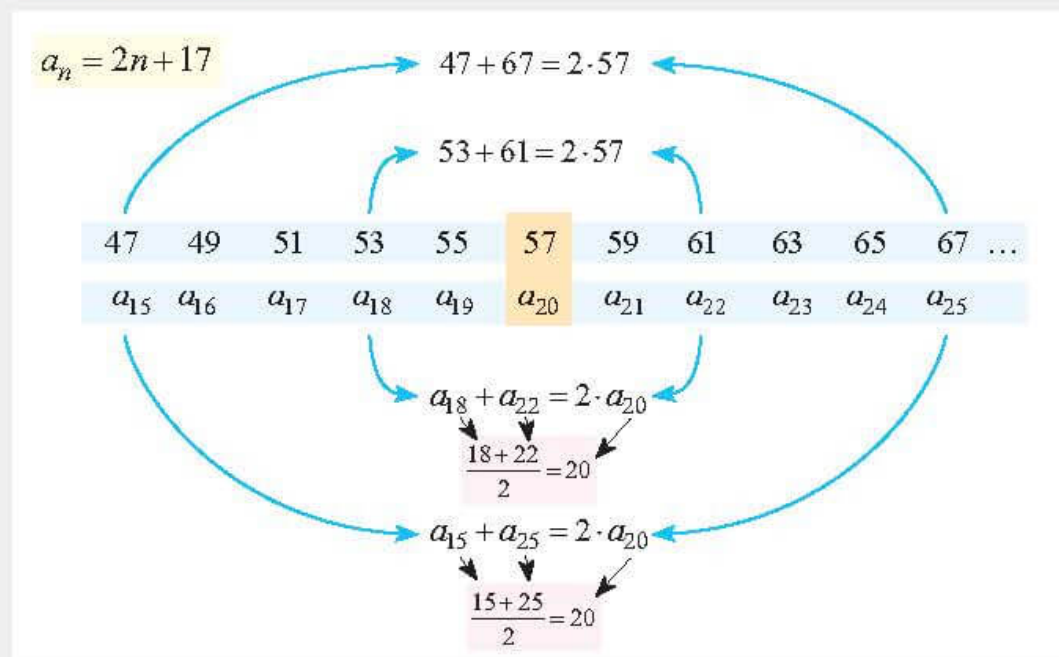
Rozwiązanie



Odp.: $a_k + a_{10-k} = 26$.

Uwaga Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to:

- $a_1 + a_n = a_k + a_{n+1-k}$, gdzie $0 < k \leq n$,
- $a_{n-k} + a_{n+k} = 2 \cdot a_n$, gdzie $0 < k < n$.



Ćwiczenie 18. Skorzystaj z podanej własności i wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, oblicz:

- a) $a_2 + a_6$, jeśli $a_4 = 3$, b) $a_{20} + a_{42}$, jeśli $a_{31} = -1$, c) $a_3 + a_7$, jeśli $a_2 + a_8 = 12$,
 d) $a_{12} + a_{20}$, jeśli $a_2 + a_{30} = -4$, e) $a_5 + a_9 + a_{21} + a_{25}$, jeśli $a_{15} = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 19. Oblicz sumę:

- a) dziewięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_5 = 0$,
 b) sześćdziesięciu jeden początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_{31} = 1$.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określona jest wzorem

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

$$Z \text{ (założenie): } (a_n) - \text{ciąg arytmetyczny} \quad \Bigg| \quad T \text{ (teza): } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{Dowód:} \quad + \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

n składników równych $(a_1 + a_n)$

$$2S_n = n(a_1 + a_n), \text{ skąd } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{cnd.}$$

$$a_1 + a_n = a_k + a_{n+1-k}$$

$$\text{Wniosek: } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Ćwiczenie 20. Carl Friedrich Gauss (1777–1855) obliczył (będąc dzieckiem) sumę n początkowych wyrazów pewnego skończonego ciągu arytmetycznego, nie dodając wyrazu po wyrazie. Poszukaj w literaturze lub w Internecie informacji o życiu i odkryciach matematycznych tego uczonego.

Przykład 12. Oblicz sumę trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , gdy $a_1 = 5$ i $r = -2$.

Rozwiązanie

$$\text{Dane: } a_1 = 5, r = -2, n = 30 \quad \Bigg| \quad \text{Obliczyć: } S_{30}$$

$$S_{30} = \frac{2 \cdot 5 + (30-1) \cdot (-2)}{2} \cdot 30 = -720$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

$$\text{Odp.: } S_{30} = -720.$$

Ćwiczenie 21. Oblicz sumę pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = -49$ i $r = 2$.

Przykład 13. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 3.

Rozwiązanie

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 3 to liczby: 102, 105, ..., 996, 999.

Tworzą one n wyrazowy ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_1 = 102$, $a_n = 999$ i różnica $r = 3$. Obliczamy n :

$$a_n = 999, \text{ gdzie } a_n = 102 + (n-1) \cdot 3 \quad a_n - a_1 + (n-1)r$$

$$102 + (n-1) \cdot 3 = 999, \text{ skąd } n = 300. \quad S_n - \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$\text{Zatem } a_{300} = 999, \text{ więc } S_{300} = \frac{(a_1 + a_{300}) \cdot 300}{2} = \frac{(102 + 999) \cdot 300}{2} = 165\,150.$$

Odp.: Suma wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 3 jest równa 165 150.

Ćwiczenie 22. Oblicz:

- sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 1000,
- średnią arytmetyczną liczb naturalnych od 1 do 1000, nie znajdując ich sumy.

Przykład 14. W teatrze letnim krzesła dla widzów ustawiono w następujący sposób: w rzędzie najbliższym sceny ustawiono 24 krzesła, w każdym następnym o 4 krzesła więcej od poprzedniego. W ostatnim rzędzie ustawiono 80 krzeseł.

- W ilu rzędach ustawiono krzesła?
- Ile jest miejsc siedzących w tym teatrze?

Rozwiązanie

Zauważamy, że liczby krzeseł w kolejnych rzędach tworzą n wyrazowy ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach $a_1 = 24$, $a_n = 80$ i różnicy $r = 4$.

$$\text{a) } 80 = 24 + (n-1) \cdot 4, \text{ skąd } n = 15. \quad a_n - a_1 + (n-1)r$$

$$\text{b) } S_{15} = \frac{24 + 80}{2} \cdot 15, \text{ skąd } S_{15} = 780. \quad S_n - \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Odp.: a) 15 rzędów krzeseł, b) 780 miejsc siedzących.

Ćwiczenie 23. Rowerzysta w ciągu pierwszej godziny przejechał 18 km, a w ciągu każdej następnej godziny odcinek o 0,8 km krótszy od poprzedniego. W ciągu ostatniej godziny przejechał 14 km.

- Ile czasu trwała podróż?
- Ile kilometrów przejechał rowerzysta?

Przykład 15. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz pierwszy a_1 jest równy -3 , a różnica r jest równa 3 . Oblicz sumę S jego wyrazów od dziesiątego do dwudziestego.

Rozwiązanie

$$\underbrace{a_1 + \dots + a_9}_{S_9} + \underbrace{a_{10} + \dots + a_{20}}_S, \text{ czyli } S = S_{20} - S_9.$$

$$S_9 = \frac{2a_1 + 8r}{2} \cdot 9 = \frac{2 \cdot (-3) + 8 \cdot 3}{2} \cdot 9 = 81$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19r}{2} \cdot 20 = \frac{2 \cdot (-3) + 19 \cdot 3}{2} \cdot 20 = 510,$$

$$S = S_{20} - S_9 = 510 - 81 = 429.$$

Odp.: $S = 429$.

Ćwiczenie 24. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz pierwszy a_1 jest równy 10 , a różnica r jest równa -2 . Oblicz sumę S jego wyrazów od piętnastego do trzydziestego.

Przykład 16. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n) , którego suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem $S_n = n^2 - 3n$. Podaj wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

I sposób

$$a_n = S_n - S_{n-1}, \text{ gdy } n \geq 2,$$

$$a_n = n^2 - 3n - [(n-1)^2 - 3(n-1)],$$

$$a_n = 2n - 4.$$

II sposób

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2,$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = 2^2 - 3 \cdot 2 - (-2) = 0,$$

$$\text{więc } r = a_2 - a_1 = 2.$$

$$\text{Zatem } a_n = -2 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 4.$$

Odp.: $a_n = 2n - 4$.

Ćwiczenie 25. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , którego suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem:

a) $S_n = n^2,$

b) $S_n = n^2 + 2n.$

Przykład 17. Wyraż w zależności od n sumę $5 + 9 + 13 + \dots + (4n + 1)$. Oblicz, ile składników ma suma $5 + 9 + 13 + \dots + 2001$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że składniki sumy, czyli liczby

$$5, 9, 13, \dots, (4n + 1),$$

tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym

$$a_1 = 5, a_2 = 9, \dots, a_n = 4n + 1.$$

Zatem $r = a_2 - a_1 = 4$.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(5 + 4n + 1)n}{2} = (3 + 2n)n = 2n^2 + 3n.$$

Zauważmy, że $2001 = 4n + 1$, skąd $n = 500$.

Odp.: $5 + 9 + 13 + \dots + (4n + 1) = 2n^2 + 3n$. Suma $5 + 9 + 13 + \dots + 2001$ ma 500 składników.

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & + & 9 & + & \dots & + & (4n+1) \\ \uparrow & & & & & & \uparrow \\ a_1 & & \dots & & \dots & & a_n \end{array}$$

Ćwiczenie 26. Wyraż w zależności od n sumę $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)$. Oblicz, ile składników ma suma $1 + 4 + 7 + \dots + 1045$.

Przykład 18. Rozwiąż równanie $2 + 7 + 12 + \dots + x = 245$, którego lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie

Z warunków zadania: $a_1 = 2, a_2 = 7, \dots, a_n = x$, zatem $r = a_2 - a_1 = 5$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, więc $x = 2 + (n - 1) \cdot 5$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

Obliczamy sumę S_n wyrazów ciągu $2, 7, \dots, x$.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \text{ więc } 245 = \frac{(2 + x)n}{2},$$

$$\text{zatem } \begin{cases} x = 2 + (n - 1) \cdot 5 \\ 245 = \frac{(2 + x)n}{2} \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} x = 5n - 3 \\ 5n^2 - n - 490 = 0 \end{cases}.$$

$$\Delta = 9801, \sqrt{\Delta} = 99, n_1 = -9, n_2 = 10$$

$n \in \mathbb{N}^+$, więc $n = 10$, zatem $x = 5 \cdot 10 - 3$.

Odp.: $x = 47$.

Ćwiczenie 27. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego, gdy: a) $1 + 2 + 3 + \dots + x = 78$, b) $1 + 3 + 5 + \dots + x = 81$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

18. a) 6, b) -2, c) 12, d) -4, e) $4\sqrt{2}$. 19. a) 0, b) 61. 21. $S_{50} = 0$. 22. a) 500 500, b) 500,5.
 23. a) 6 h, b) 96 km. 24. $S = -528$. 25. a) $a_n - 2n - 1$, b) $a_n - 2n + 1$.
 26. $S_n - \frac{1}{2} \cdot (3n^2 - n)$, 349 składników. 27. a) 12, b) 17.

Zadania utrwalające

4.30. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz:

- a) $a_5 + a_{21}$, jeśli $a_{13} = -1$,
 b) $a_{14} + a_{20} + a_{10} + a_{24}$, jeśli $a_{17} = \sqrt{2}$,
 c) $a_{11} + a_{17} + a_{23} + a_{29}$, jeśli $a_{10} + a_{30} = 6$.

4.31. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych:

- a) podzielnych przez 3, b) podzielnych przez 4,
 c) podzielnych przez 12,
 d) które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 4,
 e) które przy dzieleniu przez 11 dają resztę 7.

4.32. Oblicz sumę wyrazów ciągu arytmetycznego:

- a) $7 + 7,5 + 8 + \dots + 192,5$, b) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \dots + 99\sqrt{2}$,
 c) $-8,3 - 8 - 7,7 + \dots + 21,4$, d) $13,4 + 12,9 + 12,4 + \dots + (-21,1)$.

4.33. Wyraż w zależności od n sumę:

- a) $1 + 6 + 11 + \dots + (5n - 4)$, b) $3 + 8 + 13 + \dots + (5n - 2)$,
 c) $7 + 11 + 15 + \dots + (4n + 3)$, d) $10 + 21 + 32 + \dots + (11n - 1)$.

4.34. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz:

- a) S_7 , jeśli $a_4 = 0$, b) S_5 , jeśli $a_3 = 2$, c) S_{23} , jeśli $a_{12} = 4$,
 d) S_{29} , jeśli $a_{15} = 15$, e) S_{43} , jeśli $a_{22} = 5$, f) S_{2n-1} , jeśli $a_n = x$.

4.35. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym:

- a) $a_1 = 16$ i $S_9 = 0$, b) $r = -2$ i $S_{23} = -598$,
 c) $a_1 = 4$ i $S_{32} = -616$, d) $a_1 = -200$ i $S_{40} = -2540$,
 e) $S_1 = 5$ i $S_2 = 8$, f) $S_2 = 9$ i $S_3 = 15$.

4.36. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym:

- a) $a_8 = 23$ i $S_7 = 105$, b) $a_{15} = 47$ i $S_{15} = 390$, c) $S_5 = 35$ i $S_7 = 70$,
d) $a_6 = 7$ i $S_{11} = 77$, e) $a_1 = 2$, $a_n = 50$ i $S_n = 442$, f) $S_6 = 3$ i $S_{20} = -130$.

4.37. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , którego suma S_n początkowych wyrazów określona jest wzorem:

- a) $S_n = 6n - 3n^2$, b) $S_n = 2n^2 + 3n$, c) $S_n = \frac{3n^2}{2}$, d) $S_n = \frac{1}{2}(7n^2 - 5n)$.

4.38. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Sprawdź, czy istnieje takie n , że $S_n = n$, gdy:

- a) $a_n = 3n - 50$, b) $a_n = 4n - 30$, c) $a_n = 104 - 6n$.

4.39. Składniki podanej sumy są wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Wyraż wyraz x w zależności od n .

- a) $-2 + 1 + 4 + \dots + x$, b) $7 + 5 + 3 + \dots + x$, c) $-0,1 + 0,4 + 0,9 + \dots + x$,

4.40. Rozwiąż równanie z niewiadomą n :

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = 3n$, b) $3 + 9 + 15 + \dots + (6n - 3) = 363$,
c) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = 153$, d) $-5 - 1 + 3 + \dots + (4n - 9) = 4650$,
e) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \dots + \frac{n}{3} = 26$, f) $3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = 2n^2 - 899$.

4.41. Wiedząc, że składniki występujące po lewej stronie równania są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, rozwiąż równanie:

- a) $3 + 9 + 15 + \dots + x = 363$, b) $1 + 5 + 9 + \dots + x = 190$,
b) $(1 + 2x) + (4 + 2x) + (7 + 2x) + \dots + (28 + 2x) = 155$,
c) $(1 + x) + (2 + 3x) + (3 + 5x) + \dots + (50 + 99x) = 275$.

4.42. Z ciągu liczb naturalnych dodatnich wynotowano sto takich kolejnych liczb, dających w sumie 17 950, z których każda ma tę własność, że jeśli podzielimy ją przez 3, to uzyskamy resztę 1. Znajdź najmniejszą i największą z wynotowanych liczb.

4.43. Miary kątów wewnętrznych wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Najmniejszy z kątów ma 119° , a największy 169° . Wiedząc, że suma S_n miar kątów n -kąta określona jest wzorem $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$, wyznacz liczbę boków tego wielokąta.

4.44. Oblicz długości boków i pole trójkąta prostokątnego, wiedząc, że długości jego boków tworzą ciąg arytmetyczny, a jego obwód jest równy 120 cm.

Pojęcie ciągu geometrycznego

Przykład 19. Oblicz, ilu maksymalnie każdy z nas mógł mieć biologicznych **prapraprapraprzodków**.

Rozwiązanie

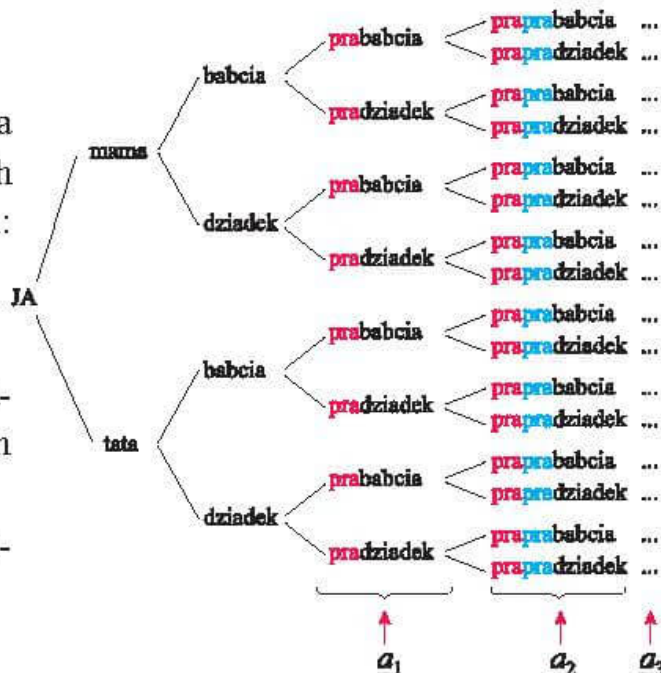
Analizując schemat przedstawiony na rysunku, zauważamy, że liczby naszych praprzodków tworzą ciąg, w którym:

$$8, 16, 32, 64, 128, \dots$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$$

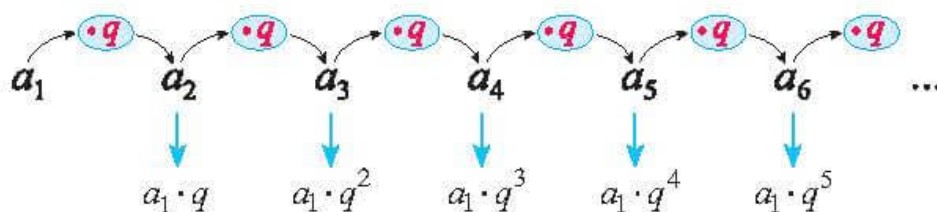
Szukamy wyrazu a_5 , gdyż pięć razy przedrostek *pra-* występuje przed wyrazem przodek.

Odp.: Każdy z nas mógł mieć maksymalnie 128 **prapraprapraprzodków**.



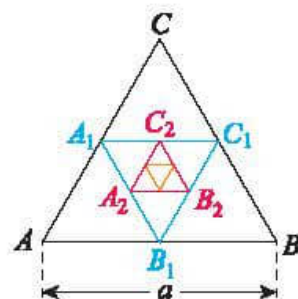
Definicja

Ciągiem geometrycznym (a_n) nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trójwyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez liczbę q , zwaną ilorazem ciągu geometrycznego.



$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_6}{a_5} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ćwiczenie 28. Łącząc środki boków trójkąta równobocznego ABC o boku a , wpisano w niego trójkąt $A_1B_1C_1$ w sposób przedstawiony na rysunku. Analogicznie w trójkąt $A_1B_1C_1$ wpisano trójkąt $A_2B_2C_2$ itd. Oblicz pola trójkątów: ABC , $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$. Czy pola kolejnych trójkątów tworzą ciąg geometryczny?



Ćwiczenie 29. Podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz q tego ciągu.

- a) $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$, b) $-5, -0,5, -0,05, -0,005, \dots$,
 c) $-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, 4, \dots$, d) $1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + 2, 2 + 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 4, \dots$.

Przykład 20. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n$.

Oblicz: a) a_1, a_2, a_5, a_6 , b) $a_{n+1} : a_n$. Czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym?

Rozwiązanie

a) $a_1 = \frac{3}{2} \cdot 2^1 = 3, \quad a_2 = \frac{3}{2} \cdot 2^2 = 6,$

$$a_5 = \frac{3}{2} \cdot 2^5 = 48, \quad a_6 = \frac{3}{2} \cdot 2^6 = 96.$$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 2^{n+1}}{\frac{3}{2} \cdot 2^n} = 2^{n+1-n} = 2.$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Odp.: a) $a_1 = 3, a_2 = 6, a_5 = 48, a_6 = 96$, b) $a_{n+1} : a_n = 2$.

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

Ćwiczenie 30. Określ, czy ciąg (a_n) jest geometryczny, gdy:

- a) $a_n = 3^n$, b) $a_n = 3 \cdot 2^{-n}$.

Przykład 21. Wyznacz wyraz a_n ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q .

Rozwiązanie

Z definicji ciągu geometrycznego wynika, że:

$$a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^{2-1}$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} \cdot q = a_1 \cdot q^2 = a_1 \cdot q^{3-1}$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3} \cdot q = a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot q^{4-1}$$

.....

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Twierdzenie

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q , to n -ty wyraz ciągu określony jest wzorem $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Ćwiczenie 31. Napisz wzór ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , gdy:

a) $a_1 = 3$ i $q = 4$, b) $a_1 = 2$ i $q = 2$, c) $a_1 = 3$ i $q = \frac{1}{3}$.

Uwaga

Ciąg geometryczny (a_n) można określić wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q, \text{ gdy } n \in \mathbb{N}^+ \end{cases}, \text{ gdzie } \begin{array}{l} a - \text{pierwszy wyraz ciągu geometrycznego,} \\ q - \text{iloraz ciągu geometrycznego.} \end{array}$$

Przykład 22. Wyraz a_n ciągu geometrycznego przedstaw w postaci $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

i podaj a_1 oraz q , gdy: a) $a_n = 5 \cdot 3^{-n}$, b) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

Rozwiązanie

a) $a_n = 5 \cdot 3^{-n} = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$$= 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$

więc $a_1 = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ i $q = \frac{1}{3}$.

$$3^{-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

b) I sposób

$$a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}, \text{ więc}$$

$$a_1 = \frac{2^1}{3^{1+1}} = \frac{2}{9},$$

$$a_2 = \frac{2^2}{3^{2+1}} = \frac{4}{27}.$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{27} : \frac{2}{9} = \frac{4}{27} \cdot \frac{9}{2} = \frac{2}{3}.$$

Zatem $a_n = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

II sposób

$$a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3 \cdot 3^n} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ więc}$$

$$a_1 = \frac{2}{9} \text{ i } q = \frac{2}{3}.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Ćwiczenie 32. Wyraz a_n ciągu geometrycznego przedstaw w postaci $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ i podaj a_1 oraz q , gdy:

a) $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$, b) $a_n = (-2)^n$, c) $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$, d) $a_n = 2 \cdot 2^{-n}$, e) $a_n = 1,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-n}$.

Przykład 23. Oblicz iloraz q ciągu geometrycznego i podaj dwa następne jego wyrazy, wiedząc, że trzema początkowymi wyrazami tego ciągu są liczby:

a) 4, 0, 0, ..., b) 0, 0, 0, ...

Rozwiązanie

Z definicji ciągu geometrycznego: $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q$, ...

Jeżeli: • $a_1 \neq 0$, to $q = \frac{a_2}{a_1}$,

• $a_1 = 0$, to $a_2 = a_3 = \dots = 0$, więc q może być dowolną liczbą rzeczywistą.

a) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0}{4} = 0$, $a_4 = a_5 = 0$.

b) $q \in \mathbb{R}$, $a_4 = a_5 = 0$.

Jeżeli w ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q :

• $a_1 \neq 0$ i $q \neq 0$, to $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$,

• $a_1 \neq 0$ i $q = 0$, to $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ..., $a_n = 0$,

• $a_1 = 0$ i $q \in \mathbb{R}$, to $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ..., $a_n = 0$.

Ćwiczenie 33.

a) Który z ciągów: (3, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 3, 0) nie jest ciągiem geometrycznym?

b) Czy jeżeli $a_n = (0, 0, 0, 0)$, to iloraz q może być równy 0?

c) Czy każdy ciąg geometryczny, którego iloraz q jest równy 0, jest ciągiem stałym?

Odpowiedzi do ćwiczeń

28. $P_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, $P_{\Delta A_1 B_1 C_1} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{16}$, $P_{\Delta A_2 B_2 C_2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{64}$, $P_{\Delta A_3 B_3 C_3} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{256}$, tak.

29. a) $\frac{1}{3}$, b) 0,1, c) -2, d) $\sqrt{2}$. 30. a) Tak, b) tak. 31. a) $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, b) $a_n = 2^n$, c) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

32. a) $a_1 = 3$, $q = 5$, b) $a_n = -2 \cdot (-2)^{n-1}$, $a_1 = q = -2$, c) $a_n = \frac{16}{25} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, $a_1 = \frac{16}{25}$, $q = \frac{4}{5}$,

d) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, e) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $a_1 = 1$, $q = \frac{3}{2}$. 33. a) Ciąg (0, 3, 0), b) tak, c) nie.

Zadania utrwalające

4.45. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , w którym:

a) $a_1 = -1, q = 0,1,$

b) $a_1 = 5, q = -1,$

c) $a_1 = -\sqrt{3}, q = -\sqrt{3},$

d) $a_1 = 10^{10}, q = 10^{-1}.$

4.46. Oblicz wyrazy:

a) a_7 i a_{14} ciągu geometrycznego (a_n) o początkowych wyrazach $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \dots$

b) a_5 i a_7 ciągu geometrycznego (a_n) o początkowych wyrazach $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

c) a_4 i a_8 ciągu geometrycznego (a_n) o początkowych wyrazach $\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \sqrt{2}, \dots$

4.47. W ciągu geometrycznym (a_n) spośród wielkości: a_1, q, n, a_n dane są trzy.

Oblicz czwartą wielkość, gdy:

a) $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{4}{3}, n = 4,$

b) $a_1 = 2, n = 6, a_n = 64,$

c) $a_1 = -\frac{3}{2}, q = \frac{1}{3}, a_n = -\frac{1}{54},$

d) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}, n = 7, a_n = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$

4.48. Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, gdy:

D

a) $a_n = 4^n,$

b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1},$

c) $a_n = -2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^n,$

d) $a_n = -\frac{2}{3} \cdot (1,5)^{n+2},$

e) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n},$

f) $a_n = 4^{n+1} - 4^{n-1}.$

4.49. Uzasadnij, że ciąg (b_n) nie jest ciągiem geometrycznym, gdy:

D

a) $b_n = 2^{n^2},$

b) $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2-1}.$

4.50. Napisz wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , w którym:

a) $a_1 = 4$ i $q = -1,$

b) $a_1 = 1$ i $q = -1,$

c) $a_1 = 64$ i $q = 2,$

d) $a_1 = \frac{1}{216}$ i $q = 6,$

e) $a_2 = \frac{1}{4}$ i $a_3 = -\frac{3}{4},$

f) $a_1 = \frac{1}{64}$ i $a_3 = \frac{1}{16}.$

4.51. Wyraz a_n ciągu geometrycznego przedstaw w postaci $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, gdy:

a) $a_n = 4^n,$

b) $a_n = 5^{n+2},$

c) $a_n = 6^{n-2},$

d) $a_n = (-2)^n,$

e) $a_n = (-3)^{n+2},$

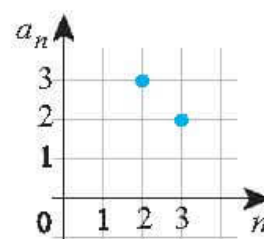
f) $a_n = (-10)^{n+1},$

g) $a_n = 3^{-n},$

h) $a_n = 2^{1-n}.$

4.52. Na wykresie zaznaczono dwa punkty należące do wykresu nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) .

- a) Wyznacz ten ciąg.
b) Podaj wzór na wyraz ogólny ciągu.



4.53. W ciągu geometrycznym (a_n) wyrazem piątym jest liczba 2.

Oblicz iloczyn wyrazów $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_9$.

Własności ciągu geometrycznego

Monotoniczność ciągu geometrycznego zależy od wyrazu pierwszego a_1 oraz ilorazu q .

Przykład 24. Podaj pięć początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) i naszkicuj jego wykres, gdy: a) $q = -2$, $a_1 = -2$, b) $q = -2$, $a_1 = 2$, c) $q = -1$, $a_1 = 3$.

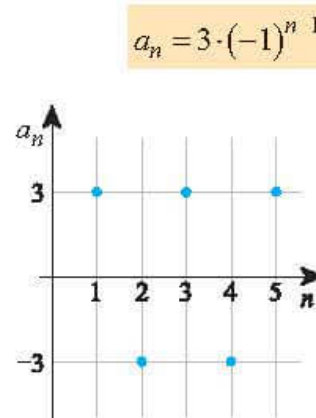
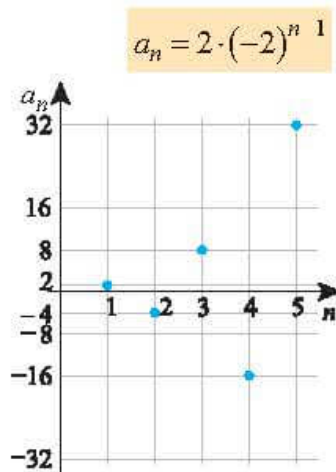
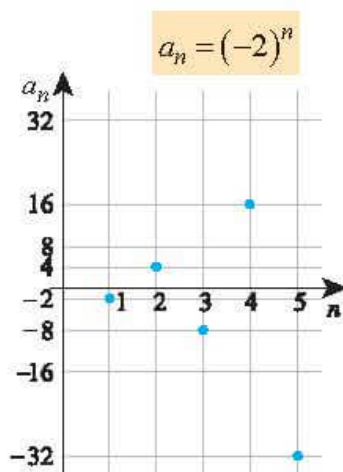
Rozwiązanie

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu.

a) $a_1 = -2$, $a_2 = 4$,
 $a_3 = -8$, $a_4 = 16$,
 $a_5 = -32$.

b) $a_1 = 2$, $a_2 = -4$,
 $a_3 = 8$, $a_4 = -16$,
 $a_5 = 32$.

c) $a_1 = 3$, $a_2 = -3$,
 $a_3 = 3$, $a_4 = -3$,
 $a_5 = 3$.



Zauważamy, że w ciągach określonych w punktach a), b), c) iloraz q ma wartość ujemną, a wyraz pierwszy a_1 ma wartość dodatnią lub ujemną. Ciągi te są naprzemienne (nie są monotoniczne).

Uwaga

Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q , w którym $a_1 \neq 0$ i $q < 0$, jest ciągiem **naprzemiennym**, gdy jego kolejne wyrazy są na przemian dodatnie i ujemne, czyli gdy każde dwa kolejne wyrazy mają przeciwne znaki.

Ćwiczenie 34. Określ, czy naprzemienny jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem:

- a) $a_n = (-1)^n$, b) $a_n = (-1)^{n-1}$, c) $a_n = (-1)^{n+1}$,
 d) $a_n = (-1)^{2n}$, e) $a_n = (-1)^{2n-1}$.

Przykład 25. Wykaż, że gdy $q \in (0; 1)$ i $a_1 > 0$ lub $q > 1$ i $a_1 < 0$, to ciąg geometryczny (a_n) , określony wzorem $a_n = a_1 q^{n-1}$, jest malejący.

Rozwiązanie

Wyznaczamy różnicę wyrazów a_{n+1} i a_n .

$$a_{n+1} - a_n = a_1 q^{n+1-1} - a_1 q^{n-1} = a_1 q^n - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1} (q - 1).$$

$$1^\circ \text{ Gdy } \left\{ \begin{array}{l} q \in (0; 1) \\ a_1 > 0 \end{array} \right\}, \text{ to } \left. \begin{array}{l} q-1 > 0 \\ q^{n-1} > 0 \\ a_1 < 0 \end{array} \right\}, \text{ więc } a_1 q^{n-1} (q-1) < 0, \text{ czyli } a_{n+1} - a_n < 0.$$

Gdy $q \in (0; 1)$ i $a_1 > 0$, to ciąg geometryczny (a_n) jest malejący.

$$2^\circ \text{ Gdy } \left\{ \begin{array}{l} q > 1 \\ a_1 < 0 \end{array} \right\}, \text{ to } \left. \begin{array}{l} q-1 > 0 \\ q^{n-1} > 0 \\ a_1 < 0 \end{array} \right\}, \text{ więc } a_1 q^{n-1} (q-1) < 0, \text{ czyli } a_{n+1} - a_n < 0.$$

Gdy $q > 1$ i $a_1 < 0$, to ciąg geometryczny $a_1 < 0$ jest malejący. **cnw.**

Ćwiczenie 35. Wykaż, że ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = a_1 q^{n-1}$:

- a) jest rosnący, gdy $q \in (0; 1)$ i $a_1 < 0$ lub $q > 1$ i $a_1 > 0$,
 b) jest stały, gdy $q = 1$ i $a_1 \in \mathbb{R}$ lub $a_1 = 0$ i $q \in \mathbb{R}$.

Uwaga

Ciąg geometryczny jest:			
naprzemienny, gdy	malejący, gdy	rosnący, gdy	stały, gdy
$\begin{cases} q < 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} q \in (0; 1) \\ a_1 > 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} q > 1 \\ a_1 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} q \in (0; 1) \\ a_1 < 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} q > 1 \\ a_1 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} q = 1 \\ a_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 0 \\ q \in \mathbb{R} \end{cases}$

Ćwiczenie 36. Zbadaj monotoniczność ciągu geometrycznego określonego wzorem ogólnym:

- a) $a_n = 2^n$, b) $b_n = (-1)^{n-1} \cdot 3$, c) $c_n = \frac{3}{2^{n-1}}$.

Ćwiczenie 37. Określ monotoniczność ciągu geometrycznego, którego trzema początkowymi wyrazami są liczby:

a) $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, b) $-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1, -\sqrt{3}, \dots$, c) $-100, -100\sqrt[10]{10}, -100\sqrt[10]{100}, \dots$

Przykład 26. Między liczby 100 i 0,01 wstaw takie trzy inne, by łącznie z danymi tworzyły ciąg geometryczny.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że $a_1 = 100$ i $a_5 = 0,01$.

$$100, a_2, a_3, a_4, 0,01$$

$$a_5 = 0,01 \text{ i } a_5 = a_1 \cdot q^4, \text{ więc}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$100 \cdot q^4 = 0,01, \text{ skąd}$$

$$q^4 = 0,0001$$

$$\text{Jeżeli } a > 0, \text{ to } x^4 = a, \text{ gdy } x = \sqrt[4]{a} \text{ lub } x = -\sqrt[4]{a}.$$

$$q = 0,1 \text{ lub } q = -0,1.$$

Zatem istnieją dwa ciągi spełniające warunki przykładu:

$$100, 10, 1, 0,1, 0,01 \text{ lub } 100, -10, 1, -0,1, 0,01.$$

Odp.: 10; 1; 0,1 lub -10; 1; -0,1.

Ćwiczenie 38. Między liczby:

a) 1 i 27 wstaw takie dwie liczby, by łącznie z danymi tworzyły ciąg geometryczny,

b) $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{128}$ wstaw pięć takich liczb, by łącznie z danymi tworzyły ciąg geometryczny.

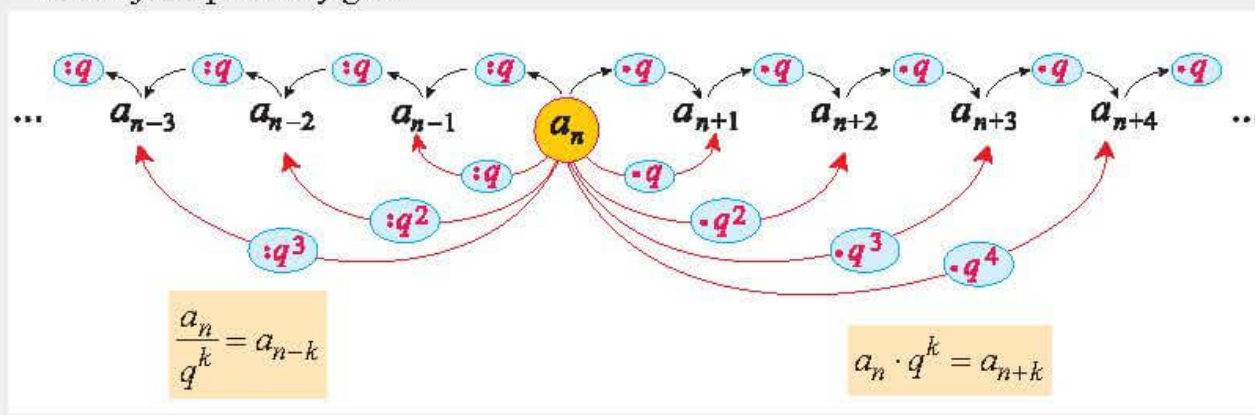
Uwaga

Z definicji ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wynika, że:

$$a_n \cdot q = a_{n+1}, \quad a_n \cdot q^2 = a_{n+2}, \quad \dots, \quad a_n \cdot q^k = a_{n+k}$$

$$\frac{a_n}{q} = a_{n-1}, \quad \frac{a_n}{q^2} = a_{n-2}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{q^k} = a_{n-k}.$$

Ilustruje to poniższy graf.



Ćwiczenie 39. Podaj, który wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q opisuje wyrażenie: a) $\frac{a_{20}}{q^5}$, b) $\frac{a_{31}}{q^{14}}$, c) $\frac{a_{100}}{q^{75}}$, d) $a_{99} \cdot q^{13}$.



Ćwiczenie 40. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q . Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę. a) $\frac{a_{14}}{q^{\blacksquare}} = a_6$, b) $\frac{a_{20}}{a_{10}} = q^{\blacksquare}$,

c) $a_{11} \cdot q^{\blacksquare} = a_{31}$, d) $\frac{a_{13}}{a_{\blacksquare}} = q^5$, e) $a_{21} \cdot q^9 = a_{\blacksquare}$, f) $\frac{a_{\blacksquare}}{a_{14}} = q^8$.

Uwaga

Wyznaczyć ciąg geometryczny (a_n) , to znaczy znaleźć jego pierwszy wyraz a_1 i iloraz q .

Przykład 27. Wyznacz ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_5 = 16$ i $a_9 = 81$.

Rozwiązanie

I sposób

Jeśli $a_5 = 16$ i $a_9 = 81$, to

$$q^4 = 81 : 16 = \frac{81}{16}, \text{ więc}$$

$$q = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \text{ lub } q = -\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$$

$$q = \frac{3}{2} \text{ lub } q = -\frac{3}{2}.$$

Zatem $16 = a_1 \cdot \frac{81}{16}$, skąd $a_1 = \frac{256}{81}$.

II sposób

Wartość q^4 możemy otrzymać, dzieląc stronami równania układu

$$\begin{cases} a_1 q^4 = 16 \\ a_1 q^8 = 81 \end{cases}$$

$$a_5 = 16 \text{ i } a_9 = 81$$

Zatem $\frac{a_1 q^4}{a_1 q^8} = \frac{16}{81}$, skąd $q^4 = \frac{81}{16}$, więc $q = \frac{3}{2}$ lub $q = -\frac{3}{2}$.

$$a_1 \neq 0 \text{ i } q \neq 0$$

Odp.: $a_1 = \frac{256}{81}$ i $q = \frac{3}{2}$ lub $a_1 = \frac{256}{81}$ i $q = -\frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 41. Wyznacz ciąg geometryczny (a_n) , w którym:

a) $a_3 = 18$ i $a_5 = 162$, b) $a_2 = 125$ i $a_5 = 64$.

Twierdzenie

Ciąg (a_n) , gdzie $n \in \mathbb{N}^+$, jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ gdzie $n \geq 2$.

Udowodnimy twierdzenie: Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Z (założenie): (a_n) – ciąg geometryczny, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2$		T (teza): $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$
---	--	--

Dowód:
$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1-1}}_{a_{n-1}} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{n+1-1}}_{a_{n+1}} = a_1^2 \cdot q^{n-2+n} = \left(\underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n} \right)^2$$

Zatem $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n^2$ **c.n.u.**

Uwaga

W ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich każdy wyraz a_n , oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich, czyli wyrazu poprzedniego a_{n-1} i następnego a_{n+1} .

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Ćwiczenie 42. Sprawdź, czy trzema kolejnymi wyrazami tego samego ciągu geometrycznego są liczby:

a) 3, 15, 75, b) $240\sqrt{5}$, 600, $300\sqrt{5}$, c) $6 - 2\sqrt{5}$, $16 - 8\sqrt{5}$, $56 - 24\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 43. Oblicz x , wiedząc, że kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego są:

a) $-6, 15, \frac{x}{2}$, b) $-2, x+1, -50$, c) $x-1, x+2, 3x$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

34. a) Tak, b) tak, c) tak, d) nie, e) nie 36. Ciąg: a) rosnący, b) naprzemienny, nie jest monotoniczny, c) malejący. 37. Ciąg: a) rosnący, b) malejący, c) malejący.

38. a) 3 i 9, b) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ lub $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{64}$. 39. a) a_{15} , b) a_{17} , c) a_{25} , d) a_{112} .

40. a) 8, b) 10, c) 20, d) 8, e) 30, f) 22. 41. a) $a_1 = 2$ i $q = 3$ lub $a_1 = 2$ i $q = -3$, b) $a_1 = \frac{625}{4}$ i $q = \frac{4}{5}$.

42. a) Tak, b) tak, c) tak 43. a) $x = -75$, b) $x = -11$ lub $x = 9$, c) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 4$.

4.60. Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, gdy:

D

a) $a_n = 3 \cdot 2^{4n+1}$, b) $a_n = 3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n$.

4.61. Ktoś w ciągu godziny przekazał plotkę 10 osobom. Następnie każda z nowo powiadomionych osób w ciągu godziny przekazała plotkę 10 innym osobom, które jej jeszcze nie słyszały itd.

- a) Ile osób znało plotkę po upływie: **1** 2 godzin, **2** 3 godzin, **3** 4 godzin?
 b) Po ilu godzinach plotkę znaliby wszyscy ludzie żyjący na Ziemi? Przyjmij, że na Ziemi żyje $6 \cdot 10^9$ ludzi.

4.62. Liczby $3 - 2\sqrt{2}$, $10 - 7\sqrt{2}$, $34 - 24\sqrt{2}$ są trzecim, czwartym i piątym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n) .

- a) Oblicz iloraz q tego ciągu.
 b) Oblicz wyraz pierwszy ciągu.
 c) Oblicz różnicę wyrazów siódmego i piątego.

4.63. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q . Oblicz:

- a) a_3 , gdy $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 243$,
 b) a_7 , gdy $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 5$,
 c) a_{15} , gdy $a_{13} \cdot a_{14} \cdot a_{15} \cdot a_{16} \cdot a_{17} = 32$,
 d) a_{10} , gdy $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{14} = 1$.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Zapis

$$S_n = a_1 + \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3} + \dots + \underbrace{a_1 \cdot q^{n-2}}_{a_{n-1}} + \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n}$$

oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) .

Po wyłączeniu wyrazu a_1 przed nawias otrzymamy:

$$\underbrace{S_n}_{\substack{\text{suma } n \\ \text{wyrazów} \\ \text{ciągu geo-} \\ \text{metrycz-} \\ \text{nego}}} = \underbrace{a_1}_{\substack{\text{wyraz} \\ \text{pierwszy} \\ \text{ciągu geo-} \\ \text{metrycz-} \\ \text{nego}}} \cdot \underbrace{\left(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}\right)}_{\substack{\text{suma kolejnych potęg} \\ \text{ilorazu } q, \\ \text{gdy } n \in \mathbb{N}^+}}$$

Twierdzenie

W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q suma n początkowych wyrazów ciągu określona jest wzorem:

$$\bullet \quad S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ gdy } q \neq 1, \quad \bullet \quad S_n = n \cdot a_1, \text{ gdy } q = 1.$$

Z (założenie): (a_n) – ciąg geometryczny o ilorazie q , gdzie $q \neq 1$. *T(teza):* $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

Dowód:

$$S_n = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}) \quad / \cdot q$$

Mnożymy obie strony równości przez q .

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n)$$

Obliczamy wartość wyrażenia $q \cdot S_n - S_n$

$$\begin{aligned} q \cdot S_n - S_n &= a_1 \cdot (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n) - a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1}) = \\ &= a_1 (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n - 1 - q - q^2 - \dots - q^{n-2} - q^{n-1}). \end{aligned}$$

Zatem $q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot (q^n - 1)$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1) \quad / : (q - 1)$$

Z założenia $q \neq 1$.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ czyli } S_n = a_1 \cdot \frac{-(-q^n + 1)}{-(-q + 1)}, \text{ zatem } S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{c.n.u.}$$

Uwaga

Postacie wzoru na sumę S_n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego stosujemy w zależności od łatwości wykonywania obliczeń. Wygodniej jest stosować wzór:

$$\bullet \quad S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ gdy } -1 < q < 1,$$

$$\bullet \quad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ gdy } q < -1 \text{ lub } q > 1.$$

Ćwiczenie 44. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q . Uzasadnij, że suma S_n początkowych wyrazów tego ciągu określona jest wzorem:

a) $S_n = a_1$, gdy $q = 0$,

b) $S_n = n \cdot a_1$, gdy $q = 1$.

Przykład 28. Oblicz sumę:

- a) pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) ,
w którym $a_1 = 4$ i $q = -2$,
- b) sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) określonego
wzorem $b_n = \frac{6}{3^n}$,
- c) dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (c_n) o wyrazach
początkowych $\frac{5}{341}, \frac{10}{341}, \frac{20}{341}, \dots$

Rozwiązanie

- a)
- $n = 5$
- ,
- $a_1 = 4$
- , i
- $q = -2$
- , więc

$$S_5 = 4 \cdot \frac{1 - (-2)^5}{1 - (-2)} = 4 \cdot \frac{1 - (-32)}{1 + 2}, \text{ skąd } S_5 = 44.$$

$$S_5 - a_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q}$$

- b)
- $n = 6$
- i
- $b_n = \frac{6}{3^n}$
- , więc

$$b_1 = 2, \quad b_2 = \frac{2}{3}, \text{ skąd } q = \frac{1}{3}.$$

$$q = \frac{b_2}{b_1}$$

$$\text{Zatem } S_6 = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6}{1 - \frac{1}{3}}, \text{ skąd } S_6 = \frac{3^6 - 1}{3^5} = \frac{728}{243}.$$

$$S_6 - a_1 \cdot \frac{1 - q^6}{1 - q}$$

- c)
- $n = 10$
- ,
- $c_1 = \frac{5}{341}$
- ,
- $c_2 = \frac{10}{341}$
- , skąd
- $q = 2$
- .

$$q = \frac{c_2}{c_1}$$

$$\text{Zatem } S_{10} = \frac{5}{341} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1}, \text{ skąd } S_{10} = \frac{5}{341} \cdot 1023 = 15.$$

$$S_{10} - a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$$

Odp.: a) $S_5 = 44$, b) $S_6 = \frac{728}{243}$, c) $S_{10} = 15$.

Ćwiczenie 45. Oblicz sumę: a) czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 2,7$ i $q = \frac{1}{3}$, b) ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) określonego wzorem $b_n = \frac{3}{2^n}$, c) pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (c_n) o wyrazach początkowych 4, 12, 36, ...

Przykład 29. Wiedząc, że składniki sumy są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, oblicz sumę $40 - 20 + 10 - \dots + \frac{5}{8}$.

Rozwiązanie

$$\underbrace{40}_{a_1} - \underbrace{20}_{a_2} + 10 - \dots + \underbrace{\frac{5}{8}}_{a_n}$$

(a_n) – ciąg geometryczny

$$a_1 = 40, \quad a_2 = -20, \quad \text{więc } q = -\frac{1}{2}.$$

$$\frac{a_2}{a_1} = q$$

$$a_n = \frac{5}{8}, \quad \text{więc} \quad 40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{8} \quad / : 40$$

$$a_1 \cdot q^{n-1} = a_n$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{64} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6, \quad \text{zatem}$$

Jeżeli $a^k = a^m$, to $k = m$,
gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$

$$n-1 = 6, \quad \text{skąd } n = 7.$$

$$S_7 = 40 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 40 \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^7}}{1 + \frac{1}{2}}, \quad \text{więc}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$S_7 = \frac{215}{8}.$$

$$\text{Odp.: } 40 - 20 + 10 - \dots + \frac{5}{8} = \frac{215}{8}.$$

Ćwiczenie 46. Wiedząc, że składniki sumy są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, oblicz sumę: a) $2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^6$, b) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 - \dots + 16$.

Uwaga

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q i S_n jest sumą n początkowych jego wyrazów, to $q = \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n}$, gdzie $n > 1$.

Ćwiczenie 47. Wykaż, że w ciągu geometrycznym (a_n) prawdziwa jest równość

$$\frac{S_n - a_1}{S_n - a_n} = q, \quad \text{gdzie } n > 1.$$

Przykład 30. Kwotę 4 650 zł rozdzielono na pewną liczbę nagród. Kwoty nagród tworzą malejący ciąg geometryczny. Oblicz wartości nagród, wiedząc, że największa z nich była równa 2 400 zł, a najmniejsza 150 zł.

Rozwiązanie

Kwoty nagród tworzą ciąg geometryczny $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, w którym:

$$S_n = 4\,650, \quad a_1 = 2\,400, \quad a_n = 150.$$

$$q = \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n} = \frac{4\,650 - 2\,400}{4\,650 - 150} = \frac{2\,250}{4\,500} = \frac{1}{2}, \text{ więc}$$

$$a_2 = 2\,400 \cdot \frac{1}{2} = 1\,200, \quad a_3 = 1\,200 \cdot \frac{1}{2} = 600, \quad a_4 = 600 \cdot \frac{1}{2} = 300, \quad a_5 = 300 \cdot \frac{1}{2} = 150.$$

Odp.: Wartości nagród: 2 400 zł, 1 200 zł, 600 zł, 300 zł, 150 zł.

Ćwiczenie 48. Kwotę 4 375 zł rozdzielił na pewną liczbę nagród, których wartości tworzą malejący ciąg geometryczny $(a_1, \dots, a_n)$, gdzie $a_1 = 1\,600$ i $a_n = 675$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

45. a) $S_4 = 4$, b) $S_8 = \frac{765}{256}$, c) $S_5 = 484$.

46. a) $S_7 = 3^7 - 1 = 2186$, b) $S_7 = \frac{43}{4}$.

47. Wskazówka. $S_n - a_1 = a_1 \cdot q \cdot \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$ i $S_n - a_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$.

48. 1 600 zł, 1 200 zł, 900 zł, 675 zł.

Zadania utrwalające

4.64. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , w którym:

a) $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = 1$,

b) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_2 = 1$,

c) $a_2 = 1$ i $a_5 = \frac{125}{8}$.

4.65. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , gdy:

a) $a_n = 2^n$,

b) $a_n = -\frac{3}{61} \cdot (-3)^{n-1}$,

c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,

d) $a_n = -35 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^n$,

e) $a_n = \frac{1}{124} \cdot 2^{n-1}$,

f) $a_n = 3^{1-n}$.

4.66. Wiedząc, że składniki są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, oblicz sumę:

a) $1 + 2 + \dots + 512$,

b) $2 - 4 + \dots - 1024$,

c) $1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{16}$,

d) $10^6 - 10^5 + \dots - 10$,

e) $50 - 10 + 2 - \dots + \frac{2}{25}$,

f) $-1 - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} - \dots - \frac{243}{32}$,

g) $1 + \sqrt{3} + 3 + \dots + 27$,

h) $1 - \sqrt{2} + 2 - \dots + 4$.

4.67. Oblicz wyraz pierwszy a_1 ciągu geometrycznego (a_n) , gdy:

a) $q = 3$ i $S_5 = 121$,

b) $q = -2$ i $S_5 = -11$,

c) $q = \frac{1}{2}$ i $S_6 = \frac{63}{8}$,

d) $q = -\frac{1}{3}$ i $S_6 = \frac{182}{9}$.

a_1	q	n	S_n
	$\frac{1}{2}$	10	$4 - \frac{1}{2^8}$
-5	0,1	4	
3		2	5
4	3		13 120

4.68. Przerysuj tabelę do zeszytu i wiedząc,

że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym

o ilorazie q , w miejsca ■ wpisz brakujące liczby.

4.69. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym

o ilorazie q . Oblicz:

a) S_8 , gdy $a_3 = 5,2$ i $a_6 = 41,6$,

b) S_7 , gdy $a_3 = -2$ i $a_6 = \frac{1}{4}$,

c) S_4 , gdy $a_6 = \frac{1}{36}$ i $a_7 = \frac{1}{108}$,

d) a_1 i q , gdy $S_5 = 242$ i $\frac{a_1 + a_2}{a_2} = 1\frac{1}{3}$.

4.70. Według znanej legendy wynalazca szachów na pytanie swojego władcy, jaką nagrodę pragnie otrzymać, odpowiedział:

– Na pierwszym polu szachownicy połóż, Panie, jedno ziarno pszenicy, na drugim – dwa ziarna, na trzecim – cztery ziarna, na czwartym – osiem ziaren, i tak dalej.

Ile ziaren pszenicy zażądał wynalazca szachów, jeżeli szachownica ma 64 pola?

4.71. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu, którego wyrazy są kolejnymi naturalnymi potęgami liczby 3.

4.72. Ciąg geometryczny jest dziesięciowyrazowy. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu wiedząc, że jego środkowe wyrazy to 16 i 32.

4.73. Różnica pierwszego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego (a_n) jest trzy razy większa od różnicy drugiego i trzeciego wyrazu tego ciągu. Oblicz iloraz q tego ciągu, wiedząc, że $a_1 \neq 0$.

4.74. Wyznacz wszystkie trójwyrazowe ciągi geometryczne, w których $a_1 \in \mathbb{N}^+$, $q \in \mathbb{N}^+$ i $S_3 = 21$.

D 4.75. W dziesięciowyrazowym ciągu geometrycznym (a_n) iloraz q jest równy $\frac{2}{3}$ i wyraz pierwszy jest równy $\frac{2}{3}$. Czy suma wyrazów o numerach parzystych jest większa od sumy wyrazów o numerach nieparzystych? Odpowiedź uzasadnij.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zadaniach

Przypomnijmy

Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r , to:

- $a_n = a_1 + (n-1)r$,
- $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$
- $r = \frac{a_k - a_m}{k - m}$, gdzie $k \neq m$,
- $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, gdzie $n > 1$,
- $a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$, gdzie $k < n$.



Ćwiczenie 49. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r . Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę.

- a) $a_{\blacksquare} = a_1 + 15r$, b) $a_{18} = a_1 + \blacksquare \cdot r$, c) $a_{\blacksquare} = \frac{a_{13} + a_{15}}{2}$,
- d) $a_{16} + a_{20} = 2 \cdot a_{\blacksquare}$, e) $a_{32} + a_{\blacksquare} = 2a_{66}$, f) $r = \frac{a_{15} - a_{\blacksquare}}{7}$,
- g) $r = \frac{a_{\blacksquare} - a_{17}}{4}$, h) $S_{\blacksquare} = \frac{(a_1 + a_{23}) \cdot \blacksquare}{2}$, i) $S_{\blacksquare} = \frac{2a_1 + 35r}{2} \cdot \blacksquare$.

Przypomnijmy

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q , to:

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,
- $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, gdzie $q \neq 1$,
- $\frac{a_n}{a_{n-k}} = q^k$, gdzie $k < n$,
- $S_n = n \cdot a_1$, gdzie $q = 1$,
- $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$,
- $a_n \cdot q^k = a_{n+k}$ gdzie $k \in \mathbb{N}^+$,
- $q = \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n}$.



Ćwiczenie 50. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q . Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę.

- a) $a_{23} = a_1 \cdot q^{\blacksquare}$, b) $a_{\blacksquare} = a_1 \cdot q^8$, c) $\frac{a_7}{a_{\blacksquare}} = q^2$, d) $a_{\blacksquare} \cdot q^7 = a_{16}$, e) $S_{\blacksquare} = 15a_1$,
- f) $a_{\blacksquare}^2 = a_{17} \cdot a_{19}$, g) $a_{33}^2 = a_{\blacksquare} \cdot a_{\blacksquare}$, h) $\frac{S_{\blacksquare} - a_1}{S_{\blacksquare} - a_{15}} = q$, i) $S_{\blacksquare} = a_1 \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1}$.

Przykład 31. Określ warunek, jaki powinny spełnić liczby a, b, c , aby jednocześnie tworzyły one ciąg arytmetyczny i geometryczny.

Rozwiązanie

Załóżmy, że r jest różnicą ciągu arytmetycznego (a, b, c) .

Wtedy $b = a + r$ i $c = a + 2r$. Zatem kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego są liczby: $a, a + r, a + 2r$. Liczby te tworzą ciąg geometryczny, gdy:

$$\begin{aligned}(a+r)^2 &= a \cdot (a+2r) & a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} \\ a^2 + 2ar + r^2 &= a^2 + 2ar \\ r^2 &= 0, \text{ więc } r = 0.\end{aligned}$$

Jeżeli $r = 0$, to $b = a$ i $c = a$, więc $a = b = c$.

Odp.: Liczby a, b, c tworzą jednocześnie ciąg arytmetyczny i geometryczny, gdy $a = b = c$.

Uwaga

Każdy stały ciąg co najmniej trójwyrazowy jest jednocześnie ciągiem arytmetycznym i geometrycznym.

Ćwiczenie 51. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q . Określ, czy ciąg (a_n) może być arytmetyczny, gdy: a) $q = 1$, b) $q = -1$, c) $q = 0$.

Przykład 32. Liczby 144, $a, b, c, 9$ w podanej kolejności są wyrazami ciągu:

a) geometrycznego, b) arytmetycznego.

Oblicz a, b, c .

Rozwiązanie

a) $(144, a, b, c, 9)$ – pięciowyrazowy ciąg geometryczny (b_n) o ilorazie q .

$$b_1 = 144, b_5 = 9, \text{ więc } q^4 = \frac{9}{144} = \frac{1}{16} \quad q^4 = \frac{b_5}{b_1}$$

$$\begin{aligned}q &= \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \text{ lub } q = -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} \\ q &= \frac{1}{2} \text{ lub } q = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Jeżeli $q = \frac{1}{2}$, to $a = 144 \cdot \frac{1}{2} = 72$, $b = 72 \cdot \frac{1}{2} = 36$, $c = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$.

Jeżeli $q = -\frac{1}{2}$, to $a = 144 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -72$, $b = -72 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 36$, $c = 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -18$.

b) $(144, a, b, c, 9)$ – pięciowyrazowy ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r .

$$a_1 = 144, a_5 = 9, \text{ więc } r = \frac{9-144}{5-1}, \text{ skąd } r = -33,75.$$

$$r = \frac{a_5 - a_1}{5-1}$$

$$a = 144 - 33,75 = 110,25, b = 110,25 - 33,75 = 76,5, c = 76,5 - 33,75 = 42,75.$$

Odp.: a) $a = 72, b = 36, c = 18$ lub $a = -72, b = 36, c = -18$,

b) $a = 110,25, b = 76,5, c = 42,75$.

Ćwiczenie 52. Liczby 16, $a, b, c, 81$ w podanej kolejności są wyrazami ciągu:

a) arytmetycznego, b) geometrycznego.

Oblicz a, b, c .

Przykład 33. Liczby $a, b, 1$ w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego. Te same liczby w kolejności 1, a, b są wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz a i b .

Rozwiązanie

$(a, b, 1)$ – trójwyrazowy ciąg arytmetyczny (a_n) , więc

$$b = \frac{a+1}{2}, \text{ skąd } 2b = a+1.$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$(1, a, b)$ – trójwyrazowy ciąg geometryczny (b_n) , więc

$$a^2 = 1 \cdot b, \text{ czyli } b = a^2.$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$$\begin{cases} 2b = a+1 \\ b = a^2 \end{cases}, \text{ więc } 2a^2 = a+1.$$

$$\Delta = 9, \sqrt{\Delta} = 3$$

$$2a^2 - a - 1 = 0, \text{ skąd } a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 1.$$

$$\text{Jeżeli } a = -\frac{1}{2}, \text{ to } b = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \text{ Jeżeli } a = 1, \text{ to } b = 1^2 = 1.$$

$$\text{Odp.: } a = -\frac{1}{2} \text{ i } b = \frac{1}{4} \text{ lub } a = 1 \text{ i } b = 1.$$

Ćwiczenie 53. Liczby $a, b, 8$ w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego. Te same liczby w kolejności 8, a, b są wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz a i b .

Ćwiczenie 54. Liczby $a, 10, b$ w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego. Oblicz a i b .

Przykład 34. Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi i siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Rozwiązanie

Liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, liczby a_1, a_2, a_7 są wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a = a_1, b = a_2 = a_1 + r, c = a_7 = a_1 + 6r$.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + r + a_1 + 6r = 93 \\ (a_1 + r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 6r) \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a + b + c = 93$$

$$b^2 = ac \text{ — własność ciągu geometrycznego.}$$

$$\textbf{1} \quad \begin{cases} 3a_1 + 7r = 93 \end{cases}$$

$$\textbf{2} \quad \begin{cases} r^2 - 4a_1r = 0 \end{cases}$$

$$\textbf{2} \quad r^2 - 4a_1r = 0$$

$$r(r - 4a_1) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{lub} \quad r = 4a_1$$

$$\textbf{1} \quad 3a_1 + 7 \cdot 0 = 93 \quad \text{lub} \quad 3a_1 + 7 \cdot 4a_1 = 93$$

$$a_1 = 31$$

$$a_1 = 3,$$

więc $r = 12$.

Obliczamy wyrazy ciągu a, b, c .

$$a = 31$$

$$a = 3$$

$$b = 31$$

$$b = 3 + 12 = 15$$

$$c = 31$$

$$c = 3 + 6 \cdot 12 = 75$$

Odp.: 31, 31, 31 lub 3, 15, 75.

Ćwiczenie 55. Trzy różne liczby, których suma jest równa 63, są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Te same liczby stanowią pierwszy, czwarty i szesnasty wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Odpowiedzi do ćwiczeń

49. a) 16, b) 17, c) 14, d) 18, e) 100, f) 8, g) 21, h) 23 i 23, i) 36 i 36.

50. a) 22, b) 9, c) 5, d) 9, e) 15, f) 18, g) 32 i 34, h) 15 i 15, i) 7.

51. a) Tak, b) nie, c) tak, gdy $a_1 = 0$; nie, gdy $a_1 \neq 0$.

52. a) $a = 32, 25, b = 48, 5, c = 64, 75$, b) $a = 24, b = 36, c = 54$ lub $a = -24, b = -36, c = -54$.

53. $a = -4$ i $b = -2$ lub $a = 8$ i $b = 8$. 54. $a = 10$ i $b = 10$. 55. 3, 12, 48.

Zadania utrwalające

4.76. Podane liczby są pięcioma początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) albo ciągu geometrycznego (b_n) . Napisz wzór tego ciągu:

- a) $-1, 1, -1, 1, -1,$ b) $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{11}{6}, \frac{7}{3},$ c) $486, 162, 54, 18, 6,$
 d) $5\frac{1}{2}, 8\frac{3}{4}, 12, 15\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2},$ e) $-3, -1, 1, 3, 5,$ f) $64, 80, 100, 125, 156\frac{1}{4}.$

4.77. Wiedząc, że składniki sumy są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego albo ciągu geometrycznego, oblicz sumę:

- a) $1 + 3 + 5 + \dots + 99 + 101,$ b) $8 - 2 + \frac{1}{2} - \dots + \frac{1}{512},$
 c) $12 + 4 + 1\frac{1}{3} + \dots + \frac{4}{243},$ d) $18 + 5,4 + 1,62 + \dots + 0,1458,$
 e) $\frac{4}{5} + 1,1 + 1\frac{2}{5} + \dots + 2\frac{3}{10},$ f) $\frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3} + \dots + \frac{64}{27}.$

4.78. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $\frac{1 + 2 + 3 + \dots + 1000}{2002},$ b) $\frac{3 + 5 + 7 + \dots + 101}{2 + 4 + 6 + \dots + 102},$ c) $\frac{-1 + 3 + 7 + \dots + 235}{-8 - 3 + 2 + \dots + 287},$
 d) $\frac{16 + 8 + 4 + \dots + \frac{1}{2}}{96 + 48 + 24 + \dots + 3},$ e) $\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 3n},$ f) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) \cdot \frac{3^n}{3^n - 1}.$

4.79. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_1 = 1$, $n = 9$ i $S_n = 369$. Wyrazy b_1 i b_9 ciągu geometrycznego (b_n) spełniają warunki $b_1 = a_1$ i $b_9 = a_9$. Oblicz b_7 .

4.80. Oblicz sumę:

- a) $10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \dots + 2^2 - 1^2,$ b) $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2.$

4.81. Liczby $x, y, 1$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby $x, y, x + y + 1$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu geometrycznego.

4.82. Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz te liczby.

4.83. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a i b , średnia arytmetyczna

D tych liczb jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, czyli $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny w bankowości

Procent prosty

Przypomnijmy

Jeden procent (1%) pewnej liczby a (lub innej wielkości) to setna część tej liczby (tej wielkości).

$$1\% \text{ liczby } a \text{ jest równe } \frac{1}{100} \cdot a,$$

$$p\% \text{ liczby } a \text{ jest równe } \frac{p}{100} \cdot a.$$

- Aby obliczyć, ile procent p wielkości a stanowi wielkość b , możemy:

- ułożyć równanie $\frac{b}{a} \cdot 100 = p$

- ułożyć proporcję $\begin{array}{l} a \text{ to } 100\% \\ b \text{ to } p\% \end{array}$

- Aby obliczyć liczbę a , gdy $p\%$ tej liczby jest równy b , możemy:

- ułożyć równanie $\frac{p}{100} \cdot a = b,$

skąd $a = b \cdot \frac{100}{p},$

- ułożyć proporcję $\begin{array}{l} a \text{ to } 100\% \\ b \text{ to } p\% \end{array},$

skąd $\frac{a}{b} = \frac{100}{p}.$

- Jeżeli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to $a = \frac{b \cdot c}{d}$, $b = \frac{a \cdot d}{c}$, $c = \frac{a \cdot d}{b}$, $d = \frac{b \cdot c}{a}$.

Ćwiczenie 56. W czasie wakacji Franek zarobił 650 zł, ale z tej kwoty potrącono mu 20% na podatek. Jaka kwotę otrzymał?

Ćwiczenie 57. Znajdź liczbę, której:

a) 20% jest równe 16,

b) 8,5% jest równe 0,85,

c) $3\frac{1}{3}\%$ jest równe 120,

d) $33\frac{1}{3}\%$ jest równe $1\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 58. Roztwór solny zawiera 2% soli. W ilu kilogramach tego roztworu jest 0,5 kg soli?

Ćwiczenie 59. Buty kosztują 120 zł. Oblicz, przez jaką liczbę należy pomnożyć cenę butów, by móc obliczyć ich nową cenę po:

a) obniżce o 25%,

b) podwyżce o 8%,

c) obniżce o 20%.

Zakładając konto w banku, decydujesz się na określone oprocentowanie tego rachunku. Zależy ono między innymi od czasu, w jakim zobowiązujesz się nie naruszać stanu konta, czyli tzw. lokaty terminowej, oraz od sposobu kapitalizacji odsetek i od oprocentowania w stosunku rocznym.

Definicja

Procent prosty to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K (*kapitał początkowy*) polegający na tym, że dochód w postaci odsetek nie jest doliczany do wkładu i nie procentuje wraz z nim w następnym okresie oszczędzania.

W przypadku stosowania procentu prostego odsetki nie są doliczane do kapitału na następny okres, czyli w następnym okresie nadal oprocentowaniu podlega tylko sam wkład pieniężny.

Przykład 35. Adam wpłacił do banku 100 zł i założył lokatę na 3 lata na procent prosty. Roczna stopa oprocentowania była równa 6% i miała być stała przez cały okres lokaty. Oblicz, jaki będzie stan konta Adama po upływie 3 lat.

Rozwiązanie

Stan konta Adama po upływie:

1 roku: 100 zł *plus* 6% z 100 zł,

2 lat: (100 zł *plus* 6% z 100 zł) *plus* 6% z 100 zł,

3 lat: [(100 zł *plus* 6% z 100 zł) *plus* 6% z 100 zł] *plus* 6% z 100 zł.

Skąd $100 + 3 \cdot \frac{6}{100} \cdot 100 = 100 + 18 = 118$.

$$100 + \frac{6}{100} \cdot 100 = 100 \cdot 1,06$$

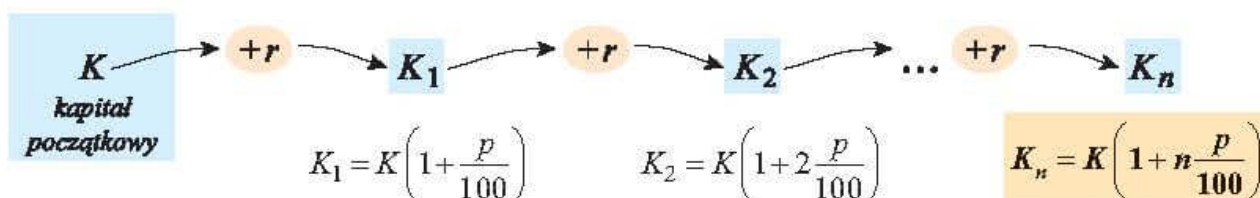
$$100 + 3 \cdot \frac{6}{100} \cdot 100 = 100 \left(1 + 3 \cdot \frac{6}{100} \right)$$

Odp.: Po upływie 3 lat Adam będzie miał na koncie 118 zł.

Uwaga

Procent prosty jest przykładem ciągu arytmetycznego.

Jeżeli liczby $K_1, K_2, \dots, K_n$ są wartościami kapitału początkowego K po upływie n ($n \in \mathbb{N}^+$) okresów oszczędzania, to liczby $K, K_1, K_2, \dots, K_n$ są wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy r , takiej że $r = \frac{p}{100}K$, gdzie p to stopa oprocentowania w każdym z okresów.



Ćwiczenie 60. Piotr założył w banku na 5 lat lokatę w kwocie 500 euro na procent prosty. Roczna stopa procentowa była równa 2,4% i miała być stała przez cały czas lokaty. Oblicz, jaki będzie stan konta Piotra po upływie 5 lat.

Przykład 36. Pan Marek wpłacił do banku kwotę K równą 200 zł, która będzie oprocentowana 6% w stosunku rocznym, bez kapitalizacji odsetek. Podaj, jaką kwotę K_n będzie mógł pan Marek wypłacić z banku po upływie:

a) jednego roku, b) dwóch lat, c) n lat.

Rozwiązanie

$$\text{a) } K_1 = 200 + \frac{6}{100} \cdot 200 = 200 \left(1 + \frac{6}{100} \right) = 212,$$

$$\text{b) } K_2 = 200 + 2 \cdot \frac{6}{100} \cdot 200 = 200 \left(1 + 2 \cdot \frac{6}{100} \right) = 224,$$

$$\text{c) } K_n = 200 + n \cdot \frac{6}{100} \cdot 200 = 200 \left(1 + n \cdot \frac{6}{100} \right) = 200 + 12n.$$

Odp.: a) 212 zł, b) 224 zł, c) $K_n = (200 + 12n)$ zł.

Ćwiczenie 61. Pani Ala wpłaciła do banku kwotę K równą 500 zł, która będzie oprocentowana 4% w stosunku rocznym, bez kapitalizacji odsetek. Podaj, jaką kwotę K_n będzie mogła pani Ala wypłacić z banku po upływie:

a) jednego roku, b) trzech lat, c) n lat.

Ćwiczenie 62. Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy podana informacja jest prawdziwa. *Jeżeli założysz w banku lokatę na 10 lat w kwocie 100 zł na procent prosty przy rocznej stopie procentowej równej 10%, to podwoisz swój kapitał.*

Uwaga

	jednego roku	m miesięcy	t dni
Odsetki za okres:	$\frac{p \cdot K}{100}$	$\frac{p \cdot K \cdot m}{100 \cdot 12}$	$\frac{p \cdot K \cdot t}{100 \cdot 365}$ <i>365 – liczba dni w roku.</i>

K – kapitał złożony w banku, p – oprocentowanie (stopa procentowa).

Ćwiczenie 63. W banku A na procencie prostym stopa oprocentowania w stosunku rocznym jest równa 10%. W banku tym można wypłacić należne odsetki w każdej chwili. Wpłacasz do tego banku kwotę 1000 zł. Oblicz, jaką kwotę odsetek będzie można wypłacić po upływie: a) jednego roku, b) pięciu miesięcy, c) osiemdziesięciu dni.

Procent składany

Definicja

Procent składany to sposób oprocentowania kapitału polegający na tym, że odsetki po roku (lub innym okresie) oszczędzania, w którym obowiązuje ustalona stopa procentowa, dopisywane są do kapitału i procentują wraz z nim w następnym okresie oszczędzania.

Proces dopisywania odsetek nazywa się **kapitalizacją odsetek**.

Przykład 37. Andrzej złożył w banku swoje oszczędności w kwocie 1000 zł na okres 3 lat z kapitalizacją odsetek po roku. Bank oferuje roczną stopę procentową równą 5%. Oblicz stan konta Andrzeja po upływie okresu oszczędzania. Wynik zaokrąglaj do 0,01 zł.

Rozwiązanie

Stan konta Andrzeja po upływie:

$$1 \text{ roku: } 1000 + 0,05 \cdot 1000 = 1050 \text{ zł,}$$

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) - 1000 \cdot 1,05$$

$$2 \text{ lat: } 1050 + 0,05 \cdot 1050 = 1102,50 \text{ zł,}$$

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 - 1000 \cdot (1,05)^2$$

$$3 \text{ lat: } 1102,50 + 0,05 \cdot 1102,50 = 1157,63 \text{ zł.}$$

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 - 1000 \cdot (1,05)^3$$

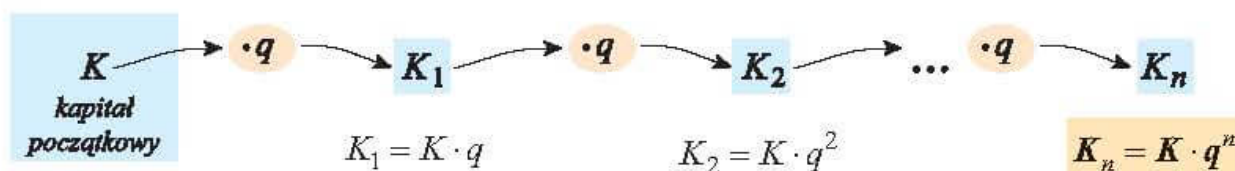
Odp.: Andrzej po upływie 3 lat będzie miał na koncie 1157,63 zł.

Ćwiczenie 64. Marcin złożył 500 zł w banku i założył lokatę na okres 4 lat. Bank oferuje roczną stopę procentową równą 6% z kapitalizacją odsetek po roku. Oblicz stan konta Marcina po upływie okresu oszczędzania. Wynik zaokrąglaj do 0,01 zł.

Uwaga

Procent składany jest przykładem ciągu geometrycznego.

Jeżeli liczby $K_1, K_2, \dots, K_n$ są wartościami kapitału K po upływie n ($n \in \mathbb{N}^+$) okresów oszczędzania przy stopie procentowej p w każdym z okresów, to liczby te są wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 1 + \frac{p}{100}$.



Uwaga. Jeżeli kapitał K wpłacimy do banku na n okresów przy danym oprocentowaniu $p\%$ w każdym z okresów oraz gdy odsetki będą kapitalizowane po każdym z n okresów, to kapitał K_n na zakończenie okresu lokaty będzie równy

$$K_n = K \left(1 + \frac{P}{100} \right)^n.$$

Banki z reguły preferują zmienne stopy procentowe wkładów i kredytów.

Pokażemy na przykładzie, jak wtedy obliczamy kwoty po n latach.

Przykład 38. Lokujesz 100 zł na rachunku bankowym na okres czterech lat z kapitalizacją odsetek po roku. W ciągu tego okresu nastąpiły zmiany rocznej stopy procentowej, które były odpowiednio równe: 5%, 4%, 3%, 2%. Jaka była wartość twojej lokaty na koniec okresu oszczędzania? (Nie uwzględniaj podatku dochodowego)

Rozwiązanie

Kapitał początkowy $K = 100$ zł. Stopa procentowa w banku zmieniała się:

1° Po pierwszym roku oszczędzania kapitał

$$K_1 = K \cdot q_1, \text{ gdzie } q_1 = 1 + \frac{5}{100}.$$

2° Po drugim roku oszczędzania kapitał

$$K_2 = K_1 \cdot q_2 = K \cdot q_1 \cdot q_2, \text{ gdzie } q_2 = 1 + \frac{4}{100}.$$

3° Po trzecim roku oszczędzania kapitał

$$K_3 = K_2 \cdot q_3 = K \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3, \text{ gdzie } q_3 = 1 + \frac{3}{100}.$$

4° Po czwartym roku oszczędzania kapitał

$$K_4 = K_3 \cdot q_4 = K \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4, \text{ gdzie } q_4 = 1 + \frac{2}{100}.$$

$$\text{Zatem } K_4 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{4}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{3}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{2}{100} \right) =$$

$$= 100 \cdot 1,05 \cdot 1,04 \cdot 1,03 \cdot 1,02, \text{ czyli } K_4 = 114,73 \text{ zł.}$$

Odp.: Na koniec okresu oszczędzania kapitał $K_4 = 114,73$ zł.

Ćwiczenie 65. Oblicz wartość lokaty rocznej równej 200 zł, po okresie oszczędzania trzech lat, z kapitalizacją odsetek po roku, jeżeli w tym okresie stopy procentowe były odpowiednio równe 6%, 3% i 5%.

Uwaga

Jeżeli kapitał K umieścimy na koncie na n okresów, przy zmiennej stopie procentowej p_i , gdy $i \in \{1, \dots, n\}$, to kapitał końcowy K_n po upływie n okresów dany jest wzorem

$$K_n = K \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right),$$

gdzie $1 + \frac{p_1}{100} = q_1$, $1 + \frac{p_2}{100} = q_2$, ..., $1 + \frac{p_n}{100} = q_n$, to zmienne czynniki procentowe.

Odpowiedzi do ćwiczeń

56. 520 zł 57. a) 80, b) 10, c) 3600, d) 4,5. 58. 25 kg 59. a) 0,75, b) 1,08, c) 0,8.
 60. 560 euro. 61. a) 520 zł, b) 560 zł, c) $500 + 20n$. 62. Tak.
 63. a) 100 zł, b) 41,67 zł, c) 21,92 zł. 64. 631,24 zł. 65. 229,28 zł.

Zadania utrwalające

- 4.84. Właściciel lokaty złożył kapitał na procent prosty. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejscach ■ wpisz odpowiednią liczbę.



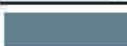
Właściciel lokaty	Kapitał początkowy [zł]	Roczna stopa procentowa [%]	Liczba n lat lokaty	Odsetki po upływie n lat [zł]	Stan konta po upływie n lat [zł]
Ala	3000	4	10	■	■
Beata	■	5	5	250	■
Robert	100	1	■	99	■

- 4.85. Bank A oferuje dopisanie po roku 100 zł do 1000 zł złożonych u nich na lokacie. W banku B można założyć lokatę na rok przy stopie procentowej równej 10%. Czy oferty banków się różnią? Odpowiedź uzasadnij.
- 4.86. Trzy banki podają różne informacje o stopie oprocentowania procentu prostego. W banku A oprocentowanie roczne jest równe 12%, w banku B oprocentowanie półroczne jest równe 6%, a w banku C oprocentowanie kwartalne to 3%. Czy oferty banków się różnią? Odpowiedź uzasadnij.
- 4.87. Wpłacasz do banku na procent prosty kwotę 100 zł, oprocentowaną 12% w stosunku rocznym. Oblicz kwotę dochodu, którą przyniesie Ci ta lokata po upływie:
- a) jednego dnia, b) jednego miesiąca, c) jednego kwartału.

4.88. Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy podana niżej informacja jest prawdziwa.

- a) Jeżeli ulokujesz 100 zł na procent prosty w banku A i równocześnie 100 zł na procent składany w banku B, a obie stopy procentowe w obu bankach będą równe, to po upływie dwóch lat twój stan konta w banku A będzie większy niż w banku B.
- b) Podwoisz swój stan posiadania w okresie krótszym niż 10 lat, jeżeli ulokujesz swój kapitał w banku na procent składany przy rocznej stopie procentowej równej 10%.

4.89. Właściciel lokaty złożył kapitał na procent składany. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce  wpisz odpowiednią liczbę po zaokrągleniu jej do 0,01 zł.

Właściciel lokaty	Kapitał początkowy [zł]	Roczna stopa procentowa [%]	Liczba n lat lokaty	Stan konta po upływie n lat [zł]
Bogdan	300	8	3	
Czesław	400	5	4	
Damian	200	10	2	

4.90. W gablocie pewnego banku wywieszono tabelę z trzema (I, II, III) rodzajami ofert dotyczących lokat terminowych.

Rodzaj oferty	Stopa procentowa (w stosunku rocznym)	Kapitalizacja odsetek
I	2,4%	kwartalna
II	2,8%	półroczna
III	3,2%	roczna

Którą z wymienionych lokat (tabela powyżej) należy wybrać, by zysk z ulokowanej kwoty 10 000 zł po upływie jednego roku był największy? Odpowiedź uzasadnij.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, gdy określony jest wzorem:

- A. $a_n = 5 - 3n$, B. $a_n = (-1)^n$, C. $a_n = n^2 + 2$, D. $a_n = \frac{1}{n}$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

O ciągu arytmetycznym wiadomo, że $a_3 = 6$ i $a_7 = 14$. Różnica tego ciągu jest równa:

- A. 1, B. 2, C. 3, D. 4.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

W ciągu arytmetycznym $(1, 5, 9, \dots, 401)$ liczba wyrazów jest równa:

- A. 99, B. 100, C. 101, D. 102.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Suma $20 + 22 + 24 + \dots + 128$ jest równa:

- A. 4000, B. 4620, C. 4070, D. 7590.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ciąg (a_n) jest geometryczny, gdy określony jest wzorem:

- A. $a_n = -n^2$, B. $a_n = n + 1$, C. $a_n = \frac{n+1}{n}$, D. $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q określony jest wzorem $a_n = (-2)^{n+2}$.
Zatem:

- A. $a_1 = -2$ i $q = -2$, B. $a_1 = -6$ i $q = -2$,
C. $a_1 = 8$ i $q = -2$, D. $a_1 = -8$ i $q = -2$.

7. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 6 dają resztę 1, tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = 6n - 5$.	P	F
Jeżeli ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n + 1$, to do przedziału $(200; 300)$ należy pięćdziesiąt wyrazów tego ciągu.	P	F
W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz pierwszy jest równy 1, a wyraz setny jest równy 397. Zatem $S_{100} = 398 \cdot 50$.	P	F
Jeżeli ciąg (a_n) o ilorazie q określony jest wzorem $a_n = 1 \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, to $a_1 = \frac{1}{2}$ i $q = \frac{2}{3}$.	P	F
Jeżeli liczby $\frac{32}{63}, \frac{16}{63}, \frac{8}{63}, \dots$ są początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego (a_n) , to: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1$.	P	F
Jeżeli liczby 25, a , 36 są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to $a = 25 \cdot 36$.	P	F

8. Ciąg $(a_n) = (-17, -13, -9, -5, \dots)$ jest nieskończonym ciągiem arytmetycznym.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dwunasty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. 61, B. 27, C. 31, D. 65.

9. Czy suma wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 10 dają resztę 3, jest równa 477?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$a_1 = 13$ i $a_n = 93$, więc $n = 9$. Zatem $S_9 = 477$.
N	Nie,		B.	$a_1 = 13$ i $r = 10$, więc $a_n = 10n + 3$, skąd $n = 10$. Zatem $S_{10} = 580$.

10. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ciągi geometryczne (a_n) i (b_n) określone są wzorami $a_n = 3^{1-n}$ i $b_n = 125 \cdot 5^{n-4}$.

Suma wyrazów $a_2 + b_2$ jest równa:

- A. 2, B. $5\frac{1}{3}$, C. $25\frac{1}{3}$, D. $5\frac{1}{9}$.

11. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Suma wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest równa:

- A. 9810, B. 90, C. 4905, D. 4895.

12. W ciągu geometrycznym (a_n) wyraz $a_1 = 1$ i suma $S_3 = 7$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz q tego ciągu jest równy:

- A. $-\frac{1}{2}$, B. -2, C. $\frac{1}{2}$, D. 2.

13. Liczby 4, y , 25 w podanej kolejności są trzema pierwszymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz q tego ciągu spełnia warunek:

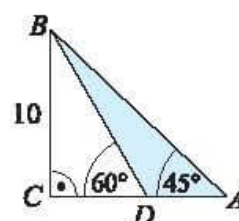
- A. $q = 10$ lub $q = -10$, B. $q = 0,4$ lub $q = -0,4$,
C. $q = 14,5$ lub $q = -14,5$, D. $q = 2,5$ lub $q = -2,5$.

5. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów

Twierdzenie sinusów (Snelliusa*)

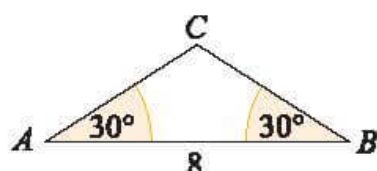
Rozwiązać trójkąt to znaczy obliczyć długości wszystkich jego boków oraz miary wszystkich jego kątów. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów pozwoli nam rozwiązywać dowolne trójkąty.

Ćwiczenie 1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i rozwiąż trójkąt DAB .

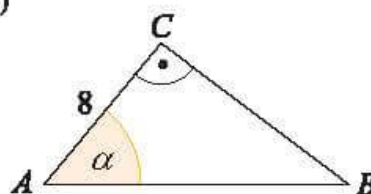


Ćwiczenie 2. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole trójkąta ABC .

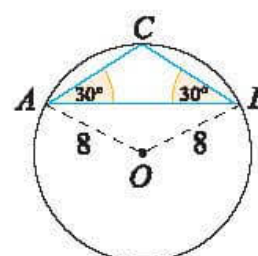
a)



b)



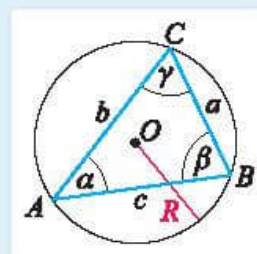
c)



Twierdzenie sinusów

W każdym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta przeciwległego jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R, \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R, \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \text{ gdzie } R \text{ jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.}$$

Z (założenie):

a, b, c – długości boków trójkąta,

α, β, γ – miary kątów leżących odpowiednio naprzeciw boków a, b, c ,

R – promień okręgu opisanego na danym trójkącie.

T (teza):

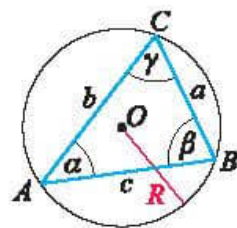
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$

*) Willebrord Snell zwany Snelliusem (1580-1626) – holenderski astronom i matematyk.

Dowód:

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



- 1 Wykażemy, że $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Pole P trójkąta można obliczyć, stosując jeden z trzech wzorów:

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \quad \text{lub} \quad P = \frac{1}{2}ac \sin \beta, \quad \text{lub} \quad P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \quad \text{więc}$$

$$\frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \quad / \cdot 2$$

$$bc \sin \alpha = ac \sin \beta = ab \sin \gamma, \quad \text{skąd}$$

$$bc \sin \alpha = ac \sin \beta, \quad ac \sin \beta = ab \sin \gamma, \quad bc \sin \alpha = ab \sin \gamma, \quad \text{więc}$$

$$b \sin \alpha = a \sin \beta, \quad c \sin \beta = b \sin \gamma, \quad c \sin \alpha = a \sin \gamma.$$

Zapisujemy każdą z powyższych równości w postaci proporcji

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \quad \text{skąd} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

- 2 Wykażemy, że $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, rozważając trzy przypadki:

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ, \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

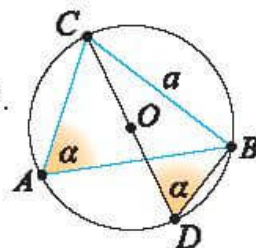
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

W okręgu prowadzimy średnicę CD i punkt D łączymy z punktem B .

Wtedy $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDB| = \alpha$, $|CD| = 2R$, $|\sphericalangle DBC| = 90^\circ$.

W trójkącie CDB

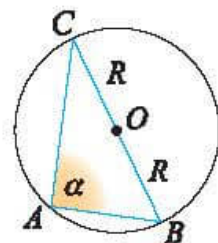
$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|CD|}, \quad \text{czyli} \quad \sin \alpha = \frac{a}{2R}, \quad \text{skąd} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$



$$\alpha = 90^\circ$$

Zauważamy, że $|CB| = a = 2R$. $\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1$, więc

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{a}{1} = a, \quad \text{czyli} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

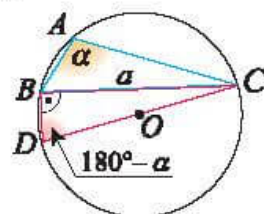
W okręgu prowadzimy średnicę CD i punkt D łączymy z punktem B .

Wtedy $|CD| = 2R$, $|\sphericalangle DBC| = 90^\circ$.

Kąty BAC i BDC są kątami wpisanymi, opartymi na łukach

dopełniających się, więc $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BDC| = 180^\circ$, czyli

$$\alpha + |\sphericalangle BDC| = 180^\circ, \quad \text{skąd} \quad |\sphericalangle BDC| = 180^\circ - \alpha.$$



W trójkącie BDC :

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{|BC|}{|CD|}, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{a}{2R}, \text{ skąd } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R. \quad \text{c.n.u.}$$

Z rozważań w punkcie 2° wynika, że $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$, zatem punkt 1° dowodu można pominąć.

Uwaga

W zadaniach dotyczących rozwiązywania trójkątów będziemy zakładać, że w trójkącie ABC boki a, b, c leżą odpowiednio naprzeciw kątów α, β, γ .

Przykład 1. Rozwiąż trójkąt ABC , w którym miary kątów α i β są odpowiednio równe 45° i 75° oraz długość boku c jest równa 6 dm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie. W obliczeniach przyjmij $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $c = 6$ dm. | **Obliczyć:** a, b, R .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \text{ więc } \gamma = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ.$$

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ więc } a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{6 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ},$$

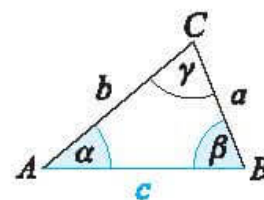
$$\text{skąd } a = 2\sqrt{6} \text{ dm},$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ więc } b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{6 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ},$$

$$\text{skąd } b = (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ dm},$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \text{ więc } 2R = \frac{6}{\sin 60^\circ}, \text{ skąd } R \approx 3,15 \text{ dm}.$$

$$\text{Odp.: } b = (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ dm}, \gamma = 60^\circ, R = 2\sqrt{3} \text{ dm}.$$



$$a = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$b = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Uwaga

Zadanie z przykładu 1. możemy rozwiązać także, obliczając w pierwszej kolejności promień R okręgu opisanego na tym trójkącie, a następnie długości boków a i b na podstawie równości $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$ i $\sin \beta = \frac{b}{2R}$.

Ćwiczenie 3. Rozwiąż trójkąt ABC i oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie, gdy $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $a = 9$. W obliczeniach przyjmij, że $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Ćwiczenie 4. Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, w którym promień okręgu opisanego na nim jest równy 9 cm, a jeden z kątów tego trójkąta ma miarę 150° .

Przykład 2. Rozwiąż trójkąt ABC , w którym boki b i c mają odpowiednio długości 10 i 8, a kąt β ma miarę 60° . Długość boku podaj w przybliżeniu do 0,1, a miary kątów do 1° .

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $b = 10$, $c = 8$, $\beta = 60^\circ$. | **Obliczyć:** a , α , γ .

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ skąd } \sin \gamma = \frac{c \sin \beta}{b} = \frac{8 \cdot \sin 60^\circ}{10} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

$$\sin \gamma \approx 0,6928, \text{ więc } \gamma \approx 44^\circ \text{ lub } \gamma \approx 136^\circ.$$

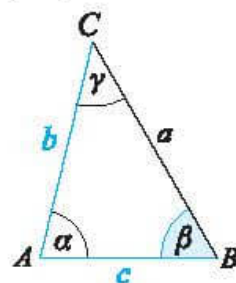
Warunki zadania spełnia tylko kąt o mierze 44° , ponieważ spełnia warunek $\beta + \gamma < 180^\circ$.

Obliczamy miarę kąta α i długość boku a .

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma), \text{ czyli } \alpha \approx 76^\circ.$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ skąd } a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{10 \cdot \sin 76^\circ}{\sin 60^\circ}, \text{ czyli } a \approx 11,2.$$

Odp.: $a \approx 11,2$, $\alpha \approx 76^\circ$, $\gamma \approx 44^\circ$.



Ćwiczenie 5. Rozwiąż trójkąt ABC , w którym $a = 18$, $b = 14$, $\alpha = 62^\circ$. Wyniki zaokrąglaj do całości.

Przykład 3. Rozwiąż trójkąt ABC , w którym boki a i c mają odpowiednio długości 2 i $\sqrt{2}$, a kąt γ ma miarę 30° . Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Rozwiązanie

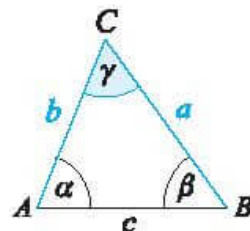
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $a = 2$, $c = \sqrt{2}$, $\gamma = 30^\circ$. | **Obliczyć:** b , α , β .

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ skąd } \sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c} = \frac{2 \cdot \sin 30^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ więc}$$

$$\alpha = 45^\circ \text{ lub } \alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

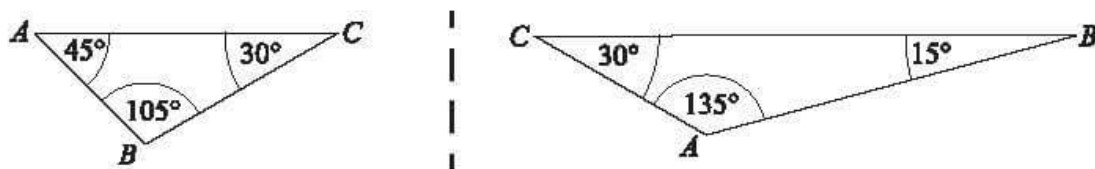


Kąt $\alpha = 45^\circ$ oraz kąt $\alpha = 135^\circ$ spełniają warunki zadania, gdyż $\alpha + \gamma < 180^\circ$.

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$, więc

$$\beta = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ \quad \text{lub} \quad \beta = 180^\circ - (135^\circ + 30^\circ) = 15^\circ.$$

Zauważamy, że istnieją dwa trójkąty spełniające warunki zadania.



Dla każdego trójkąta obliczamy długość boku b z wzoru $b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$.

$$b = \frac{\sqrt{2} \sin 105^\circ}{0,5} = \frac{\sqrt{2} \sin 75^\circ}{0,5}, \text{ skąd} \quad b = \frac{\sqrt{2} \sin 15^\circ}{0,5}, \text{ skąd}$$

$$b \approx 2,73. \quad b \approx 0,73.$$

Odp.: $b \approx 2,73$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 105^\circ$ lub $b \approx 0,73$, $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

Ćwiczenie 6. Rozwiąż trójkąt ABC , w którym boki b i c mają odpowiednio długości 10 i 11, a kąt β ma miarę 30° . Wynik zaokrąglaj do całości.

Przykład 4. Uzasadnij, że **nie istnieje** trójkąt ABC , w którym $a = 5$, $b = 16$, $\alpha = 30^\circ$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że gdyby istniał trójkąt spełniający warunki zadania, to spełniona byłaby równość:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ skąd } \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{16 \cdot \sin 30^\circ}{5} = 1,6. \quad \sin \beta \in (-1; 1)$$

Nie istnieje kąt β , taki że $\sin \beta > 1$, więc trójkąt ABC nie istnieje.

c.n.u.

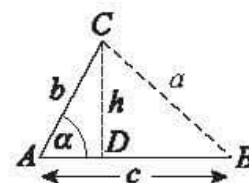
Ćwiczenie 7. Sprawdź, czy istnieje trójkąt ABC , w którym:

- a) $a = 16$, $b = 5$, $\alpha = 30^\circ$, b) $c = 10$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 135^\circ$,
c) $b = 8$, $c = 4$, $\gamma = 60^\circ$, d) $a = 1$, $c = 1$, $\gamma = 135^\circ$.

Jeśli trójkąt istnieje, to podaj pozostałe jego wymiary oraz miary kątów.

Ćwiczenie 8. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku. Wyraż wysokość h w zależności od boku b i kąta ostrego α . Sprawdź, czy można zbudować trójkąt o bokach a , b i c , gdy:

- a) $a < h$, b) $a = h$, c) $h < a < b$, d) $a \geq b$.



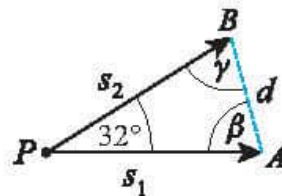
Przykład 5. Dwa statki, zakotwiczone na redzie obok siebie, wypływają w tym samym czasie. Przyjmujemy, że trasy rejsów odbywają się wzdłuż prostych, które tworzą kąt 32° . Prędkość jednego ze statków jest równa 28 węzłów (28 w), a prędkość drugiego jest większa niż 20 węzłów. Po upływie 3,5 godziny (3,5 h) odległość pomiędzy statkami była równa 72 mile morskie (72 Mm). Przyjmując, że morze jest spokojne, oblicz prędkość drugiego statku. Wynik podaj w przybliżeniu do jednego węzła.



Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

- v_1, v_2 – prędkości poruszania się statków,
- s_1, s_2 – długości tras, które pokonały statki,
- d – odległość między statkami po upływie 3,5 h.



Dane: $v_1 = 28$ w, $t = 3,5$ h, $d = 72$ Mm, $\alpha = 32^\circ$. | **Obliczyć:** v_2 , gdy $v_2 > 20$.

Statki wyruszyły z punktu P , a po upływie 3,5 godziny znalazły się odpowiednio w punktach A i B . Modelem tej sytuacji jest trójkąt PAB .

Z fizyki wiadomo, że droga $s = vt$, zatem

$$s = 28 \cdot 3,5 = 98, \text{ czyli } s = 98 \text{ Mm.}$$

Z twierdzenia sinusów:

$$\bullet \quad \frac{s_1}{\sin \gamma} = \frac{d}{\sin \alpha}, \text{ skąd } \sin \gamma = \frac{s_1 \sin \alpha}{d} = \frac{98 \cdot \sin 32^\circ}{72},$$

$$\sin \gamma = 0,7213, \text{ więc } \gamma \approx 46^\circ \text{ lub } \gamma \approx 134^\circ$$

$$\beta \approx 102^\circ \text{ lub } \beta \approx 14^\circ,$$

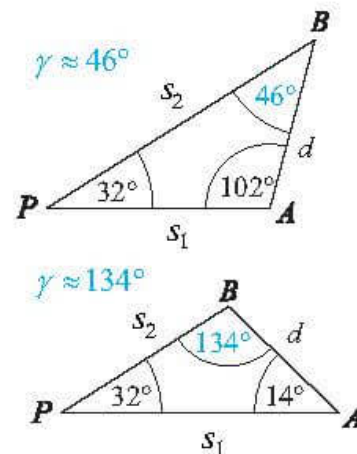
$$\bullet \quad \frac{s_2}{\sin \beta} = \frac{d}{\sin \alpha}, \text{ skąd } s_2 = \frac{d \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$s_2 = \frac{72 \cdot \sin 102^\circ}{\sin 32^\circ} \text{ lub } s_2 = \frac{72 \cdot \sin 14^\circ}{\sin 32^\circ}, \text{ więc}$$

$$s_2 \approx 132,9 \text{ Mm} \quad \text{lub} \quad s_2 \approx 32,9 \text{ Mm.}$$

$$v_2 = \frac{s_2}{t}, \text{ więc } v_2 = \frac{132,9}{3,5} \quad \text{lub} \quad v_2 = \frac{32,9}{3,5}$$

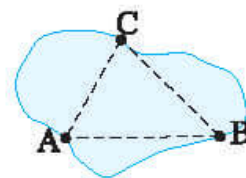
$$v_2 \approx 38 \text{ w} \quad \text{lub} \quad v_2 = 9,4 \text{ w.}$$



$$\begin{array}{l} 38 > 20 \\ 9,4 < 20 \end{array}$$

Odp.: Drugi statek płynął z prędkością około 38 węzłów.

Ćwiczenie 9. Nad pewnym jeziorem znajdują się trzy przystanie, oznaczone na rysunku literami A , B i C . Wiedząc, że odległość między przystaniami A i B jest równa 1000 m oraz $|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$ i $|\sphericalangle ABC| = 45^\circ$, oblicz odległość przystani C od przystani A oraz odległość przystani C od przystani B . Wynik zaokrąglaj do 1 m.



Ćwiczenie 10. W trójkącie ABC długości boków AC i BC są odpowiednio równe 2 i $\sqrt{2}$, a miara kąta BAC jest 30° . Oblicz długość boku AB .

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. $|AB| = 10\sqrt{2}$, $|BD| = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, $|AD| = \frac{10}{3} \cdot (3 - \sqrt{3})$, $|\sphericalangle DBA| = 15^\circ$, $|\sphericalangle ADB| = 120^\circ$.
2. a) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$, b) $32 \tan \alpha$, c) $16\sqrt{3}$. 3. $R = 3\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{6}$, $c = \frac{3(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{2}$, $\gamma = 15^\circ$.
4. 9 cm. 5. $\beta = 43^\circ$, $\gamma = 75^\circ$, $c \approx 20$. 6. $\gamma_1 \approx 33^\circ$, $\alpha_1 \approx 117^\circ$, $a_1 \approx 18$, $\gamma_2 \approx 147^\circ$, $\alpha_2 \approx 3^\circ$, $a_2 \approx 1$.
7. a) Tak, $c \approx 20$, $\beta \approx 9^\circ$, $\gamma \approx 141^\circ$, b) nie, ponieważ $\alpha + \beta \approx 195^\circ > 180^\circ$, c) nie, ponieważ $\sin \beta \approx \sqrt{3} > 1$, d) nie, ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, a z warunków zadania wynika, że $\alpha = 135^\circ$.
8. $h = b \sin \alpha$, a) nie, ponieważ trójkąt CDB jest prostokątny i a jest przeciwprostokątną, b) tak, trójkąt ABC jest prostokątny i $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$, c) tak, d) tak.
9. $|AC| \approx 732$ m, $|BC| \approx 897$ m.
10. $|AB| = \sqrt{3} + 1$ lub $|AB| = \sqrt{3} - 1$. Wskazówka. Zauważ, że $|\sphericalangle ABC| = 45^\circ$ lub 135° .

Zadania utrwalające

- 5.1. Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie, gdy dana jest długość jednego z jego boków i miara kąta leżącego naprzeciw tego boku.
 - a) $b = 45$ cm, $\beta = 60^\circ$, b) $c = 8$ m, $\gamma = 120^\circ$, c) $a = 72$ dm, $\alpha = 45^\circ$.
- 5.2. Wyznacz promień R okręgu opisanego na trójkącie, w którym jeden z boków ma długość a , natomiast kąty do niego przyległe mają miary β i γ .
- 5.3. Rozwiąż trójkąt ABC , znając promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i dwa spośród jego kątów α , β , γ . Długości boków podaj w przybliżeniu do jednego miejsca po przecinku.
 - a) $R = 50$ cm, $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 30^\circ$, b) $R = 36$ cm, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 36^\circ$.

5.4. Rozwiąż trójkąt ABC . Długości boków podaj w przybliżeniu do dwóch miejsc po przecinku, a kąty z dokładnością do 1° , gdy:

- a) $b = 18$ cm, $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 49^\circ$, b) $c = 7$ m, $\beta = 62^\circ$, $\gamma = 108^\circ$,
 c) $a = 14$ cm, $b = 9$ cm, $\alpha = 42^\circ$, d) $b = 7,53$, $c = 5,13$, $\gamma = 36^\circ$.

5.5. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 49 cm. Rozwiąż ten trójkąt, wiedząc, że $|AC| = 52$ cm, $|BC| = 40$ cm. Długości boków podaj w przybliżeniu do 0,01 cm.

5.6. W trójkącie równoramiennym ABC odcinek dwusiecznej AD zawarty w tym trójkącie ma długość 6. Wiedząc, że miara kąta ACB jest równa 120° , oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

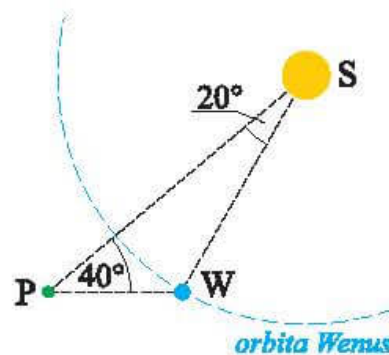
5.7. Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC , gdy:

- a) $|AB| = \sqrt{3}$, $|\sphericalangle BAC| = 110^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 10^\circ$,
 b) $|AB| = 4$, $|BC| = 6$, $|AC| = 8$,
 c) $|AC| = 9$, $|\sphericalangle CAB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{3}|\sphericalangle ACB|$,
 d) $A = (0,0)$, $B = (8,0)$, $C = (3,6)$.

5.8. Z planetoidy^{*)} (P) widać Słońce (S) i planetę Wenus (W) pod kątem 40° , a ze Słońca widać planetoidę i planetę Wenus pod kątem 20° . Odległość planetoidy od Słońca jest równa około $1,5 \cdot 10^8$ km.

- a) Oblicz odległość planetoidy od planety Wenus.
 b) Oblicz promień orbity Wenus.

Wyniki podaj z dokładnością do $0,1 \cdot 10^8$ km.



5.9. Wykaż, że jeśli α , β , γ są kątami pewnego trójkąta i spełniony jest warunek
D $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$, to ten trójkąt jest prostokątny.

5.10. Wykaż, że w trójkącie o bokach długości a , b , c oraz leżących odpowiednio naprzeciw
D nich kątach o miarach α , β , γ spełniona jest równość $a + b + c = 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$.

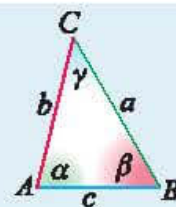
^{*)} Planetoida – niewielkie ciało niebieskie obiegające Słońce po orbicie leżącej między orbitami Marsa i Jowisza.

Twierdzenie cosinusów (Carnota*)

Twierdzenia sinusów nie można zastosować do rozwiązywania trójkąta, gdy dane są długości dwóch boków i miara kąta zawartego między nimi albo znane są długości trzech jego boków. Problem ten można rozwiązać, stosując twierdzenie zwane **twierdzeniem cosinusów**.

Twierdzenie cosinusów

W każdym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszony o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Z (założenie): a, b, c – długości boków trójkąta ABC .

T (teza): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha,$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta,$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma.$

Dowód: Wykażemy, że $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$. Rozważmy trzy przypadki:

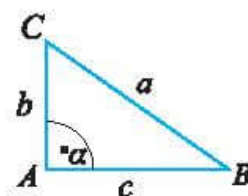
- 1** $\alpha = 90^\circ$, **2** $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, **3** $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

1 $\alpha = 90^\circ$.

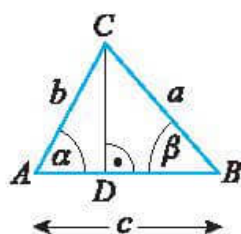
Trójkąt ABC jest prostokątny, więc $a^2 = b^2 + c^2$.

Równość $a^2 = b^2 + c^2$ równoważna jest równości

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90^\circ, \text{ ponieważ } \cos 90^\circ = 0.$$



2 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ i niech $0^\circ < \beta < 90^\circ$. **3** $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.



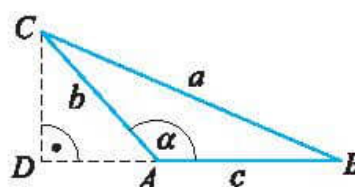
Wysokość CD dzieli bok AB na dwa odcinki AD i DB .

W trójkącie ADC wyznaczamy

$$|AD| = b \cos \alpha \text{ i } |DC| = b \sin \alpha.$$

$$|AD| + |DB| = c, \text{ więc}$$

$$|DB| = c - b \cos \alpha.$$



Zauważamy, że spodek D wysokości CD leży na przedłużeniu boku AB i $|\sphericalangle CAD| = 180^\circ - \alpha$.

W trójkącie CDA wyznaczamy:

$$|CD| = b \sin(180^\circ - \alpha), \text{ czyli } |CD| = b \sin \alpha,$$

$$|DA| = b \cos(180^\circ - \alpha), \text{ czyli } |DA| = -b \cos \alpha.$$

$$|DA| + |AB| = |DB|, \text{ więc}$$

$$|DB| = c - b \cos \alpha.$$

*) Lazare Nicolas Marguerite Carnot zwany Wielkim Carnotem (1753-1823) – francuski polityk, matematyk i generał pochodzący z rodziny matematyków, fizyków i polityków Carnot.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBC :

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |DC|^2 + |DB|^2, \text{ czyli } a^2 = (b \sin \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 \\ a^2 &= b^2 \cdot \sin^2 \alpha + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha \\ a^2 &= b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad \text{c.n.u.}$$

Podobnie można uzasadnić równości $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$ i $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$.

Przykład 6. Rozwiąż trójkąt ABC , w którym $a = \sqrt{3}$, $c = 3$, $\beta = 150^\circ$.

Rozwiązanie

Dane: $a = \sqrt{3}$, $c = 3$, $\beta = 150^\circ$. | **Obliczyć:** b , α , γ .

Z twierdzenia cosinusów:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ b^2 &= (\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ, \end{aligned}$$

czyli $b^2 = 21$, skąd $b = \sqrt{21}$.

Liczba $-\sqrt{21}$ nie może być długością boku.

Z twierdzenia sinusów:

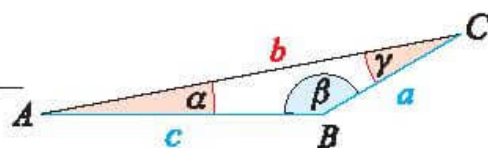
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ skąd } \sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3} \sin 150^\circ}{\sqrt{21}}, \quad \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\sqrt{7}}{14}, \text{ więc } \sin \alpha \approx 0,1890, \text{ skąd} \\ \alpha &\approx 11^\circ \text{ lub } \alpha \approx 169^\circ. \end{aligned}$$

Kąt 169° nie spełnia warunków,
bo $169^\circ + 150^\circ > 180^\circ$.

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, więc $\gamma \approx 19^\circ$.

Odp.: $b = \sqrt{21}$, $\alpha \approx 11^\circ$, $\gamma \approx 19^\circ$.



Ćwiczenie 11. Rozwiąż trójkąt ABC , w którym:

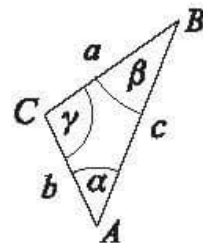
a) $a = 8$, $b = 10$, $\gamma = 60^\circ$, b) $b = 4$, $c = 5$, $\alpha = 120^\circ$.

Wnioski z twierdzenia cosinusów

- W trójkącie ABC :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

- Jeżeli $\cos \alpha > \cos \beta > \cos \gamma$, to $\alpha < \beta < \gamma$ i $a < b < c$.



Przykład 7. Oblicz miarę największego z kątów trójkąta ABC oraz jego pole, gdy $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3 - \sqrt{3}$, $c = 3\sqrt{2}$.

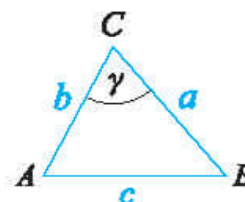
Rozwiązanie

Sprawdzamy, która z liczb $2\sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ jest największa:

$$2\sqrt{3} \approx 3,46, \quad 3 - \sqrt{3} \approx 1,27, \quad 3\sqrt{2} \approx 4,26, \quad \text{więc}$$

$$c > a > b.$$

Bok c jest najdłuższy, więc kąt γ , leżący naprzeciw boku c , ma największą miarę.



$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (3 - \sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3})} = \frac{6 - 6\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3} - 3)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\cos \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \text{więc } 90^\circ < \gamma < 180^\circ$$

$$\cos \gamma = -\cos 60^\circ$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos \gamma = \cos(180^\circ - 60^\circ)$$

$$\gamma = 120^\circ.$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3}) \cdot \sin 120^\circ = \frac{3}{2}(3 - \sqrt{3}).$$

$$\text{Odp.: } \gamma = 120^\circ, \quad P = \frac{3}{2}(3 - \sqrt{3}).$$

Ćwiczenie 12. Oblicz miary kątów trójkąta ABC , którego boki a , b , c mają długości: $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 4$.

Ćwiczenie 13. Sprawdź, czy trójkąt o bokach a , b , c , których długości są odpowiednio równe 6, 7, 8, jest ostrokątny. Odpowiedź uzasadnij.

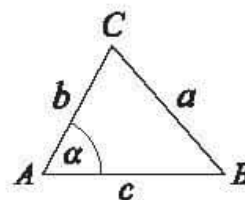
Ćwiczenie 14. Wykaż, że trójkąt, którego boki mają długości 8, 10, 16, jest trójkątem rozwartokątnym.

Ćwiczenie 15. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i określ, jakim kątem (ostрым, prostym czy rozwartym) jest kąt α , gdy:

a) $a^2 < b^2 + c^2$,

b) $a^2 = b^2 + c^2$,

c) $a^2 > b^2 + c^2$.



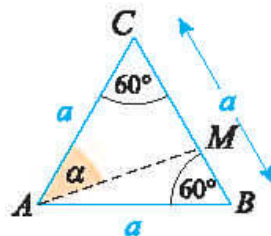
Przykład 8. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC obrano punkt M , taki że $|BM| : |MC| = 1 : 2$. Oblicz sinus kąta CAM .

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: a – długość boku trójkąta równobocznego ABC ,
 $|BM| = \frac{1}{2}|MC|$.

Obliczyć: $\sin \angle CAM = \sin \alpha$.



Z warunków zadania:

$$|BC| = 3|BM|, \text{ skąd } |MC| = \frac{2}{3}|BC| = \frac{2}{3}a \text{ i } |BM| = \frac{1}{3}a.$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta AMC :

$$\frac{|AM|}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{2}{3}a}{\sin \alpha}, \text{ skąd } \sin \alpha = \frac{\frac{2}{3}a \sin 60^\circ}{|AM|}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AMC :

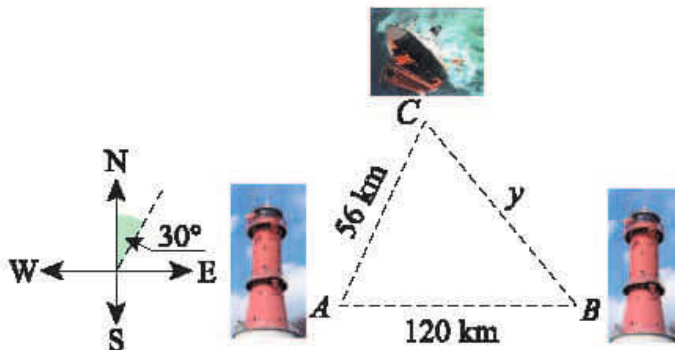
$$|AM|^2 = |AC|^2 + |MC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |MC| \cos 60^\circ, \text{ czyli}$$

$$|AM|^2 = a^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 2a \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9}a^2 \text{ i } a > 0, \text{ więc } |AM| = \frac{\sqrt{7}}{3}a.$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{2}{3}a \cdot \sin 60^\circ}{\frac{\sqrt{7}}{3}a}, \text{ więc } \sin \alpha = \frac{\frac{2}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{3}a}, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Odp.: } \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ćwiczenie 16. Statek płynący po morzu wysłał sygnał SOS, który odebrali dwaj latarnicy w miejscowościach A i B leżących na tej samej szerokości geograficznej i oddalonych od siebie o 120 km. Latarnik w miejscowości A stwierdził, że statek jest od niego oddalony o 56 km i znajduje się w kierunku 30° na północny wschód. Przyjmując, że morze jest spokojne, oblicz, w jakiej odległości był ten statek od latarni morskiej w miejscowości B .



Przykład 9. Wykaż, że jeżeli w trójkącie o bokach mających długości a, b, c i kątach mających odpowiednio miary α, β, γ spełniona jest równość $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$, to ten trójkąt jest równoramienny.

Rozwiązanie

Z (**założenie**): $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$,
 $a > 0, b > 0, c > 0$.

T (**teza**): Trójkąt jest równoramienny.

Dowód: $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ i $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 2 \cos \gamma$, więc

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \text{ więc } \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

$$\frac{a}{b} = 2 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad / \cdot ab$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$a^2 = a^2 + b^2 - c^2, \text{ czyli } c^2 = b^2, \text{ skąd } c = b.$$

cnw.

Ćwiczenie 17. Wykaż, że w trójkącie o bokach a, b, c leżących odpowiednio naprzeciw kątów α, β, γ spełniona jest równość $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$.

Uwaga

Aby rozwiązać dowolny trójkąt, stosujemy:

- **twierdzenie sinusów**, gdy dane są:
 - miary dwóch kątów trójkąta i długość jednego boku,
 - długości dwóch boków trójkąta i miara kąta, który nie jest zawarty między tymi bokami,
- **twierdzenie cosinusów**, gdy dane są:
 - długości dwóch boków trójkąta i miara kąta zawartego między tymi bokami,
 - długości trzech boków trójkąta.

Ćwiczenie 18. Długości boków trójkąta ABC są równe 5, 7 i 8. Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $c = 2\sqrt{21}$, $\alpha \approx 11^\circ$, $\beta \approx 109^\circ$, b) $a = \sqrt{61}$, $\beta \approx 26^\circ$, $\gamma \approx 34^\circ$. 12. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.

13. Tak. 14. Wykaż, że $\cos \gamma < 0$, gdzie γ jest kątem leżącym naprzeciw najdłuższego boku.

15. a) ostrym, b) prostym, c) rozwartym. 16. 104 km.

17. Wskazówka. Zapisz $\cos \gamma$ i $\cos \beta$ w zależności od a, b, c . 18. $R = \frac{7}{3}\sqrt{3}$.

Zadania utrwalające

5.11. W trójkącie ABC znane są długości dwóch jego boków i jeden kąt. Oblicz długość trzeciego boku, gdy:

a) $b = 3$ dm, $c = 7$ dm, $\alpha = 60^\circ$,

b) $b = 4$ cm, $c = (2 + 2\sqrt{3})$ cm, $\alpha = 30^\circ$,

c) $a = 5\sqrt{2}$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 45^\circ$,

d) $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 120^\circ$.

5.12. Oblicz miary kątów α, β, γ trójkąta ABC o bokach a, b, c , gdy:

a) $a = 2$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$,

b) $a = 29$, $b = 42$, $c = 58$,

c) $a = 3,8$, $b = 6,6$, $c = 6,9$,

d) $a = 7$, $b = 10$, $c = 15$.

5.13. Punkty $A = (-2, 2)$, $B = (14, 4)$, $C = (2, -1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz miary kątów α, β, γ tego trójkąta.

5.14. Oblicz miarę największego z kątów trójkąta ABC oraz pole P tego trójkąta, gdy:

a) $a = 4$, $b = 8$, $c = 4\sqrt{7}$,

b) $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$, $c = 2 + 2\sqrt{3}$.

5.15. Sprawdź, czy trójkąt o bokach a, b, c jest ostrokątny, rozwartokątny czy prostokątny, gdy:

a) $a = 10$, $b = 24$, $c = 26$,

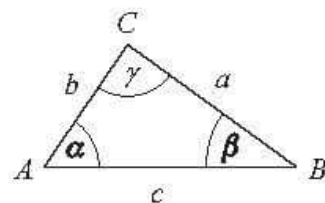
b) $a = 8$, $b = 10$, $c = 16$,

c) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$,

d) $a = \sqrt{29}$, $b = 2\sqrt{17}$, $c = 5$.

5.16. Przerysuj tabelę do zeszytu, przyjmij oznaczenia boków oraz kątów w trójkącie ABC jak na rysunku i uzupełnij tabelę.

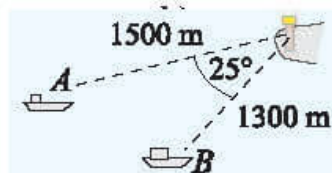
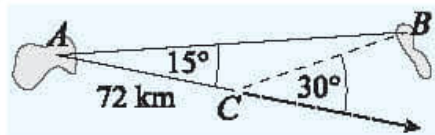
a	b	c	α	β	γ
$\sqrt{3}$	3		30°		
	2	$2\sqrt{2}$		30°	
4			30°		120°
10	8	7			



5.17. Oblicz długość boku BC trójkąta ABC , gdy $|AB| = 6$, $|AC| = 4\sqrt{2}$, $|\sphericalangle ACB| = 135^\circ$.

5.18. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz odległość między obiektami A i B . Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,001 km.

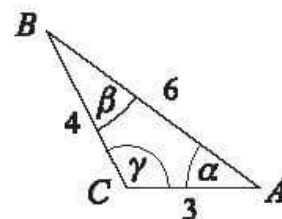
a)



5.19. Boki trójkąta ABC mają długości 3, 4 i 6. Wykaż, że:

D

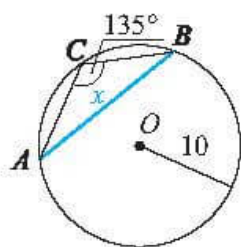
a) $\cos \alpha = \frac{29}{36}$, b) $\cos \beta = \frac{43}{48}$, c) $\cos \gamma = -\frac{11}{24}$.



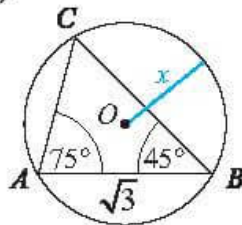
Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów

Ćwiczenie 19. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka x .

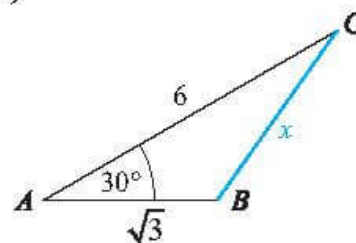
a)



b)



c)



Przykład 10. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i oblicz promień R okręgu.

Rozwiązanie

Zauważamy, że:

- trójkąt EBD jest wpisany w okrąg o promieniu R ,
- trójkąt DBC jest równoboczny, więc $\angle EDB = 120^\circ$.

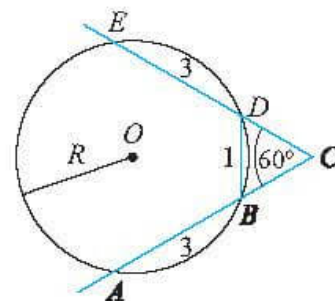
W trójkącie EBD z twierdzenia cosinusów:

$$|EB|^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ, \text{ skąd } |EB| = \sqrt{13}.$$

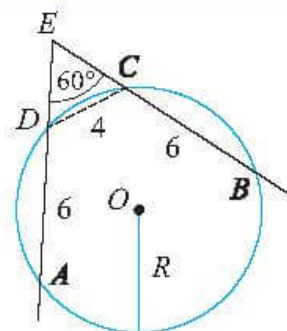
W trójkącie EBD z twierdzenia sinusów:

$$\frac{\sqrt{13}}{\sin 120^\circ} = 2R, \text{ skąd } R = \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

Odp.: $R = \frac{\sqrt{39}}{3}$.



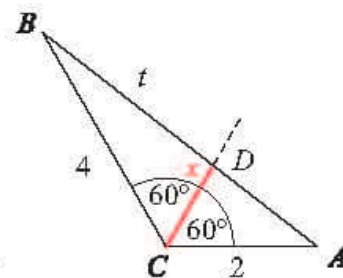
Ćwiczenie 20. Na rysunku $|AD| = |BC| = 6$, $|DC| = 4$ i $\angle AEB = 60^\circ$. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i oblicz promień R okręgu.



Przykład 11. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka $x = |CD|$ zawartego w dwusiecznej kąta ACB .

Rozwiązanie

Dane: $|BC| = 4$, $|AC| = 2$, $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$. **Obliczyć:** $|CD| = x$.



1° Z twierdzenia cosinusów obliczamy długość odcinka AB :

$$|AB|^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ, \text{ skąd } |AB| = 2\sqrt{7}.$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

2° Z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie ABC obliczamy długość odcinka $|BD| = t$.

$$\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AC|}, \text{ więc } \frac{t}{4} = \frac{2\sqrt{7} - t}{2}$$

$$t = 4\sqrt{7} - 2t$$

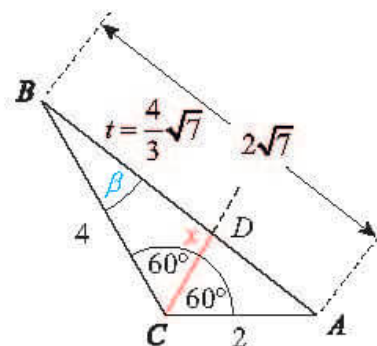
$$t = \frac{4}{3}\sqrt{7}.$$

3° W trójkącie ABC obliczamy $\cos \beta$ i $\sin \beta$.

$$\cos \beta = \frac{4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2^2}{2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{7}}$$

$$\cos \beta = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$



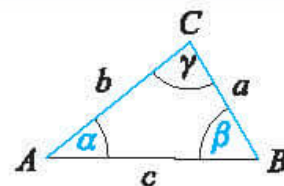
4° W trójkącie BCD obliczamy długość odcinka x .

$$\frac{|CD|}{\sin \beta} = \frac{|BD|}{\sin 60^\circ}, \text{ czyli } \frac{x}{\sin \beta} = \frac{t}{\sin 60^\circ}, \text{ więc } x = \frac{\sin \beta \cdot t}{\sin 60^\circ}, \text{ skąd}$$

$$x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Ćwiczenie 21. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz długość odcinka zawartego w dwusiecznej kąta prostego.

Przykład 12. Uzasadnij, że w dowolnym trójkącie ABC prawdziwa jest równość $\frac{a+b}{b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \beta}$.



Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia: $\underbrace{\frac{a+b}{b}}_L = \underbrace{\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \beta}}_P$

$$L = \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1$$

Z twierdzenia sinusów $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$, więc $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

$$L = \frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + 1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \underbrace{\frac{\sin \beta}{\sin \beta}}_1 = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \beta} = P. \quad \text{c.n.u.}$$

Ćwiczenie 22. Uzasadnij, że jeśli w trójkącie ABC prawdziwa jest równość $\frac{\cos \alpha}{b} = \frac{\cos \beta}{a}$, to trójkąt ten jest równoramienny.

Odpowiedzi do ćwiczeń

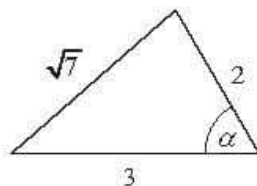
19. a) $x = 10\sqrt{2}$, b) $x = 1$, c) $x = \sqrt{21}$. 20. $\frac{2\sqrt{57}}{3}$ 21. $\frac{24\sqrt{2}}{7}$

22. Wskazówka. Skorzystaj z zależności $\frac{a}{b} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ i $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, czyli $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

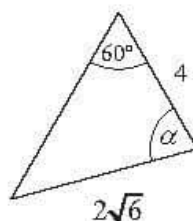
Zadania utrwalające

5.20. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miarę kąta α .

a)



b)



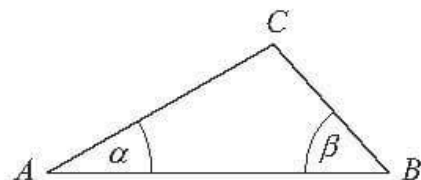
5.21. Na dwóch bokach trójkąta równobocznego ABC , którego bok ma długość 3, zbudowano dwa trójkąty równoramienne prostokątne ACD i BCE . Oblicz długość odcinka DE . Rozważ dwa przypadki.

5.22. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC wybrano taki punkt M , że $|BM| = \frac{1}{2}|MC|$. Oblicz sinus kąta CAM .

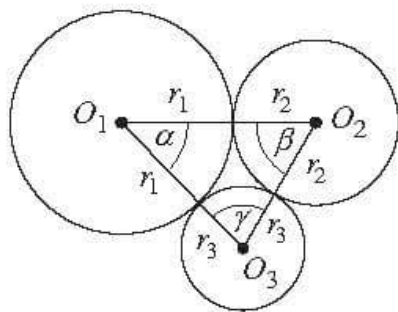
5.23. Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D , że $|CD| : |DB| = 2 : 1$.
D Uzasadnij, że stosunek długości promieni R_1 i R_2 okręgów opisanych na trójkątach ACD i ABD jest równy 1.

5.24. Przekrój poprzeczny dachu dwuspadowego tworzy z poziomem kąty $\alpha = 45^\circ$ i $\beta = 60^\circ$. Oblicz długości krokwi AC i BC , wiedząc, że rozpiętość dachu AB jest równa 15 m.

W obliczeniach przyjmij $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.



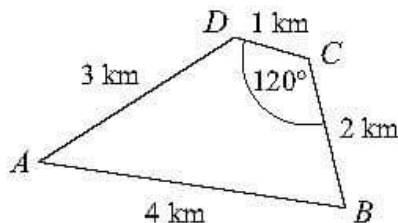
5.25. Na rysunku przedstawiono trzy okręgi styczne zewnętrznie o środkach O_1, O_2, O_3 oraz promieniach $r_1 = 16$, $r_2 = 12$ i $r_3 = 9$. Oblicz miary kątów α, β, γ trójkąta $O_1O_2O_3$. Wyniki podaj z dokładnością do 1° .



5.26. Po dokonaniu namiarów radiolatarni umieszczonych w punktach A i B określona została pozycja statku S. Na podstawie przeprowadzonych pomiarów wyznaczone zostały miary kątów: $|\sphericalangle SAB| = 82^\circ$, $|\sphericalangle SBA| = 44^\circ$. Znale są odległości: $|AB| = 74$ km, $|AP| = 38$ km, $|BP| = 52$ km, gdzie P oznacza przystań. Oblicz odległość statku od przystani. Wynik podaj z dokładnością do 1 km.



5.27. Na rysunku przedstawiono zalesiony teren pewnego nadleśnictwa. Uwzględnij dane przedstawione na tym rysunku i oblicz obszar (pole powierzchni) tego terenu. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 km.



Zestaw powtórkowy

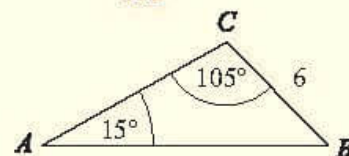
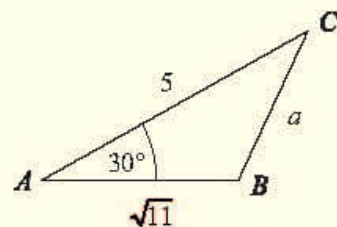
1. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

W trójkącie ABC przedstawionym na rysunku długość boku a spełnia warunek:

- A. $a > 6$, B. $a < 6$.

Rozwiązując trójkąt ABC przedstawiony na rysunku, w pierwszej kolejności stosujemy twierdzenie:

- C. sinusów, D. cosinusów.



2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do rozwiązania dowolnego trójkąta możemy zastosować twierdzenie sinusów, gdy dane są:

- A. trzy kąty trójkąta, B. dwa boki i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt,
C. trzy boki, D. dwa boki i promień okręgu opisanego na trójkącie.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do rozwiązania dowolnego trójkąta nie możemy zastosować twierdzenia cosinusów, gdy dane są:

- A. dwa boki i kąt między nimi zawarty, B. trzy kąty i dwa boki,
C. trzy boki i promień okręgu wpisanego w trójkąt, D. bok i trzy kąty.

4. Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC , gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

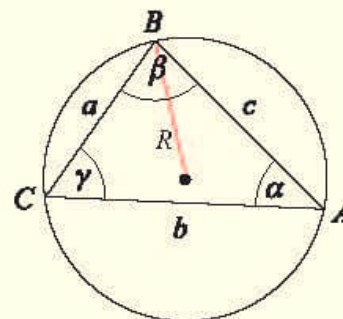
Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Prawdą jest, że:

- A. $\frac{\sin \beta}{b} = 2R$, B. $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha$.

Nieprawdą jest, że:

- C. $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$, D. jeśli $a > b$, to $\alpha < \beta$.



5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Trójkątem rozwartokątnym jest trójkąt o bokach długości:

- A. 6, 8, 10, B. 6, 6, 8, C. 12, 13, 15, D. 7, 7, 10.

6. Dwa boki trójkąta mają długość 2 i 4, a miara kąta między nimi jest równa 120° .

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.

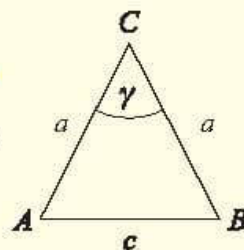
Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.	P	F
Obwód tego trójkąta jest liczbą większą od 12,2.	P	F

7. Na rysunku dwa boki trójkąta ABC mają długość a .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli długość podstawy AB jest liczbą z przedziału $(a\sqrt{2}; 2a)$, to:

- A. taki trójkąt nie istnieje, B. $\gamma = 90^\circ$,
C. $0^\circ < \gamma < 90^\circ$, D. $90^\circ < \gamma < 180^\circ$.

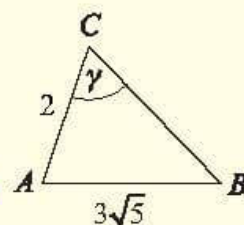
8. Na rysunku przedstawiony jest trójkąt ABC ,

w którym $|AB| = 3\sqrt{5}$, $|AC| = 2$ i $\cos(\sphericalangle ACB) = -\frac{4}{5}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy:

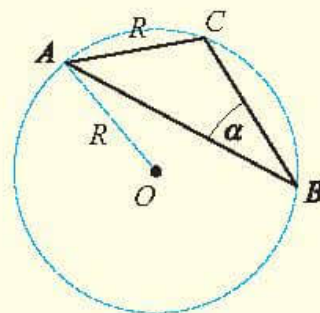
- A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$, B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$, C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$, D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9. W trójkącie ABC bok a ma długość równą promieniowi R okręgu opisanemu na tym trójkącie.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt α ma miarę równą:

- A. 30° , B. 45° ,
C. 60° , D. 90° .

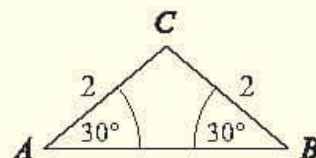


10. W trójkącie równoramiennym ABC ramię ma długość 2, a kąt przy podstawie miarę 30° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Promień R okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

- A. $\sqrt{3}$, B. $2\sqrt{3}$, C. 2, D. 3.



11. Boki trójkąta mają długości 4, 8 i 10.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

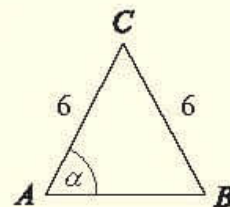
Cosinus najmniejszego kąta trójkąta jest równy:

- A. 1, B. 0,9, C. 0,8, D. 0,7.

12. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli ramię trójkąta równoramiennego ma długość 6 i kąt przy podstawie $\alpha = 30^\circ$, to cosinus największego kąta jest równy:

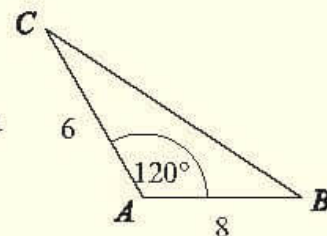
- A. $-\frac{1}{2}$, B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, D. $\frac{1}{2}$.



13. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Długość boku BC trójkąta ABC przedstawionego na rysunku jest równa:

- A. $\sqrt{52}$, B. $\sqrt{96}$, C. $\sqrt{148}$, D. $\sqrt{196}$.

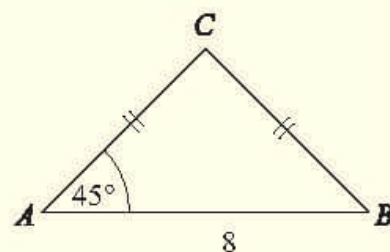


14. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 8, a kąt α przy podstawie ma miarę 45° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

- A. $2\sqrt{2}$, B. 4, C. $4\sqrt{2}$, D. 8.



15. Długości boków trójkąta są w stosunku 2:3:4.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy:

- A. $-\frac{1}{2}$, B. $-\frac{1}{4}$, C. $\frac{1}{4}$, D. $\frac{1}{2}$.

6. Obliczanie długości odcinków i pól trójkątów

Przypomnijmy oznaczenia w trójkącie ABC :

a, b, c – długości boków położonych odpowiednio naprzeciw kątów α, β, γ

h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta poprowadzone odpowiednio na boki a, b, c lub ich przedłużenia

R – promień okręgu opisanego na trójkącie

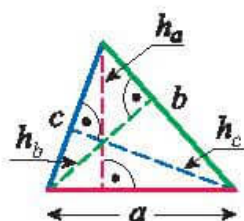
r – promień okręgu wpisanego w trójkąt

$P = P_{\triangle ABC}$ – pole trójkąta ABC

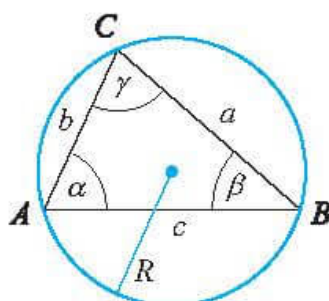
Związki miarowe w trójkącie

Przypomnijmy

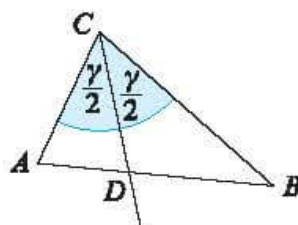
Związki miarowe w dowolnym trójkącie



$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



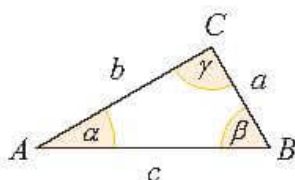
$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



$$\gamma > \beta > \alpha \Leftrightarrow c > b > a$$

$$c^2 < a^2 + b^2$$

trójkąt ostrokątny

$$c^2 = a^2 + b^2$$

trójkąt prostokątny

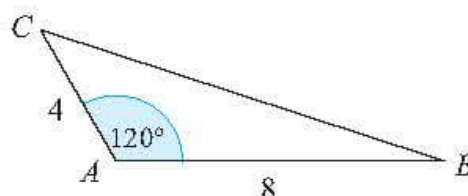
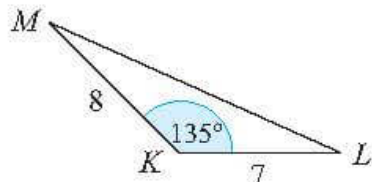
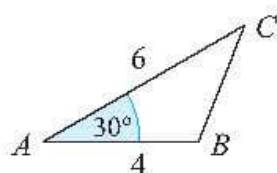
$$c^2 > a^2 + b^2$$

trójkąt rozwartokątny,

gdzie c to najdłuższy bok trójkąta

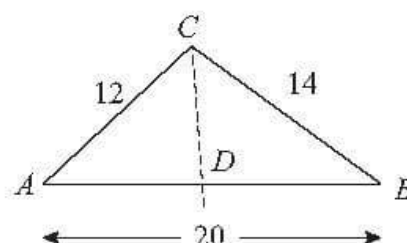
Ćwiczenie 1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz:

- a) pole trójkąta ABC , b) długość boku LM , c) promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC .

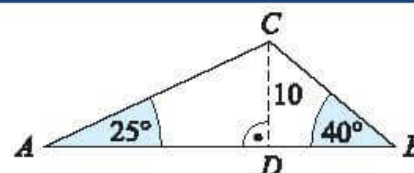


Ćwiczenie 2. Określ ze względu na boki i kąty rodzaj trójkąta ABC , gdy jego boki mają długości: a) 5, 7, 8, b) 0,1; 0,1; 0,01.

Ćwiczenie 3. W trójkącie ABC dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku C przecięła bok AB w punkcie D . Wiedząc, że $|AB| = 20$, $|BC| = 14$ i $|AC| = 12$, oblicz długość odcinka AD .



Przykład 1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz obwód trójkąta ABC . Wynik zaokrąglaj do dwóch miejsc po przecinku.



Rozwiązanie

Dane: $\sphericalangle DAC = 25^\circ$, $\sphericalangle DBC = 40^\circ$,
 $|DC| = h = 10$.

Obliczyć: $L = |AB| + |BC| + |AC|$,
gdzie $|AB| = |AD| + |BD|$.

W trójkącie prostokątnym ADC obliczamy długości odcinków AD i AC .

$$\frac{10}{|AD|} = \operatorname{tg} 25^\circ, \text{ skąd } |AD| = \frac{10}{\operatorname{tg} 25^\circ} = \frac{10}{0,4663}, \text{ więc } |AD| \approx 21,4454,$$

$$\frac{10}{|AC|} = \sin 25^\circ, \text{ skąd } |AC| = \frac{10}{\sin 25^\circ} = \frac{10}{0,4226}, \text{ więc } |AC| \approx 23,6630.$$

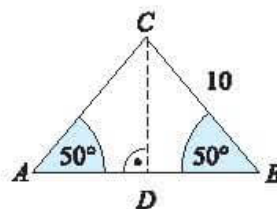
Obliczamy długości odcinków BD i BC . W trójkącie prostokątnym BDC :

$$\frac{10}{|BD|} = \operatorname{tg} 40^\circ, \text{ skąd } |BD| = \frac{10}{\operatorname{tg} 40^\circ} = \frac{10}{0,8391}, \text{ więc } |BD| \approx 11,9175,$$

$$\frac{10}{|BC|} = \sin 40^\circ, \text{ skąd } |BC| = \frac{10}{\sin 40^\circ} = \frac{10}{0,6428}, \text{ więc } |BC| \approx 15,5569.$$

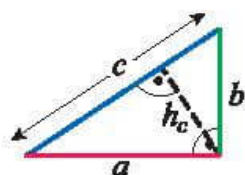
$$L = |AD| + |DB| + |BC| + |AC|, \text{ więc } L \approx 72,5829, \text{ skąd } L \approx 72,58.$$

Ćwiczenie 4. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz obwód L trójkąta ABC . Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.



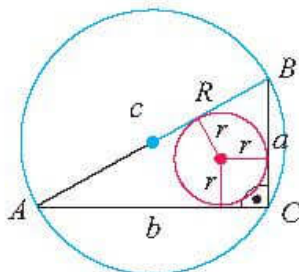
Przypomnijmy

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym



$$P = \frac{1}{2} ch_c$$

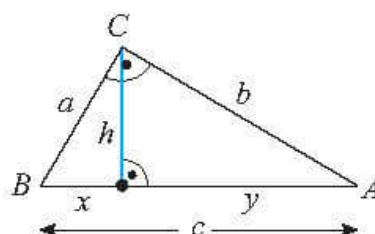
$$P = \frac{1}{2} ab$$



$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

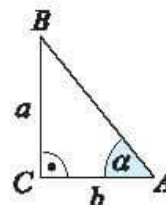
$$R = \frac{c}{2}$$

$$h^2 = xy, \quad a^2 + b^2 = c^2$$



$$a^2 = c \cdot x, \quad b^2 = c \cdot y$$

Ćwiczenie 5. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b oraz kącie ostrym α prawdziwa jest równość $a \cdot \cos \alpha = b \cdot \sin \alpha$.



Ćwiczenie 6. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 3, a jeden z kątów ostrych ma miarę 40° . Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. W obliczeniach przyjmij $\sin 40^\circ \approx 0,6$ i $\cos 40^\circ \approx 0,8$.

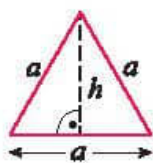
Ćwiczenie 7. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątna ma długość 16, a cosinus kąta leżącego naprzeciw tej przyprostokątnej jest równy 0,6.

Ćwiczenie 8. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną w stosunku 1 : 5. Oblicz długość przeciwprostokątnej AB , gdy $|BC| = 4\sqrt{30}$. Rozważ dwa przypadki.

Ćwiczenie 9. W trójkącie prostokątnym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość $2\sqrt{3}$. Wysokość ta podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki, których długości różnią się o 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

Przypomnijmy

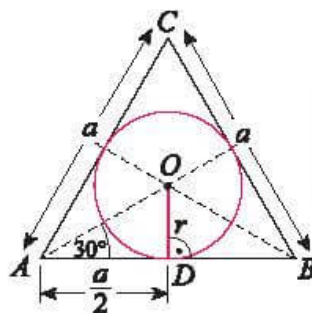
Związki miarowe w trójkącie równobocznym



$$P = \frac{1}{2}ah,$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Ćwiczenie 10. Wykaż, że promień r okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny określony jest wzorem $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, gdzie a to długość boku trójkąta.

Ćwiczenie 11. Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 12 cm.

Przykład 2. W trójkącie równoramiennym stosunek wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta do długości jego ramienia jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Uzasadnij, że jest to trójkąt równoboczny.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. Zauważamy, że wysokość h trójkąta równoramiennego poprowadzona na podstawę dzieli ten trójkąt na dwa przystające trójkąty prostokątne.

W trójkącie prostokątnym ADC :

$$\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } \frac{h}{b} = \sin \alpha, \text{ więc}$$

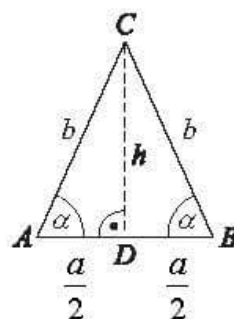
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ skąd}$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

$$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - 2\alpha, \text{ czyli } |\sphericalangle ACB| = 60^\circ.$$

Trójkąt ABC jest równoboczny.

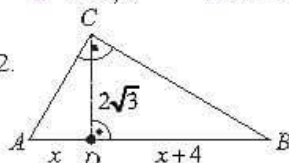
c.n.u.



Ćwiczenie 12. Pole trójkąta równobocznego jest równe $9\sqrt{3}$. Oblicz jego obwód.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $P_{\Delta} = 6$, b) $|LM| = \sqrt{113 + 56\sqrt{2}}$, c) $R = \frac{4\sqrt{21}}{3}$. 2. Trójkąt jest: a) ostrokątny i różnoboczny, b) ostrokątny i równoramienny. 3. $|AD| = \frac{120}{13}$. 4. $L \approx 32,86$. 5. $r = 0,6$. 6. $R = 10$. 7. 24 lub $24\sqrt{5}$. 8. $L = 4(3 + \sqrt{3})$. Wskazówka. $x \cdot (x + 4) = (2\sqrt{3})^2$, skąd $x = 2$. 9. $r = 2\sqrt{3}$ cm, $P = 12\pi$ cm². 10. $L = 18$.



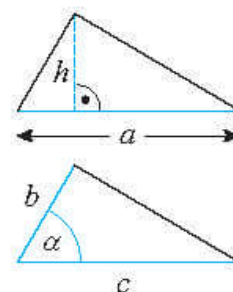
Zadania utrwalające

- 6.1. W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 2, a kąt przy podstawie miarę 30° . Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.
- 6.2. Boki trójkąta mają długości 12, 16, 21. Uzasadnij, że jest to trójkąt rozwartokątny.
- 6.3. Boki trójkąta mają długości 4, 5, 7. Oblicz najdłuższą wysokość tego trójkąta.
- 6.4. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokość CD o długości 5 tworzy z bokiem AC kąt 20° , a z bokiem BC 40° . Oblicz pole trójkąta ABC . Wynik podaj z dokładnością do 0,01.
- 6.5. Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 4 i kącie ostrym 30° rozcięto na dwa trójkąty równoramienne. Oblicz obwody otrzymanych trójkątów.
- 6.6. W okrąg o promieniu 5 wpisano taki trójkąt prostokątny, którego cosinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- 6.7. Uzasadnij, że jeżeli na trójkącie prostokątnym ABC o przyprostokątnych a i b opisano okrąg o promieniu R i wpisano w niego okrąg o promieniu r , to $2r + 2R = a + b$.
- 6.8. W trójkącie równoramiennym stosunek długości ramienia do długości podstawy jest równy $1:\sqrt{2}$. Oblicz kąty tego trójkąta.
- 6.9. Uzasadnij, że jeżeli α , β i γ są kątami trójkąta ABC i $\frac{\sin \alpha}{2 \sin \beta} = \cos \gamma$, to trójkąt ABC jest równoramienny.
- 6.10. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 10. Sinusy dwóch kątów tego trójkąta są równe 0,25 i 0,4. Oblicz pole trójkąta ABC .
- 6.11. Uzasadnij, że trójkąt o bokach długości 4, 5, 7 jest podobny do trójkąta, którego cosinusy kątów są równe $-\frac{1}{5}$, $\frac{5}{7}$ i $\frac{29}{35}$.

Wzory na pola trójkątów i ich zastosowanie

Poznaliśmy już wzory na obliczanie pól trójkątów, gdy dane były długości:

- boku i wysokości poprowadzonej na ten bok lub jego przedłużenie,
- dwóch boków i miara kąta zawartego między nimi.



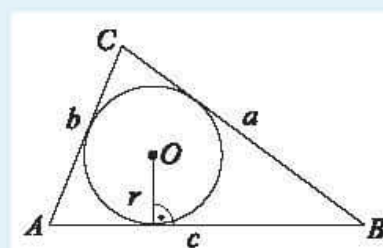
Obecnie poznamy wzory pozwalające obliczyć pole trójkąta przy innych danych.

Twierdzenie

Jeżeli a , b i c są długościami boków trójkąta opisanego na okręgu o promieniu r , to jego pole P

określone jest wzorem $P = \frac{a+b+c}{2}r = pr$,

gdzie p to połowa obwodu trójkąta.



Z (założenie): a , b , c – długości boków trójkąta ABC ,
 r – promień okręgu wpisanego w dany trójkąt.

T (teza): $P_{\Delta} = pr$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$.

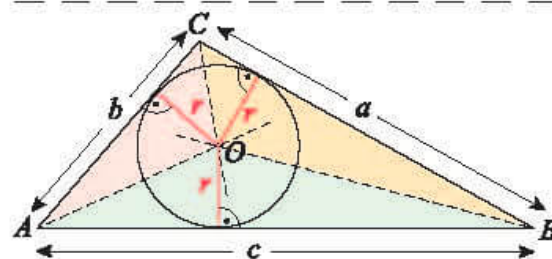
Dowód: Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. Odcinki AO , BO , CO , gdzie O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , dzielą ten trójkąt na trzy trójkąty.

Wysokość każdego z tych trójkątów, poprowadzona z punktu O , jest równa promieniowi r okręgu wpisanego, zatem

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CAO} + P_{\Delta ABO},$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{a}{2}r + \frac{b}{2}r + \frac{c}{2}r = \frac{a+b+c}{2}r.$$

c.n.u.



Ćwiczenie 13. Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt, którego pole jest równe $10\sqrt{3}$ i boki mają długości 5, 7, 8.

Ćwiczenie 14. Pole trójkąta równoramiennego jest równe 12, a jego ramiona mają długość 5. Oblicz długość podstawy tego trójkąta, gdy promień okręgu wpisanego jest równy 1,5.

Twierdzenie – Wzór Herona*)

Pole P trójkąta, którego boki mają długości a, b, c określone jest wzorem

$$P_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie p jest połową jego obwodu, czyli $p = \frac{a+b+c}{2}$.

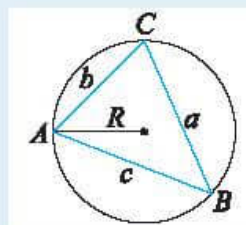
Ćwiczenie 15. Oblicz pole trójkąta: a) o bokach długości 7, 8, 13,
b) o wierzchołkach A, B, C , gdy $A = (1, 3)$, $B = (5, 0)$, $C = (-3, 0)$.

Twierdzenie

Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R , to jego pole P_{Δ} określone jest

wzorem $P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$, gdzie R jest promieniem okręgu

opisanego na tym trójkącie.



Z (założenie):

a, b, c – długości boków trójkąta ABC ,

R – promień okręgu opisanego na trójkącie ABC ,

γ – kąt zawarty między bokami a i b

T (teza):

$$P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$$

Dowód:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

Z twierdzenia sinusów $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, więc $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$.

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R}, \text{ więc } P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}.$$

c.n.u.

Przykład 3. Boki trójkąta mają długości 4, 5 i 7. Oblicz pole P tego trójkąta oraz promień R okręgu opisanego na nim.

Rozwiązanie

Obliczamy pole P_{Δ} trójkąta z wzoru Herona.

$$P_{\Delta} = \sqrt{8 \cdot (8-4)(8-5)(8-7)} = 4\sqrt{6}.$$

$$P_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ gdy}$$

$$p = \frac{4+5+7}{2} = 8$$

Aby obliczyć promień R skorzystamy z wzoru

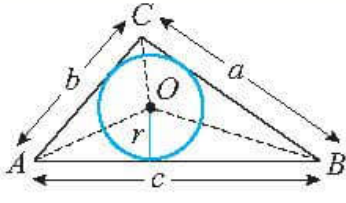
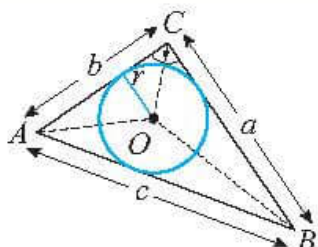
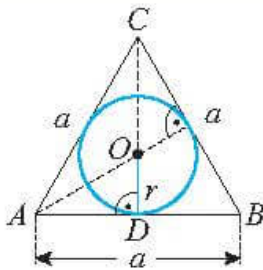
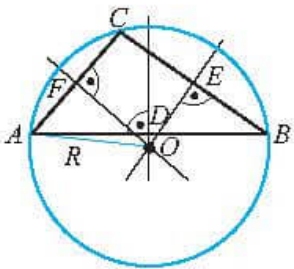
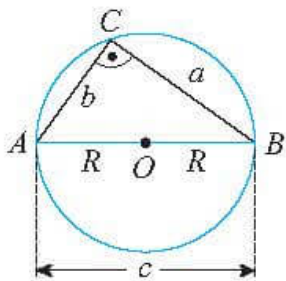
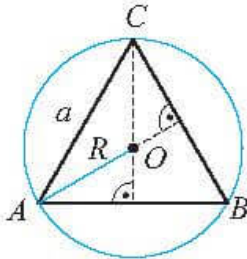
$$R = \frac{abc}{4P_{\Delta}}, \text{ więc } R = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 4\sqrt{6}} = \frac{35}{24}\sqrt{6}.$$

$$P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$$

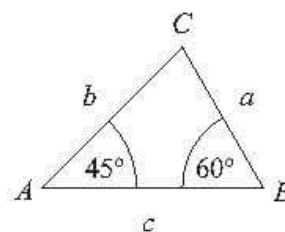
*) Heron z Aleksandrii (ok. 10 - ok. 70) – starożytny grecki matematyk, fizyk, mechanik, wynalazca i konstruktor.

Ćwiczenie 16. Boki trójkąta mają długość 5, 6, 9. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

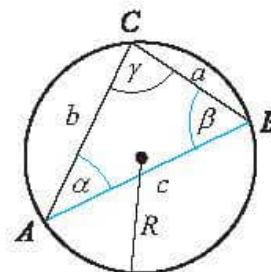
Ćwiczenie 17. Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt i promień R okręgu opisanego na trójkącie o bokach długości 6, 10, 12.

	Trójkąt różnoboczny	Trójkąt prostokątny	Trójkąt równoboczny
Okrąg wpisany w trójkąt	 $r = \frac{P_{\Delta}}{p},$ gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$	 $r = \frac{a+b-c}{2}$	 $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
Okrąg opisany na trójkącie	 $ BC = a, AC = b, \\ AB = c, R = \frac{abc}{4P_{\Delta}}$	 $R = \frac{1}{2}c$	 $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 18. Oblicz pole trójkąta, w którym jeden z boków ma długość 2 oraz dwa jego kąty mają miary 45° i 60° . Rozpatrz wszystkie możliwe przypadki.



Ćwiczenie 19. Uzasadnij, że pole P trójkąta, gdy dany jest promień R okręgu opisanego na nim i dwa jego kąty, określone jest wzorem $P = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$.



Ćwiczenie 20. Skorzystaj z wzoru $P = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$ i oblicz pole trójkąta ABC , gdy $R = 1$ oraz: a) $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$, b) $\beta = 2\alpha$ i $\gamma = 3\alpha$.

Przykład 4. Oblicz pole trójkąta ABC , gdy $A = (-2, -1)$, $B = (6, 0)$ i $C = (2, 4)$.

Rozwiązanie

I sposób

Piszemy równanie prostej zawierającej bok BC .

$$y - 0 = \frac{4 - 0}{2 - 6}(x - 6), \text{ skąd } y = -x + 6,$$

czyli $x + y - 6 = 0$.

$P = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BC|$, więc obliczamy długość

boku BC oraz długość wysokości AD trójkąta ABC .

$$B = (6, 0) \text{ i } C = (2, 4), \text{ więc } |BC| = \sqrt{(2 - 6)^2 + (4 - 0)^2} = 4\sqrt{2}.$$

Obliczamy wysokość AD trójkąta ABC .

Piszemy równanie prostej AD zawierającej wysokość trójkąta ABC , czyli prostej prostopadłej do prostej BC .

$$y - y_A = a_{AD}(x - x_A),$$

$$y + 1 = x + 2, \text{ skąd } y = x + 1.$$

Obliczamy współrzędne punktu D .

$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases}, \text{ skąd } D = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

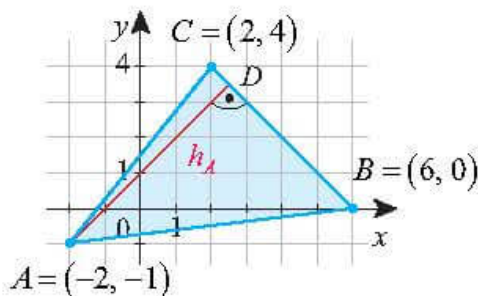
$$|AD| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + 2\right)^2 + \left(\frac{7}{2} + 1\right)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 18.$$

II sposób

Korzystamy z wzoru $P = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot |(6 + 2)(4 + 1) - (2 + 2)(0 + 1)| = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18.$$



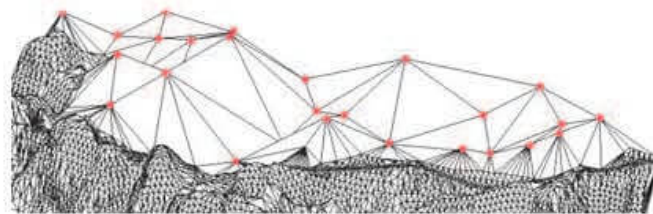
Obliczamy odległość wierzchołka A od prostej BC , czyli wysokość AD .

$$BC: x + y - 6 = 0 \text{ i } A = (-2, -1),$$

$$\text{więc } |AD| = \frac{|-2 - 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Ćwiczenie 21. Oblicz pole trójkąta ABC , gdy $A = (5, 5)$, $B = (-2, 4)$ i $C = (-1, -3)$.

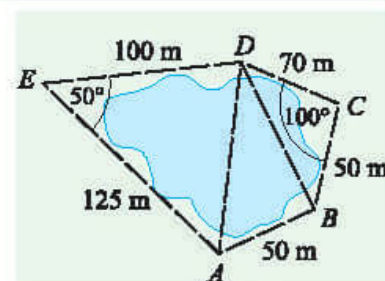
Triangulacja to metoda wyznaczania współrzędnych punktów geodezyjnych w terenie za pomocą układu trójkątów tworzących tzw. sieć triangulacyjną, w której wierzchołkami trójkątów są te punkty geodezyjne.



Fragment łańcucha górskiego; niektóre punkty geodezyjne zaznaczono kolorem czerwonym.

Jest ona jednym z narzędzi geodezji, czyli nauki zajmującej się wyznaczaniem powierzchni i kształtów obszarów w pomiarach lokalnych, np. do obliczenia przybliżonej powierzchni jeziora, działki budowlanej itp.

Przykład 5. Na rysunku przedstawiono wyniki pomiarów geodezyjnych wykonane nad brzegami stawu. Oszacuj pole powierzchni tego stawu. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 ara.



Rozwiązanie

Pole P stawu można określić wzorem $P = P_{\triangle ADE} + P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD}$.

Bez wykonywania dodatkowych pomiarów można obliczyć pola trójkątów ADE i BCD .

$$P_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 125 \cdot \sin 50^\circ, \text{ skąd } P_{\triangle ADE} \approx 4787,5 \text{ m}^2,$$

$$P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 70 \cdot \sin 100^\circ, \text{ skąd } P_{\triangle BCD} \approx 1723,4 \text{ m}^2.$$

Z twierdzenia cosinusów obliczamy długości boków AD i BD , a następnie obliczamy pole trójkąta ABD , korzystając np. z wzoru Herona.

$$|AD|^2 = 100^2 + 125^2 - 2 \cdot 100 \cdot 125 \cdot \cos 50^\circ, \text{ skąd } |AD| \approx 98 \text{ m},$$

$$|BD|^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 100^\circ, \text{ skąd } |BD| \approx 93 \text{ m},$$

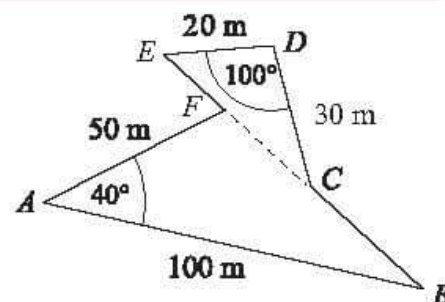
$$P_{\triangle ABD} \approx \sqrt{120(120-50)(120-93)(120-98)}, \text{ skąd } P_{\triangle ABD} \approx 2234 \text{ m}^2.$$

Zatem $P \approx 4787,5 + 1723,4 + 2234$, czyli $P \approx 8745 \text{ m}^2$.

1 ar = 100 m^2 , więc $P \approx 87$ arów.

Odp.: Pole powierzchni stawu jest równe około 87 arów.

Ćwiczenie 22. Na rysunku przedstawiony jest plan działki z naniesionymi na nim pomiarami geodezyjnymi. Oszacuj pole powierzchni tej działki.

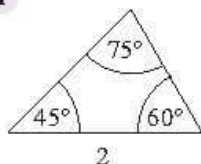


Odpowiedzi do ćwiczeń

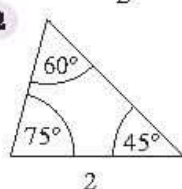
13. $r = \sqrt{3}$. 14. 6. 15. a) $P = 14\sqrt{3}$, b) $P = 12$. 16. $R = \frac{27\sqrt{2}}{8}$. 17. $r = \frac{4\sqrt{14}}{7}$, $R = \frac{45\sqrt{14}}{28}$.

18. $P = 3 - \sqrt{3}$ lub $P = \frac{\sqrt{3}+3}{3}$, lub $P = \frac{\sqrt{3}+3}{2}$. Wskazówka. Możliwe są 3 przypadki:

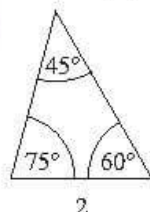
1



2



3



$$P = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\sin 75^\circ \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}, \quad P = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\sin 75^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}.$$

19. Wskazówka. Skorzystaj z wzoru $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ oraz z twierdzenia sinusów.

20. a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Wskazówka. Zauważ, że: a) jeżeli $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$, to $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$,

b) $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$. 21. 25. 22. Około 19 arów.

Zadania utrwalające

6.12. Boki trójkąta mają długości 25, 39, 56. Oblicz:

- a) pole trójkąta, b) najkrótszą wysokość,
c) promień r okręgu wpisanego w trójkąt.

6.13. Dwa boki trójkąta mają długości 17 i 25, jego pole jest równe 210, a jego promień r okręgu wpisanego jest równy 6. Oblicz:

- a) długość trzeciego boku, b) promień R okręgu opisanego,
c) cosinus największego kąta.

6.14. W trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$ i $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$ wpisano okrąg o promieniu 3. Oblicz:

- a) długości boków tego trójkąta, b) promień R okręgu opisanego na trójkącie,
c) pole trójkąta.

6.15. Długości boków trójkąta równoramiennego ABC są liczbami naturalnymi i $|BC| = 7$ oraz $|AB| + |AC| = 13$. Oblicz promień okręgu:

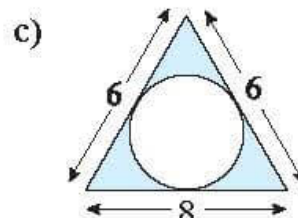
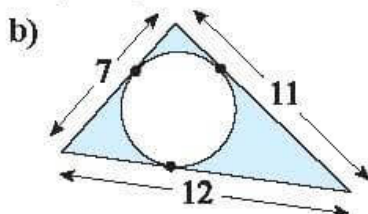
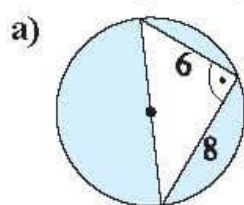
- a) wpisanego w trójkąt ABC , b) opisanego na trójkącie ABC .

6.16. W trójkącie prostokątnym środek okręgu wpisanego dzieli odcinek dwusiecznej w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, licząc od wierzchołka kąta prostego. Oblicz kąty ostre tego trójkąta.

6.17. Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt i promień R okręgu opisanego na trójkącie, wiedząc, że boki tego trójkąta mają długości:

- a) 6, 10, 14, b) 7, 8, 9, c) 12, 12, 22, d) 12, 16, 20.

6.18. Oblicz pole figury wyróżnionej na rysunku kolorem niebieskim.



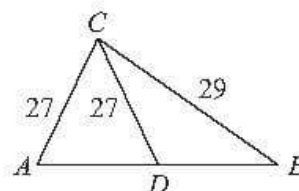
6.19. W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt równoramienny ABC , taki że $|\angle ACB| = 120^\circ$ i $|AC| = |BC| = 5$. Oblicz promień R tego okręgu.

6.20. Oblicz pole P figury ograniczonej okręgiem opisanym na trójkącie ABC i okręgiem wpisanym w trójkąt ABC , gdy:

- a) $|AB| = 14$, $|BC| = 12$, $|AC| = 10$, b) $A = (-5, 5)$, $B = (5, -5)$, $C = (5, 5)$,
c) trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym, którego podstawa AB ma długość 12, a wysokość h_c (poprowadzona z wierzchołka C) ma długość 8.

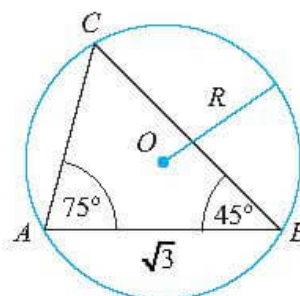
6.21. Na rysunku odcinek CD jest środkową trójkąta ABC .

Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole P trójkąta.



6.22. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz:

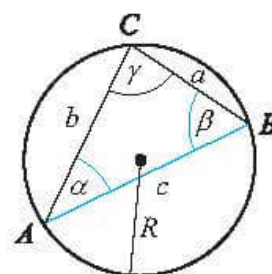
- a) promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC ,
b) pole tego trójkąta.



6.23. W trójkącie ABC boki a , b oraz kąty α i β

D spełniają warunek $\frac{\cos \alpha}{b} = \frac{\cos \beta}{a}$.

Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.



6.24. Kąty trójkąta mają miary 30° , 70° i 80° . Czy boki tego trójkąta mogą mieć długości

D 5, 9, 13? Odpowiedź uzasadnij.

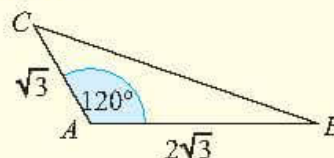


Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Pole trójkąta ABC przedstawionego na rysunku jest równe:

- A. 3, B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, C. $\frac{3}{2}$, D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



2. Boki trójkąta mają długości 6, $6\sqrt{3}$ i 12.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli α jest miarą największego kąta trójkąta, to:

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, D. $\sin \alpha = 1$.

3. Boki trójkąta mają długości 3, 5 i $\sqrt{19}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.

Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta ma miarę 60° .	P	F
Pole tego trójkąta wynosi $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.	P	F

4. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Obwód trójkąta jest równy 500 cm, a jego pole 500 cm^2 . Promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

- A. 20 cm, B. 2 cm.

Rozwartokątnym nie jest trójkąt, którego boki mają długości:

- C. 4, 5, 7, D. 4, 5, 6.

5. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jeżeli liczby 5, 5, 6 są długościami boków trójkąta, to:

- A. jego pole jest równe 15, B. promień okręgu wpisanego
w ten trójkąt jest równy $\frac{3}{2}$.

W trójkącie ABC boki mają długości $a=14$, $b=15$, $c=13$. Pole trójkąta jest równe:

- C. 84, D. 92.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

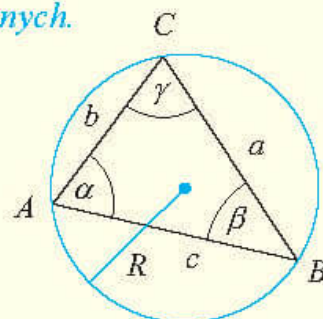
W trójkącie ABC przedstawionym na rysunku pole P nie jest określone wzorem:

A. $P = \frac{abc}{4R}$,

B. $P = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$,

C. $P = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$,

D. $P = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot R$.



7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 1, a jego kąty α , β i γ spełniają warunek $\alpha = \beta = \frac{\gamma}{2}$. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 8,

B. 4,

C. 2,

D. 1.

8. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Pole koła opisanego na trójkącie równobocznym jest większe od pola koła wpisanego w ten trójkąt:

A. 6 razy,

B. 4 razy,

C. 3 razy,

D. 2 razy.

9. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

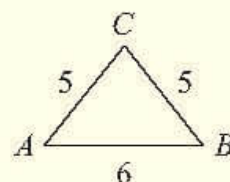
Promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC przedstawiony na rysunku jest równy:

A. 0,75,

B. 1,5,

C. 2,25,

D. 3.



10. W okrąg o promieniu 13 wpisano rozwartokątny trójkąt równoramienny ABC , którego podstawa AB ma długość 24.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

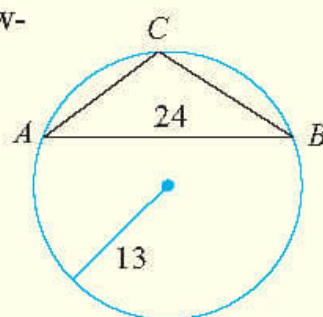
Pole tego trójkąta jest równe:

A. 60,

B. 96,

C. 120,

D. 144.



11. W trójkącie rozwartokątnym ABC kąt CAB ma miarę 150° oraz $|AC| = 6$ i $|AB| = 7$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

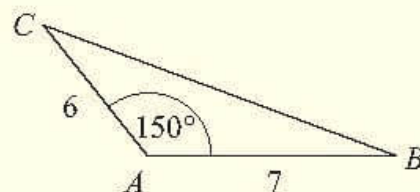
Pole tego trójkąta jest równe:

A. 42,

B. 21,

C. 10,5,

D. 5,25.



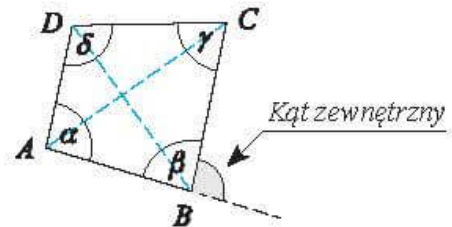
7. Obliczanie długości odcinków i pól czworokątów

Przypomnijmy

Czworokąt to wielokąt, który ma cztery boki.

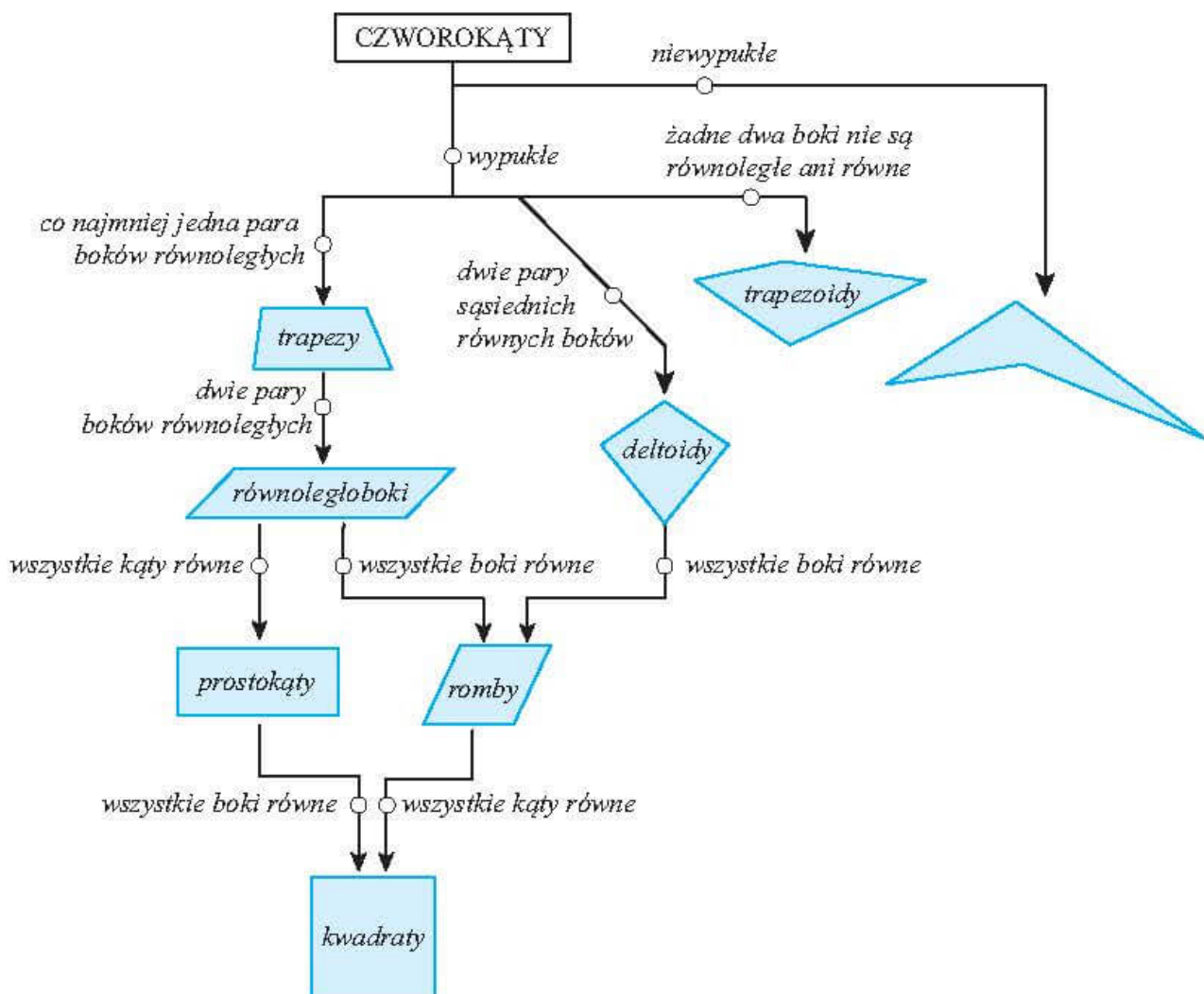
W czworokącie $ABCD$:

- boki AB i DC oraz AD i BC nazywamy przeciwległymi,
- kąty α i γ oraz β i δ nazywamy przeciwległymi,
- odcinki AC i BD to przekątne czworokąta.
- Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360° .



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Klasyfikacja i pola czworokątów wypukłych



Jeżeli znamy długości przekątnych czworokąta i kąt ich przecięcia, to możemy obliczyć pole każdego czworokąta wypukłego.

Twierdzenie

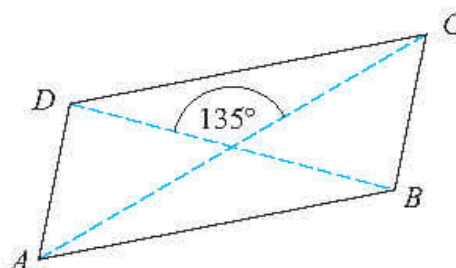
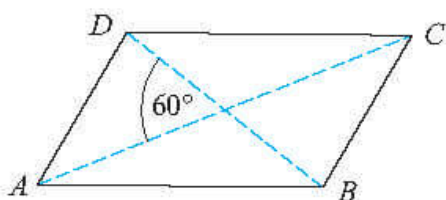
Jeżeli przekątne czworokąta wypukłego mają długości d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem α , to pole P tego czworokąta określone jest wzorem $P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin \alpha$.

Ćwiczenie 1. Przekątne d_1 i d_2 czworokąta wypukłego przecinają się pod kątem α . Oblicz pole tego czworokąta, gdy:

a) $d_1 = 6$, $d_2 = 10$, $\alpha = 60^\circ$, b) $d_1 = 6$, $d_2 = 12$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

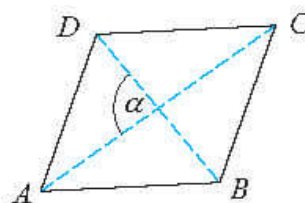
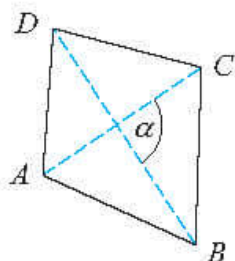
Ćwiczenie 2. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole czworokąta $ABCD$.

a) $|AC| = 8$, $|BD| = 5$, b) $|AC| = 12$, $|BD| = 9$.

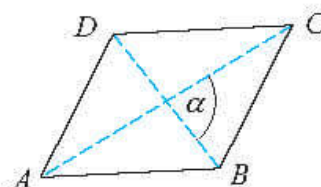
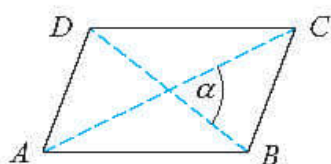


Ćwiczenie 3. Pole czworokąta $ABCD$ jest równe P . Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz sinus kąta α pod jakim przecinają się przekątne tego czworokąta.

a) $P = 3\sqrt{3}$, $|AC| = 4$, $|BD| = 6$, b) $P = 4,5$, $|AC| = 3\sqrt{3}$, $|BD| = 2\sqrt{2}$,



c) $P = 18$, $|AC| = 2\sqrt{3}$, $|BD| = 6\sqrt{3}$, d) $P = 18$, $|AC| = 6\sqrt{3}$, $|BD| = 3\sqrt{3}$.



Przykład 1. Punkty $A = (1, 1)$, $B = (5, 3)$, $C = (6, 6)$ i $D = (3, 5)$ są wierzchołkami czworokąta wypukłego.

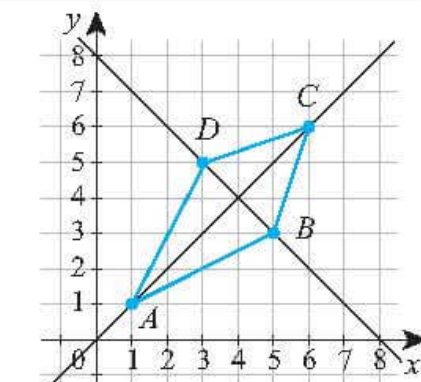
- a) Uzasadnij, że przekątne AC i BD czworokąta są prostopadłe.
b) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Rozwiązanie

- a) Obliczamy współczynniki kierunkowe m_{AC} i m_{BD} prostych AC oraz BD i sprawdzamy, czy $m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$.

$$m_{AC} = \frac{6-1}{6-1} = 1, \quad m_{BD} = \frac{5-3}{3-5} = -1$$

$$m_{AC} \cdot m_{BD} = 1 \cdot (-1) = -1, \text{ więc } AC \perp BD. \text{ c.n.u.}$$



$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}, \quad m_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B}$$

- b) Przekątne AC i BD czworokąta przecinają się pod kątem 90° , więc pole

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin 90^\circ.$$

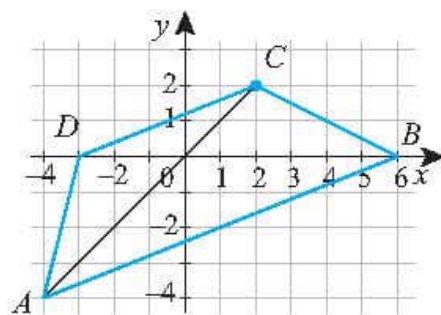
$$|AC| = \sqrt{(6-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

$$|DB| = \sqrt{(3-5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

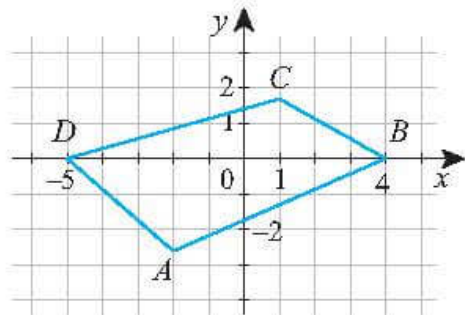
$$P = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1 = 10.$$

Ćwiczenie 4. Punkty $A = (-4, -4)$, $B = (6, 0)$, $C = (2, 2)$, $D = (-3, 0)$ są wierzchołkami czworokąta wypukłego.

- a) Uzasadnij, że przekątne AC i BD przecinają się pod kątem 45° .
b) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



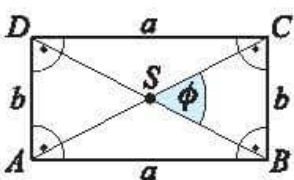
Ćwiczenie 5. Punkty $A = (-2, -2\sqrt{3})$, $B = (4, 0)$, $C = (1, \sqrt{3})$, $D = (-5, 0)$ są wierzchołkami czworokąta wypukłego. Oblicz jego pole.



Prostokąty

Przypomnijmy

Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste.

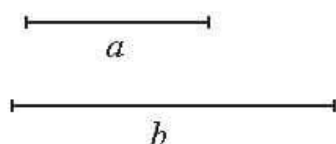
	Rysunek	Pole P i obwód L
a, b – długości boków prostokąta ϕ – kąt przecięcia się przekątnych prostokąta S – punkt przecięcia się przekątnych prostokąta AC, BD – przekątne prostokąta d – długość przekątnej prostokąta	 $ AC = BD = d$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$	$P = ab$ $P = \frac{1}{2}d^2 \cdot \sin \phi$ $L = 2a + 2b$

- Prostokąt jest równoległobokiem oraz trapezem równoramiennym.
- W każdym prostokącie przekątne mają równe długości (przekątne są równe) i przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.
- Punkt przecięcia się przekątnych prostokąta jest jego środkiem symetrii.

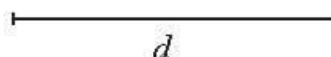
Ćwiczenie 6. Uzasadnij, że przekątne prostokąta mają równe długości.

Ćwiczenie 7.

a) Skonstruuj prostokąt, którego bokami są odcinki a i b przedstawione na rysunku.

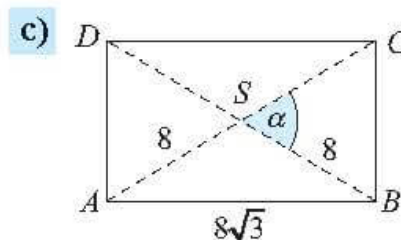
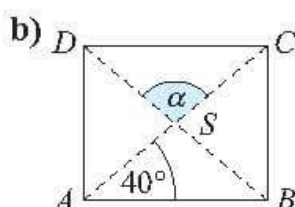
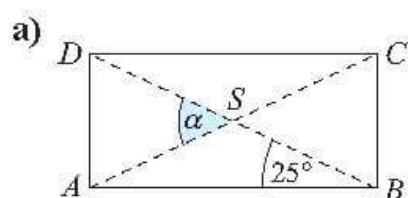


b) Skonstruuj prostokąt, którego przekątną jest odcinek d przedstawiony na rysunku, i którego przekątne przecinają się pod kątem 45° .



Ćwiczenie 8. Uzasadnij, że przekątne prostokąta dzielą go na cztery trójkąty parami przystające.

Ćwiczenie 9. Oblicz miarę kąta α , pod którym przecinają się przekątne prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.



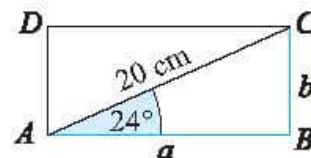
Przykład 2. W prostokącie przekątna ma długość 20 cm i tworzy z dłuższym bokiem kąt o mierze 24° . Oblicz pole tego prostokąta. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $|AC| = 20 \text{ cm},$
 $|\sphericalangle CAB| = 24^\circ.$

Obliczyć: $a, b, P = a \cdot b,$
 $L = 2a + 2b.$



I sposób

W trójkącie ABC :

$$\frac{b}{20} = \sin 24^\circ, \text{ skąd } b \approx 8,134,$$

$$\frac{a}{20} = \cos 24^\circ, \text{ skąd } a \approx 18,2700.$$

$$P = a \cdot b, \text{ więc } P \approx 148,6.$$

Odp.: $P \approx 148,6 \text{ cm}^2.$

II sposób

Przekątne AC i BD przecinają się pod kątem 48° .

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin 48^\circ$$

$$P \approx \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot 0,7431,$$

$$P \approx 148,6.$$

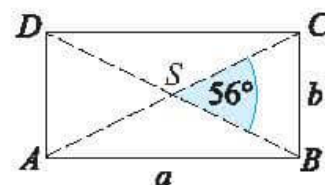
Ćwiczenie 10. Przekątna prostokąta ma długość 10 cm i tworzy z krótszym bokiem kąt o mierze 75° . Oblicz pole tego prostokąta.

Przykład 3. Oblicz długości boków prostokąta, którego przekątne o długości 10 cm przecinają się pod kątem 56° . Wyniki podaj z dokładnością do 0,1 cm.

Rozwiązanie Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $d = |AC| = |BD| = 10 \text{ cm},$
 $|\sphericalangle BSC| = 56^\circ.$

Obliczyć: $a, b.$



Trójkąt BCS to trójkąt równoramienny, w którym

$$|BS| = |CS| = 0,5d, \text{ czyli } |BS| = |CS| = 5 \text{ cm}.$$

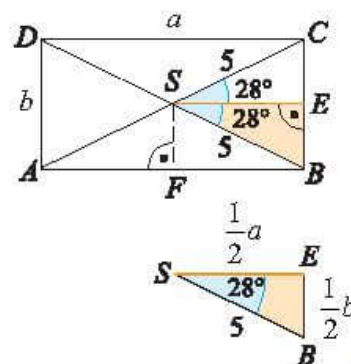
W trójkącie BES :

$$\frac{0,5b}{5} = \sin 28^\circ, \text{ skąd } b = 10 \cdot \sin 28^\circ,$$

$$\sin 28^\circ = 0,4695$$

$$\frac{0,5a}{5} = \cos 28^\circ, \text{ skąd } a = 10 \cdot \cos 28^\circ.$$

$$\cos 28^\circ = 0,8829$$



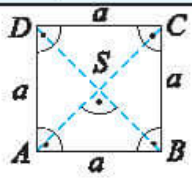
Odp.: 8,8 cm i 4,7 cm.

Ćwiczenie 11. Przekątne prostokąta mają długość 40 cm i przecinają się pod kątem 38° . Oblicz długości boków tego prostokąta. Wyniki zaokrąglaj do 0,1 cm.

Kwadraty

Przypomnijmy

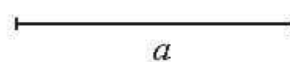
Kwadrat to czworokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste.

	Rysunek	Pole P i obwód L
AB, BC, CD, AD – boki kwadratu AC, BD – przekątne kwadratu a – długość boku kwadratu d – długość przekątnej kwadratu	 $ AC = BD = d, \quad AC \perp BD,$ $d = a\sqrt{2}$	$P = a^2$ $P = \frac{1}{2}d^2$ $L = 4a$

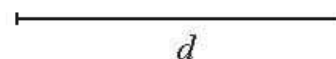
- Każdy kwadrat jest prostokątem, równoległobokiem, trapezem równoramiennym oraz rombem.
- W kwadracie:
 - przekątne mają równe długości
 - przekątne przecinają się pod kątem prostym, a punkt ich przecięcia jest środkiem każdej z nich
 - każda przekątna tworzy z bokiem kąt o mierze 45° .

Ćwiczenie 12.

a) Skonstruuj kwadrat, w którym odcinek a przedstawiony na rysunku jest jego bokiem.



b) Skonstruuj kwadrat, w którym odcinek d przedstawiony na rysunku jest jego przekątną.



Ćwiczenie 13.

Oblicz:

- długość boku kwadratu, którego pole jest równe 289 cm^2 ,
- pole kwadratu, którego obwód jest równy 100 cm,
- długość boku kwadratu, którego przekątna ma długość $6\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 14. Uzasadnij, że jeżeli przekątna kwadratu ma długość równą d , to jego pole P określone jest wzorem $P = \frac{1}{2} \cdot d^2$.

Przykład 4. Punkty A, B, C , gdzie $A = (0, 6)$, $B = (2, 0)$, $C = (8, 2)$, są kolejnymi wierzchołkami czworokąta. Sprawdź, czy istnieje kwadrat, którego są one wierzchołkami.

Rozwiązanie

Punkty A, B, C są wierzchołkami kwadratu, gdy odcinki AB i BC leżą na prostych prostopadłych i mają równe długości (lub gdy środek M odcinka AC spełnia warunek $|MA| = |MB|$, lub gdy $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$).

Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych AB i BC .

$$a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 6}{2 - 0} = -3,$$

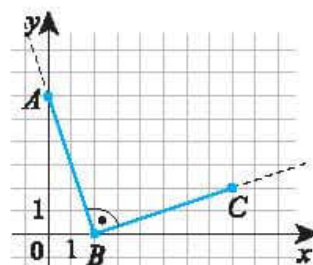
$$a_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - 0}{8 - 2} = \frac{1}{3}.$$

$$a_{AB} \cdot a_{BC} = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1, \text{ więc } AB \perp BC.$$

Obliczamy długości odcinków AB i BC .

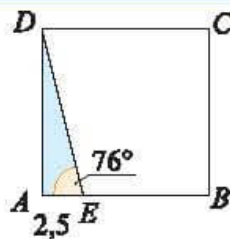
$$\left. \begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{40} \\ |BC| &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(8 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{40} \end{aligned} \right\}, \text{ więc } |AB| = |BC|.$$

Odp.: Punkty A, B, C są wierzchołkami kwadratu, bo $AB \perp BC$ i $|AB| = |BC|$.



Ćwiczenie 15. Punkty $A = (10, -4)$, $B = (4, 2)$ i $C = (0, -2)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta. Sprawdź, czy istnieje kwadrat, którego są one wierzchołkami.

Przykład 5. Z płytki ceramicznej w kształcie kwadratu kafełkarz odciął trójkątny klin. Tarczę tnącą ustawił pod kątem 76° w stosunku do boku płytki. Najkrótszy bok klinu AED miał długość 2,5 cm, jak na rysunku. Oblicz długość boku płytki. Wynik zaokrąglij do 1 cm.



Rozwiązanie

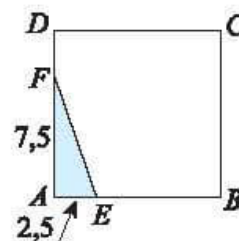
W trójkącie prostokątnym AED przyprostokątna AD jest bokiem płytki, zatem

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \operatorname{tg} 76^\circ, \text{ więc } |AD| = |AE| \cdot \operatorname{tg} 76^\circ, \text{ czyli } |AD| = 2,5 \cdot 4,0108,$$

skąd $|AD| = 10,027$, zatem $|AD| \approx 10$.

Odp.: 10 cm.

Ćwiczenie 16. Z płytki ceramicznej w kształcie kwadratu o boku 10 cm kafełkarz ma odciąć trójkątny klin o wymiarach podanych na rysunku. Oblicz, pod jakim kątem ma on ustawić tarczę w stosunku do boku płytki.



Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $15\sqrt{3}$, b) 27. 2. a) $10\sqrt{3}$, b) $27\sqrt{2}$. 3. a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{4}$, c) 1, d) $\frac{2}{3}$. 4. b) 27.
 5. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$. Wskazówka. Proste AC i DB przecinają się pod kątem 60° .
 6. Wskazówka. Wskaz trójkąty przystające w prostokącie $ABCD$ o przekątnych AC i BD .
 9. a) $\alpha = 50^\circ$, b) $\alpha = 100^\circ$, c) $\alpha = 60^\circ$. 10. $P = 25 \text{ cm}^2$. 11. 13,0 cm i 37,8 cm.
 13. a) 17 cm, b) 625 cm^2 , c) 6. 15. Nie, bo $|AB| \neq |BC|$. 16. 18° albo 72° .

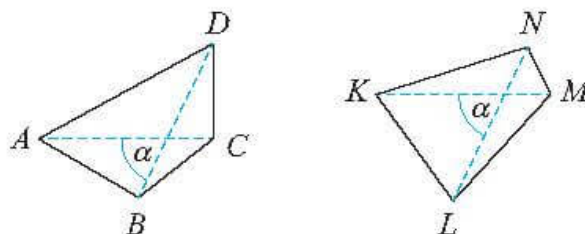
Zadania utrwalające

7.1. Przekątne d_1 i d_2 czworokąta wypukłego przecinają się pod kątem α . Oblicz pole tego czworokąta, gdy:

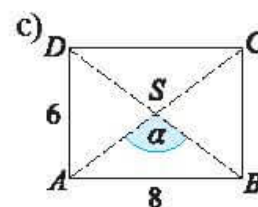
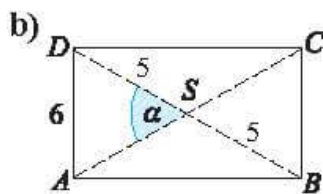
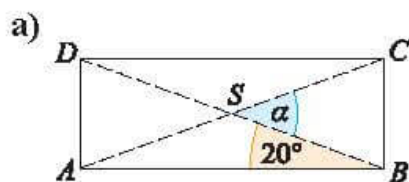
a) $d_1 = d_2 = 8$ i $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$,

b) $d_1 = 2\sqrt{2}$, $d_2 = 6$ i $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

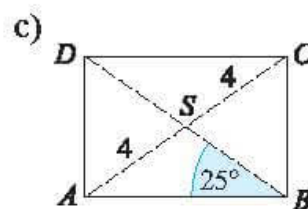
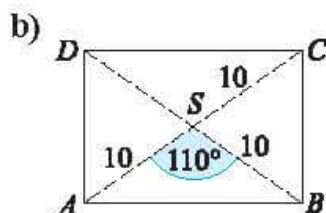
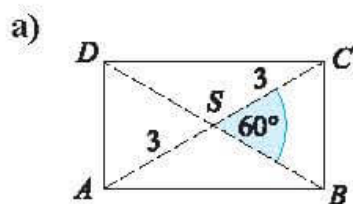
7.2. Przekątne czworokątów $ABCD$ i $KLMN$ są parami równe i równoległe. Uzasadnij, że pola tych czworokątów są równe.



7.3. Oblicz miarę kąta α , pod którym przecinają się przekątne prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.



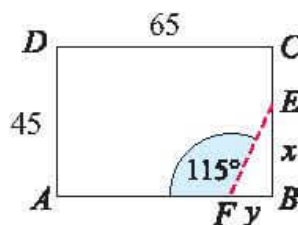
7.4. Oblicz długości boków prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.



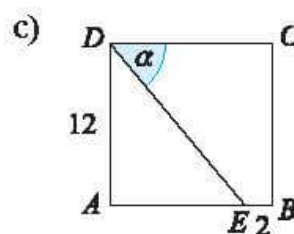
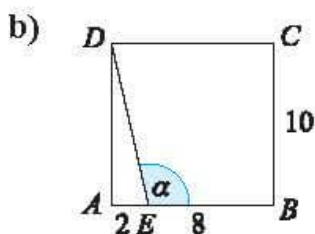
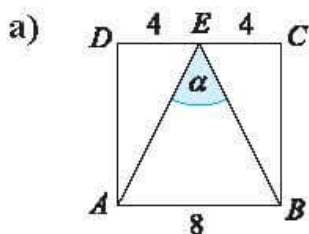
Wyniki zaokrąglaj do 0,01.

7.5. Przekątne prostokąta mają długość 14 cm i przecinają się pod kątem 48° . Oblicz pole i obwód tego prostokąta. Wyniki zaokrąglaj odpowiednio do 1 cm^2 i 1 cm .

7.6. Stolarz odcina naroże z deski prostokątnej o wymiarach $65 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$, tak jak na rysunku. Długość cięcia EF jest równa 30 cm. Oblicz obwód deski (figura $AFECD$) po odcięciu naroża i podaj wynik zaokrąglony do 1 cm.



7.7. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest kwadratem. Oblicz miarę kąta α .

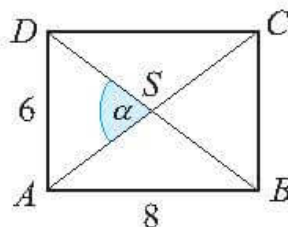


7.8. Przekątna prostokąta o długości 12 dzieli jego kąt w stosunku $2:3$. Oblicz obwód L i pole P tego prostokąta. Wyniki zaokrąglaj do jednego miejsca po przecinku.

7.9. Przekątne prostokąta $ABCD$ o bokach długości 6 i 8 przecinają się pod kątem α . Uzasadnij, że:

a) pola trójkątów ASD , DSC , CSB i BSA są równe,

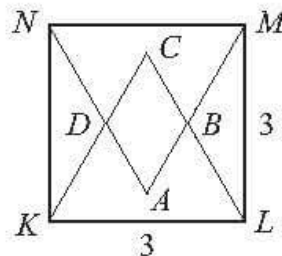
b) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$.



7.10. W kwadrat $KLMN$, którego bok ma długość 3, wpisano dwa trójkąty równoboczne w sposób pokazany na rysunku. Uzasadnij, że:

a) czworokąt $ABCD$ jest rombem,

b) $|AC| = 3(\sqrt{3} - 1)$ i $|DB| = 3 - \sqrt{3}$.



7.11. W kwadrat, którego bok ma długość 1, wpisano drugi kwadrat tak, że jego boki tworzą z bokami danego kwadratu odpowiednio kąty o miarach 30° i 60° . Oblicz pole wpisanego kwadratu.

7.12. Skonstruuj kwadrat, w którym dwa dane punkty M i N są:

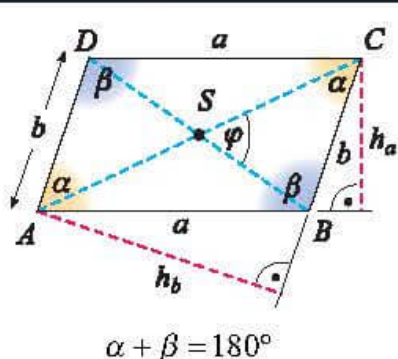
a) środkami dwóch przeciwległych boków tego kwadratu,

b) środkami dwóch sąsiednich boków tego kwadratu.

Równoległoboki

Przypomnijmy

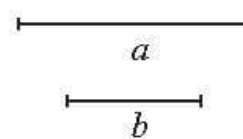
Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

	Rysunek	Pole P i obwód L
a, b – długości boków równoległoboku h_a, h_b – wysokości równoległoboku AC, BD – przekątne równoległoboku $ AC = d_1, BD = d_2$ α, β – miary kątów wewnętrznych równoległoboku ϕ – kąt przecięcia się przekątnych równoległoboku	 $\alpha + \beta = 180^\circ$	$P = bh_b$ $P = ah_a$ $P = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \phi$ $L = 2a + 2b$

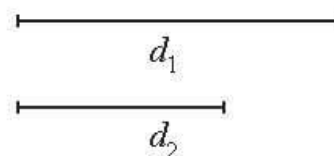
- Każdy równoległobok jest trapezem równoramiennym.
- W każdym równoległoboku:
 - pary boków równoległych mają tę samą długość,
 - punkt przecięcia się przekątnych dzieli każdą z przekątnych na połowy,
 - przeciwległe kąty wewnętrzne są przystające (mają równe miary),
 - suma miar dwóch kolejnych kątów wewnętrznych jest równa 180° ,
 - punkt przecięcia się przekątnych jest środkiem symetrii tego równoległoboku.

Ćwiczenie 17.

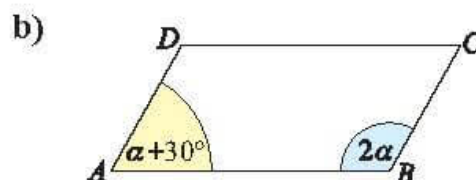
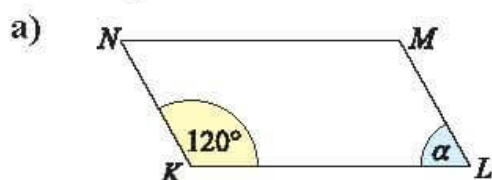
a) Skonstruuj równoległobok, w którym odcinki a i b przedstawione na rysunku są bokami równoległoboku oraz jego kąt ostry ma miarę 30° .



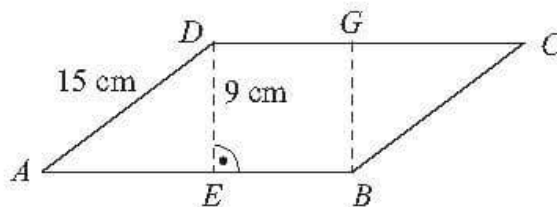
b) Skonstruuj równoległobok, w którym odcinki d_1 i d_2 przedstawione na rysunku są jego przekątnymi i przecinają się pod kątem 45° .



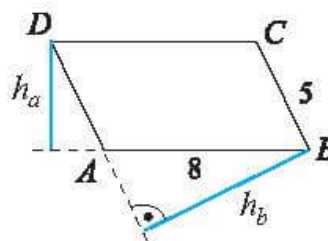
Ćwiczenie 18. Uwzględnij dane przedstawione na rysunkach i oblicz miary kątów równoległoboku.



Ćwiczenie 19. Pole prostokąta $DEBG$ jest równe 162 cm^2 .
Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.



Ćwiczenie 20. Pole równoległoboku $ABCD$ o bokach długości 8 i 5 jest równe 24.
Oblicz długości wysokości tego równoległoboku.

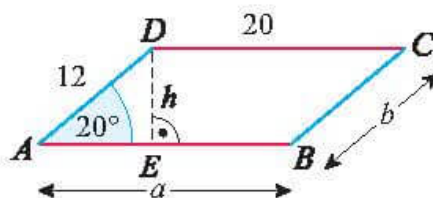


Przykład 6. Boki równoległoboku mają długości 20 cm i 12 cm, a kąt między nimi zawarty ma miarę 20° . Oblicz pole tego równoległoboku. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $a = 20 \text{ cm}$,	Obliczyć: h , $P = a \cdot h$.
$b = 12 \text{ cm}$,	
$ \angle DAB = 20^\circ$.	



W trójkącie prostokątnym AED :

$$\frac{h}{12} = \sin 20^\circ, \text{ skąd}$$

$$h = 12 \cdot \sin 20^\circ, \text{ więc } h \approx 4,104.$$

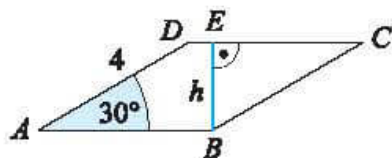
$$P = a \cdot h, \text{ czyli}$$

$$P = 20 \cdot 4,104, \text{ więc } P \approx 82,08.$$

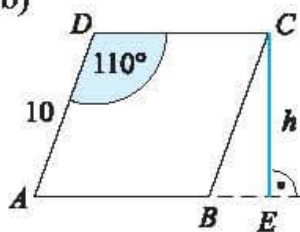
Odp.: $P \approx 82,08 \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 21. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, i oblicz długość jego wysokości h . Wynik zaokrąglij do 0,1.

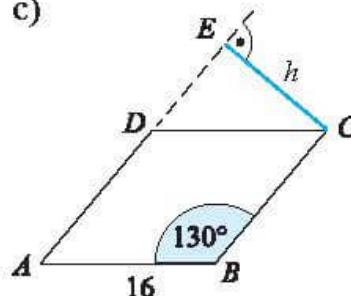
a)



b)



c)

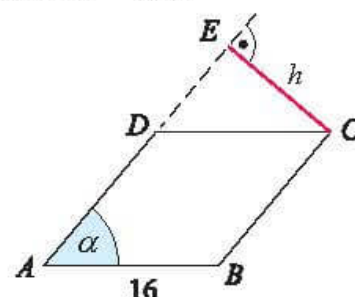
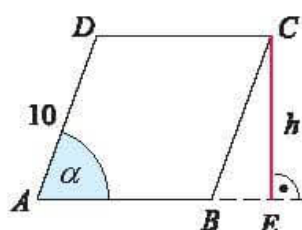
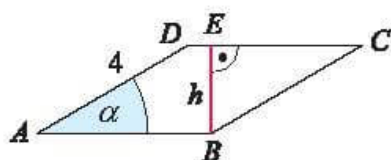


Ćwiczenie 22. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, i oblicz jego wysokość h , gdy:

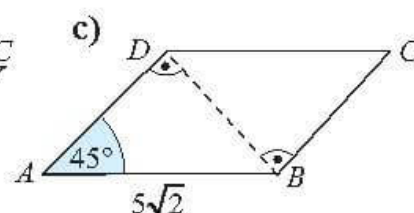
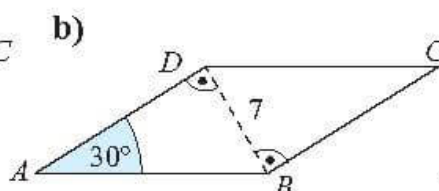
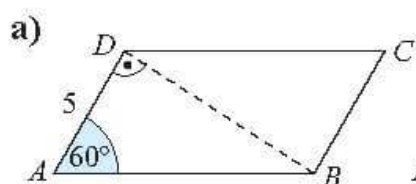
a) $\sin \alpha = 0,4$,

b) $\sin \alpha = 0,7$,

c) $\sin \alpha = 0,5$.



Ćwiczenie 23. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole równoległoboku $ABCD$.



Przykład 7. Boki równoległoboku mają długości 8 i 10, a jego pole jest równe 60. Oblicz:

a) wysokości tego równoległoboku,

b) miary kątów równoległoboku.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $P = 60$, $a = 10$, $b = 8$. | **Obliczyć:** h_a , h_b , α , β .

a) $P = a \cdot h_a$ więc $h_a = \frac{P}{a}$, czyli $h_a = \frac{60}{10} = 6$,

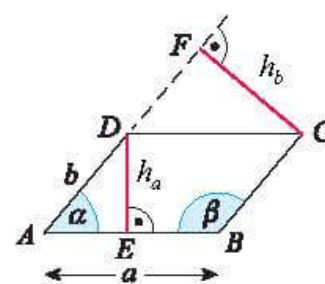
$P = b \cdot h_b$ więc $h_b = \frac{P}{b}$, czyli $h_b = \frac{60}{8} = 7,5$.

b) W trójkącie prostokątnym AED :

$\frac{h_a}{b} = \sin \alpha$, więc $\sin \alpha = \frac{6}{8} = 0,75$, skąd $\alpha \approx 49^\circ$.

$\beta = 180^\circ - \alpha$, więc $\beta \approx 131^\circ$.

Odp.: a) 6 i 7,5, b) 49° i 131° .



Ćwiczenie 24. Boki równoległoboku mają długości 16 i 32, a jego pole jest równe 128. Oblicz miary kątów równoległoboku.

Przykład 8. Boki równoległoboku mają długości 16 i 10, a kąt między nimi zawarty ma miarę 60° . Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $|AB| = 16$, $|AD| = 10$, $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$.

Obliczyć: $|BD| = x$, $|AC| = y$.

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABD :

$$x^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos(\sphericalangle BAD)$$

$$x^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 196, \text{ skąd } x = 14.$$

Zauważamy, że $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

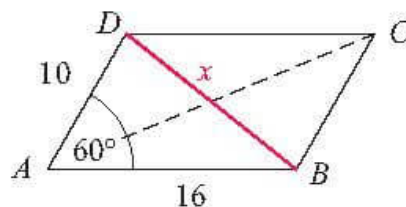
Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABC :

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$$

$$y^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ$$

$$y^2 = 516, \text{ skąd } y = 2\sqrt{129}$$

Odp.: 14 i $2\sqrt{129}$.



$$\cos 120^\circ = \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 25. Boki równoległoboku mają długości 5 i 8, a kąt między nimi zawarty ma miarę 135° . Oblicz sumę kwadratów długości przekątnych tego równoległoboku.

Przykład 9. Punkty $A = (6, 4)$, $B = (-3, 7)$, $C = (-2, 0)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz pole tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Zauważamy, że przekątna AC dzieli równoległobok na dwa przystające trójkąty: ABC i ADC .

$$P_{\square ABCD} = 2 \cdot P_{\triangle ABC}$$

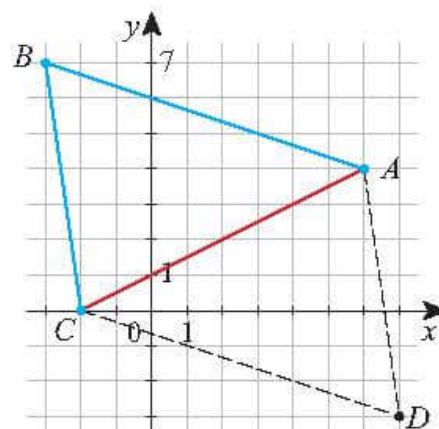
Korzystamy z wzoru

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A)|$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(-3 - 6) \cdot (0 - 4) - (-2 - 6) \cdot (7 - 4)| = 30.$$

Zatem $P_{\square ABCD} = 2 \cdot 30 = 60$.

Odp.: 60.



Ćwiczenie 26. Punkty $A = (-1, 1)$, $B = (3, -2)$, $C = (2, 3)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz jego pole.

Romby

Przypomnijmy

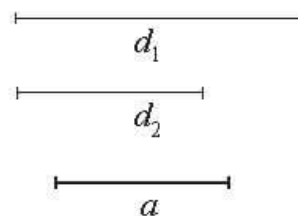
Romb to czworokąt, którego wszystkie boki są równe.

	Rysunek	Pole P i obwód L
a – długość boku rombu h – wysokość rombu d_1, d_2 – długości przekątnych rombu ($ AC = d_1, BD = d_2$) α – miara kąta ostrego rombu.		$P = ah$ $P = \frac{1}{2}d_1d_2$ $L = 4a$

- Każdy romb jest równoległobokiem.
- W każdym rombie:
 - przekątne przecinają się pod kątem prostym, a punkt przecięcia jest środkiem każdej z nich,
 - przekątne dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne,
 - przekątne dzielą kąty na połowy.

Ćwiczenie 27.

- Skonstruuj romb, w którym odcinki d_1 i d_2 przedstawione na rysunku są jego przekątnymi.
- Skonstruuj romb, w którym odcinek a przedstawiony na rysunku jest jego boki, a kąt ostry tego rombu ma miarę 60° .



Ćwiczenie 28. Krótsza przekątna rombu ma taką samą długość jak jego bok.

- Podaj miary kątów wewnętrznych tego rombu.
- Podaj miarę kąta, jaki tworzy dłuższa przekątna tego rombu z jego boki.

Przykład 10. Wysokość h rombu jest równa 4 cm, a obwód L rombu jest równy 24 cm. Oblicz pole P rombu.

Rozwiązanie

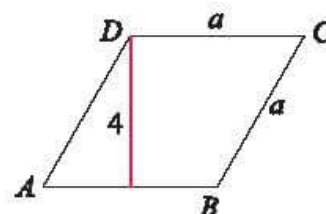
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $h = 4, L = 24.$ **Obliczyć:** $P.$

$$L = 4a \text{ i } L = 24, \text{ więc } 4a = 24, \text{ skąd } a = 6.$$

$$P = a \cdot h = 6 \cdot 4 = 24.$$

Odp.: $P = 24.$



Ćwiczenie 29. Bok rombu ma długość 5 cm, a kąt ostry miarę 60° . Oblicz pole tego rombu.

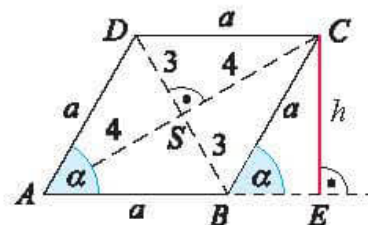
Przykład 11. Przekątne rombu mają długości równe 6 i 8. Oblicz:

- a) długość boku rombu, b) wysokość rombu,
c) miarę kąta ostrego rombu.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $d_1 = |BD| = 6$, **Obliczyć:** a , h , α .
 $d_2 = |AC| = 8$.



- a) Punkt S przecięcia się przekątnych rombu dzieli każdą z nich na połowę, więc $|AS| = |SC| = 4$ i $|BS| = |SD| = 3$.

W trójkącie prostokątnym ASD :

$$a^2 = 4^2 + 3^2, \text{ więc } a^2 = 25, \text{ skąd } a = 5.$$

b) $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ i $P = a \cdot h$

$$a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$5h = \frac{6 \cdot 8}{2}, \text{ skąd } h = 4,8.$$

- c) W trójkącie prostokątnym BEC :

$$\frac{h}{a} = \sin \alpha, \text{ więc}$$

$$\sin \alpha = \frac{4,8}{5} = 0,96, \text{ skąd } \alpha \approx 74^\circ.$$

Odp.: a) 5, b) 4,8, c) 74° .

Ćwiczenie 30. Przekątne rombu mają długości równe 10 i 20. Oblicz:

- a) długość boku rombu, b) wysokość rombu, c) miarę kąta ostrego rombu.

Odpowiedzi do ćwiczeń

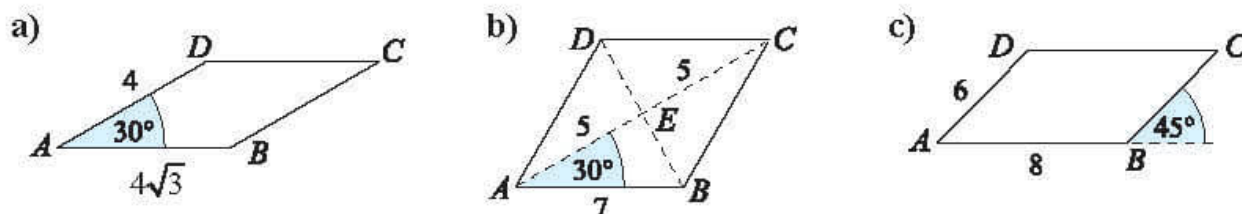
18. a) 60° i 120° , b) 80° i 100° . 19. 270 cm^2 . 20. $h_a = 3$, $h_b = 4,8$. 21. a) 2, b) 9,4, c) 12,3.

22. a) $h = 1,6$, b) $h = 7$, c) $h = 8$. 23. a) $25\sqrt{3}$, b) $49\sqrt{3}$, c) 25. 24. 15° i 165° . 25. 178.

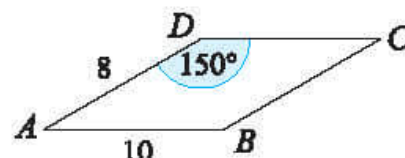
26. 17. 28. a) 60° i 120° , b) 30° . 29. $\frac{25\sqrt{3}}{2}$. 30. a) $5\sqrt{5}$, b) $4\sqrt{5}$, c) 54° .

Zadania utrwalające

7.13. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

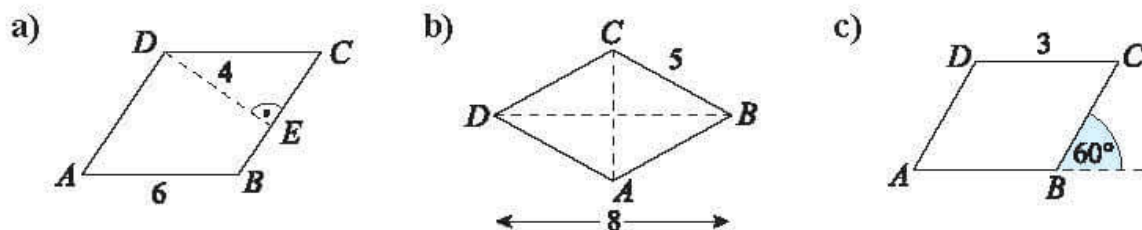


7.14. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole równoległoboku $ABCD$.



7.15. Oblicz długości przekątnych równoległoboku, w którym boki mają długości 4 i $3\sqrt{2}$, a kąt ostry ma miarę 45° .

7.16. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole rombu $ABCD$.



7.17. Wysokość równoległoboku poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego tworzy z jego bokiem kąt o mierze 50° . Oblicz miary kątów tego równoległoboku. Wyniki zaokrąglaj do 1° .

7.18. W równoległoboku boki mają długości 4 i 3, a kąt ostry ma miarę 42° . Oblicz pole tego równoległoboku. Wynik zaokrąglaj do 0,1.

7.19. Pole rombu, którego bok ma długość $2\sqrt{3}$, jest równe $6\sqrt{2}$. Oblicz miarę kąta ostrego tego rombu.

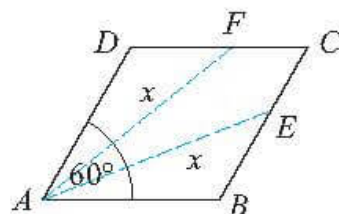
7.20. Oblicz:

- obwód równoległoboku, którego pole jest równe 70, a jego wysokości mają długości 5 i 7,
- pole równoległoboku, w którym przekątne o długościach 17 i 26 przecinają się pod kątem 30° .

7.21. Przekątne równoległoboku mają długości 12 i 16, a jego pole jest równe $48\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta przecięcia się przekątnych tego równoległoboku.

7.22. Bok rombu ma długość 4. Suma długości jego przekątnych jest równa 10. Oblicz pole P tego rombu.

7.23. Romb o boku długości 9 i kącie ostrym 60° podzielono na trzy części o równych polach odcinkami mającymi wspólny początek w wierzchołku kąta ostrego. Oblicz długości tych odcinków.



7.24. W rombie $ABCD$ bok AB ma długość 13, a przekątna AC ma długość 24.

a) Oblicz długość przekątnej BD .

b) Oblicz pole rombu.

c) Oblicz sinus kąta DAB .

d) Oblicz cosinus kąta ADC .

7.25. Pole rombu jest równe 7,5, a długości jego przekątnych różnią się o 2. Wykaż, że tangens połowy kąta rozwartego tego rombu jest równy $\frac{5}{3}$.

7.26. W rombie przekątne mają długości d_1 i d_2 , a miara jednego z kątów wewnętrznych tego rombu jest równa 150° . Uzasadnij, że długość boku a rombu określona jest wzorem $a = \sqrt{d_1 \cdot d_2}$.

7.27. Punkty $A = (1, 1)$ i $C = (3, 5)$ są końcami przekątnej rombu $ABCD$, którego pole jest równe 20. Oblicz:

a) długość przekątnej AC ,

b) długość przekątnej BD ,

c) długość boku rombu,

d) sinus kąta ostrego rombu.

7.28. Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ jest rombem. Jeśli tak, to oblicz jego pole, gdy:

a) $A = (0, -2)$, $B = (2, 1)$, $C = (5, 3)$, $D = (3, 0)$,

b) $A = (-4, -2)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 4)$, $D = (-6, 2)$.

7.29. Sprawdź, czy punkt D jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$, gdy:

a) $A = (-2, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (0, 7)$, $D = (-4, 5)$,

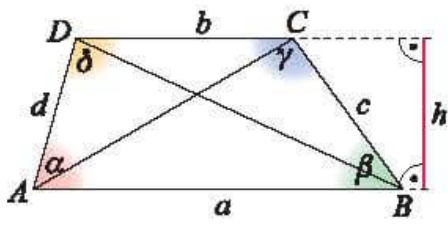
b) $A = (-1, -1)$, $B = (2, -3)$, $C = (7, -1)$, $D = (4, 1)$,

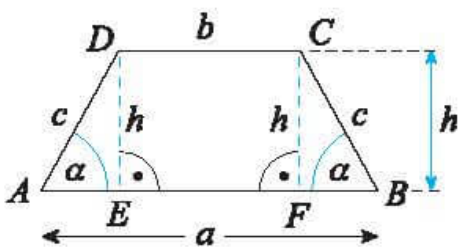
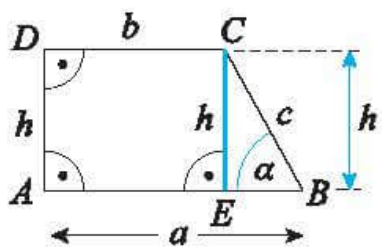
c) $A = (-2, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (6, 1)$, $D = (5, -1)$.

Trapezy

Przypomnijmy

Trapezem nazywamy czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych. Parę boków równoległych trapezu nazywa się **podstawami**, a odległość między nimi jest równa wysokości trapezu. Pozostałe dwa boki trapezu nazywa się **ramionami**.

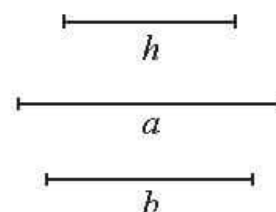
	Rysunek	Pole P i obwód L
a, b – długości podstaw trapezu c, d – długości ramion trapezu h – wysokość trapezu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – miary kątów wewnętrznych trapezu	 $\alpha + \delta = 180^\circ, \quad \beta + \gamma = 180^\circ$	$P = \frac{1}{2}(a + b)h$ $L = a + b + c + d$

Trapez równoramienny	Trapez prostokątny
 $ AD = BC = c, \quad AE = FB = \frac{a - b}{2}$	 $AD \perp AB, \quad AD \perp DC, \quad EB = a - b$

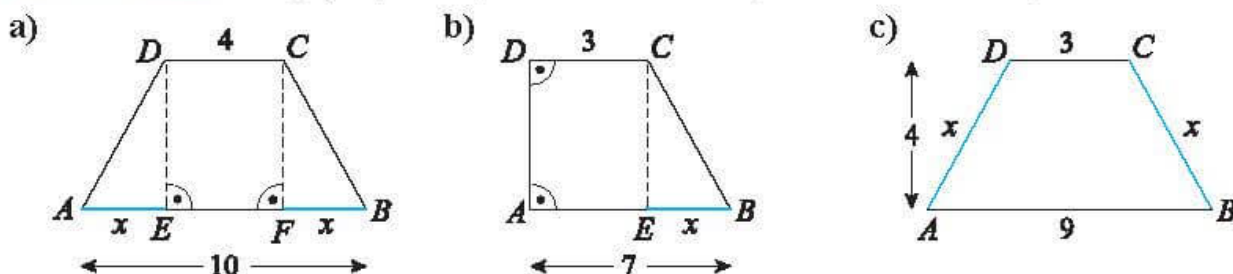
- Każdy prostokąt, kwadrat, równoległobok i romb jest trapezem równoramiennym.
- Każdy kwadrat i prostokąt jest trapezem prostokątnym.

Ćwiczenie 31. Odcinki h , a i b przedstawione na rysunku są odpowiednio wysokością i podstawami trapezu. Skonstruuj:

a) trapez prostokątny, b) trapez równoramienny.



Ćwiczenie 32. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka x .



Przykład 12. Pole trapezu jest równe 54 dm^2 . Jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej, a wysokość jest równa krótszej podstawie. Oblicz długości podstaw i wysokość tego trapezu.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

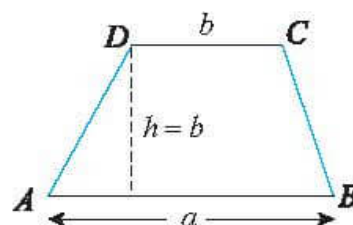
Dane: $P = 54$, $h = b$, $a = 2b$. | **Obliczyć:** a , b , h .

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h, \text{ więc}$$

$$54 = \frac{2b+b}{2} \cdot b$$

$$\frac{3b}{2} \cdot b = 54, \text{ skąd } b^2 = 36$$

$$b = 6, \text{ więc } a = 12 \text{ i } h = 6.$$



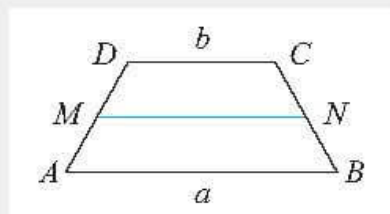
Ćwiczenie 33. Pole trapezu jest równe 360 cm^2 . Wysokość ma długość 12 cm , a długość jednej z podstaw jest o 4 cm większa od drugiej. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

Uwaga

Odcinek MN łączący środki ramion dowolnego trapezu jest równoległy do jego podstaw AB i DC

oraz $|MN| = \frac{|AB| + |DC|}{2}$, czyli $|MN| = \frac{a+b}{2}$.

Odcinek MN nazywamy **linią środkową trapezu**.



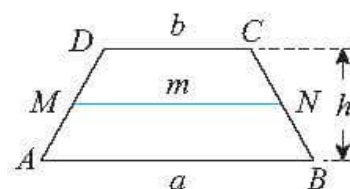
Ćwiczenie 34. Uzasadnij, że jeśli MN jest linią środkową trapezu, to:

a) pole tego trapezu określone jest wzorem $P = |MN| \cdot h$, gdzie h to wysokość trapezu,

b) $|MN| = \frac{a+b}{2}$, gdzie a i b to podstawy trapezu.

Ćwiczenie 35. Na rysunku przedstawiony jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i DC oraz linii środkowej MN . Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i oblicz:

- a) m , gdy $a=12$ i $b=8$,
b) pole P trapezu, gdy $m=4$ i $h=2$.



Przykład 13. W trapezie prostokątnym, przedstawionym na rysunku, długości podstaw są równe 8 cm i 6 cm, a kąt ostry ma miarę 58° . Oblicz obwód i pole tego trapezu. Wyniki zaokrąglaj do dwóch miejsc po przecinku.

Rozwiązanie

Dane: $a=8$, $b=6$, $\alpha = 58^\circ$.	Obliczyć: $L = a + b + c + h$, $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$.
---	---

Zauważamy, że $|FB| = a - b = 8 - 6 = 2$.

Obliczamy długości odcinków h i c w trójkącie CFB .

$$\frac{h}{2} = \operatorname{tg} 58^\circ, \text{ skąd } h = 2 \cdot \operatorname{tg} 58^\circ, \text{ czyli } h \approx 3,2006,$$

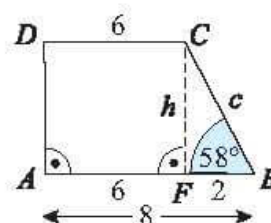
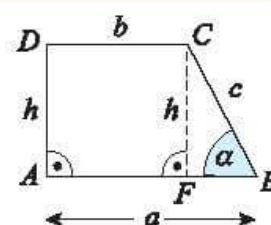
$$\frac{2}{c} = \cos 58^\circ, \text{ skąd } c = \frac{2}{\cos 58^\circ}, \text{ czyli } c \approx 3,7743.$$

Zatem

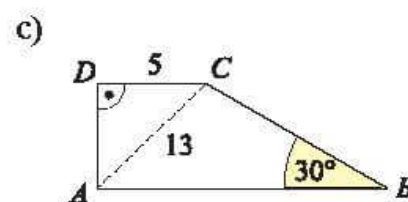
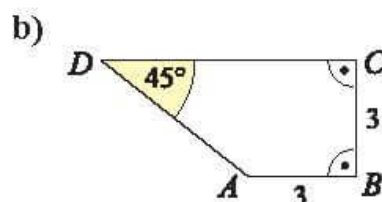
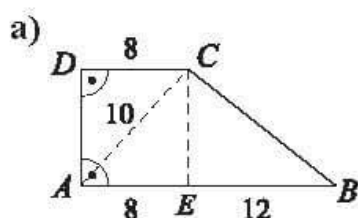
$$L = 8 + 6 + 3,2006 + 3,7743 = 20,9749, \text{ więc } L \approx 20,97.$$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h, \text{ czyli } P \approx \frac{8+6}{2} \cdot 3,2006, \text{ skąd } P \approx 22,4042.$$

Odp.: $L \approx 20,97$ cm, $P \approx 22,40$ cm².

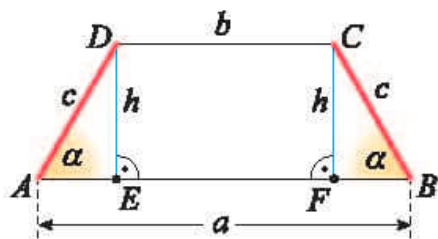


Ćwiczenie 36. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym. Oblicz pole tego trapezu i jego obwód.



Ćwiczenie 37. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, i uzasadnij, że:

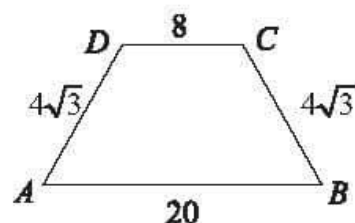
a) $|AE| = |BF| = \frac{a-b}{2}$, b) $|AF| = |BE| = \frac{a+b}{2}$.



Przykład 14. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Oblicz:

- miarę kąta między ramieniem a dłuższą podstawą,
- wysokość trapezu,
- długość przekątnej trapezu.



Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. Zauważamy, że trapez $ABCD$ jest równoramienny. Obliczamy długości odcinków EB i AE .

$$|EB| = \frac{|AB| - |DC|}{2} = \frac{20 - 8}{2} = 6,$$

$$|AE| = |AB| - |EB| = 20 - 6 = 14.$$

W trójkącie prostokątnym EBC :

a) $\cos \alpha = \frac{6}{4\sqrt{3}}$, skąd $\cos \alpha = \frac{6}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zatem $\alpha = 30^\circ$.

b) $\frac{h}{4\sqrt{3}} = \sin 30^\circ$, skąd $h = 4\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$.

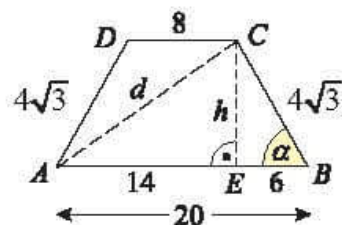
Zatem $h = 2\sqrt{3}$.

c) W trójkącie prostokątnym AEC :

$$|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2, \text{ czyli } d^2 = 14^2 + (2\sqrt{3})^2, \text{ skąd } d^2 = 208, \text{ więc}$$

$$d = \sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13}, \text{ zatem } d = 4\sqrt{13}.$$

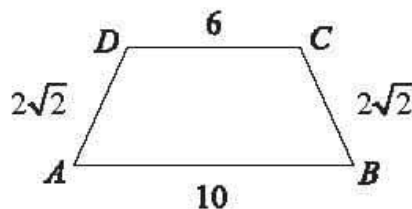
Odp.: a) 30° , b) $2\sqrt{3}$, c) $4\sqrt{13}$.



$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ćwiczenie 38. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Oblicz:

- miarę kąta ostrego tego trapezu,
- tangens kąta, jaki tworzy przekątna trapezu z jego dłuższą podstawą.



Przykład 15. Przekątna trapezu ma długość 30 i tworzy z jednym z jego ramion kąt prosty, a z dłuższą podstawą trapezu kąt, którego sinus jest równy $\frac{8}{17}$. Pole tego trapezu jest równe 360. Oblicz długości podstaw trapezu.

Rozwiązanie

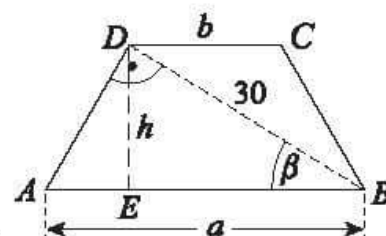
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $\sin \beta = \frac{8}{17}$,

$|BD| = 30, P = 360.$

Obliczyć:

a, b – długości podstaw.



Obliczamy długość przeciwprostokątnej AB , czyli długość a dłuższej podstawy trapezu.

W trójkącie prostokątnym ABD :

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \cos \beta, \text{ czyli } \frac{30}{a} = \cos \beta, \text{ więc } a = \frac{30}{\cos \beta}.$$

$$\sin \beta = \frac{8}{17} \text{ i } \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}, \text{ skąd}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2}, \text{ czyli } \cos \beta = \frac{15}{17}. \text{ Zatem } a = 30 : \frac{15}{17} = 34.$$

Obliczamy wysokość h trapezu. W trójkącie prostokątnym DEB :

$$\frac{|ED|}{|BD|} = \sin \beta, \text{ czyli } \frac{h}{30} = \frac{8}{17}, \text{ skąd } h = \frac{240}{17}.$$

Obliczamy długość b krótszej podstawy trapezu.

$$P = \frac{(a+b)h}{2}, \text{ więc } 360 = \frac{(34+b) \frac{240}{17}}{2}, \text{ skąd } b = 17.$$

Odp.: $a = 34, b = 17$.

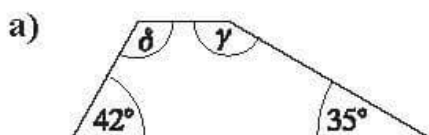
Ćwiczenie 39. Przekątna trapezu ma długość 24 i tworzy z jednym z jego ramion kąt prosty, a z dłuższą podstawą trapezu kąt, którego cosinus jest równy $\frac{12}{13}$. Pole tego trapezu jest równe 180. Oblicz długości podstaw trapezu.

Odpowiedzi do ćwiczeń

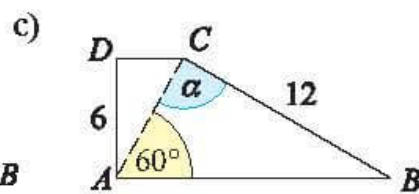
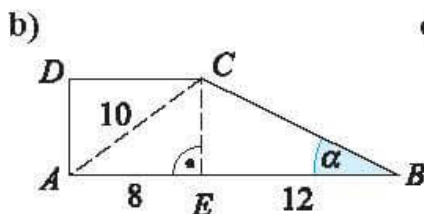
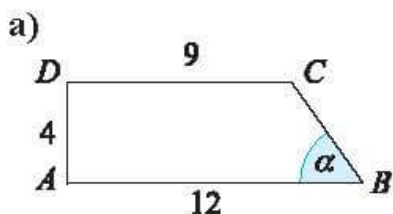
32. a) $x=3$, b) $x=4$, c) $x=5$. 33. 28 cm i 32 cm. 35. a) 10, b) 8.36. a) $P=84$, $L=34+6\sqrt{5}$, b) $P=\frac{27}{2}$, $L=12+3\sqrt{2}$, c) $P=12(5+6\sqrt{3})$, $L=46+12\sqrt{3}$.38. a) 45° , b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$. 39. 26 i 13.

Zadania utrwalające

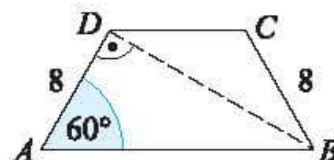
7.30. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miary kątów wewnętrznych trapezu.



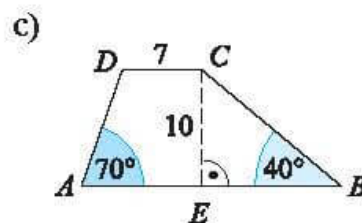
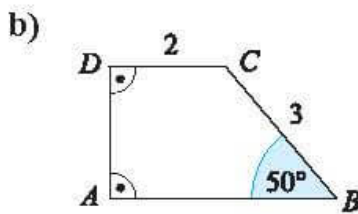
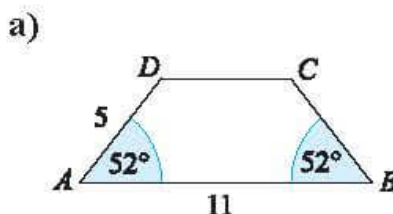
7.31. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miarę kąta α .



7.32. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, i oblicz długości podstaw tego trapezu.



7.33. Oblicz pole trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku. Wynik zaokrąglaj do 0,1.

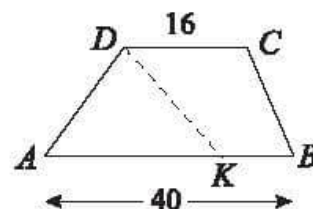


7.34. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy AB i CD mają odpowiednio długości $5\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$, a kąt ostry tego trapezu ma miarę 60° .

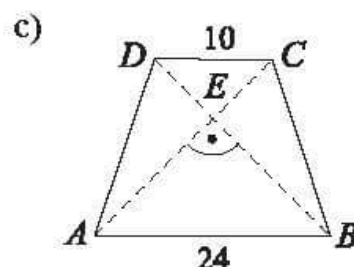
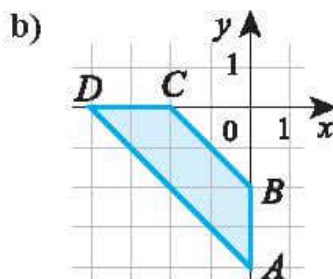
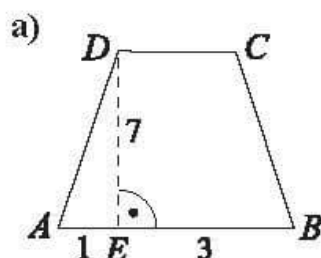
a) Oblicz wysokość trapezu.

b) Oblicz pole trapezu.

- 7.35. Odcinki AB i CD , gdzie $|AB| = 40$ i $|CD| = 16$, są podstawami trapezu $ABCD$. Punkt K położony na boku AB ma tę własność, że odcinek DK dzieli trapez na dwa wielokąty o równych polach. Oblicz długość odcinka AK .

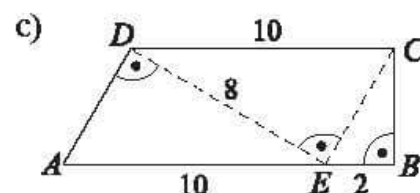
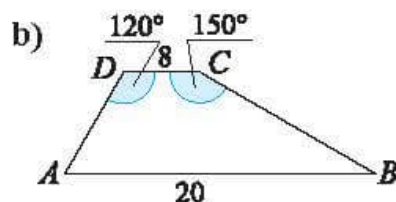
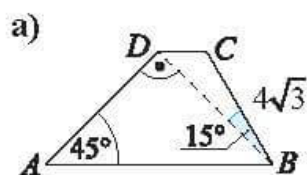


- 7.36. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole tego trapezu.



- 7.37. Nierównoległe boki AD i BC trapezu $ABCD$ zawierają się w prostych prostopadłych. Wiedząc, że $|AD| = |DC| = 8$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, oblicz pole P i obwód L tego trapezu.

- 7.38. Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o danych przedstawionych na rysunku jest trapezem. Jeśli tak, to oblicz jego pole P .



- 7.39. Odcinek o końcach $A = (3, 2)$ i $B = (2, -1)$ jest krótszą podstawą trapezu $ABCD$. Wiedząc, że punkt $M = (1, 1)$ jest środkiem dłuższej podstawy oraz, że $|CD| = 2|AB|$ oblicz współrzędne wierzchołków C i D .

- 7.40. Wykaż, że prosta zawierająca środki przekątnych trapezu $ABCD$ jest równoległa do podstaw AB i CD , gdy:

- a) $A = (-4, 0)$, $B = (14, -6)$, $C = (8, 4)$, $D = (2, 6)$,
 b) $A = (-6, 4)$, $B = (6, 0)$, $C = (4, 4)$, $D = (-2, 6)$.

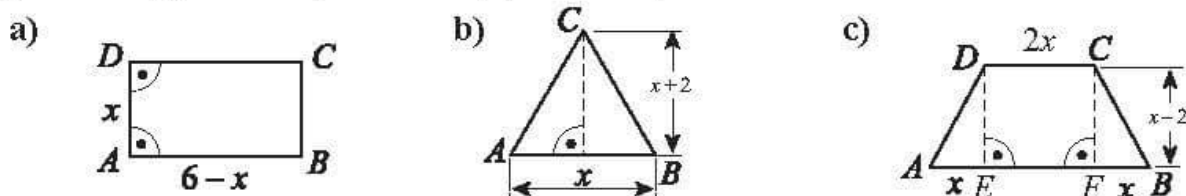
- 7.41. Punkty $A = (2, -3)$ i $C = (5, 1)$ są wierzchołkami trapezu $ABCD$. Wiedząc, że prosta zawierająca podstawę CD trapezu ma równanie $x + 2y - 7 = 0$, a prosta zawierająca odcinek łączący wierzchołek A ze środkiem podstawy CD ma równanie $5x - y - 13 = 0$, oblicz współrzędne wierzchołka D trapezu.

Rozwiązywanie zadań optymalizacyjnych z planimetrii

Optymalizacja to wyznaczenie spośród dopuszczalnych rozwiązań danego problemu takiego rozwiązania, które jest najlepsze ze względu na przyjęte kryterium.

W klasie pierwszej obliczaliście optymalne (największe albo najmniejsze) wartości funkcji w ograniczonym przedziale. Obecnie zajmiemy się obliczaniem najmniejszych lub największych wymiarów figur płaskich poprzez tworzenie funkcji, której zmienną będzie jeden z wymiarów figury.

Ćwiczenie 40. Przyjmując oznaczenia i dane, jak na rysunku poniżej, wyraż pole P figury jako funkcję zmiennej x i określ jej dziedzinę.



Przykład 16. Suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest równa 10. Przekątne te przecinają się pod kątem 60° . Jakie powinny być długości tych przekątnych, by pole czworokąta było największe? Czy taki czworokąt jest tylko jeden?

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku,

gdzie $|AC| = x$ i $|BD| = 10 - x$.

Zatem $P = \frac{1}{2} \cdot x(10 - x) \cdot \sin 60^\circ$

$$P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \alpha$$

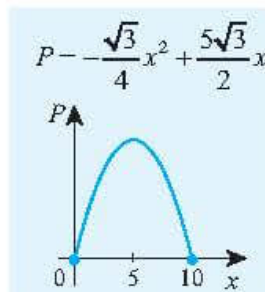
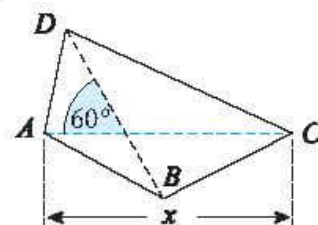
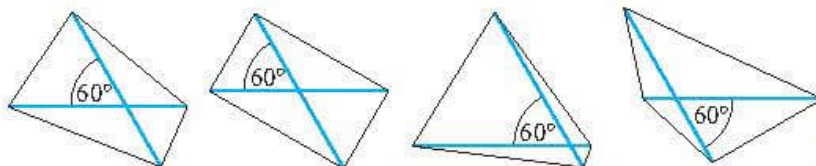
$$P(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x(10 - x), \text{ gdzie } x \in (0; 10). \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pole P jest funkcją kwadratową zmiennej x o ujemnym współczynniku przy x^2 , której wzór podany jest w postaci iloczynowej, gdzie $x_1 = 0$ i $x_2 = 10$.

Funkcja P przyjmuje największą wartość, gdy x jest równe współrzędnej x_W wierzchołka paraboli.

$$x_W = \frac{x_1 + x_2}{2} = 5 \text{ i } 5 \in (0; 10), \text{ więc przekątne czworokąta mają długości } |AC| = |BD| = 5.$$

Zauważamy, że czworokątów spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele. Oto przykłady kilku z nich.



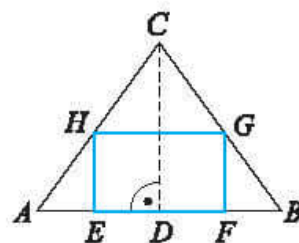
Ćwiczenie 41. Suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest równa 40. Przekątne te przecinają się pod kątem 30° . Oblicz, dla jakich długości przekątnych pole tego czworokąta jest największe, a następnie oblicz wartość tego największego pola.

Przykład 17. Z trójkąta równobocznego, którego bok ma długość 8, wycięto prostokąt w ten sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na jednym boku trójkąta. Oblicz, jakie powinny być długości boków prostokąta, aby jego pole było największe.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, gdzie $|HE| = x$, $|EF| = y$ i $0 < |HE| < |CD|$.

Odcinek CD jest wysokością trójkąta równobocznego ABC , więc $|CD| = 4\sqrt{3}$. Zatem $x \in (0; 4\sqrt{3})$.



Dane: $|AB| = |BC| = |AC| = 8$. **Obliczyć:** wymiary prostokąta $EFGH$, którego pole jest największe.

$$|AD| = \frac{1}{2}|AB| = 4, \quad |AE| = 4 - \frac{1}{2}y \quad \text{i} \quad \triangle ADC \sim \triangle AEH \quad (\text{kkk}),$$

$$\text{więc } \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|HE|}{|AE|}, \quad \text{czyli } \frac{4\sqrt{3}}{4} = \frac{x}{4 - \frac{1}{2}y}, \quad \text{skąd } y = 8 - \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

Obliczamy pole P prostokąta $EFGH$.

$$P = xy = x \left(8 - \frac{2}{\sqrt{3}}x \right), \quad \text{gdzie } x \in (0; 4\sqrt{3}).$$

$$\text{Pole } P \text{ jest funkcją zmiennej } x, \text{ czyli } P(x) = x \left(8 - \frac{2}{\sqrt{3}}x \right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + 8x.$$

Zauważamy, że P jest funkcją kwadratową o ujemnym współczynniku przy x^2 , zatem funkcja P przyjmuje wartość największą, gdy

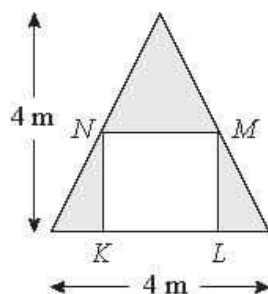
$$x_w = \frac{-8}{2 \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right)} = 2\sqrt{3} \quad \text{i} \quad 2\sqrt{3} \in (0; 4\sqrt{3}).$$

$$x_w = -\frac{b}{2a}$$

$$\text{Gdy } x = 2\sqrt{3}, \text{ to } y = 8 - \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4.$$

Odp.: Największe pole ma prostokąt, którego boki mają długości $2\sqrt{3}$ i 4.

Ćwiczenie 42. Szczytowa ściana strychu ma kształt trójkąta równoramiennego o podstawie 4 m i wysokości 4 m. Architekt dbając o to, by strych był dobrze oświetlony, zaprojektował okno w kształcie prostokąta, umieszczone w tej ścianie w sposób przedstawiony na rysunku. Podaj wymiary okna, które będzie przepuszczało najwięcej światła.



Odpowiedzi do ćwiczeń

40. a) $P(x) = x \cdot (6 - x)$, $x \in (0; 6)$, b) $P(x) = \frac{1}{2}x \cdot (x + 2)$, $x \in (0; +\infty)$, c) $P(x) = 3x \cdot (x - 2)$, $x \in (2; +\infty)$.

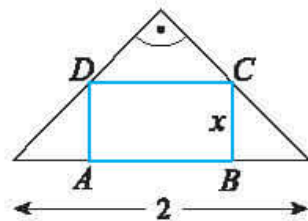
41. Przekątne mają taką samą długość, równą 20, $P = 100$.

42. Okno ma kształt kwadratu o boku 2 m.

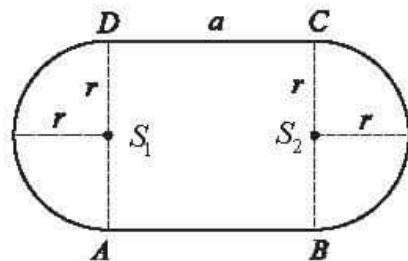
Zadania utrwalające

- 7.42. Z drutu o długości 4 dm wykonano prostokątną ramkę. Jakie powinny być wymiary ramki, aby pole obszaru ograniczonego ramką było największe?
- 7.43. Szyba w oknie ma kształt prostokąta o obwodzie 6 m. Jakie są jej wymiary, jeśli wiadomo, że szyba przepuszcza maksymalną ilość światła? Oblicz powierzchnię szyby w oknie.
- 7.44. Ogródek w kształcie prostokąta, przylegający do płotu, jest z trzech stron ogrodzony siatką o długości 36 m. Jakie są wymiary ogródka, jeśli wiadomo, że jego pole powierzchni jest największe?
- 7.45. W prostokącie o wymiarach $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ pierwszy wymiar zwiększono o $x \text{ cm}$, a drugi zmniejszono o $x \text{ cm}$. Oblicz, dla jakiej wartości x pole otrzymanego prostokąta jest największe. Oblicz to największe pole.

- 7.46. Z trójkąta równoramiennego prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 2 dm wycięto prostokąt $ABCD$, którego bok AB zawiera się w przeciwprostokątnej, natomiast punkty C i D należą do przyprostokątnych tego trójkąta. Oblicz wymiary tego prostokąta o największym polu.



- 7.47. Na rysunku przedstawiono kształt projektowanego stadionu o obwodzie 1 400 m. Wyznacz takie wymiary r i a , dla których powierzchnia prostokątnej części stadionu będzie największa.



- 7.48. Długość 100 cm przecięto na dwie części. Pierwszą część wygięto tak, że utworzyła ramkę w kształcie kwadratu, z drugiej części utworzono ramkę w kształcie prostokąta, w którym jeden bok jest cztery razy dłuższy od drugiego. Oblicz długość każdej z części drutu, jeśli wiadomo, że suma pól powstałych figur ograniczonych ramkami jest minimalna.
- 7.49. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 45° , a suma długości wysokości i dłuższej podstawy jest równa 12. Oblicz długości boków tego trapezu, wiedząc, że jego pole ma największą z możliwych wartości.
- 7.50. Suma przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 6. Oblicz najmniejszą długość przeciwprostokątnej, jaką może mieć ten trójkąt.



Zestaw powtórkowy

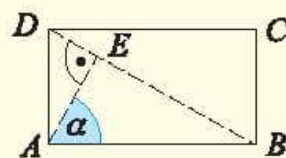
- W rombie przekątne mają długość 8 i 12.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Długość boku tego rombu jest równa:
A. $\sqrt{13}$, B. $2\sqrt{13}$, C. $3\sqrt{13}$, D. $4\sqrt{13}$.
- Boki równoległoboku mają długości 5 i 7, a wysokość poprowadzona na dłuższy bok ma długość 3.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Druga wysokość tego równoległoboku jest równa:
A. 2,1, B. 4,1, C. 4,2, D. 6,2.
- Kąt rozwarty rombu ma miarę 135° . Pole tego rombu jest równe $36\sqrt{2}$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Bok rombu ma długość:
A. $3\sqrt{3}$, B. 6, C. $6\sqrt{2}$, D. $12\sqrt{2}$.
- W równoległoboku $ABCD$ dwusieczna kąta rozwartego ABC dzieli bok CD w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka C .
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Jeśli bok $|BC|$ ma długość 6, to obwód tego równoległoboku jest równy:
A. 15, B. 20, C. 24, D. 30.

5. W prostokącie $ABCD$ przekątna BD jest dwa razy dłuższa niż bok AD .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta α jest równa

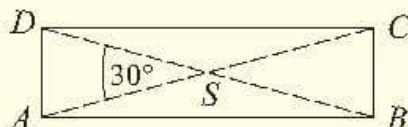
- A. 30° , B. 45° , C. 60° , D. 75° .



6. W prostokącie $ABCD$ przekątne mają długość 12.

Czy pole tego prostokąta jest równe $18(1+\sqrt{3})$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.



T	Tak,		A.	$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 36.$
N	Nie,	ponieważ	B.	$P_{\triangle ASD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ = 9$ i $P_{\triangle DSC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 150^\circ = 9\sqrt{3},$ więc $P_{ABCD} = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 9\sqrt{3} = 18(1 + \sqrt{3}).$

7. W równoległoboku $ABCD$ przekątna DB ma długość 7. Wiedząc, że obwód równoległoboku wynosi 26, $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$. Czy boki a i b równoległoboku $ABCD$ mają długość 8 i 5?

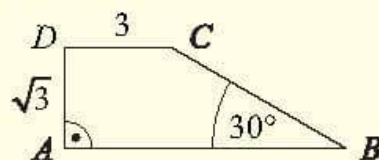
Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,		A.	$a + b = 13$ i $ \sphericalangle BAD = 60^\circ.$ $49 = a^2 + (13 - a)^2 - 2a(13 - a) \cdot \cos 60^\circ$, skąd $a \neq 8$ i $a \neq 5.$
N	Nie,	ponieważ	B.	$a + b = 13$ i $ \sphericalangle BAD = 60^\circ.$ $49 = a^2 + (13 - a)^2 - 2a(13 - a) \cdot \cos 60^\circ$, skąd $a = 8$ i $b = 5$ lub $a = 5$ i $b = 8.$

8. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Pole trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku jest równe:

- A. $4\sqrt{3}$, B. $4,5\sqrt{3}$,
C. $6\sqrt{3}$, D. $6,5\sqrt{3}$.



9. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Obwód rombu o przekątnych długości 12 i 16 jest równy:

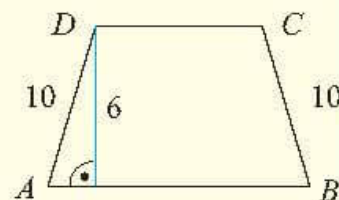
- A. 40, B. 48, C. 56, D. 64.

10. Pole trapezu przedstawionego na rysunku jest równe 120.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód tego trapezu jest równy:

- A. 42, B. 46,
C. 60, D. 68.



11. Pole pewnego rombu o boku długości a jest większe od połowy pola kwadratu o boku a .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ostrego tego rombu nie może być równa:

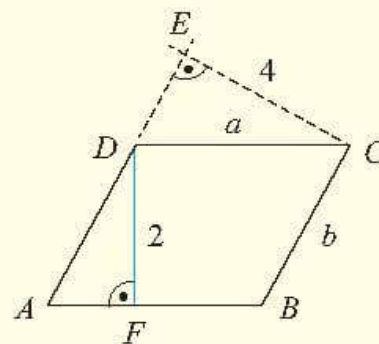
- A. 30° , B. 45° , C. 60° , D. 75° .

12. Wysokości równoległoboku $ABCD$ mają długości 2 i 4, a jego obwód jest równy 30.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Boki tego równoległoboku mają długości:

- A. 3 i 2, B. 4 i 11,
C. 5 i 10, D. 6 i 9.



13. Przekątna prostokąta ma długość d , a kąt między przekątnymi ma miarę α .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego prostokąta określone jest wzorem:

- A. $d^2 \sin \alpha$, B. $\frac{1}{2}d^2$, C. $\frac{1}{2}d^2 \sin \alpha$, D. $\frac{1}{2}d \sin \alpha$.

14. Bok rombu ma długość $\sqrt{2}$, a jego pole jest równe 1.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt ostry tego rombu ma miarę:

- A. 30° , B. 45° , C. 60° , D. 75° .

Odpowiedzi i wskazówki

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym

1.1. a) 5, b) $-\frac{1}{12}$, c) $\frac{7}{4}$, d) 2, e) 125, f) 10,5.

1.2. a) -3, b) $m^3 - n$, c) 10, d) 4, e) $a - b$, f) $\sqrt{3} + \sqrt{a}$.

1.3. a) „>”, b) „>”, c) „>”, d) „=”. *Wskazówka.* b) $3^{22} > 3^{17}$, c) $5^{\frac{74}{3}} > 5^{18}$.

1.4. a) $a^{\frac{3}{4}}$, b) $a^{-4\sqrt{2}}$, c) 1, d) $\left(\frac{3}{2}\right)^x$, e) $a \cdot b^{-1}$, f) a^9 , g) 2^{x+1} .

1.6. a) $2^{\sqrt{2}+1}$, b) $2^{2\sqrt{2}}$, c) 2^2 , d) $2^{2-2\sqrt{2}}$, e) $2^{\sqrt{2}-1}$, f) $2^{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}$, g) $2^{2\sqrt{2}}$, h) $2^{4\sqrt{2}-2}$.

1.7. a) 2, b) $\frac{1}{3}$, c) 2, d) 9, e) $\frac{1}{8}$, f) 8.

1.8. a) $8 - 2\sqrt{15}$, b) $\frac{1}{8}$, c) 729.

1.10. a) $3^{2,5\sqrt{2}+2}$, b) 2^{46} , c) $6^{-\frac{23}{4}}$, d) $10^{-\frac{295}{16}}$.

1.11. a) 36,5, b) 6,7, c) 2,7, d) 6,1, e) 36,6.

1.12. *Wskazówka.* $8\sqrt{m} = 8 \cdot m^{\frac{1}{2}} = 8 \cdot \left(4^{\sqrt{3}+2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^3 \cdot \left[\left(2^2\right)^{\sqrt{3}+2}\right]^{\frac{1}{2}} = 2^3 \cdot 2^{\sqrt{3}+2}$.

Funkcja wykładnicza i jej własności

1.13. a) $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$, $(0,1)$, $(1,4)$, b) $(-1,4)$, $(0,1)$, $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, c) $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$, $(0,1)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$,

d) $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$, $(0,1)$, $\left(1, \frac{2}{5}\right)$.

1.14. a) $a = \frac{3}{5}$, funkcja malejąca, b) $a = \frac{5}{3}$, funkcja rosnąca, c) $a = 1\frac{2}{3}$, funkcja rosnąca,

d) $a = \frac{3}{5}$, funkcja malejąca.

1.15. a) $x \geq 0$, b) $x \leq 0$, c) $x > 0$.

1.16. a) $3^{-2\sqrt{2}} < 3^{-\frac{11}{4}} < 3^0 < 3^{\frac{1}{2}} < 3^{2\pi}$, b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{\pi}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$,

c) $6^{-\sqrt{6}} < 6^{-2} < 6^{-\sqrt{3}} < 6^2 < 6^{\sqrt{6}}$, d) $(0,2)^{\frac{1}{2}} < (0,2)^{-\frac{1}{2}} < (0,2)^{-\sqrt{7}} < (0,2)^{-4}$.

1.17. a) $D_f = \mathbf{R}$, $Y_f = \mathbf{R}^+$, $(0, 1)$, $D_g = \mathbf{R}$, $Y_g = \mathbf{R}^+$, $(0, 1)$,

b) **1** $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 2^x$, gdy $x < 0$, **2** $\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 2^x$, gdy $x \geq 0$.

1.18. a) $D_f = \mathbf{R}$, $Y_f = \mathbf{R}^+$, $(0, 1)$, $D_g = \mathbf{R}$, $Y_g = \mathbf{R}^+$, $(0, 1)$,

b) **1** $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^x$, gdy $x \geq 0$, **2** $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x$, gdy $x < 0$.

1.19. a) $f(-2) = \frac{1}{4}$, $f(0) = 1$, $f(\log_2 5) = 5$, b) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}}$, $f(2\log_3 4) = 16$,

c) $f(-2) = 25$, $f(\log_5 3) = \frac{1}{3}$, $f\left(\log_5 \frac{1}{12}\right) = 12$, d) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$, $f(\log_2 3) = \frac{1}{9}$, $f(\log_4 7) = \frac{1}{7}$.

Wskazówka. c), d) Skorzystaj z wzoru $a^{\log_a b} = b$.

1.20. a) $x = 4$, b) $x = -4$, c) $x = -3$, d) $x = 6$, e) $x = 3 + \log_2 3$, f) $x = 4 + \log_3 5$.

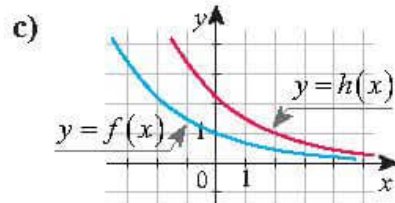
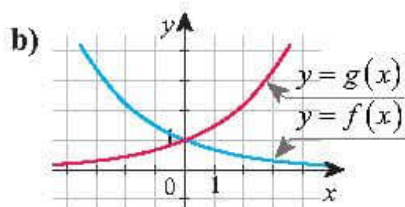
Wskazówka. e) $\log_2 24 = \log_2 (2^3 \cdot 3) = \log_2 2^3 + \log_2 3$.

1.21. a) $x = \frac{3}{2}$, b) $x = -6$, c) $x = \frac{2}{3}$, d) $x = -4$, e) $x = -\frac{3}{2}$, f) $x = -2 + \log_{0.1} 2$.

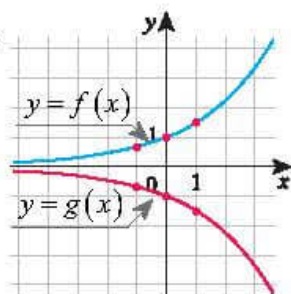
1.22. a) $m > 0$, b) $m > 1$, c) $m < 2$, d) $m > 3$, e) $m > -5$, f) $m \neq 0$.

Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej

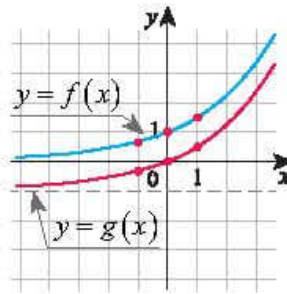
1.23. a) $a = \frac{2}{3}$,



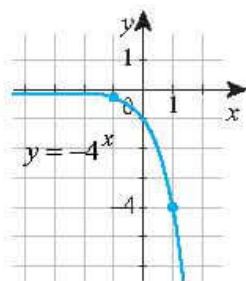
1.24. a) $Y_g = (-\infty; 0)$



b) $Y_g = (-1; +\infty)$

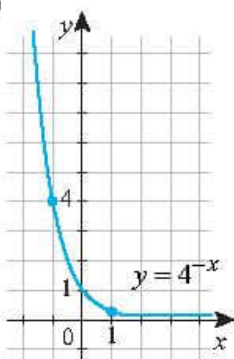


1.25. a)



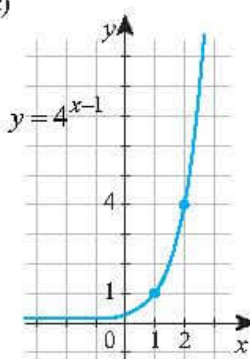
funkcja jest malejąca

b)



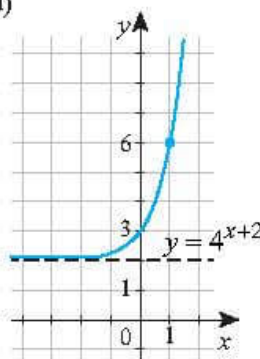
funkcja jest malejąca

c)



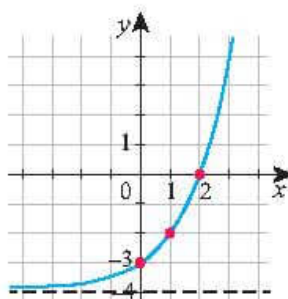
funkcja jest rosnąca

d)



funkcja jest rosnąca

1.26. a)



b) nie,

c) $x = 2$,d) $x = 1$.

1.27. Wskazówka: a) $f(x) = 3^{x-1}$, $f(0) = \frac{1}{3}$,
 b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$, $f(0) = \frac{1}{3}$, c) $f(x) = 2^{x-2}$, $f(0) = \frac{1}{4}$,
 d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$, $f(0) = 8$, e) $f(x) = 2^{x+4}$, $f(0) = 16$,
 f) $f(x) = (1,5)^{x-1}$, $f(0) = \frac{2}{3}$.

1.28. Wykres funkcji f : a) przekształcono symetrycznie względem osi y , b) przekształcono symetrycznie względem osi y , c) przekształcono symetrycznie względem osi y , d) przesunięto równolegle wzdłuż osi x o 2 jednostki w prawo, e) przesunięto równolegle wzdłuż osi x o 6 jednostek w lewo, f) przesunięto równolegle wzdłuż osi y o 4 jednostki w dół.

1.29. a) $(0,1)$, b) $(0,1)$, c) $(0,1)$, d) $(0,1)$. 1.30. a) $(-3,2)$, b) $\left(2, \frac{1}{3}\right)$, c) $(2,5)$, d) $\left(-1, \frac{1}{10}\right)$.

1.31. a) $x = -1$, b) $x = -1$, c) $x = -6$, d) $x = 0$. 1.32. a) $x = 0$, b) $x = -\frac{4}{3}$, c) $x = 0$, d) $x = -\frac{7}{3}$.

1.33. 1 - C, 2 - D, 3 - B, 4 - A.

Funkcja wykładnicza w zastosowaniach

1.34.

Nazwa towaru	Obecna cena	Wskaźnik rocznego wzrostu ceny	Cena po t latach
prześcieradło	29 zł	2%	$29 \cdot (1,02)^t$
samochód	32 000 zł	10%	$32\,000 \cdot (1,10)^t$
żyrandol	270 zł	7%	$270 \cdot (1,07)^t$

1.35.

Obecna wielkość populacji	Czas podwojenia	Wzrost populacji po t latach
1 000	10 lat	$1\,000 \cdot 2^{0,1t}$
1 000 000	25 lat	$1\,000\,000 \cdot 2^{0,04t}$
250 000	100 lat	$250\,000 \cdot 2^{0,01t}$

1.36.

Pierwiastek promieniotwórczy	Czas połowicznego rozpadu	Obecna ilość materiału radioaktywnego	Wielkość materiału radioaktywnego po czasie t
ołów: ^{210}Pb	22 lata	10	$10 \cdot (0,5)^{\frac{t}{22}}$ lat
polon: ^{210}Po	140 dni	100	$100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{140}}$ dni
tal: ^{209}Tl	2 minuty	500	$500 \cdot (0,5)^{0,5t}$ minut

1.37. a) 400, b) 102 400, c) $100 \cdot 2^{48}$.1.38. a) $y = 1000\,000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^t$, b) $y(3) = 1\,953\,125$.

1.39. a) Ok. 11576, b) 2 miesiące.

1.40. a) 30 000 zł, b) 10%, c) 24 300 zł, d) po 41 latach.

1.41. a) 100°C , b) ok. 67°C , c) tak, bo garnek z zupą osiągnie temperaturę ok. 30°C .

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Odpowiedź	B	B	A	D	C	B	Kolejno: P, P, P, F	Kolejno: F, P, F	N – A

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm i jego własności

2.1. a) -3, b) -5, c) $\frac{5}{3}$, d) $\frac{3}{4}$, e) $\frac{5}{3}$, f) 2.2.2. a) 15, b) 30, c) $\frac{8}{3}$, d) $\frac{32}{3}$.2.3. a) $x = -4$, b) $x = \frac{13}{8}$, c) $x = \sqrt{3}$, d) $x = \frac{\sqrt{2}}{32}$, e) $x = 8$, f) $x = \frac{1}{4}$.2.4. a) $x = 5$, b) $x = 25$, c) $x = 64$, d) $x = 81$.2.5. a) $\log_3 135$, b) $\log_{0,5} 10$, c) $\log_2 (6\sqrt{5})$.2.6. a) $a+1$, b) $1-a$, c) $3a+1$, d) $1-3a$. Wskazówka. a) $\log 20 = \log(10 \cdot 2)$, b) $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right)$,c) $\log 80 = \log(2^3 \cdot 10)$, d) $\log \frac{5}{4} = \log \frac{10}{8} = \log 10 - \log 8 = 1 - \log 2^3 = 1 - 3 \log 2$.2.7. a) $(0; 1)$, b) $(1; 2)$, c) $(2; 3)$, d) $(-2; -1)$, e) $(1; 2)$. Wskazówka. Zauważ, że:a) $\log_7 1 < \log_7 2 < \log_7 7$, stąd $0 < \log_7 2 < 1$, czyli $\log_7 2 \in (0; 1)$,b) $\log_5 5 < \log_5 15 < \log_5 25$, skąd $1 < \log_5 15 < 2$, c) $\log_7 7^2 < \log_7 120 < \log_7 7^3$, skąd $\log_7 120 \in (2; 3)$,

d) $\log_3 \frac{1}{9} < \log_3 \frac{2}{7} < \log_3 \frac{1}{3}$, skąd $\log_3 \frac{2}{7} \in (-2; -1)$,

e) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} < \log_{\sqrt{3}} \sqrt{5} < \log_{\sqrt{3}} 3$, skąd $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5} \in (1; 2)$.

2.8. Wskazówka. a) $\log_3 128 - 3 \log_3 4 = \log_3 \frac{128}{4^3}$, b) $1 + \log_2 5 = \log_2 2 + \log_2 5$.

Funkcja logarytmiczna i jej własności

2.9. a) Tak, b) tak, c) tak.

2.10. a) $f(x) = 2^x$, b) $f(x) = \log_2 x$, c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, e) $f(x) = (\sqrt{2})^x$,

f) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$. **Wskazówka.** a) $a^1 = 2$, b) $\log_a 2 = 1$, c) $a^{-1} = 2$, d) $\log_a 3 = -1$, e) $a^2 = 2$,

f) $\log_a 2 = 2$.

2.11. a) $a = 4$, b) $a = 9$, c) $a = 4$, d) $a = 2$, e) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, f) $a = 125$.

2.12. a) $\log_4 0,1$, $\log_4 \frac{1}{3}$, $\log_4 3$, $\log_4 5$, b) $\log_{\frac{1}{4}} 5$, $\log_{\frac{1}{4}} 3$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3}$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$,

c) $\log_{\frac{1}{3}} 4$, $\log_{0,1} 4$, $\log_5 4$, $\log_3 4$, d) $\log_3 \frac{1}{4}$, $\log_5 \frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$.

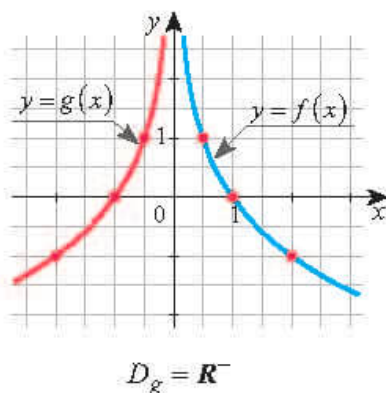
2.13. Np. a) $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, $\left(\frac{4}{3}, -1\right)$, $(1, 0)$, b) $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(4, 4)$, c) $(12, 2)$, $(144, 4)$, $(1, 0)$,

d) $(2, 3)$, $(4, 6)$, $(8, 9)$.

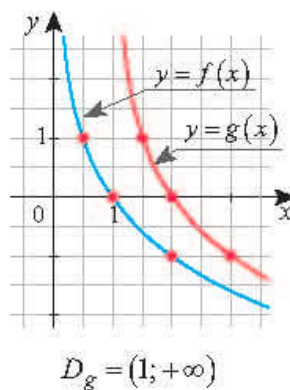
2.14. a) $D_f = (-\infty; 0)$, b) $D_f = (-2; +\infty)$, c) $D_f = (5; +\infty)$.

Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

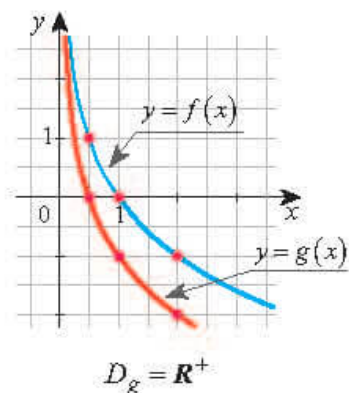
2.15. a)



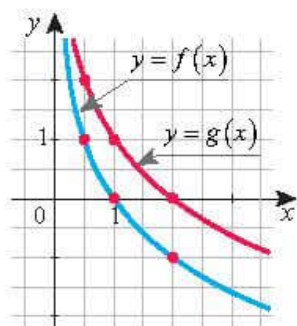
b)



c)

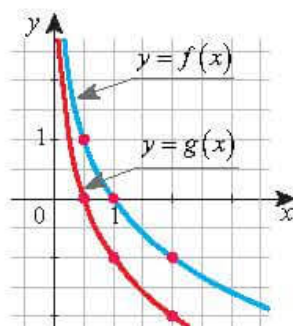


d)



$$D_g = \mathbb{R}^+$$

e)

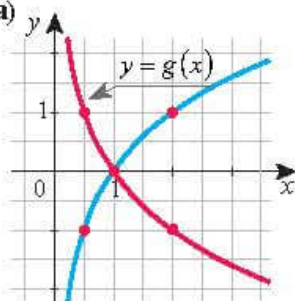


$$D_g = \mathbb{R}^+$$

Wskazówka. d) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}}x = 1 + \log_{\frac{1}{2}}x$,

e) $g(x) = f(2x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x) = \log_{\frac{1}{2}}2 + \log_{\frac{1}{2}}x = -1 + \log_{\frac{1}{2}}x$.

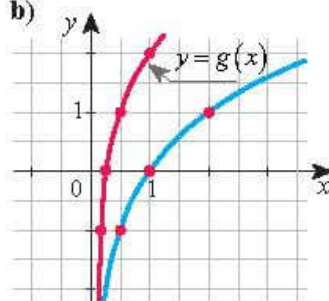
2.16. a)



$$D_g = \mathbb{R}^+,$$

$$g(x) = 0, \text{ gdy } x = 1.$$

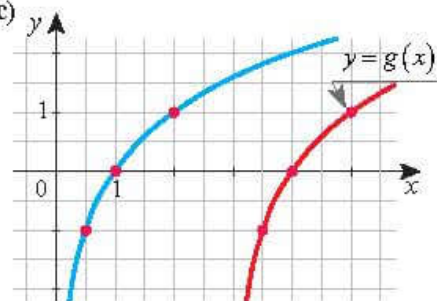
b)



$$D_g = \mathbb{R}^+,$$

$$g(x) = 0, \text{ gdy } x = \frac{1}{4}.$$

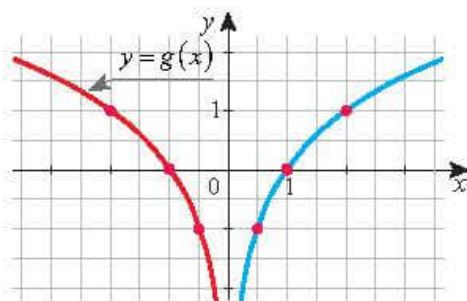
c)



$$D_g = (3; +\infty),$$

$$g(x) = 0, \text{ gdy } x = 4.$$

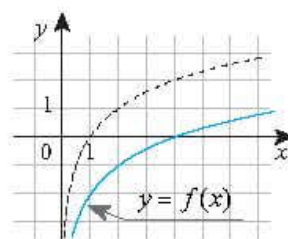
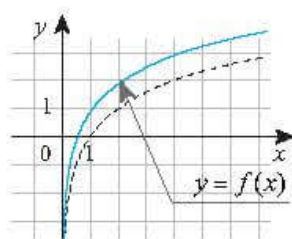
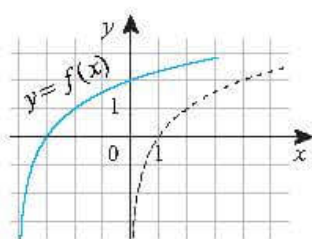
d)



$$D_g = \mathbb{R}^-,$$

$$g(x) = 0, \text{ gdy } x = -1.$$

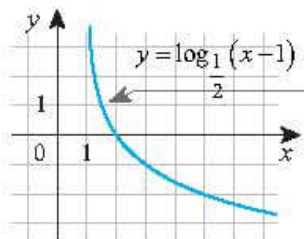
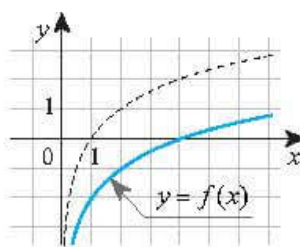
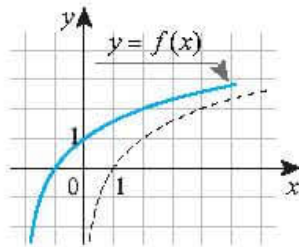
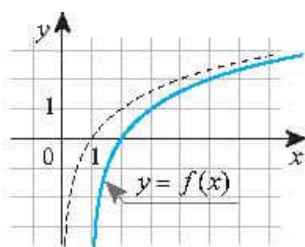
2.17. a) $f(x) = \log_2(x+4)$, b) $f(x) = \log_2(2x)$, c) $f(x) = \log_2\frac{x}{4}$,



d) $f(x) = \log_2(x-1)$,

e) $f(x) = \log_2(x+2)$,

f) $f(x) = \log_2 x - 2$.



2.18. a) $D_f = (1; +\infty)$, b) $Y_f = \mathbb{R}$, c) $x = 5$, d) $x \in (1; 3)$.

2.19. a) $f(x) = \log_3 x + 2$, b) $f(x) = \log_3 x + 4$, c) $f(x) = \log_3 x$, d) $f(x) = \log_3 x - \frac{5}{2}$.

2.20. a) $f(x) = 3\log_2 x + 1$, b) $f(x) = 6\log_2 x - 5$. *Wskazówka.* Utwórz i rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} a \cdot \log_2 2 + b = 4 \\ a \cdot \log_2 8 + b = 10 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} a + b = 4 \\ 3a + b = 10 \end{cases}, \text{ b) } \begin{cases} a \cdot \log_2 \sqrt{2} + b = -2 \\ a \cdot \log_2 4\sqrt{2} + b = 10 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} \frac{1}{2}a + b = -2 \\ \frac{5}{2}a + b = 10 \end{cases}.$$

Funkcja logarytmiczna w zastosowaniach

2.21. 4,9. 2.22. a) $\text{pH} \approx 2,9$, b) $10^{-6,6}$.

2.23. a) 10^3 razy (1000 razy), b) 10^6 razy (milion razy).

2.24. a) $A = 10^{-2}$ cm, b) $A = 1$ cm, c) $A = 10^{0,7}$ cm, $A \approx 5$ cm, d) $A = 10^{5,5}$ cm, $A \approx 316\,000$ cm, e) $A = 10^5$ cm.

2.25. Głośność dźwięku wzrośnie o $10\log 3$, czyli o około 4,17 decybeli.

Wskazówka. $L(3I) - L(I) = 10\log \frac{3I}{I_0} - 10\log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log \left(\frac{3I}{I_0} : \frac{I}{I_0} \right)$.

2.26. a) Nie, b) nie.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Odpowiedź	A i D	D	C	B	D	P, P, P, F

3. Ciągi liczbowe określone wzorem ogólnym i rekurencyjnym

Pojęcie ciągu liczbowego. Przykłady i sposoby określania ciągu

3.1. a) $1024 \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} 512 \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \dots, 64, 32$, b) $52 \xrightarrow{-4} 48 \xrightarrow{-4} \dots, 36, 32$,

c) $-3 \xrightarrow{\cdot (-2)} 6 \xrightarrow{\cdot (-2)} \dots, -48, 96$,

d) $21 \xrightarrow{+4} 25 \xrightarrow{+3} 28 \xrightarrow{+2} 30 \xrightarrow{+1} 31 \xrightarrow{+0} 31$.

3.2. a) 30, 31, b) $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$. Wskazówka. a) $21+4, 25+3, 28+2, \dots$, b) $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \dots$

3.3. a) $D = \{1, 2, \dots, 12\}$, b) $(5, 5, 5, 5, 3, 2, 1, 0, -3, -3, -3, -3)$.

3.4. a) Tak, b) nie, c) 244 i 245. Wskazówka.

Kwartał	I	II	III	IV
Liczba dni w roku zwykłym	90	91	92	92
Liczba dni w roku przestępnym	91	91	92	92

3.5. a) $(0, 3, 8, 15, 24, \dots)$, b) $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots\right)$, c) $(1, 3, 6, 10, 15, \dots)$, d) $(-4, 16, -64, 256, -1024, \dots)$,

e) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots\right)$, f) $(-2, 5, -10, 17, -26, \dots)$.

3.6. a) 1, 4, 9, 16, $a_n = n^2$, b) 1, 8, 27, 64, $a_n = n^3$. 3.7. $a_n = \frac{n}{n+1}$, gdy $n \in \mathbb{N}^+$.

3.8. Podpunkty a), c), d), f) – nie, b) tak, $a_{24} = 100$, e) tak, $a_2 = 100$.

3.9. Nie, np. $a_3 = 80$.

3.10. a) a_1, a_2 , b) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , c) nie ma ujemnych wyrazów,

d) wszystkie wyrazy ciągu są ujemne, e) a_1, a_2 , f) $a_5, a_6, a_7, \dots$

3.12. a) a_4 , b) brak takiego wyrazu, c) brak takiego wyrazu, d) a_2 .

3.13. a) a_1, a_3 , b) a_1 , c) a_1, a_2, a_5, a_{10} . 3.14. a) $a_n = 3n - 2$, b) $a_n = n$, c) $a_n = 10 - 2n$.

3.15. $a_{12} = 265$.

Ciąg określony rekurencyjnie

3.16. a) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = -1, a_5 = 1$, b) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 6, a_5 = 24$, c) $a_1 = 1$,

$a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 24, a_5 = 120$, d) $a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{9}{16}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{15}{32}, a_5 = \frac{9}{20}$.

$$3.17. \text{ a) } \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 4 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^+, \quad a_5 = 140, \quad \text{ b) } \begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}^+, \quad a_5 = \frac{\sqrt{2}}{16},$$

$$\text{c) } \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = 2(a_{n+1} + a_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}^+, \quad a_5 = 16.$$

3.18. 10.

$$3.19. \text{ a) } a_n = n^2, \quad \text{ b) } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases}$$

$$3.20. \text{ a) } a_n = 3n + 1, \quad \text{ b) } a_n = 5 - 2n, \quad \text{ c) } a_n = 10n, \quad \text{ d) } a_n = (-1)^{n+1} \cdot \sqrt{5}, \quad \text{ e) } a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^{(-1)^n},$$

$$\text{ f) } a_n = 2^{3^{n-1}}.$$

$$3.21. \text{ a) } \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^+, \quad \text{ b) } \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^+, \quad \text{ c) } \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}^+.$$

Monotoniczność ciągu liczbowego

3.22. $(0, 4, 0, 8, 0, 12)$, ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

$$3.23. \text{ a) } a_{n+1} = n^2 + 2n, \quad \text{ b) } a_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2, \quad \text{ c) } a_{n+1} = \frac{3n+3}{n+2}, \quad \text{ d) } a_{n+1} = -n^2 + n + 2,$$

$$\text{ e) } a_{n+1} = \frac{-3n-1}{n+2}, \quad \text{ f) } a_{n+1} = \frac{-n^2-2n}{2n^2+4n+2}.$$

3.24. Ciąg (a_n) jest: a) malejący, b) rosnący, c) rosnący, d) rosnący.

3.25. a) $(3, 6, 7, 12, 11, 18, 15, 24, 19, 30)$, b) ciąg nie jest monotoniczny, bo np. $a_3 > a_2$ i $a_5 < a_4$.

3.26. a) $(5, 5, 5, 4, 3, 2, 1, -2, -3, -4, -5, -5)$, b) ciąg jest nierosnący, a więc jest monotoniczny.

3.27. *Wskazówka.* Ciąg (a_n) jest: a) malejący, b) rosnący, c) rosnący, d) malejący, e) rosnący, f) rosnący.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Odpowiedź	C	D	B	C	Kolejno: P, F, P, F	A	C	C	C	A	C	A	A

Wskazówki.

$$9. \text{ Rozwiąż równanie } n^2 - 4n + 3 = 0. \quad 11. a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{2} - \frac{n-1}{2}. \quad 12. a_5 = S_5 - S_4 = 2^5 - 2^4.$$

$$13. a_8 = \log_2 8 + \log_8 8.$$

4. Ciągi arytmetyczne i geometryczne, w tym lokaty i kredyty

Pojęcie ciągu arytmetycznego

4.1. a) Tak, b) nie, c) tak, d) tak.

4.2. Kolejno: a) 13, 17, b) -20, -48, c) 13, 5, -3, d) $-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5}$.

4.3. a) $a_n = 4n + 1$, b) $b_n = 17 - 7n$, c) $c_n = \sqrt{2}(n - 2)$, d) $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}(2 - n)$.

4.4. a) $a_1 = 3, r = 15$, b) $a_1 = -11, r = -14$, c) $a_1 = 2, r = -6$, d) $a_1 = 7, r = 3$.

4.5. $a_n = n^2$

a_1	r	n	a_n
3	2	20	41
63	$-2\frac{1}{3}$	16	28
-200	8	15	-88
0,5	0,5	21	10,5

4.6. $a_1 = -5, a_8 = 9$.

4.7. Ciągi arytmetyczne: a_n, e_n, f_n, h_n .

4.8. a) a_8 , b) a_{143} , c) a_2 .

4.9. a) $a_6 = 12, a_{12} = 30$, b) $a_{20} = 21, a_{40} = 1$, c) $a_1 = 16, a_{100} = -182$, d) $a_5 = \log \frac{1}{4}, a_{10} = \log 8$.

4.10. a) $a_9 = -3$, b) $a_{20} = -2$, c) $a_{10} = 49$, d) $a_1 = -3$.

4.11. Liczby, które: a) przy dzieleniu przez 7 dają resztę 1, b) przy dzieleniu przez 6 dają resztę 3, c) przy dzieleniu przez 6 dają resztę 3, d) przy dzieleniu przez 9 dają resztę 7, e) przy dzieleniu przez 9 dają resztę 7, f) przy dzieleniu przez 8 dają resztę 5.

4.12. a) Tak, b) nie, c) tak.

4.13. Wyrazy: $a_{101}, a_{102}, a_{103}, a_{104}$.

4.14. Wskazówka. Zauważ, że $a_1 = 10$ i $r = 2$, więc $a_n = 10 + (n - 1) \cdot 2$.

4.15. Nie. Wskazówka. $a_7 = \frac{22}{9}, a_{21} = \frac{64}{23}, a_{24} = \frac{73}{26}$ i $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$.

4.16. Wskazówka. Sprawdź, czy $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą.

Własności ciągu arytmetycznego

4.17. Wskazówka. $r = -\frac{1}{2}$.

4.18. $r = -1$, ciąg malejący.

4.19. a) $\begin{cases} a_1 = 26 \\ r = -4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} a_1 = 9,5 \\ r = -0,5 \end{cases}$, c) $\begin{cases} a_1 = -18 \\ r = 2 \end{cases}$.

4.20. a) $3\frac{1}{3}, 5\frac{2}{3}, 8, 10\frac{1}{3}, 12\frac{2}{3}$, b) 3, 5, 7, 9, 11, 13.

4.21. a) $x=4,5$, b) $x \in \mathbb{R}$, c) $x=0$ lub $x=1$, d) $x=\frac{1}{4}$, e) $x=3$ lub $x=4$, f) $x=5$.

4.22. Wskazówka. Sprawdź, czy $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$.

4.23. a) $a_5 + a_{13} = 5$, b) $a_2 + a_5 + a_7 + a_{10} = 12$, c) $a_5 + a_8 + a_{11} = 15$, d) $a_4 + a_7 + a_9 + a_{12} = 4$.

4.24. Kolejne odczyty: (7121, 7127, 7133, 7139, 7145).

4.25. $3\,333\frac{1}{3}$ lat. *Wskazówka.* $a_1 = 0,0003, r = 0,0003, a_n = 1$.

4.26. Wskazówka. Wyraż różnicę $b_{n+1} - b_n$ za pomocą różnicy r ciągu a_n , gdzie $a_{n+1} - a_n = r$.

a) $b_{n+1} - b_n = 2a_{n+1} - 2a_n = 2(a_{n+1} - a_n) = 2r$,

e) $b_{n+1} - b_n = (a_{n+2} - 3a_{n+1}) - (a_{n+1} - 3a_n) = [(a_{n+1} + r) - 3(a_n + r)] - a_{n+1} + 3a_n =$
 $= a_{n+1} + r - 3a_n - 3r - a_{n+1} + 3a_n = -2r$.

4.27. 3, 4, 5 lub 4, 4, 4. *Wskazówka.* Jeżeli $a, a+r, a+2r$, gdzie $r \geq 0$, są długościami boków trójkąta,

to spełnione są warunki $a \geq 1, r \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}$ oraz $a+a+r > a+2r$ (nierówność trójkąta)

i $a+a+r+a+2r=12$.

4.28. $r = -\frac{2}{15}$. *Wskazówka.* $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3(a_5 + a_6 + a_7 + a_8)$, czyli

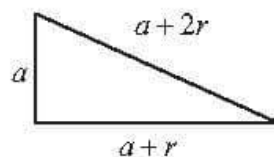
$$4a_1 + 6r = 12a_1 + 66r \text{ i } a = 1, \text{ więc } 60r = -8.$$

4.29. Wskazówka. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, gdzie $a > 0$ i $r > 0$.

$$a^2 + (a+r)^2 = (a+2r)^2, \text{ więc } 3r^2 + 2ar - a^2 = 0, \text{ skąd } r = \frac{a}{3}.$$

Zatem boki trójkąta mają długości: $a, \frac{4}{3}a, \frac{5}{2}a$ i promień okręgu wpisanego

w trójkąt prostokątny wyrażony jest wzorem $\frac{1}{2} \left(a + \frac{4}{3}a - \frac{5}{3}a \right)$.



Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

4.30. a) -2 , b) $4\sqrt{2}$, c) 12 .

4.31. a) 165 150, b) 123 300, c) 41 400, d) 70 950, e) 45 223.

Wskazówka. d) $a_1 = 102, n = 129$, e) $a_1 = 106, n = 82$.

4.32. a) 37 107, b) $2\,500\sqrt{2}$, c) 655, d) $-269,5$.

4.33. a) $S_n = \frac{(5n-3)n}{2}$, b) $S_n = \frac{(5n+1)n}{2}$, c) $S_n = (2n+5)n$, d) $S_n = \frac{(11n+9)n}{2}$.

4.34. a) 0, b) 10, c) 92, d) 435, e) 215, f) $(2n-1)x$.

4.35. a) $a_1 = 16$, $r = -4$, b) $a_1 = -4$, $r = -2$, c) $a_1 = 4$, $r = -\frac{3}{2}$, d) $a_1 = -200$, $r = 7$,
e) $a_1 = 5$, $r = -2$, f) $a_1 = 4$, $r = 1$.

4.36. a) $a_1 = 9$, $r = 2$, b) $a_1 = 5$, $r = 3$, c) $a_1 = 1$, $r = 3$, d) nieskończenie wiele ciągów, których wyraz
 $a_6 = 7$, czyli $a_1 \in \mathbf{R}$ i $r = \frac{7-a_1}{5}$, e) $a_1 = 2$, $r = 3$, f) $a_1 = 3$, $r = -1$.

4.37. a) $a_n = -6n + 9$, b) $a_n = 4n + 1$, c) $a_n = 3n - \frac{3}{2}$, d) $a_n = 7n - 6$.

4.38. a) $n = 33$, b) nie istnieje takie n , c) nie istnieje takie n .

4.39. a) $x = 3n - 5$, b) $x = 9 - 2n$, c) $x = 0,5n - 0,6$.

4.40. a) $n = 5$, b) $n = 11$, c) $n = 9$, d) $n = 50$, e) $n = 12$, f) $n = 31$.

Wskazówka. a) $S_n = \frac{(1+n)n}{2} = 3n$, b) $n^2 = 121$, c) $(2n-1)n = 153$, d) $2n^2 - 7n - 4650 = 0$,
e) $n^2 + n - 156 = 0$, f) $n^2 - 2n - 899 = 0$.

4.41. a) $x = 63$, b) $x = 37$, c) $x = \frac{1}{2}$, d) $x = -0,4$.

Wskazówka. c) $a_1 = 1 + 2x$, $a_2 = 4 + 2x$, skąd $r = 3$; $a_n = 28 + 2x$, skąd $n = 10$.

4.42. $a_1 = 31$, $a_{100} = 328$. Wskazówka. Skorzystaj z wzoru $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$,

gdzie $n = 100$, $r = 3$ i $S_{100} = 17\,950$, czyli $\frac{2a_1 + (100-1) \cdot 3}{2} \cdot 100 = 17\,950$.

4.43. 10 boków. Wskazówka. $S_n = \frac{119^\circ + 169^\circ}{2} \cdot n$ i $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$, więc $144^\circ \cdot n = (n-2) \cdot 180^\circ$.

4.44. 30 cm, 40 cm, 50 cm, $P = 600 \text{ cm}^2$. Wskazówka. Jeśli a , $a+r$, $a+2r$ to długości boków trójkąta prostokątnego i $r > 0$, to:
$$\begin{cases} a^2 + (a+r)^2 = (a+2r)^2 \\ a + a + r + a + 2r = 120 \end{cases}$$

Pojęcie ciągu geometrycznego

4.45. a) $-1, -0,1, -0,01, -0,001, -0,0001$, b) $5, -5, 5, -5, 5$, c) $-\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, 9, -9\sqrt{3}$,

d) $10^{10}, 10^9, 10^8, 10^7, 10^6$.

4.46. a) $a_7 = 27\sqrt{2}$, $a_{14} = 729\sqrt{6}$, b) $a_5 = \frac{27}{8}$, $a_7 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$, c) $a_4 = 2$, $a_8 = 8$.

4.47. a) $a_4 = \frac{32}{27}$, b) $q = 2$, c) $n = 5$, d) $a_1 = -\sqrt{2}$.

4.48. *Wskazówka.* Oblicz iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ i wyciągnij wniosek.

4.49. *Wskazówka.* Oblicz iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ i wyciągnij wniosek.

4.50. a) $a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$, b) $a_n = (-1)^{n-1}$, c) $a_n = 2^{n+5}$, d) $a_n = 6^{n-4}$, e) $a_n = -\frac{1}{12} \cdot (-3)^{n-1}$,

f) $a_n = \frac{1}{64} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-7}$ lub $a_n = \frac{1}{64} \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-7}$.

4.51. a) $a_n = 4 \cdot 4^{n-1}$, b) $a_n = 125 \cdot 5^{n-1}$, c) $a_n = \frac{1}{6} \cdot 6^{n-1}$, d) $a_n = -2 \cdot (-2)^{n-1}$, e) $a_n = -\frac{1}{27} \cdot (-3)^{n-1}$,

f) $a_n = 100 \cdot (-10)^{n-1}$, g) $a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, h) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

4.52. a) $a_1 = \frac{9}{2}$, $q = \frac{2}{3}$, b) $a_n = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

4.53. 2^9 . *Wskazówka.* Przedstaw wszystkie wyrazy ciągu za pomocą wyrazu piątego.

Własności ciągu geometrycznego

4.54. Np. $q < 0$ i $a_1 < 0$: $-2, 4, -8, 16, -32, \dots$ ciąg niemonotoniczny;

$q = 0$ i $a_1 > 0$: $4, 0, 0, 0, \dots$ ciąg nierosnący; $0 < q < 1$ i $a_1 < 0$: $-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$ ciąg rosnący;

$0 < q < 1$ i $a_1 > 0$: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ ciąg malejący; $q > 1$ i $a_1 < 0$: $-2, -4, -8, -16, \dots$ ciąg malejący;

$q > 1$ i $a_1 > 0$: $3, 6, 12, 24, \dots$ ciąg rosnący.

4.55. a) 64 i 256, b) 32, 64, 128, 256, 512 lub $-32, 64, -128, 256, -512$.

4.56. a) $a_1 = \frac{25}{49}$, $q = \frac{7}{5}$, b) $a_1 = 10^{11}$, $q = 0,01$, c) $\begin{cases} a_1 = 16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = 16 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{1296} \\ q = 6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{1296} \\ q = -6 \end{cases}$.

4.57. a) Tak, b) tak, c) tak.

4.58. a) $x = \frac{5}{4}$ lub $x = -\frac{5}{4}$, $1, \frac{5}{4}, 1\frac{9}{16}$ lub $1, -\frac{5}{4}, 1\frac{9}{16}$, b) $x = 3, 3, 4, \frac{16}{3}$,

c) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = \frac{5}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 4$ lub $\frac{1}{9}, \frac{2}{3}, 4$, d) $x = 3, 8, 4, 2$, e) $x = 0$ lub $x = 5, 4, 2, 1$ lub $9, 27, 81$.

4.59. $\left(a^2, \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{4}a^2, \frac{1}{8}a^2\right)$, $q = \frac{1}{2}$, $P_{10} = \frac{a^2}{512}$.

4.60. Wskazówka. Uzasadnij, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{const.}$,

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2} \cdot 2^{n+1} - 6^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n} = \frac{3 \cdot 3^{n+1} \cdot 2 \cdot 2^n - 6 \cdot 6^n}{3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n} = \frac{6 \cdot (3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n)}{3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n}$.

4.61. a) 1 111, 2 1 111, 3 11 111, b) po 10 godzinach.

4.62. a) $q = 2 - \sqrt{2}$, b) $a_1 = \frac{1}{2}$, c) $a_7 - a_5 = a_5 q^2 - a_5 = 362 - 256\sqrt{2}$.

4.63. a) $a_3 = 3$, b) $a_7 = \sqrt[3]{5}$, c) $a_{15} = 2$, d) $a_{10} = 1$.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

4.64. a) $S_6 = \frac{665}{48}$, b) $S_6 = \frac{13}{3}(\sqrt{3} + 3)$, c) $S_6 = \frac{5187}{80}$.

4.65. a) $S_5 = 62$, b) $S_5 = -3$, c) $S_5 = -\frac{11}{32}$, d) $S_5 = 25 \cdot \frac{2^5 + 5^5}{2^5} = \frac{78925}{32}$, e) $S_5 = \frac{1}{4}$, f) $S_5 = \frac{121}{81}$.

Wskazówka. Przedstaw wzór ciągu (a_n) w postaci $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$: a) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$, c) $a_n = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

d) $a_n = \frac{175}{2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^{n-1}$, f) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

4.66. a) $S_{10} = 1023$, b) $S_{10} = -682$, c) $S_5 = \frac{11}{16} = 0,6875$, d) $S_6 = 909090$, e) $S_5 = 41,68$,

f) $S_6 = -\frac{665}{32}$, g) $S_7 = 40 + 13\sqrt{3}$, h) $S_5 = 7 - 3\sqrt{2}$.

4.67. a) $a_1 = 1$, b) $a_1 = -1$, c) $a_1 = 4$, d) $a_1 = 27$. Wskazówka. Skorzystaj z wzoru $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$,

skąd $a_1 = S_n \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}$.

4.68. $a_1 = 2$, $S_n = -5,555$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 8$.

4.69. a) $S_8 = 331,5$, b) $S_7 = -\frac{43}{8}$, c) $S_4 = 10$, d) $a_1 = 2$ i $q = 3$.

Wskazówka. Zauważ, że: a) $q = 2$ i $a_1 = 1,3$, b) $q = -\frac{1}{2}$ i $a_1 = -8$, c) $q = \frac{1}{3}$ i $a_1 = \frac{27}{4}$,

d) $\frac{a_1 + a_2}{a_2} = 1\frac{1}{3}$, czyli $\frac{a_1}{a_2} + 1 = 1\frac{1}{3}$, więc $\frac{a_1}{a_1 q} = \frac{1}{3}$, skąd $q = 3$.

4.70. $2^{64} - 1$.

4.71. $S_{10} = 29\,524$. *Wskazówka.* Oblicz sumę S_{10} wyrazów ciągu $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^9$,

w którym $a_1 = 1$ i $q = 3$.

4.72. 1023. *Wskazówka.* Zauważ, że $a_5 = 16$ i $a_6 = 32$, czyli $q = 2$, więc $a_1 = 1$. $S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1}$.

4.73. $q = \frac{1}{2}$. *Wskazówka.* Zauważ, że $q \neq 1$ (ciąg nie może być ciągiem stałym). Rozwiąż równanie

$a_1 - a_3 = 3(a_2 - a_3)$, czyli $a_1 - a_1 q^2 = 3a_1 q - 3a_1 q^2$, więc $2a_1 q^2 - 3a_1 q + a_1 = 0 \quad / : a_1$

$$2q^2 - 3q + 1 = 0, \text{ skąd } q = \frac{3-1}{4} \text{ lub } q = \frac{3+1}{4}.$$

4.74. (7, 7, 7) lub (3, 6, 12). *Wskazówka.* $S_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = a_1(1 + q + q^2)$, więc $a_1(1 + q + q^2) = 3 \cdot 7$.

Zatem $a_1 = 3$ i $1 + q + q^2 = 7$ lub $a_1 = 7$ i $1 + q + q^2 = 3$.

$$q^2 + q - 6 = 0 \text{ lub } q^2 + q - 2 = 0, \text{ skąd}$$

$$q = -3 \notin \mathbb{N}^+, q = 2 \text{ lub } q = -2 \notin \mathbb{N}^+, q = 1, \text{ więc}$$

$$a_1 = 3 \text{ i } q = 2 \text{ lub } a_1 = 7 \text{ i } q = 1.$$

4.75. Nie, bo $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = \frac{2}{3}(a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9)$.

Wskazówka. $S_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = a_1 q(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8)$,

$$S_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = a_1(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8),$$

$$\frac{S_{2n}}{S_{2n-1}} = \frac{a_1 q(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8)}{a_1(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8)} = q \text{ i } q = \frac{2}{3}, \text{ więc } \frac{S_{2n}}{S_{2n-1}} = \frac{2}{3} < 1, \text{ skąd } S_{2n} < S_{2n-1}.$$

Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zadaniach

4.76. a) $b_n = (-1)^n$, b) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{6}$, c) $b_n = 486 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, d) $a_n = 3\frac{1}{4}n + 2\frac{1}{4}$, e) $a_n = 2n - 5$,

f) $b_n = 64 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$.

4.77. a) $S_{51} = 2\,601$, b) $S_7 = \frac{3\,277}{512}$, c) $S_7 = \frac{4\,372}{243}$, d) $S_5 = 25,6518$, e) $S_6 = 9,3$, f) $S_5 = \frac{781}{108}$.

4.78. a) 250, b) $\frac{50}{51}$, c) $\frac{26}{31}$, d) $\frac{1}{6}$, e) $\frac{1}{6}$, f) $\frac{1}{2}$.

4.79. $b_7 = 27$. *Wskazówka.* Oblicz a_9 z wzoru $\frac{1+a_9}{2} \cdot 9 = 369$, a następnie iloraz q z zależności $1 \cdot q^8 = a_9$, gdzie $b_9 = a_9$.

4.80. a) 55, b) 5 050. *Wskazówka.* a) Przedstaw każdą różnicę $10^2 - 9^2 = (10-9)(10+9)$ i oblicz sumę utworzonego ciągu.

4.81. $-1, 0, 0$ lub $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}$. *Wskazówka.* Z warunków zadania: liczby $x, y, 1$ tworzą ciąg arytmetyczny,

więc $y = \frac{x+1}{2}$, a liczby $x, y, x+y+1$ tworzą ciąg geometryczny, więc $y^2 = x(x+y+1)$.

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} y = \frac{x+1}{2} \\ y^2 = x(x+y+1) \end{cases}$, czyli $\begin{cases} x = 2y-1 \\ y^2 = (2y-1) \cdot 3y \end{cases}$, skąd $\begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} y = \frac{3}{5} \\ x = \frac{1}{5} \end{cases}$.

4.82. 4, 8, 16 lub $\frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}$. *Wskazówka.* Liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, liczby a_1, a_2, a_4 są wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a = a_1$, $b = a_2 = a_1 + r$, $c = a_4 = a_1 + 3r$.

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} a_1 + a_1 + r + a_1 + 3r = 28 \\ (a_1 + r)^2 = a_1(a_1 + 3r) \end{cases}$, czyli $\begin{cases} 3a_1 + 4r = 28 \\ r(r - a_1) = 0 \end{cases}$.

4.83. *Wskazówka.* Zauważ, że $(a-b)^2 \geq 0$, więc $a^2 + b^2 \geq 2ab$, skąd $(a+b)^2 \geq 4ab$.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny w bankowości

4.84.

	Kapitał początkowy	Roczna stopa procentowa	Liczba lat lokaty n	Odszetki po upływie n lat	Stan konta po upływie n lat
Ala	3000	4	10	1200	4200
Beata	1000	5	5	250	1250
Robert	100	1	99	99	199

4.85. Nie.

4.86. Nie, ponieważ roczne oprocentowania w każdym z banków są równe 12%.

4.87. a) 0,03 zł, b) 1 zł, c) 3 zł.

4.88. a) Nie, b) tak, podwojenie nastąpi już po upływie 8 lat, bo $(1,1)^8 \approx 2,14$.

4.89.

Właściciel lokaty	Kapitał początkowy K	Roczna stopa procentowa p	Liczba n lat lokaty	Stan konta po upływie n lat
Bogdan	300	8	3	377,91
Czesław	400	5	4	486,20
Damian	200	10	2	242

4.90. Lokata III. *Wskazówka:* I – 242,17 zł, II – 281,96 zł, III – 320 zł.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Odpowiedź	A	B	C	C	D	D	Kolejno: P, P, P, P, P, F	B	T – A	B	C	D	D

5. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów

Twierdzenie sinusów

5.1. a) $R = 15\sqrt{3}$ cm, b) $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ m, c) $R = 36\sqrt{2}$ dm.

5.2. $R = \frac{a}{2 \sin(\beta + \gamma)}$.

5.3. a) $a \approx 98,5$ cm, $b = 50$ cm, $c \approx 94$ cm, $\gamma = 70^\circ$, b) $a \approx 50$ cm, $b \approx 70,9$ cm, $c \approx 42,3$ cm, $\alpha = 44^\circ$.

5.4. a) $a \approx 12,64$ cm, $c \approx 23,56$ cm, $\gamma \approx 99^\circ$, b) $a \approx 1,28$ m, $b \approx 6,5$ m, $\alpha = 10^\circ$,

c) $c \approx 19,4$ cm, $\beta \approx 25^\circ$, $\gamma \approx 113^\circ$, d) $\beta \approx 60^\circ$, $\alpha \approx 84^\circ$, $a \approx 8,65$ lub $\beta \approx 120^\circ$, $\alpha \approx 24^\circ$, $a \approx 3,55$.

5.5. Istnieją dwa trójkąty spełniające warunki zadania:

trójkąt I: $|AB| = 81,24$ cm, $|\sphericalangle A| = 24^\circ$, $|\sphericalangle B| = 32^\circ$, $|\sphericalangle C| = 124^\circ$,

trójkąt II: $|AB| = 13,64$ cm, $|\sphericalangle A| = 24^\circ$, $|\sphericalangle B| = 148^\circ$, $|\sphericalangle C| = 8^\circ$.

5.6. $r = (6\sqrt{2} - 3\sqrt{6})$. *Wskazówka.* Z warunków zadania $|\sphericalangle ABD| = 30^\circ$, $|\sphericalangle DAB| = 15^\circ$, $|\sphericalangle ADB| = 135^\circ$.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta DAB : $\frac{|AB|}{\sin 135^\circ} = \frac{|AD|}{\sin 30^\circ}$, stąd $|AB| = 6\sqrt{2}$.

W trójkącie AEO : $\operatorname{tg} |\sphericalangle OAE| = \frac{r}{|AE|}$ i $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

5.7. a) $R=1$, b) $R=\frac{16\sqrt{15}}{15}$, c) $R=3\sqrt{3}$, d) $R=\frac{\sqrt{305}}{4}$.

Wskazówka. b) Najpierw policz z wzoru Herona pole trójkąta ABC , a następnie promień R .

5.8. a) $5,9 \cdot 10^7$ km, b) $1,1 \cdot 10^8$ km.

5.9. *Wskazówka.* Wyznacz sinusy kątów α , β , γ w zależności od promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie.

5.10. *Wskazówka.* Skorzystaj z twierdzenia sinusów i zapisz $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$ i $c=2R\sin\gamma$.

Twierdzenie cosinusów

5.11. a) $a=\sqrt{37}$ dm, b) $a=2\sqrt{2}$ cm, c) $b=\sqrt{34}$ cm, d) $c=\sqrt{93}$ cm.

5.12. a) $\alpha=30^\circ$, $\beta=30^\circ$, $\gamma=120^\circ$, b) $\alpha\approx 28^\circ$, $\beta\approx 44^\circ$, $\gamma\approx 108^\circ$, c) $\alpha\approx 33^\circ$, $\beta\approx 69^\circ$, $\gamma\approx 78^\circ$,
d) $\alpha\approx 23^\circ$, $\beta\approx 34^\circ$, $\gamma\approx 123^\circ$.

5.13. $\alpha\approx 44^\circ$, $\beta\approx 15^\circ$, $\gamma\approx 121^\circ$.

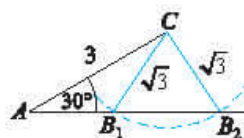
5.14. a) 120° , $P=8\sqrt{3}$, b) 105° , $P\approx 5,46$.

5.15. a) Prostokątny, b) rozwartokątny, c) ostrokątny, d) rozwartokątny.

5.16.

a	b	c	α	β	γ
$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$ lub $\sqrt{3}$	30°	60° lub 120°	90° lub 30°
$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ lub $\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	15° lub 105°	30°	135° lub 45°
4	4	$4\sqrt{3}$	30°	30°	120°
10	8	7	83°	53°	44°

Wskazówka. 1) Jeżeli $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, to $\beta=60^\circ$ lub $\beta=120^\circ$.



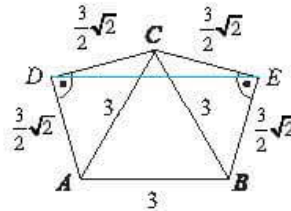
5.17. $|BC|=2\sqrt{5}-4$.

5.18. a) 139,104 km, b) 0,637 km.

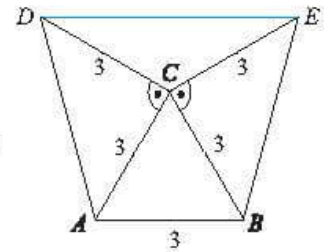
Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów

5.20. a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 75^\circ$.

5.21. $|DE| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$ lub $|DE| = 3\sqrt{3}$. Wskazówka. I przypadek



II przypadek



5.22. $\sin(\angle CAM) = \frac{\sqrt{21}}{7}$. Wskazówka. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

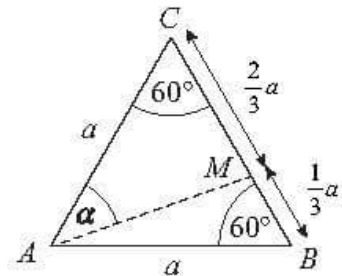
$$|CM| + |MB| = a, \text{ więc } |CM| = \frac{2}{3}a, \quad |MB| = \frac{1}{3}a.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABM:

$$|AM|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{3}a \cdot \cos 60^\circ, \text{ skąd } |AM| = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta AMC:

$$\frac{\frac{2}{3}a}{\sin \alpha} = \frac{|AM|}{\sin 60^\circ}, \text{ skąd } \sin \alpha = \frac{\frac{2}{3}a \cdot \sin 60^\circ}{|AM|}.$$



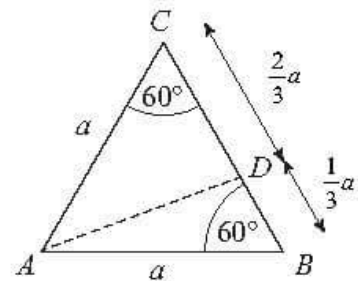
5.23. Wskazówka. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku oraz

R_1 – promień okręgu opisanego na trójkącie ACD,

R_2 – promień okręgu opisanego na trójkącie ADB,

Z twierdzenia sinusów dla trójkątów ACD i ADB:

$$2R_1 = \frac{|AD|}{\sin 60^\circ} \text{ i } 2R_2 = \frac{|AD|}{\sin 60^\circ}, \text{ skąd } R_1 = R_2.$$

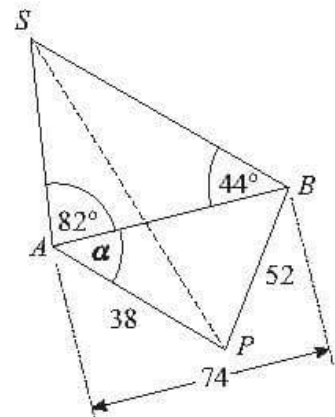


5.24. $|AC| = \frac{15}{2}(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$, $|BC| = 15(\sqrt{3} - 1)$ lub $|AC| \approx 13,45$ m, $|BC| \approx 10,98$.

5.25. $\alpha \approx 59^\circ$, $\beta \approx 74^\circ$, $\gamma \approx 47^\circ$.

5.26. Około 90 km. Wskazówka. Przyjmij oznaczenia i dane jak na rysunku.

- $|\angle ASB| = 180^\circ - (82^\circ + 44^\circ) = 54^\circ$,
- w trójkącie ABS: $\frac{|AS|}{\sin 44^\circ} = \frac{74}{\sin 54^\circ}$, skąd $|AS| \approx 63,5$ km,
- w trójkącie ABP: $\cos \alpha = \frac{38^2 + 74^2 - 52^2}{2 \cdot 38 \cdot 74}$, skąd $\cos \alpha \approx 0,7496$, więc $\alpha \approx 42^\circ$,



- w trójkącie APS :

$$|PS|^2 = 38^2 + 63,5^2 - 2 \cdot 38 \cdot 63,5 \cdot \cos(82^\circ + 42^\circ), \text{ gdzie } \cos 124^\circ = -\cos 56^\circ.$$

5.27. Około $4,8 \text{ km}^2$. *Wskazówka.* Czworokąt $ABCD$ podziel na dwa trójkąty: ABD i BCD .

- w trójkącie BCD : $|BD|^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ$, gdzie $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$, skąd $|BD| = \sqrt{7}$.

- w trójkącie ABD : $\cos |\angle DAB| = \frac{3^2 + 4^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$, skąd $|\angle DAB| \approx 41^\circ$.

- $P_{ABCD} = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD}$, gdzie $P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 41^\circ$, $P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
Odpowiedź	B i C	D	D	B i D	D	P, F	D	A	A	C	B	A	C	B	B

6. Obliczanie długości odcinków i pól trójkątów

Związki miarowe w trójkącie

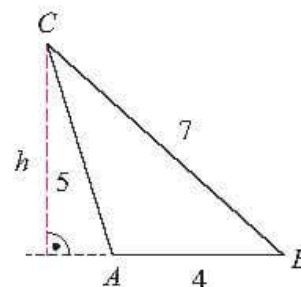
6.1. $R = 2$.

6.2. *Wskazówka.* $21^2 > 12^2 + 16^2$.

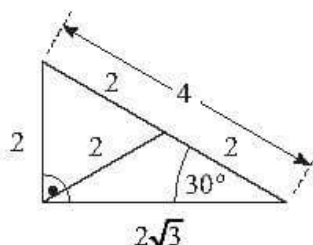
6.3. $2\sqrt{6}$. *Wskazówka.* Zauważ, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Najdłuższą wysokość należy poprowadzić na najkrótszy bok.

6.4. Około $15,04$. *Wskazówka.* $P_{\triangle} = \frac{25\sqrt{3}}{4 \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ}$.



6.5. 6 i $4 + 2\sqrt{3}$. *Wskazówka.*



6.6. $r = \frac{10}{3}(\sqrt{2} - 1)$. *Wskazówka.* $r = \frac{a+b-c}{2}$, gdzie $a = \frac{10}{3}$, $b = \frac{20\sqrt{2}}{3}$, $c = 10$.

6.7. *Wskazówka.* $r = \frac{a+b-c}{2}$ i $c = 2R$.

6.8. $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

6.9. *Wskazówka.* Z twierdzenia sinusów $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$, z twierdzenia cosinusów $2 \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$,

z warunków zadania $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \cos \gamma$, więc $\frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$, skąd $b^2 = c^2$.

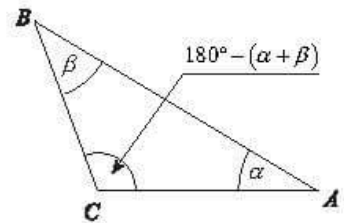
6.10. $P = 2\sqrt{15} + \sqrt{21}$. *Wskazówka.* Zauważ, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i oblicz:

$$|AC| = 2R \cdot \sin \beta \text{ i } |BC| = 2R \cdot \sin \alpha \text{ oraz } \cos \alpha \text{ i } \cos \beta.$$

Skorzystaj z wzoru $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ i oblicz

pole P trójkąta z wzoru $P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BC| \cdot \sin(\alpha + \beta)$.



6.11. *Wskazówka.* Uzasadnij, że w trójkącie o bokach 4, 5, 7 cosinusy wszystkich kątów są równe $-\frac{1}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{29}{35}$.

Wzory na pola trójkątów i ich zastosowanie

6.12. a) $P = 420$, b) 15, c) $r = 7$.

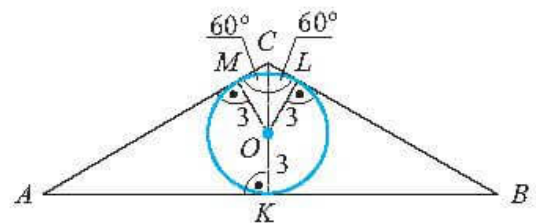
6.13. a) 28, b) $14\frac{1}{6}$, c) $\frac{13}{85}$.

6.14. a) $|AC| = |BC| = 4\sqrt{3} + 6$, $|AB| = 6\sqrt{3} + 12$, b) $R = 6 + 4\sqrt{3}$, c) $P_{\Delta} = 36 + 21\sqrt{3}$.

Wskazówka.

a) W $\triangle OLC$: $\frac{3}{|OC|} = \sin 60^\circ$, skąd $|OC| = 3 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$,

więc $|CK| = 3 + 2\sqrt{3}$.



6.15. a) $r = \frac{3}{5}\sqrt{10}$, b) $R = \frac{49\sqrt{10}}{40}$.

6.16. 15° , b) 75° . *Wskazówka.* Zauważ, że $|CO| : |OD| = \sqrt{3} : \sqrt{2}$,

$|\sphericalangle ACD| = 45^\circ$. Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu dwusiecznych kątów tego trójkąta, zatem OA jest dwusieczną kąta CAD .

Z twierdzenia o dwusiecznej kąta w $\triangle ACD$: $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|OC|}{|OD|}$, stąd $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Z twierdzenia sinusów do $\frac{|AC|}{\sin |\sphericalangle ADC|} = \frac{|AD|}{\sin 45^\circ}$, stąd $|\sphericalangle ADC| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

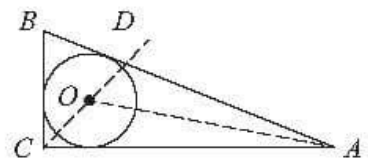
Zatem $|\sphericalangle ADC| = 60^\circ$ lub $|\sphericalangle ADC| = 120^\circ$, $|\sphericalangle CAD| = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 75^\circ$.

6.17. a) $r = \sqrt{3}$, $R = \frac{14\sqrt{3}}{3}$, b) $r = \sqrt{5}$, $R = 2,1\sqrt{5}$, c) $r = \frac{11\sqrt{23}}{23}$, $R = \frac{72\sqrt{23}}{23}$, d) $r = 4$, $R = 10$.

Wskazówka. a) Skorzystaj z wzorów $r = \frac{P_{\Delta}}{p}$, $R = \frac{abc}{4P_{\Delta}}$. $P_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$, czyli

$$p = \frac{6+10+14}{2} = 15 \text{ oraz } P_{\Delta} = \sqrt{15 \cdot (15-6)(15-10)(15-14)} = 15\sqrt{3}.$$

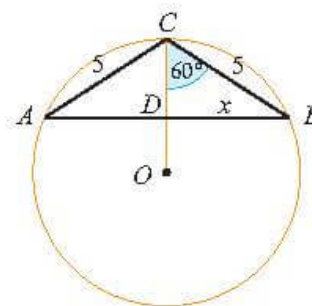
$$\text{Zatem } R = \frac{6 \cdot 10 \cdot 14}{4 \cdot 15\sqrt{3}}, \text{ czyli } R = \frac{14\sqrt{3}}{3}.$$



6.18. a) $P = 25\pi - 24$, b) $P = 12\sqrt{10} - 6,4\pi$, c) $P = 8\sqrt{5} - \frac{16}{5}\pi$.

6.19. $R = 5$. Wskazówka. $\triangle CDB$ jest prostokątny, więc $\frac{x}{5} = \sin 60^\circ$,

skąd $x = \frac{5}{2}\sqrt{3}$. $|AB| = 2x$, czyli $|AB| = 5\sqrt{3}$. $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25}{4}\sqrt{3}$.



6.20. a) $P = \frac{323}{8}\pi = 40\frac{3}{8}\pi$, b) $P = 100\pi(\sqrt{2} - 1)$, c) $P = \frac{481}{16}\pi = 30\frac{1}{16}\pi$.

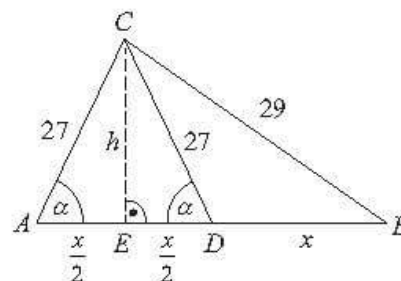
6.21. $P = 2\sqrt{10\,010} \text{ cm}^2$. Wskazówka. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ADC i DBC :

$$27^2 = x^2 + 27^2 - 54x \cdot \cos \alpha \quad \text{ i } \quad 29^2 = x^2 + 27^2 - 54x \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \quad \text{ oraz }$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \quad \text{ więc } \begin{cases} 0 = x^2 - 54x \cos \alpha \\ 2 \cdot 56 = x^2 + 54x \cos \alpha \end{cases}, \quad \text{ skąd } x^2 = 56.$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = x \cdot h = \sqrt{x^2 \cdot h^2}, \quad \text{ gdzie w trójkącie } CEB: h^2 = 29^2 - \left(\frac{x}{2} + x\right)^2 = 29^2 - \frac{9}{4} \cdot 56 = 715.$$



6.22. a) $R = 1$, b) $P_{\triangle} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

6.23. Wskazówka. Z równości $\frac{\cos \alpha}{b} = \frac{\cos \beta}{a}$ wynika, że $\frac{a}{b} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$.

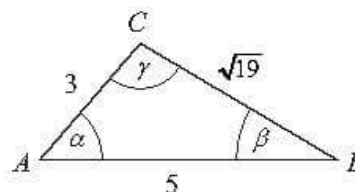
Z twierdzenia sinusów $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ wynika, że $\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. Zatem $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, skąd $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$.

6.24. Nie.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Odpowiedź	D	D	P, P	B i D	B i C	D	D	B	B	B	C

3. Wskazówka. $\cos \alpha = \frac{3^2 + 5^2 - (\sqrt{19})^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{2}$.



7. Obliczanie długości odcinków i pól czworokątów

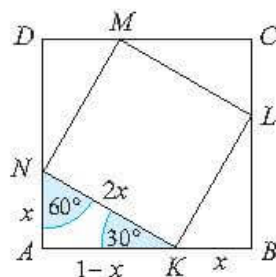
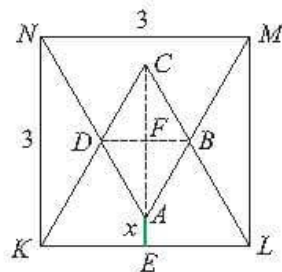
Klasyfikacja i pola czworokątów wypukłych. Prostokąty i kwadraty

7.1. a) $16\sqrt{3}$, b) 8.

7.3. a) $\alpha = 40^\circ$, b) $\alpha \approx 74^\circ$, c) $\alpha \approx 106^\circ$.

7.4. a) 3 i $3\sqrt{3}$, b) 11,47 i 16,38, c) 3,38 i 7,25.7.5. $P \approx 73 \text{ cm}^2$, $L \approx 37 \text{ cm}$.

7.6. 210 cm.

7.7. Około: a) 54° , b) 101° , c) 50° .7.8. $L \approx 33,5$, $P \approx 68,5$.7.9. Wskazówka. b) $P_{\square ABCD} = 48$, $P_{\triangle ASD} = 12$ i $P_{\triangle ASD} = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin \alpha$.7.10. Wskazówka. a) $KC \parallel AM$ i $AN \parallel LC$ oraz $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = 60^\circ$,b) $|EC| = |AC| + x$ i $|EC| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, więc $x = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$, $|AC| = 3 - 2x$,skąd $|AC| = 3(\sqrt{3} - 1)$. DB jest bokiem trójkąta równobocznego DBC (DBA)o wysokości FC , gdzie $|FC| = \frac{1}{2}|AC|$ i $|FC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |DB|$.Zatem $\frac{1}{2} \cdot 3(\sqrt{3} - 1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |DB|$, skąd $|DB| = \frac{1}{2} \cdot 3(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$.7.11. $P = 4 - 2\sqrt{3}$.Wskazówka. Trójkąty NAK , KBL , LCM i MDN są prostokątne i przystające. $x^2 + (1-x)^2 = (2x)^2$, skąd $x = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$. $P_{KLMN} = (2x)^2$.

Równoległoboki i romby

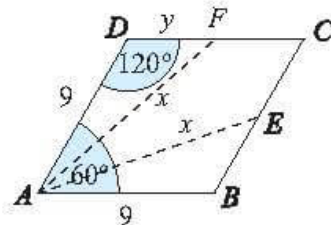
7.13. a) $8\sqrt{3}$, b) 35, c) $24\sqrt{2}$.

7.14. 40.

7.15. $\sqrt{10}$ i $\sqrt{58}$.7.16. a) 24, b) 24, c) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.7.17. Około 40° i 140° .7.18. $P \approx 8,0$.7.19. 45° .7.20. a) $L = 48$, b) $P = 110,5$.7.21. 60° .7.22. $P = 9$.7.23. $3\sqrt{19}$. Wskazówka. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

$$P_{ABCD} = 9^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{81\sqrt{3}}{2},$$

$$P_{\triangle ADF} = \frac{1}{3}P_{ABCD} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ i } P_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot y \cdot \sin 120^\circ, \text{ skąd } y = 6.$$

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ADF oblicz x .7.24. a) $|BD| = 10$, b) $P = 120$, c) $\sin(\sphericalangle DAB) = \frac{120}{169}$, d) $\cos(\sphericalangle ADC) = -\frac{119}{169}$.7.25. Wskazówka. $\frac{x(x+2)}{2} = 7,5$, skąd $x = 3$, gdzie x jest długością krótszej przekątnej rombu.

7.26. Wskazówka. Porównaj pole rombu wyrażone w zależności od przekątnych rombu z polem wyrażonym w zależności od boku rombu.

7.27. a) $|AC| = 2\sqrt{5}$, b) $|BD| = 4\sqrt{5}$, c) 5, d) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

7.28. a) Tak, $P = 5$, b) nie.

7.29. a) Tak, b) tak, c) nie. *Wskazówka.* Sprawdź, czy środek odcinka AC jest również środkiem odcinka BD .

Trapezy

7.30. a) $\delta = 138^\circ$, $\gamma = 145^\circ$, b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, czyli 120° , 120° , 60° , 60° .

7.31. a) $\alpha \approx 53^\circ$, b) $\alpha \approx 27^\circ$, c) $\alpha = 90^\circ$.

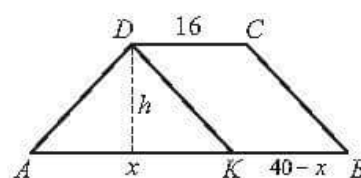
7.32. 8 i 16.

7.33. Około: a) 31,2, b) 6,8, c) 147,8.

7.34. a) 6, b) $18\sqrt{3}$.

7.35. $|AK| = 28$. *Wskazówka.* $P_{\Delta AKD} = \frac{1}{2}hx$ i $P_{\square KBCD} = \frac{16+40-x}{2} \cdot h$,

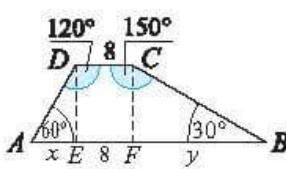
więc rozwiązujemy równanie $\frac{1}{2}hx = \frac{16+40-x}{2} \cdot h$.



7.36. a) $P = 21$, b) $P = 289$, c) $P = 6$.

7.37. $P = 64\sqrt{3}$, $L = 8(5 + \sqrt{3})$.

7.38. a) $P = 6(9 - \sqrt{3})$, b) $P = 42\sqrt{3}$, c) nie istnieje.

Wskazówka. b)  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}h \\ y = \sqrt{3}h \\ x + y + 8 = 20 \end{cases}$, c) nie istnieje, bo $|BC| = 4\sqrt{2}$, a wysokość trójkąta EDA poprowadzona z punktu D ma długość 4,8.

7.39. $C = (0, -2)$, $D = (2, 4)$. *Wskazówka.* Z warunków: $|MC|^2 = 10$ (bo $|AB|^2 = 10$), a punkty C i D leżą na prostej o równaniu $y = 3x - 2$ ($CD \parallel AB$), to otrzymujemy równania $(x_C - 1)^2 + (y_C - 1)^2 = 10$ i $y_C = 3x_C - 2$, skąd $(x_C - 1)^2 + (3x_C - 3)^2 = 10$, więc $10(x_C - 1)^2 = 10$, zatem $(x_C - 1)^2 = 1$.

7.41. $D = (1, 3)$. *Wskazówka.* Wyznacz współrzędne punktu M przecięcia się danych prostych, który jest środkiem boku CD .

Rozwiązywanie zadań optymalizacyjnych z planimetrii

7.42. Ramka ma kształt kwadratu o boku 1 dm. *Wskazówka.* $a + b = 2$, skąd $b = 2 - a$, gdzie a i b są długościami boków prostokąta. $P(a) = a(2 - a)$, gdzie $a \in (0; 2)$.

7.43. Prostokątna szyba ma wymiary 1,5 m i 1,5 m, $P = 2,25 \text{ m}^2$. *Wskazówka.* $2x + 2y = 6$, skąd $y = 3 - x$, gdzie x i y są długościami boków prostokąta. $P(x) = x(3 - x)$, gdzie $x \in (0; 3)$ i $P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(3 - \frac{3}{2}\right)$.

7.44. Prostokątny ogródek ma wymiary 9 m i 18 m. *Wskazówka.* $2x + y = 36$, skąd $y = 36 - 2x$, gdzie x i y są długościami boków prostokąta. $P(x) = x(36 - 2x) = 2x(18 - x)$, gdzie $x \in (0; 18)$.

7.45. $x = 5$ cm, $P = 625$ cm². *Wskazówka.* Nowe wymiary prostokąta to: $20 + x$ i $30 - x$.

$$P(x) = (20 + x)(30 - x), \text{ gdzie } x \in (0; 30).$$

7.46. Prostokąt o wymiarach 0,5 dm i 1 dm. *Wskazówka.* $P(x) = x(2 - 2x) = 2x(1 - x)$, gdzie $x \in (0; 1)$.

7.47. $r = \frac{350}{\pi}$ m i $a = 350$ m. *Wskazówka.* $L = 1400$ i $L = 2\pi r + 2a$, skąd $a = 700 - \pi r$.

$$P(r) = 2r(700 - \pi r), \text{ gdzie } r \in \left(0; \frac{700}{\pi}\right).$$

7.48. Pierwsza część drutu ma długość $39\frac{1}{41}$ cm, a druga $60\frac{40}{41}$ cm.

Wskazówka. Drut długości 100 cm podzielono na dwie części x i y , czyli $100 = x + y$, skąd $y = 100 - x$, gdzie $x \in (0; 100)$. Obwód kwadratu jest równy x cm, czyli bok kwadratu jest równy $\frac{x}{4}$.

Obwód prostokąta jest równy $100 - x$, a boki prostokąta mają długość $\frac{100 - x}{10}$ i $\frac{4 \cdot (100 - x)}{10}$.

$$\text{Pole figury wyrażone jest wzorem } P(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{100 - x}{10} \cdot \frac{4(100 - x)}{10} = \frac{41}{400}x^2 - 8x + 400.$$

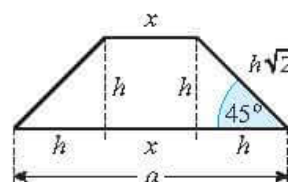
Najmniejsza wartość pola tej figury jest dla $x = \frac{-(-8)}{2 \cdot \frac{41}{400}} = 39\frac{1}{41}$ i $39\frac{1}{41} \in (0; 100)$.

7.49. Podstawy trapezu mają długości 9 i 3, a ramię $3\sqrt{2}$.

Wskazówka. $h + a = 12$, skąd $a = 12 - h$ i $a = x + 2h$, skąd $x = 12 - 3h$, gdzie

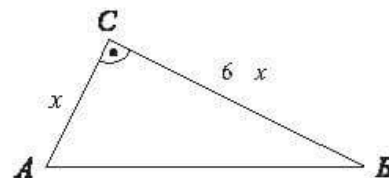
$$h \in (0; 4). \quad P(h) = \frac{12 - h + 12 - 3h}{2} \cdot h = 2h(6 - h). \text{ Największą wartość funkcja } P$$

przyjmuje dla $h = 3$ i $3 \in (0; 4)$.



7.50. $3\sqrt{2}$. *Wskazówka.* Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

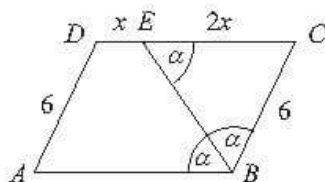
$$|AB|^2 = x^2 + (6 - x)^2, \text{ gdzie } x > 0 \text{ i } x < 6, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2}.$$



Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Odpowiedź	B	C	C	D	C	N - A	T - B	B	A	C	A	C	C	A

4. *Wskazówka.*



Oznaczenia graficzne

Definicja

- Na zielonym tle umieszczono definicje.

Twierdzenie

- Na niebieskim tle umieszczono twierdzenia.

Przypomnijmy

- W pomarańczowej ramce umieszczono te treści, które powinny być znane z wcześniejszych lat nauki.

- Na szarym tle umieszczono uwagi, które są podsumowaniem ważnych treści; warto je zapamiętać.

- Na fioletowym tle umieszczono ćwiczenia przewidziane jako zadania domowe, ponieważ ich rozwiązanie wymaga większej ilości czasu niż inne.

- Na żółtym tle umieszczono zadania otwarte i zamknięte różnego rodzaju pod hasłem **Zestaw powtórkowy**.

-  Niebieski pasek na marginesie książki oznacza treści przeznaczone tylko dla zakresu rozszerzonego.

-  Symbol zeszytów na marginesie oznacza, że przykłady z ćwiczenia lub zadania należy rozwiązać w zeszycie; **odpowiedzi do tych zadań i ćwiczeń nie należy wpisywać w podręczniku.**

- **6.32.** Na niebieskim tle umieszczono numery zadań o podwyższonym stopniu trudności.

- **2.48.**
D Literka D przy numerze zadania oznacza zadanie na dowodzenie.

Skróty: *c.n.u.* – co należało uzasadnić (udowodnić),
cnw. – co należało wykazać,
ckd. – co kończy dowód.

*Aby uzyskać kod dostępu do elektronicznej wersji podręcznika
zarejestruj się na stronie www.ebook.podkowa.gda.pl.
Po rejestracji otrzymasz kod dostępu pocztą elektroniczną.*

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha / \cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha / \cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	0,9848	5,6713	10
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	1,0000	–	0

Charakterystyczne cechy podręczników
z serii „**MATEMATYKA i przykłady jej zastosowań**”
do kształcenia w zakresie podstawowym

- W każdym rozdziale wszystkich podręczników z serii „**MATEMATYKA i przykłady jej zastosowań**” podtytuł jest tematem lekcji. Każdemu tematowi lekcji są przypisane odpowiednie umiejętności wymienione w podstawie programowej.
- Każda umiejętność wymieniona w podstawie programowej z dnia 30 stycznia 2018 r jest zilustrowana przykładami, ćwiczeniami i zadaniami utrwalającymi.
- Duża liczba ćwiczeń, zadań i zestawów powtórkowych stanowi dobrą bazę przygotowującą do egzaminu maturalnego.
- Do ćwiczeń i zadań utrwalających podane są odpowiedzi, a do niektórych również wskazówki.



9 788365 120687

3

