

Alicja Cewe • Małgorzata Krawczyk • Maria Kruk
Alina Magryś-Walczak • Halina Nahorska

MATEMATYKA

i przykłady jej zastosowań

zakres podstawowy i rozszerzony

Podręcznik 2



Gdańsk

Autorki: Alicja Cewe, Małgorzata Krawczyk, Maria Kruk,
Alina Magryś-Walczak, Halina Nahorska

Opracowanie edytorskie i redakcyjne: Alicja Cewe, Halina Nahorska, Alina Magryś-Walczak

Konsultacja polonistyczna: Beata Różańska

Projekt okładki: Alicja Cewe

Skład i ilustracje: Jarosław Mach

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez Ministra Edukacji Narodowej i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:

dr. Marii Borowskiej, dr. hab. Edwarda Tutaja, dr. hab. Jadwigi Bednarek.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony.

Etap edukacyjny: III.

Typ szkoły: szkoły ponadpodstawowe.

Rok dopuszczenia: 2020.

Numer ewidencyjny w wykazie: 1068/2/2020.

Podręcznik zgodny z podstawą programową kształcenia ogólnego w liceach ogólnokształcących i technikach – zakres podstawowy i rozszerzony, określoną w rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz.U. z 2018 r., poz. 467.)

ISBN 978-83-65120-73-1

© Copyright by Wydawnictwo Podkowa
Gdańsk, ul. Paganiniego 17/17



Spis treści

Wstęp	6	Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej	72
1. Nierówności kwadratowe	7	Interpretacja geometryczna układów dwóch równań liniowych	81
Odczytywanie własności funkcji kwadratowej z jej wykresu	7	Odległość punktu od prostej i odległość dwóch prostych równoległych	85
Nierówności kwadratowe	10	<i>Zestaw powtórkowy</i>	89
Nierówności kwadratowe – ciąg dalszy ..	15	4. Wektory	90
Układy nierówności liniowych i kwadratowych z jedną niewiadomą ...	20	Pojęcie wektora	90
Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania nierówności kwadratowych i ich układów	22	Suma i różnica wektorów swobodnych ..	92
Równania kwadratowe z parametrem ...	25	Iloczyn wektora swobodnego przez liczbę	97
Nierówność i funkcja kwadratowa z parametrem	31	Wektor na płaszczyźnie kartezjańskiej ..	99
<i>Zestaw powtórkowy</i>	38	Działania na wektorach w układzie współrzędnych	106
2. Funkcje trygonometryczne kątów o miarach od 0° do 180°	40	<i>Zestaw powtórkowy</i>	112
Pojęcie kąta skierowanego i określenie funkcji trygonometrycznych kątów od 0° do 180°	40	5. Kąty w kole i styczna do okręgu ..	113
Przykłady zastosowań funkcji trygonometrycznych kątów od 0° do 180°	49	Kąt środkowy i pole wycinka koła	113
<i>Zestaw powtórkowy</i>	55	Kąt wpisany i jego związek z kątem środkowym	118
3. Prosta na płaszczyźnie kartezjańskiej i interpretacja geometryczna układu równań liniowych	56	Styczna do okręgu i jej własności	124
Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej	56	Okręgi styczne i ich własności	131
Równanie prostej w postaci ogólnej	59	<i>Zestaw powtórkowy</i>	134
Równanie prostej w postaci kierunkowej	63	6. Okręgi na płaszczyźnie kartezjańskiej	136
Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty	68	Równanie okręgu	136
		Wzajemne położenie prostej i okręgu ..	142
		Wyznaczanie równań stycznych do okręgu	145
		<i>Zestaw powtórkowy</i>	149

7. Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest drugiego stopnia	150
Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest liniowe, a drugie stopnia drugiego	150
Interpretacja geometryczna układów równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi	153
Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których każde jest drugiego stopnia.	160
<i>Zestaw powtórkowy</i>	166
8. Rodzaje trójkątów i ich punkty szczególne	167
Rodzaje trójkątów	167
Środek ciężkości trójkąta i jego własności	172
Środek okręgu opisanego na trójkącie	175
Ortocentrum trójkąta i jego własności	179
Środek okręgu wpisanego w trójkąt i twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie.	183
Trójkąty i ich punkty szczególne na płaszczyźnie kartezjańskiej	191
<i>Zestaw powtórkowy</i>	199
9. Obrazy figur w symetrii względem osi układu współrzędnych i względem początku tego układu	201
Obrazy figur w symetrii względem osi układu współrzędnych.	201
Obrazy figur w symetrii względem początku układu współrzędnych	207
<i>Zestaw powtórkowy</i>	211
10. Przekształcanie wykresów funkcji	213
Przekształcanie wykresów funkcji przez symetrię względem osi układu współrzędnych	213
Przesunięcie wykresu funkcji równoległe do osi y	219
Przesunięcie wykresu funkcji równoległe do osi x	221
Wykres funkcji $y = f(x) $	227
<i>Zestaw powtórkowy</i>	230
11. Wzory skróconego mnożenia	232
Sześcian sumy i różnicy dwóch wyrażeń.	233
Suma i różnica sześciątów dwóch wyrażeń.	236
Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia	240
<i>Zestaw powtórkowy</i>	246
12. Wielomiany	247
Wielomiany jednej i wielu zmiennych	247
Równość wielomianów	250
Suma, różnica oraz iloczyn wielomianów.	254
Dzielenie wielomianu przez dwumian	257
Schemat Hornera	262
Pierwiastki wielomianu jednej zmiennej i twierdzenie Bézouta	266
Twierdzenia o pierwiastkach wielomianu	268
Rozkładanie wielomianów na czynniki	274
Równania wielomianowe	279
Równanie typu $x^n = a$	286
Nierówności wielomianowe	290
<i>Zestaw powtórkowy</i>	297

13. Wyrażenia wymierne	298	Odpowiedzi i wskazówki	327
Wyrażenie wymierne i jego dziedzina .	298	1. Nierówności kwadratowe.....	327
Skracanie i rozszerzanie wyrażeń		2. Funkcje trygonometryczne kątów	
wymiernych.....	302	od 0° do 180°	332
Działania na wyrażeniach wymiernych	307	3. Prosta na płaszczyźnie	
Równania wymierne	311	kartezjańskiej i interpretacja	
Nierówności wymierne.....	317	geometryczna układu równań	
Przykłady zadań prowadzących do		liniowych	333
rozwiązania równań wymiernych ..	321	4. Wektory.....	336
<i>Zestaw powtórkowy</i>	325	5. Kąty w kole i styczna do okręgu. .	338
		6. Okręgi na płaszczyźnie	
		kartezjańskiej	341
		7. Układy równań z dwiema	
		niewiadomymi, z których	
		przynajmniej jedno jest drugiego	
		stopnia.....	344
		8. Rodzaje trójkątów i ich punkty	
		szczególne.....	347
		9. Obrazy figur w symetrii względem	
		osi układu współrzędnych	
		i względem jego początku	351
		10. Przekształcanie wykresów funkcji	353
		11. Wzory skróconego mnożenia	356
		12. Wielomiany	358
		13. Wyrażenia wymierne.....	365

Wstęp

Książka „**Podręcznik 2 – zakres podstawowy i rozszerzony**” z serii **Matematyka i przykłady jej zastosowań** jest adresowana do uczniów klasy drugiej liceum ogólnokształcącego i technikum, którzy ukończyli ośmioletnią szkołę podstawową.

Jest w nim wystarczająca liczba zadań i ćwiczeń, by nabyć umiejętności wymienione w podstawie programowej z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz.U. z 2018 r., poz. 467).

W końcowej części każdego realizowanego tematu lekcji zamieszczono zadania pozwalające na utrwalenie wiadomości (zadania utrwalające). Odpowiedzi do zadań utrwalających znajdują się na ostatnich stronach książki. Odpowiedzi do ćwiczeń są umieszczone w fioletowej ramce przed każdym zestawem zadań utrwalających. Prosimy, aby w podręczniku nie umieszczać szkiców rozwiązań oraz odpowiedzi i nie zamieszczać ich w zadaniach zamkniętych.

Każdy rozdział kończy się zestawem powtórkowym, w którym są zadania otwarte i zamknięte.

Przy rozwiązywaniu problemów można korzystać z dostępnych narzędzi, czyli encyklopedii, tablic matematycznych, kalkulatorów i komputerów.

Życzymy powodzenia,
autorki.

1. Nierówności kwadratowe

Odczytywanie własności funkcji kwadratowej z jej wykresu

W klasie pierwszej poznaliście funkcję kwadratową, jej wykres i własności oraz sposoby:

- obliczania jej miejsc zerowych,
- wyznaczania zbioru jej wartości,
- określania jej znaków,
- określania przedziałów monotoniczności.

Przy rozwiązywaniu nierówności kwadratowych niezbędna jest umiejętność szkicowania wykresu funkcji kwadratowej (tzw. linii znaku) i odczytywania z niego znaków jej wartości.

Przypomnijmy

Wzory funkcji kwadratowej, gdzie $a \neq 0$	
Postać ogólna	$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta > 0$, to $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = 0$, to $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $\Delta < 0$, to funkcja f nie ma miejsc zerowych
Postać kanoniczna	$f(x) = a(x - p)^2 + q$ $W = (p, q)$ – współrzędne wierzchołka paraboli wykresu funkcji f , gdzie $p = \frac{-b}{2a}$ i $q = \frac{-\Delta}{4a}$
Postać iloczynowa	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdy $\Delta > 0$, x_1, x_2 – miejsca zerowe, $f(x) = a(x - x_0)^2$, gdy $\Delta = 0$, x_0 – miejsce zerowe, $W = (p, q)$, gdzie $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$ i $q = f(p) = \frac{-a(x_1 - x_2)^2}{4}$

Ćwiczenie 1.

- Czy każdy wzór funkcji kwadratowej podany w postaci ogólnej można przedstawić w postaci iloczynowej? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy każdy wzór funkcji kwadratowej podany w postaci iloczynowej można przedstawić w postaci kanonicznej? Odpowiedź uzasadnij.

Przykład 1. Oblicz miejsca zerowe funkcji f , gdy:

a) $f(x) = -3(x+1)(x-5)$, b) $f(x) = (x+1)^2 - 16$.

Rozwiązanie Obliczyć miejsca zerowe funkcji f , to znaczy rozwiązać równanie $f(x) = 0$.

a) $-3(x+1)(x-5) = 0$

$$x+1=0 \text{ lub } x-5=0$$

$$x=-1 \text{ lub } x=5.$$

$a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

b) *I sposób*

$$(x+1)^2 - 16 = 0$$

$$(x+1)^2 = 16$$

$$|x+1| = \sqrt{16}$$

$$|x+1| = 4$$

$$x+1=-4 \text{ lub } x+1=4$$

$$x=-5 \text{ lub } x=3.$$

$x^2 = a$ i $a \geq 0$
wtedy i tylko
wtedy, gdy
 $|x| = \sqrt{a}$.

$|x| = a$
i $a > 0$ wtedy
i tylko wtedy,
gdy $x = \pm a$.

II sposób

$$(x+1)^2 - 16 = 0$$

$$(x+1)^2 - 4^2 = 0$$

$$(x+1-4)(x+1+4) = 0$$

$$(x-3)(x+5) = 0$$

$$x-3=0 \text{ lub } x+5=0$$

$$x=3 \text{ lub } x=-5.$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

III sposób

$$(x+1)^2 - 16 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 16 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x_1 = \frac{-2-8}{2} = -5, \quad x_2 = \frac{-2+8}{2} = 3.$$

$$\Delta = 64, \quad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Odp.: a) $x_1 = -1, x_2 = 5$, b) $x_1 = -5, x_2 = 3$.

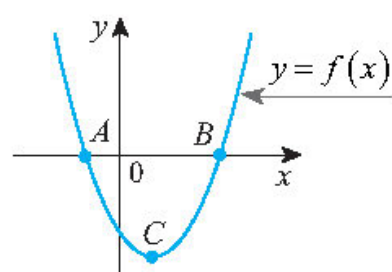
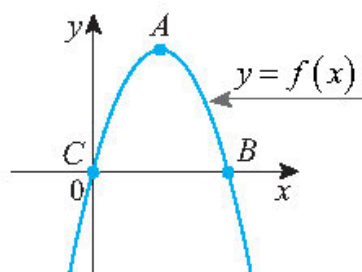
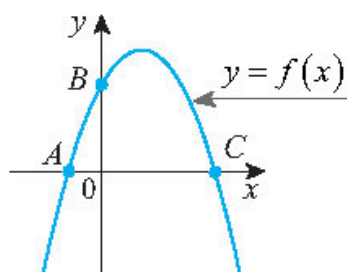
Ćwiczenie 2. Oblicz miejsca zerowe funkcji f , gdy:

a) $f(x) = 5(x+3)(x+1)$, b) $f(x) = -(x-2)^2 + 1$,

c) $f(x) = -x(x+5)$, d) $f(x) = 3(x+1)^2 - 12$.

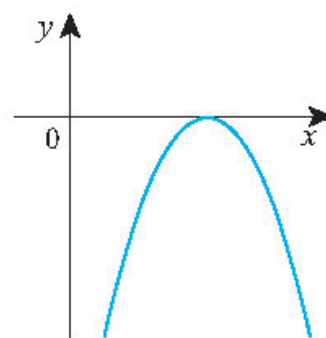
Ćwiczenie 3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f , na którym zaznaczono punkty A , B i C . Wykonaj odpowiednie obliczenia i podaj ich współrzędne.

a) $f(x) = 2 + x - x^2$, b) $f(x) = \frac{1}{2}x(6-x)$, c) $f(x) = (x-2)^2 - 9$.





Ćwiczenie 4. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ■ wpisz jeden ze znaków: „>”, „<” lub „=”.



- a) a ■ 0 , b) c ■ 0 , c) Δ ■ 0 , d) b ■ 0 .

Ćwiczenie 5. Wyznacz zbiór wartości funkcji f , gdy:

- a) $f(x) = 4(x+3)^2 - 5$, b) $f(x) = (1-x)(x+3)$, c) $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) Nie, bo nie każda funkcja ma miejsca zerowe. b) Tak, bo wykresem każdej funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku $W = (p, q)$.
 2. a) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, b) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, c) $x_1 = -5$, $x_2 = 0$, d) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.
 3. a) $A = (-1, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 0)$, b) $A = \left(3, 4\frac{1}{2}\right)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 0)$,
 c) $A = (-1, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (2, -9)$. 4. a) $a < 0$, b) $c < 0$, c) $\Delta = 0$, d) $b > 0$.
 5. a) $\langle -5; +\infty \rangle$, b) $\langle -\infty; 4 \rangle$, c) $\langle -1; +\infty \rangle$.

Zadania utrwalające

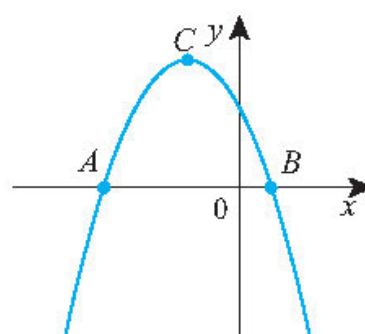
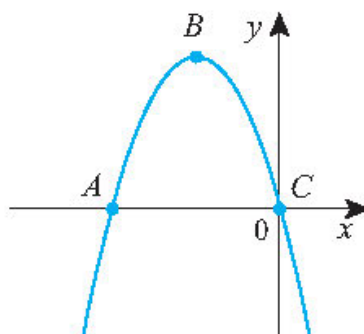
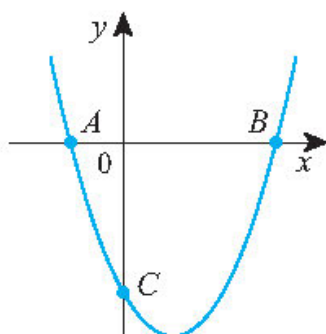
1.1. Oblicz miejsca zerowe funkcji f , gdy:

- a) $f(x) = -2(1-x)^2$, b) $f(x) = -4(3-x)(3+x)$,
 c) $f(x) = (x+3)^2 - 9$, d) $f(x) = -2(x+4)^2 - 8$.

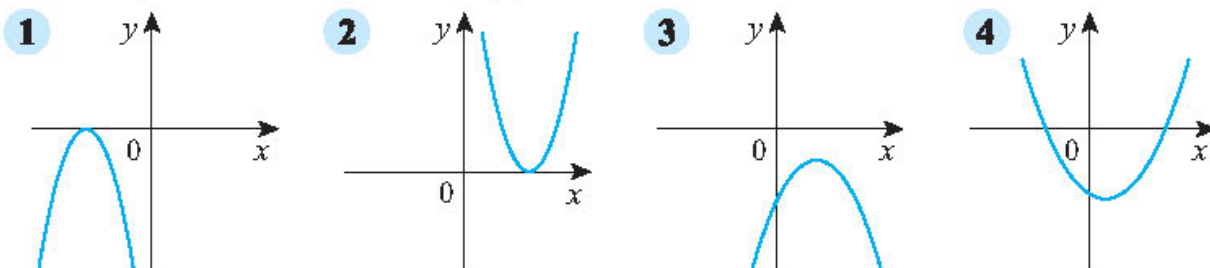
1.2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f , na którym zaznaczono punkty A , B i C .

Wykonaj odpowiednie obliczenia i podaj ich współrzędne, gdy:

- a) $f(x) = x^2 - x - 6$, b) $f(x) = -x(x+4)$, c) $f(x) = -(x+1)^2 + 4$.



1.3. Na rysunkach od **1** do **4** przedstawione są szkice wykresów funkcji kwadratowych określonych wzorem postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Dla każdej z tych funkcji uzupełnij w zeszycie zapisy, wpisując w miejsce ■ jeden ze znaków: „>”, „<” lub „=”.

- a) a ■ 0 , b) c ■ 0 , c) Δ ■ 0 , d) b ■ 0 .

1.4. Określ zbiór wartości funkcji f , gdy:

- a) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$, b) $f(x) = (2-x)(3-x)$,
c) $f(x) = -4x(x+1)$, d) $f(x) = -3x^2 + 4x - 2$.

1.5. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f , gdy:

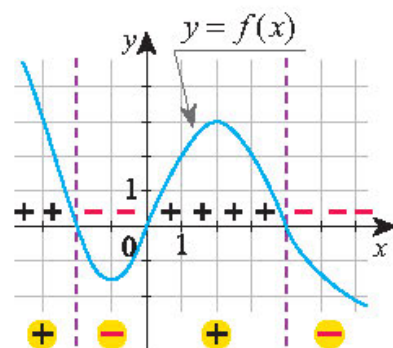
- a) $f(x) = -\frac{1}{3}(x+3)^2$, b) $f(x) = (x-2)^2 - 4$, c) $f(x) = -x(x+4)$,
d) $f(x) = (x+3)(x-2)$, e) $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$, f) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.

Nierówności kwadratowe

Przypomnijmy

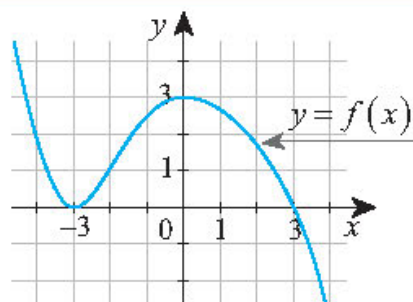
Jeśli z wykresu funkcji f odczytujemy jej:

- znak, to określamy, dla jakich argumentów x wartości funkcji są dodatnie ($f(x) > 0$) lub ujemne ($f(x) < 0$). Mówimy wówczas, że podajemy rozwiązanie nierówności $f(x) > 0$ lub $f(x) < 0$;
- miejsca zerowe, to podajemy rozwiązanie równania $f(x) = 0$.



Ćwiczenie 6. Odczytaj z wykresu funkcji f przedstawionego na rysunku rozwiązanie nierówności:

- a) $f(x) \geq 0$, b) $f(x) < 0$, c) $f(x) \leq 0$.



Umiejętność odczytywania z wykresu funkcji argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne lub równe zero, jest bardzo przydatna w rozwiązywaniu nierówności kwadratowych.

Definicja

Jeżeli $a \neq 0$, to każdą z nierówności postaci:

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

nazywamy nierównością kwadratową z jedną niewiadomą x .

a, b, c – współczynniki liczbowe trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Przykład 2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -x(x-2)$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności:

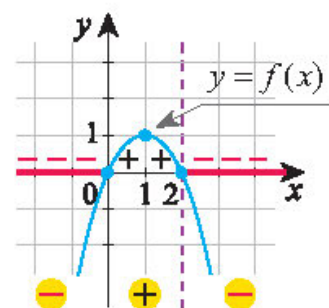
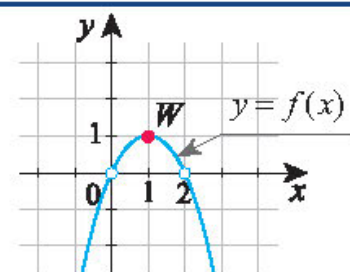
a) $-x(x-2) > 0$, b) $-x(x-2) \leq 0$.

Rozwiązanie

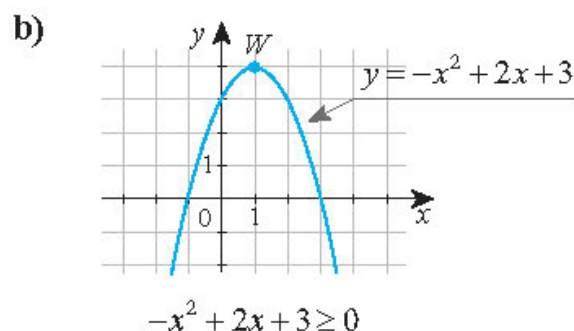
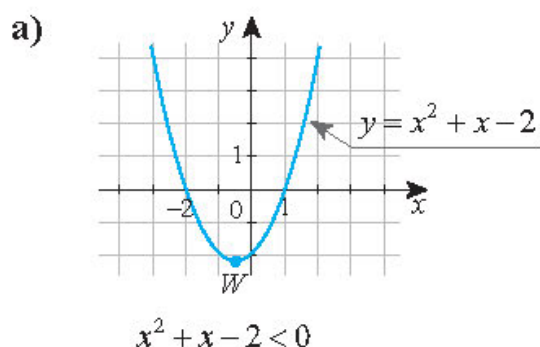
Miejsca zerowe 0 i 2 funkcji f podzieliły zbiór liczb rzeczywistych na trzy przedziały, w których określamy znak funkcji f i odczytujemy odpowiedź.

a) $-x(x-2) > 0$, gdy $x \in (0; 2)$,

b) $-x(x-2) \leq 0$, gdy $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.



Ćwiczenie 7. Odczytaj z wykresu funkcji kwadratowej rozwiązanie nierówności zapisanej pod rysunkiem.

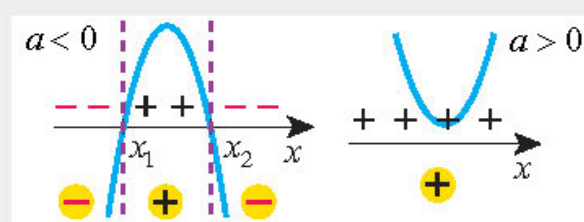


Współrzędne wierzchołka W paraboli $y = ax^2 + bx + c$ oraz jej punkt przecięcia z osią y nie mają wpływu na zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej.

Istotne jest położenie wykresu funkcji względem osi x . Jedną z metod rozwiązywania nierówności kwadratowych jest naszkicowanie wykresu funkcji uwzględniającego jej miejsca zerowe i znak współczynnika a przy x^2 .

Uwaga

Przybliżony wykres dowolnej funkcji, na którym nie uwzględnia się osi y , będziemy nazywać **linią znaku** tej funkcji.



linia znaku funkcji kwadratowej

Przykład 3. Rozwiąż nierówność $-(x+3)(x-2) \geq 0$.

Rozwiązanie*I sposób*

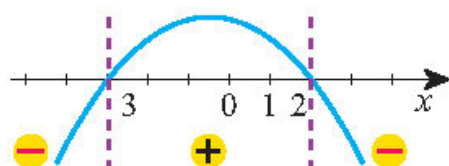
Szkicujemy linię znaku funkcji $f(x) = -(x+3)(x-2)$ i odczytujemy odpowiedź.

$$-(x+3)(x-2) \geq 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+3=0 \text{ lub } x-2=0$$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$$



$$x \in \langle -3; 2 \rangle$$

Nierówność ma postać

$$a(x+3)(x-2) \geq 0, \text{ gdzie } a = 1.$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji

$$f(x) = -(x+3)(x-2), \text{ dla której } a < 0 \text{ i } \Delta > 0.$$

Szkicujemy linię znaku funkcji f i odczytujemy odpowiedź.

Rozwiązaniem danej nierówności jest każda liczba należąca do przedziału $\langle -3; 2 \rangle$.

II sposób

Korzystamy z własności iloczynu.

$$-(x+3)(x-2) \geq 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$(x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\begin{cases} x+3 \leq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Układ nierówności nie ma rozwiązania.

$$-3 \leq x \leq 2.$$

$a \cdot b \leq 0$ wtedy i tylko wtedy,

$$\text{gdy } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

Ćwiczenie 8. Rozwiąż nierówność: a) $2(x+4)(x+1) < 0$, b) $-2x\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0$.

Ćwiczenie 9. Rozwiąż nierówność, rozkładając jej lewą stronę na czynniki:

a) $4x^2 - 1 \geq 0$, b) $-5x^2 + 10 > 0$.

Rozwiązując nierówności kwadratowe, często korzystamy z własności potęg parzystego stopnia.

Przypomnijmy

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

- $x^2 \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathbf{R}$,
- $x^2 \leq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
- $x^2 > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
- $x^2 < 0$ – nierówność nie ma rozwiązania.

Ćwiczenie 10. Podaj rozwiązanie nierówności:

- a) $x^2 > -1$, b) $x^2 \geq -4$, c) $x^2 < -2$, d) $x^2 \leq -1$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

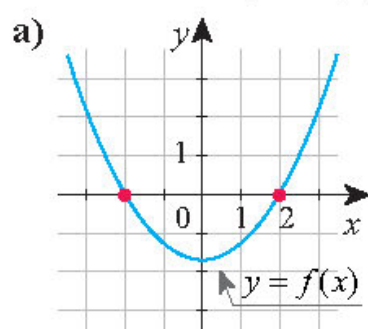
6. a) $x \in (-\infty; 3]$, b) $x \in (3; +\infty)$, c) $x \in \{-3\} \cup (3; +\infty)$. 7. a) $x \in (-2; 1)$, b) $x \in \{-1; 3\}$.

8. a) $x \in (-4; -1)$, b) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. 9. a) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, b) $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

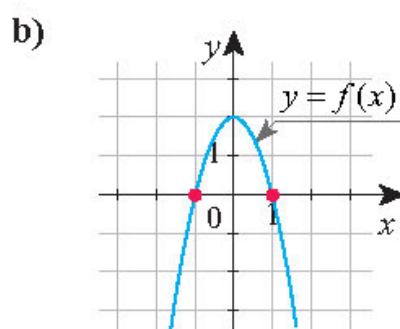
10. a) $x \in \mathbf{R}$, b) $x \in \mathbf{R}$, c) nierówność nie ma rozwiązania, d) nierówność nie ma rozwiązania.

Zadania utrwalające

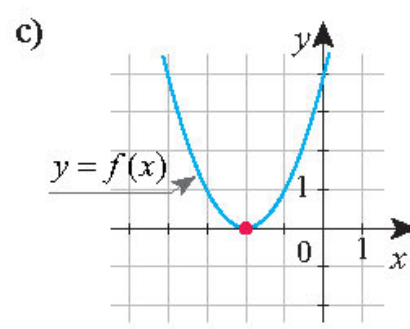
1.6. Na rysunku przedstawiony jest szkic wykresu funkcji kwadratowej f . Podaj rozwiązanie nierówności zapisanej pod rysunkiem.



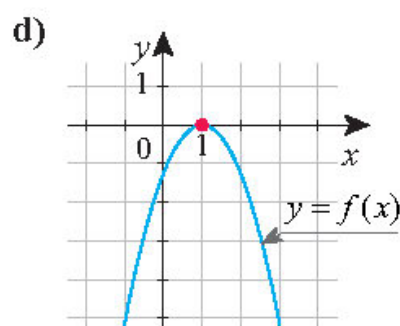
$$f(x) \geq 0$$



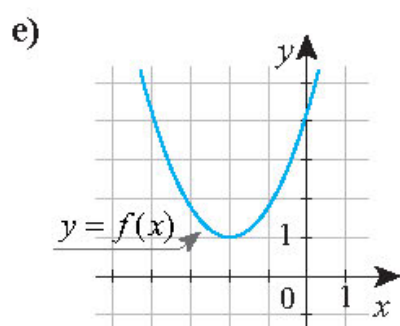
$$f(x) > 0$$



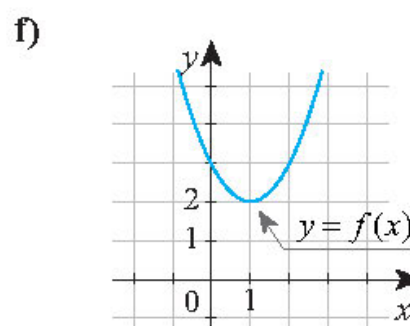
$$f(x) \leq 0$$



$$f(x) < 0$$

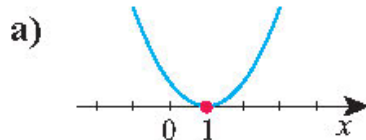


$$f(x) \geq 0$$

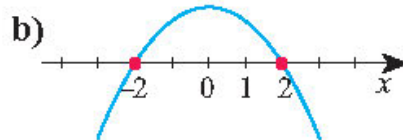


$$f(x) \leq 0$$

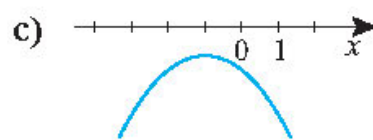
1.7. Odczytaj z linii znaku funkcji kwadratowej przedstawionej na rysunku rozwiązanie nierówności zapisanej pod nią.



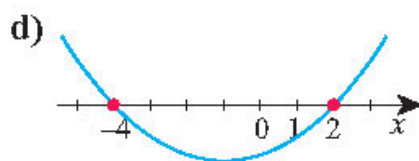
$$x^2 - 2x + 1 > 0$$



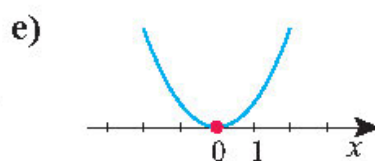
$$(2-x)(2+x) \geq 0$$



$$-(x+1)^2 - 1 \leq 0$$



$$5(x+4)(x-2) < 0$$



$$x^2 \geq 0$$



$$(x+3)^2 + 1 \geq 0$$

1.8. Rozwiąż nierówność:

a) $x(x+1) < 0$,

b) $-2x(x-3) \geq 0$,

c) $3(1-x)x < 0$,

d) $0,5x(2-x) > 0$,

e) $4x(2x-3) \leq 0$,

f) $-\frac{1}{3}x(6-3x) < 0$.

1.9. Rozwiąż nierówność:

a) $4x^2 - 8x > 0$,

b) $\frac{1}{2}x^2 + 6x < 0$,

c) $5x - 10x^2 \geq 0$,

d) $2x^2 < x$,

e) $x^2 > 5x$,

f) $3x \leq 2x^2$.

1.10. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-3)(x+1) \leq 0$,

b) $-(2-x)(x+2) > 0$,

c) $4(x+1)(x-3) \geq 0$,

d) $(2x-4)(1-x) < 0$,

e) $1\frac{1}{2}(x-5)(6-x) \leq 0$,

f) $-\sqrt{2}(3-x)(1-x) > 0$.

1.11. Podaj rozwiązanie nierówności:

a) $x^2 > -2$,

b) $2\sqrt{3}x^2 > 0$,

c) $-x^2 > 1$,

d) $x^2 + \sqrt{2} < 0$,

e) $2x^2 + 3 \geq 0$,

f) $4 \leq -2x^2$.

1.12. Uzasadnij, że każda liczba rzeczywista x jest rozwiązaniem nierówności:

D

a) $x^2 > -1$,

b) $2(x-1)^2 - (x-2)^2 \geq -2$,

c) $-x^2 - 1 < 0$,

d) $x^2 \geq 2x - 1$,

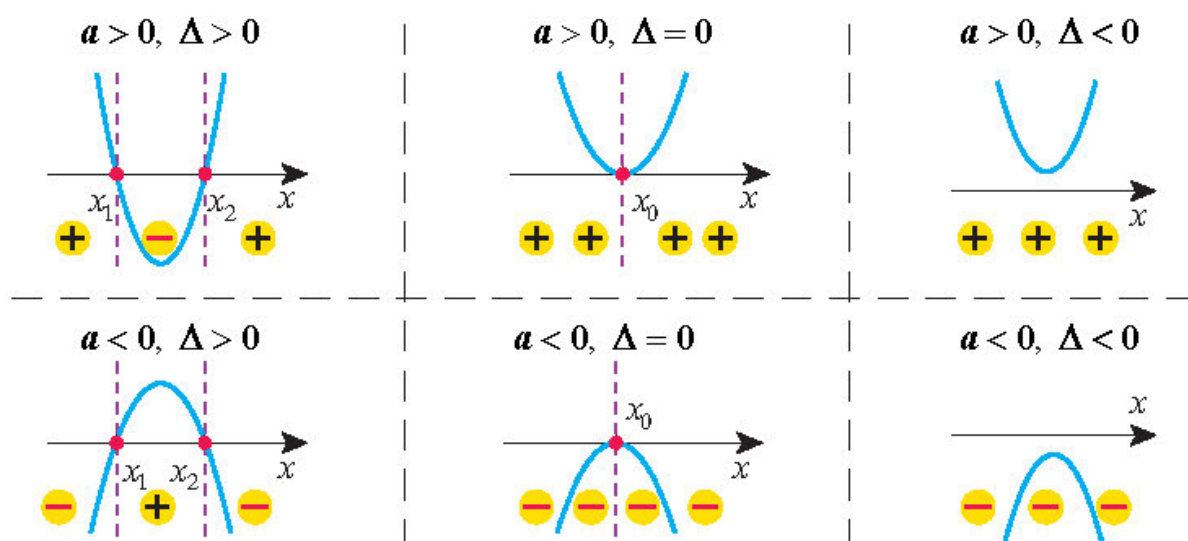
e) $4x \leq x^2 + 4$,

f) $3x(x+1) \geq 3x$.

Nierówności kwadratowe – ciąg dalszy

W klasie pierwszej poznaliście sześć możliwych położenia wykresów funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, w zależności od znaków wyróżnika Δ i współczynnika a .

Możliwych jest zatem sześć różnych linii znaku dla funkcji kwadratowej.



Uwaga

Rozwiązać nierówność kwadratową

$$\bullet ax^2 + bx + c > 0 \quad \bullet ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \bullet ax^2 + bx + c < 0 \quad \bullet ax^2 + bx + c \leq 0$$

z niewiadomą x , to znaczy odpowiedzieć na pytanie, dla jakich argumentów x funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma wartości:

$$\bullet \text{dodatnie} \quad (f(x) > 0) \quad \bullet \text{nieujemne} \quad (f(x) \geq 0) \quad \bullet \text{ujemne} \quad (f(x) < 0) \quad \bullet \text{niedodatnie} \quad (f(x) \leq 0)$$

Przykład 4. Rozwiąż nierówność:

a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, b) $2(2 - x) < -x(x - 3)$.

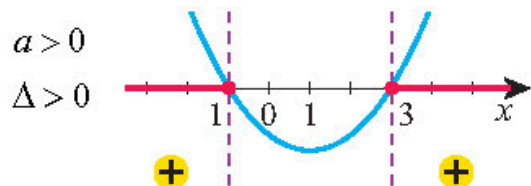
Rozwiązanie

a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 16, \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = -1, x_2 = 3$$



$$x^2 - 2x - 3 \geq 0, \text{ gdy } x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty).$$

Obliczamy miejsce zerowe funkcji
 $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Szkicujemy linię znaku dla przypadku

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \text{ i odczytujemy odpowiedź.}$$

b) $2(2-x) < -x(x-3)$

$$4 - 2x < -x^2 + 3x$$

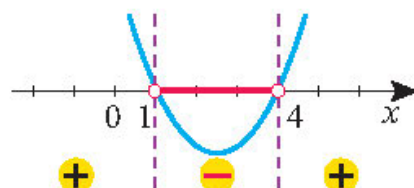
$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 4$$

$$a > 0$$

$$\Delta > 0$$



$$2(2-x) < -x(x-3), \text{ gdy } x \in (1; 4).$$

Przekształcamy nierówność do postaci $ax^2 + bx + c < 0$.

Obliczamy miejsce zerowe funkcji

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

$$\Delta = 9, \sqrt{\Delta} = 3.$$

Szkicujemy linię znaku i odczytujemy odpowiedź.

Uwaga

Rozwiązując nierówność kwadratową z użyciem linii znaku, należy:

- obliczyć miejsca zerowe odpowiedniej funkcji kwadratowej (jeżeli istnieją) lub stwierdzić, że nie istnieją,
- naszkicować linię znaku funkcji kwadratowej,
- odczytać z linii znaku zbiór argumentów, dla których nierówność jest spełniona.

Ćwiczenie 11. Rozwiąż nierówność: a) $x^2 + x - 2 \leq 0$, b) $(x-3)^2 > (x-3)(2x+9)$.

Przykład 5. Uzasadnij, że nierówność $2x^2 - 7x + 12 > 0$ spełnia każda liczba rzeczywista x .

Rozwiązanie Aby uzasadnić, że daną nierówność spełnia każda liczba rzeczywista x , wystarczy pokazać, że zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór $\mathbf{R}$.

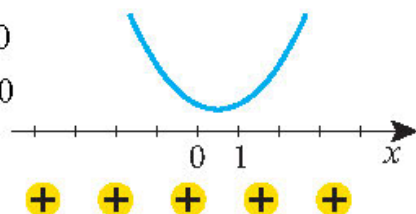
$$2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Delta = 49 - 96 = -47$$

$\Delta < 0$, więc funkcja f nie ma miejsc zerowych.

$$a > 0$$

$$\Delta < 0$$



Obliczamy miejsce zerowe funkcji

$$f(x) = 2x^2 - 7x + 12.$$

Szkicujemy linię znaku funkcji f dla

przypadku $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ i odczytujemy

rozwiązanie nierówności $f(x) > 0$.

Zatem $f(x) > 0$, gdy $x \in \mathbf{R}$.

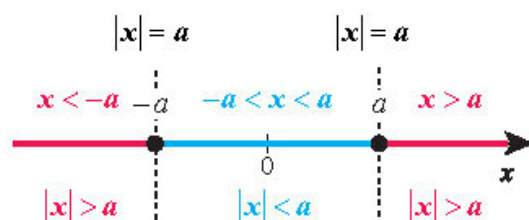
c.n.u.

Ćwiczenie 12. Uzasadnij, że jeżeli $-4x^2 + 10x - 7 < 0$, to $x \in \mathbf{R}$.

Rozwiązując nierówności kwadratowe, możemy korzystać z własności wartości bezwzględnej. Pokażemy to na przykładach.

Przypomnijmy

- $\sqrt{x^2} = |x|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathbb{R}$.
- Jeśli $a > 0$ i: $|x| < a$, to $-a < x < a$,
 $|x| > a$, to $x < -a$ lub $x > a$,
 $x^2 = a$, to $|x| = \sqrt{a}$.



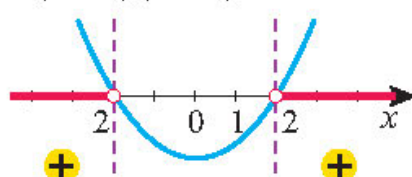
Przykład 6. Rozwiąż nierówność $x^2 > 4$.

Rozwiązanie

I sposób $x^2 > 4$

$$x^2 - 4 > 0$$

$$(x-2)(x+2) > 0$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$

II sposób $x^2 > 4$

$$\sqrt{x^2} > \sqrt{4}$$

$$|x| > 2. \text{ Zatem } x < -2 \text{ lub } x > 2.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Szkicujemy linię znaku funkcji $f(x) = x^2 - 4$ i odczytujemy odpowiedź.

Obie strony nierówności są nieujemne
– pierwiastkujemy każdą ze stron.

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Ćwiczenie 13. Rozwiąż nierówność: a) $x^2 \geq 9$, b) $x^2 < 3$.

Przykład 7. Rozwiąż nierówność $-3(x+2)^2 + 12 > 0$.

Rozwiązanie

$$-3(x+2)^2 + 12 > 0$$

$$-3(x+2)^2 > -12 / : (-3)$$

$$(x+2)^2 < 4$$

$$|x+2| < 2$$

$$-2 < x+2 < 2, \text{ skąd } -4 < x < 0.$$

$$\text{Odp.: } x \in (-4; 0).$$

$a^2 < 4$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $|a| < 2$, gdzie $a = x+2$

$|a| < 2$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $-2 < a < 2$

Ćwiczenie 14. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-1)^2 > 9$, b) $2 > (x+4)^2$.

Ćwiczenie 15. Podaj rozwiązanie nierówności:

a) $-3(x+2)^2 \leq 0$, b) $(1-x)^2 + 3 > 0$.

Umiejętność rozwiązywania nierówności kwadratowych pozwala wyznaczać dziedziny niektórych funkcji. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 8. Wyznacz dziedzinę D_f funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$.

Rozwiązanie

a) Wyrażenie $\sqrt{x^2 - 1}$ ma sens liczbowy, gdy $x^2 - 1 \geq 0$, czyli dziedziną D_f funkcji f jest zbiór liczb spełniających nierówność:

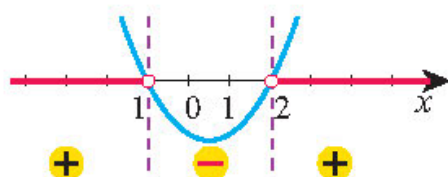
$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$|x| \geq 1$$

$$x \leq -1 \text{ lub } x \geq 1.$$

$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{1}$$

b) Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$ ma sens liczbowy, gdy $x^2 - x - 2 > 0$.



$$x < -1 \text{ lub } x > 2.$$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Delta &= 9, \sqrt{\Delta} = 3 \\ x_1 &= -1, x_2 = 2 \end{aligned}$$

Odp.: a) $D_f = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$, b) $D_f = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Ćwiczenie 16. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}$,

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$, d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $x \in \{-2; 1\}$, b) $x \in (-12; 3)$. 12. *Wskazówka.* Wystarczy wykazać, że funkcja $f(x) = -4x^2 + 10x - 7$ przyjmuje wartości ujemne dla każdej liczby rzeczywistej. 13. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, b) $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.
 14. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$, b) $x \in (-\sqrt{2} - 4; \sqrt{2} - 4)$. 15. a) $x \in \mathbb{R}$, b) $x \in \mathbb{R}$.
 16. a) $D_f = \{-2; 2\}$, b) $D_f = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, c) $D_f = (-3; 1)$, d) $D_f = \mathbb{R}$.

Zadania utrwalające

1.13. Rozwiąż nierówność:

- a) $x^2 + 3x - 4 < 0$, b) $3x^2 - x + 2 \geq 0$, c) $x^2 - 3x - 28 \geq 0$,
 d) $-x^2 + 8x < 15$, e) $x^2 + 4,8x - 1 > 0$, f) $-2x^2 + \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{4}$,
 g) $12x^2 - 11x + 2 < 0$, h) $-\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} > 0$, i) $\sqrt{3}x^2 + 2x - \sqrt{3} \leq 0$.

1.14. Rozwiąż nierówność:

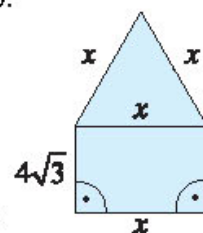
- a) $x(x-3) - 4(5-x) \geq 0$, b) $(x-1)(x+1) + (x-2)^2 < x(x-4)$,
 c) $(2x-1)(x+2) \geq (x+2)(x-4)$, d) $(x+5)^2 \geq (2x+10)^2$.

1.15. Podaj rozwiązanie nierówności:

- a) $(x-2)^2 > 0$, b) $(x+2)^2 \leq 0$, c) $-5(x+1)^2 < 0$,
 d) $(x-3)^2 \geq 0$, e) $x^2 + 6x + 9 > 0$, f) $-x^2 + 10x - 25 \leq 0$.

1.16. Rozwiąż nierówność:

- a) $(x-3)^2 \leq 1$, b) $(2x-3)^2 > 9$, c) $1 \geq (x+2)^2$,
 d) $(3x+4)^2 - 1 \geq 8$, e) $(4-x)^2 + 2 \leq 1$, f) $16 - (8x+5)^2 \leq 0$.

1.17. Podaj wszystkie liczby naturalne, które spełniają nierówność $x^2 - 6x + 5 < 0$.1.18. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność $12x^2 - 6x \geq 0$.1.19. Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $-2x^2 + 8 > 0$.1.20. Dla jakiej wartości x pole prostokąta jest większe od pola trójkąta o wymiarach podanych na rysunku?1.21. Zbiorem rozwiązań nierówności $(5x-2)(3x+k) < 0$ z niewiadomą x jest przedział $\left(\frac{2}{5}, 5\right)$. Oblicz k .

1.22. Wyznacz dziedzinę D_f funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = \sqrt{(x+1)(x+2)}$, b) $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$, c) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$,

d) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$, e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+9}}$, f) $f(x) = \frac{-5}{\sqrt{(x-5)(x+5)}}$.

Układy nierówności liniowych i kwadratowych z jedną niewiadomą

Przypomnijmy

- Jednoczesne zachodzenie dwóch nierówności $a < b$ i $b < c$ można zapisać w postaci:
 - $a < b < c$ (podwójna nierówność) lub ▪ $\begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases}$ (układ nierówności).
- Aby rozwiązać układ nierówności, należy rozwiązać każdą z nich, a następnie podać zbiór liczb, które jednocześnie spełniają te nierówności.

Ćwiczenie 17. Rozwiąż układ nierówności: a) $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 2x-3 < 5 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 6(x-2) \geq 5x-8 \\ x-1 > 3x-11 \end{cases}$.

Przykład 9. Rozwiąż układ nierówności $\begin{cases} x^2+x-2 \leq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy oddzielnie każdą z nierówności układu.

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

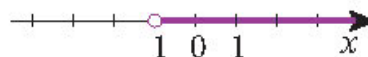


$$x \in \langle -2; 1 \rangle.$$

$$x+1 > 0$$

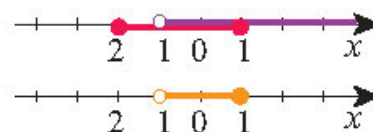
$$x > -1, \text{ czyli}$$

$$x \in (-1; +\infty).$$



Wyznaczamy część wspólną zbiorów rozwiązań.

$$\begin{cases} x \in \langle -2; 1 \rangle \\ x \in (-1; +\infty) \end{cases}, \text{ więc } x \in (-1; 1).$$



Odp.: $x \in (-1; 1]$.

Ćwiczenie 18. Rozwiąż układ nierówności:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x + 1 \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} -2x^2 - 5x + 3 > 0 \\ x + 1 \leq 0 \end{cases}.$$

Przykład 10. Wyznacz dziedzinę funkcji określonej wzorem $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Rozwiązanie

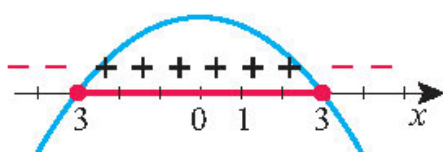
Funkcja f jest określona dla takich argumentów x , dla których wyrażenia $\sqrt{9-x^2}$

i $\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$ mają sens liczbowy, czyli gdy $9-x^2 \geq 0$ i $x^2-2x > 0$, więc $\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x^2-2x > 0 \end{cases}$.

Rozwiązujemy każdą z nierówności układu.

$$9-x^2 \geq 0$$

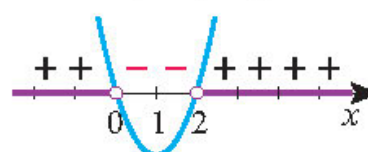
$$9-x^2 = 0, \text{ skąd } x_1 = -3 \text{ i } x_2 = 3.$$



$$x \in \langle -3; 3 \rangle.$$

$$x^2 - 2x > 0$$

$$x^2 - 2x = 0, \text{ skąd } x_3 = 0 \text{ i } x_4 = 2.$$



$$x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

Wyznaczamy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności układu.

$$\begin{cases} x \in \langle -3; 3 \rangle \\ x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \end{cases}, \text{ więc}$$

$$x \in \langle -3; 0 \rangle \cup (2; 3).$$

$$\text{Odp.: } D_f = \langle -3; 0 \rangle \cup (2; 3).$$



Ćwiczenie 19. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10} + \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

17. a) $x \in (-2; 4)$, b) $x \in \langle 4; 5 \rangle$.

18. a) $x \in \langle 0; 4 \rangle$, b) $x \in (-3; -1 \rangle$.

19. $D_f = (0; 2) \cup \langle 5; 6 \rangle$.

Zadania utrwalające

1.23. Rozwiąż układ nierówności:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x-10 > -10 \\ 4x^2-9 < 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 9x^2-12x+4 \geq 0 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases}.$$

1.24. Rozwiąż układ nierówności:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 < 4 \\ 3x^2+x+5 > 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 5x-12 < 2x^2 \\ (x+2)(x-3) \geq 0 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} 16-x^2 \geq 0 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}.$$

1.25. Rozwiąż podwójną nierówność:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x-8 < 3x < 15+x-x^2, & \text{b) } 2 < x^2-x < x^2+2x, \\ \text{c) } x^2-11 < 5x+3 < 7+9x, & \text{d) } 2 \leq x^2 < 3, \\ \text{e) } -2 \leq x-3x^2 < 2, & \text{f) } |x^2-x| < 2. \end{array}$$

1.26. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{5-x}, & \text{b) } f(x) = \sqrt{(x+3)(2x-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ \text{c) } f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{d) } f(x) = \sqrt{x^2-4x+4} + \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}. \end{array}$$

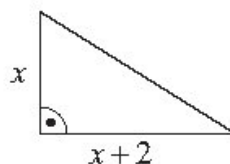
Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania nierówności kwadratowych i ich układów

Wiele wyników doświadczeń i obserwacji zjawisk można opisać wzorem funkcji kwadratowej, równaniem kwadratowym, nierównością kwadratową lub ich układami. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 11. Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego różnią się o 2. Jaka długość ma krótsza przyprostokątna, jeżeli pole tego trójkąta jest mniejsze od 60?

Rozwiązanie

Oznaczenia: x – krótsza przyprostokątna, gdzie $x > 0$,
 $x+2$ – dłuższa przyprostokątna.



$$P = \frac{1}{2}x \cdot (x+2), \text{ gdzie } x > 0 \text{ i } P > 0.$$

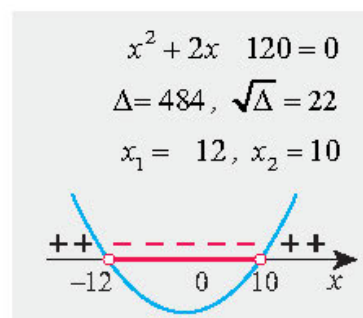
Pole P trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x \cdot (x+2) < 60 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 120 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12 < x < 10 \\ x > 0 \end{cases}$$

Odp.: $x \in (0; 10)$.



Ćwiczenie 20. Długości boków prostokąta różnią się o 6. Czy jest możliwe, by pole tego prostokąta było mniejsze od 27? Odpowiedź uzasadnij.

Przykład 12. Całkowity koszt (w złotych) wytworzenia x sztuk pewnego produktu określony jest wzorem $k(x) = -2x^2 + 700x + 300$, gdzie $x < 22$. Oblicz, ile sztuk towaru można wyprodukować, by koszt k ich produkcji nie przekroczył kwoty 8000 zł.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} k(x) \leq 8000 \\ x \in \mathbb{N}^+ \\ x < 22 \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} -2x^2 + 700x + 300 \leq 8000 \\ x \in \mathbb{N}^+ \\ x < 22 \end{cases}$$

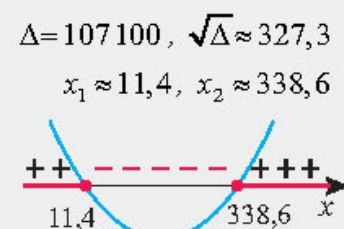
Koszt nie przekracza 8000 zł.
 x – liczba wyprodukowanych
sztuk towaru

$$\begin{cases} -2x^2 + 700x - 7700 \leq 0 / : (-2) \\ x \in \{1, 2, 3, \dots, 21\} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{N}^+ \text{ i } x < 22$,
więc $x \in \{1, 2, 3, \dots, 21\}$

$$\begin{cases} x^2 - 350x + 3850 \geq 0 \\ x \in \{1, 2, 3, \dots, 21\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 11,4 \text{ lub } x \geq 338,6 \\ x \in \{1, 2, 3, \dots, 21\} \end{cases}$$



Odp.: $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Ćwiczenie 21. Pewien zakład sprzedaje swoje wyroby w cenie 150 zł za sztukę. Zysk Z , jaki uzyskuje ten zakład po sprzedaży n sztuk wyrobów dziennie, określony jest wzorem $Z(n) = -n^2 + 100n - 1600$. Ile sztuk wyrobów dziennie powinien sprzedawać zakład, aby nie mieć strat?

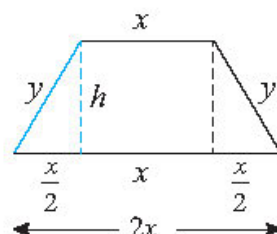
Przykład 13. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 24. Jedna podstawa tego trapezu jest dwa razy dłuższa od drugiej. Jaka długość może mieć krótsza podstawa trapezu, jeżeli kwadrat odległości między podstawami jest mniejszy od 14?

Rozwiązanie

Oznaczenia: x – krótsza podstawa trapezu, $x > 0$,

y – ramię trapezu, $y > 0$,

h – odległość między podstawami trapezu, $h > 0$.



1° Obwód trapezu jest równy 24.

$$x + 2x + 2y = 24, \text{ gdzie } x > 0 \text{ i } y > 0,$$

$$y = 12 - \frac{3}{2}x, \text{ gdzie } x > 0 \text{ i } y > 0.$$

$$y > 0, \text{ więc } 12 - \frac{3}{2}x > 0, \text{ gdy } x < 8, \\ x > 0 \text{ i } x < 8, \text{ więc } x \in (0; 8)$$

$$\text{Zatem } \begin{cases} y = 12 - \frac{3}{2}x \\ x \in (0; 8) \end{cases}.$$

2° Kwadrat odległości między podstawami jest mniejszy od 14.

$$h^2 < 14 \text{ i } h^2 = y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2, \text{ więc } y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 < 14.$$

Z 1° i 2°:

$$\begin{cases} y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 < 14 \\ y = 12 - \frac{3}{2}x \\ x \in (0; 8) \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} \left(12 - \frac{3}{2}x\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 < 14 \\ x \in (0; 8) \end{cases},$$

$$\begin{cases} x \in (5; 13) \\ x \in (0; 8) \end{cases}.$$

Odp.: $x \in (5; 8)$.

$$\left(12 - \frac{3}{2}x\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 < 14$$

$$144 - 36x + \frac{9}{4}x^2 - \frac{x^2}{4} < 14$$

$$2x^2 - 36x + 130 < 0 \quad :2$$

$$x^2 - 18x + 65 < 0$$

$$\Delta = 324 - 260 = 64, \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = 5, x_2 = 13$$



Ćwiczenie 22. Podstawa trójkąta równoramiennego jest o 2 cm krótsza od wysokości tego trójkąta poprowadzonej na tę podstawę. Oblicz, jaką długość może mieć podstawa trójkąta, aby jego pole było mniejsze niż $17,5 \text{ cm}^2$.

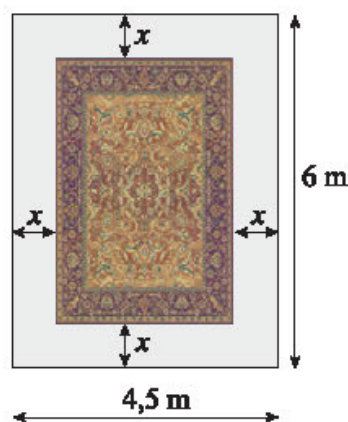
Odpowiedzi do ćwiczeń

20. Tak, jeśli długość krótszego boku jest liczbą z przedziału $(0; 3)$, a dłuższy bok liczbą z przedziału $(6; 9)$.

21. $n \in \{20, 21, 22, \dots, 80\}$. 22. Długość podstawy powinna być liczbą z przedziału $(0; 5)$.

Zadania utrwalające

- 1.27. Siatką długości 90 m należy z terenów zielonych wydzielić prostokątny wybieg dla psów. Jakie wymiary może mieć ten wybieg, aby jego pole nie przekroczyło 500 m^2 , a krótszy bok miał długość co najmniej 12 m? Na budowę bramki również wykorzystano siatkę.
- 1.28. Mamy 48 m siatki i chcemy ogrodzić przyległą do muru prostokątną działkę. Jaka długość powinna mieć część ogrodzenia równoległa do muru, jeżeli chcemy, by pole tej działki było co najwyżej równe 126 m^2 ?
- 1.29. Dekorator wnętrz zaproponował, by dywan w salonie przykrywał co najmniej połowę, ale nie więcej niż $\frac{3}{4}$ powierzchni prostokątnej podłogi o wymiarach $4,5 \text{ m} \times 6 \text{ m}$. Brzegi dywanu powinny być jednakowo odległe od ścian salonu. Oblicz, jakie powinny być wymiary tego dywanu.
- 1.30. Wokół basenu o wymiarach $8 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ wyłożono kostką brukową pas o szerokości $x \text{ m}$. Jaka powinna być szerokość x tego pasa, aby cały obszar basenu i pasa nie przekroczył 77 m^2 , a szerokość tego pasa nie była mniejsza niż $0,6 \text{ m}$?
- 1.31. Oblicz, ile boków ma wielokąt, w którym liczba przekątnych jest co najmniej:
 a) dwa razy większa niż liczba boków, b) pięć razy większa niż liczba boków.
- 1.32.** Uzasadnij, że nie można liczby 22 przedstawić w postaci sumy dwóch takich liczb dodatnich, że ich suma kwadratów jest większa od 580.



Równania kwadratowe z parametrem

Przypomnijmy

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$ z niewiadomą x jest równaniem:

- kwadratowym, gdy $a \neq 0$,
- liniowym, gdy $a = 0$.

Ćwiczenie 23. Określ, dla jakich wartości parametru m równanie:

a) $(m^2 - 1)x^2 - (m - 1)x + 1 = 0$, b) $(m^2 + 1)x^2 - (m + 1)x + m - 1 = 0$ jest:

- 1 liniowe, 2 kwadratowe.

R

Pokażemy na przykładach sposób określania liczby pierwiastków równania kwadratowego lub ich wyznaczania w zależności od wartości parametrów.

Przykład 14. W zależności od wartości parametru m określ liczbę pierwiastków równania $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$.

Rozwiązanie Równanie $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ ma postać $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a = m - 5$, $b = -4m$ i $c = m - 2$.

Rozpatrujemy dwa przypadki: **1** $a = 0$, **2** $a \neq 0$.

1 Jeśli $a = 0$, to $m = 5$.

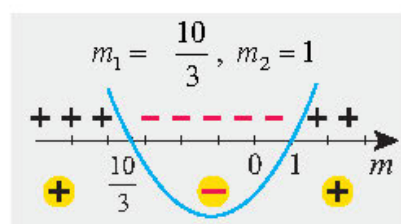
Równanie jest równaniem liniowym $-20x + 3 = 0$, które ma jedno rozwiązanie.

2 Jeśli $a \neq 0$, to $m \neq 5$.

Równanie jest równaniem kwadratowym o wyróżniku $\Delta = 4(3m^2 + 7m - 10)$. Liczba pierwiastków równania kwadratowego zależy od znaku (wartości) wyróżnika Δ , więc badamy znak tego wyróżnika, traktując go jako funkcję kwadratową zmiennej m .

$$\Delta(m) = 4(3m^2 + 7m - 10),$$

$$\Delta(m) = 0, \text{ gdy } 3m^2 + 7m - 10 = 0.$$



Równanie kwadratowe ma:

- 0 pierwiastków, gdy $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} m \neq 5 \\ m \in \left(-\frac{10}{3}; 1\right) \end{cases}$, skąd $m \in \left(-\frac{10}{3}; 1\right)$,
- 1 pierwiastek, gdy $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} m \neq 5 \\ m = -\frac{10}{3} \text{ lub } m = 1 \end{cases}$, skąd $m \in \left\{-\frac{10}{3}, 1\right\}$,
- 2 pierwiastki, gdy $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$, więc $\begin{cases} m \neq 5 \\ m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (1; +\infty) \end{cases}$,
skąd $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (1; 5) \cup (5; +\infty)$.

Odp.: Liczba pierwiastków równania: 0, gdy $m \in \left(-\frac{10}{3}; 1\right)$,

1, gdy $m \in \left\{-\frac{10}{3}, 1, 5\right\}$, 2, gdy $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (1; 5) \cup (5; +\infty)$.

R

Ćwiczenie 24. Określ liczbę pierwiastków równania $(m-1)x^2 - (m+1)x + m+1 = 0$ w zależności od wartości parametru m .

Przykład 15. Rozwiąż równanie $(k-1)x^2 - 4x + k+2 = 0$ z niewiadomą x .

Rozwiązanie

$$\otimes (k-1)x^2 - 4x + k+2 = 0.$$

Równanie $\otimes$ ma postać $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a = k-1$, $b = -4$ i $c = k+2$.

Rozpatrujemy dwa przypadki: **1** $a = 0$, **2** $a \neq 0$.

1 $a = 0$, gdy $k = 1$, więc równanie $\otimes$ ma postać $-4x + 3 = 0$, skąd $x = \frac{3}{4}$.

2 $a \neq 0$, gdy $k \neq 1$.

Obliczamy pierwiastki równania kwadratowego $(k-1)x^2 - 4x + k+2 = 0$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4(k-1)(k+2), \text{ więc } \Delta = -4(k^2 + k - 6).$$

$$\Delta = 0, \text{ gdy } -4(k^2 + k - 6) = 0$$

$$k_1 = -3, k_2 = 2.$$

Jeśli:

$$\bullet k = -3, \text{ to } x_0 = \frac{4}{2(-3-1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\bullet k = 2, \text{ to } x_0 = \frac{4}{2(2-1)} = 2.$$

$$\Delta > 0, \text{ gdy } -4(k^2 + k - 6) > 0$$

$$k^2 + k - 6 < 0$$

$$-3 < k < 2.$$

Zatem, gdy $k \neq 1$ i $k \in (-3; 2)$, równanie jest kwadratowe i ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{-4(k^2 + k - 6)}}{2(k-1)},$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{-4(k^2 + k - 6)}}{2(k-1)}.$$

Odp.: Równanie ma:

• jeden pierwiastek $x_0 = \frac{3}{4}$, gdy $k = 1$ lub $x_0 = -\frac{1}{2}$, gdy $k = -3$, lub $x_0 = 2$, gdy $k = 2$;

• dwa pierwiastki $x_1 = \frac{2 - \sqrt{6-k-k^2}}{k-1}$ i $x_2 = \frac{2 + \sqrt{6-k-k^2}}{k-1}$, gdy $k \in (-3; 1) \cup (1; 2)$.

Ćwiczenie 25. Rozwiąż równanie z niewiadomą x :

$$\text{a) } x^2 + mx + 2m - 4 = 0, \quad \text{b) } (m+2)x^2 - 2x + m + 2 = 0.$$

Pokażemy na przykładach sposób określania znaków pierwiastków równania kwadratowego za pomocą wzorów Viète'a w zależności od wartości parametrów.

Jeśli liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, to

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{ü} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Powyższe związki nazywamy wzorami Viète'a.

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $\Delta > 0$, ma dwa pierwiastki x_1 i x_2			
różnych znaków, gdy:	jednakowych znaków, gdy:	dodatnie, gdy:	ujemne, gdy:
$x_1 \cdot x_2 < 0$	$x_1 \cdot x_2 > 0$	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Ćwiczenie 26. Równanie ma postać $ax^2 + bx + c = 0$. Podaj układ warunków, jakie spełniają współczynniki a , b i c oraz wyróżnik Δ równania, gdy to równanie ma:

- a) dwa pierwiastki ujemne,
c) dwa pierwiastki jednakowych znaków,
e) co najmniej jeden pierwiastek.
- b) dwa pierwiastki dodatnie,
d) dwa pierwiastki różnych znaków,

Przykład 16. Oblicz wartości parametru k , dla których równanie $x^2 - kx + k + 3 = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek ujemny.

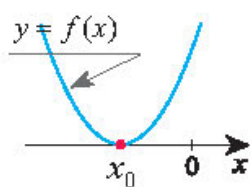
Rozwiązanie

Lewa strona równania jest trójmianem kwadratowym określonym wzorem.

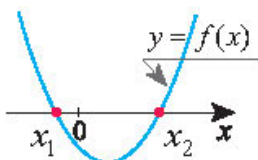
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a=1, b=-k, c=k+3.$$

Równanie $x^2 - kx + k + 3 = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek ujemny wtedy, gdy ma ono:

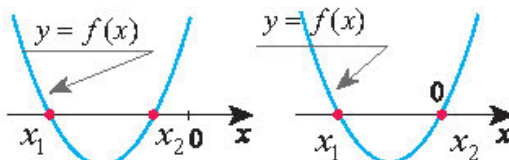
- | | | |
|--|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • jeden pierwiastek x_0 i jest on liczbą ujemną | <ul style="list-style-type: none"> • dwa pierwiastki x_1 i x_2 różnych znaków | <ul style="list-style-type: none"> • dwa pierwiastki x_1, x_2 i są one liczbami niedodatnimi |
|--|--|--|



$$\mathbf{1} \quad \begin{cases} \Delta = 0 \\ x_0 < 0 \end{cases}$$



$$2 \quad \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$$



3
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

$x^2 - kx + k + 3 = 0$, więc $\Delta = k^2 - 4k - 12$, $x_1 \cdot x_2 = k + 3$, $x_1 + x_2 = k$.

Zatem

$$\textcircled{1} \begin{cases} k^2 - 4k - 12 = 0 \\ \frac{k}{2} < 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \textcircled{2} \begin{cases} k^2 - 4k - 12 > 0 \\ k + 3 < 0 \end{cases}, \quad \text{lub} \quad \textcircled{3} \begin{cases} k^2 - 4k - 12 > 0 \\ k + 3 \geq 0 \\ k < 0 \end{cases}, \quad \text{więc}$$

$$\begin{cases} k = -2 \text{ lub } k = 6 \\ k < 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} k \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty) \\ k < -3 \end{cases}, \quad \text{lub} \quad \begin{cases} k \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty) \\ k \geq -3 \\ k < 0 \end{cases}$$

$$k = -2 \quad \text{lub} \quad k < -3, \quad \text{lub} \quad -3 \leq k < -2.$$

Odp.: $k \in (-\infty; -2]$.

Ćwiczenie 27. Oblicz wartości parametru k , dla których równanie

$3x^2 - (k-1)x + 3 = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek dodatni.

Przykład 17. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + 4 = 0$ ma dwa pierwiastki x_1 i x_2 spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 17$?

Rozwiązanie

Warunki zadania są spełnione, gdy

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 17 \end{cases}, \quad \text{czyli}$$

$$\begin{cases} m^2 - 16 > 0 \\ (-m)^2 - 2 \cdot 4 = 17 \end{cases}, \quad \text{skąd}$$

$$\begin{cases} m < -4 \text{ lub } m > 4 \\ m = -5 \text{ lub } m = 5 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= m^2 - 16, \\ x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2, \\ \text{gdzie } x_1 + x_2 &= -m \text{ i } x_1 \cdot x_2 = 4 \end{aligned}$$

Odp.: $m = -5$ lub $m = 5$.

Ćwiczenie 28. Oblicz, dla jakich wartości parametru m równanie

$-x^2 + mx - m^2 + 2m - 1 = 0$ ma różne pierwiastki x_1 i x_2 spełniające warunek $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 + 1$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

23. a) **1** $m = -1$, **2** $m \neq -1$ i $m \neq 1$, b) **1** nie istnieje takie m , **2** $m \in \mathbb{R}$.

24. Równanie ma: 0 pierwiastków, gdy $m \in (-\infty; -1) \cup (\frac{5}{3}; +\infty)$, 1 pierwiastek, gdy $m \in \{-1, 1, \frac{5}{3}\}$,

2 pierwiastki, gdy $m \in (-1; 1) \cup (1; \frac{5}{3})$. 25. a) $x_0 = -2$, gdy $m = 4$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2 - m$, gdy $m \neq 4$,

b) $x_0 = -1$, gdy $m = -3$; $x_0 = 1$, gdy $m = -1$; $x_0 = 0$, gdy $m = -2$;

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{-m^2 - 4m - 3}}{m + 2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{-m^2 - 4m - 3}}{m + 2}, \quad \text{gdy } m \in (-3; -2) \cup (-2; -1).$$

$$26. \text{ a) } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}, \quad \text{d) } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}, \quad \text{e) } \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}, \text{ lub } a = b = c = 0.$$

27. $k \geq 7$.

28. $m = 1$.

Zadania utrwalające

1.33. Rozwiąż równanie z niewiadomą x :

a) $x^2 + mx - 2m - 4 = 0$,

b) $(m - 3)x^2 + (m - 2)x + 1 = 0$,

c) $x^2 + mx + 4 = 0$,

d) $-mx^2 + (m - 2)x + 1 = 0$,

e) $(m^2 + 1)x^2 - x + 2 = 0$,

f) $(m - 1)^2 x^2 + 4(m - 1)x + 4 = 0$.

1.34. W zależności od wartości parametru m określ liczbę pierwiastków równania:

a) $x^2 + mx + 8 = 0$,

b) $x^2 - (m - 5)x + 4 = 0$,

c) $(m - 1)x^2 + 2x + 3 = 0$,

d) $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2 = 0$,

e) $(m^2 + 5m - 6)x^2 - (m - 1)x - 2 = 0$,

f) $(2m^2 + m - 1)x^2 + (5 - m)x - 6 = 0$.

1.35. Oblicz wartości parametru m , dla których ma dwa pierwiastki różnych znaków równanie:

a) $2x^2 - mx - m + 6 = 0$,

b) $x^2 + (m + 5)x + 2m + 7 = 0$.

1.36. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + (m - 5)x + 2m^2 + m + \frac{1}{2} = 0$ ma dwa pierwiastki dodatnie?

1.37. Oblicz wartości parametru m , dla których ma dwa pierwiastki jednakowych znaków równanie:

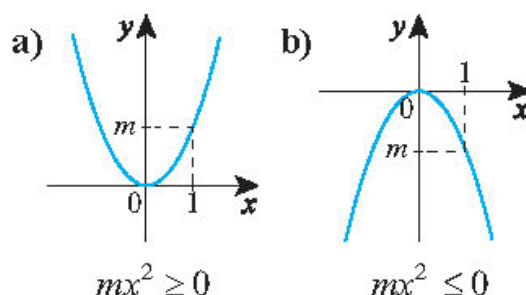
a) $x^2 - mx + 3m - 5 = 0$,

b) $x^2 - 2(m - 2)x - 4m = 0$.

- 1.38. Dla jakich wartości parametru m kwadrat różnicy pierwiastków równania $x^2 + mx + 10 = 0$ jest równy 9? Oblicz te pierwiastki.
- 1.39. Ustal, dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 - mx + m - 1 = 0$ ma najmniejszą wartość.
- 1.40. Dla jakich wartości parametru m jeden pierwiastek równania $x^2 - (m+1)x + \frac{6}{5}m = 0$ jest równy sinusowi, a drugi cosinusowi tego samego kąta ostrego?
- 1.41. Określ liczbę pierwiastków równania $(m-1)x^2 + (m+1)x + (m-1) = 0$ w zależności od wartości parametru m .
- 1.42. Ustal, dla jakich wartości parametru k równanie $x^2 - 2mx + (4m - k) = 0$ ma dwa pierwiastki dla każdej liczby rzeczywistej m .
- 1.43. Ustal, dla jakich wartości parametru m oba pierwiastki równania:
- $x^2 - 6mx + 9m^2 - 2m + 2 = 0$ są większe od 3,
 - $x^2 - 6mx + 1 = 0$ są mniejsze od 3, c) $x^2 - mx + 2 = 0$ należą do przedziału $\langle 0; 3 \rangle$.

Nierówność i funkcja kwadratowa z parametrem

Ćwiczenie 29. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = mx^2$. Ustal, dla jakich wartości parametru m wykres funkcji jest parabolą przedstawioną na rysunku i podaj rozwiązanie nierówności zapisanej pod rysunkiem.



Uwaga

Aby rozwiązać nierówność z parametrem, której lewa strona jest trójmianem o postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, rozpatrujemy dwa przypadki: $a = 0$ oraz $a \neq 0$.

Jeśli:

- $a = 0$, to otrzymujemy nierówność liniową z parametrem,
- $a \neq 0$, to otrzymujemy nierówność kwadratową z parametrem.

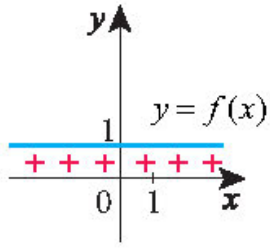
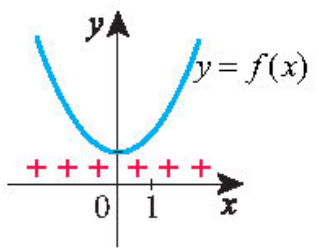
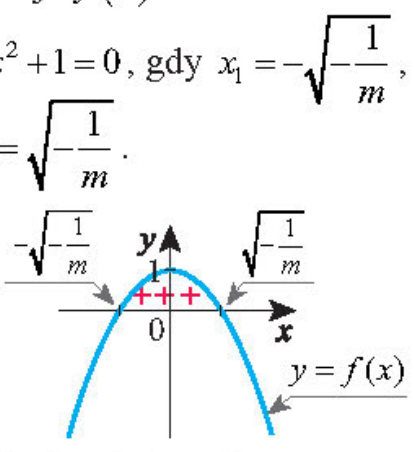
Warunki istnienia rozwiązania nierówności kwadratowej określamy, badając wpływ wartości parametru na wyróżnik Δ i współczynnik a .

R

Przykład 18. Rozwiąż nierówność $mx^2 + 1 > 0$ i określ warunki istnienia rozwiązania w zależności od wartości parametru m .

Rozwiązanie Lewa strona nierówności ma postać trójmianu $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a = m$, $b = 0$ i $c = 1$. Nierówność $mx^2 + 1 > 0$ rozwiązujemy, rozpatrując dwa przypadki:

1 $a = 0$, **2** $a \neq 0$.

1 $a = 0$, czyli $m = 0$	2 $a \neq 0$, czyli $m \neq 0$	
	$m > 0$	$m < 0$
$m = 0$, to $f(x) = 0 \cdot x^2 + 1$, czyli $f(x) = 1$.  $x \in \mathbb{R}$, gdy $m = 0$	Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = mx^2 + 1$.  $x \in \mathbb{R}$, gdy $m > 0$	Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = mx^2 + 1$. $mx^2 + 1 = 0$, gdy $x_1 = -\sqrt{-\frac{1}{m}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{1}{m}}$.  $x \in \left(-\sqrt{-\frac{1}{m}}; \sqrt{-\frac{1}{m}}\right)$, gdy $m < 0$

Odp.: $x \in \mathbb{R}$, gdy $m \geq 0$; $x \in \left(-\sqrt{-\frac{1}{m}}; \sqrt{-\frac{1}{m}}\right)$, gdy $m < 0$.

Ćwiczenie 30. Rozwiąż nierówność z niewiadomą x : a) $mx^2 - 1 < 0$, b) $mx^2 - 1 \geq 0$.

Przykład 19. Rozwiąż nierówność $x^2 - mx + 1 > 0$ i określ warunki istnienia rozwiązania w zależności od wartości parametru m .

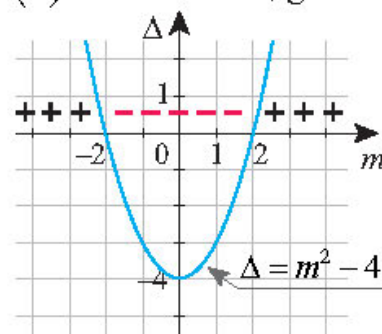
Rozwiązanie Lewa strona nierówności ma postać trójmianu $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a = 1$, $b = -m$ i $c = 1$.

Nierówność $x^2 - mx + 1 > 0$ jest nierównością kwadratową (bo $a = 1$), na której rozwiązanie ma wpływ wyróżnik Δ .

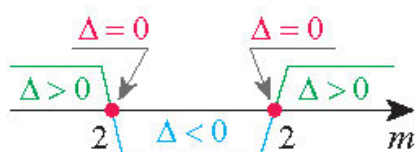
$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1, \text{ czyli } \Delta = m^2 - 4.$$

Określamy wpływ wartości parametru m na wyróżnik Δ :

$$\Delta = 0, \text{ gdy } m^2 - 4 = 0, \text{ czyli } m_1 = -2, m_2 = 2.$$



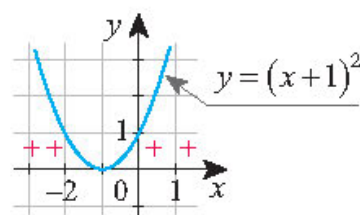
R



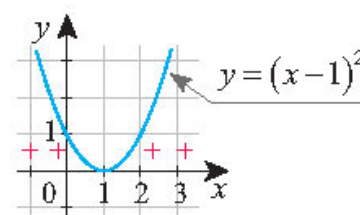
Rozpatrujemy trzy przypadki: **1** $\Delta = 0$, **2** $\Delta < 0$, **3** $\Delta > 0$.

1 $\Delta = 0$, gdy $m = -2$ lub $m = 2$

- $m = -2$, to $x^2 + 2x + 1 > 0$, czyli $(x+1)^2 > 0$,
 $x \neq -1$,

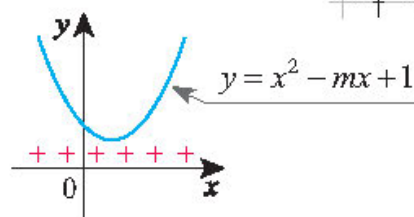


- $m = 2$, to $x^2 - 2x + 1 > 0$, czyli $(x-1)^2 > 0$,
 $x \neq 1$.



2 $\Delta < 0$, gdy $m \in (-2; 2)$

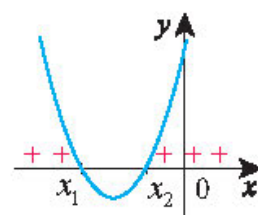
$m \in (-2; 2)$, to $x \in \mathbb{R}$.



3 $\Delta > 0$, gdy $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

- $m \in (-\infty; -2)$, to $x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$, $x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$,

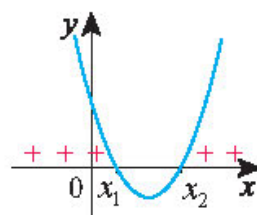
więc $x_1 < x_2 < 0$,



$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

- $m \in (2; +\infty)$, to $x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$, $x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$,

więc $0 < x_1 < x_2$.



$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

Gdy $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, to $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Odp.: $x \neq -1$, gdy $m = -2$; $x \neq 1$, gdy $m = 2$; $x \in \mathbb{R}$, gdy $m \in (-2; 2)$;

$x \in \left(-\infty; \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}; +\infty\right)$, gdy $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ćwiczenie 31. Rozwiąż nierówność $x^2 + mx + 4 > 0$ i określ warunki istnienia rozwiązania w zależności od wartości parametru m .

Przykład 20. Określ, dla jakich wartości parametru m zbiorem rozwiązań nierówności $(m^2 - m - 2)x^2 + (m - 2)x - 1 < 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Lewa strona nierówności ma postać trójmianu $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a = m^2 - m - 2$, $b = m - 2$, $c = -1$.

Rozpatrujemy dwa przypadki: **1** $a = 0$, **2** $a \neq 0$.

1 $a = 0$, to $m^2 - m - 2 = 0$, skąd $m_1 = -1$, $m_2 = 2$

- $m_1 = -1$, to $-3x - 1 < 0$.

Zbiorem rozwiązań nierówności $-3x - 1 < 0$ nie jest zbiór liczb rzeczywistych.

- $m_2 = 2$, to $-1 < 0$ (nierówność prawdziwa).

Zatem $x \in \mathbb{R}$.

2 $a \neq 0$ Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór $\mathbb{R}$, gdy parabola, która jest wykresem trójmianu $f(x) = (m^2 - m - 2)x^2 + (m - 2)x - 1$, leży pod osią x . Warunek ten jest spełniony, gdy $a < 0$ i $\Delta < 0$.

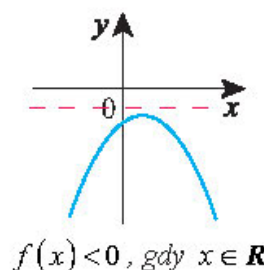
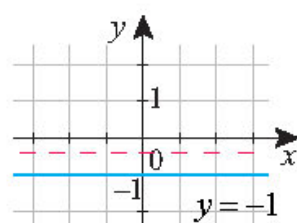
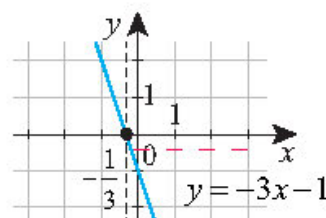
Rozpatrujemy układ warunków:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ (m - 2)^2 - 4(m^2 - m - 2) \cdot (-1) < 0 \end{cases}$$

$$\text{skąd } \begin{cases} m \in (-1; 2) \\ m \in \left(-\frac{2}{5}; 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{2}{5}; 2\right).$$

Podsumowujemy nasze rozważania i podajemy odpowiedź.

$$\text{Odp.: } m \in \left(-\frac{2}{5}; 2\right).$$



Ćwiczenie 32. Określ, dla jakich wartości parametru k nierówność $(k^2 - 1)x^2 + 2(k - 1)x + 2 > 0$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej x .

Ćwiczenie 33. Dla jakich wartości parametrów a, b, c funkcja f określona wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c :$$

- a) jest funkcją liniową,
- b) jest funkcją kwadratową,
- c) w zbiorze R ma wartość najmniejszą,
- d) w zbiorze R ma wartość największą,
- e) przyjmuje tylko wartości dodatnie,
- f) przyjmuje tylko wartości ujemne?

Jeżeli parametr występuje we wzorze funkcji kwadratowej, to jej własności możemy określać w zależności od wartości tego parametru.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 21. Oblicz, dla jakich wartości parametru m najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 7$ jest liczbą dodatnią.

Rozwiązanie

Wzór funkcji f zapisujemy w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a = 1$, $b = -2(m-1)$ i $c = 2m^2 - 7$, której wykresem jest parabola o ramionach skierowanych ku górze.

Najmniejsza wartość funkcji f jest liczbą dodatnią, gdy rzędna wierzchołka $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$

jest liczbą dodatnią, czyli gdy $\frac{-\Delta}{4a} > 0$.

$$\frac{-\Delta}{4a} > 0 \text{ i } a = 1, \text{ więc}$$

$$\frac{-(-4m^2 - 8m + 32)}{4 \cdot 1} > 0$$

$$\frac{4(m^2 + 2m - 8)}{4} > 0$$

$$m^2 + 2m - 8 > 0$$

$$m \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty).$$

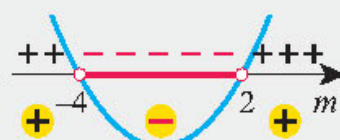
Odp.: $m \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

$$\Delta = [2(m-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m^2 - 7)$$

$$\Delta = 4m^2 - 8m + 32$$

$$\Delta > 0, \text{ gdy } m^2 + 2m - 8 > 0$$

$$m_1 = -4, m_2 = 2$$



Ćwiczenie 34. Oblicz, dla jakich wartości parametru m największa wartość funkcji

$$f(x) = -x^2 + 2(m+1)x - 2m^2 - 3m - 1 \text{ jest liczbą ujemną.}$$

R

Przykład 22. Wyznacz te wartości parametru k , dla których funkcja $f(x) = (k^2 + 4k - 5)x^2 - 2(k - 1)x + 2$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Rozwiązanie

Wzór funkcji f zapisany jest w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a = k^2 + 4k - 5$, $b = -2(k - 1)$, $c = 2$ i $\Delta = -4k^2 - 40k + 44$.

Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases}, \text{ czyli}$$

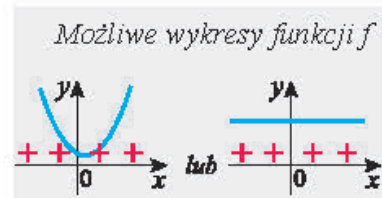
$$\begin{cases} k^2 + 4k - 5 > 0 \\ -4k^2 - 40k + 44 < 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} k^2 + 4k - 5 = 0 \\ k - 1 = 0 \\ 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k + 5)(k - 1) > 0 \\ -4(k + 11)(k - 1) < 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} k = -5 \text{ lub } k = 1 \\ k = 1 \\ k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty) \\ k \in (-\infty; -11) \cup (1; +\infty) \end{cases} \quad \text{lub} \quad k = 1$$

$$k \in (-\infty; -11) \cup (1; +\infty) \cup \{1\}.$$

Odp.: $k \in (-\infty; -11) \cup (1; +\infty)$.



$$\begin{aligned} k^2 + 4k - 5 > 0 \\ \Delta_1 = 36, \sqrt{\Delta_1} = 6 \\ k_1 = -5, k_2 = 1 \\ k \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4k^2 - 40k + 44 < 0 \quad / : (-4) \\ k^2 - 10k + 11 > 0 \\ \Delta_k = 144, \sqrt{\Delta_k} = 12 \\ k_1 = 11, k_2 = 1 \\ k \in (-\infty; 11) \cup (1; +\infty) \end{aligned}$$

Ćwiczenie 35.

a) Oblicz, dla jakich wartości parametru m trójmian kwadratowy $f(x) = -3x^2 + mx - 3$ przyjmuje wartości ujemne dla każdej liczby rzeczywistej.

b) Oblicz, dla jakich wartości parametru m funkcja kwadratowa $f(x) = mx^2 - 2x + m$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Ćwiczenie 36. Oblicz, dla jakich wartości parametru m zbiorem wartości funkcji $f(x) = -x^2 + 2mx + m - 2$ jest przedział $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

R

Odpowiedzi do ćwiczeń

29. a) $m > 0, x \in \mathbf{R}$, b) $m < 0, x \in \mathbf{R}$.30. a) $x \in \mathbf{R}, m \leq 0, x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{m}}; \sqrt{\frac{1}{m}}\right)$, gdy $m > 0$, b) $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{1}{m}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{m}}; +\infty\right)$, gdy $m > 0$.31. $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, gdy $m = -4$; $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, gdy $m = 4$; $x \in \mathbf{R}$, gdy $m \in (-4; 4)$; $x \in \left(-\infty; \frac{-m - \sqrt{m^2 - 16}}{2}\right) \cup \left(\frac{-m + \sqrt{m^2 - 16}}{2}; +\infty\right)$, gdy $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.32. $k \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.33. a) $a = 0, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$, b) $a \neq 0, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$, c) $a > 0, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$,d) $a < 0, b \in \mathbf{R}, c \in \mathbf{R}$, e) $a = 0, b = 0, c > 0$ lub $a > 0$ i $b^2 - 4ac < 0$, f) $a = 0, b = 0, c < 0$ lub $a < 0$ i $b^2 - 4ac < 0$.34. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. Wskazówka. $-\frac{\Delta}{4a} < 0$, gdzie $a = -1$ i $\Delta = -4m^2 - 4m$.35. a) $m \in (-6; 6)$, b) $m \in (1; +\infty)$.36. $m_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}, m_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2}$.

Zadania utrwalające

1.44. Rozwiąż nierówność z niewiadomą x :

a) $mx^2 - 4 < 0$,

b) $mx^2 + 4 > 0$,

c) $x^2 - mx < 0$,

d) $x^2 + mx < 0$,

e) $mx^2 - m > 0$,

f) $mx^2 + m - 1 < 0$.

1.45. Określ, dla jakich wartości parametru m zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem rozwiązań nierówności:

a) $x^2 + 2x + m > 0$,

b) $x^2 - mx + 3 > 0$,

c) $mx^2 + 4mx \leq 0$,

d) $(m-1)x^2 + 4 < 0$,

e) $mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$,

f) $(5-m)x^2 - 2(1-m)x + 2(1-m) < 0$.

1.46. Dla jakich wartości parametru k funkcja f określona wzorem $f(x) = (1 - k^2)x^2 - (k + 1)x + 3$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej?1.47. Dla jakich wartości parametru k zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = kx^2 - 4x + k + 3$ jest zbiór liczb nieujemnych?1.48. Dla jakich wartości parametru m zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = (m-1)x^2 + (m-1)x + m$ jest zbiór liczb niedodatnich?1.49. Dla jakich wartości parametru m zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = (m-4)x^2 - (2-m)x + 1 + 0,5m$ jest zbiór $Y_f = \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$?

R

1.50. Określ, dla jakich wartości parametru m zbiór liczb rzeczywistych jest dziedziną funkcji f , gdy:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - mx + m + 3}$,

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - mx + m + 3}}$,

c) $f(x) = \sqrt{mx^2 - (m+1)x + 1}$,

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{mx^2 - (m+1)x + 1}}$,

e) $f(x) = \sqrt{mx^2 + 4mx + m + 3}$,

f) $f(x) = \frac{1}{mx^2 + 4mx + m + 3}$.

1.51. Określ, dla jakich wartości parametru m wartości funkcji f :

a) są dla każdej liczby rzeczywistej x mniejsze od wartości funkcji g , gdy

$$f(x) = (2m+1)x^2 + (m-1)x + 3m \text{ i } g(x) = (1-m)x + 3,$$

b) są dla każdej liczby rzeczywistej x większe od wartości funkcji g , gdy

$$f(x) = (m-1)x^2 + (2-2m)x + m-2 \text{ i } g(x) = (2-3m)x - 2.$$

R

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Każda liczba z przedziału $(-3; 5)$ jest rozwiązaniem nierówności:

A. $(x+3)(x-5) > 0$ B. $(x+3)(5-x) > 0$ C. $(x-3)(x+5) < 0$ D. $(x-3)(5-x) > 0$

2. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Rozwiązaniem nierówności $-\frac{1}{4}(x+2)(x-6) \geq 0$ jest liczba:

A. -6 , B. 6 .

Rozwiązaniem nierówności $-(x+4)^2 + 9 < 0$ nie jest liczba:

C. -4 , D. 4 .

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Rozwiązaniem nierówności $x^2 - 2x + 1 > 0$ jest każda liczba należąca do zbioru:

A. R , B. $R \setminus \{-1\}$, C. $R \setminus \{1\}$, D. $D = \{1\}$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Rozwiązaniem układu nierówności $\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x^2 < 9 \end{cases}$ jest każda liczba należąca do przedziału:

A. $\langle -2; 2 \rangle$, B. $(-2; 2)$, C. $\langle -2; 2 \rangle$, D. $(-2; 2)$.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Dziedziną D funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{1 - x^2}$ jest zbiór:

- A. $D = \{0\}$, B. $D = \langle -1; 1 \rangle$, C. $D = \{-1, 1\}$, D. $D = (-\infty; -1) \cup \langle 1; +\infty \rangle$.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Funkcja $f(x) = 3x^2 + bx + 12$ ma dwa miejsca zerowe, gdy:

- A. $b \in (12; +\infty)$, B. $b \in (-\infty; -12)$, C. $b \in (-12; 12)$, D. $b \in (-\infty; -12) \cup (12; +\infty)$.

7. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2mx - m^2 - 4$ dla każdej liczby rzeczywistej m :

- A. nie ma miejsc zerowych, B. ma dwa miejsca zerowe.

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - mx$ dla każdej liczby rzeczywistej m :

- C. ma miejsca zerowe, D. nie ma miejsc zerowych.

8. Zbiorem rozwiązań nierówności $2x^2 + bx + c < 0$ jest przedział $(3; 5)$.

Czy wtedy $b = -16$ i $c = 30$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$x_1 = 3$ i $x_2 = 5$, więc $3 + 5 = -\frac{b}{2}$ i $3 \cdot 5 = \frac{c}{2}$, skąd $b = -16$ i $c = 30$.
N	Nie,		B.	$x_1 = 3$ i $x_2 = 5$, więc $3 + 5 = \frac{-b}{2 \cdot 2}$ i $3 \cdot 5 = \frac{c}{2 \cdot 2}$, skąd $b = 32$ i $c = 60$.

9. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Równanie $2x^2 - (m-1)x = 0$ ma dwa pierwiastki, gdy $m \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.	P	F
Równanie $(m+2)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0$ nie ma pierwiastków, gdy $m \in \left(\frac{2}{7}; +\infty\right)$.	P	F
Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 - mx + m - 1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.	P	F

2. Funkcje trygonometryczne kątów o miarach od 0° do 180°

Pojęcie kąta skierowanego i określenie funkcji trygonometrycznych kątów od 0° do 180°

Dotychczas poznaliście funkcje trygonometryczne sinus, cosinus i tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Przypomnijmy

Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do długości drugiej przyprostokątnej.

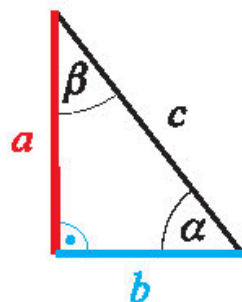
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$

Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \sin \beta = \frac{b}{c}$$

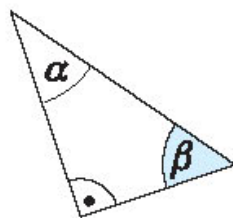
Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \cos \beta = \frac{a}{c}$$



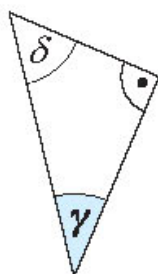
Ćwiczenie 1. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego wierzchołki oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem trójkąta była prawdziwa.

a)



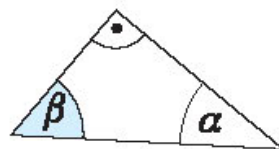
$$\sin \beta = \frac{|AC|}{|BC|},$$

b)



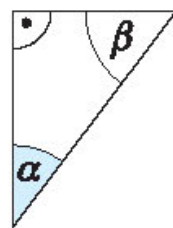
$$\cos \gamma = \frac{|KL|}{|KM|},$$

c)



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|HP|}{|GP|},$$

d)



$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

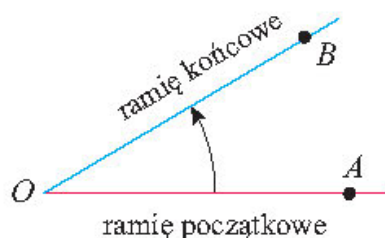
Definicja

Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. W kącie skierowanym pierwszą z półprostych nazywamy ramieniem początkowym kąta, drugą – ramieniem końcowym.

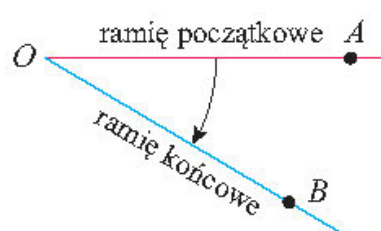
Kąt skierowany oznaczamy $\sphericalangle AOB$ (strzałka wskazuje ramię końcowe).

Punkt O jest wierzchołkiem kąta, półprosta OA jest ramieniem początkowym, półprosta OB jest ramieniem końcowym.

Kąt skierowany $\sphericalangle BOA$ nazywamy kątem przeciwnym do $\sphericalangle AOB$, który jest skierowany ujemnie.

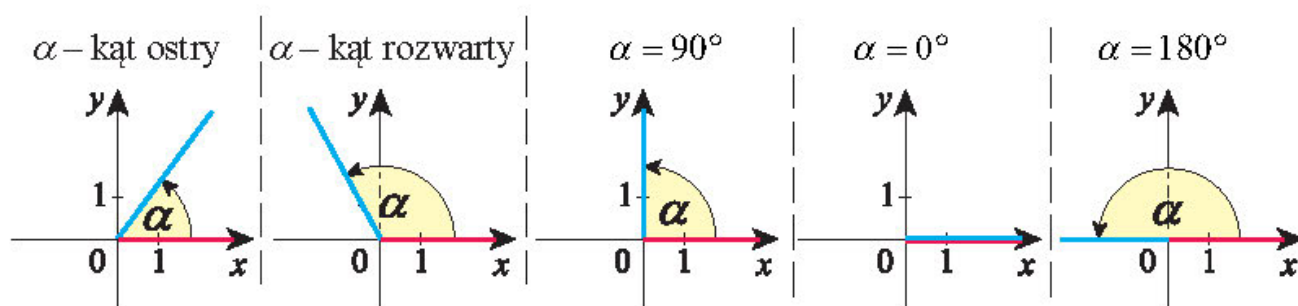


$\sphericalangle AOB$ – kąt skierowany dodatnio



$\sphericalangle AOB$ – kąt skierowany ujemnie

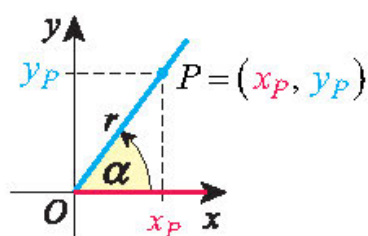
W rozdziale tym będziemy się zajmować kątami od 0° do 180° skierowanymi dodatnio.



Określmy teraz funkcje trygonometryczne kątów o miarach od 0° do 180° .

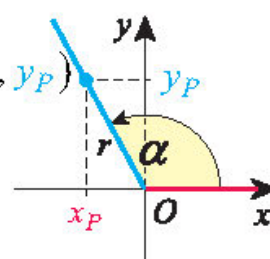
W tym celu umieszczamy kąt w układzie współrzędnych w taki sposób, że:

- wierzchołek kąta pokrywa się z początkiem układu (punktem $O = (0, 0)$),
- jedno ramię, zwane **ramieniem początkowym**, pokrywa się z dodatnią półosią x ,
- drugie ramię, zwane **ramieniem końcowym**, w zależności od miary kąta, umieszcza się w I lub II ćwiartce płaszczyzny kartezjańskiej albo na półosiach x lub y układu współrzędnych.



Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych kąta umieszczonego w układzie współrzędnych, obieramy na ramieniu końcowym tego kąta dowolny punkt P , różny od punktu $O = (0, 0)$, taki że $P = (x_P, y_P)$,

gdzie liczbę $r = |OP| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ nazywamy **promieniem wodzącym punktu P** .



Definicje

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu $P = (x_P, y_P)$ (różnego od punktu O) końcowego ramienia kąta do promienia r wodzącego tego punktu.

$$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}$$

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu $P = (x_P, y_P)$ (różnego od punktu O) końcowego ramienia kąta do promienia r wodzącego tego punktu.

$$\cos \alpha = \frac{x_P}{r}$$

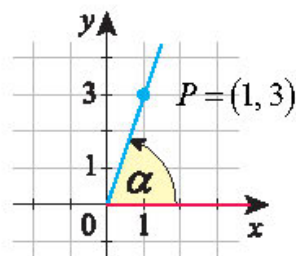
Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu $P = (x_P, y_P)$ (różnego od punktu O) końcowego ramienia kąta do odciętej tego punktu.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$$

Przykład 1. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , na którego końcowym ramieniu leży punkt P , gdy: a) $P = (1, 3)$, b) $P = (-4, 3)$.

Rozwiązanie Kąt α i jego końcowe ramię zaznaczamy w układzie współrzędnych.

a)



$$P = (1, 3), \text{ więc } r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

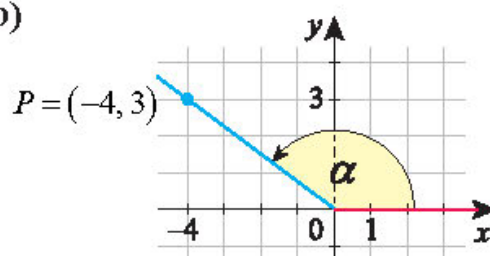
Korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\cos \alpha = \frac{x_P}{r}, \text{ czyli } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}, \text{ czyli } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{1} = 3.$$

b)



$$P = (-4, 3), \text{ więc } r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\sin \alpha = \frac{y_P}{r}, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{x_P}{r}, \text{ czyli } \cos \alpha = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}, \text{ czyli } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

Ćwiczenie 2. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , wiedząc, że na jego końcowym ramieniu leży punkt P , gdy:

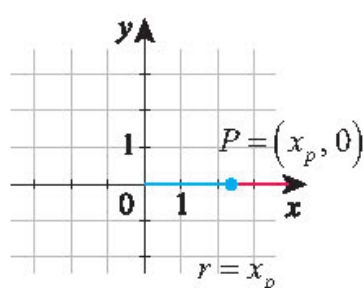
a) $P = (5, 12)$, b) $P = (-8, 15)$, c) $P = (-\sqrt{3}, 1)$.

Ćwiczenie 3. Na końcowym ramieniu kąta leżą punkty A, B, C takie, że $A = (-1, 2)$, $B = (-3, 6)$, $C = (-5, 10)$. Sprawdź, czy:

a) $\frac{y_A}{|OA|} = \frac{y_B}{|OB|} = \frac{y_C}{|OC|}$, b) $\frac{x_A}{|OA|} = \frac{x_B}{|OB|} = \frac{x_C}{|OC|}$, c) $\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_C}{x_C}$.

Przykład 2. W układzie współrzędnych zaznacz kąty odpowiednio o miarach: 0° , 90° i 180° . Obierz dowolny punkt $P (P \neq O)$ należący do końcowego ramienia każdego z tych kątów i wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych tych kątów.

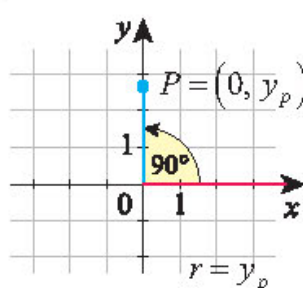
Rozwiązanie $P = (x, y)$, $r = |OP|$.



$$\sin 0^\circ = \frac{y_P}{r} = \frac{0}{r} = 0,$$

$$\cos 0^\circ = \frac{x_P}{r} = \frac{x_P}{x_P} = 1,$$

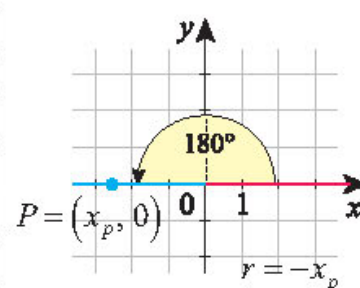
$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{y_P}{x_P} = \frac{0}{x_P} = 0.$$



$$\sin 90^\circ = \frac{y_P}{r} = \frac{y_P}{y_P} = 1,$$

$$\cos 90^\circ = \frac{x_P}{r} = \frac{0}{y_P} = 0,$$

$\operatorname{tg} 90^\circ$ nie istnieje, bo odcięta punktu P jest równa 0.



$$\sin 180^\circ = \frac{y_P}{r} = \frac{0}{r} = 0,$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x_P}{r} = \frac{x_P}{-x_P} = -1,$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{y_P}{x_P} = \frac{0}{x_P} = 0.$$

Ćwiczenie 4. Uzasadnij, że jeśli końcowe ramię kąta α leży w II ćwiartce układu współrzędnych, to: a) $\sin \alpha > 0$, b) $\cos \alpha < 0$, c) $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Znaki i wartości funkcji trygonometrycznych kąta α					
funkcja trygonometryczna \ α	0°	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (I ćwiartka)	90°	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (II ćwiartka)	180°
$\sin \alpha$	0	+	1	+	0
$\cos \alpha$	1	+	0	-	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	+	nie istnieje	-	0

Przykład 3. Narysuj końcowe ramię kąta α i zaznacz ten kąt, wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg} \alpha = -2$, b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, c) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

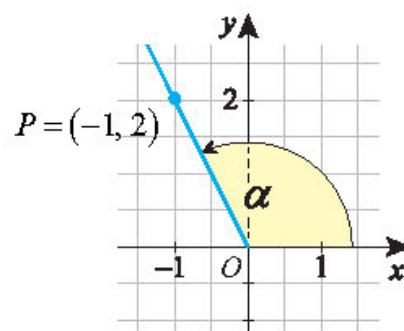
Rozwiązanie Punkt $P = (x_P, y_P)$ leży na końcowym ramieniu kąta α .

a) $\operatorname{tg} \alpha = -2$, więc $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, zatem $x_P < 0$ i $y_P > 0$.

Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P}$ i $\operatorname{tg} \alpha = -2$, więc

$$\frac{y_P}{x_P} = \frac{+2}{-1} = \frac{+4}{-2} = \dots$$

Przyjmujemy, że np. $x_P = -1$ i $y_P = 2$.



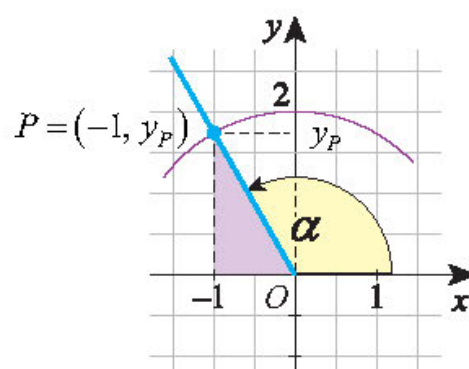
b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, więc $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, zatem

$$x_P < 0 \text{ i } y_P > 0.$$

Ponieważ $\cos \alpha = \frac{x_P}{r}$ i $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, więc

$$\frac{x_P}{r} = \frac{-1}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{-3}{6} = \dots$$

Przyjmujemy, że np. $x_P = -1$ i $r = 2$.



Zauważamy, że punkt P jest punktem przecięcia prostej o równaniu $x = -1$ i okręgu o środku w punkcie O i promieniu 2.

c) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, więc $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ lub $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, zatem

$$x_P > 0 \text{ i } y_P > 0 \quad \text{lub} \quad x_P < 0 \text{ i } y_P > 0.$$

Ponieważ $\sin \alpha = \frac{y_P}{r}$ i $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, więc

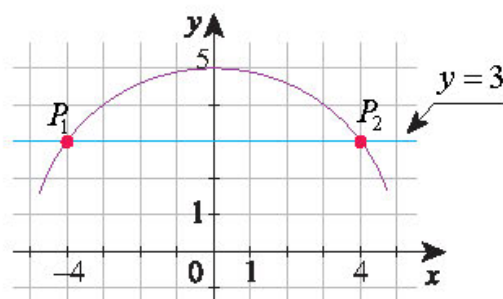
$$\frac{y_P}{r} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \dots$$

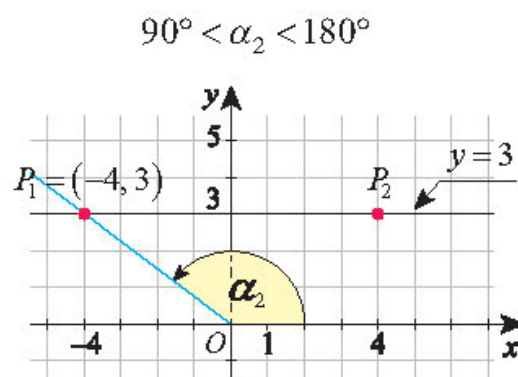
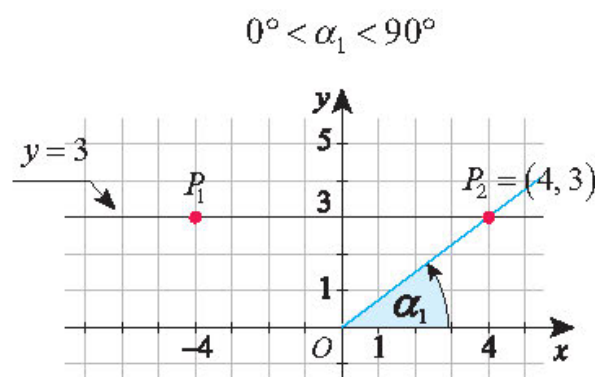
Przyjmujemy, że np. $y_P = 3$ i $r = 5$.

Zauważamy, że punkt P jest punktem przecięcia

prostej $y = 3$ i okręgu o środku w punkcie O i promieniu 5.

Prosta ta i okrąg przecinają się w dwóch punktach P_1 i P_2 leżących symetrycznie względem osi y . Zatem są dwa kąty α_1 i α_2 , których sinus jest równy $\frac{3}{5}$.





Zauważamy, że $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$.

Ćwiczenie 5. Narysuj końcowe ramię kąta α i zaznacz ten kąt, wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$, b) $\cos \alpha = 0,8$, c) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Każdy kąt rozwarty można przedstawić w postaci różnicy kąta półpełnego 180° i kąta ostryego lub jako sumę kąta prostego 90° i kąta ostryego, np. $160^\circ = 180^\circ - 20^\circ = 90^\circ + 70^\circ$.

W zależności od sposobu przedstawienia kątów rozwartych, stosujemy różne wzory (zwane **wzorami redukcyjnymi**) do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych tych kątów.

Twierdzenie

Jeśli kąt α jest kątem ostrym, to:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Z (założenie):

α – kąt ostry.

T (teza):

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Dowód:

W układzie współrzędnych zaznaczamy

kąt α i kąt $180^\circ - \alpha$, jak na rysunku.

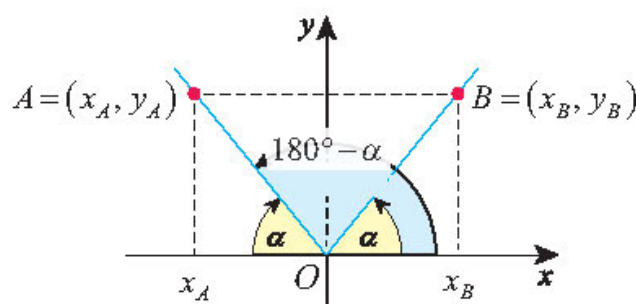
Na końcowych ramionach tych kątów

umieszczamy punkty A i B takie, że

$|OA| = |OB| = r$. Punkty A i B są syme-

trycznie położone względem osi y , więc

$$y_A = y_B \text{ oraz } x_A = -x_B.$$



Zatem $B = (x_B, y_B)$ i $A = (-x_B, y_B)$.

$$\bullet \sin \alpha = \frac{y_B}{r}, \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y_B}{r}, \text{ więc } \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

c.n.u.

$$\bullet \cos \alpha = \frac{x_B}{r}, \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x_A}{r} = -\frac{x_B}{r}, \text{ więc } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

c.n.u.

$$\bullet \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B}{x_B}, \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y_A}{-x_A} = \frac{y_B}{-x_B} = -\frac{y_B}{x_B}, \text{ więc } \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

c.n.u.

Przykład 4. Oblicz: a) $\sin 120^\circ$, b) $\cos 135^\circ$, c) $\operatorname{tg} 150^\circ$.

Rozwiązanie

a) Obliczamy miarę kąta ostrego α .

$$180^\circ - \alpha = 120^\circ, \text{ więc } \alpha = 180^\circ - 120^\circ, \text{ czyli } \alpha = 60^\circ.$$

$$\text{Zatem } \sin 120^\circ = \sin(\underbrace{180^\circ - 60^\circ}_{120^\circ}) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{b) } \cos 135^\circ = \cos(\underbrace{180^\circ - 45^\circ}_{135^\circ}) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(\underbrace{180^\circ - 30^\circ}_{150^\circ}) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{Odp.: a) } \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ b) } -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ c) } -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ćwiczenie 6. Oblicz: a) $\sin 150^\circ$, b) $\operatorname{tg} 135^\circ$, c) $\cos 120^\circ$.

Twierdzenie

Jeżeli kąt α jest kątem ostrym, to:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Z (założenie):

α – kąt ostry.

T (teza):

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha, \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

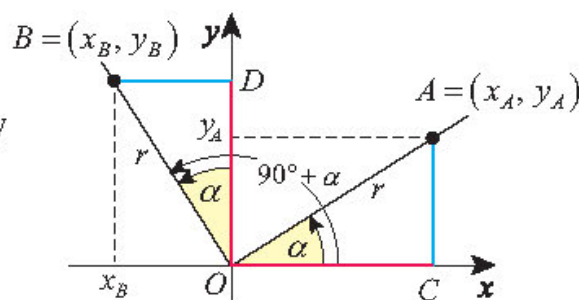
Dowód:

W układzie współrzędnych zaznaczamy kąt α i kąt $90^\circ + \alpha$.

Na końcowych ramionach tych kątów zaznaczamy punkty A i B takie, że $|OA| = |OB| = r$.

Zauważamy, że trójkąty prostokątne OCA i ODB są przystające, więc $|OD| = |OC|$ i $|BD| = |AC|$.

Zatem $x_B = -y_A$ i $y_B = x_A$, czyli $B = (-y_A, x_A)$.



Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta skierowanego:

• $\sin(90^\circ + \alpha) = \frac{y_B}{r}$ i $\cos \alpha = \frac{x_A}{r}$ oraz $y_B = x_A$, więc $\sin(90^\circ + \alpha) = \frac{x_A}{r} = \cos \alpha$.

c.n.u.

• $\cos(90^\circ + \alpha) = \frac{x_B}{r}$ i $\sin \alpha = \frac{y_A}{r}$ oraz $x_B = -y_A$, więc $\cos(90^\circ + \alpha) = \frac{-y_A}{r} = -\sin \alpha$.

c.n.u.

• $\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{y_B}{x_B}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_A}{x_A}$ oraz $\begin{cases} x_B = -y_A \\ x_A = y_B \end{cases}$, więc

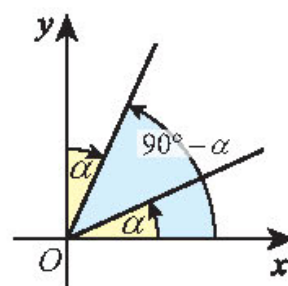
$$\frac{y_B}{x_B} = \frac{x_A}{y_A} = 1 : \frac{y_A}{x_A}$$

$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. **c.n.u.**

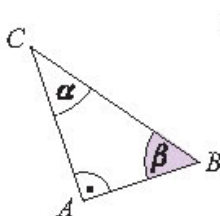
Ćwiczenie 7. Uzasadnij, że jeśli α jest kątem ostrym, to:

a) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, b) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$,

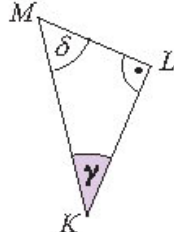
c) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.


Odpowiedzi do ćwiczeń

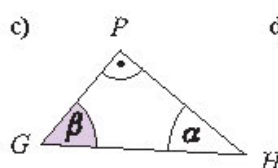
1. a)



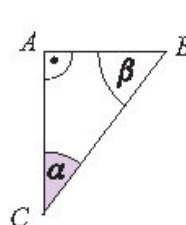
b)



c)



d)



Wskazówka. d) $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ albo $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

2. a) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$, b) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{15}{8}$, c) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 3. a) tak, b) tak, c) tak. 6. a) $\frac{1}{2}$, b) -1 , c) $-\frac{1}{2}$.

Zadania utrwalające

2.1. Punkt P należy do końcowego ramienia kąta α . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta, gdy:

a) $P = (-3, 4)$,

b) $P = (2, 3)$,

c) $P = (-1, 2)$,

d) $P = (8, 15)$,

e) $P = (-5, 12)$,

f) $P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2.2. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\cos 0^\circ - \sin 0^\circ$,

b) $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ$,

c) $\operatorname{tg} 180^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ$,

d) $\sin 90^\circ \cdot (\cos 0^\circ - \cos 180^\circ)$,

e) $\frac{\operatorname{tg} 180^\circ - \sin 90^\circ}{\cos 180^\circ}$,

f) $\frac{\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ}{\cos^2 180^\circ + \sin^2 180^\circ}$.

2.3. Narysuj końcowe ramię kąta α i zaznacz ten kąt, wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$,

b) $\operatorname{tg} \alpha = -1,5$,

c) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$,

d) $\cos \alpha = -0,6$,

e) $\sin \alpha = 0,8$,

f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.4. Skorzystaj z wzorów redukcyjnych i podaj wartość wyrażenia:

a) $\sin 135^\circ$,

b) $\cos 150^\circ$,

c) $\operatorname{tg} 120^\circ$,

d) $\sin 100^\circ$,

e) $\cos 160^\circ$,

f) $\operatorname{tg} 110^\circ$.

2.5. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $2 \cdot \sin 150^\circ - 4 \cdot \cos 120^\circ$,

b) $5 \cdot \operatorname{tg} 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 150^\circ$,

c) $\sin 45^\circ + \sin 90^\circ + \sin 135^\circ + \sin 180^\circ$,

d) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 135^\circ$,

e) $\operatorname{tg} 135^\circ - 2 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$,

f) $\frac{\operatorname{tg} 150^\circ - \cos 150^\circ}{\sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ}$.

2.6. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\frac{\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$,

b) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$,

c) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)}$,

d) $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha)$.

2.7. Podaj miarę kąta α , gdy:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 1$,

b) $\operatorname{tg} \alpha = -1$,

c) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$,

d) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$,

e) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

f) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.8. Podaj miarę kąta α , gdy:

a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$,

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.9. Uzasadnij, że jeśli kąt α jest kątem ostrym, to:

D

a) $\frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 1$,

b) $\frac{\cos(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = -1$,

c) $\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$.

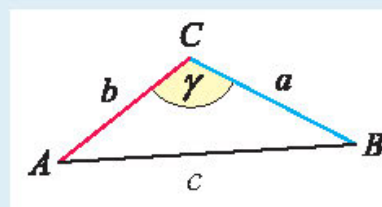
Przykłady zastosowań funkcji trygonometrycznych kątów od 0° do 180°

Funkcje trygonometryczne wykorzystywane są w wielu dziedzinach wiedzy, a ich znajomość jest niezbędna także do wykonywania niektórych zawodów, np. zawodu geodety, architekta, astronoma, czy nawigatora. Pokażemy przykłady ich zastosowań.

Twierdzenie

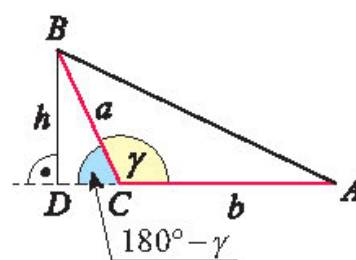
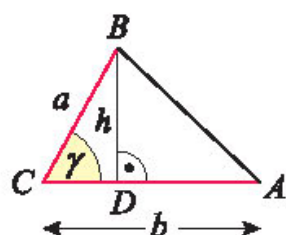
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między

tymi bokami $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.



$$Z \text{ (założenie): } |CA| = b, |CB| = a, |\sphericalangle BCA| = \gamma, \quad |BD| = h \text{ – wysokość trójkąta.} \quad \left| \quad T \text{ (teza): } P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma. \right.$$

Dowód:



W trójkącie prostokątnym CDB:

$$\frac{h}{a} = \sin \gamma, \text{ gdzie } \gamma \text{ – kąt ostry.}$$

$$\frac{h}{a} = \sin(180^\circ - \gamma), \text{ skąd } \frac{h}{a} = \sin \gamma, \\ \text{gdzie } \gamma \text{ – kąt rozwarty.}$$

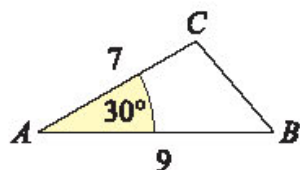
Niezależnie od tego, czy kąt γ jest ostry, czy rozwarty, mamy $\sin \gamma = \frac{h}{a}$, skąd $h = a \cdot \sin \gamma$.

Ponieważ $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}h \cdot b$ i $h = a \cdot \sin \gamma$, więc $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

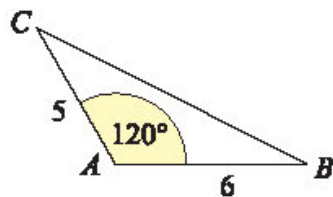
c.n.u.

Ćwiczenie 8. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole trójkąta ABC .

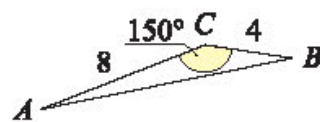
a)



b)



c)



Przykład 5. Najdłuższa przekątna ośmiokąta foremnego ma długość równą $20\sqrt{2}$. Oblicz pole tego ośmiokąta.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $|AE| = 20\sqrt{2}$. **Obliczyć:** $P_{ABCDEFGH}$.

Zauważamy, że $P_{ABCDEFGH} = 8 \cdot P_{\triangle ABS}$.

$$|AE| = 20\sqrt{2}, \text{ więc } |AS| = |BS| = \frac{1}{2} \cdot |AE|, \text{ czyli}$$

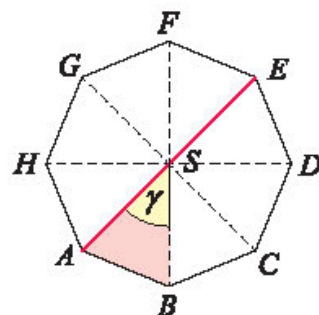
$$|AS| = |BS| = 10\sqrt{2}.$$

Wielokąt $ABCDEFGH$ jest ośmiokątem foremnym, więc $\gamma = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ$, czyli $\gamma = 45^\circ$.

$$P_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin 45^\circ, \text{ skąd } P_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ czyli}$$

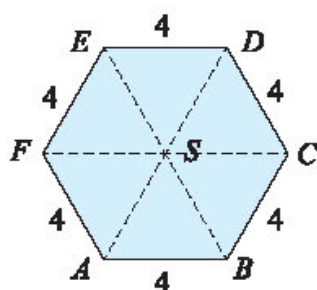
$$P_{\triangle ABS} = 50\sqrt{2}. \text{ Zatem } P_{ABCDEFGH} = 8 \cdot 50\sqrt{2} = 400\sqrt{2}.$$

Odp.: $400\sqrt{2}$.

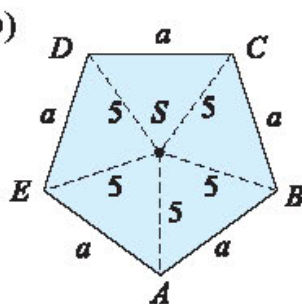


Ćwiczenie 9. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole wielokąta wyróżnionego kolorem niebieskim.

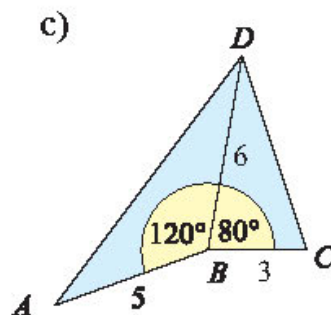
a)



b)



c)

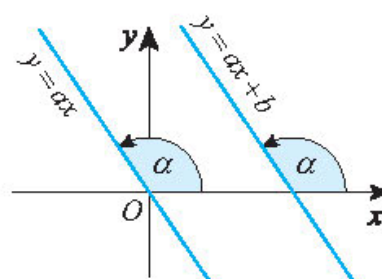


W klasie pierwszej omówiliśmy funkcję liniową $f(x) = ax + b$ i przyjęliśmy bez dowodu, że jej wykresem jest prosta o równaniu $y = ax + b$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$.

Zanim udowodnimy ten fakt, zdefiniujemy kąt nachylenia prostej do osi x .

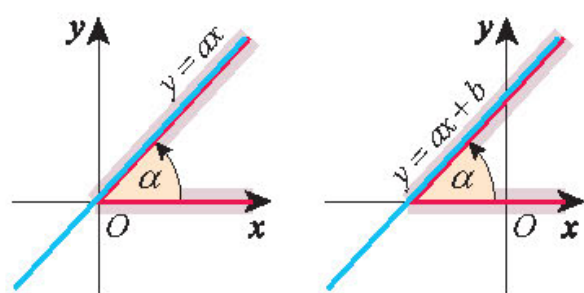
Przypomnijmy

- Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ i $b \in \mathbf{R}$, jest prosta o równaniu $y = ax + b$.
- Wykresem funkcji $f(x) = ax$ jest prosta o równaniu $y = ax$, gdzie $x \in \mathbf{R}$ i $a \in \mathbf{R}$.
- Prosta prostopadła do osi x ma równanie $x = m$, gdzie $m \in \mathbf{R}$, i nie jest ona wykresem funkcji.
- Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta o równaniu $y = ax + b$, która jest równoległa do prostej o równaniu $y = ax$.

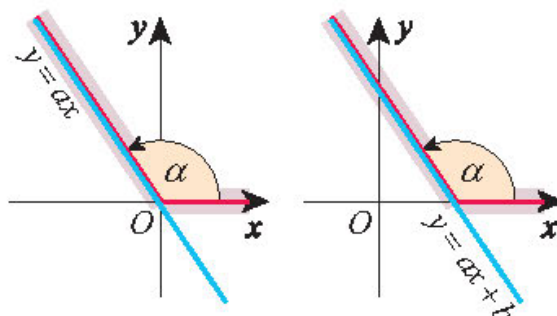


Definicja

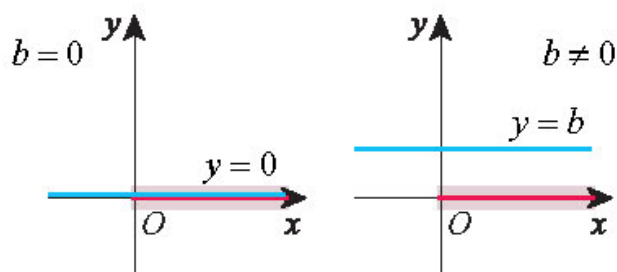
Kątem nachylenia prostej do osi x nazywamy kąt między osią x a daną prostą, którego ramię początkowe zawarte jest w osi x i ma zwrot tej osi, a ramię końcowe zawarte jest w tej prostej i leży nie niżej niż oś x .



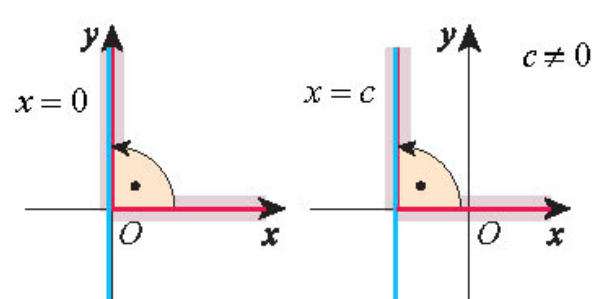
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$



$$\alpha = 0^\circ$$



$$\alpha = 90^\circ$$

Twierdzenie

Wykresem funkcji $f(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i nachylona do osi x pod takim kątem α , że $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Z (założenie):

- Wykresem funkcji $f(x) = ax$ jest zbiór punktów o współrzędnych (x, ax) .
- l – prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i nachylona do osi x pod kątem α takim, że $\operatorname{tg} \alpha = a$.

T (teza):

- 1° Każdy punkt o współrzędnych (x, ax) należy do prostej l .
- 2° Każdy punkt prostej l należy do zbioru punktów o współrzędnych (x, ax) .

Dowód:

Zauważamy, że punkt $(0, 0)$ należy do prostej l oraz należy do wykresu funkcji f , bo $0 = a \cdot 0$.

- 1° Jeżeli dowolny punkt $P = (x_P, y_P)$, gdy $x_P \neq 0$, należy do wykresu funkcji f , to z założenia $P = (x_P, ax_P)$ i α jest kątem nachylenia prostej OP do osi x .

Z definicji tangensa kąta α , gdy $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ lub $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, otrzymujemy

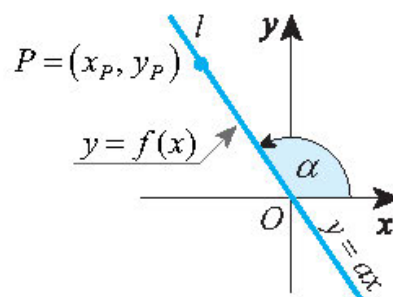
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ax_P}{x_P} = a.$$

Zatem każdy punkt o współrzędnych (x, ax) należy do prostej l .

- 2° Jeżeli dowolny punkt $P = (x_P, y_P)$, gdy $x_P \neq 0$, należy do prostej l , to $\operatorname{tg} \alpha = a$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{x_P} \text{ i z założenia } \operatorname{tg} \alpha = a, \text{ więc } \frac{y_P}{x_P} = a, \text{ skąd } y_P = a \cdot x_P.$$

Zatem każdy punkt P należący do prostej l należy również do wykresu funkcji f , czyli do zbioru punktów o współrzędnych (x, ax) . **ckd.**

**Uwaga**

Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax$ (prosta o równaniu $y = ax$) jest nachylony do osi x pod kątem:

- ostrym, gdy $a > 0$,
- rozwartym, gdy $a < 0$.

Ćwiczenie 10. Podaj miarę kąta, pod jakim wykres funkcji liniowej f jest nachylony do osi x , gdy: a) $f(x) = x$, b) $f(x) = -x$, c) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Przykład 6. Wykres funkcji liniowej f tworzy z osią x kąt 120° . Napisz wzór tej funkcji, wiedząc, że do jej wykresu należy punkt $A = (-2, 1)$.

Rozwiązanie

Wykresem funkcji f jest prosta o równaniu $y = ax + b$.

Obliczamy współczynnik a .

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = \\ &= -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$a = \operatorname{tg} \alpha, \text{ gdy } \alpha = 120^\circ$$

Obliczamy współczynnik b .

$$1 = -\sqrt{3} \cdot (-2) + b$$

$$1 = 2\sqrt{3} + b$$

$$b = 1 - 2\sqrt{3}.$$

Zatem $f(x) = -\sqrt{3}x + 1 - 2\sqrt{3}$.

Punkt $A = (-2, 1)$ należy do wykresu funkcji f , czyli $y_A = a \cdot x_A + b$.

Ćwiczenie 11. Napisz wzór funkcji liniowej f , do której wykresu należy punkt A , jeśli wykres ten tworzy z osią x kąt α , gdy: a) $A = (1, 1)$, $\alpha = 135^\circ$, b) $A = (\sqrt{3}, 6)$, $\alpha = 60^\circ$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

8. a) $15\frac{3}{4}$, b) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$, c) 8. 9. a) $24\sqrt{3}$, b) ok. 59,44, c) ok. 21,8532. 10. a) 45° , b) 135° , c) 150° .

11. a) $y = -x + 2$, b) $y = \sqrt{3}x + 3$.

Zadania utrwalające

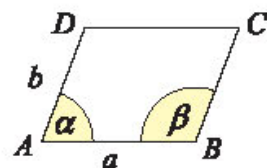
2.10. Oblicz pole trójkąta, gdy dwa jego boki mają długości 12 cm i 16 cm, a kąt między nimi zawarty ma miarę:

a) 30° , b) 45° , c) 60° , d) 80° , e) 120° , f) 150° .

2.11. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, gdy:

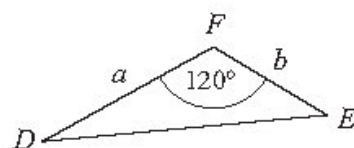
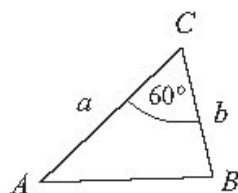
a) $a = 6$, $b = 10$, $\alpha = 30^\circ$, b) $a = 10$, $b = 4$, $\beta = 135^\circ$,

c) $a = b = 300$, $\beta = 150^\circ$.

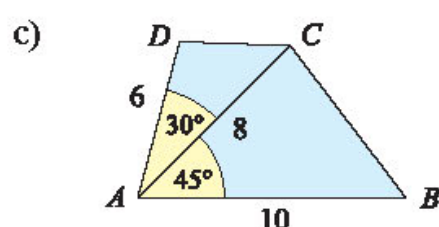
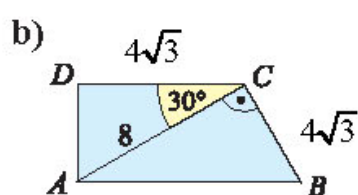
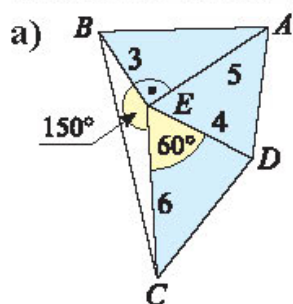


2.12. Uzasadnij, że pole P równoległoboku o bokach a , b i kącie ostrym α określone jest wzorem $P = ab \sin \alpha$.

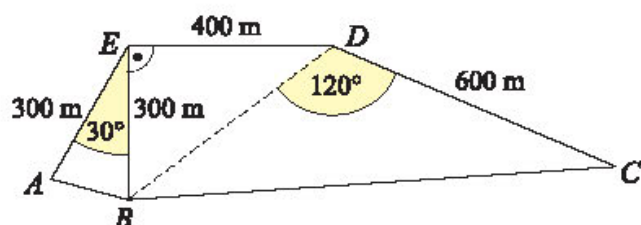
2.13. Uzasadnij, że pola trójkątów ABC i DEF przedstawionych na rysunkach są równe.



2.14. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole wielokąta wyróżnionego kolorem niebieskim.



2.15. Geodeta chcąc obliczyć powierzchnię terenu, podzielił go na trzy trójkąty. Wyniki niezbędnych pomiarów naniósł na rysunek. Uwzględnij te dane i oblicz powierzchnię tego terenu. Wyniki podaj z dokładnością do jednego hektara.



2.16. Do wykresu funkcji liniowej f należy początek układu współrzędnych. Napisz wzór funkcji f , wiedząc, że jej wykres tworzy z osią x kąt:

- a) 30° , b) 120° , c) 45° , d) 135° , e) 150° .

2.17. Oblicz tangens kąta α , jaki prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i punkt P tworzy z osią x , gdy:

- a) $P = (2, 8)$, b) $P = (-3, 6)$, c) $P = (4, 2)$, d) $P = (-1, 3)$.

2.18. Napisz wzór prostej, do której należy punkt $M = (-2, 4)$ i która tworzy z osią x kąt:

- a) 30° , b) 45° , c) 60° , d) 120° , e) 135° , f) 150° .

2.19. Wykres funkcji liniowej f tworzy z osią x kąt α i do jej wykresu należy punkt A . Napisz wzór funkcji f , gdy:

- a) $A = (2, 1)$ i $\alpha = 60^\circ$, b) $A = (-1, 4)$ i $\alpha = 120^\circ$, c) $A = (-3, 9)$ i $\alpha = 135^\circ$.

2.20. Do wykresu funkcji liniowej f należy punkt A . Oblicz miarę kąta nachylenia wykresu funkcji f do osi x , gdy:

- a) $f(x) = (3 - 2m)x + 6$ i $A = (-2, 8)$, b) $f(x) = (m - \sqrt{3})x + 3$ i $A = (\sqrt{3}, 0)$.

2.21. Oblicz wartości parametru m , dla których wykres funkcji liniowej f jest nachylony do osi x pod kątem α , gdy:

- a) $f(x) = mx + 3$ i $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, b) $f(x) = -mx + 2$ i $30^\circ < \alpha < 60^\circ$,
c) $f(x) = (2m - 3)x + 1$ i $120^\circ < \alpha \leq 150^\circ$, d) $f(x) = -mx - m$ i $150^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartością wyrażenia $\operatorname{tg} 135^\circ - \cos 135^\circ$ jest liczba:

- A. $-\frac{\sqrt{2}+2}{2}$, B. $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$, C. 0, D. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

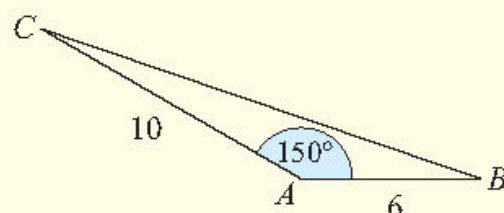
2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli $\alpha = 150^\circ$, to:

- A. $\operatorname{tg} \alpha < \cos \alpha$, B. $\sin \alpha = -\frac{1}{\cos \alpha}$, C. $\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha > 1$, D. $\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha > 0$.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Pole trójkąta ABC przedstawionego na rysunku jest równe:



- A. 7,5, B. 15, C. $15\sqrt{3}$, D. 30.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -\sqrt{3}x$ tworzy z osią x kąt, którego miara jest równa:

- A. 60° , B. 120° , C. 135° , D. 150° .

5. W układzie współrzędnych umieszczono kąt α , którego $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do ramienia końcowego kąta α należy punkt P o współrzędnych:

- A. $(-3, 4)$, B. $(3, -4)$, C. $(-3, \sqrt{7})$, D. $(3, -\sqrt{7})$.

6. Do końcowego ramienia kąta α należy punkt $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Czy prawdą jest, że $\alpha = 120^\circ$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$\sin \alpha = -\frac{1}{2} : 1 = -\frac{1}{2}$ i $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$.
N	Nie,		B.	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$ i $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$.

3. Prosta na płaszczyźnie kartezjańskiej i interpretacja geometryczna układu równań liniowych

Ciekawostka

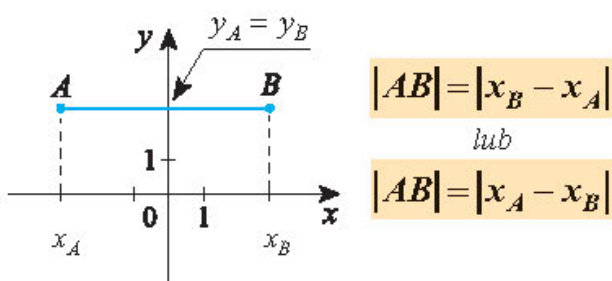
René Descartes znany w Polsce jako Kartezjusz (1596–1650) był pionierem nowoczesnej matematyki. Po raz pierwszy wprowadził pojęcie współrzędnych prostokątnych nazywanych dziś współrzędnymi kartezjańskimi oraz pojęcia zmiennej i funkcji. Ponadto wprowadził znaki „+” i „-” dla oznaczenia liczb dodatnich i ujemnych oraz „ ∞ ” dla oznaczenia wielkości nieskończenie dużej, a także potęgi dla oznaczenia iloczynu o równych czynnikach, np. $x \cdot x = x^2$.

Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej

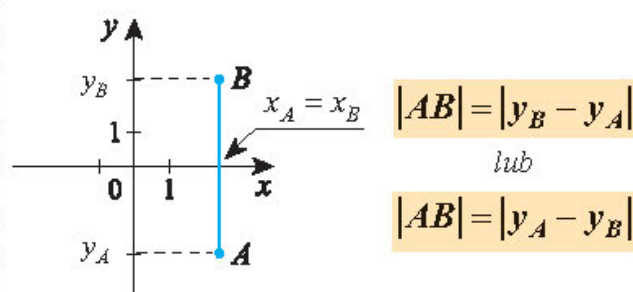
Przypomnijmy

Długości odcinków równoległych do osi układu

Odcinek AB równoległy do osi x



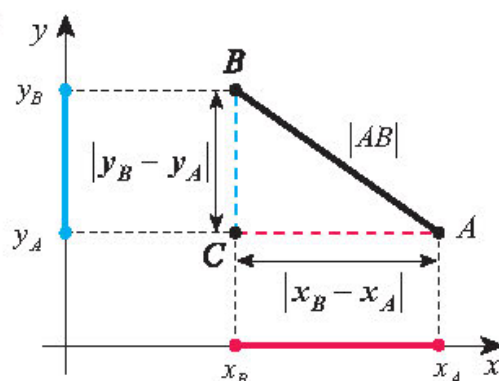
Odcinek AB równoległy do osi y



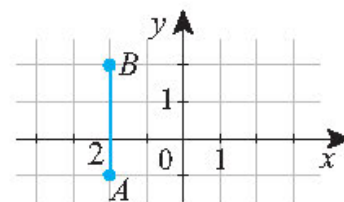
Długość odcinka nierównoległego do osi układu

Jeżeli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$,
to odległość punktów A i B (długość
odcinka AB) określona jest wzorem

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



Ćwiczenie 1. Na rysunku odcinek AB jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC o polu 18. Oblicz współrzędne wierzchołka C .



Ćwiczenie 2. Oblicz długość odcinka o końcach A i B , gdy:

a) $A = (-1, -1)$ i $B = (-3, 5)$, b) $A = (7, 4)$ i $B = (-1, -4)$,

c) $A = (2, -5)$ i $B = (6, -3)$, d) $A = (5, a)$, $B = (-3, a)$.

Przykład 1. Sprawdź, czy trójkąt ABC przedstawiony na rysunku jest prostokątny.

Rozwiązanie

Z rysunku odczytujemy współrzędne wierzchołków:

$A = (-2, -1)$, $B = (6, -3)$ i $C = (0, 2)$.

Obliczamy kwadraty długości boków trójkąta ABC .

$$|AB|^2 = (6+2)^2 + (-3+1)^2 = 64 + 4 = 68$$

$$|AC|^2 = (0+2)^2 + (2+1)^2 = 4 + 9 = 13$$

$$|BC|^2 = (0-6)^2 + (2+3)^2 = 36 + 25 = 61.$$

Korzystamy z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

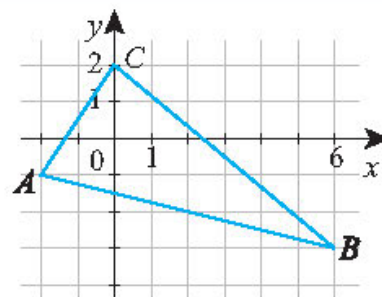
Sprawdzamy, czy $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$.

$$L = 68 \quad P = 13 + 61$$

$$68 \neq 74$$

$$L \neq P.$$

Odp.: Trójkąt ABC nie jest trójkątem prostokątnym.



Odcinek AB jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC .

Ćwiczenie 3. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny, gdy:

a) $A = (2, 1)$, $B = (1, 5)$, $C = (-7, 3)$, b) $A = (5, 0)$, $B = (1, 8)$, $C = (-5, 2)$.

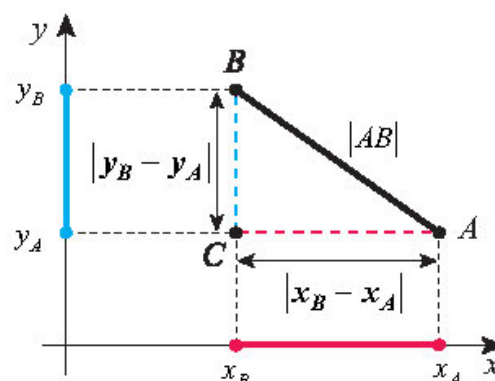
Odpowiedzi do ćwiczeń

1. $C_1 = \left(-14, \frac{1}{2}\right)$, $C_2 = \left(10, \frac{1}{2}\right)$. 2. a) $2\sqrt{10}$, b) $8\sqrt{2}$, c) $2\sqrt{5}$, d) 8. 3. a) Tak, b) nie.

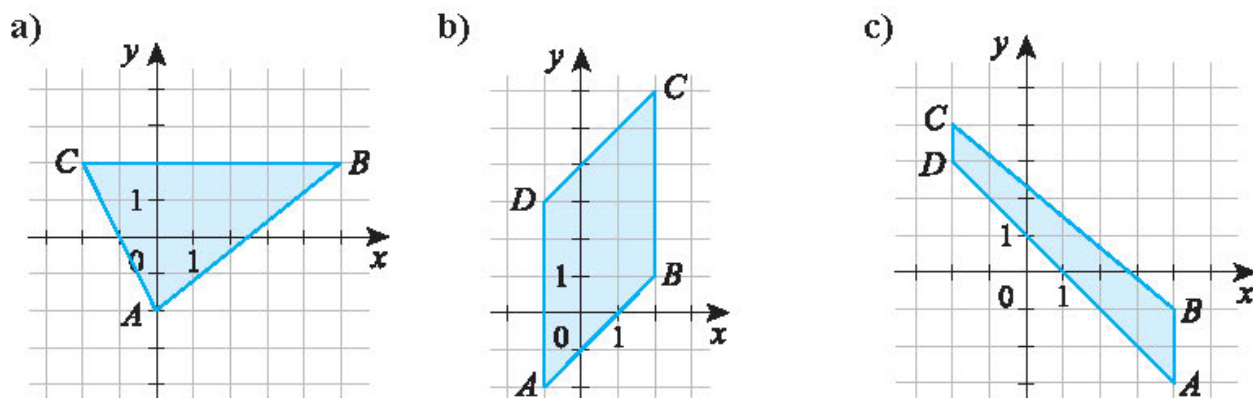
Zadania utrwalające

3.1. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku

i uzasadnij, że $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.



3.2. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i oblicz pole przedstawionego wielokąta.



3.3. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$, gdy:

- a) $A = (4, 2)$, $B = (6, 2)$, $C = (8, 5)$, $D = (6, 5)$,
 b) $A = (-2, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (0, 9)$, $D = (-4, 5)$,
 c) $A = (-1, 1)$, $B = (-3, -4)$, $C = (2, -2)$, $D = (4, 3)$.

3.4. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny, gdy:

- a) $A = (7, -1)$, $B = (3, 2)$, $C = (-3, -1)$, b) $A = (3, 0)$, $B = (9, 2)$, $C = (7, 4)$,
 c) $A = (5, 0)$, $B = (1, 8)$, $C = (-5, 5)$.

3.5. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest podobny do trójkąta MPN , gdy: $A = (1, 0)$, $B = (3, 3)$,
 $C = (-1, 4)$, $M = (3, -2)$, $P = (-5, -4)$, $N = (-1, 6)$.

3.6. Punkty: $A = (0, -3)$, $B = (0, 3)$, $C = (2, 4)$, $D = (2, -4)$ są odpowiednio wierzchołkami trójkątów ABC i ABD . Uzasadnij, że trójkąty ABC i ABD są przystające.

3.7. Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ jest rombem, gdy:

- a) $A = (-1, 3)$, $B = (2, 1)$, $C = (5, 3)$, $D = (2, 5)$,
 b) $A = (-4, -2)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 4)$, $D = (-6, 2)$.

3.8. Oblicz długość przekątnej BD czworokąta $ABCD$, gdy $A = (-1, -1)$, $B = (1, 0)$,
 $C = (2, 3)$ i $D = (0, 2)$.

3.9. Punkty $A = (-3, \sqrt{3})$, $B = (0, 0)$, $C = (2\sqrt{3}, 6)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Uzasadnij, że jeśli $D = (2\sqrt{3} - 3, \sqrt{3} + 6)$, to czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

3.10. Odcinki AB i CD są podstawami równoramiennego trapezu $ABCD$, który nie jest równoległobokiem. Podaj współrzędne wierzchołka D tego trapezu, gdy:

- a) $A = (2, 7)$, $B = (2, 1)$, $C = (5, 2)$, b) $A = (-2, 3)$, $B = (6, 3)$, $C = (4, 1)$.

Równanie prostej w postaci ogólnej

Niektóre figury płaskie opisuje się zależnościami między współrzędnymi x i y punktów należących do tych figur w postaci równań, nierówności lub układów równań i układów nierówności. Taki opis figury nazywa się opisem analitycznym, a dział geometrii, w którym stosuje się te metody, nazywa się **geometrią analityczną**.

W geometrii analitycznej np.:

- punkt określa się za pomocą pary liczb,
- prostą określa się za pomocą równania liniowego z dwiema niewiadomymi.

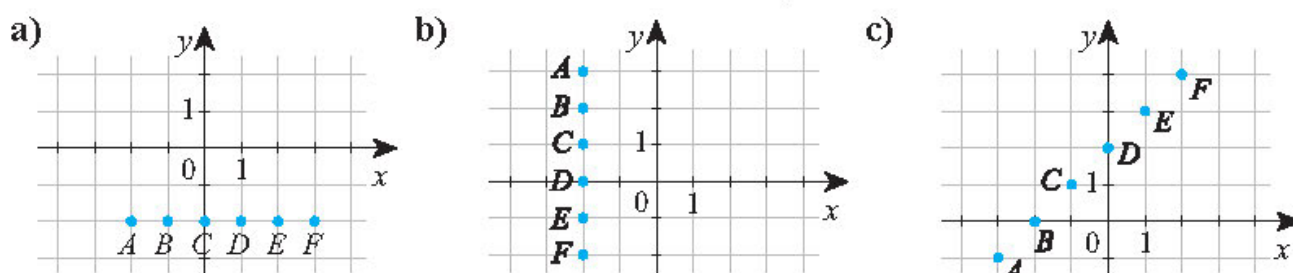
Definicja

Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 > 0$ i $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$, nazywamy równaniem ogólnym prostej.

Liczby A , B , C nazywamy współczynnikami liczbowymi tego równania.

Równanie $Ax + By + C = 0$ określa związek między współrzędnymi x oraz y punktów należących do tej prostej.

Ćwiczenie 4. Punkty A , B , C , D , E i F zaznaczono kolejno na płaszczyźnie kartezjańskiej według pewnej reguły określającej zależność pomiędzy współrzędnymi x i y tych punktów. Odkryj tę regułę i zapisz w postaci $Ax + By + C = 0$.



Przykład 2. Sprawdź, czy punkty M i K , gdzie $M = (1, 3)$ i $K = (1 - \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$, należą do prostej l o równaniu $2x + y - 3 = 0$.

Rozwiązanie

Punkt należy do prostej l , jeżeli jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

$$\underbrace{2x + y - 3}_{L} = \underbrace{0}_{P}.$$

L – lewa strona równania,
 P – prawa strona równania.

Sprawdzamy, czy punkt $M = (1, 3)$ należy do prostej l .

$$L = 2 \cdot 1 + 3 - 3 = 2, \quad P = 0, \quad \text{więc } L \neq P. \quad \text{Zatem } M \notin l.$$

$\notin$ – nie należy

Sprawdzamy, czy punkt $K = (1 - \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$ należy do prostej l .

$$L = 2 \cdot (1 - \sqrt{2}) + (1 + 2\sqrt{2}) - 3 = 0, \quad P = 0, \quad \text{więc } L = P. \quad \text{Zatem } K \in l.$$

Uwaga

- Punkty, które należą do jednej prostej, nazywamy **współliniowymi**.
- Każde dwa różne punkty są współliniowe.

Ćwiczenie 5. Napisz równanie prostej l w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$, gdy:

- a) $A = -1$, $B = 4$, $C = 2$, b) $A = 3$, $B = -12$, $C = -6$.

Sprawdź, czy punkty K i L , gdzie $K = (1000, 250)$ i $L = (2, 0)$, należą do prostej l .

Przykład 3. Wykaż, że równania **1** $x - 26y + 11 = 0$ i **2** $0,2x - 5,2y + 2,2 = 0$ opisują tę samą prostą.

Rozwiązanie

Zauważamy, że jeśli obie strony równania **2** pomnożymy przez 5, to otrzymamy równanie **1**.

$$\begin{aligned} 0,2x - 5,2y + 2,2 = 0 & \quad / \cdot 5 \\ x - 26y + 11 = 0. \end{aligned}$$

Odp.: Równania **1** i **2** opisują tę samą prostą.

Ćwiczenie 6. Uzasadnij, że równania **1** $2x - 3y + 1 = 0$ i **2** $-8x + 12y = 4$ opisują tę samą prostą.

Uwaga

Dwa równania $Ax + By + C = 0$ i $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ opisują tę samą prostą

wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$, czyli gdy $A = k \cdot A_1$, $B = k \cdot B_1$ i $C = k \cdot C_1$, gdzie $k \neq 0$.

Ćwiczenie 7. Uzasadnij, że równania

- 1** $3x - 12y + 21 = 0$, **2** $2x - 8y + 14 = 0$ i **3** $5x - 20y + 35 = 0$

opisują tę samą prostą.

Ćwiczenie 8. Uzasadnij, że jeśli $A \neq 0$ i $B \neq 0$, to do prostej o równaniu

$Ax + By + C = 0$ należą punkty $P_1 = \left(0, -\frac{C}{B}\right)$ i $P_2 = \left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.

Przykład 4. Narysuj prostą l określoną równaniem ogólnym:

a) $2x + y - 4 = 0$, b) $2x + 6 = 0$, c) $y - 2 = 0$.

Rozwiązanie

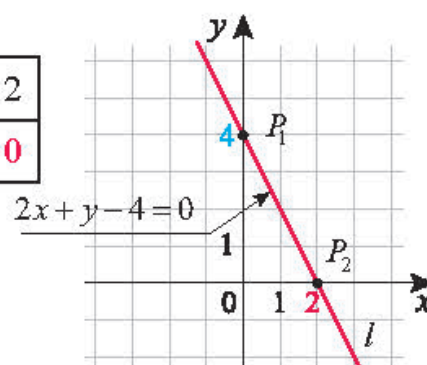
Aby narysować prostą l o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$, wystarczy znać współrzędne dwóch punktów należących na niej.

a) $2x + y - 4 = 0$, gdzie $A = 2$, $B = 1$, $C = -4$.

Jeżeli $A \neq 0$ i $B \neq 0$, to wyznaczamy współrzędne punktów

$P_1 = \left(0, -\frac{C}{B}\right)$ i $P_2 = \left(-\frac{C}{A}, 0\right)$, czyli punktów przecięcia się prostej z osiami układu.

x	0	2
y	4	0



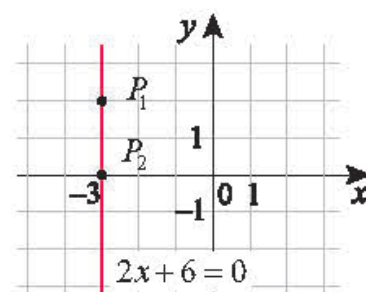
b) $2x + 6 = 0$, gdzie $A = 2$, $B = 0$, $C = 6$.

Jeżeli $A \neq 0$ i $B = 0$, to do prostej należą punkty $P = \left(-\frac{C}{A}, y\right)$, gdzie $y \in \mathbb{R}$.

Punkty należące do prostej l

to np. $P_1 = (-3, 2)$ i $P_2 = (-3, 0)$.

x	-3	-3
y	0	2



prosta l prostopadła do osi x

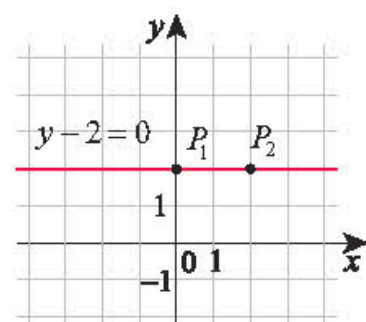
c) $y - 2 = 0$, gdzie $A = 0$, $B = 1$, $C = -2$.

Jeżeli $A = 0$ i $B \neq 0$, to do prostej należą punkty $P = \left(x, -\frac{C}{B}\right)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Punkty należące do prostej l

to np. $P_1 = (0, 2)$ i $P_2 = (2, 2)$.

x	2	0
y	2	2



prosta l równoległa do osi x

Ćwiczenie 9. Narysuj prostą określoną równaniem:

a) $x + y - 2 = 0$, b) $y - 4x = 0$, c) $y + 5 = 0$, d) $2x + 4 = 0$.

Ćwiczenie 10. Spośród równań prostych oznaczonych od 1 do 10 wskaż proste równoległe: a) do osi x , b) do osi y .

1 $x = -100$, 2 $y = -20$, 3 $x + 2 = y$, 4 $y - 1 = x$, 5 $x + 3 = 0$,

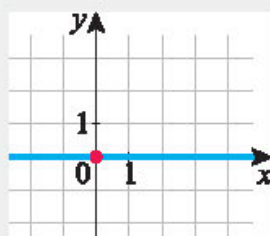
6 $1 = x$, 7 $y + 3 = 3$, 8 $x - 1 = -1$, 9 $x + y = 0$, 10 $y - x = 1$.

Uwaga

Równania osi układu współrzędnych:

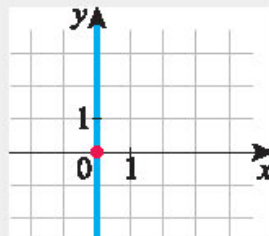
- równanie osi x

$$y = 0$$



- równanie osi y

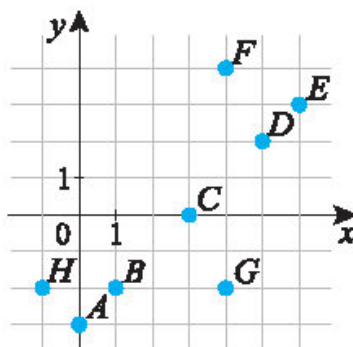
$$x = 0$$

**Odpowiedzi do ćwiczeń**

4. Wszystkie punkty mają: a) tę samą rzędną równą -2 , czyli $y = -2$ i $x \in \mathbb{R}$, zatem $0 \cdot x + y + 2 = 0$,
 b) tę samą odciętą równą -2 , czyli $x = -2$ i $y \in \mathbb{R}$, zatem $x + 0 \cdot y + 2 = 0$,
 c) rzędną o dwa większą od odciętej, czyli $y = x + 2$, zatem $x - y + 2 = 0$.
 5. $-x + 4y + 2 = 0$, $K \notin l$, $L \in l$, b) $3x - 12y - 6 = 0$, $K \notin l$, $L \in l$. 10. a) (2), (7), b) (1), (5), (6), (8).

Zadania utrwalające

- 3.11. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczono punkty A, B, C, D, E, F, G, H . Współrzędne których punktów spełniają równanie $x - y = 3$?



- 3.12. Sprawdź, czy punkty A, B, C , takie że $A = (0, 3)$,

$$B = (2, 6), C = \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \text{ należą do prostej } l \text{ określonej równaniem } 2x - y + 2 = 0.$$

- 3.13. Narysuj prostą o równaniu:

- a) $x - y + 1 = 0$, b) $3x + 9 = 0$, c) $4y - 2 = 0$,
 d) $2x + y - 3 = 0$, e) $y = 2$, f) $x = -1$.

- 3.14. Kolejne wierzchołki A i B kwadratu $ABCD$ należą do prostej o równaniu $y - 4 = 0$.
 Napisz równanie prostej CD , gdy:

- a) $C = (4, 0)$, b) $C = (-4, -4)$, c) $C = (8, 8)$.

- 3.15. Spośród równań prostych oznaczonych cyframi od **1** do **8** wskaż proste prostopadłe:

- a) do osi x , b) do osi y .

- 1** $x = y$, **2** $x - 4 = 0$, **3** $y + \sqrt{2} = 0$, **4** $x + y = 0$,
5 $x + 2 = y$, **6** $y - 2 = x$, **7** $y + 1 = 2$, **8** $x - 10 = \sqrt{2}$.

3.16. Podaj trzy pary liczb spełniających równanie:

a) $y = 3$,

b) $x = -2$,

c) $y = x$,

d) $x + y = 0$.

3.17. Podaj dwie pary liczb, które spełniają równanie $-x + 2y - 1 = 0$ oraz parę liczb, która nie spełnia tego równania.

3.18. Określ, dla jakich wartości parametru m punkt $P = (1, -1)$ należy do prostej o równaniu $m^2x + my - 20 = 0$. Dla wyznaczonych wartości m narysuj tę prostą.

3.19. Uzasadnij, że punkt $P = (m, 2m)$ należy do prostej o równaniu $2x - 3y + 4m = 0$.

D

3.20. Uzasadnij, że równania $x + 2y - 3 = 0$ i $(m-2)x + (m-1)y = m$ opisują tę samą prostą, gdy $m = 3$.

D

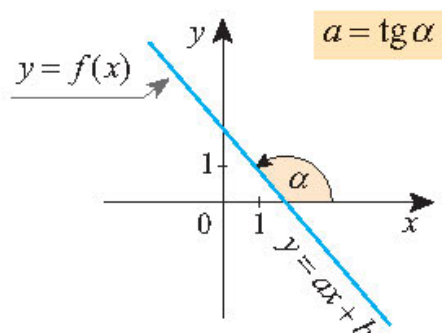
Równanie prostej w postaci kierunkowej

Przypomnijmy

Wykresem funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest prosta o równaniu $y = ax + b$, nachylona do osi x pod kątem α takim, że $a = \operatorname{tg} \alpha$.

a – współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$

b – wyraz wolny równania prostej $y = ax + b$



Przykład 5. Równanie prostej l podane w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$ przedstaw w postaci kierunkowej $y = ax + b$. Wyraż współczynnik kierunkowy a i wyraz wolny b tego równania w zależności od współczynników A , B i C .

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie $Ax + By + C = 0$ do postaci $y = ax + b$.

• Gdy $B \neq 0$, to $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, czyli $a = -\frac{A}{B}$ i $b = -\frac{C}{B}$.

• Gdy $B = 0$ i $A \neq 0$, to równania $Ax + By + C = 0$ nie da się przedstawić w postaci kierunkowej.

Prosta l jest równoległa do osi y i jej równanie ma postać $Ax + C = 0$, $\left(x = -\frac{C}{A}\right)$.

Ćwiczenie 11. Napisz w postaci kierunkowej (o ile istnieje) równanie prostej i podaj jej współczynnik kierunkowy oraz wyraz wolny, gdy:

a) $2x - y - 3 = 0$, b) $5y + 4 = 0$, c) $x - \frac{1}{2}y = 0$, d) $2x = 6$.

Ćwiczenie 12. Równanie kierunkowe prostej przedstaw w postaci ogólnej, gdy:

a) $y = \frac{2}{3}x - 4$, b) $y = -3x + \sqrt{2}$, c) $y = \frac{3}{4}$, d) $3x - y = 5$.

Uwaga

- Każde równanie prostej podane w postaci kierunkowej można przedstawić także w postaci ogólnej.
- Równanie prostej podane w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$ można przedstawić w postaci kierunkowej tylko wtedy, gdy $B \neq 0$.

Jeżeli znamy wartość współczynnika kierunkowego prostej i współrzędne punktu, który do niej należy, to możemy napisać równanie tej prostej w postaci kierunkowej.

W tym celu udowodnimy twierdzenia.

Uwaga

Prosta o współczynniku kierunkowym a przechodząca przez punkt A , gdzie $A = (x_A, y_A)$, ma równanie $y - y_A = a(x - x_A)$.

Uzasadnienie:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y_A = ax_A + b \end{cases}$$

$$y - y_A = ax - ax_A + b - b$$

$$y - y_A = ax - ax_A$$

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

$$y = a(x - x_A) + y_A$$

Równanie kierunkowe prostej

Punkt A należy do prostej.

Odejmujemy równania stronami.

Wylączamy wspólny czynnik a przed nawias.

Przykład 6. Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a , do której należy punkt P , gdy $a = 3$ i $P = (-1, 4)$.

Rozwiązanie

I sposób

Korzystamy z wzoru

$$y = a(x - x_P) + y_P, \text{ gdy } a = 3 \text{ i } P = (-1, 4).$$

$$y = 3(x + 1) + 4$$

$$y = 3x + 7.$$

II sposób

$$a = 3, \text{ więc } y = 3x + b.$$

Punkt P należy do prostej,

$$\text{więc } 4 = 3 \cdot (-1) + b,$$

skąd $b = 7$.

$$\text{Zatem } y = 3x + 7.$$

Ćwiczenie 13. Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a , do której należy punkt P , gdy $a = -\frac{1}{3}$ i $P = (1, 1)$.

Przykład 7. Napisz równanie prostej nachylonej do osi x pod kątem 150° , do której należy punkt $P = (\sqrt{3}, 1)$.

Rozwiązanie

Obliczamy współczynnik kierunkowy a .

$$a = \operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) =$$

$$= -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Korzystamy z wzoru $y = a \cdot (x - x_P) + y_P$.

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - \sqrt{3}) + 1$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2.$$

$$\text{Odp.: } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2.$$

Ćwiczenie 14. Napisz równanie prostej, do której należy punkt $P = (-2, 4)$, i nachylonej do osi x pod kątem: a) 45° , b) 120° , c) 135° .

Ćwiczenie 15. Napisz równanie prostej, do której należy punkt $P = (0, 2)$, nachylonej do osi x pod takim kątem α , że: a) $\operatorname{tg} \alpha = -3$, b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

Ciekawostka

Prosta może mieć inne równanie niż kierunkowe lub ogólne.

Jednym z takich równań jest równanie **odcinkowe prostej**. Równanie to otrzymujemy, przekształcając równanie kierunkowe lub równanie ogólne prostej.

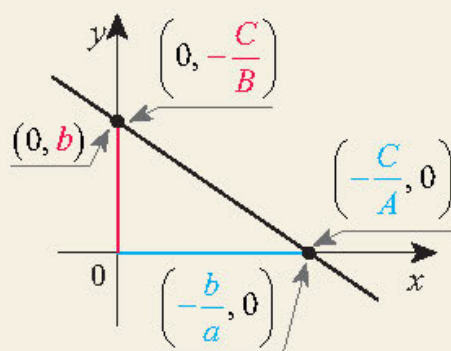
$$y = ax + b, \text{ gdzie } a \cdot b \neq 0 \quad | \quad Ax + By + C = 0, \text{ gdzie } A \cdot B \cdot C \neq 0$$

$$-ax + y = b \quad | : b$$

$$\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$Ax + By = -C \quad | : (-C)$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$



Definicja

Równaniem odcinkowym prostej nazywamy równanie postaci $\frac{x}{k} + \frac{y}{m} = 1$, gdzie $k \cdot m \neq 0$.

Ćwiczenie 16. Narysuj prostą o równaniu:

a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$, b) $3x + 4y - 12 = 0$, c) $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Ćwiczenie 17. Przedstaw w postaci odcinkowej równanie prostej:

a) $2x + 5y - 4 = 0$, b) $x - 2y = 1$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $y = 2x - 3$, $a = 2$, $b = -3$, b) $y = -\frac{4}{5}$, $a = 0$, $b = -\frac{4}{5}$, c) $y = 2x$, $a = 2$, $b = 0$,

d) nie istnieje postać kierunkowa.

12. a) $2x - 3y - 12 = 0$, b) $3x + y - \sqrt{2} = 0$, c) $4y - 3 = 0$, d) $3x - y - 5 = 0$. 13. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

14. a) $y = x + 6$, b) $y = -\sqrt{3}x + 4 - 2\sqrt{3}$, c) $y = -x + 2$.

15. a) $y = -3x + 2$, b) $y = -\sqrt{3}x + 2$. 17. a) $\frac{x}{1} + \frac{y}{-0,5} = 1$, b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{0,8} = 1$.

Zadania utrwalające

3.21. Przedstaw (jeśli to możliwe) w postaci kierunkowej równanie prostej podane w postaci ogólnej:

a) $2x + y - 1 = 0$, b) $y + 2 = 0$, c) $3x - 4y = 0$, d) $2x + 3 = 0$.

3.22. Przedstaw w postaci ogólnej równanie kierunkowe prostej:

a) $y = -\frac{3}{4}x + 2$, b) $y = -x + \frac{1}{2}$, c) $y = \sqrt{2}$, d) $y = 4 - 2\sqrt{3}$.

3.23. Napisz równanie prostej o współczynniku kierunkowym a , do której należy punkt P , gdy:

a) $a = 0$ i $P = (1, 3)$, b) $a = -1$ i $P = (-1, -1)$,
 c) $a = \sqrt{2}$ i $P = (-\sqrt{2}, 2)$, d) $a = -\frac{1}{5}$ i $P = (0, 3, -0, 3)$,
 e) $a = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ i $P = (\sqrt{2}-1, -2)$, f) $a = \sqrt[3]{6}$ i $P = (\sqrt[3]{-36}, -6)$.

3.24. Podaj miarę kąta nachylenia prostej do osi x , gdy:

a) $y = \sqrt{3}x - 4$, b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3} - x$, c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$,
 d) $y = -\sqrt{3}x + 1$, e) $y = \sqrt{3} - x$, f) $y = (\sqrt{2} - x)\sqrt{3} + \sqrt{3}$.

3.25. Napisz równanie prostej nachylonej do osi x pod kątem α , do której należy punkt P , gdy:

a) $\alpha = 30^\circ$, $P = (\sqrt{3}, 2)$, b) $\alpha = 135^\circ$, $P = (4, -4)$, c) $\alpha = 0^\circ$, $P = (-2, 3)$,
 d) $\alpha = 150^\circ$, $P = (3\sqrt{3}, -3)$, e) $\alpha = 120^\circ$, $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}\right)$, f) $\alpha = 60^\circ$, $P = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -1\right)$.

3.26. Napisz równanie prostej nachylonej do osi x pod kątem α , do której należy punkt M , gdy:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$ i $M = (1, 1)$, b) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ i $M = (-1, 2)$,
 c) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $M = (-2, 4)$, d) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ i $M = (-4, -3)$.

3.27. Prosta o równaniu $y = ax + b$ nie jest równoległa do osi x . Prosta ta przecina oś y w punkcie o rzędnej:

- a) ujemnej i przechodzi przez ćwiartki I, III i IV,
 b) dodatniej i przechodzi przez ćwiartki I, II i III.
 Określ znak iloczynu $a \cdot b$.

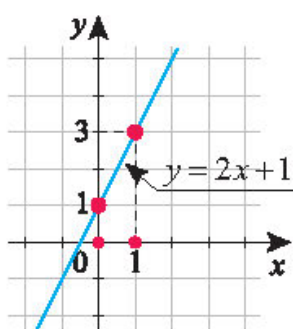
3.28. Oblicz, dla jakich wartości parametru m prosta o równaniu $y = (|m| - 2)x + 3$ jest nachylona do osi x pod kątem α takim, że $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

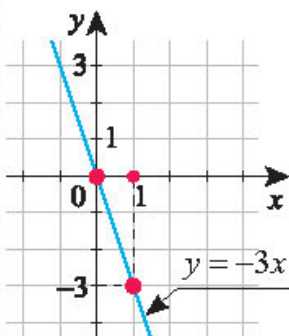
Przypomnijmy

Aby narysować prostą, wystarczy znać współrzędne dwóch różnych punktów, które do niej należą. Np. do prostej o równaniu:

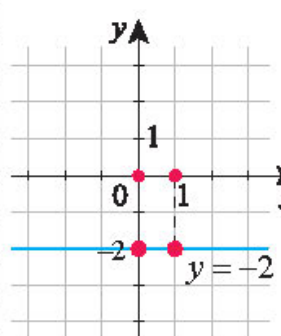
$y = 2x + 1$ należą punkty $(x, 2x + 1)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, np. $(0, 1)$ i $(1, 3)$,



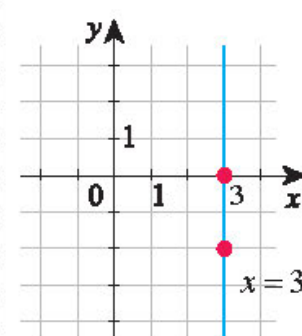
$y = -3x$ należą punkty $(x, -3x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, np. $(0, 0)$ i $(1, -3)$,



$y = -2$ należą punkty $(x, -2)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, np. $(0, -2)$ i $(1, -2)$,



$x = 3$ należą punkty $(3, y)$, gdzie $y \in \mathbb{R}$, np. $(3, -2)$ i $(3, 0)$.



Jeżeli punkty $A = (5, 0)$ i $B = (1, 8)$ należą do prostej o równaniu $y = ax + b$, to

$$\begin{cases} 0 = 5 \cdot a + b \\ 8 = 1 \cdot a + b \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} a = -2 \\ b = 10 \end{cases}.$$

Punkt A należy do prostej AB.

Punkt B należy do prostej AB.

Zatem $y = -2x + 10$.

Ćwiczenie 18. Napisz równanie prostej AB w postaci kierunkowej $y = ax + b$, gdy:

a) $A = (1, -2)$ i $B = (3, 4)$, b) $A = (-3, 11)$ i $B = (-1, 3)$.

Uwaga

Jeżeli punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ należą do prostej, to możliwe są przypadki:

1 $x_A = x_B$ i $y_A \neq y_B$,

Równanie prostej ma tylko postać ogólną.

$$x = x_A$$

lub

$$x = x_B$$

2 $x_A \neq x_B$ i $y_A = y_B$,

$$y = y_A$$

lub

$$y = y_B$$

3 $x_A \neq x_B$ i $y_A \neq y_B$,

Równanie prostej ma postać kierunkową $y = ax + b$.

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

lub

$$y - y_B = a(x - x_B)$$

Przykład 8. Prosta AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, ma równanie w postaci kierunkowej $y = ax + b$. Wyraż współczynnik kierunkowy a w zależności od współrzędnych punktów A i B .

Rozwiązanie

Prosta AB ma równanie w postaci kierunkowej $y = ax + b$, więc $x_A \neq x_B$.

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

Punkt A należy do prostej AB .

Punkt B należy do prostej AB .

$$y_A - y_B = ax_A - ax_B$$

Odejmujemy równania układu stronami.

$$ax_B - ax_A = y_B - y_A$$

$$a(x_B - x_A) = y_B - y_A \quad / : (x_B - x_A)$$

$x_A \neq x_B$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Ćwiczenie 19. Oblicz współczynnik kierunkowy a prostej AB , gdy:

a) $A = (-4, -1)$ i $B = (6, -3)$, b) $A = (-5, 1)$ i $B = (-2, -4)$.

Uwaga

Jeżeli prosta AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, ma równanie w postaci kierunkowej $y = ax + b$, to współczynnik kierunkowy a określony jest wzorem $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \operatorname{tg} \alpha$.

Przykład 9. Napisz równanie prostej AB , gdy $A = (-7, 2)$ i $B = (-4, 8)$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że $x_A \neq x_B$, więc prosta AB ma równanie w postaci kierunkowej.

$$a = \frac{8 - 2}{-4 - (-7)} = \frac{6}{3}, \text{ czyli } a = 2.$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy z wzoru $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Korzystamy z jednego z równań wynikających z tego, że:

punkt A należy do prostej

lub

punkt B należy do prostej.

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

$$y - y_B = a(x - x_B)$$

$$y - 2 = 2(x + 7)$$

$$y - 8 = 2(x + 4)$$

$$y = 2x + 16.$$

$$y = 2x + 16.$$

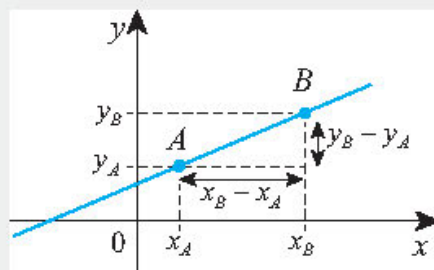
Ćwiczenie 20. Napisz równanie prostej AB , gdy:

a) $A = (3, -2)$ i $B = (5, 6)$, b) $A = (-2, 4)$ i $B = (2, -6)$.

Uwaga

Równanie prostej AB , gdy $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

i $x_A \neq x_B$, ma postać $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) + y_A$.



Ćwiczenie 21. Wykaż, że równanie prostej AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ oraz $x_A \neq x_B$, można zapisać w postaci $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$.

Przykład 10. Napisz równanie prostej AB , gdy $A = (-2, 1)$ i $B = (-3, 5)$ w postaci:

a) ogólnej, b) kierunkowej.

Rozwiązanie

a) Stosujemy wzór $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$, gdzie:

$$x_A = -2, y_A = 1, x_B = -3 \text{ i } y_B = 5.$$

$$(y - 1)(-3 + 2) - (5 - 1)(x + 2) = 0$$

$$(y - 1) \cdot (-1) - 4 \cdot (x + 2) = 0$$

$$-y + 1 - 4x - 8 = 0$$

$$-y - 4x - 7 = 0. \text{ Zatem } 4x + y + 7 = 0 \text{ postać ogólna}$$

b) *I sposób*

Stosujemy wzór

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) + y_A$$

$$y = \frac{5 - 1}{-3 + 2} (x + 2) + 1$$

$$y = -4(x + 2) + 1$$

$$y = -4x - 7 \text{ postać kierunkowa}$$

II sposób

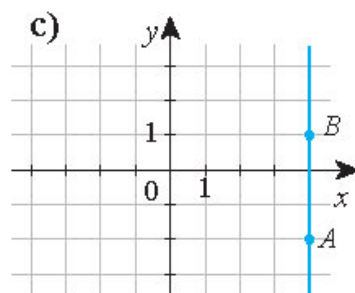
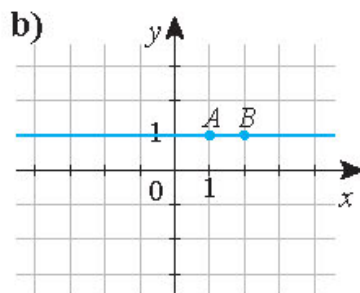
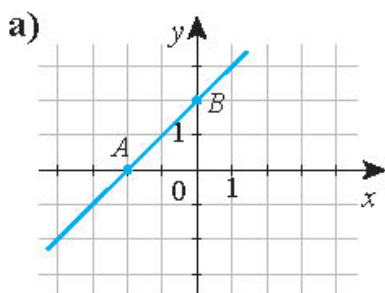
Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

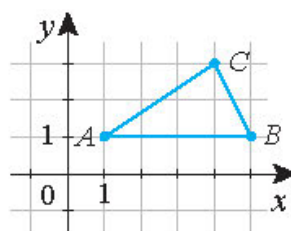
$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ -3a + b = 5 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} a = -4 \\ b = -7 \end{cases}$$

$$\text{Zatem } y = -4x - 7.$$

Ćwiczenie 22. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz równanie prostej AB .



Ćwiczenie 23. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz równania prostych zawierających boki trójkąta ABC .



Ciekawostka

Nachylenie stoków gór, wzniesień, schodów, dachów itp. często podaje się w procentach. Na znakach drogowych informacja, że nachylenie stoku jest równe 20% oznacza, że stok tworzy z poziomem taki kąt α , że $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$.



Ćwiczenie 24. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

Nachylenie stoku	10%	20%	30%	40%	50%	75%	100%
Miara kąta nachylenia stoku		$11,3^\circ$					

Ćwiczenie 25. Na szlaku turystycznym geodeta zmierzył (przyrządem zwanym teodolitem) nachylenie zbocza góry od jej podnóża i wywiesił informację, że nachylenie stoku jest równe 40%. Wiedząc, że odległość w linii prostej od podnóża góry na jej szczyt jest równa 1,5 km, oblicz wysokość góry. Wynik podaj w kilometrach.

Odpowiedzi do ćwiczeń

18. a) $y = 3x - 5$, b) $y = -4x - 1$. 19. a) $-\frac{1}{5}$, b) $-\frac{5}{3}$. 20. a) $y = 4x - 14$, b) $y = -\frac{5}{2}x - 1$.
 22. a) $y = x + 2$, b) $y = 1$, c) $x = 4$. 23. AB : $y = 1$, BC : $y = -2x + 11$, AC : $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. 25. Około 0,5 km.

Zadania utrwalające

3.29. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej AB (jeżeli istnieje), gdy:

- a) $A = (0, 0)$ i $B = (-1, 2)$, b) $A = (-4, -2)$ i $B = (1, -12)$,
 c) $A = (-1, 0)$ i $B = (3, -4)$, d) $A = (-800, 0)$ i $B = (-0, 0)$,
 e) $A = (-2\sqrt{2}, \sqrt{3})$ i $B = (\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$, f) $A = (12, 300)$ i $B = (12, -300)$.

3.30. Sprawdź, czy istnieje współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty A i B , gdy:

- a) $A = (4, -3)$ i $B = (-4, 3)$, b) $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ i $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$.

3.31. Napisz równanie prostej AB , gdy:

a) $A = (0, -2)$ i $B = (3, 0)$,

b) $A = (3, -5)$ i $B = (0, -5)$,

c) $A = (2, 3)$ i $B = (2, -3)$,

d) $A = (0, 0)$ i $B = (-4, -8)$.

3.32. Sprawdź, czy punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta, gdy:

a) $A = (1000, -998)$, $B = (-1000, 1002)$ i $C = (0, 0)$,

b) $A = (-50, -104)$, $B = (0, -4)$ i $C = (120, 236)$.

3.33. Oblicz wartość m , dla której punkty A, B i C należą do tej samej prostej, gdy:

a) $A = (-1, 1)$, $B = (4, 5)$, $C = (7, m)$,

b) $A = (m, 0)$, $B = (-2, -6)$, $C = (2, -3)$.

3.34. Określ, dla jakich wartości m prosta l tworzy z osią x kąt rozwarty, a dla jakich wartości m kąt ostry, gdy równanie prostej l , to:

a) $y = (m - 2)x + 3$,

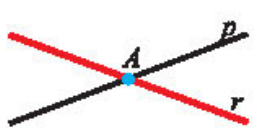
b) $\frac{m+2}{3} \cdot x + 2y - 3 = 0$,

c) $y = \left| \frac{m-1}{3} \right| x$.

3.35. Oblicz, dla jakich wartości parametru k prosta, do której należą punkty o współrzędnych $(4, k^2 - 1)$ i $(2, 3)$, jest nachylona do osi x pod kątem ostrym.

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej

Przypomnijmy

Dwie proste na płaszczyźnie mogą		
być prostymi równoległymi		przecinać się
niepokrywającymi się 	pokrywającymi się 	
$m \parallel n$ – czytamy „prosta m jest równoległa do prostej n ”		$p \nparallel r$ – czytamy „prosta p nie jest równoległa do prostej r ”

Twierdzenie

Proste k i l o równaniach $k: y = a_1x + b_1$ i $l: y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

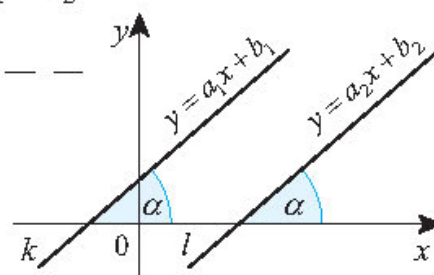
Udowodnimy twierdzenie proste.

Z (**założenie**): $k \parallel l$, gdzie $k: y = a_1x + b_1$, $|$ T (**teza**): $a_1 = a_2$.
 $l: y = a_2x + b_2$. $|$

Dowód:

Proste k i l są równoległe, więc są nachylone do osi x pod takim samym kątem α , gdzie

$a_1 = \operatorname{tg} \alpha$ i $a_2 = \operatorname{tg} \alpha$, więc $a_1 = a_2$. **ckd.**

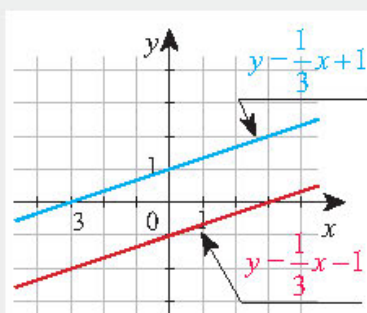


Ćwiczenie 26. Sformułuj i udowodnij twierdzenie odwrotne.

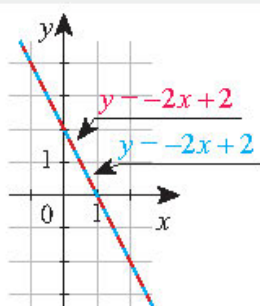
Uwaga

Dwie proste określone równaniami $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$:

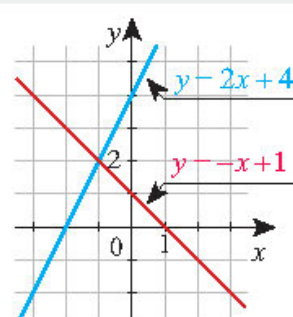
- są **równoległe**, gdy ich współczynniki kierunkowe są **równe**, tzn. $a_1 = a_2$, przy czym
 - jeżeli $b_1 \neq b_2$, to proste równoległe nie mają punktów wspólnych,
 - jeżeli $b_1 = b_2$, to proste się pokrywają,
- **przecinają się**, gdy ich współczynniki kierunkowe są **różne**, czyli $a_1 \neq a_2$.



$$a_1 = a_2 = \frac{1}{3} \text{ i } b_1 \neq b_2$$



$$a_1 = a_2 = -2 \text{ i } b_1 = b_2 = 2$$



$$a_1 \neq a_2$$

Ćwiczenie 27. Spośród prostych określonych równaniami od **1** do **8** wskaż pary prostych równoległych.

- 1** $a: y = 2x - 1$, **2** $b: 4x - 6y + 3 = 0$, **3** $c: y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{3}$, **4** $d: 2x - y - 1 = 0$,
5 $k: x + 2y - 1 = 0$, **6** $l: x + \sqrt{2}y + \sqrt{6} = 0$, **7** $m: y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$, **8** $n: 2x + 4y = 4$.



Ćwiczenie 28. Przepisz równania do zeszytu i w miejsce $\blacksquare$ wpisz taką liczbę, by proste określone tymi równaniami były równoległe.

- a) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1$ i $y = \blacksquare x + 1$, b) $y = \blacksquare x$ i $y = -\frac{2}{3}x - 5$,
 c) $y = 2^{10} \cdot x - 4^5$ i $y = \blacksquare x + 2^5$, d) $x - 2y + 1 = 0$ i $y = \blacksquare x + 1$.

Przykład 11. Napisz równanie prostej k , do której należy punkt P , i która jest równoległa do prostej l , gdy:

- a) $l: 3x + y - 5 = 0$ i $P = (2, 5)$, b) $l: y = 4$ i $P = (-1, -2)$, c) $l: x = 2$ i $P = (-4, 1)$.

Rozwiązanie

- a) $3x + y - 5 = 0$, więc $y = -3x + 5$, zatem $a = -3$

$k: y = -3x + b$.

Punkt P należy do prostej k , więc

$5 = -3 \cdot 2 + b$, skąd $b = 11$.

Prosta k ma równanie $y = -3x + 11$.

Z równania prostej l obliczamy współczynnik a i podstawiamy go do równania $k: y = ax + b$.

Do prostej k należy punkt $P = (2, 5)$.

- b) $y = 4$, więc $a = 0$

$k: y = 0 \cdot x + b$, gdzie $b = y_P$.

Prosta k ma równanie $y = -2$.

Prosta k jest równoległa do osi x i należy do niej punkt $P = (-1, -2)$.

- c) $x = 2$, więc prosta k ma tylko postać ogólną,

$x = x_P$.

Prosta k ma równanie $x + 4 = 0$.

Prosta k jest równoległa do osi y i należy do niej punkt $P = (-4, 1)$.

Odp.: a) $y = -3x + 11$, b) $y = -2$, c) $x + 4 = 0$.

Ćwiczenie 29. Napisz równanie prostej k , do której należy punkt P i która jest równoległa do prostej l , gdy:

- a) $l: y = -x + 4$ i $P = (-2, 1)$, b) $l: x - y + 2 = 0$ i $P = (1, -2)$,

- c) $l: x - 2y = 0$ i $P = (0, 0)$, d) $l: y + 3 = 0$ i $P = (1000, 0)$.

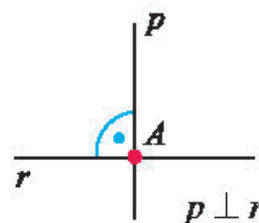
Ćwiczenie 30. Przepisz równania do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taką liczbę, by proste określone tymi równaniami przecinały się.

- a) $y = x + 3$ i $y = \blacksquare x + 3$, b) $y = \blacksquare x - 1$ i $x + y - 1 = 0$,

- c) $y = 2$ i $y = \blacksquare x + 2$, d) $y = \blacksquare x$ i $x - 2y = 0$.

Szczególnym przypadkiem prostych przecinających się są proste prostopadłe, czyli takie, które przecinają się pod kątem prostym.

$p \perp r$ – czytamy „prosta p jest prostopadła do prostej r ”.



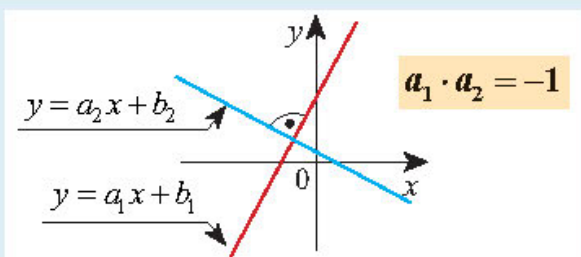
Twierdzenie

Proste k i l o równaniach kierunkowych

$$k: y = a_1x + b_1 \quad \text{ i } \quad l: y = a_2x + b_2$$

są prostopadłe wtedy i tylko wtedy,

$$\text{gdy } a_1 \cdot a_2 = -1.$$



Udowodnimy twierdzenie proste.

Z (założenie):

$$k \perp l, \text{ gdzie } k: y = a_1x + b_1, l: y = a_2x + b_2.$$

T (teza):

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dowód:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, gdzie prosta k jest nachylona do osi x pod kątem α , a prosta l pod kątem β .

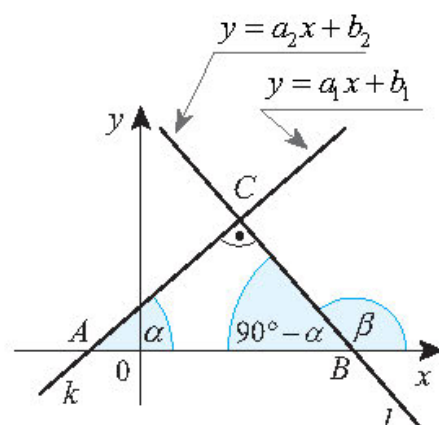
Proste k i l są prostopadłe, więc trójkąt ABC jest prostokątny.

$$|\angle ABC| = 90^\circ - \alpha, \text{ więc } \beta = 180^\circ - (90^\circ - \alpha), \text{ czyli } \beta = 90^\circ + \alpha.$$

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{ i } \quad a_2 = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ więc}$$

$$a_1 \cdot a_2 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = -1.$$

ckd.



Ćwiczenie 31. Sformułuj twierdzenie odwrotne i udowodnij je.

Ćwiczenie 32. Sprawdź, czy proste k i l są prostopadłe, gdy:

a) $k: y = 2x - 3$, $l: x + 2y + 10 = 0$, b) $k: y = \frac{1}{3}x + 1$, $l: 6x + y - 3 = 0$,

c) $k: y = \frac{1}{2}x - 7$, $l: x - 2y + 5 = 0$, d) $k: 3x + y + 1 = 0$, $l: y = \frac{1}{3}x - 2$.



Ćwiczenie 33. Przepisz równania do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taką liczbę, by proste określone tymi równaniami były prostopadłe.

a) $y = -2x + 4$ i $y = \blacksquare x + 4$,

b) $y = \blacksquare x$ i $y = -x - 3$,

c) $y = \frac{1}{3}x - 1$ i $y = \blacksquare x + 1$,

d) $y = \blacksquare x - 4$ i $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Przykład 12. Napisz równanie prostej k , do której należy punkt $P = (6, 2)$, i która jest prostopadła do prostej o równaniu $y = 3x - 1$.

Rozwiązanie

$$y = 3x - 1, \text{ więc } a_1 = 3, \text{ zatem } a_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$a_1 \cdot a_2 = -1, \text{ więc } a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

Do prostej k należy punkt $P = (6, 2)$, więc:

I sposób

Piszemy wzór szukanej prostej w postaci kierunkowej $y = a_2x + b_2$ i obliczamy wartość b_2 .

$$y = -\frac{1}{3}x + b_2$$

$$2 = -\frac{1}{3} \cdot 6 + b_2, \text{ skąd } b_2 = 4.$$

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{3}x + 4.$$

II sposób

Korzystamy z wzoru

$$y - y_P = a_2(x - x_P).$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 6)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}x + 2$$

$$\text{Zatem } y = -\frac{1}{3}x + 4.$$

Ćwiczenie 34. Napisz równanie prostej k , do której należy punkt $P = (-4, 0)$ i która jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -2x + 2$.

Jeżeli proste k i l nie są równoległe do osi układu współrzędnych i określone są równaniami ogólnymi, to ich wzajemne położenie możemy zbadać poprzez porównanie stosunków ich odpowiednich współczynników liczbowych.

Jeśli $k: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_1 \neq 0$ oraz $B_1 \neq 0$,

$$a_k = -\frac{A_1}{B_1}$$

$l: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ i $A_2 \neq 0$ oraz $B_2 \neq 0$,

$$a_l = -\frac{A_2}{B_2}$$

to proste k i l :

- są równoległe, gdy $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$,
- nie są równoległe, gdy $\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}$,
- są prostopadłe, gdy $\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1$.

$$a_k = a_l$$

$$a_k \neq a_l$$

$$a_k \cdot a_l = -1$$

Ćwiczenie 35. Uzasadnij, że dla prostych k i l podanych powyżej można warunek:

a) równoległości zapisać w postaci $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$,

b) prostopadłości zapisać w postaci $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Przykład 13. Sprawdź, czy proste k i l są równoległe czy prostopadłe, gdy:

- a) $k: 6x + 8y - 19 = 0$, $l: 21x + 28y + 5 = 0$, b) $k: 4x + 3y - 1 = 0$, $l: 12x - 16y + 5 = 0$.

Rozwiązanie

a) $k: 6x + 8y - 19 = 0$ $l: 21x + 28y + 5 = 0$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 $\frac{6}{8}$ $\frac{21}{28}$

$$\frac{6}{8} = \frac{21}{28}$$

Obliczamy ilorazy $\frac{A_1}{B_1}$ i $\frac{A_2}{B_2}$
i porównujemy je.

Proste k i l są równoległe, czyli $k \parallel l$.

b) $k: 4x + 3y - 1 = 0$ $l: 12x - 16y + 5 = 0$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 $\frac{4}{3}$ $\frac{12}{-16}$

$$\frac{4}{3} \neq -\frac{12}{16}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Proste k i l przecinają się, czyli $k \nparallel l$.

$$\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{12}{16}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$$

Sprawdzamy, czy $\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1$.

Proste k i l są prostopadłe, czyli $k \perp l$.

Odp.: a) $k \parallel l$, b) $k \perp l$.

Ćwiczenie 36. Sprawdź, czy proste k i l są równoległe lub prostopadłe, gdy:

- a) $k: 10x - 25y + 1 = 0$, $l: -2x + 12y - 4 = 0$,
 b) $k: 5x + 2y + 4 = 0$, $l: 6x - 15y - 4 = 0$,
 c) $k: 12x - 18y + 9 = 0$, $l: -4x + 6y - 7 = 0$.

Proste k i l o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:		
równoległe ($k \parallel l$), gdy	przecinające się ($k \nparallel l$), gdy	prostopadłe ($k \perp l$), gdy
$a_1 = a_2$	$a_1 \neq a_2$	$a_1 \cdot a_2 = -1$

Proste k i l o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są:		
równoległe ($k \parallel l$), gdy	przecinające się ($k \nparallel l$), gdy	prostopadłe ($k \perp l$), gdy
$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$	$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Uwaga

Jeżeli prosta określona jest równaniem $Ax + By + C = 0$, to prosta do niej:

- równoległa może mieć równanie $Ax + By + C_1 = 0$,
- prostopadła może mieć równanie $-Bx + Ay + C_2 = 0$.

Przykład 14. Prosta k ma równanie $4x - 3y + 2 = 0$. Napisz równanie prostej l , do której należy punkt $P = (-1, 3)$ i która jest:

- a) równoległa do prostej k , b) prostopadła do prostej k .

Rozwiązanie

a) $k: 4x - 3y + 2 = 0$

$$l: 4x - 3y + C_1 = 0.$$

Równanie prostej l równoległej do prostej k

Punkt P należy do prostej l , więc $4 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 + C_1 = 0$, skąd $C_1 = 13$.

Zatem $l: 4x - 3y + 13 = 0$.

b) $k: 4x - 3y + 2 = 0$

$$-(-3)x + 4y + C_2 = 0$$

$$l: 3x + 4y + C_2 = 0.$$

Równanie prostej prostopadłej do prostej k

Punkt P należy do prostej l , więc $3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + C_2 = 0$, skąd $C_2 = -9$.

Zatem $l: 3x + 4y - 9 = 0$.

Odp.: a) $4x - 3y + 13 = 0$, b) $3x + 4y - 9 = 0$.

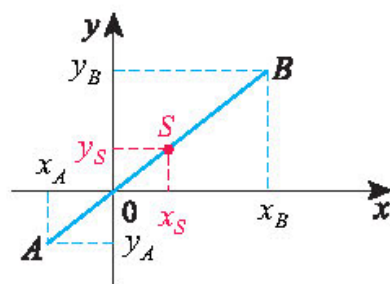
Ćwiczenie 37. Prosta k ma równanie $2x + 5y - 1 = 0$. Napisz równanie prostej l , do której należy punkt $P = (4, -2)$ i która jest:

- a) równoległa do prostej k , b) prostopadła do prostej k .

Symetralna odcinka**Przypomnijmy**

Jeżeli punkt $S = (x_S, y_S)$ jest środkiem odcinka AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$



Ćwiczenie 38. Podaj współrzędne środka odcinka AB , gdy:

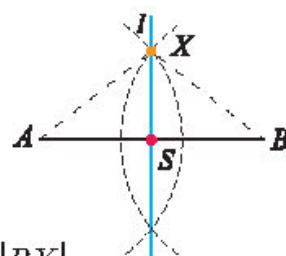
- a) $A = (-6, 2)$ i $B = (-2, -4)$, b) $A = (-1, -4)$ i $B = (3, 4)$.

Przypomnijmy

Definicja

Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka, która dzieli go na połowy.

- Środek odcinka należy do jego symetralnej.
- Jeżeli punkt X należy do symetralnej odcinka AB , to $|AX| = |BX|$.



Przykład 15. Napisz równanie symetralnej l odcinka AB , gdy $A = (-2, -3)$ i $B = (6, 5)$.

Rozwiązanie

Równanie prostej l ma postać $y - y_S = a_l(x - x_S)$, gdzie a_l to współczynnik kierunkowy symetralnej l i punkt S jest środkiem odcinka AB .

Obliczamy współrzędne środka S odcinka AB

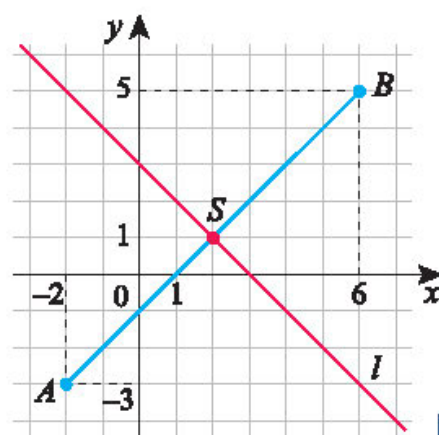
$$S = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-3+5}{2} \right) = (2, 1).$$

Współczynnik kierunkowy a prostej AB to

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5+3}{6+2} = 1, \text{ więc } a_l = -1. \quad a \cdot a_l = -1$$

Zatem $y - 1 = -(x - 2)$, czyli $l: y = -x + 3$.

Odp.: $y = -x + 3$.



Ćwiczenie 39. Napisz równanie symetralnej odcinka AB , gdy:

- a) $A = (2, -4)$ i $B = (-4, 6)$, b) $A = (-1, -1)$ i $B = (-5, -5)$.

Ćwiczenie 40. Sprawdź, czy punkt P należy do symetralnej odcinka AB , gdy:

- a) $A = (-1, 3)$, $B = (3, -1)$ i $P = (99, 99)$, b) $A = (0, 2)$, $B = (6, 0)$ i $P = (6, 10)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

27. **1** i **4**, **2** i **7**, **3** i **6**, **5** i **8**. 28. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-\frac{2}{3}$, c) 2^{10} , d) $\frac{1}{2}$ 29. a) $y = -x - 1$,
b) $y = x - 3$, c) $y = \frac{1}{2}x$, d) $y = 0$. 30. Każda liczba rzeczywista różna od: a) 1, b) -1, c) 0, d) $\frac{1}{2}$.
32. a) Tak, b) nie, c) nie, d) tak. 33. a) $\frac{1}{2}$, b) 1, c) -3, d) $-\frac{2}{3}$. 34. $y = \frac{1}{2}x + 2$.
36. a) $l \nparallel k$ i $l \not\perp k$, b) $l \perp k$, c) $l \parallel k$. 37. a) $2x + 5y + 2 = 0$, b) $-5x + 2y + 24 = 0$.
38. a) $(-4, -1)$, b) $(1, 0)$. 39. a) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$, b) $y = -x - 6$. 40. a) Tak, b) tak.

Zadania utrwalające

3.36. Określ wzajemne położenie prostych k i l , gdy:

- a) $k: 2x - y + 1 = 0$ i $l: x - 2y + 6 = 0$, b) $k: y = x + 2$ i $l: x - y - 3 = 0$,
 c) $k: 2x + 6y + 4 = 0$ i $l: y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, d) $k: x + 2y - 2 = 0$ i $l: 2x - y - 1 = 0$.

3.37. Napisz równanie prostej k , do której należy punkt P i która jest równoległa do prostej l , gdy:

- a) $l: y = 2x - 1$, $P = (3, 1)$, b) $l: \frac{3}{4}x + y + 2 = 0$, $P = (-2, 6)$,
 c) $l: y = 5$, $P = (0, -3)$, d) $l: x = -2$, $P = \left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

3.38. Napisz równanie prostej k , do której należy punkt P i która jest prostopadła do prostej l , gdy:

- a) $l: y = -\frac{2}{3}x$, $P = (1, -6)$, b) $l: x + 2y + 2 = 0$, $P = (-4, 1)$,
 c) $l: x = -5$, $P = (2, -3)$, d) $l: y = 4$, $P = (-3, 5)$.

3.39. Określ, dla jakich wartości m proste l i k są równoległe, gdy:

- a) $l: y = \left(\frac{m+2}{5} - 3\right)x + 5$, $k: y = -2x + 5$,
 b) $l: y = 2x + 5$, $k: (m-1)x - y + 2 = 0$.

3.40. Określ, dla jakich wartości m proste l i k są prostopadłe, gdy:

- a) $l: y = \left(\frac{m-3}{4} + 1\right)x - 2$, $k: y = \frac{1}{2}x$, b) $l: y = \frac{1}{6}x - 1$, $k: (m+2)x - y - 1 = 0$.

3.41. Oblicz, dla jakich wartości m proste k i l są prostopadłe, a dla jakich m proste te są równoległe, gdy:

- a) $k: 2x + my + 3 = 0$, $l: 0,3x + 0,2y - 7 = 0$, b) $k: y = (m+3)x + 2$, $l: y = (m-1)x - 5$.

3.42. Określ, dla jakich wartości parametru m pokrywają się proste o równaniach:

- a) $2x + y + m^2 = 0$ i $x + \frac{1}{2}y + 2 = 0$,
 b) $8x - 10y + 1 = 0$ i $-24x + 30y - m^2 - 2m = 0$.

3.43. Uzasadnij, że jeżeli proste o równaniach kierunkowych $y = ax + b$, $y = bx + c$ i $y = cx + a$ mają punkt wspólny, to $a = b = c$.

Interpretacja geometryczna układów dwóch równań liniowych

Aby podać interpretację geometryczną układu równań liniowych $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$,

gdzie $a_1^2 + b_1^2 > 0$ i $a_2^2 + b_2^2 > 0$, należy narysować w jednym układzie współrzędnych proste, które są określone równaniami układu.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 16. Podaj interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$.

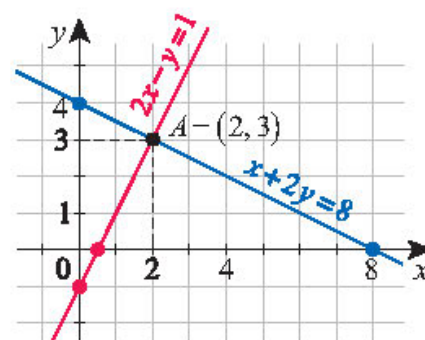
Rozwiązanie

Obrazem geometrycznym każdego z równań układu jest prosta. Rysujemy proste o równaniach:

- $2x - y = 1$,
- $x + 2y = 8$.

x	0	0,5
$y = 2x - 1$	-1	0

x	0	8
$y = -0,5x + 4$	4	0



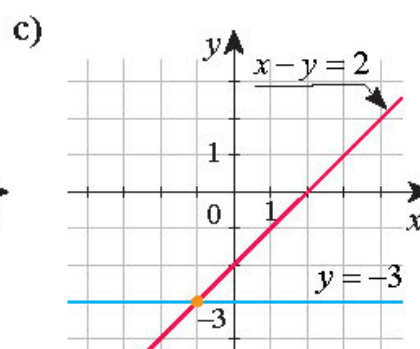
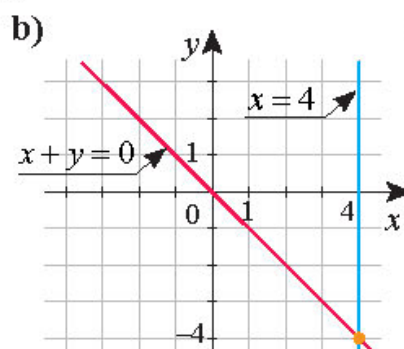
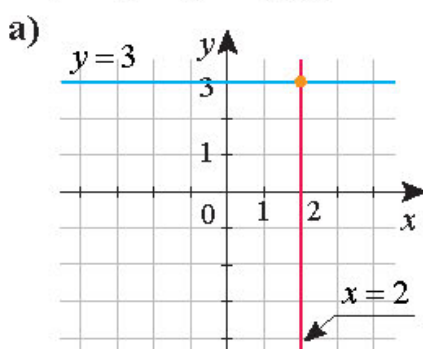
Narysowane w układzie współrzędnych proste określone równaniami $2x - y = 1$ i $x + 2y = 8$, są interpretacją geometryczną układu równań $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$.

Proste $2x - y = 1$ i $x + 2y = 8$ przecinają się w punkcie o współrzędnych $(2, 3)$.

Punkt $(2, 3)$ jest interpretacją geometryczną rozwiązania układu równań.

Taki układ nazywamy **układem oznaczonym** lub **układem równań niezależnych**.

Ćwiczenie 41. Na rysunku przedstawiona jest interpretacja geometryczna układu równań. Napisz go i podaj jego rozwiązanie.



Przykład 17. Rozwiąż algebraicznie i podaj interpretację geometryczną układu równań:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

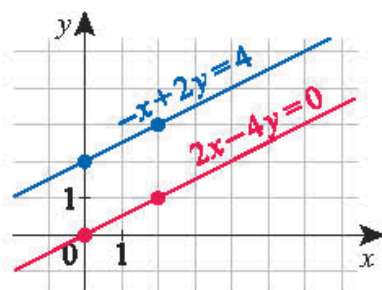
Oba układy rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{cases} -x + 2y = 4 \quad / \cdot 2 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \\ + \quad \begin{cases} -2x + 4y = 8 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \\ \hline 0x + 0y = 8 \\ 0 = 8 \quad \text{sprzeczność} \end{array}$$

Rysujemy proste określone równaniami układu.

$$-x + 2y = 4 \quad \text{i} \quad 2x - 4y = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{i} \quad y = \frac{1}{2}x$$



Odp.: **a)** Układ nie ma rozwiązania. Układ ten nazywamy **układem sprzecznym**.

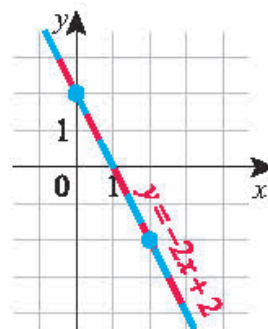
Interpretacją geometryczną układu sprzecznego są proste równoległe niepokrywające się.

$$\begin{array}{r} \text{b) } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \quad / \cdot (-2) \end{cases} \\ + \quad \begin{cases} 2x + y = 2 \\ -2x - y = -2 \end{cases} \\ \hline 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ 0 = 0 \quad \text{prawda} \end{array}$$

Rysujemy proste określone równaniami układu.

$$2x + y = 2 \quad \text{i} \quad x + \frac{1}{2}y = 1$$

$$y = -2x + 2 \quad \text{i} \quad y = -2x + 2$$



Odp.: **b)** Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Są to punkty, których współrzędne x i y spełniają

$$\text{warunek } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - 2x \end{cases}.$$

Układ ten nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Interpretacją geometryczną układu nieoznaczonego są proste równoległe pokrywające się (jedna prosta).

Ćwiczenie 42. Rozwiąż algebraicznie i podaj interpretację geometryczną układu równań:

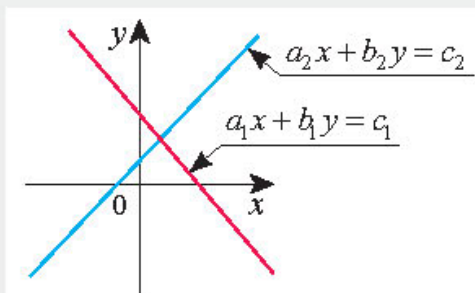
a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 2x - 0,5y = 1,5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -2x + y = 10 \end{cases}$

Uwaga

Układ równań $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, gdzie $a_1^2 + b_1^2 > 0$ i $a_2^2 + b_2^2 > 0$, pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy:

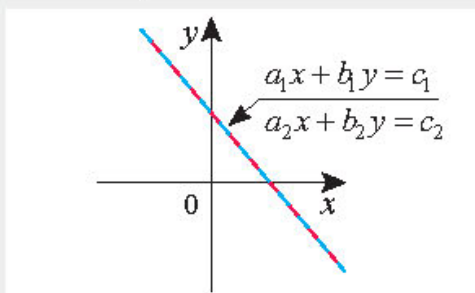
- **oznaczonym** (lub układem równań niezależnych), gdy ma jedno rozwiązanie.

Interpretacją geometryczną układu oznaczonego są dwie proste przecinające się.



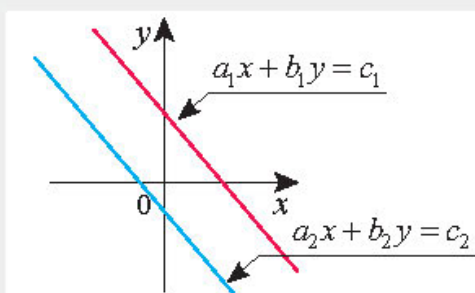
- **nieoznaczonym** (lub układem równań zależnych), gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Interpretacją geometryczną układu nieoznaczonego są dwie proste równoległe pokrywające się.



- **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązania.

Interpretacją geometryczną układu sprzecznego są dwie proste równoległe niemające punktów wspólnych.



Ćwiczenie 43. Spośród równań, ponumerowanych cyframi od **1** do **8**, wybierz wszystkie możliwe pary równań, które będą tworzyły układ taki, że:

- a) nie będzie miał on rozwiązania, b) będzie miał jedno rozwiązanie,
c) będzie miał nieskończenie wiele rozwiązań.

Rozwiąż i podaj interpretacje geometryczne utworzonych układów.

- 1** $y = 3x - 1$, **2** $6x - 2y - 1 = 0$, **3** $y = \frac{1}{2}x$, **4** $x - 2y + 1 = 0$,
5 $x = 2$, **6** $2(x - 1) = y + 2$, **7** $12x - 4y = 2$, **8** $3x - y = 0$.

Ćwiczenie 44. Podaj, jakie liczby należałoby wpisać w miejsca $\square$ i $\bigcirc$, żeby układ równań $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ \square x - \bigcirc y = 6 \end{cases}$ był:

- a) oznaczony, b) nieoznaczony, c) sprzeczny.

Odpowiedzi do ćwiczeń

41. a) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$, $(2, 3)$, b) $\begin{cases} x=4 \\ x+y=0 \end{cases}$, $(4, -4)$, c) $\begin{cases} y=-3 \\ x-y=2 \end{cases}$, $(-1, -3)$.
 42. a) $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$, b) nieskończenie wiele rozwiązań, $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y=4x-3 \end{cases}$, c) brak rozwiązań.
 43. Np.: a) **1** i **2**, **1** i **7**, **1** i **8**, b) **1** i **3**, **1** i **4**, **1** i **5**, c) nie ma takiej pary prostych.
 44. Np. a) 1 i 2, b) 12 i 18, c) 2 i 3.

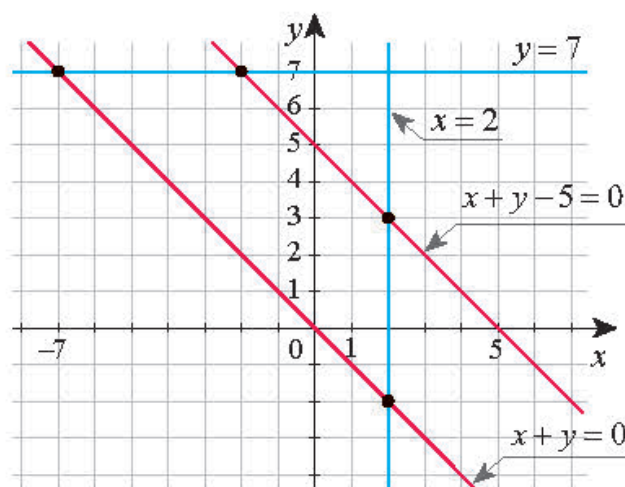
Zadania utrwalające

3.44. Na rysunku przedstawione są proste o równaniach:

- 1** $x = 2$, **2** $y = 7$,
3 $x + y = 0$, **4** $x + y - 5 = 0$.

Podaj przykłady par równań, które tworzą układ równań:

- a) oznaczony,
 b) sprzeczny,
 c) nieoznaczony.



3.45. Rozwiąż algebraicznie i podaj interpretację geometryczną układu równań:

- a) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 3x + 2y - 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$,
 d) $\begin{cases} -4x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$, e) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases}$, f) $\begin{cases} x = 5 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$.

3.46. Podaj, jakie liczby należałoby wpisać miejsca $\square$ i $\bigcirc$, żeby układ równań

$$\begin{cases} \square x + 2y = 3 \\ 3x + \bigcirc y = 9 \end{cases} \text{ był:}$$

- a) nieoznaczony, b) oznaczony, c) sprzeczny.

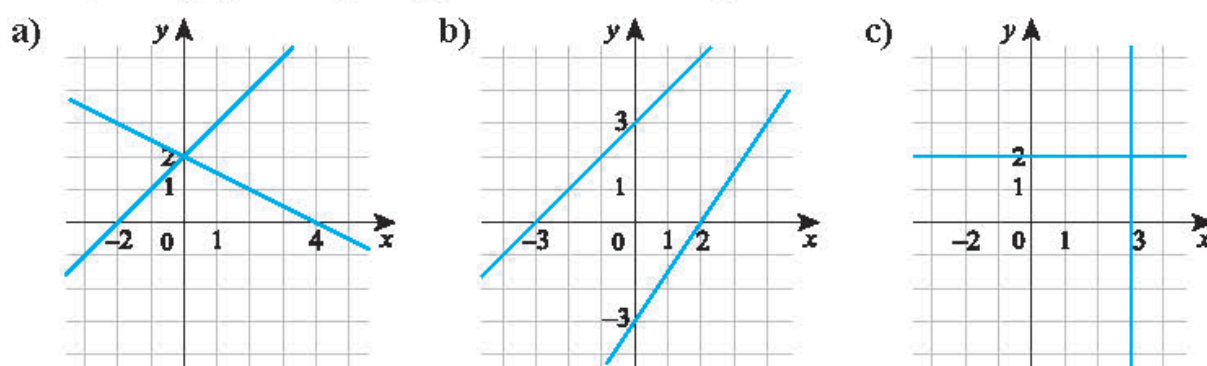
3.47. Do równania:

a) $4x + 3y = 5$, b) $y = -2x + 5$, c) $3x = 2(y - 3)$, d) $y = 2$

dopisz drugie równanie, aby otrzymany układ równań:

- 1 nie miał rozwiązania,
- 2 miał jedno rozwiązanie,
- 3 miał nieskończenie wiele rozwiązań.

3.48. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz równania układu równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.

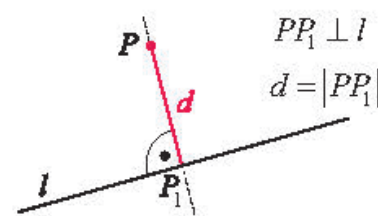


3.49. Sprawdź, czy proste o równaniach $6x - y - 2 = 0$, $2x + y - 4 = 0$ i $-4x + y = 0$ przecinają się w jednym punkcie.

Odległość punktu od prostej i odległość dwóch prostych równoległych

Przypomnijmy

Odległość punktu P od prostej l to długość odcinka PP_1 , gdzie P_1 jest punktem przecięcia się prostej l z prostą do niej prostopadłą, do której należy punkt P .



Jeżeli chcemy obliczyć odległość punktu P od prostej l na płaszczyźnie kartezjańskiej, to:

- piszemy równanie prostej k , która jest prostopadła do prostej l i do której należy punkt P ,
- obliczamy współrzędne punktu P_1 przecięcia się prostych k i l ,
- obliczamy długość odcinka PP_1 .

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 18. Oblicz odległość d punktu $A = (3, -4)$ od prostej l , gdy prosta l ma równanie $y = x - 3$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że odległość punktu A od prostej l jest równa długości odcinka AD , gdzie D jest punktem przecięcia prostych k i l . Prosta k jest prostopadła do prostej l i przechodzi przez punkt A . Piszemy równanie prostej k :

$$a_l = 1, \text{ więc } a_k = -1, \text{ skąd } k: y = -x + b.$$

Punkt $A = (3, -4)$ należy do prostej k , więc $k: y = -x - 1$.

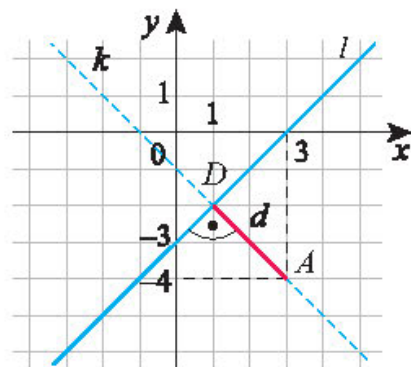
Obliczamy współrzędne punktu D .

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 1 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}, \text{ czyli } D = (1, -2).$$

Obliczamy odległość d .

$$d = |AD| = \sqrt{(1-3)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Odp.: $d = 2\sqrt{2}$.

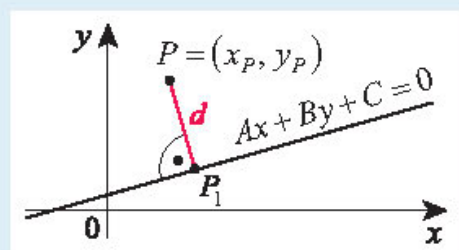


Stosując metodę opisaną w przykładzie 18., możemy wyprowadzić wzór na odległość punktu od prostej.

Twierdzenie

Odległość d punktu $P = (x_P, y_P)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, określona jest

wzorem
$$d = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Aby zastosować powyższy wzór do danych z przykładu 18., należy:

1° równanie prostej $l: y = x - 3$ przedstawić w postaci ogólnej $x - y - 3 = 0$,

2° odległość d obliczyć z wzoru $d = \frac{|1 \cdot x_A - 1 \cdot y_A - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$, gdzie $A = (3, -4)$,

$$\text{czyli } d = \frac{|1 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) - 3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ćwiczenie 45. Oblicz odległość d punktu $P = (-2, 1)$ od prostej l , gdy prosta l ma równanie: a) $x = 3$, b) $y = 0$, c) $y = -x + 1$.

Ćwiczenie 46. Zastosuj wzór podany w twierdzeniu i oblicz odległość d punktu $P = (-2, 4)$, od prostej o równaniu: a) $3x - 4y + 1 = 0$, b) $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Ćwiczenie 47. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A = (-4, -2)$, $B = (8, 2)$, $C = (0, 8)$. Oblicz długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .

Przykład 19. Proste równoległe k i l mają równania k : $y = 2x$ i l : $y = 2x + 3$.

Oblicz odległość d prostej k od prostej l .

Rozwiązanie

Odległość prostych równoległych k i l jest równa odległości dowolnego punktu P należącego do jednej z nich od drugiej prostej.

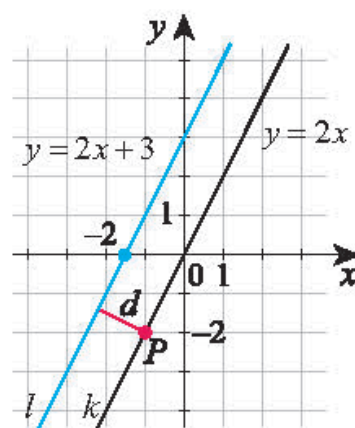
Na prostej k wybieramy dowolny punkt P , np. $P = (-1, -2)$, a następnie obliczamy odległość punktu P od prostej l z wzoru

$$d = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Równanie prostej l w postaci ogólnej to $2x - y + 3 = 0$, więc

$$d = \frac{|2x_P - y_P + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 \cdot (-1) - (-2) + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Odp.: Odległość d prostej k od prostej l jest równa $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.



$$A = 2, B = -1, C = 3$$

$$P = (-1, -2)$$

Uwaga

Jeżeli proste równoległe k i l określone są równaniami ogólnymi,

$$k: Ax + By + C_1 = 0 \quad \text{i} \quad l: Ax + By + C_2 = 0,$$

to ich odległość d określona jest wzorem $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

Ćwiczenie 48. Oblicz odległość prostych równoległych l i k , gdy:

a) $l: 3x - y + 5 = 0$ i $k: 3x - y + 12 = 0$,

b) $l: y = -2x + 3$ i $k: y = -2x - 7$,

c) $l: -3x + 4y = 2$ i $k: -6x + 8y + 1 = 0$,

d) $l: y = -\frac{1}{2}x + 3$ i $k: y + \frac{1}{2}x = 7$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

45. a) $d=5$, b) $d=1$, c) $d=\sqrt{2}$. 46. a) $d=\frac{21}{5}$, b) $d=\frac{16\sqrt{5}}{5}$. 47. $\frac{13\sqrt{10}}{5}$.
48. a) $\frac{7\sqrt{10}}{10}$, b) $2\sqrt{5}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Zadania utrwalające

3.50. Oblicz odległość punktu P od prostej o równaniu:

- a) $y=3x+1$, gdy $P=(2, 5)$, b) $\sqrt{2}x+y=0$, gdy $P=(\sqrt{2}, 7)$,
 c) $3x-2y+3=0$, gdy $P=(-1, 0)$, d) $5\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y-19=0$, gdy $P=(\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$.

3.51. Oblicz, dla jakich wartości parametru m odległość punktu P od prostej l jest równa d , gdy:

- a) $P=(m, 2)$, $d=1$ i $l: 5x-12y-1=0$,
 b) $P=(1, 1)$, $d=1$ i $l: x+y+m=0$,
 c) $P=(-1, m)$, $d=\sqrt{7}$ i $l: 3x-\sqrt{7}y-3=0$,
 d) $P=(5, -2)$, $d=5\sqrt{2}$ i $l: mx-my+3=0$.

3.52. Oblicz odległość prostych równoległych k i l , gdy:

- a) $k: 2x+y-1=0$ i $l: 2x+y+3=0$, b) $k: y=4x-2$ i $l: y=4x+2$,
 c) $k: 4x+2y-5=0$ i $l: y=-2x+3$, d) $k: 15x-12y+6=0$ i $l: 10x-8y+4=0$.

3.53. Oblicz, dla jakich wartości parametru m odległość prostych k i l jest równa d , gdy:

- a) $k: y=2x+m$, $l: y=2x+5$ i $d=\sqrt{5}$,
 b) $k: 5x+12y-3m=0$, $l: 5x+12y+m-1=0$ i $d=3$,
 c) $k: 15x+8y+2m-3=0$, $l: 15x+8y-m-9=0$ i $d=\frac{3}{17} \cdot |m+2|$.

3.54. Napisz równania prostych zawierających dwusieczne kątów utworzonych przez proste o równaniach:

- a) $x-2y+1=0$ i $2x+y-3=0$, b) $3x-4y=0$ i $6x+8y-9=0$.

3.55. Prosta l ma równanie $5x+12y-3=0$. Napisz równanie prostej k równoległej do prostej l , której odległość od prostej l jest równa $\frac{4}{13}$.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do prostej o równaniu $x = 2$ należą punkty:

- A. $(0, 2)$ i $(2, 0)$, B. $(2, 2)$ i $(0, 0)$, C. $(2, 5)$ i $(2, 0)$, D. $(0, 2)$ i $(5, 2)$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli $K = (1, 2)$ i $L = (0, 4)$, to prosta KL ma równanie:

- A. $x + y = 4$, B. $2x + y = 4$, C. $x + 2y = 4$, D. $2x - y = 4$.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do prostej k , która jest równoległa do prostej o równaniu $20x - 4y = 0$, należy punkt $P = (-20, 4)$. Prosta k ma równanie:

- A. $y = \frac{1}{5}x + 8$, B. $y = -\frac{1}{5}x$, C. $y = 5x + 104$, D. $y = 5x + 96$.

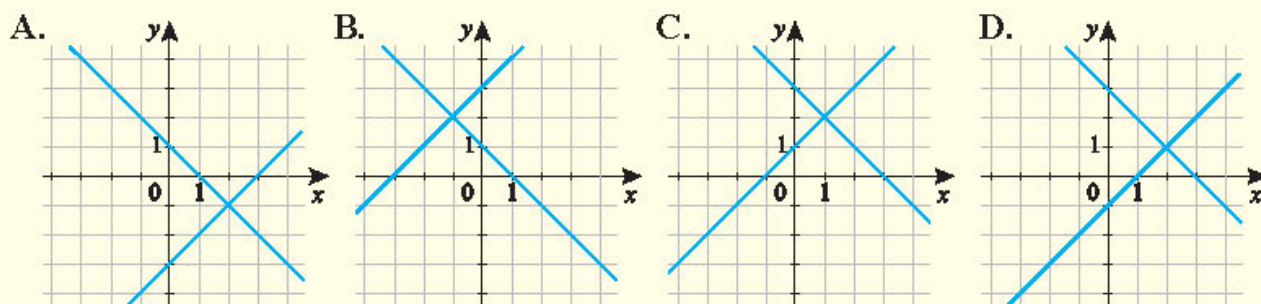
4. Czy proste o równaniach $y = (\sqrt{2} + 1)x + 2$ i $(\sqrt{2} - 1)x + y - 1 = 0$ są prostopadłe?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 1$.
N	Nie,		B.	$(\sqrt{2} + 1) \cdot (1 - \sqrt{2}) = -1$.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Interpretacja geometryczna układu równań $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ przedstawiona jest na rysunku:



6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Odległość punktu $P = (-2, 4)$ od prostej o równaniu $2x + y = 5$ jest równa $\sqrt{5}$.	P	F
Odległość między prostymi o równaniach $3x + y + 8 = 0$ i $3x + y = 108$ jest liczbą z przedziału $(3; 4)$.	P	F

4. Wektory

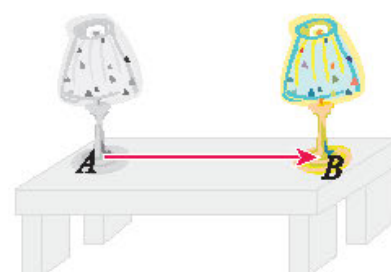
Pojęcie wektora

W życiu codziennym mamy do czynienia z przemieszczaniem przedmiotów.

Jednym z rodzajów przemieszczeń jest przesunięcie.

Aby zilustrować przesunięcie przedmiotu z punktu do punktu, należy wskazać, który z nich jest pierwszy, a który drugi.

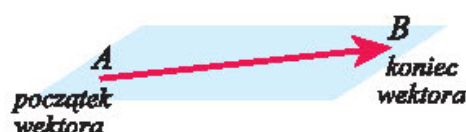
Określenie kolejności punktów A i B związane jest z pojęciem wektora.



Definicja

Wektorem zaczepionym (związanym) nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z tych punktów nazywamy początkiem wektora, a drugi punkt końcem wektora.

Wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczamy $\vec{AB}$.



Wektor $\vec{AB}$ ilustrujemy, łącząc punkt A z punktem B i zaznaczając uporządkowanie punktów grotem strzałki.

Definicja

Gdy $A = B$, czyli początek wektora $\vec{AB}$ pokrywa się z jego końcem, to taki wektor nazywamy wektorem zerowym, co zapisujemy $\vec{AB} = \vec{0}$.

Wielkości charakteryzujące wektor to kierunek, zwrot i długość.



- **Kierunek niezerowego wektora** wyznacza prosta, na której leży wektor i wszystkie proste do niej równoległe. Kierunek wektora zerowego ($\vec{0}$) nie jest określony.
- **Zwrot niezerowego wektora** to jeden z dwóch sposobów uporządkowania pary punktów.
- **Długością wektora $\vec{AB}$** nazywamy odległość punktów A i B , co zapisujemy $|\vec{AB}|$.

Długość wektora w fizyce to jego wartość.

Np. prosta AB wyznacza kierunek wektora $\vec{AB}$, grot pokazuje zwrot wektora, a odległość między punktami A i B jest długością wektora $\vec{AB}$, czyli $|\vec{AB}| = |AB|$.

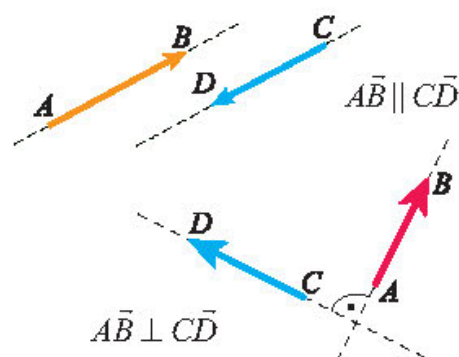


Definicja

Niezerowe wektory $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ nazywamy:

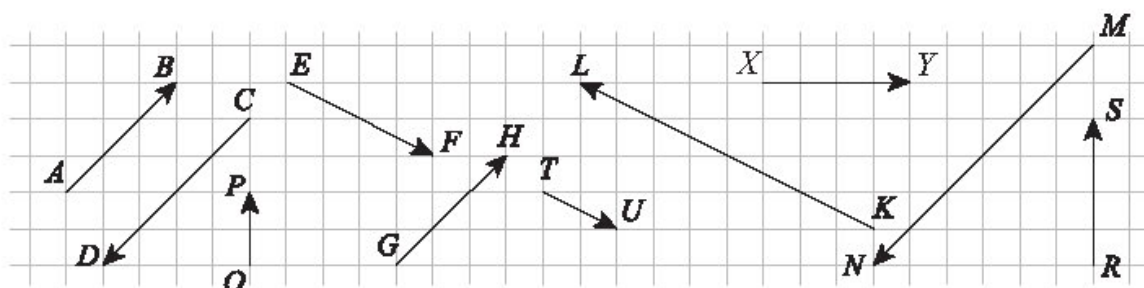
- **równoległymi**, gdy proste AB i CD są równoległe,
- **prostopadłymi**, gdy proste AB i CD są prostopadłe.

Wektor $\vec{0}$ jest równoległy i prostopadły do każdego wektora.



Ćwiczenie 1. Przeanalizuj rysunek i podaj te pary wektorów, które mają ten sam:

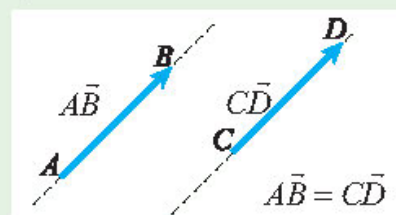
- kierunek,
- kierunek i zwrot,
- kierunek i przeciwne zwroty,
- kierunek i zwrot oraz równe długości.



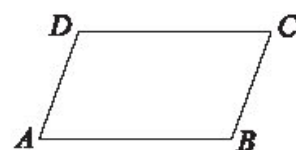
Definicja

Dwa wektory $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ nazywamy **równymi** ($|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$), gdy mają:

- ten sam kierunek ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$),
- zgodne zwroty,
- równe długości ($|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$).

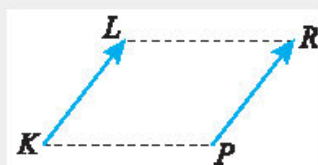


Ćwiczenie 2. Każda para spośród punktów A, B, C, D równoległoboku $ABCD$ określa pewien wektor. Wskaż pary wektorów równych. Odpowiedź uzasadnij.



Uwaga

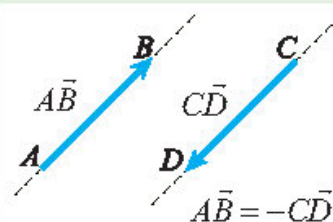
Jeżeli punkty K, P, R, L nie leżą na jednej prostej, to wektory $\vec{KL}$ i $\vec{PR}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy punkty K, P, R, L są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku.



Definicja

Dwa wektory $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ nazywamy przeciwnymi, gdy mają:

- ten sam kierunek ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$),
- przeciwne zwroty,
- równe długości ($|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$).

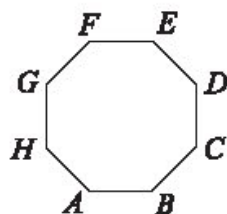


Wektor przeciwny do wektora $\vec{AB}$ oznaczamy $\vec{BA}$ lub $-\vec{AB}$, czyli $-\vec{AB} = \vec{BA}$.

Ćwiczenie 3. W ośmiokącie foremnym $ABCDEFGH$ każda para spośród punktów: A, B, C, D, E, F, G, H określa pewien wektor.

Podaj wszystkie wektory:

- o tej samej długości co wektor $\vec{AD}$,
- o tym samym kierunku co wektor $\vec{AD}$,
- o tym samym zwrocie co wektor $\vec{AD}$,
- równe wektorowi $\vec{AD}$,
- przeciwnie do wektora $\vec{AD}$,
- prostopadłe do wektora $\vec{AD}$.

**Suma i różnica wektorów swobodnych**

Własności równości wektorów:

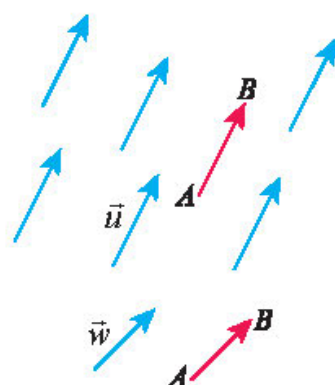
- $\vec{AB} = \vec{AB}$,
- jeżeli $\vec{AB} = \vec{CD}$, to $\vec{CD} = \vec{AB}$,
- jeżeli $\vec{AB} = \vec{CD}$ i $\vec{CD} = \vec{EF}$, to $\vec{AB} = \vec{EF}$.

Własności równości wektorów umożliwiają wprowadzenie pojęcia wektora swobodnego.

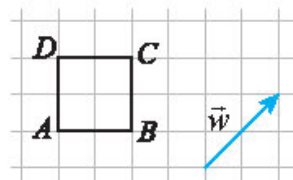
Definicja

Wektorem swobodnym wyznaczonym przez wektor $\vec{AB}$ nazywamy zbiór wszystkich wektorów mających tę samą długość, ten sam kierunek i ten sam zwrot co wektor $\vec{AB}$.

- Wektory swobodne oznaczamy zwykle małymi literami, np. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{p}$, ...
- Wektor swobodny nazywamy krótko wektorem.
- Każdy wektor swobodny można zaczepić w dowolnym punkcie płaszczyzny.

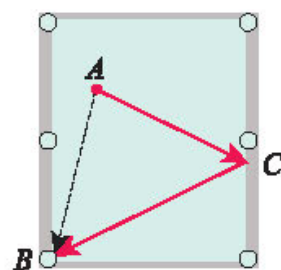


Ćwiczenie 4. Przerysuj do zeszytu kwadrat $ABCD$ i wektor $\vec{w}$, taki że $\vec{w} = \vec{AC}$. Zaznacz wektor: a) $\vec{DK} = \vec{w}$, b) $\vec{BL} = \vec{w}$.

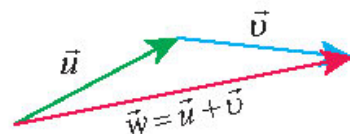


Na rysunku zaznaczono wektory $\vec{AC}$ i $\vec{CB}$, wzdłuż których poruszała się kula bilardowa z punktu A do otworu (łuzu) w punkcie B . Zauważ, że ten sam efekt uzyskalby gracz, gdyby skierował kulę do otworu B wzdłuż wektora $\vec{AB}$.

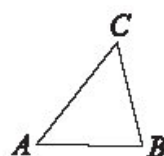
Wektor $\vec{AB}$ jest sumą wektorów $\vec{AC}$ i $\vec{CB}$.



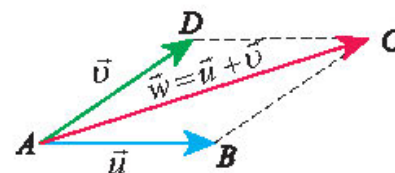
Jeżeli koniec wektora $\vec{u}$ jest początkiem wektora $\vec{v}$, to sumą wektorów $\vec{u} + \vec{v}$ jest wektor $\vec{w}$, którego początkiem jest początek wektora $\vec{u}$, a końcem – koniec wektora $\vec{v}$.



Ćwiczenie 5. Przedstaw wektory $\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ w postaci sumy wektorów wyznaczonych przez wierzchołki trójkąta ABC .



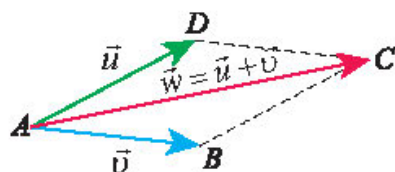
Sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ o różnych kierunkach, zaczepionych w punkcie A , jest wektor $\vec{w}$, taki że $\vec{w} = \vec{AC}$, gdzie $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$ oraz punkty A, B, C, D są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.



Przykład 1. Na płaszczyźnie dane są wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdzie $\vec{u} \nparallel \vec{v}$. Wyznacz wektor $\vec{w}$, taki że $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

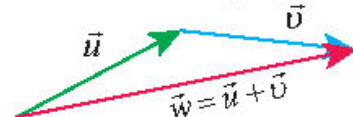
Rozwiązanie

Zasada równoległoboku



- 1° Zaczepiamy wektor $\vec{v}$ w początku wektora $\vec{u}$.
- 2° Znajdujemy wierzchołek C równoległoboku $ABCD$, w którym $\vec{v} = \vec{AB} = \vec{DC}$ i $\vec{u} = \vec{AD} = \vec{BC}$.
- 3° Wektor, którego początkiem jest punkt A (wspólny początek wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$), a końcem punkt C , jest sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, czyli $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

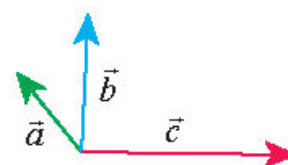
Zasada trójkąta



- 1° Zaczepiamy wektor $\vec{v}$ w końcu wektora $\vec{u}$.
- 2° Wektor, wyznaczony przez początek wektora $\vec{u}$ i koniec wektora $\vec{v}$, jest sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, czyli $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



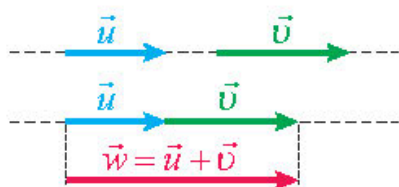
Ćwiczenie 6. Na płaszczyźnie zaznaczone są wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Stosując zasadę równoległoboku, sprawdź konstrukcyjnie, czy spełniona jest równość $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.



Przykład 2. Wyznacz wektor $\vec{w}$, taki że $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, gdy $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

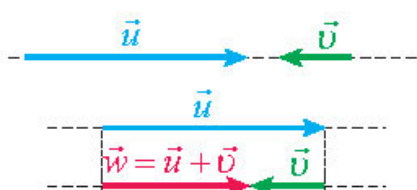
Rozwiązanie Rozważmy dwa przypadki.

I Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają zgodne zwroty



Przesuwamy wektor $\vec{v}$ tak, aby jego początek pokrył się z końcem wektora $\vec{u}$. Wektor $\vec{w}$, którego początek pokrywa się z początkiem wektora $\vec{u}$, a koniec pokrywa się z końcem wektora $\vec{v}$, jest sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, przy czym $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

II Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mają przeciwne zwroty



Wektor $\vec{w}$, którego początek pokrywa się z początkiem wektora $\vec{u}$, a koniec pokrywa się z końcem wektora $\vec{v}$, jest sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, przy czym $|\vec{w}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$.

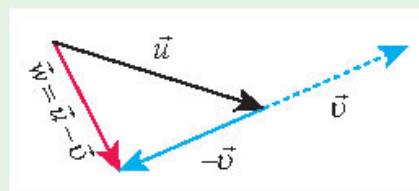
Ćwiczenie 7. Prędkość własna motorówki płynącej po rzece to v_1 , a prędkość prądu rzeki to v_2 . Podaj prędkość v motorówki, która płynie: **1** w górę rzeki, **2** w dół rzeki, gdy:

a) $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, b) $|\vec{v}_1| < |\vec{v}_2|$.

Definicja

Różnicą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor, który jest sumą wektora $\vec{u}$ i wektora przeciwnego do wektora $\vec{v}$ (czyli wektora $-\vec{v}$).

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



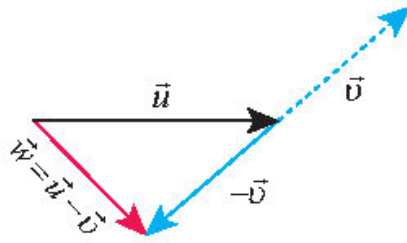
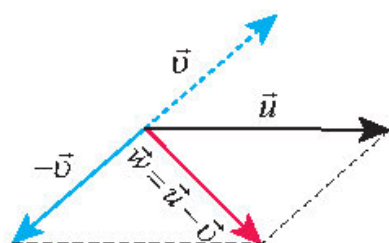
Przykład 3. Na płaszczyźnie zaznaczone są wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Wyznacz wektor $\vec{w}$, taki że $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.



Rozwiązanie Różnicą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ jest suma wektora $\vec{u}$ i wektora przeciwnego do wektora $\vec{v}$, czyli $\vec{w} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

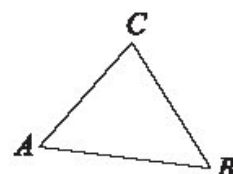
Stosując zasadę równoległoboku lub trójkąta, wyznaczamy wektor $\vec{w}$, taki że $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.



Ćwiczenie 8. Na rysunku przedstawiony jest trójkąt ABC .

Przedstaw wektor: a) $\vec{AB}$ w postaci różnicy dwóch wektorów,

b) $\vec{BA}$ w postaci różnicy dwóch wektorów.



Odpowiedzi do ćwiczeń

2. $\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AD} = \vec{BC}$, $\vec{CD} = \vec{BA}$, $\vec{DA} = \vec{CB}$. 3. b) $\vec{DA}$, $\vec{BC}$, $\vec{CB}$, $\vec{HE}$, $\vec{EH}$, $\vec{GF}$, $\vec{FG}$, d) $\vec{HE}$.

5. $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$, $\vec{BA} = \vec{BC} + \vec{CA}$, $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$.

7. 1 a) motorówka stoi w miejscu – $\vec{v} = \vec{0}$, b) motorówka cofa się – $\vec{v} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$,

2 a) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$, b) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. 8. a) $\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{BC}$, b) $\vec{BA} = \vec{BC} - \vec{AC}$.

Zadania utrwalające

4.1. Każda para spośród punktów A, B, C, D kwadratu $ABCD$ określa pewien wektor. Wiedząc, że bok kwadratu ma długość 2, wypisz wektory, które:

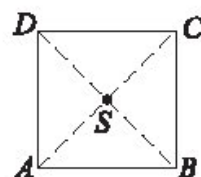
- a) są zerowe, b) są przeciwne do wektora $\vec{CD}$,
c) mają tę samą długość co wektor $\vec{CD}$, d) mają długość $2\sqrt{2}$.

4.2. Każda para spośród punktów A, B, C, D, E, F sześciokąta foremnego $ABCDEF$ określa pewien wektor. Wymień wektory:

- a) o tej samej długości co wektor $\vec{AE}$, b) o tym samym kierunku co wektor $\vec{AE}$,
c) o tym samym zwrocie co wektor $\vec{AE}$, d) równe wektorowi $\vec{AE}$,
e) przeciwne do wektora $\vec{AE}$.

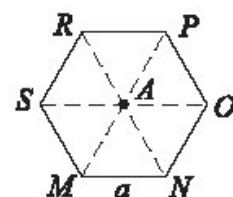
4.3. Każda para spośród punktów A, B, C, D, S określa pewien wektor. Wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, wypisz wszystkie wektory:

- a) prostopadłe do wektora $\vec{CS}$, b) prostopadłe do wektora $\vec{CD}$,
c) równe wektorowi $\vec{BS}$, d) przeciwne do wektora $\vec{AD}$,
e) równoległe do wektora $\vec{AS}$.



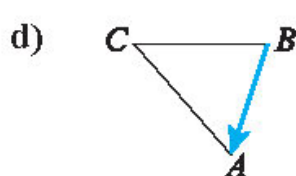
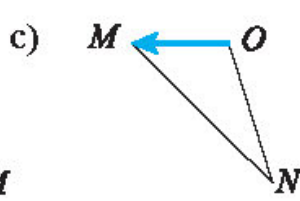
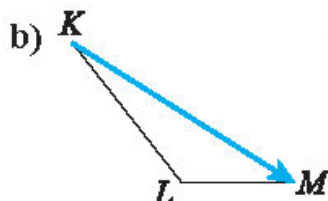
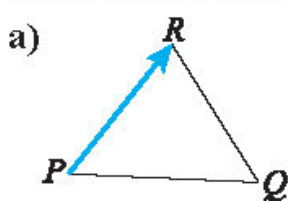
4.4. Każda para spośród punktów M, N, O, P, R, S, A określa pewien wektor. Wiedząc, że wielokąt $MNOPRS$ jest sześciokątem foremnym o boku mającym długość a , podaj liczbę wektorów mających długości:

- a) a , b) $2a$, c) $a\sqrt{3}$.



R

4.5. Każda para spośród wierzchołków trójkąta przedstawionego na rysunku określa pewien wektor. Wyraż wektor wyróżniony kolorem niebieskim jako sumę oraz różnicę dwóch innych wektorów.



4.6. Przerysuj do zeszytu czworokąt $ABCD$. Narysuj wektor równy wektorowi:

a) $\vec{AD} + \vec{AB}$,

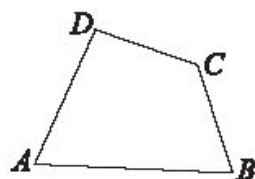
b) $\vec{AD} + \vec{DC}$,

c) $\vec{BC} + \vec{AD}$,

d) $\vec{AC} + \vec{BD}$,

e) $\vec{AB} - \vec{DC}$,

f) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$.



4.7. Przerysuj do zeszytu prostokąt $ABCD$. Zaznacz wektor równy wektorowi:

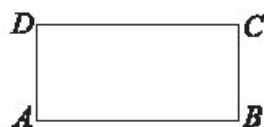
a) $\vec{DA} + \vec{DC}$,

b) $\vec{AD} - \vec{BC}$,

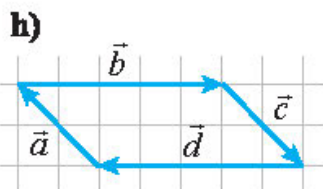
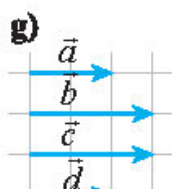
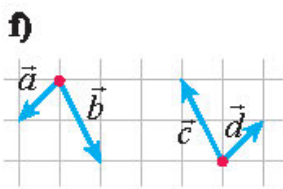
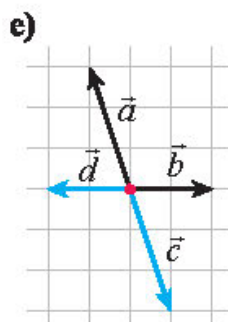
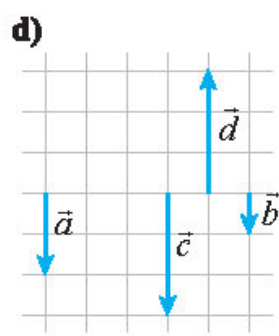
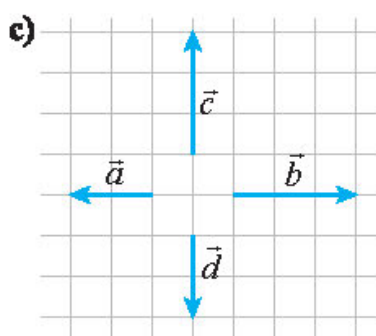
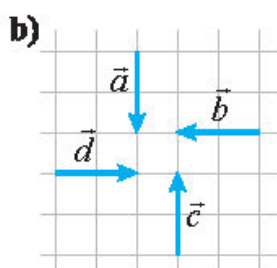
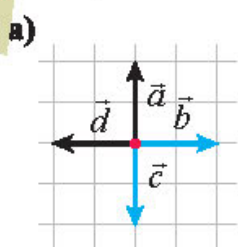
c) $\vec{AB} + \vec{CD}$,

d) $\vec{AD} + (\vec{DC} - \vec{BC})$,

e) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$.



4.8. Na płaszczyźnie przedstawione są wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$. Przerysuj rysunek do zeszytu i wyznacz wektor $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.



4.9. Wykaż, że jeśli punkty K , L , M są niewspółliniowe, to:

D a) $\vec{LM} + \vec{MK} - \vec{LK} = \vec{0}$,

b) $\vec{LM} + \vec{KM} - \vec{LM} + \vec{MK} = \vec{0}$.

4.10. Wiedząc, że punkty A , B , C , D są wierzchołkami dowolnego czworokąta $ABCD$, wykaż, że :

a) $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$,

b) $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

R

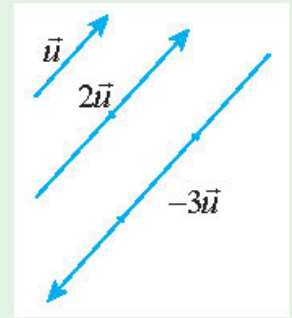
Iloczyn wektora swobodnego przez liczbę

Definicja

Iloczynem niezerowego wektora $\vec{u}$ przez liczbę rzeczywistą k , gdzie $k \neq 0$, jest wektor $\vec{w}$, taki że $\vec{w} = k\vec{u}$, o własnościach:

- 1° wektor $\vec{u}$ ma ten sam kierunek co wektor $\vec{w}$ ($\vec{w} \parallel \vec{u}$),
- 2° • gdy $k > 0$, to zwrot $\vec{w}$ jest zgodny ze zwrotem $\vec{u}$,
przy czym $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$,
• gdy $k < 0$, to zwrot $\vec{w}$ jest przeciwny do zwrotu $\vec{u}$,
przy czym $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$,
- 3° $|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{u}|$.

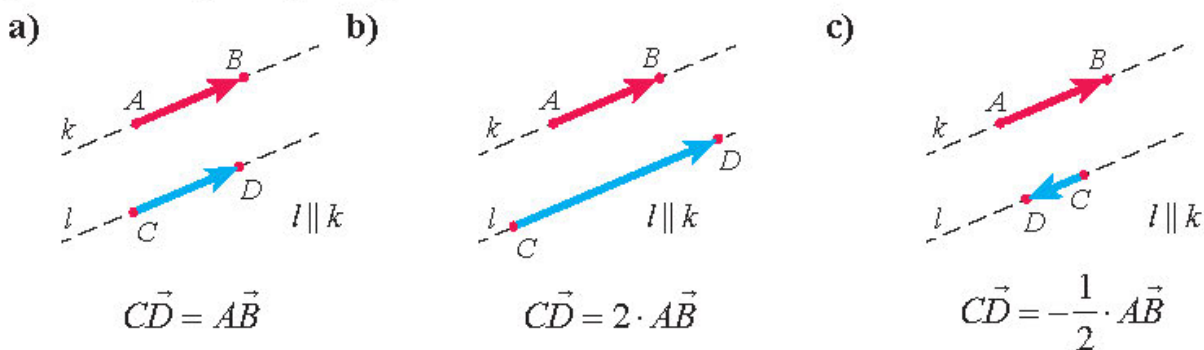
Jeśli $k = 0$, to wektor $\vec{w} = k\vec{u}$ jest wektorem zerowym.



Przykład 4. Zaznacz na płaszczyźnie dwa różne punkty A, B , a następnie narysuj wektor $\vec{CD}$ równy wektorowi: a) $\vec{AB}$, b) $2\vec{AB}$, c) $-\frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$.

Rozwiązanie

Dwa różne punkty A, B wyznaczają prostą k . Wektor $\vec{CD}$ zaznaczamy na prostej l , która jest równoległa do prostej k .



Ćwiczenie 9. Zaznacz na płaszczyźnie trzy niewspółliniowe punkty A, B, C , a następnie narysuj wektor:

- a) równy wektorowi $\vec{AC}$, który jest zaczepiony w punkcie B ,
- b) przeciwny do wektora $\vec{AB}$, który jest zaczepiony w punkcie C ,
- c) równy wektorowi $\frac{1}{2} \cdot \vec{AB}$, który jest zaczepiony w punkcie C ,
- d) równy wektorowi $-2 \cdot \vec{AC}$, który jest zaczepiony w punkcie B .

Ćwiczenie 10. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wykaż, że $\vec{AB} + 2\vec{BC} + \vec{BA} = 2\vec{AD}$.

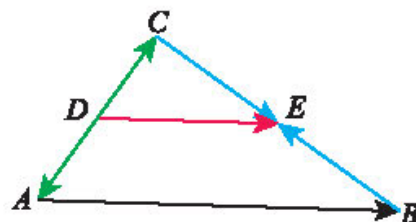
Działania na wektorach wykorzystujemy do dowodzenia niektórych twierdzeń geometrii. Pokażemy to na przykładzie.

Twierdzenie

W dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do boku trzeciego, a jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$$\begin{array}{l|l} Z \text{ (założenie):} & T \text{ (teza): } DE \parallel AB, \\ D - \text{środek boku } AC, & |DE| = \frac{1}{2}|AB|. \\ E - \text{środek boku } BC. & \end{array}$$



Dowód:

Zauważamy, że

$$+ \begin{cases} D\vec{E} = D\vec{C} + C\vec{E} \\ D\vec{E} = D\vec{A} + A\vec{B} + B\vec{E} \end{cases}$$

Dodajemy stronami
równania układu.

$$2D\vec{E} = D\vec{C} + C\vec{E} + D\vec{A} + A\vec{B} + B\vec{E}$$

$$D\vec{C} = D\vec{A} \text{ i } C\vec{E} = B\vec{E}$$

$$2D\vec{E} = -D\vec{A} - B\vec{E} + D\vec{A} + A\vec{B} + B\vec{E} = A\vec{B}$$

$$D\vec{E} = \frac{1}{2}A\vec{B}, \text{ więc } DE \parallel AB$$

Wektor $D\vec{E}$ jest iloczynem
liczby $\frac{1}{2}$ i wektora $A\vec{B}$.

$$|D\vec{E}| = \left| \frac{1}{2}A\vec{B} \right| = \frac{1}{2}|A\vec{B}|$$

$$|D\vec{E}| = |DE| \text{ i } |A\vec{B}| = |AB|$$

$$|DE| = \frac{1}{2}|AB|. \quad \text{ckd.}$$

Ćwiczenie 11. Udowodnij twierdzenie:

Twierdzenie

Odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, a jego długość jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. Wskazówka. Zauważ, że $\begin{cases} E\vec{F} = E\vec{A} + A\vec{B} + B\vec{F} \\ E\vec{F} = E\vec{D} + D\vec{C} + C\vec{F} \end{cases}$



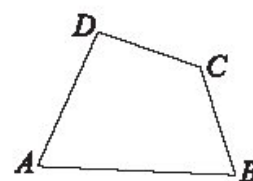
Zadania utrwalające

4.11. Przerysuj do zeszytu czworokąt $ABCD$.



Narysuj wektor równy wektorowi:

- a) $\vec{AD} + \vec{AB}$, b) $\vec{AD} + \vec{DC}$,
 c) $\vec{BC} + \vec{AD}$, d) $\vec{AC} + \vec{BD}$,
 e) $\vec{AB} - \vec{DC}$, f) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DC}$.

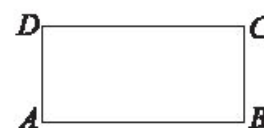


4.12. Przerysuj do zeszytu prostokąt $ABCD$.



Zaznacz wektor równy wektorowi:

- a) $\vec{DA} + \vec{DC}$, b) $\vec{AD} - \vec{BC}$,
 c) $\vec{AB} + \vec{CD}$, d) $\vec{AD} + (\vec{DC} - \vec{BC})$,
 e) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$.



4.13. Narysuj dwa dowolne nierównoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, a następnie skonstruuj taki wektor $\vec{w}$, że:

- a) $\vec{w} = -2\vec{u}$, b) $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{v}$, c) $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, d) $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$,
 e) $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$, f) $\vec{w} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$, g) $\vec{w} = 3(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{2}\vec{u}$.

4.14. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wykaż, że:

D

- a) $2 \cdot \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{BD}$, b) $2 \cdot \vec{DC} = \vec{AC} - \vec{BD}$.

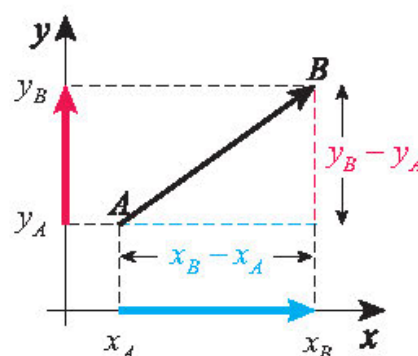
Wektor na płaszczyźnie kartezjańskiej

Rozważmy wektor, którego początek i koniec zaznaczono w układzie współrzędnych.

Jeżeli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to współrzędnymi wektora $\vec{AB}$ nazywamy liczby $(x_B - x_A)$ i $(y_B - y_A)$, co zapisujemy:

$$\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A] \text{ lub } \vec{AB} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix}.$$

- Liczbę $x_B - x_A$ nazywamy pierwszą współrzędną wektora $\vec{AB}$.
- Liczbę $y_B - y_A$ nazywamy drugą współrzędną wektora $\vec{AB}$.



R

Przykład 5. Oblicz współrzędne i długość wektora $\vec{AB}$, gdy $A = (-1, 1)$, $B = (-3, 6)$.

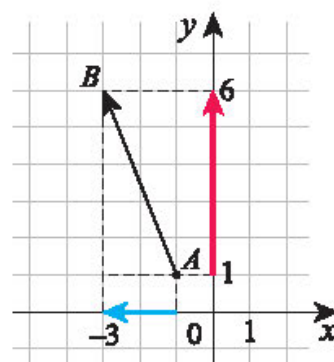
Rozwiązanie

$$\text{Dane: } \begin{matrix} A = (-1, 1), \\ B = (-3, 6). \end{matrix} \quad \left| \quad \text{Obliczyć: } \vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]. \right.$$

$$\vec{AB} = [-3 - (-1), 6 - 1] = [-2, 5]$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

$$\text{Odp.: } \vec{AB} = [-2, 5], \quad |\vec{AB}| = \sqrt{29}.$$

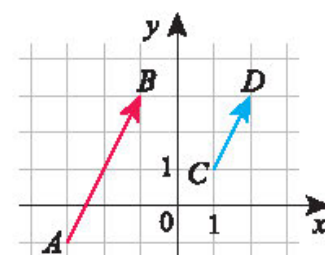


Ćwiczenie 12. Oblicz współrzędne wektorów $\vec{AB}$ i $\vec{BA}$, gdy:

a) $A = (-3, 2)$, $B = (1, -4)$, b) $A = (-6, -2)$, $B = (0, -3)$.

Ćwiczenie 13. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane

i oblicz współrzędne wektorów $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$.



Przykład 6. Wektory $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ i $\vec{EF}$ są równe.

Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i oblicz współrzędne wektorów:

a) $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$, b) $\vec{BA}$, $\vec{DC}$, $\vec{FE}$.

Zapisz swoje spostrzeżenia.

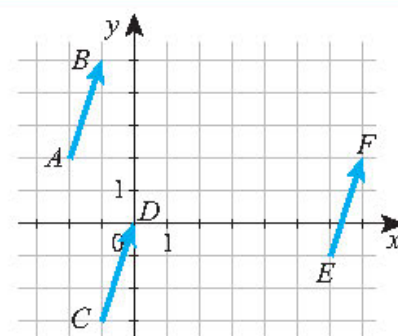
Rozwiązanie

Z rysunku odczytujemy, że $A = (-2, 2)$, $B = (-1, 5)$, $C = (-1, -3)$, $D = (0, 0)$, $E = (6, -1)$, $F = (7, 2)$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \vec{AB} = [-1 - (-2), 5 - 2] = [1, 3], & \text{b) } \vec{BA} = [-2 - (-1), 2 - 5] = [-1, -3], \\ \vec{CD} = [0 - (-1), 0 - (-3)] = [1, 3], & \vec{DC} = [-1 - 0, -3 - 0] = [-1, -3], \\ \vec{EF} = [7 - 6, 2 - (-1)] = [1, 3]. & \vec{FE} = [6 - 7, -1 - 2] = [-1, -3]. \end{array}$$

Zauważamy, że:

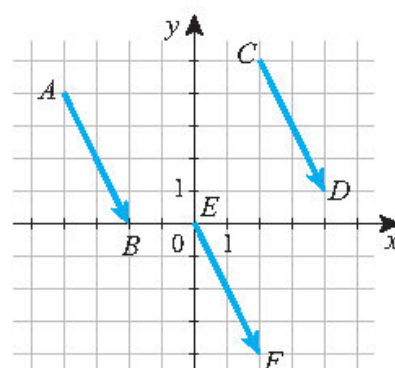
- wektory równe mają takie same współrzędne,
- pary wektorów $\vec{AB}$ i $\vec{BA}$, $\vec{CD}$ i $\vec{DC}$, $\vec{EF}$ i $\vec{FE}$ są wektorami przeciwnymi. Wektory przeciwne mają współrzędne, które są liczbami przeciwnymi.



R

Ćwiczenie 14. Wektory $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ i $\vec{EF}$ są równe. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i oblicz współrzędne wektorów:

- a) $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$,
b) $\vec{BA}$, $\vec{DC}$, $\vec{FE}$.



Uwaga

- Współrzędne pary wektorów równych są równe.
- Współrzędne pary wektorów przeciwnych są liczbami przeciwnymi.

Ćwiczenie 15. Sprawdź, czy wektory $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ są równe czy przeciwne, gdy:

- a) $A = (-1, 5)$, $B = (-4, 10)$, $C = (6, -7)$, $D = (3, -2)$,
b) $A = (-4, 1)$, $B = (-2, -3)$, $C = (3, 2)$, $D = (1, 6)$,
c) $A = (-5, 2)$, $B = (-3, 1)$, $C = (-8, -5)$, $D = (-10, -1)$.

Przykład 7. Oblicz współrzędne punktu B , wiedząc, że wektor $\vec{AB} = [-2, -1]$ i punkt $A = (3, 2)$.

Rozwiązanie

Dane: $\vec{AB} = [-2, -1]$, $A = (3, 2)$. **Obliczyć:** $B = (x_B, y_B)$.

$$\begin{array}{ll} x_B - x_A = -2 & \text{i} \quad y_B - y_A = -1 \\ x_B - 3 = -2 & y_B - 2 = -1 \\ x_B = 1 & y_B = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A = (3, 2) & & B = (x_B, y_B) \\ \bullet & \xrightarrow{\quad [-2, -1] \quad} & \bullet \end{array}$$

Odp.: $B = (1, 1)$.

Ćwiczenie 16. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz współrzędne punktu A , gdy:

a) $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad [-5, 6] \quad} & B = (-5, 6) \\ \bullet & & \bullet \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\quad [-5, 6] \quad} & B = (-5, 6) \\ \bullet & & \bullet \end{array}$

Ćwiczenie 17. Oblicz współrzędne punktu A , gdy:

- a) $\vec{AB} = [4, -3]$ i $B = (-7, 0)$, b) $\vec{BA} = [-2, 1]$ i $B = (-3, 2)$.

R

Przykład 8. Punkty $A = (-4, 1)$, $B = (-2, -3)$, $C = (3, 2)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołka D .

Rozwiązanie

Wierzchołki równoległoboku $ABCD$ wyznaczają wektory parami równe, np. $\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AD} = \vec{BC}$.

Korzystamy z równości $\vec{AB} = \vec{DC}$.

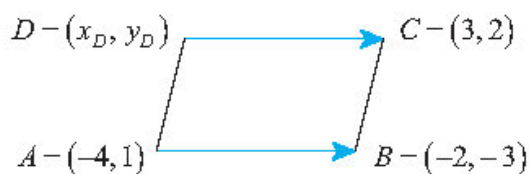
$$\vec{AB} = [2, -4]$$

$$\vec{DC} = [3 - x_D, 2 - y_D].$$

Jeżeli $\vec{AB} = \vec{DC}$, to

$$3 - x_D = 2 \text{ i } 2 - y_D = -4, \text{ skąd } x_D = 1 \text{ i } y_D = 6.$$

Odp.: $D = (1, 6)$.



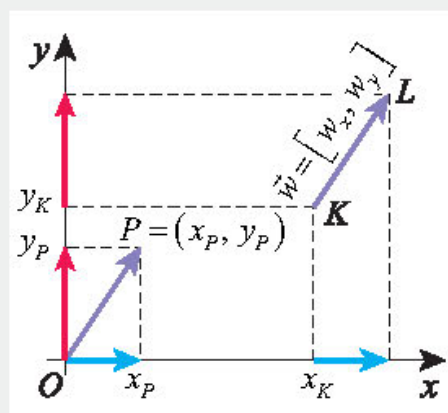
Obliczamy współrzędne wektora $\vec{AB}$.

Wyznaczamy współrzędne wektora $\vec{DC}$,
gdzie $D = (x_D, y_D)$.

Ćwiczenie 18. Punkty $A = (2, -1)$, $B = (5, 3)$, $C = (2, 7)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołka D .

Uwaga

- Wektor $\vec{w}$ przedstawiony za pomocą współrzędnych w_x i w_y , czyli w postaci $\vec{w} = [w_x, w_y]$, jest wektorem swobodnym i można go zaczepić w dowolnym punkcie.
- Jeżeli początkiem wektora $\vec{w} = [w_x, w_y]$ jest punkt $O = (0, 0)$, to jego końcem jest punkt P , taki że $P = (x_P, y_P)$.
- Jeżeli początkiem wektora $\vec{w} = [w_x, w_y]$ jest punkt K , gdzie $K = (x_K, y_K)$, to jego końcem jest punkt L , taki że $L = (x_K + w_x, y_K + w_y)$.



Ćwiczenie 19. Wiedząc, że $\vec{w} = \vec{OP}$, gdzie $O = (0, 0)$, podaj współrzędne punktu P , gdy:

- a) $\vec{w} = [-3, -4]$, b) $\vec{w} = [2, -8]$, c) $\vec{w} = [5, 0]$, d) $\vec{w} = [0, -1]$.

Zaznacz wektor $\vec{w}$ w układzie współrzędnych.

Ćwiczenie 20. Oblicz współrzędne: a) punktu B , gdy $\vec{w} = \vec{AB}$, $A = (-4, 7)$ i $\vec{w} = [-3, 8]$,

b) punktu K , gdy $\vec{u} = \vec{KL}$, $L = (-20, -8)$ i $\vec{u} = [2, 5]$.

R

Uwaga

Jeżeli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ oraz $\vec{AB} = \vec{w}$, to:	
współrzędne wektora $\vec{AB}$	długość wektora $\vec{AB}$
$\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$	$ \vec{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$\vec{AB} = \vec{w} = [w_x, w_y]$	$ \vec{AB} = \vec{w} = w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$

Ćwiczenie 21. Oblicz długość wektora $\vec{AB}$, gdy:

- a) $A = (-3, 1)$ i $B = (0, 0)$, b) $A = (0, 0)$ i $B = (-5, -2)$,
 c) $A = (4, 2)$ i $B = (-3, 1)$, d) $A = (0, -3)$ i $B = (4, 0)$.

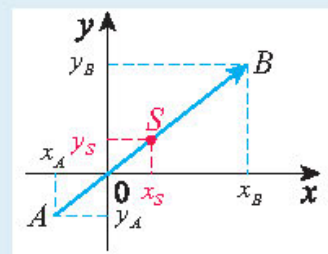
Ćwiczenie 22. Oblicz długość wektora $\vec{w}$, gdy:

- a) $\vec{w} = [-2, -1]$, b) $\vec{w} = [0, 5]$, c) $\vec{w} = [-2, 0]$.

Twierdzenie

Środek S wektora $\vec{AB}$, gdzie $S = (x_S, y_S)$,
 $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, ma współrzędne

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}.$$



Z (założenie): $A = (x_A, y_A)$,
 $B = (x_B, y_B)$.

T (teza): Środek wektora $\vec{AB}$ to punkt
 $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

Dowód:

Punkt S jest środkiem wektora $\vec{AB}$, więc:

$$\vec{AS} = \vec{SB}, \text{ gdzie } \vec{AS} = [x_S - x_A, y_S - y_A] \text{ i } \vec{SB} = [x_B - x_S, y_B - y_S].$$

$$\vec{AS} = \vec{SB}, \text{ więc } \begin{cases} x_S - x_A = x_B - x_S \\ y_S - y_A = y_B - y_S \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_S = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Zatem } S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right). \quad \text{c.k.d.}$$

Ćwiczenie 23. Oblicz współrzędne środka S wektora $\vec{AB}$, gdy:

- a) $A = (0, 0)$ i $B = (-2, 1)$, b) $A = (\sqrt{2}, -1)$ i $B = (-\sqrt{2}, 4)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

12. a) $\vec{AB} = [4, -6]$, $\vec{BA} = [-4, 6]$, b) $\vec{AB} = [6, -1]$, $\vec{BA} = [-6, 1]$ 13. $\vec{AB} = [2, 4]$, $\vec{CD} = [1, 2]$.
 14. a) $\vec{AB} = [2, -4]$, $\vec{CD} = [2, -4]$, $\vec{EF} = [2, -4]$, b) $\vec{BA} = [-2, 4]$, $\vec{DC} = [-2, 4]$, $\vec{FE} = [-2, 4]$.
 15. a) $\vec{AB} = \vec{CD}$, b) $\vec{AB} = -\vec{CD}$, c) nie są równe i nie są przeciwne.
 16. a) $A = (0, 0)$, b) $A = (-10, 12)$. 17. a) $A = (-11, 3)$, b) $A = (-5, 3)$.
 18. $D = (-1, 3)$. 19. a) $P = (-3, -4)$, b) $P = (2, -8)$, c) $P = (5, 0)$, d) $P = (0, -1)$.
 20. a) $B = (-7, 15)$, b) $K = (-22, -13)$. 21. a) $|\vec{AB}| = \sqrt{10}$, b) $|\vec{AB}| = \sqrt{29}$, c) $|\vec{AB}| = 5\sqrt{2}$, d) $|\vec{AB}| = 5$.
 22. a) $|\vec{w}| = \sqrt{5}$, b) $|\vec{w}| = 5$, c) $|\vec{w}| = 2$. 23. a) $S = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, b) $S = \left(0, \frac{3}{2}\right)$.

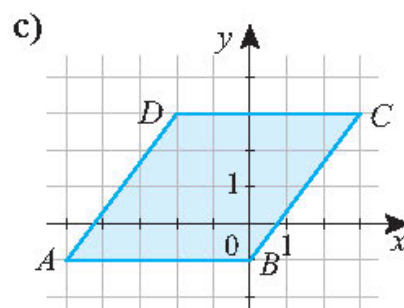
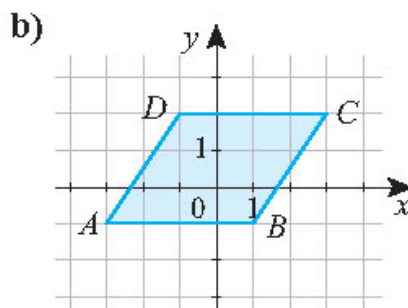
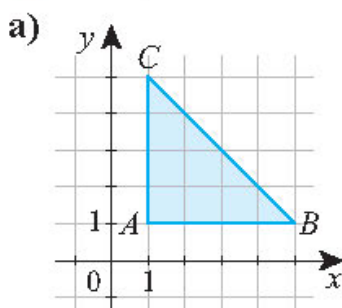
Zadania utrwalające

4.15. Każda para punktów będących wierzchołkami wielokąta określa pewien wektor. Wskaż dwie pary (jeśli istnieją) wektorów:

1 równych,

2 przeciwnych,

3 prostopadłych.



4.16. Oblicz współrzędne wektora $\vec{AB}$, gdy:

a) $A = (2, 5)$, $B = (-3, 1)$,

b) $A = (-3, -2)$, $B = (1, 2)$,

c) $A = (4, -1)$, $B = (-2, -1)$,

d) $A = (-8, 3)$, $B = (-8, 7)$.

4.17. Oblicz współrzędne wektora $\vec{AB}$ oraz współrzędne wektora do niego przeciwnego, jeżeli:

a) $A = (3, -1)$, $B = (2, -1)$,

b) $A = (-3, 0)$, $B = (4, 1)$,

c) $A = (-4, -5)$, $B = (0, 0)$,

d) $A = (-1, 8)$, $B = (1, -8)$.

4.18. Oblicz współrzędne końca lub początku wektora $\vec{AB}$, wiedząc, że:

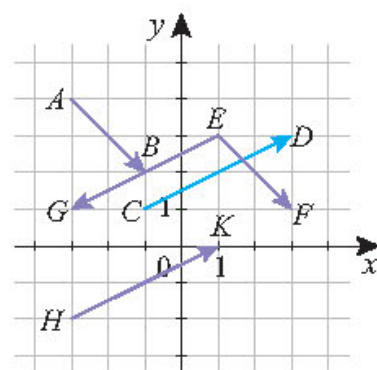
a) $\vec{AB} = [7, 5]$ i $A = (2, 3)$,

b) $\vec{AB} = [4, -1]$ i $A = (0, -3)$,

c) $\vec{AB} = [6, -1]$ i $B = (2, 3)$,

d) $\vec{AB} = [4, 4]$ i $B = (4, 4)$.

4.19. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i oblicz współrzędne wektorów $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$, $\vec{EG}$, $\vec{HK}$. Wskaż pary wektorów równych oraz pary wektorów przeciwnych.



4.20. Oblicz współrzędne punktu:

- a) A , gdy $B = (2, 1)$, $\vec{AB} = \vec{w}$ i $\vec{w} = [-2, -1]$,
- b) B , gdy $C = (-1, 0)$, $\vec{BC} = \vec{w}$ i $\vec{w} = [0, -1]$,
- c) M , gdy $N = (-8, 3)$, $\vec{MN} = \vec{a}$ i $\vec{a} = [-8, 3]$,
- d) D , gdy $E = (-2, -2)$, $\vec{DE} = \vec{b}$ i $\vec{b} = [0, 1]$.

4.21. Wiedząc, że $O = (0, 0)$ i $\vec{OP} = \vec{u}$, oblicz współrzędne punktu P , gdy:

- a) $\vec{u} = [4, 4]$, b) $\vec{u} = [-3, 2]$, c) $\vec{u} = [1, -5]$, d) $\vec{u} = [0, 7]$.

4.22. Oblicz współrzędne środka S i długość wektora $\vec{AB}$, gdy:

- a) $A = (-1, -1)$ i $B = (-1, 3)$, b) $A = (2, -3)$ i $B = (3, -3)$,
- c) $A = \left(-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ i $B = \left(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, d) $A = (\sqrt{18}, \sqrt{27})$ i $B = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

4.23. Oblicz długość wektora $\vec{u}$, gdy:

- a) $\vec{u} = \vec{CD}$ oraz $C = (4, 7)$ i $D = (-14, -11)$, b) $\vec{u} = [-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$,
- c) $\vec{v} = [0, \sqrt{7}]$ oraz $\vec{u} = \vec{v}$, d) $\vec{u} = -\vec{v}$ oraz $\vec{v} = [-8, 16]$.

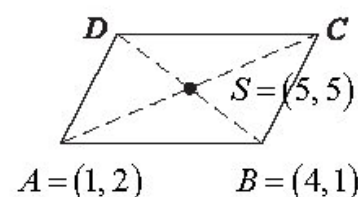
4.24. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C trójkąta ABC , w którym $A = (4, 2)$ oraz:

- a) $\vec{AB} = [-7, -3]$, $\vec{BC} = [4, -3]$, b) $\vec{AC} = [-7, -4]$, $\vec{CB} = [2, 8]$,
- c) $\vec{BA} = [-4, -6]$, $\vec{BC} = [-9, -6]$.

4.25. Wiedząc, że punkt S jest środkiem wektora $\vec{AB}$, oblicz współrzędne wektora:

- a) $\vec{AS}$, gdy $A = (1, 3)$ i $B = (3, 7)$, b) $\vec{BS}$, gdy $A = (6, -3)$ i $B = (0, 3)$,
- c) $\vec{SA}$, gdy $A = (6, 3)$ i $B = (-10, -1)$, d) $\vec{SB}$, gdy $A = (0, 0)$ i $B = (-3, 6)$.

4.26. Na rysunku S jest punktem przecięcia się przekątnych równoległoboku $ABCD$. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz współrzędne wierzchołków C i D .





Działania na wektorach w układzie współrzędnych

Dodawanie i odejmowanie wektorów można wykonać w układzie współrzędnych.

Pokażemy to na przykładzie.

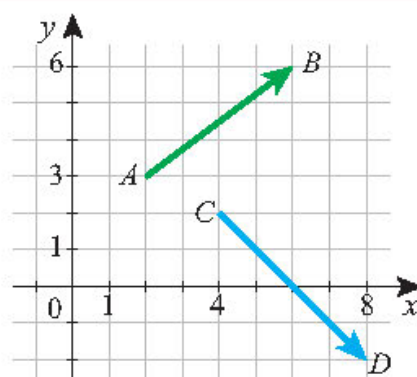
Przykład 9. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i podaj współrzędne wektora: a) $\vec{AB} + \vec{CD}$, b) $\vec{AB} - \vec{CD}$.

Rozwiązanie

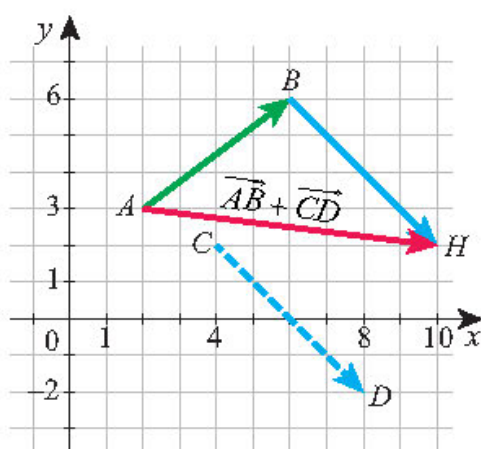
$$A = (2, 3), B = (6, 6), \text{ więc } \vec{AB} = [4, 3]$$

$$C = (4, 2), D = (8, -2), \text{ więc } \vec{CD} = [4, -4]$$

Aby wyznaczyć wektor, który jest sumą albo różnicą wektorów $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$, zastosujemy zasadę trójkąta.



a) $\vec{CD} = \vec{BH}$



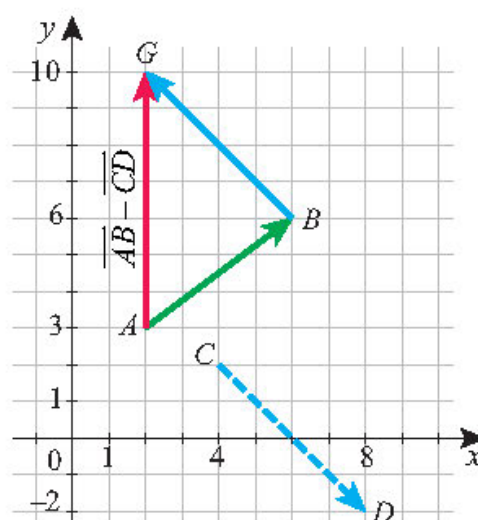
Obliczamy współrzędne punktu H .

$$\vec{CD} = [4, -4] \text{ i } \vec{BH} = [x_H - 6, y_H - 6],$$

$$\text{więc } H = (10, 2).$$

$$\text{Zatem } \vec{AH} = [8, -1].$$

b) $\vec{CD} = -\vec{BG}$ i $-\vec{BG} = \vec{GB}$



Obliczamy współrzędne punktu G .

$$\vec{CD} = [4, -4] \text{ i } \vec{GB} = [4, -4], \text{ więc}$$

$$-\vec{BG} = [-4, 4] \text{ i } G = (2, 10).$$

$$\vec{AG} = [0, 7].$$

Odp.: a) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AH} = [8, -1]$ b) $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AG} = [0, 7].$

Zauważamy, że:

$$+ \begin{cases} \vec{AB} = [4, 3] \\ \vec{CD} = [4, -4] \end{cases}$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = [4 + 4, 3 + (-4)].$$

$$- \begin{cases} \vec{AB} = [4, 3] \\ \vec{CD} = [4, -4] \end{cases}$$

$$\vec{AB} - \vec{CD} = [4 - 4, 3 - (-4)].$$



Twierdzenie

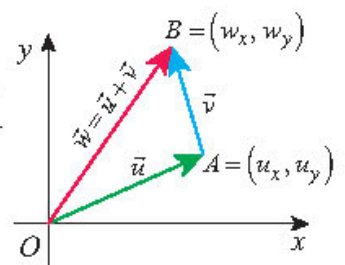
Jeżeli $\vec{u} = [u_x, u_y]$ oraz $\vec{v} = [v_x, v_y]$, to

$$\bullet \vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y], \quad \bullet \vec{u} - \vec{v} = [u_x - v_x, u_y - v_y].$$

$$\begin{array}{l|l} Z \text{ (założenie): } \vec{u} = [u_x, u_y], & T \text{ (teza): } \vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y], \\ \vec{v} = [v_x, v_y]. & \vec{u} - \vec{v} = [u_x - v_x, u_y - v_y]. \end{array}$$

Dowód:

Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są swobodne. Dla dowodu zaczepimy je jak na rysunku, gdzie $\vec{u} = \vec{OA}$, $O = (0, 0)$ i $\vec{v} = \vec{AB}$.



Wtedy $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{OB} = [w_x, w_y]$ oraz $A = (u_x, u_y)$, $B = (w_x, w_y)$, $\vec{AB} = \vec{v}$.

$\vec{AB} = \vec{v} = [v_x, v_y]$ i $\vec{AB} = [w_x - u_x, w_y - u_y]$, więc

$$\begin{cases} w_x - u_x = v_x \\ w_y - u_y = v_y \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} w_x = u_x + v_x \\ w_y = u_y + v_y \end{cases}.$$

Zatem $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y]$ oraz

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = [u_x, u_y] + [-v_x, -v_y] = [u_x - v_x, u_y - v_y]. \quad \text{ckd.}$$

Ćwiczenie 24. Oblicz współrzędne wektora $\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$ i $\vec{t} = \vec{w} - \vec{v}$, gdy:

a) $\vec{w} = [-2, 1]$, $\vec{v} = [4, -3]$,

b) $\vec{w} = [0, -5]$, $\vec{v} = [0, 5]$

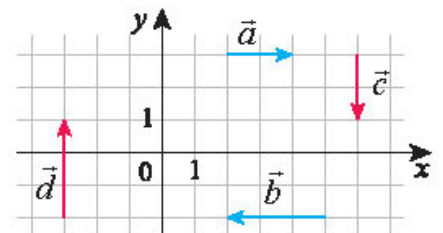
c) $\vec{w} = [4, -5]$, $\vec{v} = [-4, 5]$

d) $\vec{w} = [-\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, $\vec{v} = [1, 1]$.

Przykład 10. Na płaszczyźnie kartezjańskiej zaznacz wektory swobodne $\vec{a} = [2, 0]$, $\vec{b} = [-3, 0]$, $\vec{c} = [0, -2]$, $\vec{d} = [0, 3]$. Zapisz swoje spostrzeżenia.

Rozwiązanie

Aby zaznaczyć wektory, zaczepiamy każdy z nich w dowolnym punkcie, a współrzędne ich końców obliczamy, dodając do współrzędnych początku odpowiednie współrzędne wektora.



• Jeżeli $\vec{a} = \vec{AB} = [2, 0]$ i np. $A = (2, 3)$, to $B = (4, 3)$.

• Jeżeli $\vec{b} = \vec{CD} = [-3, 0]$ i np. $C = (5, -2)$, to $D = (2, -2)$.

R

Zauważamy, że:

- drugie współrzędne wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równe 0 i te wektory są równoległe do osi x ,
- pierwsze współrzędne wektorów $\vec{c}$ i $\vec{d}$ są równe 0 i te wektory są równoległe do osi y .

Uwaga

- 1) Wektor $\vec{u}$, taki że $\vec{u} = [p, 0]$, gdzie $p \neq 0$, jest **równoległy do osi x** i ma zwrot:
 - zgodny ze zwrotem osi x , gdy $p > 0$,
 - przeciwny do zwrotu osi x , gdy $p < 0$.
- 2) Wektor $\vec{v}$, taki że $\vec{v} = [0, q]$, gdzie $q \neq 0$, jest **równoległy do osi y** i ma zwrot:
 - zgodny ze zwrotem osi y , gdy $q > 0$,
 - przeciwny do zwrotu osi y , gdy $q < 0$.
- 3) Wektor zerowy ($\vec{0} = [0, 0]$) jest równoległy i prostopadły do każdej osi układu.

Ćwiczenie 25. Spośród wektorów: $\vec{a} = [-2, 0]$, $\vec{b} = [0, -2]$, $\vec{c} = [8, 0]$, $\vec{d} = [0, 4]$,

$\vec{e} = [8, 8]$, $\vec{f} = [-8, 0]$, $\vec{g} = [0, \sqrt{2}]$, $\vec{h} = [0, 0]$ wybierz te, które są równoległe:

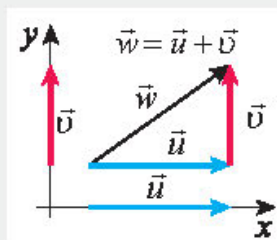
- a) do osi x , b) do osi y .

Każdy wektor leżący na płaszczyźnie kartezjańskiej jest sumą dwóch wektorów równoległych do osi układu współrzędnych.

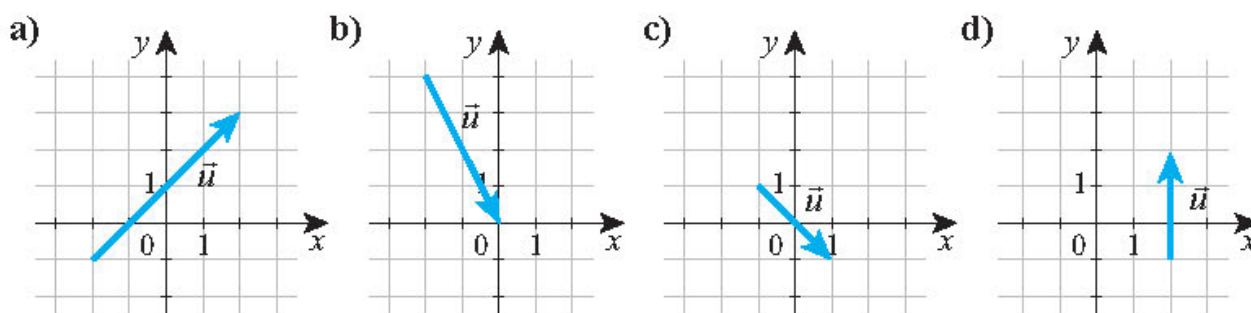
Uwaga

Jeżeli $\vec{w} = [p, q]$, to $\vec{w} = \underbrace{[p, 0]}_{\vec{u}} + \underbrace{[0, q]}_{\vec{v}}$.

Wektory $\vec{u} = [p, 0]$ i $\vec{v} = [0, q]$ nazywamy **składowymi wektora $\vec{w} = [p, q]$** .



Ćwiczenie 26. Przerysuj rysunek do zeszytu i zaznacz na nim składowe wektora $\vec{u}$ oraz podaj ich współrzędne.



R

Ćwiczenie 27. Podaj współrzędne składowych wektora $\vec{w}$, gdy:

a) $\vec{w} = [-1, 4]$ b) $\vec{w} = [7, -2]$ c) $\vec{w} = [-3, 0]$ d) $\vec{w} = [0, 5]$.

Ćwiczenie 28. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej wektor równy wektorowi $\vec{w}$, gdy:

a) $\vec{w} = [-1, 3]$ b) $\vec{w} = [2, -1]$ c) $\vec{w} = [-3, -1]$ d) $\vec{w} = [0, -2]$.

Przypomnijmy

Jeżeli $\vec{w} = k \cdot \vec{u}$, to:

- 1 $\vec{w} \parallel \vec{u}$
- 2 zwroty wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są:
 - zgodne, gdy $k > 0$,
 - przeciwne, gdy $k < 0$,
- 3 $|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{u}|$.

Twierdzenie

Jeżeli wektor $\vec{w} = [w_x, w_y]$ pomnożymy przez liczbę rzeczywistą k ,
to $k \cdot \vec{w} = [k \cdot w_x, k \cdot w_y]$.

Przykład 11. Wiedząc, że $\vec{w} = [1, 2]$, oblicz współrzędne wektora:

a) $\vec{a} = 3 \cdot \vec{w}$, b) $\vec{b} = -2 \cdot \vec{w}$.

Rozwiązanie

Zaznaczamy wektor $\vec{w}$ na płaszczyźnie kartezjańskiej, przy czym $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$,
gdzie $\vec{u} = [1, 0]$ i $\vec{v} = [0, 2]$. Następnie zaznaczamy wektor $\vec{a}$ oraz wektor $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = 3 \cdot \vec{w} = 3 \cdot [1, 2] = [3 \cdot 1, 3 \cdot 2]$
 b) $\vec{b} = -2 \cdot \vec{w} = -2 \cdot [1, 2] = [-2 \cdot 1, -2 \cdot 2]$.

Odp.: a) $\vec{a} = [3, 6]$, b) $\vec{b} = [-2, -4]$.

Ćwiczenie 29. Zaznacz w układzie współrzędnych wektor $\vec{w} = [-1, -2]$, a następnie zaznacz wektor równy wektorowi:

a) $\vec{a} = 2 \cdot \vec{w}$, b) $\vec{b} = -3\vec{w}$, c) $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{w}$.

Ćwiczenie 30. Wiedząc, że $\vec{u} = [-1, 2]$ i $\vec{v} = [3, -5]$, oblicz współrzędne wektora $\vec{w}$, gdy:

a) $\vec{w} = -5\vec{v}$, b) $\vec{w} = 3\vec{u}$, c) $\vec{w} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$, d) $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$.

Uwaga

- Niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista k taka, że $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$.
- Jeżeli $\vec{u} = [u_x, u_y]$, $\vec{v} = [v_x, v_y]$, gdzie $v_x \neq 0$ i $v_y \neq 0$, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe, gdy $\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = k$.

Ćwiczenie 31. Sprawdź, który z wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ jest równoległy do wektora $\vec{u} = [2, -1]$ gdy $\vec{a} = [-3, \frac{2}{3}]$, $\vec{b} = [-1, 2]$, $\vec{c} = [-2, 1]$, $\vec{d} = [10, -5]$.

Ćwiczenie 32. Oblicz, dla jakich wartości m wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe, gdy $\vec{a} = [m, 3]$ i $\vec{b} = [2, 6m]$.

Ćwiczenie 33. Sprawdź, czy wektory $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ są równoległe, gdy $A = (-3, 2)$, $B = (5, 4)$, $C = (1, 2)$, $D = (5, 3)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

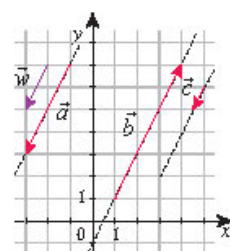
24. a) $\vec{u} = [2, -2]$, $\vec{t} = [-6, 4]$, b) $\vec{u} = [0, 0]$, $\vec{t} = [0, -10]$, c) $\vec{u} = [0, 0]$, $\vec{t} = [8, -10]$,

d) $\vec{u} = [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{3}]$, $\vec{t} = [-\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - 1]$. 25. a) $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{f}$, $\vec{h}$, b) $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{g}$, $\vec{h}$.

27. a) $[-1, 0]$ i $[0, 4]$, b) $[7, 0]$ i $[0, -2]$, c) $[-3, 0]$ i $[0, 0]$, d) $[0, 0]$ i $[0, 5]$.

30. a) $[-15, 25]$, b) $[-3, 6]$, c) $[1, -\frac{3}{2}]$, d) $[-9, 16]$.

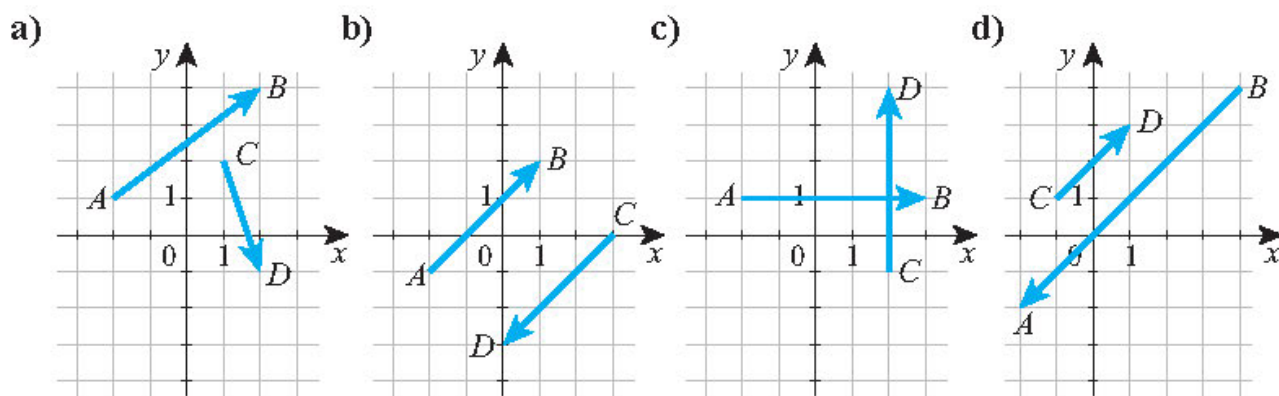
31. $\vec{c}$ i $\vec{d}$. 32. $m_1 = -1$, $m_2 = 1$. 33. Tak.



29. Np.:

Zadania utrwalające

4.27. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz współrzędne wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdy $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{CD}$ oraz $\vec{v} = \vec{AB} - \vec{CD}$.



4.28. Wiedząc, że $\vec{u} = [1, -3]$ i $\vec{v} = [-2, 1]$, oblicz współrzędne i długość wektora $\vec{w}$, gdy:

- a) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, b) $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, c) $\vec{w} = -2\vec{u}$, d) $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$,
 e) $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$, f) $\vec{w} = \vec{u} - (\vec{v} - \vec{u})$, g) $\vec{w} = 2(\vec{u} + \vec{v})$, h) $\vec{w} = -3(\vec{v} - 2\vec{u})$.

4.29. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej wektor równy wektorowi $\vec{w}$, którego początkiem jest punkt A , gdy:

- a) $\vec{w} = [-2, -1]$ i $A = (1, 1)$, b) $\vec{w} = [4, -2]$ i $A = (-2, 1)$,
 c) $\vec{w} = [-3, 3]$ i $A = (2, 0)$, d) $\vec{w} = [3, 3]$ i $A = (-3, -3)$.

4.30. Wiedząc, że $A = (-2, 3)$, $B = (1, -2)$, $C = (4, 5)$, oblicz współrzędne $\vec{w}$, gdy:

- a) $\vec{w} = \vec{AB} + \vec{BC}$, b) $\vec{w} = (\vec{AB} + \vec{AC}) + (\vec{AB} - \vec{BC})$,
 c) $\vec{w} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$, d) $\vec{w} = \vec{AC} - (\vec{AB} + \vec{BC})$,
 e) $\vec{w} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$, f) $\vec{w} = -2(\vec{AB} + \vec{AC}) + 3(\vec{AB} - \vec{BC})$.

4.31. Wiedząc, że $A = (3, -2)$, $B = (1, 3)$, $C = (-2, 5)$ i $D = (-4, -2)$, oblicz współrzędne punktu E spełniającego warunek $\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC} + \vec{ED} = \vec{0}$.

4.32. Punkty M i N dzielą odcinek AB na trzy równe części. Oblicz współrzędne punktów M i N , gdy:



- a) $A = (2, 1)$ i $B = (11, 4)$, b) $A = (-3, 7)$ i $B = (6, 13)$,
 c) $A = (-12, 12)$ i $B = (12, -12)$.

4.33. Punkty $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$ dzielą odcinek AB na n równych części. Oblicz współrzędne punktów $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$, gdy:

- a) $A = (-1, 3)$, $B = (3, 5)$ i $n = 2$, b) $A = (-8, 4)$, $B = (4, -8)$ i $n = 3$,
 c) $A = (-1, -1)$, $B = (23, 23)$ i $n = 4$, d) $A = (0, 0)$, $B = (-50, 50)$ i $n = 5$.

4.34. Oblicz m i n , gdy $\vec{a} = [-5, 3n]$, $\vec{b} = [m, -n]$ oraz $\vec{a} + \vec{b} = [2m, 8]$.

4.35. Oblicz m , gdy: $\vec{w} \parallel \vec{t}$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} = [7 + m, 5 - 2m]$, $\vec{v} = [2 - m, 5m + 1]$,
 $\vec{t} = [3, 3 - 2m]$.

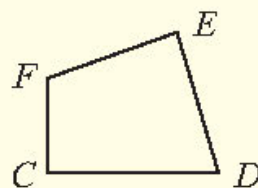
Zestaw powtórkowy

1. Punkty C, D, E, F są wierzchołkami czworokąta $CDEF$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wektor $\vec{0}$ jest wynikiem działania:

- A. $\vec{CD} + \vec{DE}$, B. $\vec{FE} - \vec{FD}$,
C. $\vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF}$, D. $\vec{ED} + \vec{DC} + \vec{CF} + \vec{FE}$.



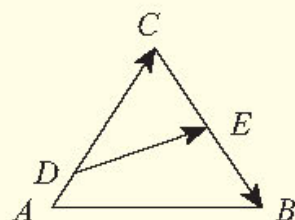
2. Na bokach AC i BC trójkąta ABC obrano punkty D i E takie,

że $\vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ i $\vec{CE} = \frac{1}{2}\vec{CB}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli $\vec{DE} = a \cdot \vec{AC} + b \cdot \vec{CB}$, gdzie $a > 0$ i $b > 0$, to:

- A. $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{1}{2}$, B. $a = \frac{3}{4}$ i $b = \frac{1}{2}$, C. $a = \frac{3}{4}$ i $b = \frac{3}{4}$, D. $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{3}{4}$.



3. Wektor $\vec{w}$ ma współrzędne $\vec{w} = [-3, 1-a]$.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Długość wektora $\vec{w}$ jest równa 5, gdy:

- A. $a = 5$, B. $a = -5$.

Długość wektora $\vec{w}$ jest równa 3, gdy:

- C. $a = -1$, D. $a = 1$.

4. Punkt C jest środkiem odcinka AB , gdzie $A = (3, 1)$ i $B = (-1, 7)$. Zatem:

- A. $\vec{AC} = [-2, 3]$, B. $\vec{BC} = [-2, 3]$, C. $\vec{CA} = [-2, -3]$, D. $\vec{AC} = [2, 4]$.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

W trójkącie ABC $A = (1, 3)$, $\vec{AB} = [2, -1]$ i $\vec{BC} = [4, 2]$. Punkt C ma współrzędne:

- A. $(3, 2)$, B. $(7, 4)$, C. $(6, 1)$, D. $(-1, 0)$.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

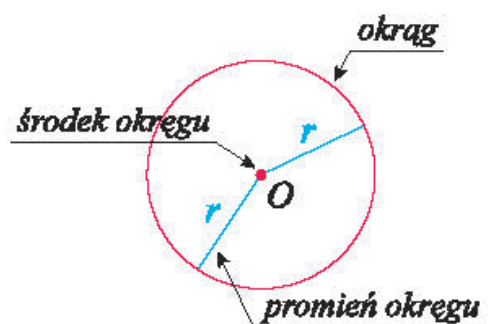
Jeżeli $\vec{u} \parallel \vec{v}$ oraz $\vec{u} = [-3, 4-3m]$, $\vec{v} = [2, m-5]$, to:

- A. $m = 1$, B. $m = \frac{13}{9}$, C. $m = -\frac{7}{3}$, D. $m = \frac{23}{9}$.

5. Kąty w kole i styczna do okręgu

Kąt środkowy i pole wycinka koła

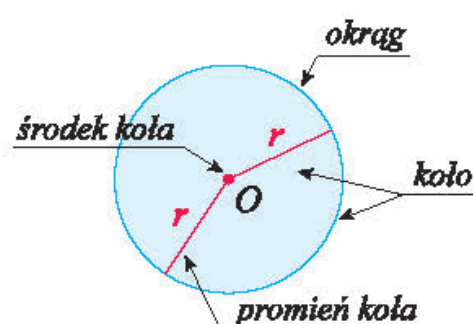
Przypomnijmy



Definicja

Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa promieniowi r .

$o(O, r)$ – okrąg o środku O i promieniu r .



Definicja

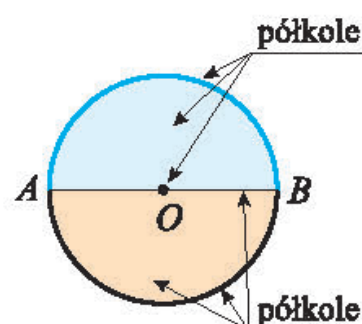
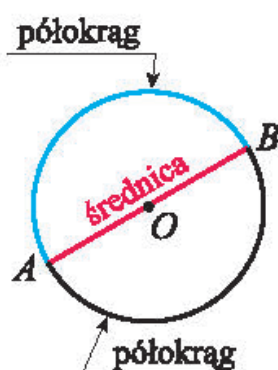
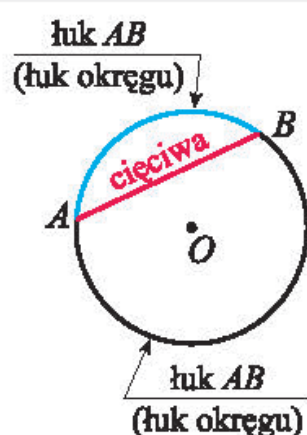
Kołem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa promieniowi r .

$k(O, r)$ – koło o środku O i promieniu r .

Uwaga

Każde dwa różne punkty należące do okręgu dzielą go na dwie części.

Każdą z tych części nazywamy **łukiem okręgu**.



- Łuk okręgu oparty na średnicy nazywamy półokręgiem.

Ćwiczenie 1. Narysuj okrąg, którego najdłuższa cięciwa ma długość 8 cm.

Ćwiczenie 2. Narysuj okrąg o promieniu 3 cm.

- Jaką długość ma średnica tego okręgu?
- Przyjmując, że a jest długością dowolnej cięciwy okręgu, określ przedział, do którego należy liczba a .

Definicja

Kąt środkowy w okręgu (w kole) to kąt, którego wierzchołkiem jest środek tego okręgu.

O kącie środkowym AOB mówimy, że jest oparty na łuku AB .

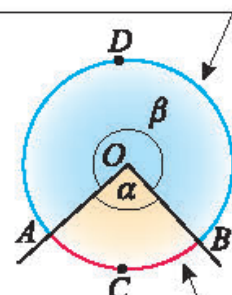
Półproste OA i OB wyznaczają w kole o środku O dwa kąty środkowe. Aby uściślić, o którym kącie środkowym mówimy, wskazujemy dowolny punkt leżący na łuku AB .

Kąt środkowy α jest oparty na łuku ACB (kolor czerwony),

kąt środkowy β jest oparty na łuku ADB (kolor niebieski).

O łukach ACB i ADB mówimy, że są łukami dopełniającymi się.

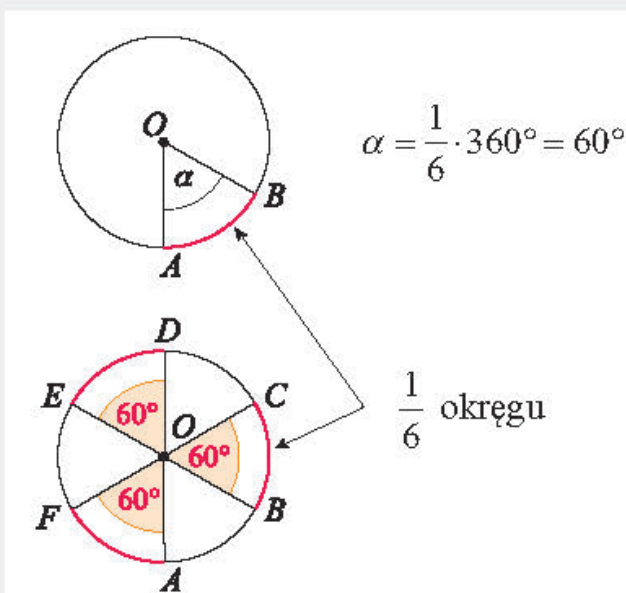
$\widehat{ADB}$ – łuk, na którym oparty jest kąt β



$\widehat{ACB}$ – łuk, na którym oparty jest kąt α

Uwaga

- Miara kąta środkowego jest taką częścią miary kąta pełnego (kąta 360°), jaką częścią okręgu jest łuk, na którym ten kąt jest oparty.
- Kąty środkowe oparte na równych łukach tego samego okręgu są równe.



Ćwiczenie 3. Oblicz, jaką część okręgu jest łuk, na którym oparty jest kąt środkowy o mierze równej:

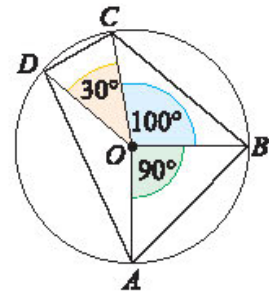
- 30° , b) 60° , c) 90° , d) 180° , e) 240° , f) 270° .

Ćwiczenie 4. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na łuku okręgu, którego długość jest równa:

- $\frac{1}{4}$ długości okręgu, b) $\frac{1}{12}$ długości okręgu, c) $\frac{5}{6}$ długości okręgu.

Ćwiczenie 5. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miarę kąta AOD oraz miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$.

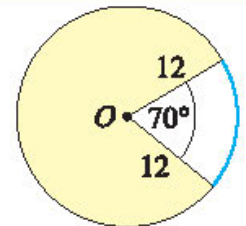
Wskazówka. Trójkąty AOB , BOC , COD i DOA są równoramienne.



Nazwa i opis figury	Rysunek	Pole P i obwód L
Koło O – środek koła r – promień koła L – obwód koła (długość okręgu)		$P = \pi r^2$ $L = 2\pi r$
Wycinek koła O – środek koła r – promień koła L_w – długość łuku wycinka koła P_w – pole wycinka koła		$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$ $L_w = \widehat{ABC} $ $L_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$

Przykład 1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem koła, i oblicz:

- długość łuku wyróżnionego na rysunku kolorem niebieskim,
- pole wycinka koła wyróżnionego na rysunku kolorem żółtym.



Rozwiązanie

a) $\alpha = 70^\circ$, $r = 12$, więc $L_w = \frac{70^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 12$, czyli $L_w = \frac{14}{3}\pi$.

$$L_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- b) Wycinek koła wyróżniony na rysunku kolorem żółtym jest oparty na łuku, któremu odpowiada kąt środkowy β o mierze równej $360^\circ - 70^\circ$, czyli $\beta = 290^\circ$.

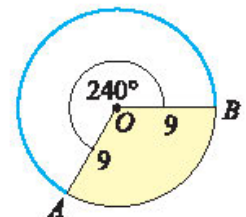
$$P_w = \frac{290^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2, \text{ skąd } P_w = \frac{29}{36} \cdot \pi \cdot 144 = 116\pi.$$

$$P_w = \frac{\beta}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Odp.: a) $L_w = \frac{14}{3}\pi$, b) $P_w = 116\pi$.

Ćwiczenie 6. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem koła, i oblicz:

- długość łuku wyróżnionego na rysunku kolorem niebieskim,
- pole wycinka koła wyróżnionego na rysunku kolorem żółtym.



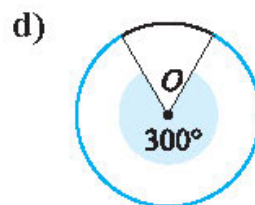
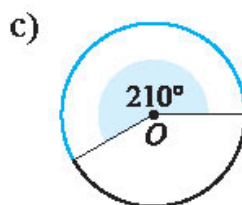
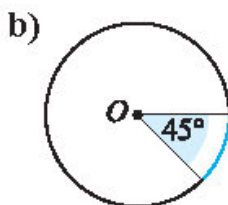
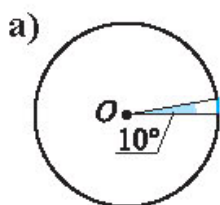
Odpowiedzi do ćwiczeń

2. b) $(0; 6)$. 3. a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{2}{3}$, f) $\frac{3}{4}$. 4. a) 90° , b) 30° , c) 300° .

5. $|\angle AOD| = 140^\circ$. Kąty czworokąta: $65^\circ, 85^\circ, 115^\circ, 95^\circ$. 6. a) 12π , b) 27π .

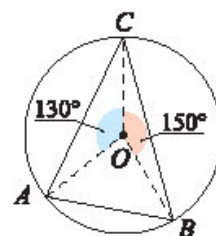
Zadania utrwalające

5.1. Podaj, jaką częścią okręgu jest łuk, na którym oparty jest kąt środkowy zaznaczony na rysunku kolorem niebieskim.



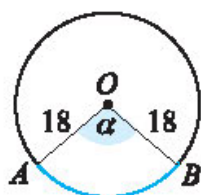
5.2. Oblicz długość łuku okręgu o promieniu 3, na którym oparty jest kąt środkowy o mierze:
a) 60° , b) 120° , c) 240° , d) 270° , e) 315° .

5.3. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie punkt O jest środkiem okręgu, i oblicz miary kątów trójkąta ABC .

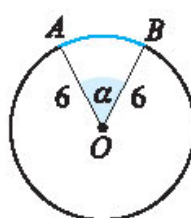


5.4. Na rysunku punkt O jest środkiem okręgu, a L_w jest długością łuku zaznaczonego kolorem niebieskim. Oblicz miarę kąta środkowego α , gdy:

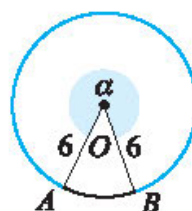
a) $L_w = 12\pi$



b) $L_w = \frac{4}{3}\pi$



c) $L_w = 10,5\pi$

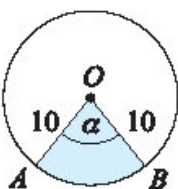


5.5. Oblicz pole wycinka koła o promieniu 6 i kącie środkowym o mierze:

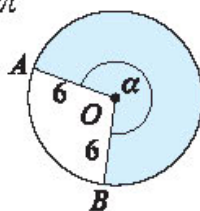
a) 40° , b) 80° , c) 135° , d) 150° , e) 225° , f) 330° .

5.6. Na rysunku punkt O jest środkiem koła, a P_w jest polem wycinka wyróżnionego kolorem niebieskim. Oblicz miarę kąta środkowego α , gdy:

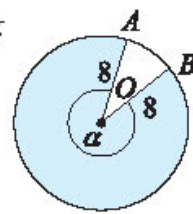
a) $P_w = 25\pi$



b) $P_w = 27\pi$

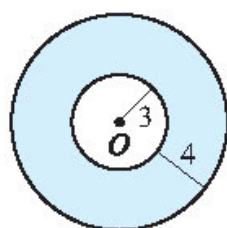


c) $P_w = 56\pi$

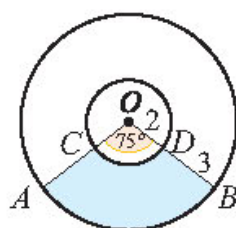


5.7. Na rysunku punkt O jest środkiem kół współśrodkowych. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole figury wyróżnione kolorem niebieskim.

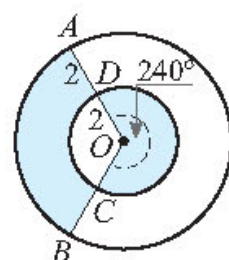
a)



b)



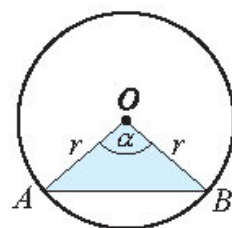
c)



5.8. Punkt O jest środkiem okręgu o promieniu r . Oblicz pole trójkąta AOB , gdy:

a) $r = 8$ i $\alpha = 30^\circ$, b) $r = \sqrt{3}$ i $\alpha = 60^\circ$,

c) $r = 10$ i $\alpha = 120^\circ$, d) $r = 1$ i $\alpha = 135^\circ$.



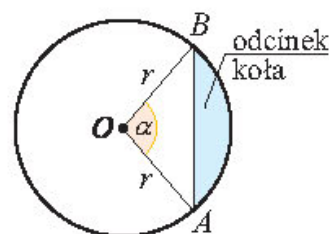
5.9. Punkt O jest środkiem koła o promieniu r . Na rysunku D kolorem niebieskim wyróżniono odcinek koła.

a) Uzasadnij, że pole P tego odcinka określone jest wzorem

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \alpha.$$

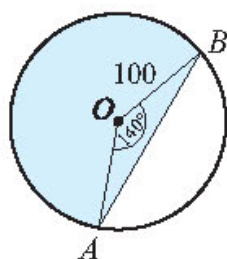
b) Oblicz pole odcinka koła, gdy:

1 $r = \sqrt{2}$ i $\alpha = 45^\circ$, 2 $r = 10$ i $\alpha = 150^\circ$, 3 $r = 1$ i $\alpha = 90^\circ$.

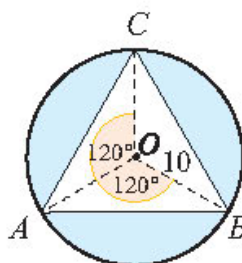


5.10. Punkt O jest środkiem koła. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole figury wyróżnione kolorem niebieskim. W obliczeniach przyjmij $\pi \approx 3,14$. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

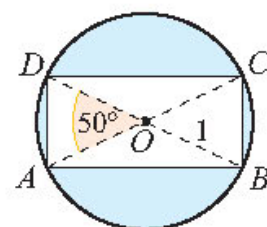
a)



b)

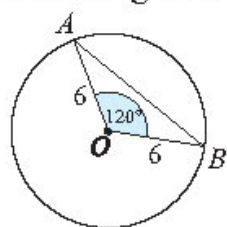


c)

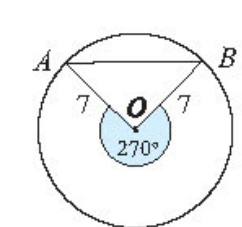


5.11. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie punkt O jest środkiem okręgu, i oblicz długość cięciwy AB .

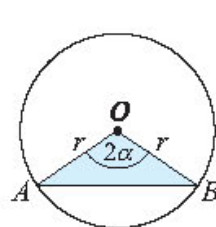
a)



b)



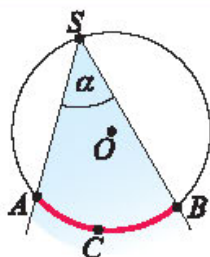
c)



Kąt wpisany i jego związek z kątem środkowym

Definicja

Kąt wpisany w okrąg (koło) to kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a jego ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy okręgu.



$\sphericalangle ASB$ – kąt wpisany w okrąg o środku O oparty na łuku ACB

α – miara kąta ASB

półproste SA i SB – ramiona kąta ASB

S – wierzchołek kąta wpisanego

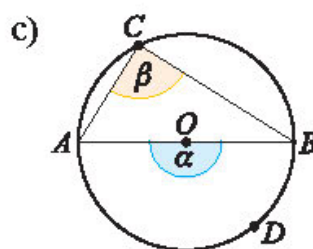
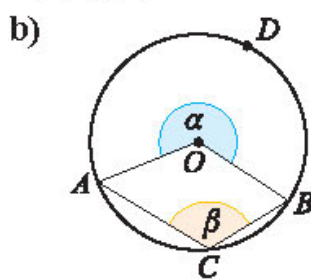
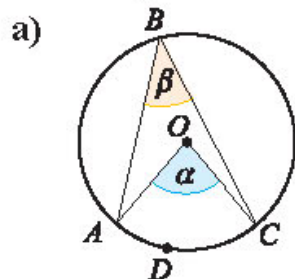


Ćwiczenie 7. Narysuj okrąg o środku O i obierz na nim punkty A, B, C . Zaznacz:

a) kąt środkowy oparty na łuku BAC , b) kąt wpisany oparty na łuku BAC .

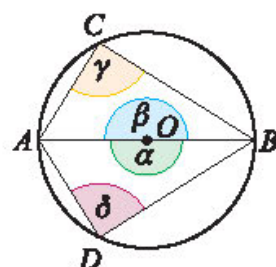
Czy kąt wpisany oparty na łuku BAC jest tylko jeden?

Ćwiczenie 8. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu. Wskaż łuk, na którym oparty jest kąt środkowy α oraz kąt wpisany β , gdy:



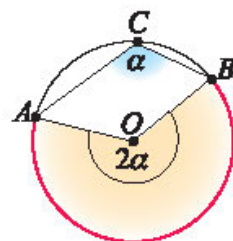
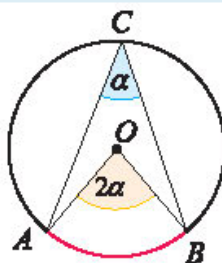
Ćwiczenie 9. Na rysunku punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku O , a odcinek AB jest jego średnicą.

- Podaj miary kątów środkowych α i β .
- Na jakim łuku oparty jest kąt α , a na jakim β ?
- Na jakim łuku oparty jest kąt γ ?
- Na jakim łuku oparty jest kąt δ ?



Twierdzenie o kątach wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku okręgu

Miara kąta wpisanego w okrąg (koło) jest równa połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku okręgu co kąt wpisany.



$$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle AOB| = \alpha$$

Z (założenie):

β – kąt środkowy oparty na łuku AB ,

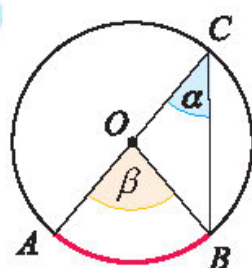
α – kąt wpisany oparty na łuku AB ,

T (teza):

$$\beta = 2\alpha, \text{ czyli } \alpha = \frac{1}{2}\beta.$$

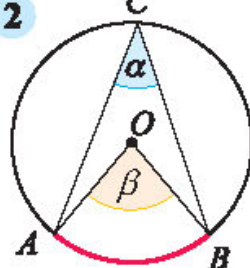
Zauważamy, że możliwe są trzy przypadki:

1



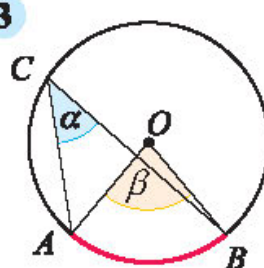
Środek okręgu
leży na ramieniu
kąta wpisanego

2



Środek okręgu
leży wewnątrz
kąta wpisanego

3



Środek okręgu
leży poza
kątem wpisanym

Udowodnimy przypadek **2**.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Promień OC podzielił kąt wpisany α na kąty α_1 i α_2 .

Zauważamy, że trójkąty AOC i BOC

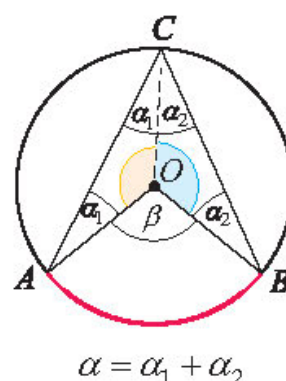
są równoramienne, więc

$$|\sphericalangle CAO| = \alpha_1 \text{ i } |\sphericalangle CBO| = \alpha_2$$

$$\beta = 360^\circ - [|\sphericalangle AOC| + |\sphericalangle BOC|],$$

$$\text{gdzie } |\sphericalangle AOC| = 180^\circ - 2\alpha_1 \text{ i } |\sphericalangle BOC| = 180^\circ - 2\alpha_2$$

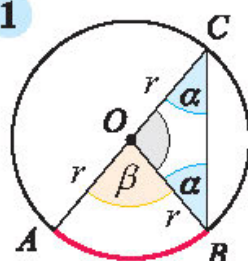
$$\beta = 360^\circ - [(180^\circ - 2\alpha_1) + (180^\circ - 2\alpha_2)] = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha. \quad \text{c.k.d.}$$



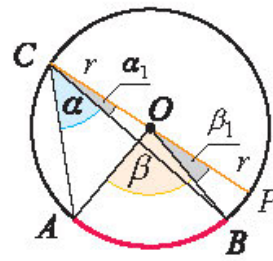
Ćwiczenie 10. Udowodnij przypadki **1** i **3** twierdzenia.

Wskazówka

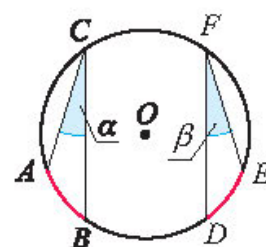
1



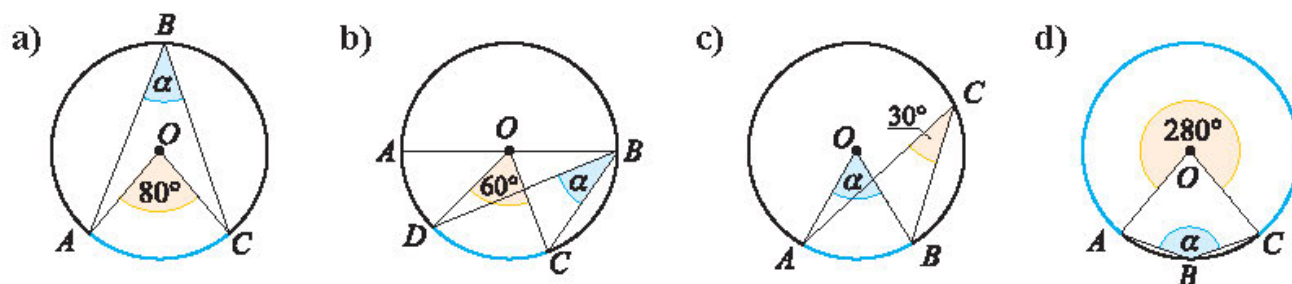
3



Ćwiczenie 11. Uzasadnij, że kąty wpisane oparte na równych łukach są równe.



Przykład 2. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i podaj miarę kąta α .



Rozwiązanie

Zauważamy, że na każdym z rysunków kąt środkowy i wpisany są oparte na tym samym łuku.

$$\text{a) } \alpha = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ,$$

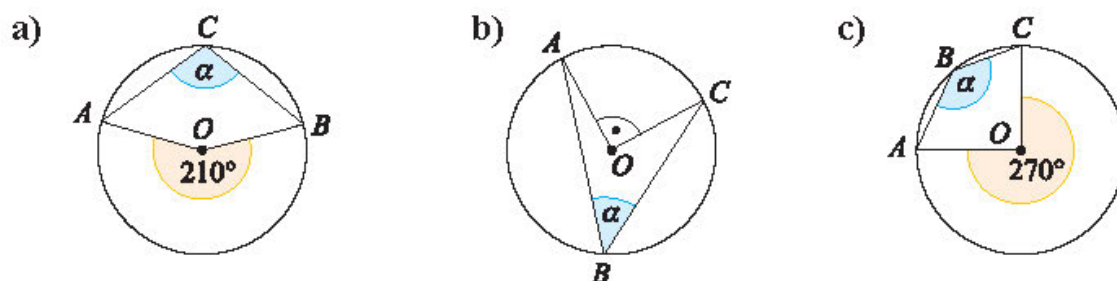
$$\text{b) } \alpha = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \cdot \alpha = 30^\circ, \text{ skąd } \alpha = 60^\circ,$$

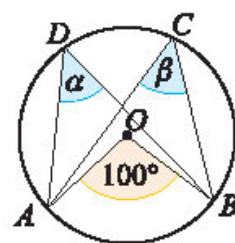
$$\text{d) } \alpha = \frac{1}{2} \cdot 280^\circ = 140^\circ.$$

Odp.: a) $\alpha = 40^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$, c) $\alpha = 60^\circ$, d) $\alpha = 140^\circ$.

Ćwiczenie 12. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i podaj miarę kąta α .



Ćwiczenie 13. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i uzasadnij, że kąty α i β są równe.

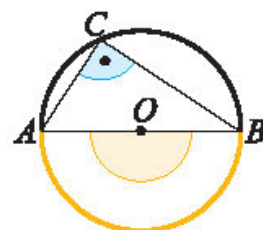


Przykład 3. Uzasadnij, że kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

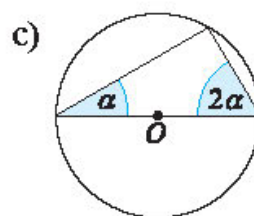
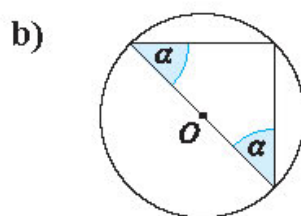
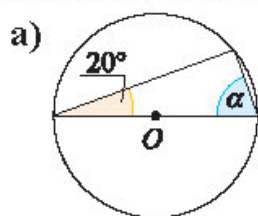
Rozwiązanie

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku, zauważamy, że kąt ACB jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy AOB .

Ponieważ $|\sphericalangle AOB| = 180^\circ$, więc $|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle AOB| = 90^\circ$ c.n.u.



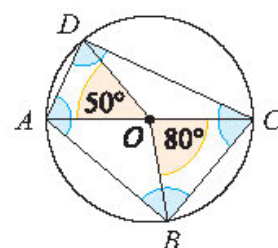
Ćwiczenie 14. Uzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i podaj miarę kąta α .



Uwaga

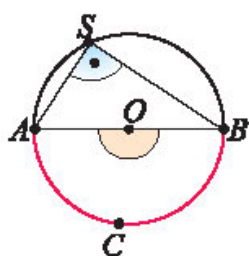
- Każdy trójkąt wpisany w okrąg, którego jednym z boków jest średnica okręgu, jest trójkątem prostokątnym.
- O kącie wpisanym opartym na półokręgu mówimy również, że jest oparty na średnicy.

Ćwiczenie 15. Uzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, a odcinek AC jest jego średnicą, i oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$.



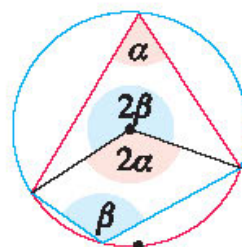
Wnioski z twierdzenia o kątach wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku okręgu

Kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.



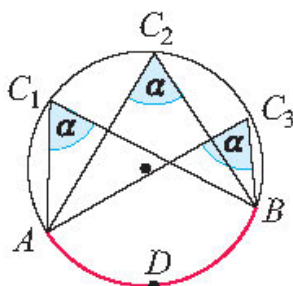
$$|\angle ASB| = \frac{1}{2} |\angle AOB| = 90^\circ$$

Suma miar kątów wpisanych w okrąg opartych na łukach dopełniających się jest równa 180° .



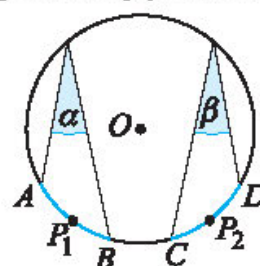
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Kąty wpisane w okrąg oparte na tym samym łuku mają równe miary.



$$|\angle AC_1B| = |\angle AC_2B| = |\angle AC_3B| = \alpha$$

Kąty wpisane w okrąg oparte na łukach równej długości mają równe miary.



$$\text{Jeśli } |\widehat{AP_1B}| = |\widehat{CP_2D}|, \text{ to } \alpha = \beta$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

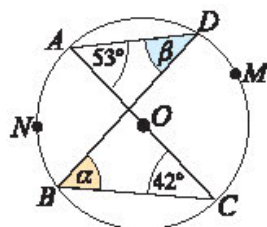
8. a) łuk ADC , b) łuk ADB , c) łuk ADB . 9. a) $\alpha = \beta = 180^\circ$, b) α na łuku ADB , β na łuku ACB , c) ADB , d) ACB .
 12. a) 105° , b) 45° , c) 135° . 14. a) 70° , b) 45° , c) 30° . 15. 105° , 90° , 75° , 90° .

Zadania utrwalające

5.12. Oblicz miary kątów środkowego i wpisanego opartych na łuku okręgu o długości:

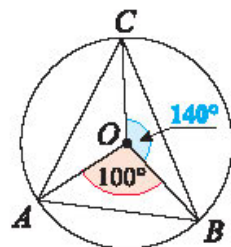
- a) $\frac{1}{4}$ okręgu, b) $\frac{2}{3}$ okręgu, c) $\frac{1}{10}$ okręgu, d) $\frac{1}{36}$ okręgu.

5.13. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i podaj miary kątów α oraz β . Odpowiedź uzasadnij.

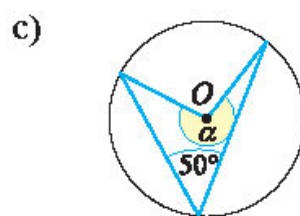
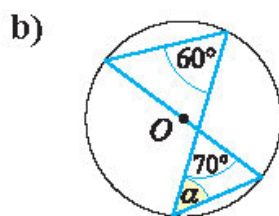
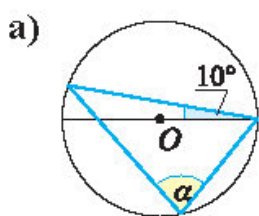


5.14. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i oblicz miarę kąta:

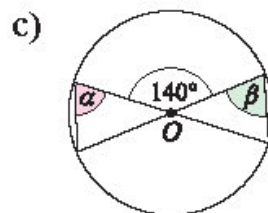
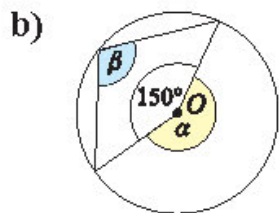
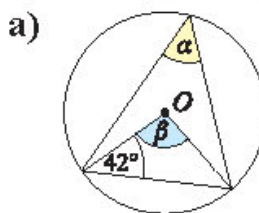
- a) COA , b) ACB , c) CAB , d) CBA .



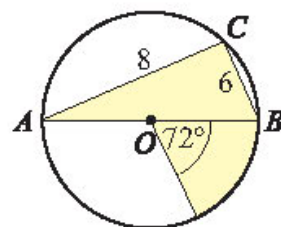
5.15. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie punkt O jest środkiem okręgu, i oblicz miarę kąta α .



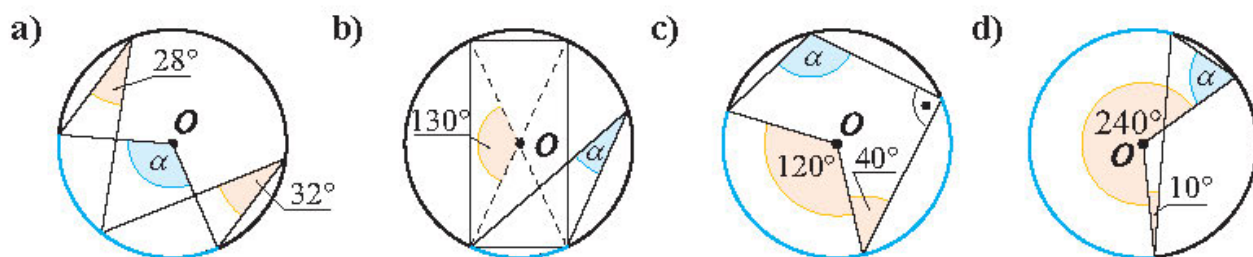
5.16. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie punkt O jest środkiem okręgu, i oblicz miary kątów α i β .



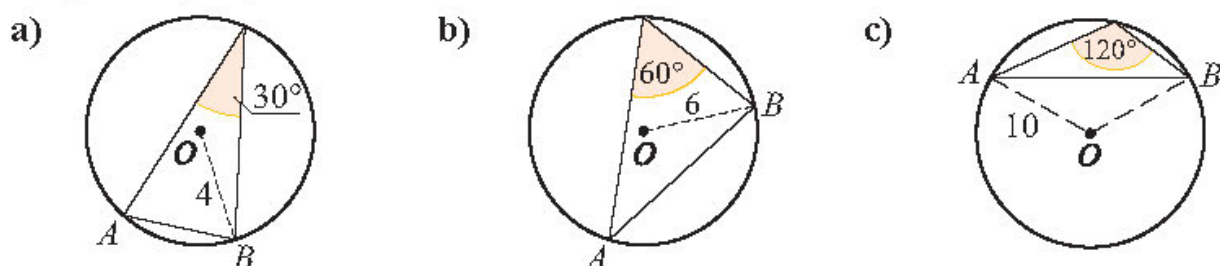
5.17. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem koła, i oblicz pole figury wyróżnionej kolorem żółtym.



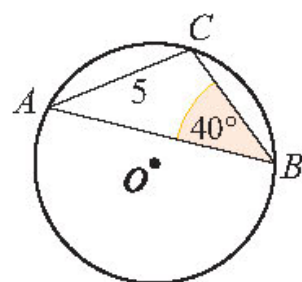
5.18. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i oblicz miarę kąta α .



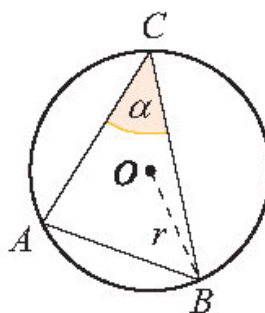
5.19. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i oblicz długość cięciwy AB .



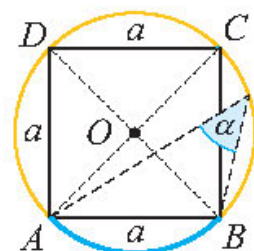
5.20. Wierzchołki trójkąta ABC leżą na okręgu o środku O . Oblicz średnicę okręgu, gdy $|AC| = 5$ i $|\sphericalangle ABC| = 40^\circ$. Wynik zaokrąglaj do dwóch miejsc po przecinku.



5.21. Uzasadnij, że jeśli ramiona kąta α wpisanego w okrąg o środku O i promieniu r mają z nim punkty wspólne A i B , to $|AB| = 2r \cdot \sin \alpha$.

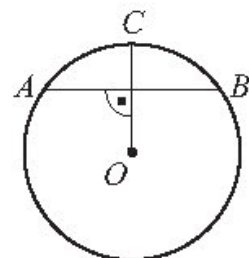


5.22. Uzasadnij, że jeśli punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku O i są kolejnymi wierzchołkami kwadratu, to każdy kąt wpisany oparty na łukach AB, BC, CD, DA i łukach do nich dopełniających ma miarę równą 45° albo 135° .



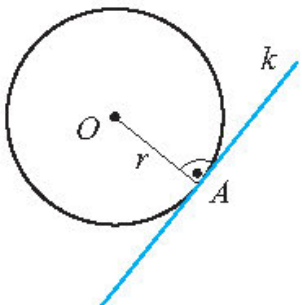
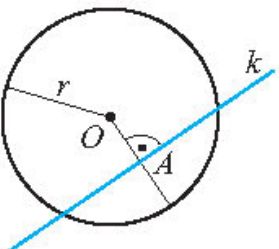
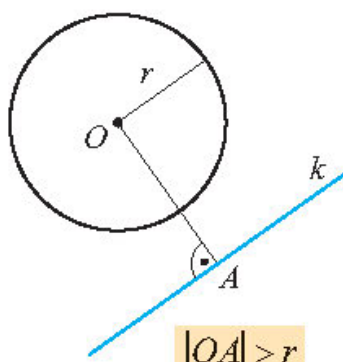
5.23. Cięciwa AB jest prostopadła do promienia OC okręgu o środku O . Uzasadnij, że:

- $|\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle COB|$,
- $|\sphericalangle ACO| = |\sphericalangle BCO|$.



Styczna do okręgu i jej własności

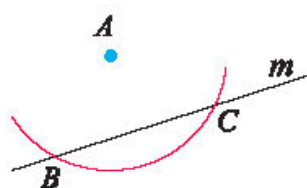
Prosta i okrąg na płaszczyźnie mogą nie mieć punktu wspólnego, mogą mieć jeden lub dwa punkty wspólne. Aby określić wzajemne położenie prostej i okręgu bada się odległość środka okręgu od tej prostej.

Wzajemne położenie prostej i okręgu		
Prosta styczna	Prosta sieczna	Prosta zewnętrzna
Definicja Styczną do okręgu nazywamy prostą, która ma z okręgiem jeden punkt wspólny.  $OA = r$ i $r \perp k$ Odległość środka O okręgu od stycznej k jest równa jego promieniowi r.	Definicja Prostą, która z okręgiem ma dwa punkty wspólne, nazywa się sieczną.  $OA < r$ Odległość siecznej k od środka O okręgu jest mniejsza od promienia r.	Definicja Prosta jest zewnętrzną dla okręgu, gdy nie ma z nim punktów wspólnych.  $OA > r$ Odległość środka O okręgu od prostej zewnętrznej k jest większa od promienia r.

Aby skonstruować styczną do okręgu, niezbędna jest znajomość konstrukcji prostej prostopadłej do podanej prostej.

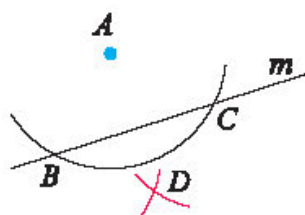
Konstrukcja prostej prostopadłej do prostej m przechodzącej przez punkt A

- 1° Z punktu A kreślimy okrąg o promieniu większym niż odległość punktu A od prostej m .



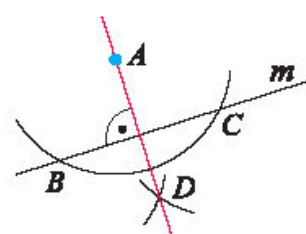
Otrzymujemy punkty B i C .

- 2° Z końców odcinka BC kreślimy okręgi o jednakowym promieniu r , gdzie $r > \frac{1}{2}|BC|$.



Otrzymujemy punkt D .

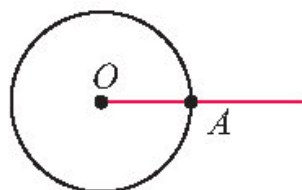
- 3° Przez punkty D i A prowadzimy prostą.



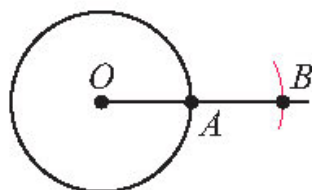
Otrzymujemy prostą prostopadłą do prostej m .

Konstrukcja stycznej do okręgu w punkcie A należącym do niego

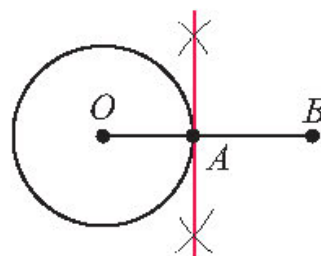
1° Prowadzimy półprostą OA .



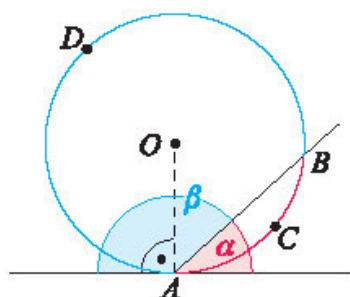
2° Zaznaczamy punkt B taki, że $|OB| = 2 \cdot |OA|$.



3° Kreślimy symetralną odcinka OB , która jest styczna do okręgu w punkcie A .



Kąt między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności nazywamy **kątem dopisanym do okręgu**.

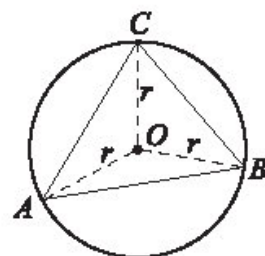


Częścią wspólną kąta dopisanego i okręgu jest łuk $\widehat{AB}$.
Mówimy wtedy, że kąt dopisany jest oparty na łuku $\widehat{AB}$.
 α – miara kąta dopisanego opartego na łuku ACB ,
 β – miara kąta dopisanego opartego na łuku ADB .



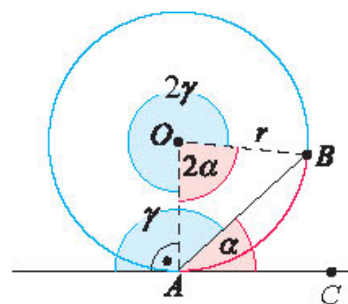
Ćwiczenie 16. Przerysuj do zeszytu rysunek i zaznacz na nim:

- kąt ostry dopisany w punkcie A oparty na łuku AC ,
- kąt rozwarty dopisany w punkcie B oparty na łuku BC .



Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą okręgu

Kąt między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy połowie kąta środkowego opartego na łuku, którego końcami są końce tej cięciwy.



Z (założenie):

$$|\sphericalangle AOB| = 2\alpha, \quad |\sphericalangle CAO| = 90^\circ,$$

C – punkt leżący na stycznej.

T (teza):

$$|\sphericalangle CAB| = \frac{1}{2} |\sphericalangle AOB| = \alpha.$$

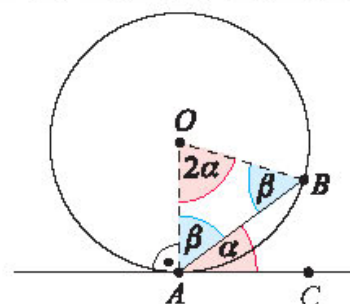
Dowód:

Trójkąt ABO jest równoramienny, więc $|\sphericalangle ABO| = \beta$.

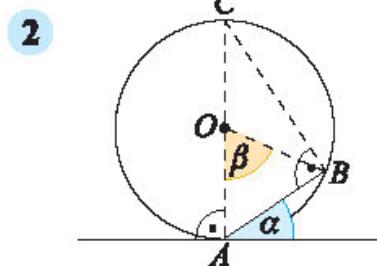
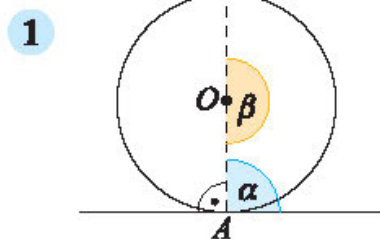
$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \text{ skąd } \beta = 90^\circ - \alpha.$$

$$|\sphericalangle CAO| = 90^\circ, \text{ więc } |\sphericalangle CAB| = 90^\circ - \beta.$$

$$90^\circ - \beta = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha. \quad \text{ckd.}$$



Ćwiczenie 17. Uwzględnij sytuacje przedstawione na rysunkach **1** oraz **2** i udowodnij twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą okręgu, to znaczy, że $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

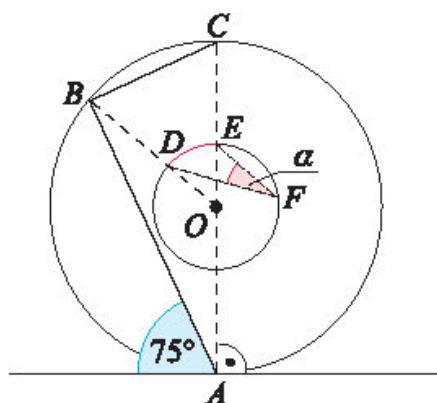


Przykład 4. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miarę kąta α .

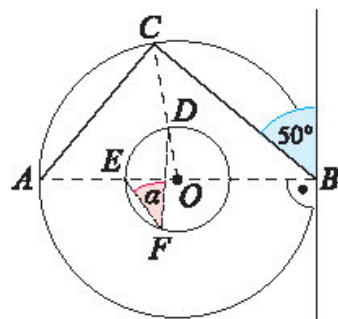
Rozwiązanie

Zauważamy, że:

- kąt o mierze 75° jest kątem dopisanym, więc $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$,
- $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle BOC| = 180^\circ$, więc $|\sphericalangle BOC| = 30^\circ$,
 $|\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle DOE|$, więc $|\sphericalangle DOE| = 30^\circ$,
- na łuku DE (kolor czerwony) oparty jest kąt środkowy DOE i kąt wpisany DFE ,
 zatem $\alpha = |\sphericalangle DFE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DOE|$, czyli $\alpha = 15^\circ$.

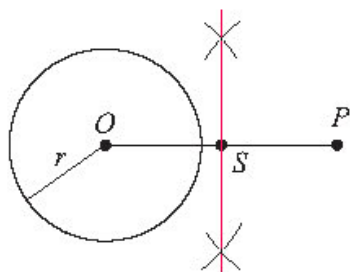


Ćwiczenie 18. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miarę kąta α .



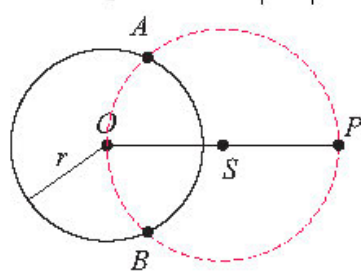
Konstrukcja stycznej do okręgu przechodzącej przez punkt leżący poza okręgiem

1° Prowadzimy symetralną odcinka OP .



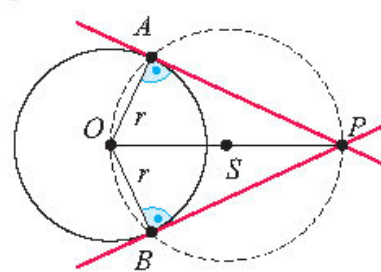
Otrzymujemy punkt S .

2° Prowadzimy okrąg o środku S i promieniu $|OS|$.



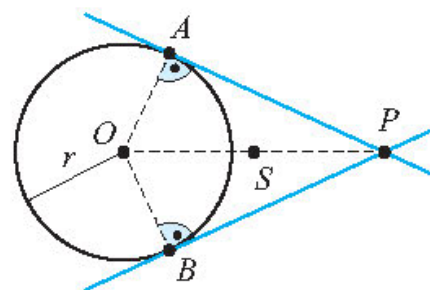
Otrzymujemy punkty A i B .

3° Prowadzimy proste AP i BP .



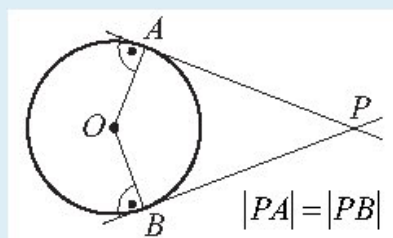
Otrzymujemy styczne AP i BP .

Ćwiczenie 19. Na rysunku proste AP i BP są styczne do okręgu o środku w punkcie O i promieniu r . Uzasadnij, że trójkąty OAP i OBP są przystające.



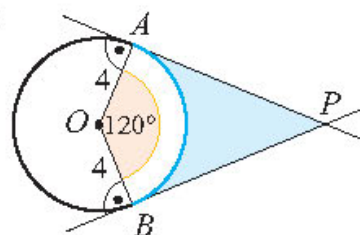
Twierdzenie o odcinkach stycznych

Odcinki dwóch stycznych poprowadzone do okręgu z punktu zewnętrznego wyznaczone przez ten punkt i punkty styczności mają równe długości.



Przykład 5. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz:

- długości odcinków stycznych AP i BP ,
- odległość środka O okręgu od punktu P ,
- pole figury wyróżnionej kolorem niebieskim.



Rozwiązanie

Zauważamy, że $r = |OA| = |OB| = 4$.

- Odcinek OP zawiera się w dwusiecznej kąta środkowego AOB , więc $|\sphericalangle AOP| = |\sphericalangle BOP| = 60^\circ$.

W trójkącie prostokątnym OAP :

$$\frac{|AP|}{r} = \operatorname{tg} 60^\circ, \text{ więc } |AP| = 4\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

- $\frac{r}{|OP|} = \cos 60^\circ$, więc $|OP| = 8$.

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

- Pole figury wyróżnionej kolorem niebieskim jest równe różnicy pola P_{cz} czworokąta $AOBP$ i wycinka P_w koła, czyli $P = P_{cz} - P_w$

$$P_{cz} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot |AP| = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3},$$

$$P_{\triangle OAP} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot |AP|$$

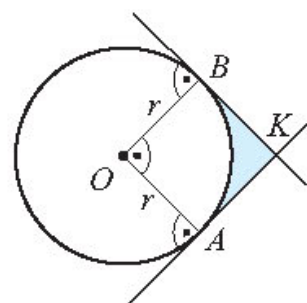
$$P_w = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

$$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$\text{Zatem } P = 16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi = 16\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Odp.: a) $4\sqrt{3}$, b) 8, c) $16\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

Ćwiczenie 20. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i wyraż pole P figury wyróżnione kolorem niebieskim w zależności od promienia r okręgu o środku O .



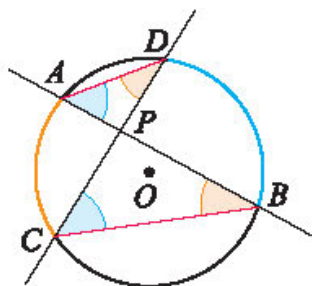
Twierdzenie o odcinkach siecznych okręgu

Jeżeli jedna sieczna przecina okrąg w punktach A i B , a druga sieczna przecina ten okrąg w punktach C i D oraz sieczne AB i CD przecinają się w punkcie P , to iloczyn odległości punktu P od punktów A i B jest równy iloczynowi odległości punktu P od punktów C i D .

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

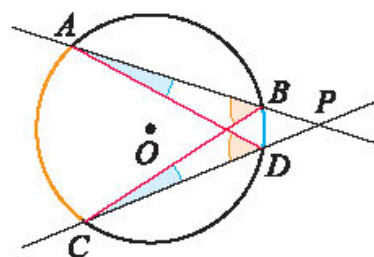
1° *Z (założenie):*

Sieczne AB i CD przecinają się w punkcie P należącym do koła o środku O .



2° *Z (założenie):*

Sieczne AB i CD przecinają się poza kołem o środku O .



T (teza): $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

1° *Dowód:*

$$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|,$$

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD|,$$

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle CPB|.$$

*Kąty wpisane oparte na łuku AC
(kolor pomarańczowy)*

*Kąty wpisane oparte na łuku BD
(kolor niebieski)*

*Para kątów
wierzchołkowych*

*Kąty przyległe do
równych kątów*

2° *Dowód:*

$$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ABC|,$$

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD|,$$

$$|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CBP|.$$

Na podstawie cechy (kkk) wynika, że trójkąty PAD i PCB są podobne.

Zatem $\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}$, skąd $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

ckd.

W technice przydatna jest znajomość zależności pomiędzy długościami odcinków wyznaczonych przez dwie sieczne okręgu.

Twierdzenie o odcinkach stycznej i siecznej

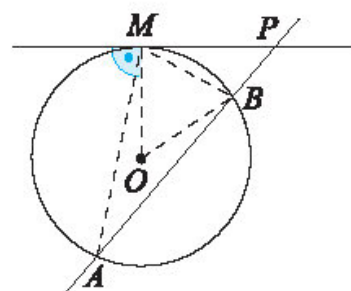
Jeżeli z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu o środku O poprowadzimy prostą, która jest styczna do tego okręgu w punkcie M , oraz sieczną, która przecina okrąg w punktach A i B , to iloczyn długości odcinków PA i PB jest równy kwadratowi długości odcinka PM .

$$|PM|^2 = |PA| \cdot |PB|$$

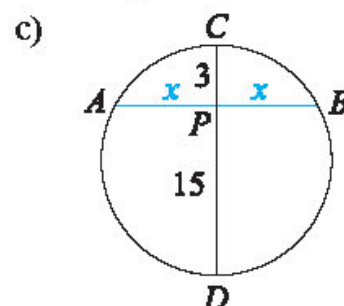
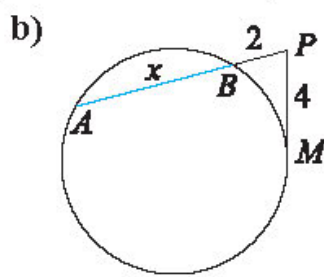
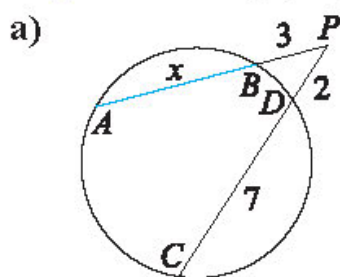
Ćwiczenie 21. Z punktu P należącego do siecznej AB okręgu o środku O poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie M jak na rysunku. Wykaż, że:

a) $|\sphericalangle PMB| = |\sphericalangle PAM|$, b) $\triangle PMB \sim \triangle PAM$,

c) $\frac{|PM|}{|PA|} = \frac{|PB|}{|PM|}$, czyli $|PM|^2 = |PA| \cdot |PB|$.



Przykład 6. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka x .



Rozwiązanie

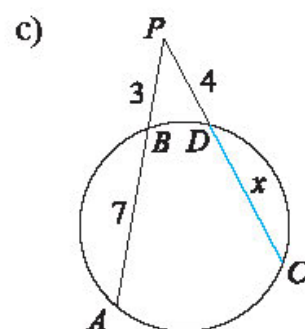
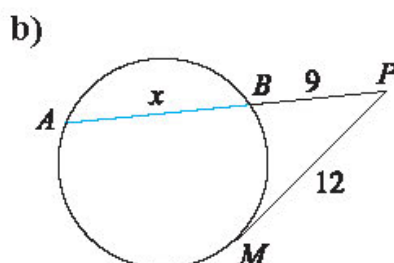
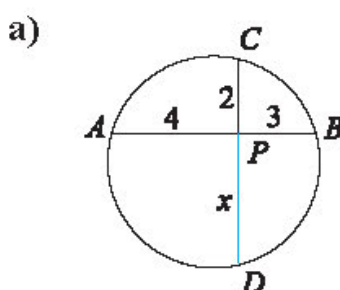
Z twierdzenia o odcinkach siecznych okręgu wynika:

a) $|PB| \cdot |PA| = |PD| \cdot |PC|$
 $3 \cdot (3 + x) = 2 \cdot (2 + 7)$
 $9 + 3x = 18$
 $x = 3.$

b) $|PB| \cdot |PA| = |PM|^2$
 $2 \cdot (2 + x) = 4^2$
 $4 + 2x = 16$
 $x = 6.$

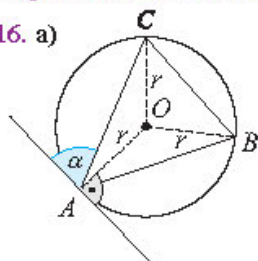
c) $|PB| \cdot |PA| = |PC| \cdot |PD|$
 $x \cdot x = 3 \cdot 15$
 $x^2 = 45$
 $x = 3\sqrt{5}.$

Ćwiczenie 22. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka x .

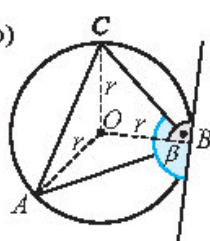


Odpowiedzi do ćwiczeń

16. a)



b)



17. Wskazówka. 2 ΔABC jest prostokątny, $|\angle CAB| = 90^\circ - \alpha$,
 $|\angle ABC| = 90^\circ$, więc $|\angle ACB| = \alpha$.

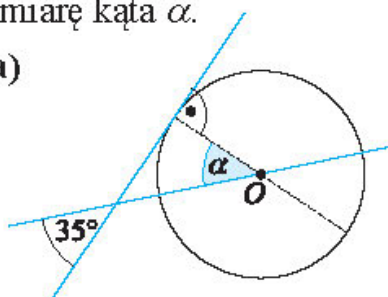
18. $\alpha = 40^\circ$. 20. $P = r^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

22. a) $x = 6$, b) $x = 27$, c) $x = 7$.

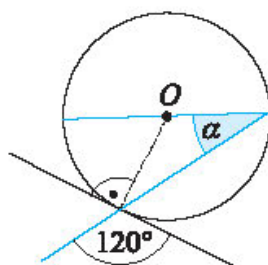
Zadania utrwalające

5.24. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i oblicz miarę kąta α .

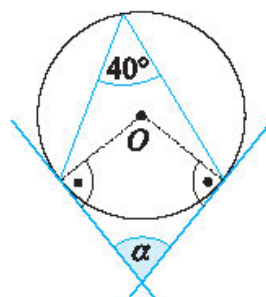
a)



b)

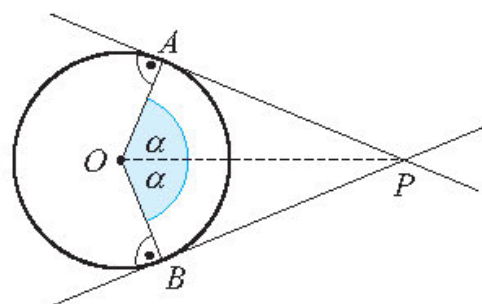


c)



5.25. Na rysunku punkt O jest środkiem okręgu o promieniu r , a proste AP i BP są do niego styczne. Oblicz długość odcinka:

- a) AP , gdy $r = 4$ i $|OP| = 10$,
 b) OP , gdy $2\alpha = 60^\circ$ i $r = 3\sqrt{3}$,
 c) AB , gdy $2\alpha = 120^\circ$ i $|OP| = 12$.



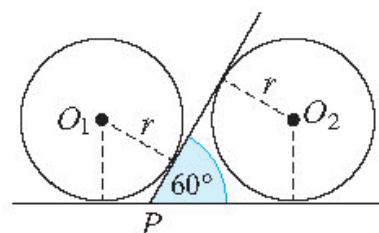
5.26. Przez końce cięciwy dzielącej okrąg w stosunku 1:2 poprowadzono styczne. Oblicz miarę kąta ostrego zawartego między jedną z tych stycznych a cięciwą.

5.27. Okrąg podzielono na trzy części i przez punkty podziału poprowadzono styczne do tego okręgu, które przecinają się w punktach A , B i C . Oblicz miary kątów trójkąta ABC , gdy okrąg ten podzielono na części w stosunku:

- a) 3 : 4 : 5, b) 5 : 6 : 7, c) 2 : 5 : 5.

5.28. W kąty przyległe o wierzchołku P , z których jeden ma miarę 60° , wpisano okręgi o środkach O_1 i O_2 , każdy o promieniu r . Oblicz odległość punktu P od środków tych okręgów, gdy:

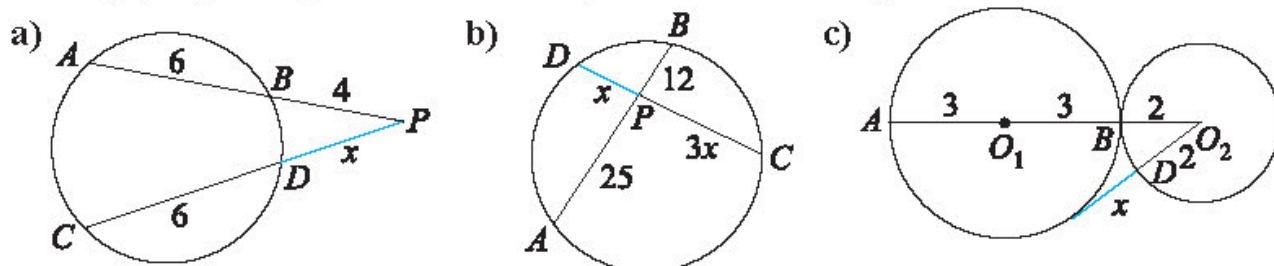
- a) $r = 1$, b) $r = 2$, c) $r = 10$, d) $r = 200$.



5.29. W kąt α wpisano okrąg o środku O i promieniu 1, który jest styczny do jego ramion. Oblicz długości odcinków stycznych, gdy:

- a) $\alpha = 60^\circ$, b) $\alpha = 90^\circ$, c) $\alpha = 120^\circ$, d) $\alpha = 2\beta$.

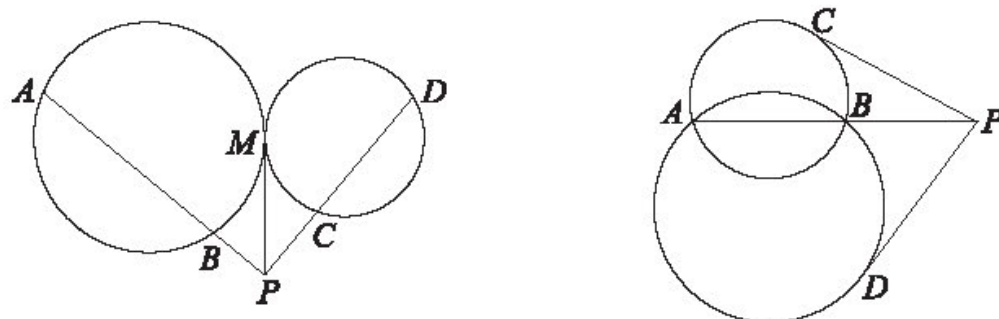
5.30. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka x .



5.31. Uwzględnij oznaczenia na rysunku i wykaż, że:

D

- a) $|PB| \cdot |PA| = |PC| \cdot |PD|$, b) $|PC| = |PD|$.



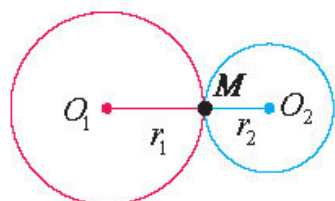
Okręgi styczne i ich własności

Definicja

Dwa okręgi nazywamy stycznymi, gdy mają jeden punkt wspólny.

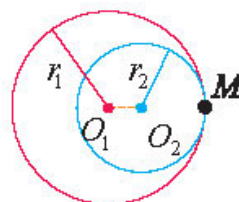
Okręgi mogą być styczne:

• zewnątrz,



$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

• wewnątrz.



$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$$

i $r_1 \neq r_2$

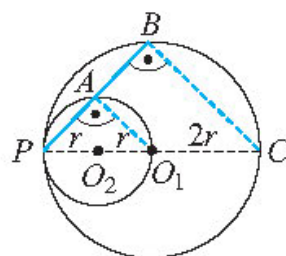
Ćwiczenie 23. Określ, czy styczne są okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach odpowiednio równych r_1 i r_2 , gdy:

- a) $|O_1O_2| = 5$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, b) $|O_1O_2| = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 5$,
c) $|O_1O_2| = 10$, $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, d) $|O_1O_2| = \sqrt{2}$, $r_1 = 2\sqrt{2}$, $r_2 = \sqrt{2}$.

Przykład 7. Okręgi o promieniach r i $2r$ są styczne wewnętrznie w punkcie P . Z punktu P prowadzimy dowolną cięciwę okręgu o promieniu $2r$. Uzasadnij, że okrąg o promieniu r dzieli tę cięciwę na połowy.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, gdzie odcinek PB jest dowolną cięciwą okręgu o promieniu $2r$. Zauważamy, że kąty PAO_1 i PBC są proste, jako kąty wpisane oparte na średnicach okręgów.



Trójkąty PAO_1 i PBC są podobne (kkk), więc $\frac{|PO_1|}{|PC|} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2}$.

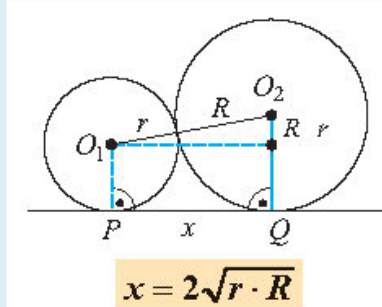
Zatem $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$, więc $|PB| = 2 \cdot |PA|$. **c.n.u.**

Ćwiczenie 24. Okręgi o promieniach r i $4r$ są styczne wewnętrznie w punkcie P . Z punktu P prowadzimy dowolną cięciwę okręgu o promieniu $4r$. Uzasadnij, że okrąg o promieniu r dzieli ją w stosunku 1 : 3.

Twierdzenie

Jeżeli okręgi o promieniach r i R , gdzie $R > r$, są styczne zewnętrznie i są styczne do prostej w punktach P i Q , to

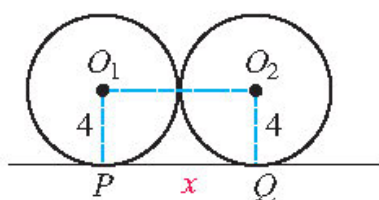
$$|PQ|^2 = 2r \cdot 2R, \text{ czyli } |PQ| = 2\sqrt{r \cdot R}.$$



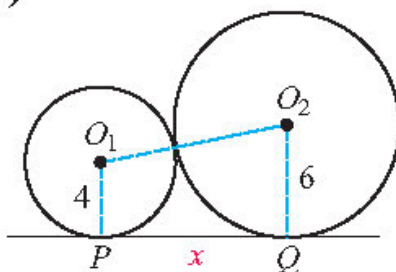
Ćwiczenie 25. Uzasadnij, że jeśli do okręgów stycznych zewnętrznie poprowadzimy wspólną styczną do obu okręgów, to kwadrat odległości punktów styczności jest równy iloczynowi średnic tych okręgów.

Ćwiczenie 26. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka x .

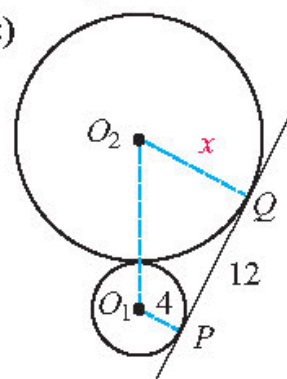
a)



b)



c)



Przykład 8. Dwa okręgi styczne zewnętrznie są styczne do ramion kąta o mierze 60° . Znajdź zależność między promieniami tych okręgów.

Rozwiązanie

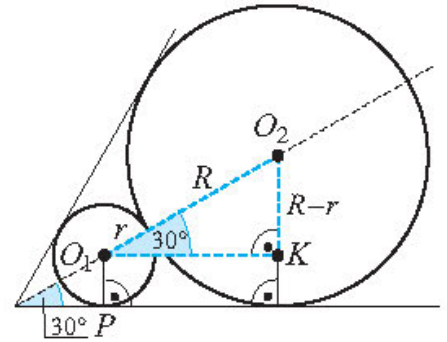
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Zauważamy, że środki O_1 i O_2 okręgów leżą na dwusiecznej kąta o mierze 60° .

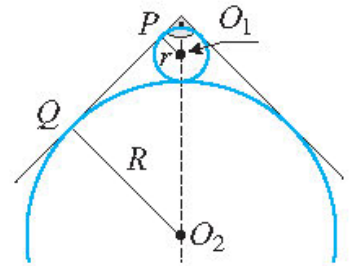
W trójkącie prostokątnym O_1KO_2 :

$$\frac{R-r}{R+r} = \sin 30^\circ, \text{ czyli } \frac{R-r}{R+r} = \frac{1}{2}, \text{ skąd}$$

$$2R - 2r = R + r, \text{ więc } R = 3r.$$



Ćwiczenie 27. Dwa okręgi zewnętrznie styczne są styczne do ramion kąta prostego. Określ zależność między promieniami tych okręgów.



Odpowiedzi do ćwiczeń

23. a) Nie, b) tak, c) tak, d) tak. 25. Wskazówka. Zastosuj twierdzenie Pitagorasa.

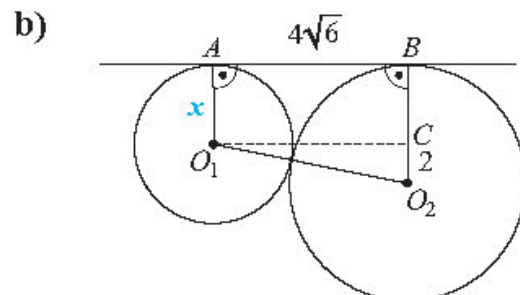
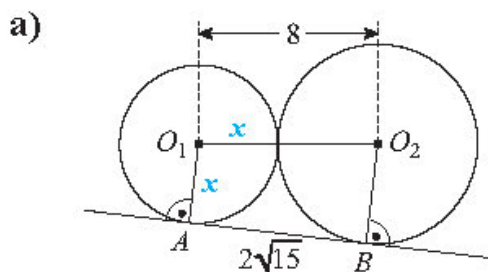
26. a) $x = 8$, b) $x = 4\sqrt{6}$, c) $x = 9$. 27. $R = (3 + 2\sqrt{2}) \cdot r$. Wskazówka. $\frac{R-r}{R+r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadania utrwalające

5.32. Określ, czy styczne są okręgi $o(O_1, r_1)$ i $o(O_2, r_2)$, gdy:

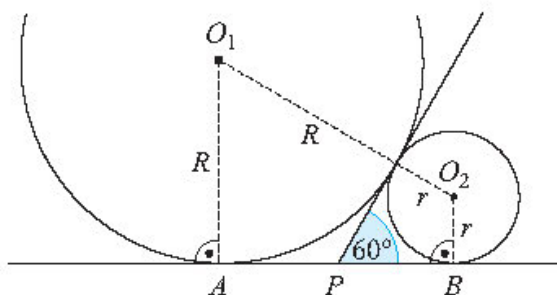
- a) $|O_1O_2| = 7$, $r_1 = 3$ i $r_2 = 6$, b) $|O_1O_2| = 0,72$, $r_1 = 0,14$ i $r_2 = 0,36$,
 c) $|O_1O_2| = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, $r_1 = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ i $r_2 = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$,
 d) $|O_1O_2| = \sqrt{17}$, $r_1 = \sqrt{8}$ i $r_2 = \sqrt{10}$.

5.33. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka x .

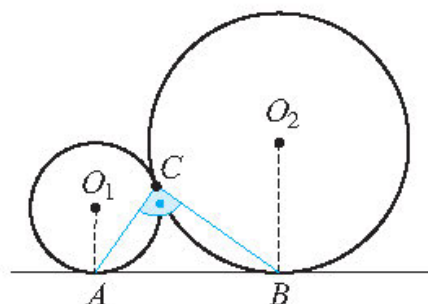


5.34. Odległość środków dwóch okręgów stycznych wewnętrznie jest równa 6, a okrąg o mniejszym promieniu dzieli odcinek łączący środki obu okręgów na połowy. Oblicz promienie tych okręgów.

5.35. W kąty przyległe, z których jeden ma miarę 60° , wpisano okręgi w sposób pokazany na rysunku. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i wykaż, że $R = 3r$.



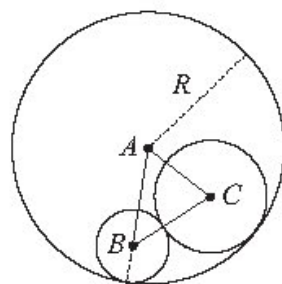
5.36. Do okręgów stycznych zewnętrznie w punkcie C poprowadzono wspólną styczną AB . Uzasadnij, że $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$.



5.37. Trzy okręgi o środkach A , B i C są styczne zewnętrznie. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest prostokątny, gdy promienie tych okręgów są równe:

- a) 1, 2, 3, b) 2, 3, 10, c) 3, 5, 12.

5.38. Okręgi o środkach B i C są styczne zewnętrznie, a każdy z nich jest styczny wewnętrznie do okręgu o środku A i promieniu R . Uzasadnij, że obwód trójkąta ABC jest równy $2R$.

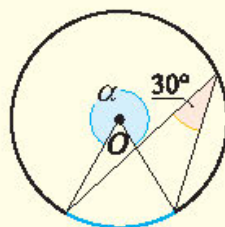


Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku punkt O jest środkiem okręgu. Miara kąta α jest równa:

- A. 270° , B. 300° ,
C. 315° , D. 330° .

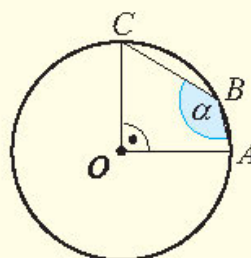


2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku punkt O jest środkiem okręgu.

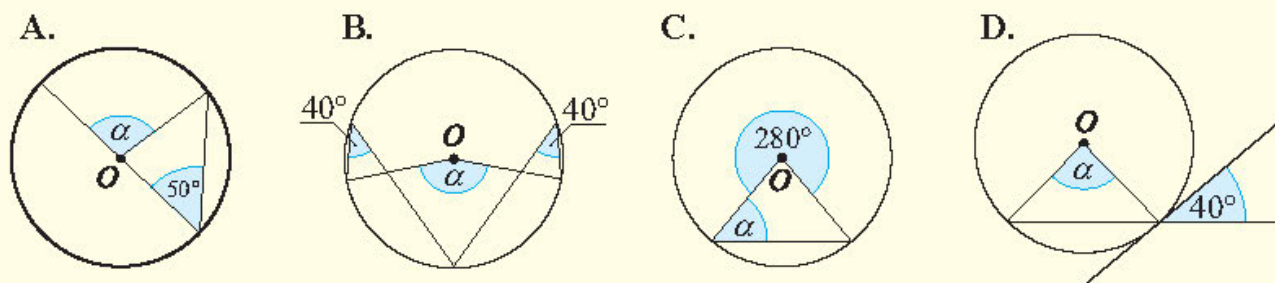
Miara kąta α jest równa:

- A. 90° , B. 120° ,
C. 135° , D. 150° .



3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

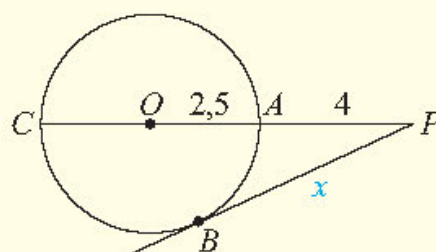
Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt α , którego miara jest równa 80° , przedstawiony jest na rysunku:

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku punkt O jest środkiem okręgu.

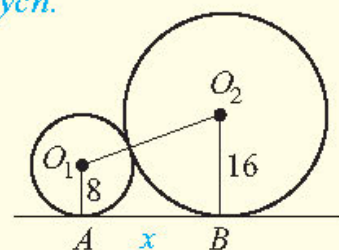
Długość odcinka x jest równa:

- A. $\sqrt{48,5}$, B. $\sqrt{20}$,
C. $\sqrt{36}$, D. $\sqrt{10}$.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Punkty O_1 i O_2 są środkami okręgów stycznych zewnętrznie i stycznych do prostej AB . Odcinek x ma długość równą:

- A. $8\sqrt{5}$, B. $16\sqrt{2}$,
C. $24\sqrt{2}$, D. 128.



6. Prosta k jest styczna do okręgu w punkcie A . Prosta l jest prostopadła do prostej k i przecina ją w punkcie L oraz przecina okrąg w punktach M i N . Oblicz promień tego okręgu, wiedząc, że $|AL| = 3$ i $|MN| = 8$.
7. Okręgi o środkach O_1 i O_2 oraz promieniach r są styczne zewnętrznie w punkcie O , który jest środkiem okręgu o promieniu $2r$. Uzasadnij, że wspólna styczna do okręgów o promieniach r wyznacza w okręgu o promieniu $2r$ cięciwę mającą długość $4r$ albo $2\sqrt{3}r$.
8. Słupy w kształcie walca, których przekrój jest kołem o średnicy 40 cm, są przewożone po 6 sztuk na platformie kolejowej. W celu ich zabezpieczenia na czas transportu spina się je stalowymi pasami. Czy można zabezpieczyć przewożone słupy pasami, których długość nie przekracza 3,5 metra?

6. Okręgi na płaszczyźnie kartezjańskiej

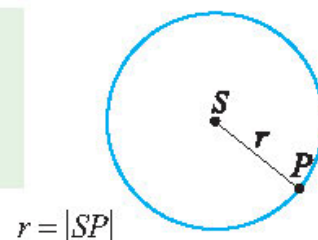
Równanie okręgu

Przypomnijmy

Definicja

Okręgiem o środku S i promieniu r ($r > 0$) nazywamy zbiór punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r .

$o(S, r)$ – okrąg o środku S i promieniu r

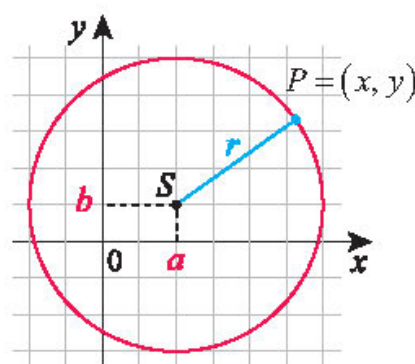


- Przykład 1.** a) Na płaszczyźnie kartezjańskiej zaznacz taki zbiór punktów P , których odległość od punktu S jest równa r .
b) Napisz wzór określający zależność między współrzędnymi punktu P i jego odległością od punktu S .

Rozwiązanie

- a) Zauważamy, że zbiór szukanych punktów P jest okręgiem o środku w punkcie S i promieniu r , gdzie $P = (x, y)$, $S = (a, b)$ i $|SP| = r$.

- b) $|SP| = r$ i $|SP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, więc
 $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, skąd
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.



Odp.: b) Zbiór wszystkich punktów P jest okręgiem o równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Ćwiczenie 1. Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu r , gdy:

- a) $S = (-1, 3)$ i $r = 2$, b) $S = (3, 0)$ i $r = 3$,
c) $S = (-2, -2)$ i $r = \sqrt{2}$, d) $S = (0, 0)$ i $r = 1$.

Uwaga

Równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ jest równaniem okręgu o środku w punkcie S , gdzie $S = (a, b)$, i promieniu r ($r > 0$).

- $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ – postać kanoniczna równania okręgu.

Jeżeli w równaniu okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ wykonamy wskazane działania, to otrzymamy równanie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \underbrace{a^2 + b^2 - r^2}_c = 0$ $a^2 + b^2 - r^2 = c$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ gdzie } c = a^2 + b^2 - r^2,$$

skąd $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, gdy $a^2 + b^2 - c > 0$.

Uwaga

Równanie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2$ i $a^2 + b^2 - c > 0$, to postać ogólna równania okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r .

Przykład 2. Odczytaj współrzędne środka S i oblicz promień r okręgu o równaniu:

a) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$, b) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$.

Rozwiązanie

a) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$

$$(x-1)^2 + (y-(-3))^2 = 5^2 \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$a=1, \quad b=-3, \quad r=5.$$

b) I sposób

Obliczamy współrzędne a i b środka S okręgu.

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$$

$$-2a = -4, \quad -2b = 8,$$

$$a = 2, \quad b = -4.$$

Obliczamy promień r korzystając z wzoru $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

$$r = \sqrt{2^2 + (-4)^2 - (-16)} = 6.$$

II sposób

Korzystamy z wzorów skróconego mnożenia.

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 8y - 16 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 8y + 16) - 16 - 16 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

$$(x-2)^2 + (y-(-4))^2 = 6^2.$$

Odp.: a) $S = (1, -3)$, $r = 5$, b) $S = (2, -4)$, $r = 6$.

Ćwiczenie 2. Podaj współrzędne środka i promień okręgu o równaniu:

a) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 8$, b) $x^2 + (y+7)^2 = 81$, c) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$,

d) $x^2 + y^2 - 10y - 16 = 0$, e) $x^2 + 16x + y^2 + 36 = 0$, f) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 12 = 0$.

Ćwiczenie 3. Przedstaw w postaci kanonicznej równanie okręgu:

a) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 12 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 10y - 16 = 0$, c) $x^2 + 16x + y^2 + 36 = 0$.

Przykład 3. Okrąg o środku w punkcie S i promieniu r opisany jest równaniem $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$. Oblicz odległość d punktu K od tego okręgu, gdy $K = (6, 6)$.

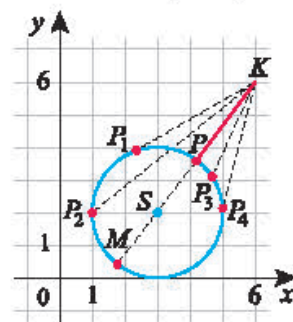
Rozwiązanie

W matematyce przyjmuje się, że odległością punktu od okręgu jest długość najkrótszego odcinka, którego jednym końcem jest ten punkt, a drugim punkt należący do okręgu.

Zatem odległość d punktu K od okręgu można opisać wzorem:

$$d = |PK| = |SK| - r, \text{ gdzie } S = (3, 2) \text{ i } r = 2, \text{ skąd}$$

$$d = \sqrt{(6-3)^2 + (6-2)^2} - 2 = 3.$$



Ćwiczenie 4. Oblicz długość najdłuższego odcinka, którego jednym końcem jest punkt $K = (6, 6)$, a drugim punkt leżący na okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Wzajemne położenie dwóch okręgów $o(S_1, r_1)$ i $o(S_2, r_2)$ zależy od odległości ich środków $|S_1S_2|$ oraz ich promieni r_1 i r_2 .

Okręgi mogą być względem siebie:				
	rozłączne zewnętrznie	rozłączne wewnętrznie		
		niewspółśrodkowe	współśrodkowe	
rozłączne	$ S_1S_2 > r_1 + r_2$	$0 < S_1S_2 < r_1 - r_2 $	$ S_1S_2 = 0 \text{ i } r_1 \neq r_2$	
nierozłączne	przecinające się	styczne		współśrodkowe pokrywające się
		zewnętrznie	wewnętrznie	
	$ r_1 - r_2 < S_1S_2 < r_1 + r_2$	$ S_1S_2 = r_1 + r_2$	$ S_1S_2 = r_1 - r_2 $ i $r_1 \neq r_2$	$ S_1S_2 = 0 \text{ i } r_1 = r_2$

Ćwiczenie 5. Określ wzajemne położenie okręgów o środkach S_1 i S_2 oraz promieniach odpowiednio równych r_1 i r_2 , gdy:

a) $S_1 = (3, 2)$, $S_2 = (6, 2)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, b) $S_1 = (0, 0)$, $S_2 = (3, 0)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 5$.

Ćwiczenie 6. Określ wzajemne położenie okręgów o równaniach:

a) $(x+3)^2 + y^2 = 25$, $(x+4)^2 + y^2 = 4$, b) $x^2 + (y-2)^2 = 49$, $x^2 + (y+8)^2 = 9$,

c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$.

Przykład 4. Dla jakich wartości parametru m okręgi o równaniach

$o_1: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$ i $o_2: x^2 + y^2 = m^2 - 6m + 9$ są styczne zewnętrznie?

Rozwiązanie

Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie, gdy $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, gdzie $S_1 = (3, -4)$,

$S_2 = (0, 0)$, $r_1 = \sqrt{16} = 4$, $r_2 = \sqrt{m^2 - 6m + 9} = |m - 3|$.

$|S_1S_2| = 5$, więc okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie, gdy

$$4 + |m - 3| = 5$$

$$|m - 3| = 1$$

$$m - 3 = 1 \text{ lub } m - 3 = -1$$

$$m = 4 \text{ lub } m = 2.$$

Odp.: Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie, gdy $m = 4$ lub $m = 2$.

Ćwiczenie 7. Dla jakich wartości parametru m okręgi

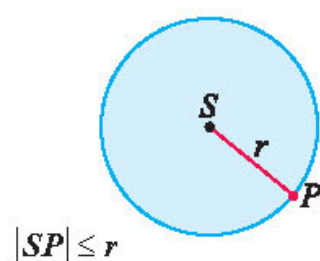
$o_1: x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ i $o_2: (x+3)^2 + y^2 = m^2 - 10m + 25$ są:

a) styczne zewnętrznie, b) rozłączne zewnętrznie.

Definicja

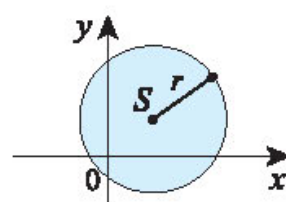
Kołem o środku S i promieniu r ($r > 0$) nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległości od punktu S są mniejsze lub równe r .

$k(S, r)$ – koło o środku S i promieniu r



Uwaga

Nierówność $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$ opisuje koło o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu r ($r > 0$).



Ćwiczenie 8. Oblicz odległość punktu A od środka koła określonego nierównością $x^2 + (y+2)^2 \leq 4$. Określ położenie punktu A względem tego koła, gdy:

- a) $A = (0, 0)$, b) $A = (-1, -1)$, c) $A = (2, 2)$.

Uwaga

Okrąg określony jest równaniem $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Punkt P , taki że $P = (x_P, y_P)$, leży:

- na okręgu, gdy $(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 = r^2$,
- we wnętrzu koła ograniczonego tym okręgiem, gdy $(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 < r^2$,
- na zewnątrz koła ograniczonego tym okręgiem, gdy $(x_P - a)^2 + (y_P - b)^2 > r^2$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$, b) $(x-3)^2 + y^2 = 9$, c) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 2$, d) $x^2 + y^2 = 1$.
 2. a) $S = (-2, 4)$, $r = 2\sqrt{2}$, b) $S = (0, -7)$, $r = 9$, c) $S = (-1, 3)$, $r = 1$, d) $S = (0, 5)$, $r = \sqrt{41}$,
 e) $S = (-8, 0)$, $r = 2\sqrt{7}$, f) $S = (-4, 1)$, $r = \sqrt{5}$. 3. a) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 5$, b) $x^2 + (y-5)^2 = 41$,
 c) $(x+8)^2 + y^2 = 28$. 4. 7. 5. Okręgi są: a) styczne zewnętrznie, b) styczne wewnętrznie.
 6. Okręgi są: a) rozłączne wewnętrznie, b) styczne zewnętrznie, c) przecinające się.
 7. a) $m = 2$, $m = 8$, b) $m \in (2; 8)$. 8. Punkt A leży: a) na okręgu, b) we wnętrzu koła, c) na zewnątrz koła.

Zadania utrwalające

6.1. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r , gdy:

- a) $S = (-2, 3)$, $r = 5$, b) $S = (0, -1)$, $r = \frac{4}{5}$ c) $S = (-7, 0)$, $r = \sqrt{2}$.

6.2. Podaj współrzędne środka S oraz promień r okręgu o równaniu:

- a) $x^2 + (y+1)^2 = 5$, b) $(x+2)^2 + y^2 = 9$, c) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 12$,
 d) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$, e) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$, f) $x^2 + y^2 - 8x - 10y = -28$.

6.3. Napisz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB , gdy:

- a) $A = (-2, 5)$, $B = (4, -1)$, b) $A = (-7, 8)$, $B = (-3, 2)$,
 c) $A = (0, -7)$, $B = (0, 15)$, d) $A = (5, 0)$, $B = (-8, 0)$.

6.4. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie S , do którego należy punkt P , gdy:

- a) $S = (-3, 3)$ i $P = (-3, 0)$, b) $S = (1, -3)$ i $P = (3, 5)$,
 c) $S = (-8, 2)$ i $P = (-3, 7)$, d) $S = (9, -4)$ i $P = (0, 0)$.

6.5. Oblicz odległość punktu P od okręgu o równaniu:

- a) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$, gdy $P = (7, 7)$, b) $x^2 + y^2 = 16$, gdy $P = (1, 2)$,
 c) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, gdy $P = (0, 0)$, d) $x^2 + (y-3)^2 = 9$, gdy $P = (0, 6)$.

6.6. Sprawdź, czy okrąg może być opisany równaniem:

- a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$,
 c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 12 = 0$, d) $x^2 + y^2 - 5x = 0$,
 e) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 25 = 0$, f) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$.

6.7. Oblicz, dla jakich wartości parametru m okrąg jest opisany równaniem:

- a) $x^2 + y^2 - 5 + m = 0$, b) $x^2 + y^2 - 9 + m^2 = 0$,
 c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m - 1 = 0$, d) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = |m+1|$,
 e) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = |m^2 - 4|$, f) $x^2 + y^2 - 2mx - 8my + 20m^2 - 25 = 0$.

6.8. Określ wzajemne położenie okręgów o równaniach:

- a) $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x-3)^2 + y^2 = 9$,
 b) $x^2 + (y-1)^2 = 4$, $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 49$,
 c) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$,
 d) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$, $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$,
 e) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$, $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 25 = 0$,
 f) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 28 = 0$,
 g) $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$, $x^2 + (y-3)^2 = 4$,
 h) $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$, $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 15 = 0$.

6.9. Oblicz, dla jakich wartości parametru m okręgi o równaniach:

- a) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 16$ i $x^2 + y^2 = m^2 - 6m + 9$ są styczne zewnętrznie,
 b) $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ i $(x+3)^2 + y^2 = m^2 - 10m + 25$ są rozłączne zewnętrznie,
 c) $(x-m)^2 + (y-2m)^2 = 1$ i $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ są rozłączne wewnętrznie.

6.10. Zilustruj w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówność:

- a) $x^2 + y^2 \leq 1$, b) $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$, c) $x^2 + (y+2)^2 \leq 9$.

Wzajemne położenie prostej i okręgu

Jeżeli znamy równania prostej i okręgu, to żeby określić ich wzajemne położenie, wystarczy obliczyć odległość środka tego okręgu od prostej i wyciągnąć wniosek.

Pokażemy to na przykładach

Przykład 5. Określ wzajemne położenie okręgu o równaniu $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$ i prostej opisanej równaniem: a) $x + y = 0$, b) $x - y + 6 = 0$, c) $y - 2 = 0$.

Rozwiązanie

Obliczamy odległość d środka S okręgu od prostej i porównujemy ją z promieniem r . Z równania okręgu odczytujemy współrzędne jego środka $S = (1, 5)$ i promień $r = 3$.

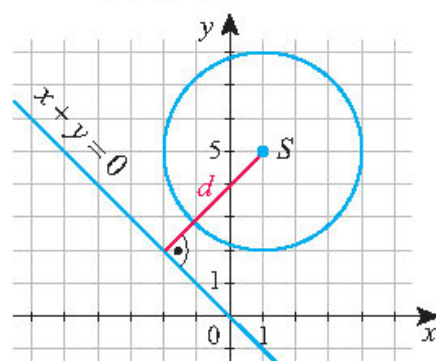
$$\text{a) } d = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2}$$

$$d = \frac{|Ax_s + By_s + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$3\sqrt{2} > 3.$$

$$d > r$$

Prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych.

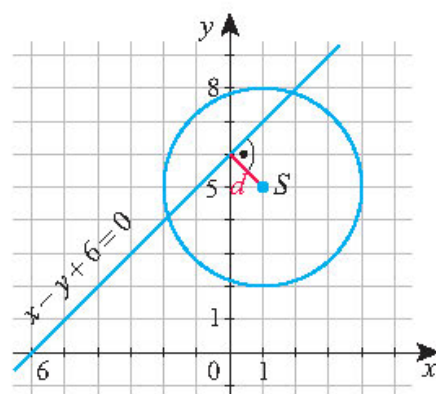


$$\text{b) } d = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} < 3.$$

$$d < r$$

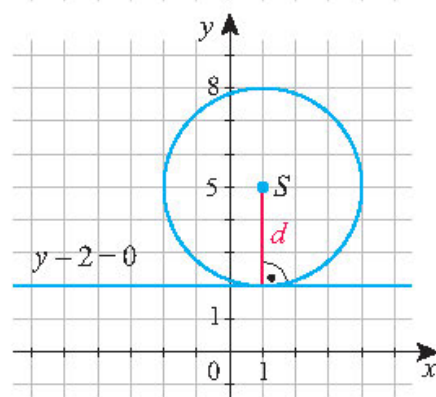
Prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne.



$$\text{c) } d = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 3.$$

$$d = r$$

Prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny.



Odp.: a) Prosta jest zewnętrzną do okręgu.

b) Prosta jest sieczną okręgu.

c) Prosta jest styczną do okręgu.

Ćwiczenie 9. Sporządź odpowiedni rysunek i podaj liczbę punktów wspólnych okręgu o równaniu $x^2 + (y-1)^2 = 25$ z prostą mającą równanie: a) $y = 2x$, b) $y = 6$, c) $x = 6$.

Uwaga

Jeżeli okrąg i prosta mają równania $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $Ax + By + C = 0$ oraz d jest odległością środka S okręgu od tej prostej, to prosta jest:

- zewnętrzna, gdy $d > r$, ● styczna, gdy $d = r$, ● sieczna, gdy $d < r$.

Przykład 6. Dla jakich wartości parametru m prosta k o równaniu $x + y + m = 0$ jest:

- a) styczną, b) sieczną, c) zewnętrzną
do okręgu o równaniu $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 50$?

Rozwiązanie

Z równania okręgu $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 50$ odczytujemy współrzędne środka S okręgu i obliczamy promień r :

$$S = (4, 3), \quad r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Obliczamy odległość d środka S okręgu od prostej k :

$$d = \frac{|4+3+m|}{\sqrt{2}} = \frac{|7+m|}{\sqrt{2}}. \quad d = \frac{|Ax_s + By_s + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- a) Prosta k jest styczną do okręgu, gdy $d = r$, czyli gdy $\frac{|7+m|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.

$$\frac{|7+m|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |7+m| = 10, \quad |a| = b, \text{ gdzie } b > 0, \text{ gdy } a = b \text{ lub } a = -b$$

$$m = -17 \text{ lub } m = 3.$$

- b) Prosta k jest sieczną okręgu, gdy $d < r$, czyli gdy $\frac{|7+m|}{\sqrt{2}} < 5\sqrt{2}$.

$$\frac{|7+m|}{\sqrt{2}} < 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |7+m| < 10, \quad |a| < b, \text{ gdzie } b > 0, \text{ gdy } -b < a < b$$

$$-17 < m < 3.$$

- c) Prosta k jest zewnętrzną do okręgu, gdy $d > r$, czyli gdy $\frac{|7+m|}{\sqrt{2}} > 5\sqrt{2}$.

$$\frac{|7+m|}{\sqrt{2}} > 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |7+m| > 10, \quad |a| > b, \text{ gdzie } b > 0, \text{ gdy } a < -b \text{ lub } a > b$$

$$m < -17 \text{ lub } m > 3.$$

Odp.: Prosta k jest: a) styczną do okręgu, gdy $m = -17$ lub $m = 3$,

b) sieczną okręgu, gdy $m \in (-17; 3)$,

c) zewnętrzną do okręgu, gdy $m \in (-\infty; -17) \cup (3; +\infty)$.

R

Ćwiczenie 10. Dla jakich wartości parametru m prosta l o równaniu $y = 2x + m$ jest:

a) styczną, b) sieczną, c) zewnętrzną

do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$?

Odpowiedzi do ćwiczeń

9. a) 2, b) 0, c) 1. 10. a) $m_1 = -10$, $m_2 = 0$, b) $m \in (-10; 0)$, c) $m \in (-\infty; -10) \cup (0; +\infty)$.

Zadania utrwalające

6.11. Sporządź odpowiedni rysunek i podaj liczbę punktów wspólnych prostej i okręgu o równaniach:

a) $y = x - 1$ i $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, b) $x = 3$ i $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$,

c) $y + 2 = 0$ i $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$, d) $x + y - 2\sqrt{2} = 0$ i $x^2 + y^2 = 4$.

6.12. Określ wzajemne położenie prostej i okręgu o równaniach:

a) $4x - 3y + 2 = 0$ i $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$,

b) $6x + 8y - 15 = 0$ i $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$,

c) $x - y - 1 = 0$ i $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$,

d) $x - 2y + 5 = 0$ i $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$,

e) $x = 35$ i $x^2 - 60x + y^2 - 36y + 1199 = 0$.

R

6.13. Określ, dla jakich wartości parametru m prosta k jest:

1 styczną,

2 sieczną,

3 zewnętrzną

do okręgu o , gdy:

a) $k: x - y + m = 0$ i $o: (x - 3)^2 + y^2 = 18$,

b) $k: x + y - m = 0$ i $o: x^2 + y^2 = 4$,

c) $k: x - 2y + m - 1 = 0$ i $o: (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$,

d) $k: x + y + 2m - 4 = 0$ i $o: x^2 + y^2 = 32$,

e) $k: x - y + 2 = 0$ i $o: x^2 + y^2 = m^2$,

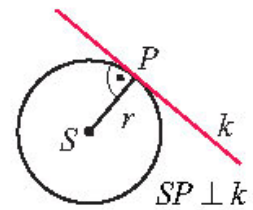
f) $k: 3x - 4y + 4 = 0$ i $o: (x + 3)^2 + y^2 = m^2 - 4m + 4$.

R

Wyznaczanie równań stycznych do okręgu

Przypomnijmy

Prosta styczna jest prostopadła do promienia okręgu, którego jednym z końców jest punkt styczności.



Aby napisać równanie stycznej do okręgu, wystarczy znać jego równanie (środek S i promień r) oraz np.:

- współrzędne punktu P , przez który ta styczna ma przechodzić, przy czym $|SP| \geq r$,
- równanie prostej, która ma spełniać określone warunki względem tej stycznej.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 7. Napisz równanie stycznej k do okręgu o równaniu $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, do której należy punkt $A = (-1, -5)$.

Rozwiązanie

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25, \text{ więc } S = (3, -2) \text{ i } r = 5.$$

Sprawdzamy położenie punktu A względem okręgu:

$$|SA| = \sqrt{(-1-3)^2 + (-5+2)^2} = 5.$$

$|SA| = r$, więc punkt A należy do okręgu.

$k \perp AS$, $S = (3, -2)$ i $A = (-1, -5)$, więc

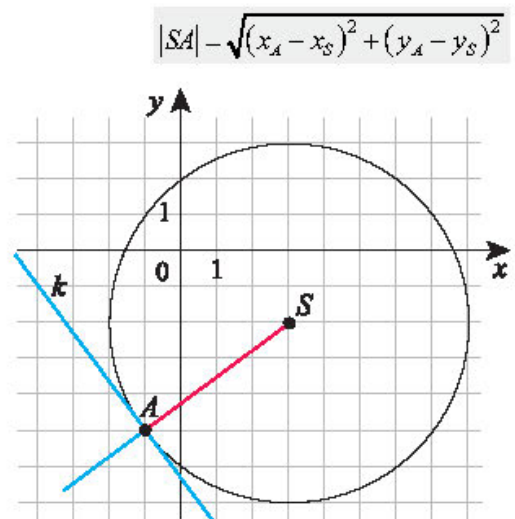
$$a_{AS} = \frac{y_S - y_A}{x_S - x_A} = \frac{-2 + 5}{3 + 1} = \frac{3}{4}.$$

$$a_{AS} \cdot a_k = -1, \text{ więc } a_k = -\frac{1}{a_{AS}} = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Zatem } k: y + 5 = -\frac{4}{3}(x + 1).$$

$$k: y - y_A - a_k(x - x_A)$$

$$\text{Odp.: } k: 4x + 3y + 19 = 0.$$



Ćwiczenie 11. Napisz równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$, do której należy punkt A , gdy:

a) $A = (-2, 1)$, b) $A = (0, 3)$, c) $A = (-3, 3 - \sqrt{3})$.

R

Przykład 8. Napisz równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 25$, do której należy punkt $M = (7, 1)$.

Rozwiązanie

$$x^2 + y^2 = 25, \text{ więc } S = (0, 0) \text{ i } r = 5.$$

Sprawdzamy położenie punktu M względem okręgu:

$$|SM| = \sqrt{(7-0)^2 + (1-0)^2} = 5\sqrt{2}.$$

$|SM| > r$, więc punkt M leży poza kołem o środku S i promieniu r .

Prosta o współczynniku kierunkowym a , do której należy punkt M , ma równanie

$$y - 1 = a(x - 7), \text{ czyli } ax - y + 1 - 7a = 0.$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy a stycznych.

$$\frac{|a \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 - 7a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5, \text{ czyli } \frac{|1 - 7a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 5,$$

$$|1 - 7a| = 5\sqrt{a^2 + 1}.$$

Obie strony równania są nieujemne, więc możemy każdą z nich podnieść do kwadratu:

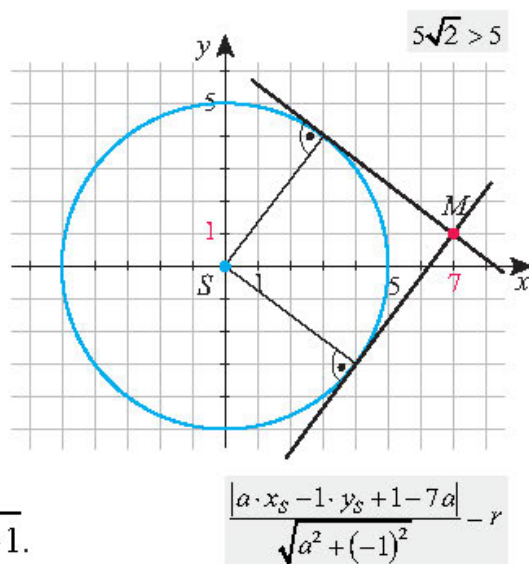
$$(|1 - 7a|)^2 = (5\sqrt{a^2 + 1})^2$$

$$(1 - 7a)^2 = 25(a^2 + 1)$$

$$12a^2 - 7a - 12 = 0, \text{ skąd } a_1 = -\frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{4}{3}.$$

Podstawiając do równania $ax - y + 1 - 7a = 0$ za a kolejno liczby $-\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{3}$, otrzymujemy równania stycznych.

Odp.: $3x + 4y - 25 = 0$ i $4x - 3y - 25 = 0$.



Jeżeli $a = b$, to $a^2 = b^2$.

$$|a|^2 = a^2$$

$$\Delta = 625, \sqrt{\Delta} = 25$$

R

Ćwiczenie 12. Napisz równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 18 = 0$, do której należy punkt $P = (0, 0)$.

Uwaga

Równanie stycznej do okręgu o środku S i promieniu r , do której należy punkt P , można napisać tylko wtedy, gdy $|SP| \geq r$, czyli gdy:

- punkt P należy do okręgu o środku S i promieniu r , wtedy $|SP| = r$,
- punkt P leży poza kołem o środku S i promieniu r , wtedy $|SP| > r$.

Przykład 9. Prosta k ma równanie $x - 2y = 0$. Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$, które są:

- a) równoległe do prostej k , b) prostopadłe do prostej k .

Rozwiązanie

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5, \text{ więc } S = (1, -3) \text{ i } r = \sqrt{5}.$$

a) $x - 2y + C = 0$

$$d = r, \text{ więc}$$

$$\frac{|1 - 2 \cdot (-3) + C|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}, \text{ skąd}$$

$$|7 + C| = 5, \text{ więc}$$

$$C_1 = -12, \quad C_2 = -2.$$

b) $2x + y + C = 0$

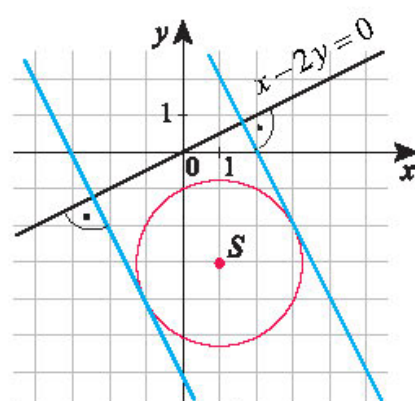
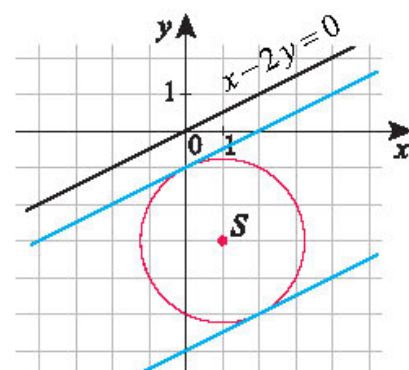
$$d = r, \text{ więc}$$

$$\frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + C|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}, \text{ skąd}$$

$$|-1 + C| = 5, \text{ więc}$$

$$C_1 = -4, \quad C_2 = 6.$$

Odp.: a) $x - 2y - 12 = 0$ i $x - 2y - 2 = 0$, b) $2x + y - 4 = 0$ i $2x + y + 6 = 0$.



Ćwiczenie 13. Prosta k ma równanie $2x + 4y - 5 = 0$. Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 20$, które są:

- a) równoległe do prostej k , b) prostopadłe do prostej k .

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $y - 1 = 0$, b) $x = 0$, c) $\sqrt{3}x + 3y - 9 + 6\sqrt{3} = 0$. 12. $x - y = 0$ i $7x - y = 0$.

13. a) $x + 2y - 10 = 0$ i $x + 2y + 10 = 0$, b) $2x - y - 5 = 0$ i $2x - y + 15 = 0$.

Zadania utrwalające

6.14. Sprawdź, czy punkt P należy do okręgu o równaniu:

a) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 3$, gdy $P = (4, -2)$,

b) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$, gdy $P = (-1, 1)$.

6.15. Sprawdź, czy przez punkt P można poprowadzić styczną do okręgu o równaniu:

a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 3$, gdy $P = (-2, 4)$,

b) $(x-7)^2 + (y+4)^2 = 52$, gdy $P = (1, 0)$,

c) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$, gdy $P = (2, 2)$.

6.16. Napisz (o ile to możliwe) równanie stycznej do okręgu, do której należy punkt P , gdy:

a) $x^2 + y^2 = 2$ i $P = (1, 1)$,

b) $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 16$ i $P = (-2, -4)$,

c) $x^2 + y^2 = 4$ i $P = (6, -2)$,

d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ i $P = (5, 0)$,

e) $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ i $P = (3, 1)$,

f) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 4$ i $P = (-7, 9)$,

g) $x^2 + y^2 = 4$ i $P = (0, 4)$,

h) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 5$ i $P = (-2, 2)$.

6.17. Do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$ należy punkt $A = (0, m)$. Oblicz współrzędną m i napisz równanie stycznej do danego okręgu w punkcie A .

6.18. Ciało porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. W pewnym momencie, gdy to ciało znajduje się w punkcie $M = (3, -1)$, przestaje działać siła dośrodkowa i ciało zaczyna poruszać się po linii prostej. Napisz równanie prostej, w której zawiera się tor tego ruchu.

6.19. Napisz równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych o promieniu:

a) 5,

b) r .

6.20. Napisz równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych, do którego należy punkt P , gdy:

a) $P = (0, 3)$,

b) $P = (-5, 0)$,

c) $P = (4, 8)$,

d) $P = (6, -3)$.

6.21. Napisz równania stycznych do okręgu σ , które są:

1 równoległe do prostej k ,

2 prostopadłe do prostej k , gdy:

a) σ : $x^2 + y^2 = 1$ i k : $2x - y + 17 = 0$,

b) σ : $(x+6)^2 + (y-1)^2 = 20$ i k : $2x + y - 19 = 0$,

c) σ : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 45$ i k : $x - 2y + 19 = 0$,

d) σ : $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 12$ i k : $x - \sqrt{2}y - 26 = 0$.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Środkiem okręgu opisanego równaniem $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ jest punkt o współrzędnych:

- A. $(-2, -3)$, B. $(-2, 3)$, C. $(2, -3)$, D. $(2, 3)$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba punktów wspólnych okręgu $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$ i prostej $x + 4 = 0$ jest równa:

- A. 0, B. 1, C. 2, D. 3.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Prosta o równaniu $y = x + 2$ ma dwa punkty wspólne z okręgiem opisanym równaniem:

- A. $x^2 + y^2 = 2$, B. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 10 = 0$,
C. $x^2 + y^2 + 2y = 0$, D. $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Okrąg o równaniu $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ jest styczny do prostej:

- A. $3x + 4y + 9 = 0$, B. $3x - 4y - 9 = 0$, C. $3x - 4y = 0$, D. $3x + 4y = 0$.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Okrąg styczny do osi y w punkcie $A = (0, 2)$ ma równanie:

- A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$, B. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$,
C. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$, D. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.

6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Styczną do okręgu o równaniu $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ i równoległą do prostej $y = -2x$ jest prosta o równaniu $2x + y + 5 = 0$.	P	F
Styczną do okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 52$ i prostopadłą do prostej $2x + 3y - 3 = 0$ jest prosta o równaniu $y = \frac{3}{2}x + 20$.	P	F

7. Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest drugiego stopnia

Układy dwóch równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego, nazywamy układami drugiego stopnia.

Przypomnijmy

Przykłady równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi:

$$x^2 + 2x - y = 2, \quad 2x + y^2 = 3, \quad (x-3)(y+1) = 0, \quad (x-3)^2 + (y+4) = 9, \quad xy = 8.$$

Przykłady równań pierwszego stopnia (równania liniowe):

$$x = -3, \quad y = -1, \quad y + 2x = 5.$$

Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest liniowe, a drugie stopnia drugiego

Układ równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest liniowe, a drugie stopnia drugiego, najczęściej **rozwiązujemy metodą podstawiania**. Z równania liniowego wyznaczamy jedną z niewiadomych i podstawiamy do równania drugiego stopnia, a następnie rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe z jedną niewiadomą.

Przykład 1. Rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = 7(x - y) \\ 2x - y = 5 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = 7(x - y) \\ 2x - y = 5 \end{cases} \\ & \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x^2 + 2x(2x - 5) - (2x - 5)^2 = 7[x - (2x - 5)] \end{cases} \\ & \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x^2 + 17x - 60 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Z równania $2x - y = 5$ wyznaczamy y i podstawiamy do równania $x^2 + 2xy - y^2 = 7(x - y)$.

Rozwiązujemy równanie

$$x^2 + 17x - 60 = 0, \quad \Delta = 529, \quad \sqrt{\Delta} = 23,$$

$$x_1 = -20, \quad x_2 = 3$$

$$y_1 = 2 \cdot x_1 - 5 = 2 \cdot (-20) - 5 = -45,$$

$$y_2 = 2 \cdot x_2 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1.$$

Odp.: a) Układ równań spełniają pary liczb $\begin{cases} x = -20 \\ y = -45 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$.

Mamy kilka możliwości sprowadzenia układu do równania kwadratowego.

I sposób (metoda podstawiania)

$$\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ 2x + x^2 - 4 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ 2x + x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x+1=0, \text{ więc } x_0 = -1,$$

$$y = -(-1)^2 + 4 = 3.$$

II sposób (metoda przeciwnych współczynników)

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} x^2 + y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Dodajemy równania} \\ \text{stronami.} \end{array}$$

$$x^2 + 2x = -1.$$

Rozwiązujemy równanie:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0, \text{ skąd } x_0 = -1.$$

$x_0 = -1$ podstawiamy do równania:

$$2x - y = -5$$

$$2(-1) - y = -5, \text{ skąd}$$

$$y = 3.$$

Odp.: b) Układ równań spełnia para liczb $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} xy = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}.$

Przykład 2. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$.

Rozwiązanie

$$1 \quad \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2y)^2 - 4y^2 = 0 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x = -2y \end{cases}$$

Z równania **2** wyznaczamy $x = -2y$ i podstawiamy do równania **1**.

Zauważamy, że równanie $(-2y)^2 - 4y^2 = 0$ jest spełnione, gdy $y \in \mathbf{R}$ ($0 = 0$), więc układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, którymi są pary liczb $\left(x, -\frac{1}{2}x\right)$.

Pary tych liczb są współrzędnymi punktów należących do prostej o równaniu $x + 2y = 0$.

Uwaga

Rozwiązaniem układu równań, z których jedno jest liniowe, a drugie stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi, jest każda para liczb spełniająca oba równania układu.

Układ ten może mieć:

- 0 rozwiązań,
- określoną (skończoną) liczbę rozwiązań – jedno lub dwa rozwiązania,
- nieskończoną liczbę rozwiązań.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż układ równań:

$$a) \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y = x \end{cases}, \quad b) \begin{cases} 9x^2 - y^2 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}, \quad c) \begin{cases} 4x^2 = 9y^2 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}.$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $(-1, 1)$, b) $\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$, c) $(3, 1), (-1, -3)$.

2. Nieskończenie wiele rozwiązań, którymi są pary liczb: a) (x, x) , b) $(x, -3x)$, c) $\left(x, -\frac{2}{3}x\right)$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

Zadania utrwalające

7.1. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x = y^2 - 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + (y - 2)^2 = 6 - 4y \\ y = x \end{cases}$

7.2. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

7.3. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y + x^2 - 2x + 5 = 0 \\ 2y + 2 = x \end{cases}$.

7.4. Uzasadnij, że nie ma rozwiązania układ równań:

D a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} (x + y + 3)(x + y - 3) = 0 \\ y = -x \end{cases}$.

7.5. Uzasadnij, że układ równań $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Interpretacja geometryczna układów równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi

Uwaga

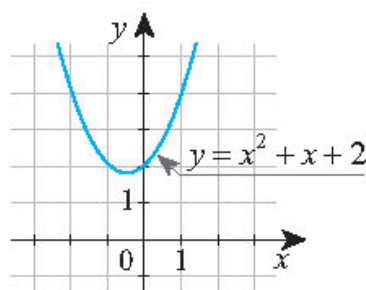
Obrazami graficznymi równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi są krzywe drugiego stopnia.

Przypomnijmy

Przykłady krzywych drugiego stopnia

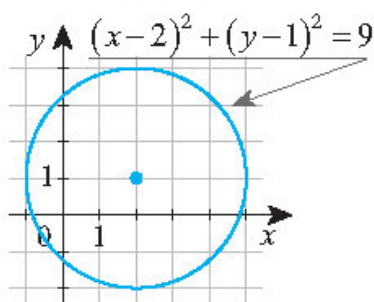
Parabola

Obrazem graficznym równania $x^2 + x - y + 2 = 0$ jest parabola.



Okrąg

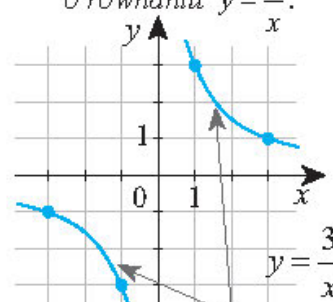
Obrazem graficznym równania $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 9 = 0$ jest okrąg o środku $S = (2, 1)$ i promieniu 3.



Hiperbola

Obrazem graficznym równania $xy = 3$ jest hiperbola

o równaniu $y = \frac{3}{x}$.



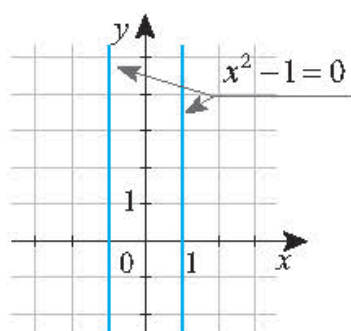
Szczególnym przypadkiem równania drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi jest równanie, które opisuje figurę złożoną z dwóch prostych. Taką figurę nazywamy również krzywą drugiego stopnia.

Przykład 3. W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj figurę, do której należą punkty o współrzędnych spełniających równanie:

a) $x^2 - 1 = 0$, b) $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0$, c) $(x+y)(x+y+2) = 0$.

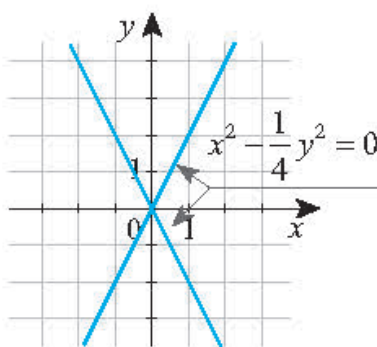
Rozwiązanie

a) $x^2 - 1 = 0$
 $(x-1)(x+1) = 0$
 $x = 1$ lub $x = -1$.



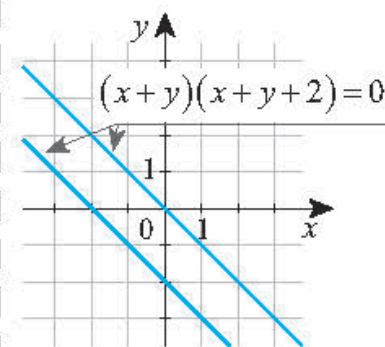
Obrazem graficznym równania $x^2 - 1 = 0$ jest figura złożona z prostych o równaniach $x = 1$ i $x = -1$.

b) $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0$
 $\left(x - \frac{1}{2}y\right)\left(x + \frac{1}{2}y\right) = 0$
 $y = 2x$ lub $y = -2x$.



Obrazem graficznym równania $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 0$ jest figura złożona z prostych o równaniach $y = 2x$ i $y = -2x$.

c) $(x+y)(x+y+2) = 0$
 $x+y = 0$ lub
 $x+y+2 = 0$.



Obrazem graficznym równania $(x+y)(x+y+2) = 0$ jest figura złożona z prostych o równaniach $y = -x$ i $y = -x - 2$.

Ćwiczenie 3. W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj figurę, do której należą punkty o współrzędnych spełniających równanie:

a) $y^2 = 4$, b) $4x^2 - y^2 = 0$, c) $(y-2)(2x-y+4) = 0$.

Podobnie jak sporządzaliśmy interpretację geometryczną układu równań liniowych, w wielu wypadkach można wykonać interpretację geometryczną układu równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Uwaga

- Sporządzić interpretację geometryczną układu równań, to znaczy narysować w jednym układzie współrzędnych figury, które opisują poszczególne równania tego układu.
- Rozwiązaniem układu równań są pary liczb (x, y) , które są współrzędnymi punktów przecięcia się figur opisanych równaniami układu.

Z interpretacji geometrycznej układu równań możemy często odczytać jego rozwiązanie. Odczytywanie rozwiązań układu równań z jego interpretacji geometrycznej nazywane jest rozwiązaniem graficznym układu.

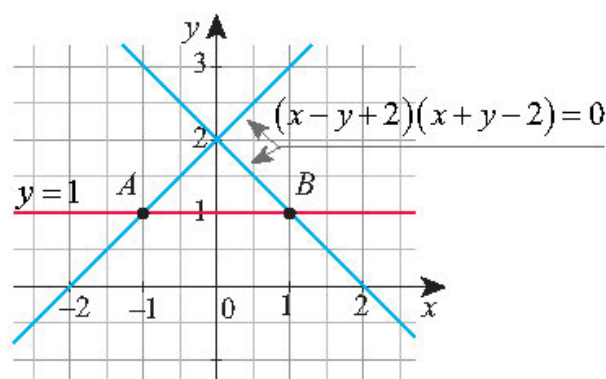
Przykład 4. Rozwiąż graficznie układ równań
$$\begin{cases} (x-y+2)(x+y-2)=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Obrazem graficznym pierwszego równania są dwie proste o równaniach $x-y+2=0$ i $x+y-2=0$ (kolor niebieski), a obrazem graficznym drugiego równania jest prosta $y=1$ (kolor czerwony).

Proste opisane równaniami układu przecinają się w punktach $A=(-1, 1)$ i $B=(1, 1)$.

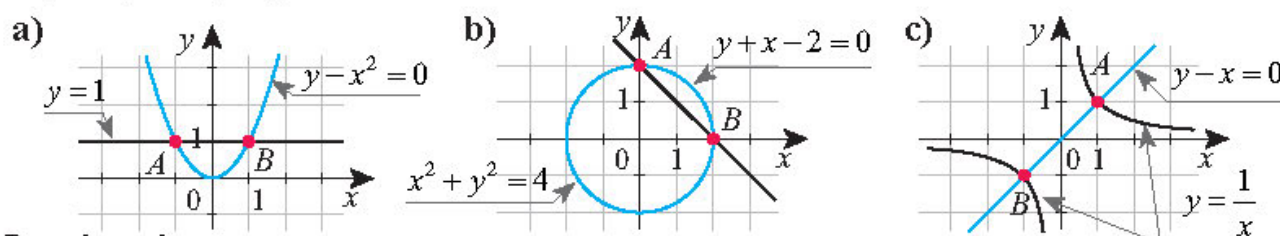
$$\text{Odp.: } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$



Ćwiczenie 4. Wykonaj interpretację geometryczną układu równań i podaj jego rozwiązanie.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y = 2x \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} (x+y)(x-y-3) = 0 \\ y = -x-1 \end{cases}.$$

Przykład 5. Figury przedstawione na rysunku przecinają się w punktach A i B . Odczytaj współrzędne tych punktów.

**Rozwiązanie**

$$\text{a) } A=(-1, 1), \quad B=(1, 1), \quad \text{b) } A=(0, 2), \quad B=(2, 0), \quad \text{c) } A=(1, 1), \quad B=(-1, -1).$$

Przykład 6. Oblicz współrzędne punktów wspólnych prostej i paraboli określonych równaniami $y + 2x = 3$ i $y = 2x^2 - 4x + 3$. Podaj interpretację geometryczną rozwiązania.

Rozwiązanie

Aby obliczyć współrzędne punktów przecięcia się prostej i paraboli określonych danymi równaniami, rozwiązujemy układ równań.

$$\textcircled{1} \begin{cases} y + 2x = 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y = 2x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - 2x = 2x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Z równania $\textcircled{1}$ wyznaczamy $y = 3 - 2x$ i podstawiamy do równania $\textcircled{2}$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 2x(x - 1) = 0 \end{cases}$$

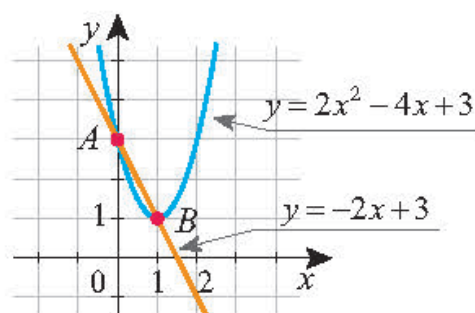
$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ 2x = 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = 3 - 2x \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Prosta i parabola przecinają się w punktach A i B .

Odp.: $A = (0, 3)$, $B = (1, 1)$.

Wyznaczamy punkty wspólne prostej i paraboli



Ćwiczenie 5. Sporządź interpretację geometryczną i podaj rozwiązanie układu równań:

$$\text{a)} \begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = 1 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 6. Oblicz współrzędne punktów przecięcia się prostej i paraboli (o ile istnieją) określonych równaniami w układzie równań:

$$\text{a)} \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} 4x + y + 3 = 0 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}, \quad \text{c)} \begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ y = -x^2 + 4x - 1 \end{cases}.$$

Przykład 7. Wyznacz punkty wspólne prostej i okręgu określonych równaniami

$$x + y - 5 = 0 \text{ i } (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4. \text{ Oblicz ich współrzędne.}$$

Rozwiązanie

Sprawdzamy, czy prosta i okrąg mają punkty wspólne, obliczając odległość d środka S okręgu od prostej $x + y - 5 = 0$:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0, \text{ więc } d < r.$$

$$d = \frac{|A \cdot x_s + B \cdot y_s + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad S = (1, 4), \quad r = 2$$

Punkt $S = (1, 4)$ należy do prostej o równaniu

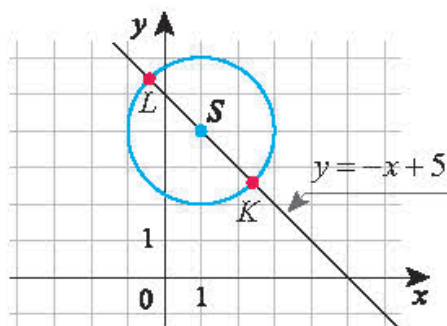
$$x + y - 5 = 0.$$

W jednym układzie współrzędnych rysujemy

okrąg i prostą o równaniach

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4 \text{ i } x + y - 5 = 0.$$

Na rysunku zaznaczamy punkty K i L , jako punkty wspólne prostej i okręgu.



Aby obliczyć współrzędne punktów K i L , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ (x-1)^2 + (5-x-4)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ (x-1)^2 + (1-x)^2 = 4 \end{cases}$$

Z równania prostej wyznaczamy zmienną y i podstawiamy do równania okręgu.

Obliczamy niewiadomą x z równania $(x-1)^2 + (1-x)^2 = 4$.

I sposób

$$x^2 - 2x + 1 + 1 - 2x + x^2 = 4$$

$$2x^2 - 4x - 2 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 8, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$y_1 = 5 - (1 - \sqrt{2}), \quad y_2 = 5 - (1 + \sqrt{2})$$

$$y_1 = 4 + \sqrt{2}, \quad y_2 = 4 - \sqrt{2}.$$

II sposób

$$(x-1)^2 + (x-1)^2 = 4 \quad (a-b)^2 = (b-a)^2$$

$$2 \cdot (x-1)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 = 2$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|x-1| = \sqrt{2}$$

$$x-1 = \sqrt{2} \text{ lub } x-1 = -\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} + 1 \text{ lub } x = 1 - \sqrt{2}.$$

Odp.: $L = (1 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$ i $K = (1 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$.

Ćwiczenie 7. Oblicz współrzędne wspólnych punktów prostej i okręgu określonych równaniami:

a) $x - y = 0$ i $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8$, b) $x - y + 1 = 0$ i $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Przykład 8. Określ w zależności od wartości parametru m liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} xy = 1 \\ y = mx + 2 \end{cases}$.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = mx + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(mx + 2) = 1 \\ y = mx + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 2x = 1 \\ y = mx + 2 \end{cases}.$$

1° Jeśli $m = 0$, to równanie $mx^2 + 2x = 1$ jest równaniem liniowym $2x = 1$, które ma jeden pierwiastek $x_0 = \frac{1}{2}$.

2° Jeśli $m \neq 0$, to równanie $x(mx + 2) = 1$ jest równaniem kwadratowym postaci $mx^2 + 2x - 1 = 0$ o wyróżniku $\Delta = 4 + 4m$, które:

ma jedno rozwiązanie, gdy $\Delta = 0: 4 + 4m = 0,$ $m = -1,$	ma dwa rozwiązania, gdy $\Delta > 0: 4m + 4 > 0,$ $m > -1,$	nie ma rozwiązania, gdy $\Delta < 0: 4m + 4 < 0,$ $m < -1.$
---	---	---

Odp.: Układ równań:

nie ma rozwiązania, gdy $m < -1$,

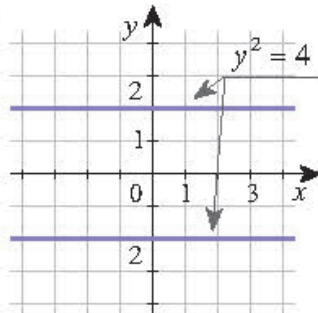
ma jedno rozwiązanie, gdy $m = -1$ lub $m = 0$,

ma dwa rozwiązania, gdy $m \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

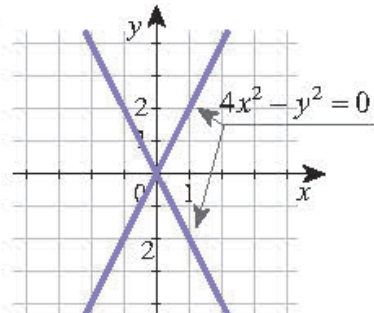
Ćwiczenie 8. Określ liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} xy = 1 \\ y = x + m \end{cases}$ w zależności od wartości parametru m .

Odpowiedzi do ćwiczeń

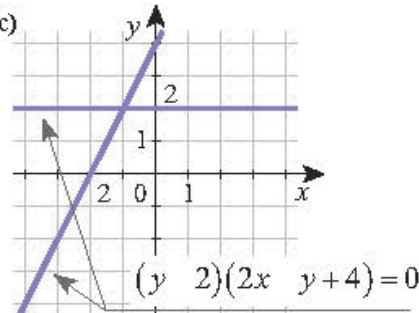
3. a)



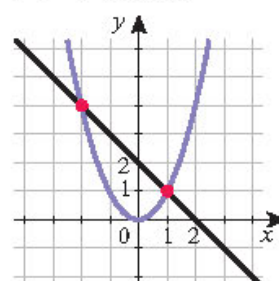
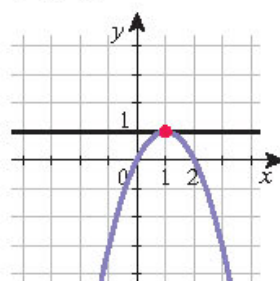
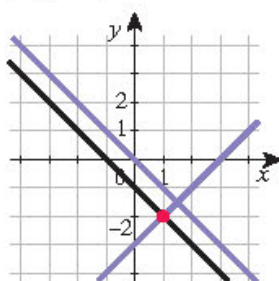
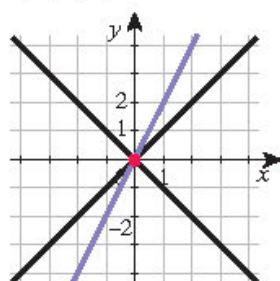
b)



c)



Odpowiedzi do ćwiczeń

4. a) $(0, 0)$,b) $(1, -2)$.5. a) $(1, 1)$,b) $(-2, 4)$, $(1, 1)$.6. a) $(-1, 1)$, $(2, 4)$, b) $(-2, 5)$, c) brak rozwiązania.7. a) $(1, 1)$, b) $(-1, 0)$, $(2, 3)$.8. Dwa rozwiązania, gdy $m \in \mathbb{R}$.

Zadania utrwalające

7.6. Rozwiąż układ równań i sporządź jego interpretację geometryczną:

$$\text{a) } \begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ x+y-1=0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x-y=1 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x+y=2 \end{cases}.$$

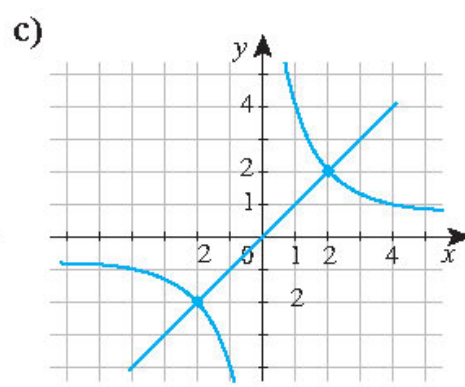
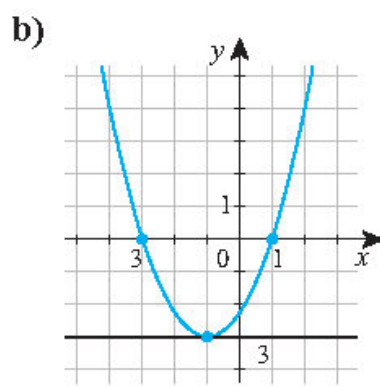
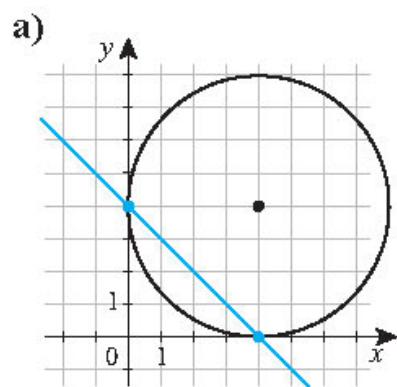
7.7. Rozwiąż układ równań i sporządź jego interpretację geometryczną:

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} y = x^2 + x + 3 \\ y = 3x - 7 \end{cases}.$$

7.8. Sporządź interpretację geometryczną układu równań oraz oblicz współrzędne punktów przecięcia się prostej hiperboli i prostej, określonych równaniami tego układu:

$$\text{a) } \begin{cases} x \cdot y = 2 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x \cdot y = 10 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} x \cdot y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}.$$

7.9. Napisz układ równań, którego interpretacja geometryczna przedstawiona jest na rysunku.



7.10. Rozwiąż układ równań i sporządź jego interpretację geometryczną:

$$\text{a)} \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases},$$

$$\text{b)} \begin{cases} (x - y - 1)(x - y - 5) = 0 \\ y = x + 4 \end{cases}.$$

7.11. Boki prostokąta mają długość 6 i 4. Oblicz, o ile należy powiększyć dłuższy bok tego prostokąta i o ile zmniejszyć krótszy bok, aby pole tego prostokąta nie zmieniło się, a obwód był równy 22.

7.12. Oblicz, dla jakich wartości parametru m prosta o równaniu $y = mx - 2$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4$. Podaj interpretację geometryczną zadania.

7.13. Określ, w zależności od wartości parametru m , liczbę punktów wspólnych prostej $y = x + m$ i paraboli $y = x^2 - 4x + 5$.

7.14. Określ, dla jakich wartości parametru m układ równań:

1 nie ma rozwiązania,

2 ma jedno rozwiązanie,

3 ma więcej niż jedno rozwiązanie, gdy:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y = m \\ xy = 1 \end{cases},$$

$$\text{b)} \begin{cases} y = x - m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases},$$

$$\text{c)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = m \end{cases},$$

$$\text{d)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2m^2 \\ xy = m^2 \end{cases}.$$

Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których każde jest drugiego stopnia

Układy równań, z których każde jest drugiego stopnia, można także rozwiązywać graficznie. Jeżeli krzywe, które są obrazami równań układu, przecinają się w punktach kratowych (w punktach o współrzędnych całkowitych), to z interpretacji geometrycznej możemy odczytywać rozwiązania układu. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 9. Sporządź interpretację geometryczną układu równań, podaj liczbę jego rozwiązań oraz współrzędne punktów wspólnych obrazów graficznych równań układu:

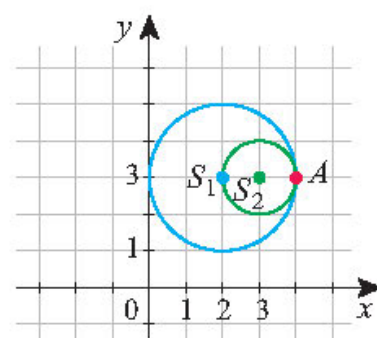
$$\text{a)} \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x^2 - 4x + 4 + y = 0 \end{cases}, \quad \text{c)} \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases},$$

$$\text{d)} \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}, \quad \text{e)} \begin{cases} (y-x)(y+x) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

a)
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 = 1 \end{cases}$$

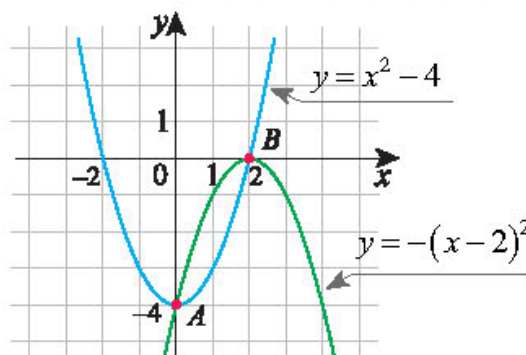
Równanie okręgu o środku
 $S_1 - (2, 3)$ i promieniu $r_1 = 2$.
 Równanie okręgu o środku
 $S_2 - (3, 3)$ i promieniu $r_2 = 1$



Układ równań ma jedno rozwiązanie, którym jest para liczb będąca współrzędnymi punktu $A = (4, 3)$.

b)
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x^2 - 4x + 4 + y = 0 \end{cases}$$

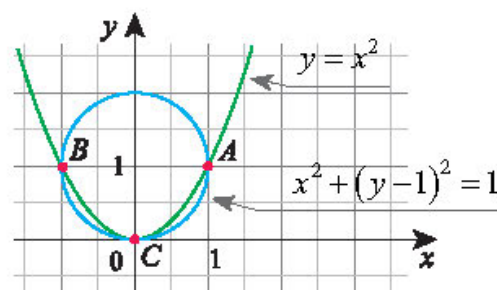
Równanie paraboli
 Równanie paraboli



Układ równań ma dwa rozwiązania, którymi są pary liczb będące współrzędnymi punktów A i B , gdzie $A = (0, -4)$ i $B = (2, 0)$.

c)
$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

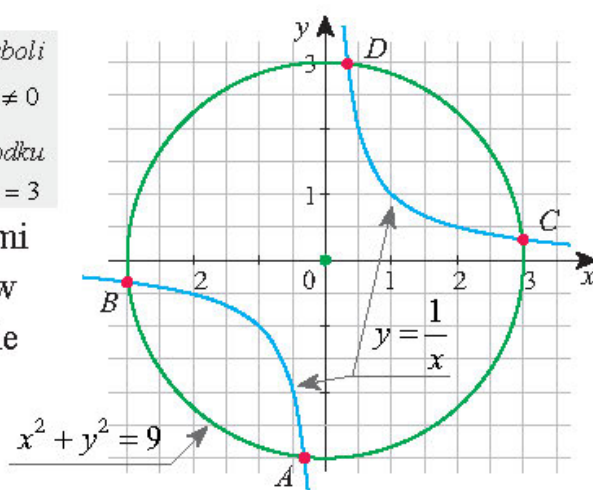
Równanie okręgu o środku
 $S - (0, 1)$ i promieniu $r_1 = 1$
 Równanie paraboli



Układ równań ma trzy rozwiązania, którymi są pary liczb będące współrzędnymi punktów A , B i C , gdzie $A = (1, 1)$, $B = (-1, 1)$ i $C = (0, 0)$.

d)
$$\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

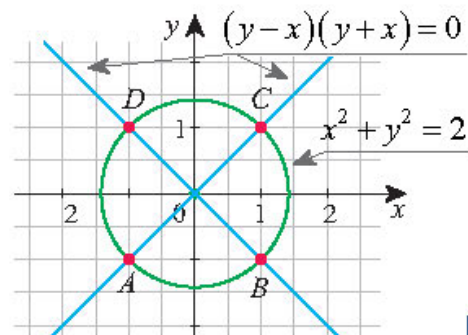
Równanie hiperboli
 $y = \frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$
 Równanie okręgu o środku
 $S - (0, 0)$ i promieniu $r = 3$



Układ równań ma cztery rozwiązania, którymi są pary liczb będące współrzędnymi punktów A , B , C i D . Współrzędnych tych punktów nie można odczytać z rysunku.

e)
$$\begin{cases} (y-x)(y+x) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Równania prostych
 $y = x$ i $y = -x$
 Równanie okręgu o środku
 $S - (0, 0)$ i promieniu $r = \sqrt{2}$



Układ równań ma cztery rozwiązania, którymi są współrzędne punktów A , B , C i D , gdzie $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ i $D = (-1, 1)$.

Ćwiczenie 9. Wykonaj ilustrację graficzną układu równań i podaj liczbę jego rozwiązań:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y = 5 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 + 1 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}, \quad \text{d) } \begin{cases} xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Aby rozwiązać algebraicznie układ równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi, należy tak przekształcić równania układu i sam układ, by w wyniku otrzymać równanie kwadratowe z jedną niewiadomą lub równania liniowe z dwiema niewiadomymi.

Pokażemy na przykładach sposoby przekształcania danego układu tak, by otrzymać równanie kwadratowe lub jedno albo dwa równania liniowe.

Przykład 10. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$ i wykonaj jego interpretację geometryczną.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \\ - \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = -x^2 - 2x + 3 \end{cases} \\ \hline 0 = 2x^2 + 2x - 2 \quad / : 2 \end{array}$$

$x^2 + x - 1 = 0$, skąd

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

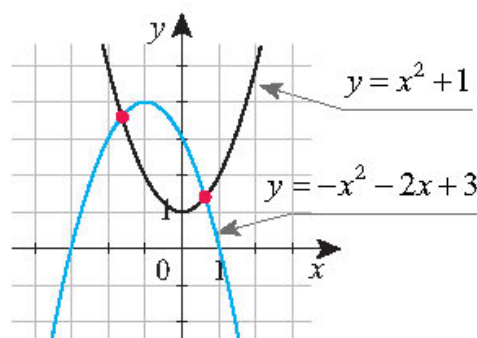
$$y_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Odp.: } \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad \text{i} \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

Porządkujemy równania układu.

Odejmujemy równania układu stronami.

Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą x , które rozwiązujemy.



Ćwiczenie 10. Rozwiąż układ równań algebraicznie i wykonaj jego interpretację geometryczną:

$$\text{a) } \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x^2 - 4x + 4 + y = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = -x^2 \end{cases}.$$

Przykład 11. Rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$-4x - 4y + 12 = 0$$

$$x = 3 - y$$

Odejmujemy stronami równania
i otrzymujemy równanie liniowe.

Wyznaczamy jedną z niewiadomych, np. x .

$$(3 - y)^2 + y^2 - 2(3 - y) - 6y + 9 = 0$$

Podstawiamy $x = 3 - y$ do
pierwszego równania układu.

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie
kwadratowe z niewiadomą y .

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 3.$$

$$\text{Jeśli } y_1 = 2, \text{ to } x_1 = 3 - 2 = 1,$$

$$\text{jeśli } y_2 = 3, \text{ to } x_2 = 3 - 3 = 0.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \quad / \cdot 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases}$$

Przekształcamy równania tak, aby po dodaniu (odjęciu)
równań stronami otrzymać wyrażenie, do którego można
zastosować wzór skróconego mnożenia.

$$x^2 + 2xy + y^2 = 25 + 24$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$(x + y)^2 = 49$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$x + y = 7 \text{ lub } x + y = -7.$$

Otrzymujemy dwa równania liniowe.

Na przykład rozwiązujemy układy:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12 \end{cases}.$$

Do otrzymanych równań liniowych dopisujemy
jedno z równań drugiego stopnia
i rozwiązujemy otrzymane układy.

Układy te rozwiązujemy metodą podstawiania i otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}, \text{ lub } \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}, \text{ lub } \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Odp.: Rozwiązaniem układu są pary liczb:

$$\text{a) } (1, 2), (0, 3), \quad \text{b) } (3, 4), (4, 3), (-3, -4), (-4, -3).$$

Ćwiczenie 11. Rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 5(x + y) = 8 \\ x^2 + y^2 - 3(x + y) = 28 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ xy + 60 = 0 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4 \\ x + y + xy + 3,25 = 0 \end{cases}.$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

9. a) Trzy rozwiązania, b) jedno rozwiązanie, c) dwa rozwiązania, d) brak rozwiązań.

10. a) $(0, -4)$, $(2, 0)$, b) $(1, -1)$, $(-1, -1)$.

11. a) $(3, 7)$, $(7, 3)$, b) $(-12, 5)$, $(-5, 12)$, $(5, -12)$, $(12, -5)$, c) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

Zadania utrwalające

7.15. Sporządź interpretację geometryczną układu równań i podaj liczbę jego rozwiązań oraz, jeśli to możliwe, odczytaj rozwiązania tego układu:

$$\text{a) } \begin{cases} y = -2(x+1)^2 + 2 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} (x-y+1)(x+y-1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}.$$

7.16. Wykonaj ilustrację graficzną układu równań i podaj liczbę jego rozwiązań:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}, & \text{b) } \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}, & \text{c) } \begin{cases} xy = -1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}, \\ \text{d) } \begin{cases} (x+2)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}, & \text{e) } \begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases}, & \text{f) } \begin{cases} xy = 1 \\ xy + 1 = 0 \end{cases}. \end{array}$$

7.17. Rozwiąż algebraicznie i wykonaj interpretację geometryczną układu równań:

$$\text{a) } \begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 1 \\ y + x^2 = 5x + 3 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} y = (x-2)^2 + 3 \\ y + x^2 - 4x + 5 = 0 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} y = -2(x+1)^2 + 2 \\ y = x^2 + 2x + 3 \end{cases}.$$

7.18. Rozwiąż algebraicznie i wykonaj interpretację geometryczną układu równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 4 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 + y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0 \end{cases}.$$

7.19. Rozwiąż algebraicznie układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ xy + 21 = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 36x^2 + 36y^2 = 25 \\ 3xy = 1 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5 \\ 4xy = 5 \end{cases}.$$

7.20. Rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 4y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0 \end{cases}.$$

7.21. Rozwiąż układ równań i wykonaj jego ilustrację graficzną:

$$\text{a) } \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} (x-2)(y+3) = 0 \\ xy = 4 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} xy = 8 \\ y = x^2 \end{cases}.$$

7.22. Oblicz długość wspólnej cięciwy okręgów o równaniach:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{ i } \quad x^2 + (y-2)^2 = 2.$$

7.23. Oblicz długości boków prostokąta, którego:

- a) pole jest równe 20, a obwód 18,
b) pole jest równe 18, a kwadrat długości przekątnej 45.

7.24. Bok kwadratu ma długość 10. Oblicz długości boków takiego prostokąta, który ma dwa razy większe pole oraz dwa razy większy obwód niż dany kwadrat.

7.25. W trójkącie równoramiennym ramiona mają długości równe 5. Oblicz długości podstawy tego trójkąta, wiedząc, że jego pole S jest równe:

- a) $S = 12$, b) $S = 19,5$.

7.26. Prostokątny plac ma powierzchnię 3000 m^2 . Dobierz jego wymiary tak, by na jego ogrodzenie zużyć 255 m siatki oraz zainstalować bramę wjazdową szerokości 5 m.

7.27. Pan Bartek dojeżdża samochodem do miejsca pracy odległego o 15 km od domu. Po zmianie nawierzchni drogi możliwe stało się zwiększenie średniej prędkości przejazdu o $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, co spowodowało skrócenie czasu przejazdu o 5 minut. Oblicz, z jaką prędkością pan Bartek pokonywał tę odległość przed naprawą nawierzchni i ile czasu mu to zajmowało. Z jaką prędkością jeździ obecnie?

7.28. Uzasadnij, że nie ma rozwiązania układ równań:

$$\text{D} \quad \begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}, & \text{b) } & \begin{cases} (y-2x)(y+2x) = 0 \\ x^2 + (y-5)^2 = 1 \end{cases}, \\ \text{c) } & \begin{cases} (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} xy = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$ jest para liczb:

- A. $(0, -\sqrt{3})$, B. $(-\sqrt{3}, 0)$, C. $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, D. $(\sqrt{3}, 0)$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba rozwiązań układu równań $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = |x - 1| \end{cases}$ jest równa:

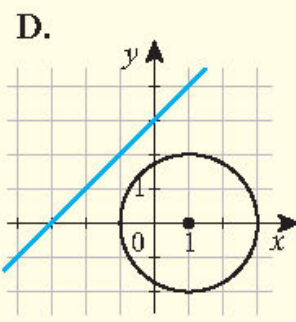
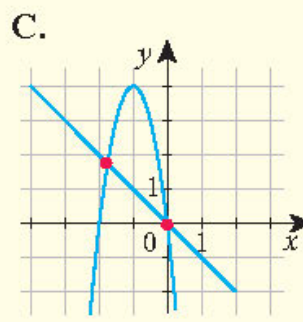
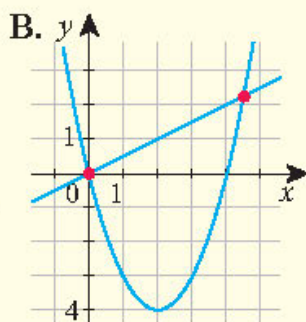
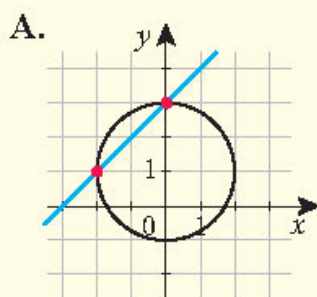
- A. 0, B. 1, C. 2, D. 3.

3. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Układ równań $\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = ax \end{cases}$:

ma jedno rozwiązanie, gdy $a = -1$ lub $a = 3$	P	F
nie ma rozwiązania, gdy $a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$	P	F

4. Patryk sporządził interpretację geometryczną układów równań i zapomniał je opisać. Wykonaj to za niego. Przyporządkuj rysunkom oznaczonym literami A, B, C i D odpowiednie układy oznaczone cyframi od **1** do **4**.



1 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ -x + y = 3 \end{cases}$,

2 $\begin{cases} x^2 + y - 4x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$,

3 $\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + (y-1)^2 = 4 \end{cases}$,

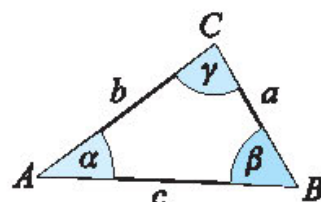
4 $\begin{cases} x = 2y \\ y - x^2 + 4x = 0 \end{cases}$.

8. Rodzaje trójkątów i ich punkty szczególne

Rodzaje trójkątów

Przypomnijmy

Trójkątem nazywamy wielokąt o trzech bokach. Jeżeli wierzchołki trójkąta oznaczmy literami A , B i C , to kąty o tych wierzchołkach przyjęto oznaczać odpowiednio literami: α , β i γ , które spełniają warunek $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

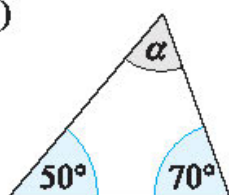


a, b, c – boki trójkąta ABC

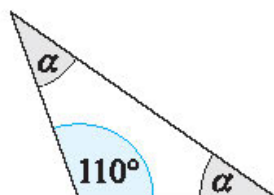
α, β, γ – kąty trójkąta ABC

Ćwiczenie 1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miarę kąta α .

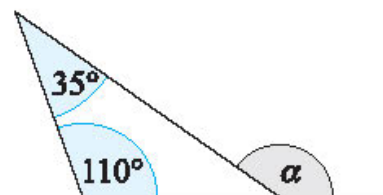
a)



b)



c)



W technice trójkąt nazywany jest figurą sztywną. Kształt trójkąta zmienia się tylko wtedy, gdy zmieni się długość przynajmniej jednego z boków. Jego model i własność sztywności wykorzystuje się do wzmocniania konstrukcji, np. belek stropowych, słupów wysokiego napięcia, mostów itp.



*Fragment koła widokowego
Londyńskie oko*

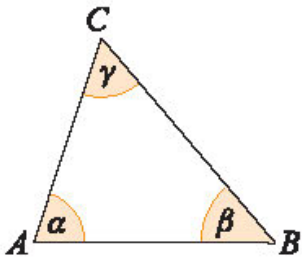
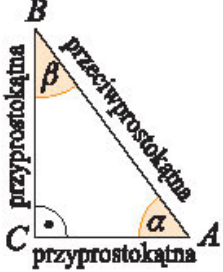
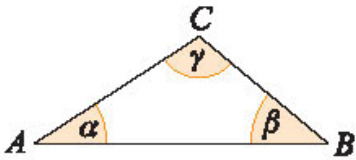


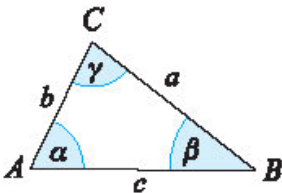
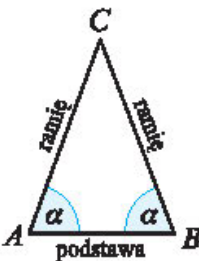
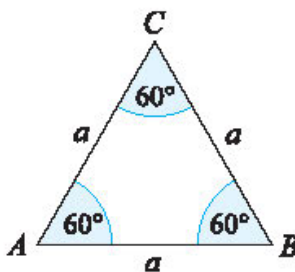
Szkielet dachu budynku



Wieża radarowa

Ćwiczenie 2. Podaj przynajmniej trzy przykłady ze swojego otoczenia, gdzie wykorzystano model trójkąta jako wzmocnienie konstrukcji. Udokumentuj to zdjęciem lub szkicem oraz opisz to miejsce.

Podział trójkątów ze względu na kąty		
Trójkąt ostrokątny	Trójkąt prostokątny	Trójkąt rozwartokątny
 Każdy kąt wewnętrzny trójkąta jest ostry. $\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ, \gamma < 90^\circ$	 Jeden kąt jest prosty, a pozostałe kąty są ostre. $\alpha + \beta = 90^\circ$	 Jeden kąt jest rozwarty, a pozostałe kąty są ostre. $\alpha + \beta < 90^\circ, \gamma > 90^\circ$

Podział trójkątów ze względu na boki		
Trójkąt różnoboczny (trójkąt o bokach parami różnych)	Trójkąt równoramienny	Trójkąt równoboczny
 $a \neq b, a \neq c, b \neq c,$ $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma$	 $AC = BC$	 $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

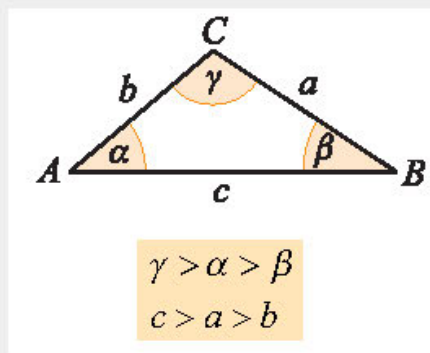
Ćwiczenie 3. Określ, jakim trójkątem (ostrokątnym, prostokątnym czy rozwartokątnym) może być trójkąt, którego suma miar dwóch jego kątów jest równa:

a) 90° , b) 80° , c) 100° .

Podaj przykładowe miary kątów dwóch takich trójkątów.

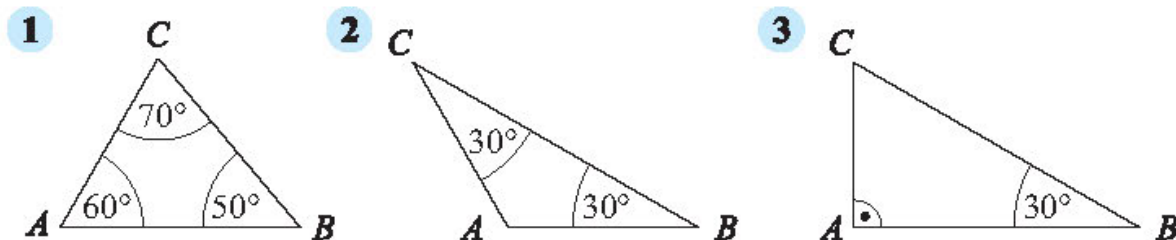
Uwaga*)

- W dowolnym trójkącie naprzeciw największego kąta leży najdłuższy bok, a naprzeciw najkrótszego boku leży najmniejszy kąt.
- W trójkącie naprzeciw równych kątów leżą boki o równych długościach.

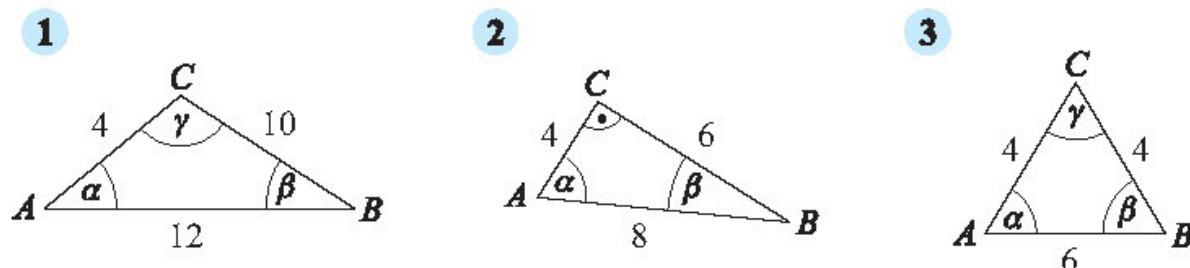


*) Dowód własności zawartych w uwadze poznasz w następnej klasie.

Ćwiczenie 4. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i określ, który bok trójkąta **1**, **2** czy **3** jest: a) najdłuższy, b) najkrótszy.

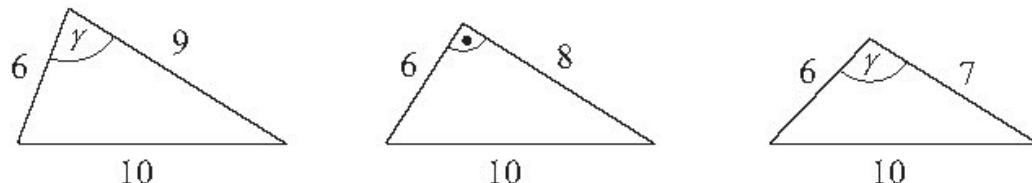


Ćwiczenie 5. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i określ, który kąt trójkąta **1**, **2** czy **3** jest: a) największy, b) najmniejszy.



Przykład 1. Na rysunkach przedstawione są trójkąty:

1 ostrokątny, **2** prostokątny, **3** rozwartokątny.



Oblicz kwadraty długości boków trójkątów i porównaj kwadrat długości najdłuższego boku z sumą kwadratów pozostałych boków.

Rozwiązanie

	Trójkąt ostrokątny	Trójkąt prostokątny	Trójkąt rozwartokątny
Długości boków	6, 9, 10	6, 8, 10	6, 7, 10
Kwadraty długości boków	36, 81, 100	36, 64, 100	36, 49, 100
	$100 < 36 + 81$	$100 = 36 + 64$	$100 > 36 + 49$

Ćwiczenie 6. Określ, jakim trójkątem (prostokątnym, ostrokątnym czy rozwartokątnym) jest trójkąt, którego boki mają długości:

a) 4, 5, 6, b) 5, 12, 13, c) 8, 13, 17.

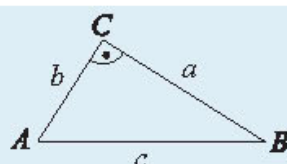
Uwaga^{*)} Jeżeli liczby a , b , c są długościami boków trójkąta, przy czym c jest najdłuższym bokiem oraz:

- $c^2 < a^2 + b^2$, to trójkąt jest ostrokątny,
- $c^2 = a^2 + b^2$, to trójkąt jest prostokątny,
- $c^2 > a^2 + b^2$, to trójkąt jest rozwartokątny.

Ćwiczenie 7. Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 13,5 cm. Jeden z jego boków ma długość równą 3,3 cm. Czy może on być jednym z równych boków? Odpowiedź uzasadnij.

Jeżeli znamy długości trzech boków trójkąta, to możemy określić nie tylko, czy ten trójkąt jest różnoboczny, równoboczny czy równoramienny, ale także czy jest on prostokątny, rozwartokątny czy ostrokątny. W tym celu korzystamy z **odwrotnego twierdzenia Pitagorasa**.

Twierdzenie Pitagorasa



a , b – przyprostokątne
 c – przeciwprostokątna

Proste

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

Z (założenie):

trójkąt ABC jest prostokątny.

T (teza):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Odwrotne

Jeżeli w trójkącie kwadrat długości jednego z boków jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, to trójkąt jest prostokątny.

Z (założenie):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

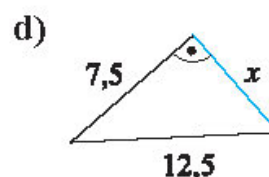
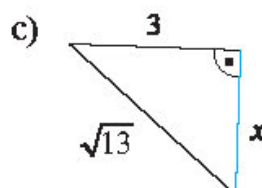
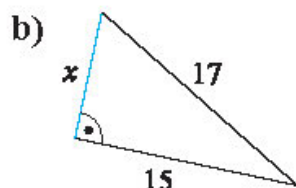
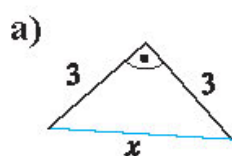
T (teza):

trójkąt ABC jest prostokątny.

Ćwiczenie 8. Uzasadnij, że trójkątem prostokątnym jest trójkąt o bokach długości:

- a) 5, 12 i 13, b) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$, c) 1, $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, d) $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{14}$ i 12.

Ćwiczenie 9. Oblicz długość odcinka x .



^{*)} Dowód własności zawartych w uwadze poznasz w następnej klasie.

Ćwiczenie 10. Ile istnieje trójkątów równoramiennych o bokach długości:

- a) 2 cm i 4 cm, b) 2 cm i 3 cm?

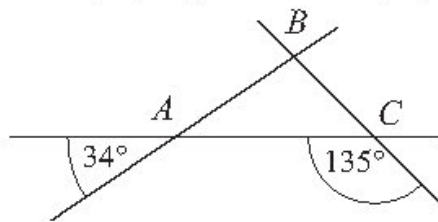
Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) 60° , b) 35° , c) 145° . 3. Trójkąt jest: a) prostokątny, np.: $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 50^\circ, 40^\circ$, b) rozwartokątny, np.: $100^\circ, 20^\circ, 60^\circ, 100^\circ, 40^\circ, 40^\circ$, c) ostrokątny, np.: $80^\circ, 20^\circ, 80^\circ, 80^\circ, 50^\circ, 50^\circ$, rozwartokątny, np.: $80^\circ, 95^\circ, 5^\circ, 80^\circ, 91^\circ, 9^\circ$, prostokątny: $80^\circ, 10^\circ, 90^\circ$. 4. 1 a) AB , b) AC , 2 a) BC , b) AB lub AC (trójkąt równoramienny), 3 a) BC , b) AC . 5. 1 a) γ , b) β , 2 a) 90° , b) β , 3 a) γ , b) $\alpha = \beta$.
6. Trójkąt jest: a) ostrokątny, b) prostokątny, c) rozwartokątny. 7. Nie. Wskazówka. $2 \cdot 3,3 + x = 13,5$ i $x < 2 \cdot 3,3$, $x < 2,33$, gdzie x jest długością trzeciego boku trójkąta. 9. a) $3\sqrt{2}$, b) 8, c) 2, d) 10.
10. a) Jeden trójkąt o bokach długości 4, 4, 2, b) dwa trójkąty o bokach długości: 2, 2, 3 lub 3, 3, 2.

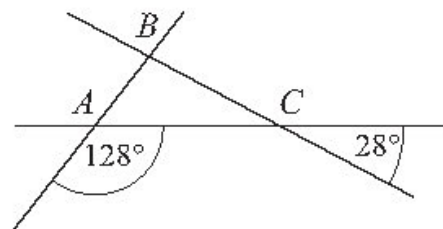
Zadania utrwalające

- 8.1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i określ, czy trójkąt ABC jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

a)



b)



- 8.2. Określ, czy kąty α , β i γ mogą być kątami tego samego trójkąta, jeżeli:

- a) $\alpha = 44^\circ$, $\beta = 56^\circ$ i $\gamma = 100^\circ$, b) $\alpha = 27^\circ$, $\beta = 43^\circ$ i $\gamma = 110^\circ$.

- 8.3. Określ, czy bokami jednego trójkąta mogą być odcinki, które mają długości:

- a) 2, 2, 5, b) 20, 20, 5, c) 3, 4, 5,
d) $\sqrt{3}-1$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+1$, e) $4-\sqrt{2}$, 7, $4+\sqrt{2}$, f) a , $2a$, $3a$, gdy $a > 0$.

- 8.4. Określ, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny, gdy jego boki mają długości:

- a) 4, 4, 7, b) 0,03; 0,04; 0,05; c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{14}$.

- 8.5. W trójkącie różnobocznym dwa jego boki mają długości 3 i 6. Podaj długość trzeciego boku, wiedząc, że leży on naprzeciw największego kąta i jego długość jest liczbą naturalną.

- 8.6. Uzasadnij, że jeżeli boki trójkąta mają długości: x , $x+2$ i $x+4$, to $x \in (2; +\infty)$.

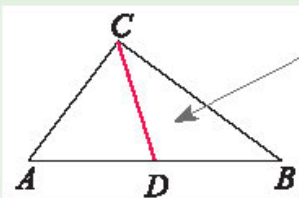
D

- 8.7. Oblicz dla jakich wartości a można zbudować trójkąt równoboczny z odcinków mających długości: a) a^2 , $2a+24$, 16, b) $2a-5$, $4a-9$, $a-3$.

Środek ciężkości trójkąta i jego własności

Definicja

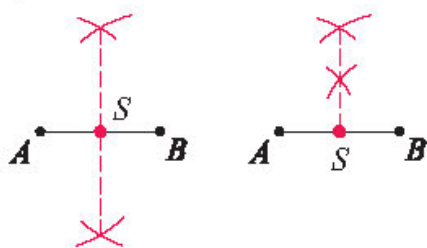
Środkową trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



środkowa CD , gdzie D to środek boku AB

Aby poprowadzić środkowe w trójkącie, potrzebne jest wyznaczenie środków jego boków.

Wyznaczanie środka odcinka



W konstrukcji korzystamy z własności, że środkiem odcinka jest punkt przecięcia się z nim jego symetralnej.

Twierdzenie o środkowych trójkąta

Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka tego trójkąta.

Dowód:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, gdzie odcinki AA_1 i CC_1 są środkowymi trójkąta ABC .

1° Zauważamy, że odcinek AC jest równoległy do odcinka A_1C_1 *, więc trójkąty ACS i A_1C_1S są podobne (kkk).

$$\text{Zatem } \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = 2.$$

2° Z punktu 1° wnioskujemy, że $\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{|CS|}{|SC_1|} = 2$.

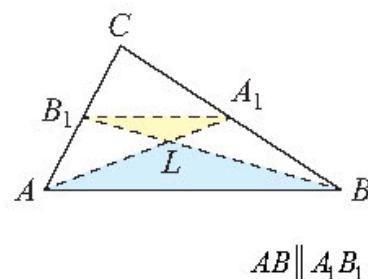
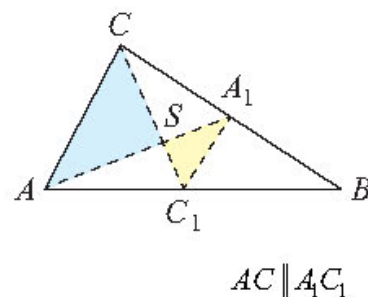
3° W tym samym trójkącie ABC prowadzimy środkową BB_1 , która przecina środkową AA_1 w punkcie L .

4° Zauważamy, że trójkąty ABL i A_1B_1L są podobne (kkk),

$$\text{więc } \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = 2, \text{ zatem } \frac{|AL|}{|LA_1|} = \frac{|BL|}{|LB_1|} = 2.$$

5° Z punktów 2° i 4° wnioskujemy, że $\frac{|AL|}{|LA_1|} = \frac{|AS|}{|SA_1|} = 2$ oraz $\frac{|BL|}{|LB_1|} = \frac{|CS|}{|SC_1|} = 2$, więc

punkty L i S pokrywają się, czyli środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



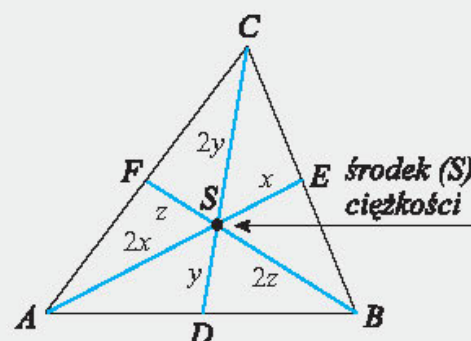
*) Przypomnijmy, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku.

Definicja

Punkt przecięcia się środkowych trójkąta nazywamy **środkiem ciężkości** tego trójkąta.

Uwaga

- W każdym trójkącie można poprowadzić trzy środkowe.
- Środek ciężkości trójkąta dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1, gdy liczymy od wierzchołka, co zapisujemy:



$$|AS| = 2|SE|, |CS| = 2|SD|, |BS| = 2|SF| \quad \text{lub} \quad \frac{|AS|}{|SE|} = \frac{|CS|}{|SD|} = \frac{|BS|}{|SF|} = 2.$$

Ćwiczenie 11. Ze sztywnej kartki wytnij dowolny trójkąt i narysuj trzy środkowe tego trójkąta, a następnie podeprzyj go w środku ciężkości. Zapisz swoje spostrzeżenia.

Przykład 2. W trójkącie równoramiennym ABC , w którym podstawa AB ma długość 6, a ramiona AC i BC mają długość 10, poprowadzono środkowe. Oblicz długości tych środkowych.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. Zauważamy, że wysokość CD jest również środkową trójkąta ABC .

W trójkącie prostokątnym ADC obliczamy długości odcinków:

$$|CD| = \sqrt{|AC|^2 - |AD|^2} = \sqrt{91}$$

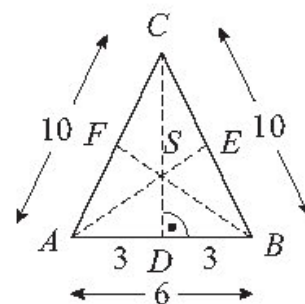
$$|SD| = \frac{1}{3} \cdot |CD| = \frac{\sqrt{91}}{3}.$$

W trójkącie prostokątnym ADS obliczamy:

$$|AS| = \sqrt{|SD|^2 + |AD|^2} = \frac{\sqrt{172}}{3}$$

$$|AE| = \frac{3}{2}|AS| = \sqrt{43}.$$

Odp.: $|CD| = \sqrt{91}$, $|AE| = |BF| = \sqrt{43}$.



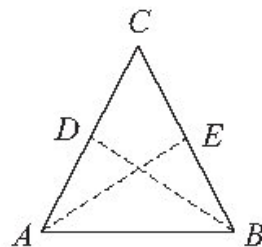
Z własności środkowych

$$|AS| = 2 \cdot |SE| \quad \text{i} \quad |AE| = 3 \cdot |SE|$$

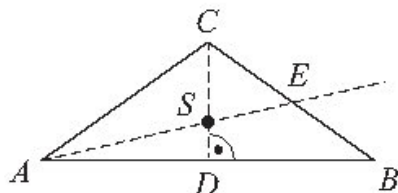
$$\text{więc} \quad |AE| = \frac{3}{2}|AS|.$$

Ćwiczenie 12. W trójkącie równoramiennym ABC długość podstawy AB jest równa 18, a ramiona AC i BC mają długość 15. Oblicz długości środkowych CD , AE i BF tego trójkąta.

Ćwiczenie 13. Na rysunku odcinki AE i BD są środkowymi trójkąta równoramiennego ABC . Uzasadnij, że $|AE| = |BD|$.



Ćwiczenie 14. Na rysunku punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta równoramiennego ABC . Oblicz długość środkowej CD , gdy $|AB| = 12\sqrt{3}$ i $|AE| = 9\sqrt{7}$.



Odpowiedzi do ćwiczeń

12. $|CD| = 12$, $|AE| = |BF| = \frac{3}{2}\sqrt{97}$.

13. Wskazówka. Zauważ, że $\triangle ABE \sim \triangle ABD$ (bkb).

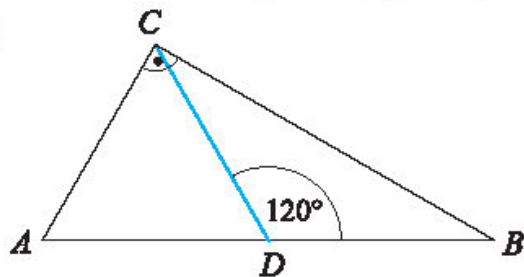
14. 36.

Zadania utrwalające

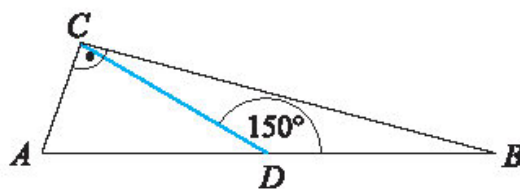
8.8. Narysuj dowolny odcinek, a następnie konstrukcyjnie znajdź jego środek.

8.9. Na rysunku odcinek CD jest środkową trójkąta prostokątnego ABC . Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie $|CD| = |DB|$, i oblicz miary kątów trójkąta ABC .

a)



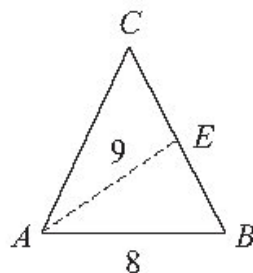
b)



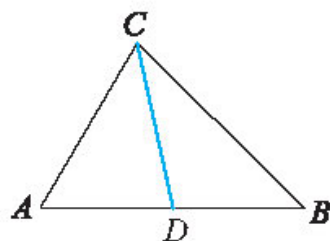
8.10. Środkowa CD trójkąta ABC podzieliła go na dwa trójkąty, z których jeden jest równoboczny, a drugi równoramienny. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest prostokątny.

8.11. Oblicz odległość środka ciężkości trójkąta prostokątnego od wierzchołka kąta prostego, gdy jego przyprostokątne mają długości 18 i 24.

8.12. W trójkącie równoramiennym ABC poprowadzono z wierzchołka A na ramię BC środkową AE . Oblicz długości ramion tego trójkąta, gdy $|AB| = 8$ i $|AE| = 9$.



- 8.13. Oblicz długości środkowych trójkąta prostokątnego, którego boki mają długości 4, $4\sqrt{3}$ i 8.
- 8.14. Wykaż, że jeżeli środkowa trójkąta równa jest połowie boku, do którego została poprowadzona, to trójkąt ten jest prostokątny.
- 8.15. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki. Oblicz długości środkowych tego trójkąta, gdy przyprostokątne mają długości 6 i $6\sqrt{3}$.
- 8.16. Wykaż, że suma długości środkowych trójkąta jest mniejsza od jego obwodu i większa od połowy obwodu tego trójkąta.
- 8.17. Na rysunku odcinek CD jest środkową trójkąta ABC . Uzasadnij, że pole trójkąta ADC jest równe polu trójkąta DBC .



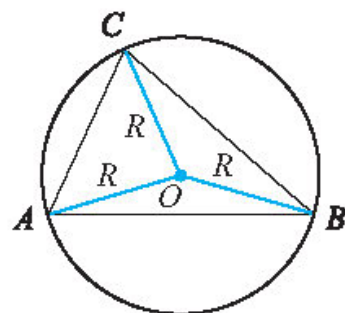
Środek okręgu opisanego na trójkącie

Definicja

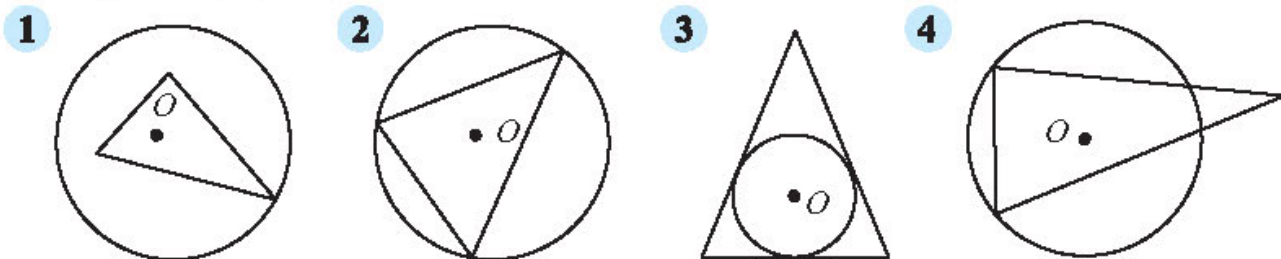
Okrąg nazywamy opisanym na trójkącie, jeżeli wszystkie wierzchołki trójkąta należą do tego okręgu.

Okrąg opisany na trójkącie oznacza to samo co trójkąt wpisany w okrąg.

R – promień okręgu opisanego na trójkącie



Ćwiczenie 15. Na którym spośród rysunków 1, 2, 3 czy 4 okrąg o środku O jest opisany na trójkącie?



Twierdzenie

W każdym trójkącie symetralne jego boków przecinają się w jednym punkcie.

Dowód:

Prowadzimy symetralne dwóch boków trójkąta ABC – symetralną boku AB i BC , które przecinają się w punkcie O .

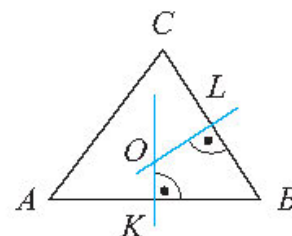
Zauważamy, że:

1° punkt O leży na symetralnej boku AB , więc $|AO| = |BO|$,

2° punkt O leży na symetralnej boku BC , więc $|BO| = |CO|$.

Z punktów 1° i 2° wynika, że $|AO| = |CO|$, więc punkt O leży na symetralnej boku AC .

c.n.u.

**Uwaga**

- Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Środkiem tego okręgu jest punkt przecięcia się symetralnych jego boków.
- Aby wskazać środek okręgu opisanego na trójkącie, wystarczy poprowadzić symetralne dwóch jego boków.

Ćwiczenie 16. Narysuj trójkąt ostrokątny, prostokątny oraz rozwartokątny i konstrukcyjnie wyznacz środki okręgów opisanych na tych trójkątach.

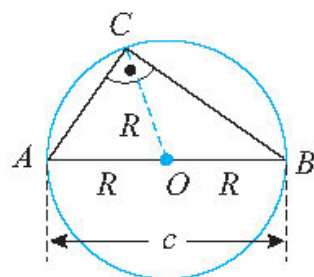
Uwaga

Trójkąt ostrokątny	Trójkąt prostokątny	Trójkąt rozwartokątny
W trójkącie ostrokątnym środek O okręgu opisanego leży wewnątrz trójkąta.	W trójkącie prostokątnym środek O okręgu opisanego leży w środku przeciwprostokątnej trójkąta.	W trójkącie rozwartokątnym środek O okręgu opisanego leży na zewnątrz trójkąta.

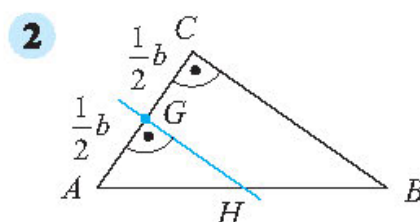
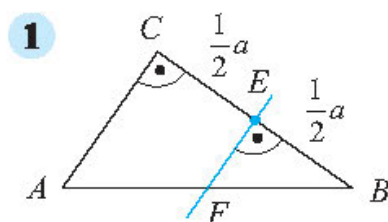
Ćwiczenie 17. Ustal, gdzie leży środek okręgu opisanego na trójkącie, w którym dwa kąty mają miary: a) 60° i 55° , b) 42° i 48° , c) 61° i 28° .

Twierdzenie

W trójkącie prostokątnym środek O okręgu opisanego na tym trójkącie leży w środku przeciwprostokątnej, a jego promień R jest równy połowie długości przeciwprostokątnej.



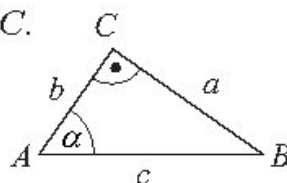
Ćwiczenie 18. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono symetralną EF przyprostokątnej BC (rysunek 1) i symetralną GH przyprostokątnej AC (rysunek 2). Uzasadnij, że punkty F i H pokrywają się.



Ćwiczenie 19. Na rysunku przedstawiony jest trójkąt prostokątny ABC .

Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie, gdy:

- a) $|AC| = |BC| = 4$, b) $|AC| = 9$ i $\alpha = 60^\circ$,
c) $\operatorname{tg} \alpha = 3$ i $|BC| = 30$.



Przykład 3. Na trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AB| = 16$ i $|AC| = |BC| = 10$, opisano okrąg. Oblicz promień R tego okręgu.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku i zauważamy, że $|\sphericalangle ACB| \approx 108^\circ$, bo $\sin(\sphericalangle ACD) = 0,8$ i $|\sphericalangle ACB| = 2 \cdot |\sphericalangle ACD|$.

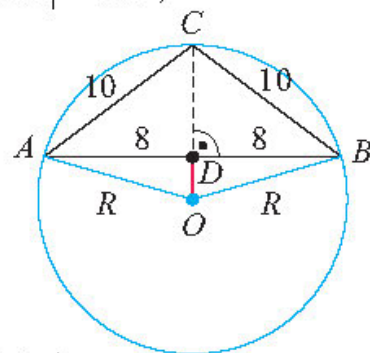
Wniosek: trójkąt ABC jest rozwartokątny.

$$\begin{aligned} \Delta ADC: |CD|^2 &= |AC|^2 - |AD|^2 \\ |CD|^2 &= 10^2 - 8^2 \\ |CD|^2 &= 36, \text{ skąd } |CD| = 6. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Pitagorasa

$$\Delta AOD: |AO|^2 = |AD|^2 + |OD|^2, \text{ gdzie } |AO| = R, |OD| = R - 6, |AD| = 8$$

$$\begin{aligned} R^2 &= 8^2 + (R - 6)^2 \\ R^2 &= 64 + R^2 - 12R + 36 \\ 12R &= 100 \\ R &= \frac{25}{3}. \end{aligned}$$



Ćwiczenie 20. Na trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC| = 10$ i $|AB| = 10\sqrt{3}$, opisano okrąg. Oblicz promień R tego okręgu.

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. 2. 17. Środek okręgu opisanego na trójkącie leży: a) wewnątrz trójkąta, b) w środku przeciwprostokątnej trójkąta, c) na zewnątrz trójkąta. 19. a) $R = 2\sqrt{2}$, b) $R = 9$, c) $R = 5\sqrt{10}$. 20. $R = 10$.

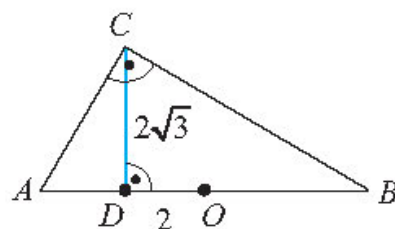
Zadania utrwalające

8.18. W trójkącie prostokątnym symetralna przeciwprostokątnej przechodzi przez wierzchołek kąta prostego. Podaj miary kątów ostrych tego trójkąta.

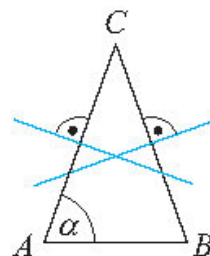
8.19. Promień R okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy długości wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną. Oblicz obwód tego trójkąta, gdy $R = 5$.

8.20. W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną ma długość $2\sqrt{3}$, a spodek tej wysokości leży w odległości 2 od środka okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz:

a) promień R okręgu opisanego na tym trójkącie,
b) długości przyprostokątnych tego trójkąta.



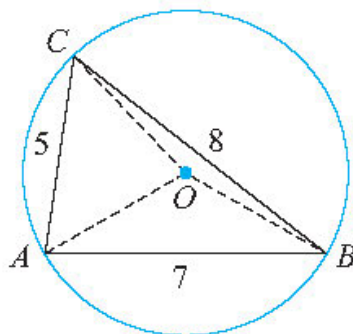
8.21. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę α . Uzasadnij, że symetralne ramion tego trójkąta tworzą kąt, którego miara jest równa 2α .



8.22. W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 120° . Symetralne boków tego trójkąta przecinają się w punkcie D . Wiedząc, że $|CD| = 6$, oblicz obwód trójkąta ABC .

8.23. W okrąg o środku O i promieniu $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ wpisano

trójkąt ABC , którego boki mają długości 5, 7 i 8. Oblicz sumę odległości środka O tego okręgu od boków trójkąta.



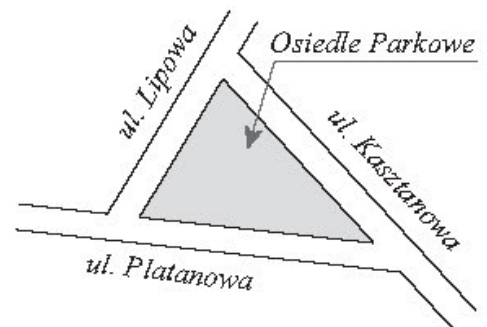
8.24. Uzasadnij, że trójkąt równoramienny, którego boki mają długości:

- D** a) 13, 13, $13\sqrt{2}$ jest prostokątny, b) 13, 13, 10 jest ostrokątny,
c) 13, 13, 24 jest rozwartokątny.

8.25. Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym, którego boki mają długości:

- a) 6, 6, $6\sqrt{2}$, b) 8, 8, 8, c) 13, 13, 24, d) 10, 10, 12.

8.26. Na osiedlu Parkowym będzie założona osiedlowa sieć internetowa. Między ulicami Platanową, Lipową i Kasztanową zostanie ustawiony maszt telekomunikacyjny w taki sposób, aby sygnał mógł być odbierany w każdym domu tego osiedla. Jak wyznaczyć miejsce masztu na planie osiedla? Odpowiedź uzasadnij.

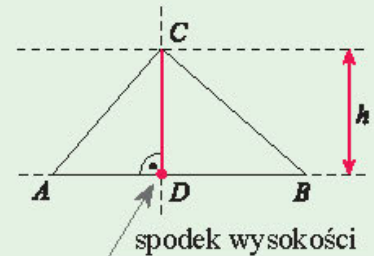


Ortocentrum trójkąta i jego własności

Przypomnijmy

Definicja

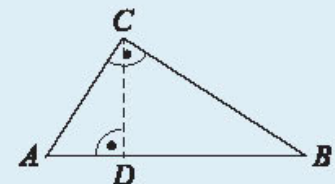
Wysokość trójkąta to odcinek, który jest prostopadły do boku trójkąta lub jego przedłużenia, a jednym z jego końców jest wierzchołek trójkąta, albo jest to odległość wierzchołka trójkąta od prostej zawierającej przeciwny bok.



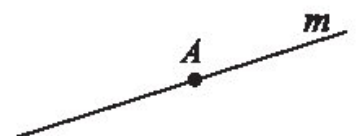
Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym

Jeżeli odcinek CD jest wysokością trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym ACB , to:

- $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$, • $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$,
- $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$, • $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$.



Ćwiczenie 21. Narysuj konstrukcyjnie prostą prostopadłą do prostej m i przechodzącą przez punkt A należący do tej prostej.



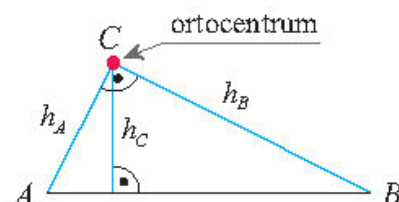
Twierdzenie

Wysokości trójkąta (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie zwanym **ortocentrum**.

Rozważamy przypadki, gdy trójkąt jest prostokątny, ostrokątny lub rozwartokątny.

Przypadek I

Trójkąt ABC jest prostokątny. Z definicji wysokości wynika, że wierzchołek C kąta prostego jest punktem wspólnym wysokości h_A , h_B i h_C tego trójkąta, więc jest jego ortocentrum.

**Przypadek II**

Trójkąt ABC jest ostrokątny.

1° Przez wierzchołki trójkąta ABC prowadzimy proste równoległe do przeciwległych boków tak, że $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1B_1 \parallel AB$ i $A_1C_1 \parallel AC$.

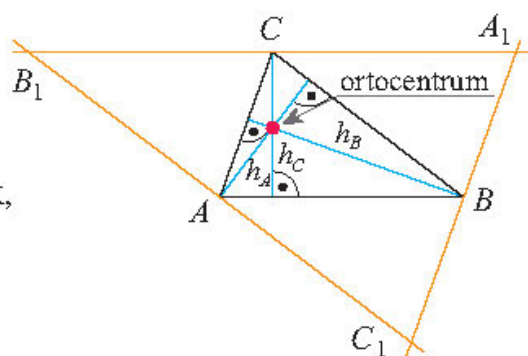
2° Z punktu 1° wnioskujemy, że:

- $h_A \perp B_1C_1$, $h_B \perp A_1C_1$, $h_C \perp A_1B_1$,
- czworokąty $ABCB_1$, ABA_1C i AC_1BC są równoległobokami.

3° Z punktu 2° wnioskujemy, że

$$|AC| = |BA_1| = |BC_1|, \quad |BC| = |AB_1| = |AC_1|, \quad |AB| = |CB_1| = |CA_1|.$$

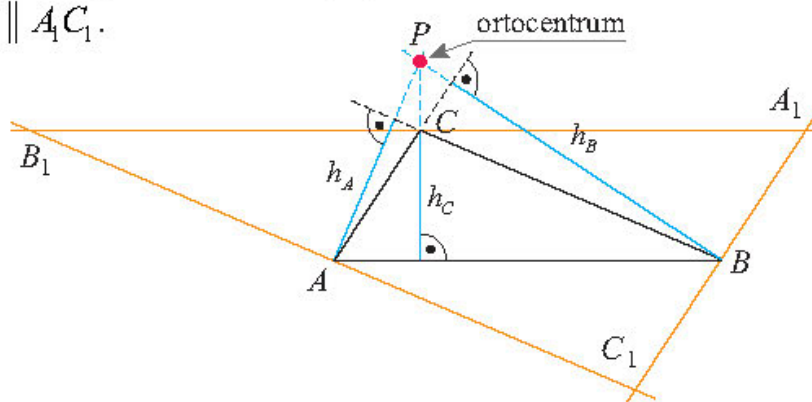
4° Z punktów 2° i 3° wnioskujemy, że wysokości h_A , h_B i h_C zawierają się w symetrycznych boków trójkąta $A_1B_1C_1$, więc przecinają się w jednym punkcie.



Ćwiczenie 22. Na rysunku trójkąt ABC jest rozwartokątny

oraz $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ i $AC \parallel A_1C_1$.

Uzasadnij, że punkt P jest punktem przecięcia się prostych zawierających wysokości h_A , h_B i h_C trójkąta ABC .



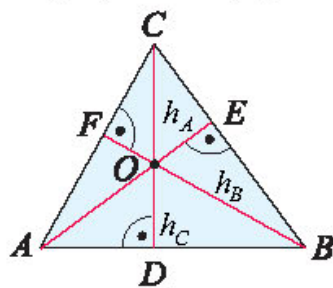
Ćwiczenie 23. Poszukaj w Internecie informacji dotyczących ortocentrum, takich jak:
a) prosta Eulera, b) okrąg dziewięciu punktów zwany okręgiem Eulera.

Ćwiczenie 24. Narysuj trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne. Wyznacz konstrukcyjnie ich ortocentra. W każdym z tych trójkątów określ położenie ortocentrum w stosunku do trójkąta.

Ćwiczenie 25. Narysuj dowolny trójkąt i poprowadź trzy jego wysokości. Na podstawie usytuowania punktu przecięcia tych wysokości określ, jaki to jest trójkąt.

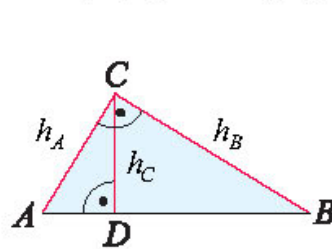
Uwaga

Trójkąt ostrokątny



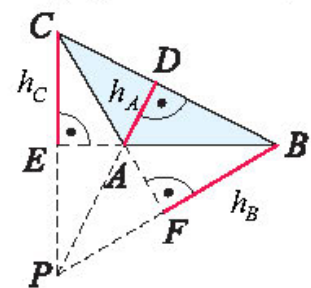
W trójkącie ostrokątnym wysokości przecinają się w punkcie leżącym we wnętrzu trójkąta (na rysunku w punkcie O).

Trójkąt prostokątny



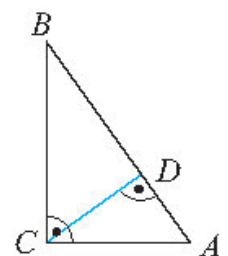
W trójkącie prostokątnym wysokości przecinają się w wierzchołku kąta prostego.

Trójkąt rozwartokątny



W trójkącie rozwartokątnym proste zawierające wysokości przecinają się w punkcie P leżącym poza trójkątem.

Przykład 4. Na rysunku przedstawiony jest trójkąt ABC , w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty, a odcinek CD jest jego wysokością. Punkt D podzielił przeciwprostokątną AB na dwa odcinki BD i DA takie, że $\frac{|BD|}{|DA|} = \frac{4}{1}$. Oblicz długości odcinków BD i DA , wiedząc, że $|AC| = 5$.



Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, gdzie $x > 0$.

Zauważamy, że jeśli $|AD| = x$, to $|BD| = 4x$.

Z twierdzenia o odcinkach w trójkącie prostokątnym

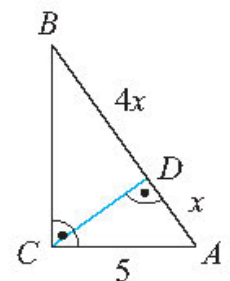
$$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$$

$$5^2 = 5x \cdot x$$

$$25 = 5x^2$$

$$x = \sqrt{5}, \text{ więc } 4x = 4\sqrt{5}.$$

Odp.: $|DA| = \sqrt{5}$, $|BD| = 4\sqrt{5}$.



Ćwiczenie 26. W trójkącie prostokątnym ABC , w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty, poprowadzono wysokość CD . Punkt D podzielił przeciwprostokątną AB na dwa odcinki BD i DA w stosunku $5 : 3$. Oblicz długości tych odcinków, wiedząc, że $|CB| = 6\sqrt{10}$.

Ćwiczenie 27. Podaj nazwę trójkąta, który ma:

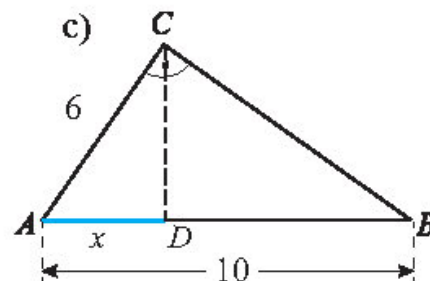
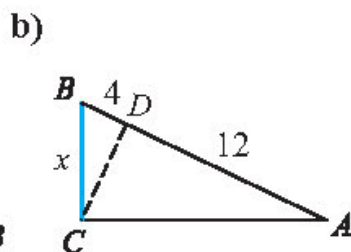
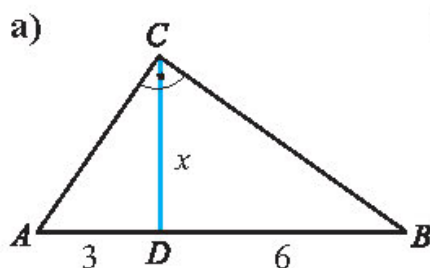
- trzy wysokości równe,
- dwie wysokości równe,
- dwie wysokości, które są wzajemnie prostopadłe,
- dwie wysokości, które są także jego bokami.

Odpowiedzi do ćwiczeń

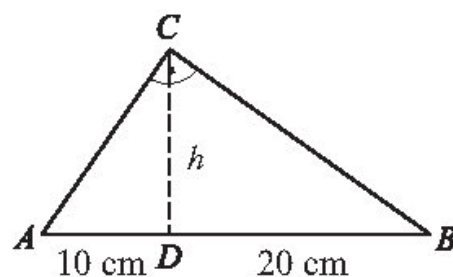
26. 9 i 15. 27. Trójkąt jest: a) równoboczny, b) równoramienny, c) prostokątny, d) prostokątny.

Zadania utrwalające

8.27. Na rysunku trójkąt ABC jest prostokątny, a odcinek CD jest jego wysokością poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną AB . Oblicz długość odcinka x .



8.28. W trójkącie prostokątnym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach 10 cm i 20 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.



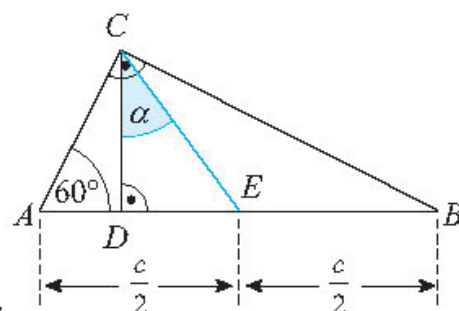
8.29. Najkrótsza wysokość trójkąta o bokach długości 8, $6\sqrt{2}$ i $2\sqrt{10}$ ma długość 6. Oblicz długości pozostałych wysokości tego trójkąta.

8.30. Oblicz pole trójkąta równobocznego, w którym ortocentrum znajduje się w odległości:

- 4 od boków tego trójkąta,
- d od wierzchołków tego trójkąta.

8.31. Uzasadnij, że w trójkącie równobocznym środek ciężkości jest ortocentrum tego trójkąta.

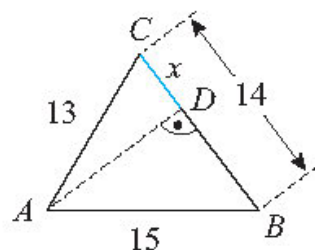
- 8.32. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 60° . Oblicz miarę kąta α zawartego między wysokością a środkową, które są poprowadzone z wierzchołka kąta prostego.



- 8.33. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości BD i CE .

D Uzasadnij, że $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACE|$.

- 8.34. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i oblicz długość odcinka CD .



- 8.35. W trójkącie prostokątnym wysokości mają długości: 12, 15 i 20. Oblicz długości odcinków, na jakie przeciwprostokątną podzieliła wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego.

- 8.36. Trójkąt prostokątny ABC ma przyprostokątne o długości a i b . Podaj odległość między ortocentrum i środkiem ciężkości tego trójkąta.

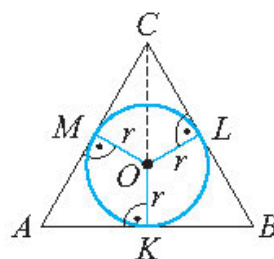
Środek okręgu wpisanego w trójkąt i twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Definicja

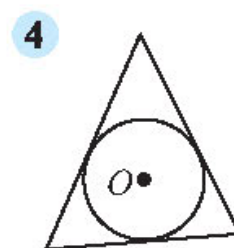
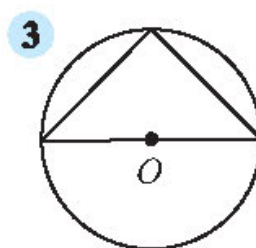
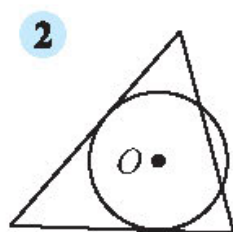
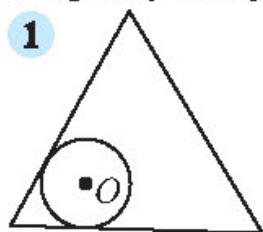
Okrąg nazywamy **wpisanym w trójkąt**, jeżeli jest on styczny do wszystkich boków tego trójkąta.

Okrąg wpisany w trójkąt oznacza to samo, co **trójkąt opisany na okręgu**.

r – promień okręgu wpisanego w trójkąt



Ćwiczenie 28. Określ, na którym spośród rysunków **1**, **2**, **3** czy **4** okrąg o środku O jest wpisany w trójkąt.



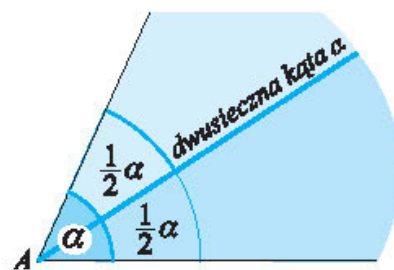
Umiejętność rysowania dwusiecznej kąta jest potrzebna do wyznaczania środka okręgu wpisanego w trójkąt, bo środek ten jest równo oddalony od boków trójkąta.

Przypomnijmy

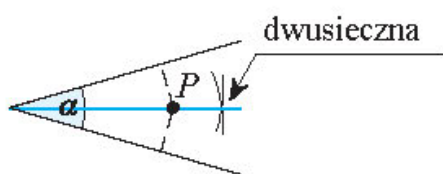
Definicja

Dwusieczną kąta nazywamy półprostą, która dzieli kąt na dwie równe części.

Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem punktów równo oddalonych od jego ramion.

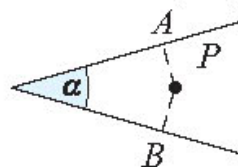


Jeżeli punkt P należy do dwusiecznej kąta,



to jego odległości od ramion kąta są równe.

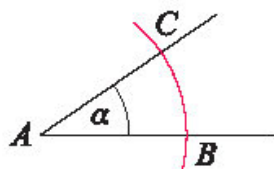
Jeżeli odległości punktu P od ramion kąta są równe, czyli $|PA| = |PB|$,



to punkt P należy do dwusiecznej kąta.

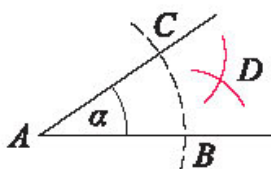
Konstrukcja dwusiecznej kąta

- 1° Z wierzchołka A kąta α kreślimy łuk okręgu o dowolnym promieniu (kolor czerwony).



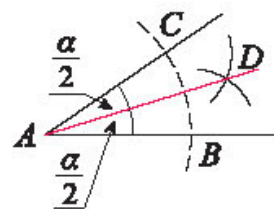
Otrzymujemy punkty B i C .

- 2° Z punktów B i C kreślimy łuki o jednakowym promieniu (łuki czerwone).



Otrzymujemy punkt D .

- 3° Rysujemy półprostą AD .



Półprosta AD jest dwusieczną kąta α .

Twierdzenie

W każdym trójkącie dwusieczne jego kątów przecinają się w jednym punkcie.

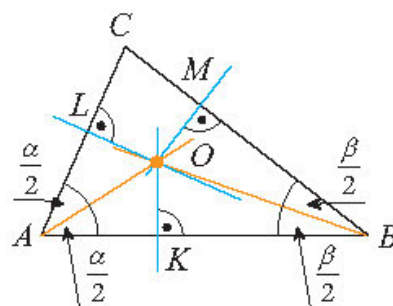
Dowód:

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Prowadzimy dwusieczne dwóch kątów trójkąta ABC , dwusieczną kąta α i dwusieczną kąta β . Zauważamy, że:

- 1° punkt O należy do dwusiecznej kąta α , więc $|OK| = |OL|$,
 2° punkt O należy do dwusiecznej kąta β , więc $|OK| = |OM|$.

Z punktów 1° i 2° wynika, że $|OL| = |OM|$, więc punkt O leży na dwusiecznej kąta γ .
ckd.

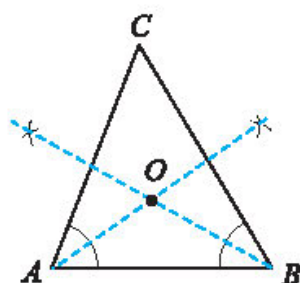


Uwaga

- W każdy trójkąt można wpisać okrąg. Środkiem tego okręgu jest punkt przecięcia się jego dwusiecznych kątów.
- Promień okręgu wpisanego w trójkąt jest równy odległości środka tego okręgu od dowolnego boku trójkąta.

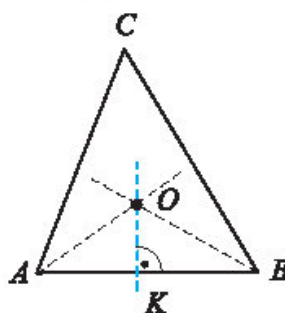
Konstrukcja okręgu wpisanego w trójkąt

1° Kreślimy dwusieczne dwóch kątów trójkąta.



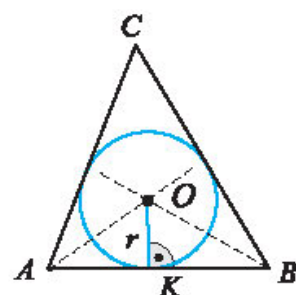
Otrzymujemy punkt O .

2° Kreślimy prostą przechodzącą przez punkt O i prostą prostopadłą do boku AB .



Otrzymujemy punkt K .

3° Kreślimy okrąg o środku O i promieniu $r = |OK|$.



Odcinek OK jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt.

Ćwiczenie 29. Skonstruuj okrąg wpisany w trójkąt:

- a) prostokątny, b) rozwartokątny.

Przykład 5. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku w punkcie O , styczny do boków trójkąta w punktach K , L i M . Oblicz długości odcinków, na jakie podzieliły boki trójkąta te punkty styczności, gdy $|AB| = 24$, $|BC| = 20$ i $|AC| = 18$.

Rozwiązanie

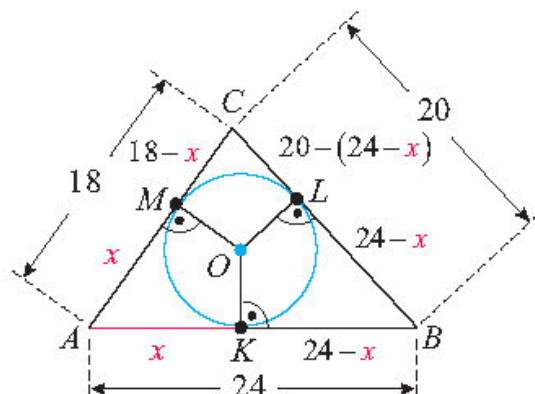
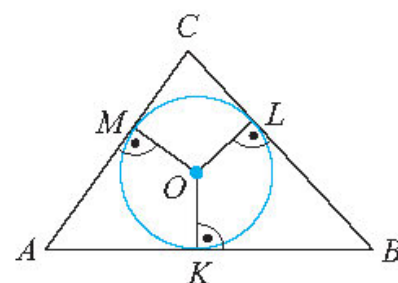
Wprowadzamy oznaczenia, np. $x = |AK|$, następnie każdy odcinek, którego końcem jest punkt styczności i wierzchołek trójkąta, wyrażamy w zależności od x .

$$|MC| = |LC| \text{ i } |MC| = 18 - x \text{ oraz}$$

$$|LC| = 20 - (24 - x), \text{ więc}$$

$$18 - x = 20 - (24 - x), \text{ skąd } x = 11.$$

Odp.: $|AK| = |AM| = 11$, $|KB| = |LB| = 13$, $|MC| = |LC| = 7$.



Ćwiczenie 30. W trójkąt ABC , w którym $|AB|=12$, $|AC|=10$, $|BC|=8$, wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie punkty styczności podzieliły boki tego trójkąta.

Przykład 6. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt, którego boki mają długości 12, 10, 10.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, na którym punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny ABC i odcinki równej długości wyróżnione są tym samym kolorem.

Obliczamy wysokość $h=|CD|$.

$$h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

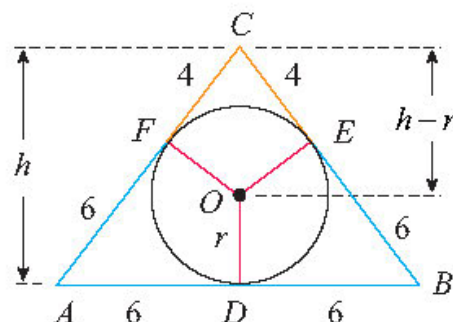
Do trójkąta prostokątnego OFC stosujemy twierdzenie Pitagorasa.

$$|CO|^2 = |OF|^2 + |CF|^2$$

$$(8-r)^2 = r^2 + 4^2$$

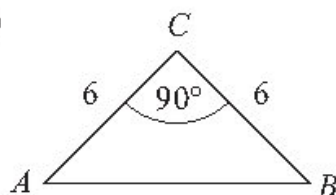
$$64 - 16r + r^2 = r^2 + 16, \text{ skąd } r = 3.$$

Odp.: Promień okręgu wpisanego jest równy 3.

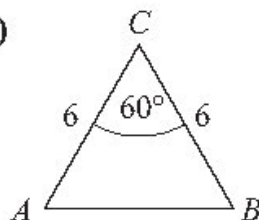


Ćwiczenie 31. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

a)

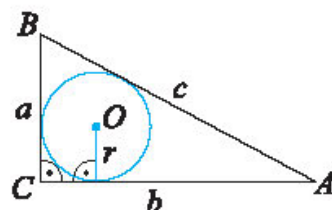


b)



Twierdzenie

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c promień r okręgu wpisanego określony jest wzorem $r = \frac{a+b-c}{2}$.



T (teza):

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Z (założenie):

a, b – długości przyprostokątnych,

c – długość przeciwprostokątnej,

r – promień okręgu wpisanego w dany trójkąt.

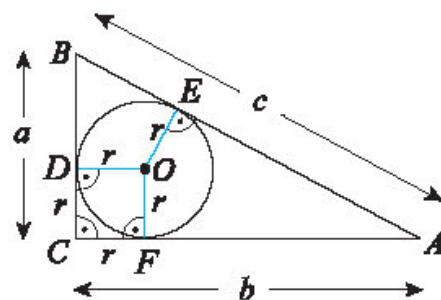
Dowód:

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Zauważamy, że $|DC| = r$ i $|CF| = r$.

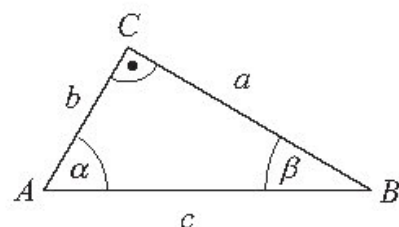
- $|BD| = a - r$ i $|FA| = b - r$,
- $|BE| = |BD| = a - r$ i $|AE| = |AF| = b - r$,
- $|AB| = |AE| + |EB| = c$,

więc $c = b - r + a - r$, skąd $r = \frac{a+b-c}{2}$. **ckd.**



Ćwiczenie 32. Na rysunku przedstawiony jest trójkąt prostokątny ABC . Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt, gdy:

- a) $a = b = \sqrt{2}$, b) $\alpha = 30^\circ$ i $|BC| = 6$,
c) $c = 20$ i $\tan \beta = 1$.

**Przypomnijmy**

Jeżeli bok trójkąta równobocznego ma długość a , to długość jego wysokości h

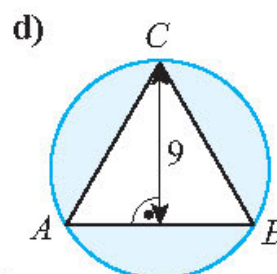
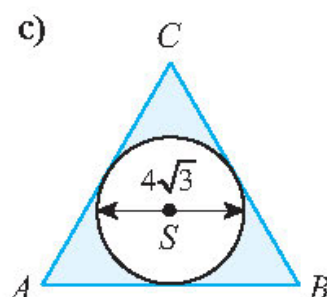
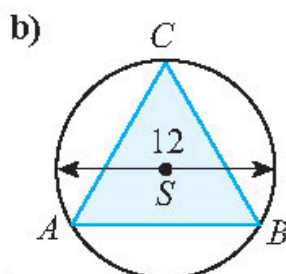
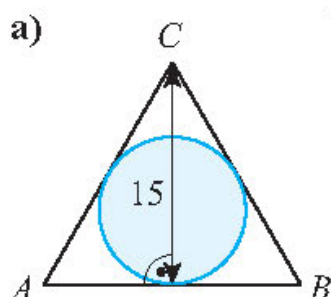
określona jest wzorem $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ćwiczenie 33. Uzasadnij, że w trójkącie równobocznym środkowe i wysokości zawierają się w dwusiecznych jego kątów i w symetralnych jego boków.

Ćwiczenie 34. Uzasadnij, że jeżeli w trójkącie równobocznym bok ma długość a oraz r i R są promieniami okręgów wpisanego w trójkąt i opisanego na nim,

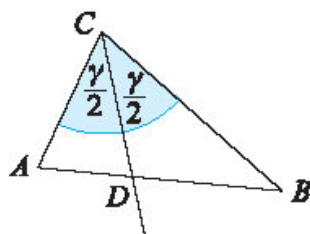
to $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ i $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ćwiczenie 35. Trójkąt ABC jest równoboczny. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie punkt S jest środkiem okręgu, i oblicz pole niebieskiej figury.



Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy stosunkowi długości pozostałych boków.



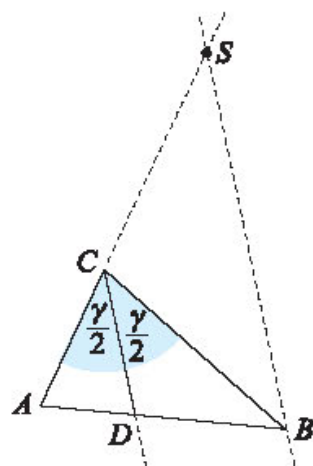
$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Dla dowodu przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, gdzie półprosta CD jest dwusieczną kąta BCA (kąta γ) w trójkącie ACB .

Przez punkt B prowadzimy prostą równoległą do dwusiecznej CD , która na półprostej AC wyznacza punkt S .

$$Z \text{ (założenie): } |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DCA| = \frac{\gamma}{2}, \quad T \text{ (teza): } \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

$DC \parallel BS.$



Dowód:

1° Zauważamy, że trójkąt CBS jest trójkątem równoramiennym, bo:

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ACD| = \frac{\gamma}{2}$$

Dwa kąty odpowiadające

$$|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle BCD| = \frac{\gamma}{2}. \quad \text{Zatem } |BC| = |CS|.$$

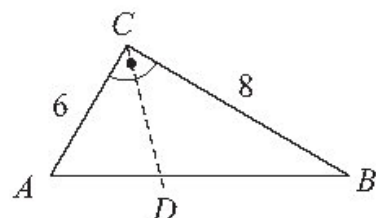
Dwa kąty naprzemianległe

2° Korzystając z twierdzenia Talesa, otrzymujemy $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CS|}$.

3° $|BC| = |CS|$, więc $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. **ckd.**

Ćwiczenie 36. Poszukaj w Internecie innych dowodów twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie i przeanalizuj je. Zapoznaj się również z uogólnionym twierdzeniem o dwusiecznej kąta.

Przykład 7. Na rysunku odcinek CD zawiera się w dwusiecznej kąta prostego trójkąta prostokątnego ABC . Oblicz długości odcinków AD i DB .



Rozwiązanie

Obliczamy długość przeciwprostokątnej AB :

$$|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Korzystamy z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie ABC :

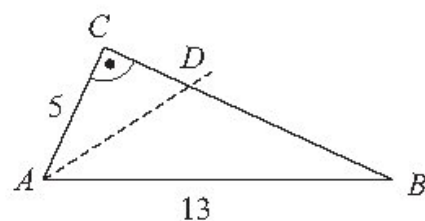
$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}, \text{ gdzie } |AC| = 6, |BC| = 8 \text{ i } |DB| = 10 - |AD|$$

$$\frac{|AD|}{10 - |AD|} = \frac{6}{8}, \text{ skąd } |AD| = \frac{30}{7}.$$

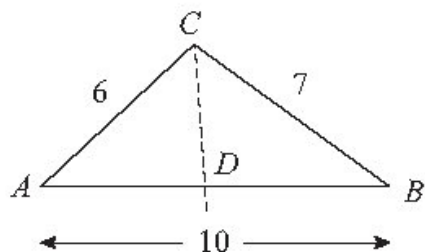
$$\text{Zatem } |DB| = 10 - \frac{30}{7} = \frac{40}{7}.$$

$$\text{Odp.: } |AD| = 4\frac{2}{7} \text{ i } |DB| = 5\frac{5}{7}.$$

Ćwiczenie 37. Na rysunku odcinek AD zawiera się w dwusiecznej kąta CAB prostokątnego trójkąta ABC . Oblicz długości odcinków CD i DB .



Ćwiczenie 38. W trójkącie ABC dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku C przecięła bok AB w punkcie D . Wiedząc, że $|AB| = 10$, $|BC| = 7$ i $|AC| = 6$, oblicz długość odcinka AD .

**Odpowiedzi do ćwiczeń**

30. $AB: 7 \text{ i } 5$, $AC: 7 \text{ i } 3$, $BC: 5 \text{ i } 3$. 31. a) $6 - 3\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3}$.

32. a) $r = \sqrt{2} - 1$, b) $r = 3\sqrt{3} - 3$, c) $r = 10\sqrt{2} - 10$. 35. a) 25π , b) $27\sqrt{3}$, c) $36\sqrt{3} - 12\pi$, d) $36\pi - 27\sqrt{3}$.

37. $|CD| = \frac{10}{3}$ i $|DB| = \frac{26}{3}$. 38. $\frac{60}{13}$.

Zadania utrwalające

8.37. W trójkąt ABC wpisano okrąg. Oblicz długości odcinków, na jakie punkty styczności podzieliły boki tego trójkąta, gdy:

a) $|AC| = 12$, $|BC| = 16$ i $|AB| = 20$, b) $|AC| = |BC| = 16$ i $|AB| = 12$.

8.38. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny, którego boki mają długości:

a) 5, 5, 6,

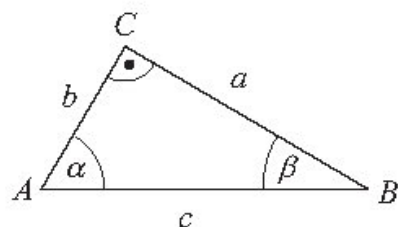
b) 13, 13, 24,

c) 35, 35, 36.

8.39. Na rysunku przedstawiony jest trójkąt prostokątny ABC .

Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt, gdy:

- a) $a = 51$ i $b = 68$, b) $a = 55$ i $c = 143$,
c) $b = 72$ i $c = 78$.



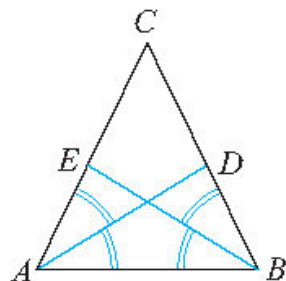
8.40. W trójkącie ABC dwusieczna kąta o wierzchołku A przecina bok BC w punkcie D .

Wiedząc, że $|AC| = 6$, $|AB| = 10$, $|BD| = 4$, oblicz:

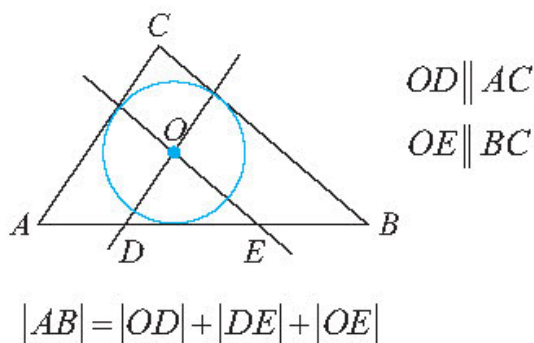
- a) długość odcinka CD ,
b) długości odcinków, na jakie podzielił bok AB dwusieczna kąta przy wierzchołku C .

8.41. W trójkącie prostokątnym równoramiennym dwusieczna kąta ostrego dzieli przyprostokątną na dwa odcinki, z których jeden ma długość $\sqrt{2}$. Oblicz długość drugiego z tych odcinków.

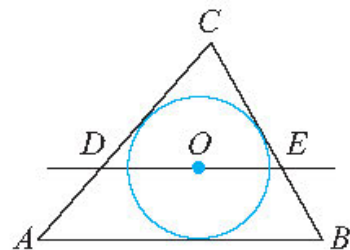
8.42. Wykaż, że w równoramiennym trójkącie ABC dwusieczne AD i BE kątów przy podstawie trójkąta mają równe długości.



8.43. Przez środek O okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AC i prostą równoległą do boku BC . Proste te przecięły bok AB trójkąta odpowiednio w punktach D i E . Uzasadnij, że obwód trójkąta DEO jest równy długości odcinka AB .



8.44. Przez środek O okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB , która przecięła boki AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Uzasadnij, że $|DE| = |AD| + |BE|$.



8.45. Udowodnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgów wpisanego w trójkąt i opisanego na tym trójkącie.

Trójkąty i ich punkty szczególne na płaszczyźnie kartezjańskiej

Przypomnijmy

Punkty szczególne trójkąta:

- **środek ciężkości** – punkt przecięcia środkowych boków trójkąta,
- **ortocentrum** – punkt przecięcia wysokości trójkąta,
- **środek okręgu opisanego** – punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta,
- **środek okręgu wpisanego** – punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta.

Jeżeli znamy współrzędne wierzchołków trójkąta lub równania prostych zawierających jego boki, to na płaszczyźnie kartezjańskiej możemy:

- określać rodzaj trójkąta,
- wyznaczać współrzędne jego punktów szczególnych,
- napisać równanie okręgu na nim opisanego lub okręgu w niego wpisanego.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 8. Określ rodzaj trójkąta ABC , gdy $A = (3, -2)$, $B = (9, 2)$ i $C = (-4, 1)$.

Rozwiązanie

Obliczamy kwadraty długości boków trójkąta i porównujemy je.

$$|AB|^2 = (9-3)^2 + (2+2)^2 = 52$$

$$|AC|^2 = (-4-3)^2 + (1+2)^2 = 58$$

$$|BC|^2 = (-4-9)^2 + (1-2)^2 = 170.$$

Zauważamy, że $|BC|^2 > |AB|^2 + |AC|^2$, więc trójkąt jest rozwartokątny.

Ćwiczenie 39. Określ rodzaj trójkąta ABC , gdy:

- $A = (1, 3)$, $B = (4, 7)$, $C = (2, 8)$,
- $A = (-4, -3)$, $B = (7, -4)$, $C = (1, 2)$.

Ćwiczenie 40. Określ rodzaj trójkąta, wiedząc, że jego boki zawierają się w prostych o równaniach:

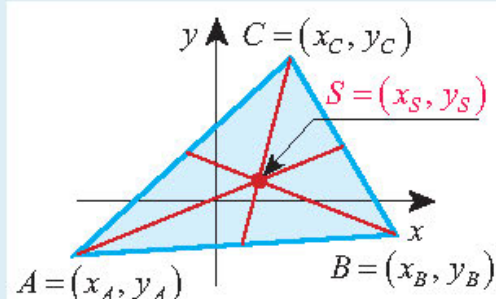
- $x - y - 2 = 0$, $3x - y - 2 = 0$, $x + 3y - 14 = 0$,
- $4x + 3y - 21 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $3x + y - 7 = 0$.

Jeśli znamy współrzędne wierzchołków trójkąta, to jego środek ciężkości możemy wyznaczyć, rozwiązując układ składający się z dwóch równań środkowych albo skorzystać z twierdzenia, które teraz udowodnimy.

Twierdzenie

Jeżeli punkt $S = (x_S, y_S)$ jest punktem przecięcia się środkowych trójkąta ABC , gdzie $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ i $C = (x_C, y_C)$, to

$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{i} \quad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$



S – środek ciężkości trójkąta ABC

Z (założenie):

$A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$,
 $S = (x_S, y_S)$ – punkt przecięcia się
 środkowych trójkąta ABC .

T (teza):

$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{i} \quad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Dowód:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, gdzie punkt $M = (x_M, y_M)$

jest środkiem odcinka AB i $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$,

a punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC .

Skorzystamy z równości wektorów:

$$\vec{MS} = \frac{1}{3} \cdot \vec{MC}, \quad \text{gdzie}$$

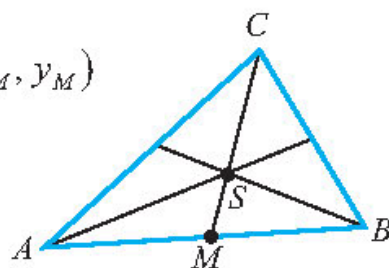
$$\vec{MS} = [x_S - x_M, y_S - y_M] \quad \text{i} \quad \vec{MC} = [x_C - x_M, y_C - y_M]$$

$$\frac{1}{3} \cdot \vec{MC} = \left[\frac{x_C - x_M}{3}, \frac{y_C - y_M}{3} \right]$$

$$[x_S - x_M, y_S - y_M] = \left[\frac{x_C - x_M}{3}, \frac{y_C - y_M}{3} \right]$$

$$x_S - x_M = \frac{x_C - x_M}{3} \quad \text{i} \quad y_S - y_M = \frac{y_C - y_M}{3}$$

$$x_S = \frac{x_C - x_M}{3} + x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{i} \quad y_S = \frac{y_C - y_M}{3} + y_M = \frac{y_C + y_A + y_B}{3} \quad \text{ckd.}$$



Środek ciężkości dzieli środkowe trójkąta w stosunku 2:1.

Obliczamy współrzędne wektorów $\vec{MS}$ i $\vec{MC}$.

Obliczamy współrzędne wektora $\frac{1}{3} \cdot \vec{MC}$.

Wektory równe mają równe współrzędne.

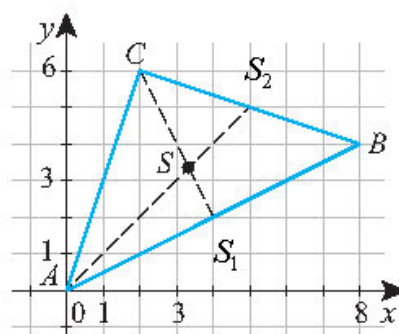
Przykład 9. Oblicz współrzędne środka ciężkości trójkąta ABC , gdy $A = (0, 0)$, $B = (8, 4)$ i $C = (2, 6)$.

Rozwiązanie

I sposób

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, gdzie S_1 i S_2 są środkami boków AB i BC .

Piszemy równanie prostych CS_1 i AS_2 , w których zawierają się środki trójkąta:



$$S_1 = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{4+0}{2} \right) = (4, 2) \quad \left| \quad S_2 = \left(\frac{2+8}{2}, \frac{6+4}{2} \right) = (5, 5) \right.$$

$$CS_1: \quad y - y_C = \frac{y_{S_1} - y_C}{x_{S_1} - x_C} (x - x_C) \quad \left| \quad AS_2: \quad y - y_A = \frac{y_{S_2} - y_A}{x_{S_2} - x_A} (x - x_A) \right.$$

$$y - 6 = \frac{2 - 6}{4 - 2} \cdot (x - 2) \quad \left| \quad y - 0 = \frac{5 - 0}{5 - 0} \cdot (x - 0) \right.$$

$$y = -2x + 10. \quad \left| \quad y = x. \right.$$

Obliczamy współrzędne środka ciężkości, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = -2x + 10 \\ y = x \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{10}{3} \end{cases}, \text{ więc } S = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3} \right).$$

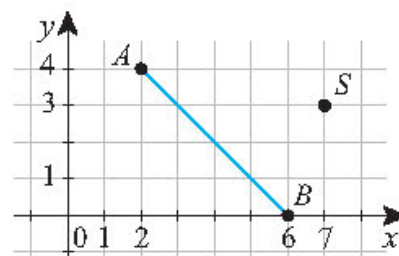
II sposób

Korzystamy z wzoru $S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$:

$$S = \left(\frac{0+8+2}{3}, \frac{0+4+6}{3} \right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3} \right).$$

Ćwiczenie 41. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A = (-4, 5)$, $B = (-1, -2)$, $C = (3, 6)$. Oblicz współrzędne środka ciężkości tego trójkąta.

Ćwiczenie 42. Na rysunku punkty $A = (2, 4)$, $B = (6, 0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , a punkt $S = (7, 3)$ jest jego środkiem ciężkości. Oblicz współrzędne wierzchołka C .



Przykład 10. Proste o równaniach $4x + 5y = 0$ i $x - 3y = 0$ zawierają dwie środkowe trójkąta ABC , w którym $A = (2, -5)$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C .

Rozwiązanie

Sprawdzamy, czy wierzchołek A należy do którejś z podanych prostych:

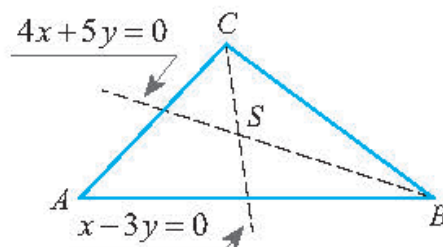
$$4x_A + 5y_A = 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-5) = -17 \quad \text{i} \quad -17 \neq 0,$$

$$x_A - 3y_A = 2 - 3 \cdot (-5) = 17 \quad \text{i} \quad 17 \neq 0.$$

Punkt A nie należy do żadnej z podanych prostych.

Obliczamy współrzędne punktu S przecięcia się środkowych, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}, \quad \text{skąd} \quad S = (0, 0).$$



Założmy, że:

- punkt $B = (x_B, y_B)$ należy do prostej o równaniu $4x + 5y = 0$, więc $4x_B + 5y_B = 0$,

$$\text{skąd } y_B = -\frac{4}{5}x_B. \quad \text{Zatem } B = \left(x_B, -\frac{4}{5}x_B\right).$$

- punkt $C = (x_C, y_C)$ należy do prostej o równaniu $x - 3y = 0$, więc $x_C - 3y_C = 0$,

$$\text{skąd } y_C = \frac{1}{3}x_C. \quad \text{Zatem } C = \left(x_C, \frac{1}{3}x_C\right).$$

Aby obliczyć współrzędne wierzchołków B i C , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{2 + x_B + x_C}{3} = 0 \\ -5 - \frac{4}{5}x_B + \frac{1}{3}x_C = 0 \end{cases}, \quad \text{skąd} \quad \begin{cases} x_B = -5 \\ x_C = 3 \end{cases}.$$

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

$$B = \left(x_B, -\frac{4}{5}x_B\right), \quad C = \left(x_C, \frac{1}{3}x_C\right)$$

Odp.: $B = (-5, 4)$ i $C = (3, 1)$.

Ćwiczenie 43. Proste o równaniach $x - y = 0$ i $4x + 2y = 0$ zawierają dwie środkowe trójkąta ABC , w którym $A = (-4, 2)$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C .

Rozwiązując odpowiedni układ równań, możemy obliczyć współrzędne punktu nazywanego ortocentrum trójkąta oraz środek okręgu opisanego na tym trójkącie.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 11. Oblicz współrzędne punktu W , który jest ortocentrum trójkąta ABC , gdy $A = (-4, -2)$, $B = (10, 2)$ i $C = (4, 6)$.

Rozwiązanie

Piszemy równania prostych, w których zawierają się wysokości h_A i h_C poprowadzone z wierzchołków A i C :

$$a_{BC} = \frac{2-6}{10-4} = -\frac{2}{3}$$

$$a_{h_A} = \frac{3}{2},$$

$$y - y_A = a_{h_A}(x - x_A)$$

$$y + 2 = \frac{3}{2}(x + 4)$$

$$y = \frac{3}{2}x + 4.$$

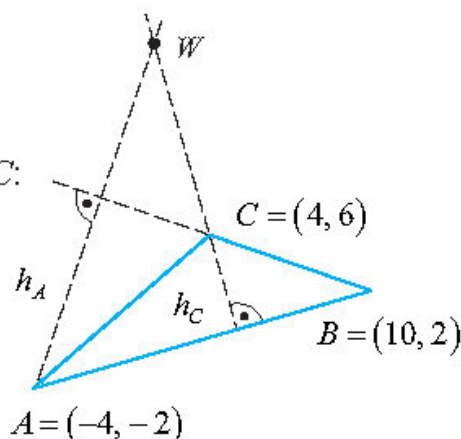
$$a_{AB} = \frac{2+2}{10+4} = \frac{2}{7}$$

$$a_{h_C} = -\frac{7}{2},$$

$$y - y_C = a_{h_C}(x - x_C)$$

$$y - 6 = -\frac{7}{2}(x - 4)$$

$$y = -\frac{7}{2}x + 20.$$



Obliczamy współrzędne ortocentrum W trójkąta ABC , rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 4 \\ y = -\frac{7}{2}x + 20 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} x = 3\frac{1}{5} \\ y = 8\frac{4}{5} \end{cases}, \text{ czyli } W = \left(3\frac{1}{5}, 8\frac{4}{5}\right).$$

Ćwiczenie 44. Oblicz współrzędne punktu W , który jest ortocentrum trójkąta ABC , gdy $A = (3, 0)$, $B = (2, 5)$ i $C = (-2, 1)$.

Przykład 12. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-2, -1)$, $B = (-1, 2)$ i $C = (6, 3)$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że punkty A , B , C są wierzchołkami trójkąta ABC .

I sposób

Piszemy równania dwóch symetralnych boków trójkąta.

Równanie symetralnej boku AB :

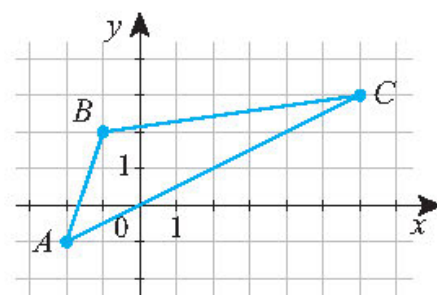
$$S_{AB} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ i } a_{AB} = \frac{2-(-1)}{-1-(-2)} = 3$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Równanie symetralnej boku AC :

$$S_{AC} = (2, 1) \text{ i } a_{AC} = \frac{3-(-1)}{6-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$a = -2$$



$$y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}x. \quad \left| \quad y = -2(x-2) + 1 = -2x + 5. \right.$$

Wyznaczamy współrzędne punktu S , rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x \\ y = -2x + 5 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}, \text{ czyli } S = (3, -1).$$

Obliczamy promień r okręgu opisanego na trójkącie ABC jako odległość punktów S i A .

$$r = |SA| = \sqrt{(3+2)^2 + (-1+1)^2} = 5.$$

II sposób

Do okręgu należą punkty A , B i C , więc współrzędne

tych punktów spełniają równanie okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

$$\begin{array}{ll} \textbf{1} & \begin{cases} (-2-a)^2 + (-1-b)^2 = r^2 \\ (-1-a)^2 + (2-b)^2 = r^2 \\ (6-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \end{cases} \\ \textbf{2} & \text{skąd} \\ \textbf{3} & \begin{cases} a^2 + b^2 + 4a + 2b + 5 = r^2 \\ a^2 + b^2 + 2a - 4b + 5 = r^2 \\ a^2 + b^2 - 12a - 6b + 45 = r^2 \end{cases} \end{array}$$

Obie strony równania **2** mnożymy przez (-1) i otrzymujemy:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 4a + 2b + 5 = r^2 \\ -a^2 - b^2 - 2a + 4b - 5 = -r^2 \\ a^2 + b^2 - 12a - 6b + 45 = r^2 \end{cases}$$

Dodając stronami równania **1** i **2** oraz równania **2** i **3**, otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2a + 6b = 0 \\ -14a - 2b + 40 = 0 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Odp.: } (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

Ćwiczenie 45. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC , gdy $A = (1, 1)$, $B = (-1, -3)$ i $C = (4, 2)$.

Ćwiczenie 46. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny, gdy $A = (-5, 0)$, $B = (4, -3)$ i $C = (-2, 3)$. Jeśli tak, to napisz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

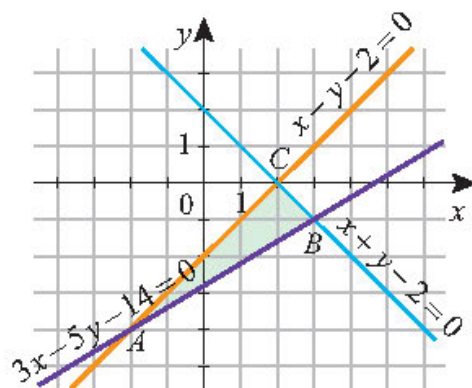
Przykład 13. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych o równaniach:

$$x + y - 2 = 0, \quad 3x - 5y - 14 = 0, \quad x - y - 2 = 0.$$

- Oblicz współrzędne ortocentrum trójkąta ABC .
- Napisz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie

Zauważamy, że proste o równaniach $x + y - 2 = 0$ i $x - y - 2 = 0$ są prostopadłe, więc trójkąt ABC jest prostokątny.



- Wierzchołek kąta prostego w trójkącie prostokątnym jest jego ortocentrum. Obliczamy współrzędne wierzchołka C , rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}, \text{ skąd } C = (2, 0).$$

- Środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środek przeciwprostokątnej AB , a promień R tego okręgu jest równy połowie jej długości. Obliczamy współrzędne wierzchołków A i B , rozwiązując układy równań:

$$\text{współrzędne wierzchołka } A: \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 3x - 5y - 14 = 0 \end{cases}, \text{ skąd } A = (-2, -4),$$

$$\text{współrzędne wierzchołka } B: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - 5y - 14 = 0 \end{cases}, \text{ skąd } B = (3, -1).$$

Obliczamy długość przeciwprostokątnej AB :

$$|AB| = \sqrt{(3+2)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{34}, \text{ więc } R = \frac{1}{2}\sqrt{34}.$$

Wyznaczamy środek S okręgu (środek przeciwprostokątnej) i piszemy równanie okręgu:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right), \text{ więc } S = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{-4-1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \right)$$

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{5}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{34}}{2} \right)^2.$$

$$\text{Odp.: a) } C = (2, 0), \quad \text{b) } \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{17}{2}.$$

Ćwiczenie 47. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych o równaniach:

$$x - y + 3 = 0, \quad 3x - y - 7 = 0, \quad x + y - 1 = 0.$$

- Oblicz współrzędne ortocentrum trójkąta ABC .
- Napisz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.
- Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

Odpowiedzi do ćwiczeń

39. Trójkąt jest: a) ostrokątny, b) prostokątny. 40. Trójkąt jest: a) prostokątny, b) rozwartokątny.

41. $\left(-\frac{2}{3}, 3\right)$. 42. $C = (13, 5)$. 43. $B = (2, 2)$ i $C = (2, -4)$. 44. $W = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

45. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$. 46. Tak, $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 22,5$.

47. a) $(-1, 2)$, b) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}$, c) $\frac{3\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2}$.

Zadania utrwalające

8.46. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty:

- $A = (2, 1)$, $B = (4, 3)$, $C = (1, 4)$, b) $A = (50, 30)$, $B = (90, 30)$, $C = (80, 60)$,
- $A = (-1, 5)$, $B = (5, -1)$, $C = (2 + 3\sqrt{3}, 2 + 3\sqrt{3})$.

Określ rodzaj trójkąta ABC ze względu na boki.

8.47. Określ rodzaj trójkąta ze względu na kąty, gdy jego boki zawierają się w prostych o równaniach:

- $x - y - 2 = 0$, $x + y - 2 = 0$, $x - 8 = 0$,
- $2x - y + 2 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$, $y - 4 = 0$,
- $3x + 2y - 10 = 0$, $x + 6y - 14 = 0$, $x + 2y - 10 = 0$.

8.48. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest prostokątny. Jeśli tak, to oblicz długość promienia R okręgu opisanego i długość promienia r okręgu wpisanego w ten trójkąt:

- $A = (-2, 0)$, $B = (4, 2)$ i $C = (2, 5)$, b) $A = (1, 0)$, $B = (-2, 3)$ i $C = (-4, 1)$,
- $A = (-5, 0)$, $B = (-3, 2)$ i $C = (-4, 5)$, d) $A = (5, -3)$, $B = (3, 3)$ i $C = (-3, 1)$.

8.49. Punkty $A = (-2, 0)$, $B = (2, -2)$ i $C = (4, 6)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz współrzędne:

- środką ciężkości tego trójkąta, b) środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie,
- ortocentrum.

8.50. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC , gdy:

- a) $A = (2, 3)$, $B = (-1, 3)$, $C = (3, 1)$, b) $A = (-1, 6)$, $B = (3, -2)$, $C = (-4, -9)$,
 c) $A = (2, 2)$, $B = (-5, -5)$, $C = (1, 5)$.

8.51. Punkty $A = (2, -1)$ i $B = (6, -1)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Oblicz współrzędne wierzchołka C .

8.52. Punkty $A = (-1, 1)$ i $B = (5, 1)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC . Napisz równania prostych zawierających boki AC i BC tego trójkąta.

8.53. W trójkącie ABC , gdzie $A = (1, 1)$ i $\vec{AB} = [4, 2]$, punkt $S = (4, 6)$ jest jego środkiem ciężkości. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

8.54. Punkty $A = (1, 0)$, $B = (2, 1)$ i $C = (5, -2)$ należą do okręgu o równaniu postaci $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

- a) Oblicz współczynniki a , b i c .
 b) Napisz równanie tego okręgu w postaci $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

R



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Boki trójkąta mają długości: 7, 8, 10. Zatem:

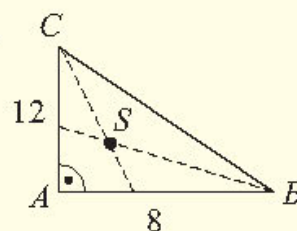
- A. trójkąt jest ostrokątny, B. trójkąt jest prostokątny,
 C. trójkąt jest rozwartokątny, D. nie da się określić rodzaju trójkąta.

2. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 12 i 8.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość środka ciężkości S od wierzchołka B tego trójkąta jest równa:

- A. $\frac{10}{3}$, B. $\frac{20}{3}$, C. 10, D. 15.



3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest:

- A. środek najkrótszej wysokości trójkąta,
 B. punkt przecięcia się symetralnych boków trójkąta,
 C. punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta,
 D. środek najdłuższego boku.

4. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

- A. 2, B. 5, C. 7, D. 10.

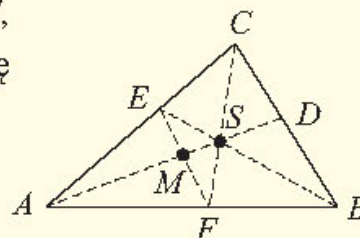
5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy połowie długości jednego z jego boków. Trójkąt ten jest:

- A. rozwartokątny, B. równoboczny,
 C. prostokątny, D. ostrokątny różnoboczny.

6. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe: AD , BE i CF , przecinające się w punkcie S . Odcinki AD i EF przecinają się w punkcie M jak na rysunku.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.



$ SD = \frac{1}{3} AD $	P	F
--------------------------	---	---

$ MD = \frac{1}{2} AD $	P	F
--------------------------	---	---

$ MS = \frac{1}{6} AD $	P	F
--------------------------	---	---

7. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 5 i 12.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

- A. 2, B. 2,5.

Różnica między promieniami okręgu opisanego na tym trójkącie i wpisanego w ten trójkąt jest równa:

- C. 4, D. 4,5.

8. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości a i b , a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość h . Wykaż, że $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

D

9. Napisz równanie okręgu, do którego należą punkty $A = (2, 3)$ i $B = (5, 2)$, a jego środek S należy do osi x .

9. Obrazy figur w symetrii względem osi układu współrzędnych i względem początku tego układu

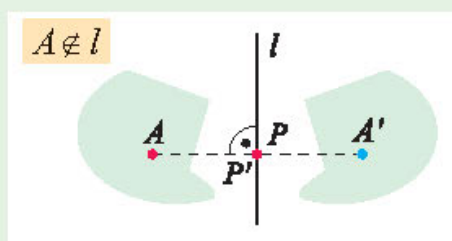
Obrazy figur w symetrii względem osi układu współrzędnych

W szkole podstawowej poznaliście pojęcie punktów symetrycznych względem prostej zwanej osią symetrii oraz intuicyjne pojęcie odbicia lustrzanego, które jest ściśle związane z pojęciem symetrii osiowej.

Definicja

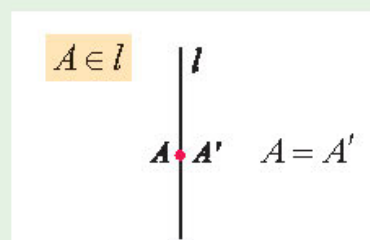
Symetria osiowa S_l względem prostej l , zwanej osią symetrii, nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi A przyporządkowuje taki punkt A' , że jeśli:

punkt A nie należy do osi symetrii l ,
to prosta l jest symetralną odcinka AA' ,



$$AA' \perp l \text{ i } |AP| = |PA'|$$

punkt A należy do osi symetrii l , to
obraz A' pokrywa się z punktem A .



$$|AA'| = 0$$

- Jeżeli obrazem figury F w symetrii o osi l jest ta sama figura ($S_l(F) = F$), to nazywamy ją **osiowosymetryczną**, a prostą l jej osią symetrii.

Ćwiczenie 1. a) Wśród wzorów wycinanek łowickich wskaż te, które są osiowosymetryczne. Dla każdej z tych wycinanek podaj liczbę jej osi symetrii.

1



2



3



4



b) Podaj przykład wielokąta, który ma dokładnie:

1 jedną oś symetrii,

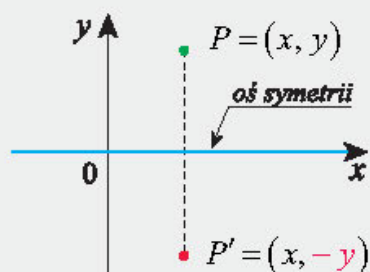
2 dwie osie symetrii,

3 trzy osie symetrii.

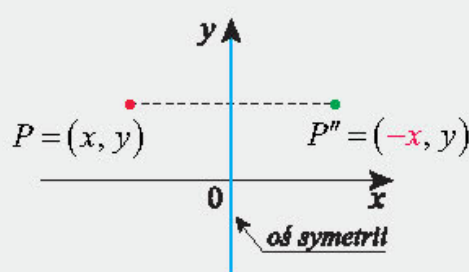
Uwaga

W prostokątnym układzie współrzędnych obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii osiowej (odbiciu lustrzanym) względem:

osi x jest punkt $P' = (x, -y)$,



osi y jest punkt $P'' = (-x, y)$.



Obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem:

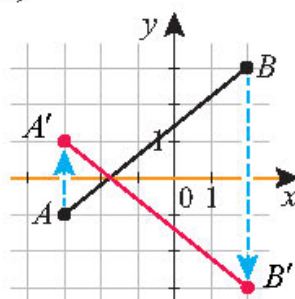
- osi x jest punkt P' , taki że $P' = (x, -y)$, co zapisujemy $S_x((x, y)) = (x, -y)$,
- osi y jest punkt P'' , taki że $P'' = (-x, y)$, co zapisujemy $S_y((x, y)) = (-x, y)$.

Przykład 1. Narysuj obraz odcinka AB w symetrii względem:

- a) osi x , b) osi y .

Rozwiązanie

a)



Punkty symetryczne względem osi x mają równe odcięte, a ich rzędne są liczbami przeciwnymi.

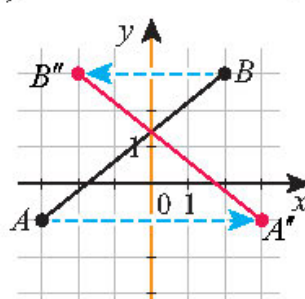
$$A = (-3, -1), \quad B = (2, 3),$$

$$A' = (-3, 1), \quad B' = (2, -3).$$

Odcinek $A'B'$ jest obrazem odcinka AB w symetrii względem osi x .

Figura złożona z odcinków AB i $A'B'$ jest figurą osiowosymetryczną.

b)



Punkty symetryczne względem osi y mają równe rzędne, a ich odcięte są liczbami przeciwnymi.

$$A = (-3, -1), \quad B = (2, 3),$$

$$A'' = (3, -1), \quad B'' = (-2, 3).$$

Odcinek $A''B''$ jest obrazem odcinka AB w symetrii względem osi y .

Figura złożona z odcinków AB i $A''B''$ jest figurą osiowosymetryczną.

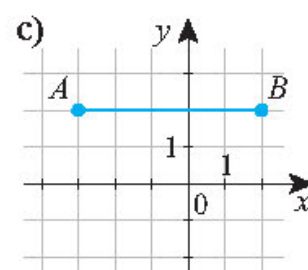
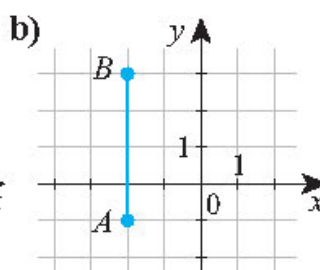
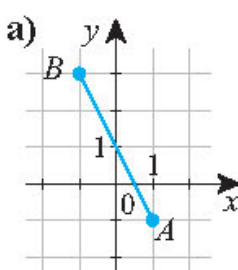
Ćwiczenie 2. Oblicz współrzędne obrazu punktu P w symetrii względem:

- 1 osi x , 2 osi y , gdy: a) $P = (-1, -2)$, b) $P = (4, -3)$, c) $P = (2, 5)$.

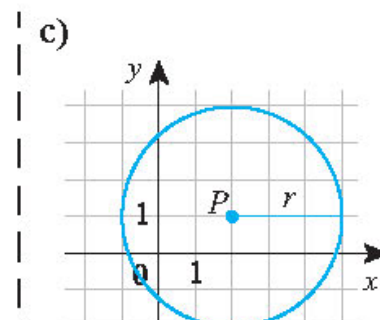
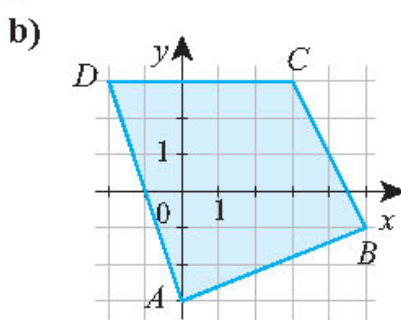
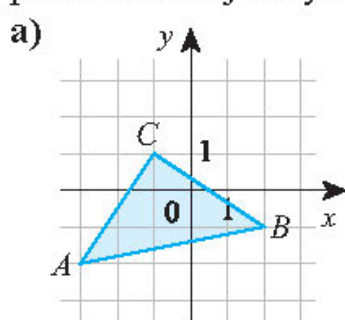


Ćwiczenie 3. Przerysuj rysunek do zeszytu i narysuj obraz odcinka AB w symetrii osiowej względem:

- 1 osi x , 2 osi y , gdy:



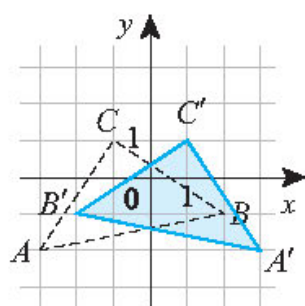
Przykład 2. Narysuj figurę symetryczną względem osi y do figury (kolor niebieski) przedstawionej na rysunku.



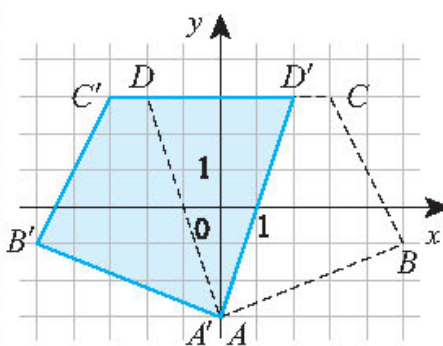
Rozwiązanie

Aby na płaszczyźnie kartezjańskiej narysować w symetrii osiowej obraz:

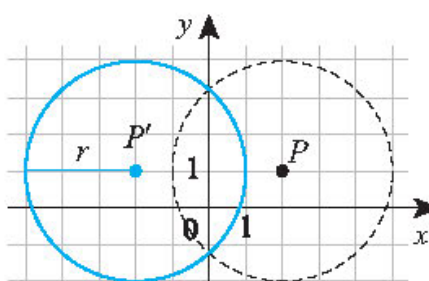
a) trójkąta, znajdujemy obrazy jego wierzchołków i łączymy je,



b) czworokąta, znajdujemy obrazy jego wierzchołków i łączymy je,



c) okręgu, znajdujemy obraz jego środka i rysujemy okrąg o nowym środku i takim samym promieniu.



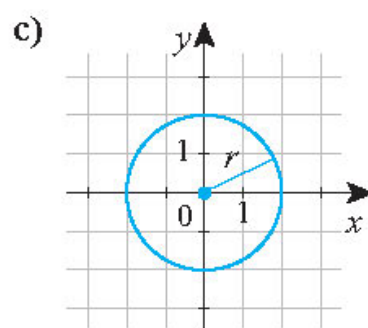
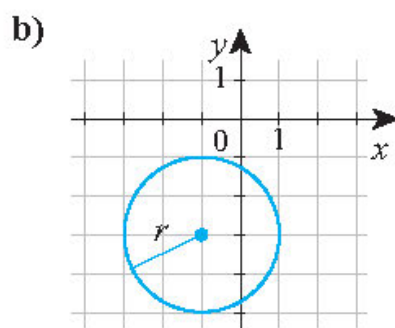
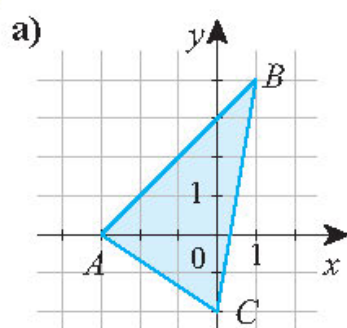
Uwaga

W symetrii osiowej figura i jej obraz są figurami przystającymi.

- Np. obrazem:
- odcinka jest odcinek tej samej długości,
 - wielokąta jest wielokąt do niego przystający,
 - okręgu jest okrąg o takim samym promieniu,
 - prostej jest prosta,



Ćwiczenie 4. Przerysuj rysunek do zeszytu i narysuj obraz przedstawionej figury w symetrii względem osi x .



Przykład 3. Na płaszczyźnie kartezjańskiej narysuj prostą l o równaniu $y = x - 1$ i prostą, która jest jej obrazem w symetrii względem osi x . Napisz równanie otrzymanej prostej.

Rozwiązanie

W symetrii osiowej obrazem prostej jest prosta. Rysujemy prostą o równaniu $y = x - 1$, obierając dwa punkty należące do niej, np. punkty $A = (0, -1)$ i $B = (1, 0)$.

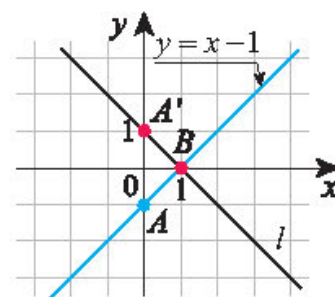
Wyznaczamy obrazy punktów A i B w symetrii względem osi x :

- $S_x(A) = A'$, $S_x((0, -1)) = (0, 1)$, więc $A' = (0, 1)$,
- punkt B leży na osi x , która jest osią symetrii, więc $S_x(B) = B$.

Rysujemy prostą $A'B$. Równanie prostej $A'B$ wyznaczamy, korzystając z wzoru

$$y - y_{A'} = \frac{y_B - y_{A'}}{x_B - x_{A'}}(x - x_{A'}), \text{ skąd } y = -x + 1.$$

Odp.: Obrazem prostej o równaniu $y = x - 1$ w symetrii względem osi x jest prosta o równaniu $y = -x + 1$.

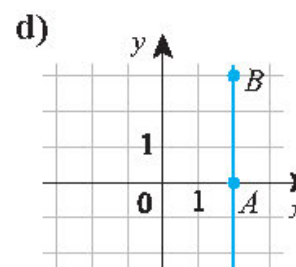
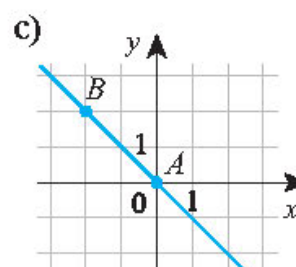
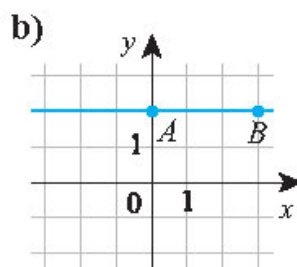
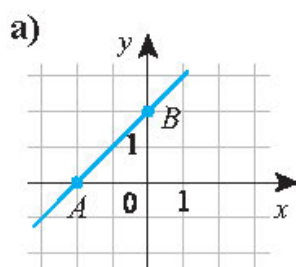


Ćwiczenie 5. Narysuj prostą o równaniu $y = -x + 2$ i jej obraz w symetrii względem:

a) osi x , b) osi y . Napisz równanie otrzymanej prostej.



Ćwiczenie 6. Przerysuj rysunek do zeszytu i narysuj obraz prostej AB w symetrii względem: **1** osi x , **2** osi y .



Przykład 4. Napisz równanie okręgu, który jest obrazem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ w symetrii względem: **a)** osi y , **b)** osi x .

Rozwiązanie

Z równania okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ wyznaczamy jego środek $M = (-1, 2)$ i promień $r = 3$. Wiemy, że obrazem okręgu w symetrii osiowej jest okrąg do niego przystający, więc wystarczy wyznaczyć współrzędne obrazu środka M , by napisać równanie symetrycznego okręgu.

a) $S_y(M) = M'$, $S_y((-1, 2)) = (1, 2)$, więc $M' = (1, 2)$ i $r = 3$.

b) $S_x(M) = M''$, $S_x((-1, 2)) = (-1, -2)$, więc $M'' = (-1, -2)$ i $r = 3$.

Odp.: **a)** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$, **b)** $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Ćwiczenie 7. Napisz równanie okręgu symetrycznego względem: **1** osi x , **2** osi y , do okręgu o równaniu:

a) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 16$, **b)** $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) **1** – 8 osi symetrii, **2** – 1 oś symetrii, **4** – 2 osie symetrii. **2. a)** **1** $P' = (-1, 2)$, **2** $P'' = (1, -2)$,

b) **1** $P' = (4, 3)$, **2** $P'' = (-4, -3)$, **c)** **1** $P' = (2, -5)$, **2** $P'' = (-2, 5)$.

3. Odcinek o końcach **a)** **1** $A' = (1, 1)$, $B' = (-1, -3)$, **2** $A'' = (-1, -1)$, $B'' = (1, 3)$,

b) **1** $A' = (-2, 1)$, $B' = (-2, -3)$, **2** $A'' = (2, -1)$, $B'' = (2, 3)$,

c) **1** $A' = (-3, -2)$, $B' = (2, -2)$, **2** $A'' = (3, 2)$, $B'' = (-2, 2)$.

4. a) Trójkąt o wierzchołkach $A' = (-3, 0)$, $B' = (1, -4)$, $C' = (0, 2)$, **b)** okrąg o środku $(-1, 3)$ i promieniu 2,

c) ten sam okrąg. **5. a)** $y = x - 2$, **b)** $y = x + 2$.

6. Obrazem jest prosta o równaniu: **a)** **1** $y = -x - 2$, **2** $y = -x + 2$, **b)** **1** $y = -2$, **2** $y = 2$ (ta sama prosta),

c) **1** $y = x$, **2** $y = x$, **d)** **1** $x = 2$ (ta sama prosta), **2** $x = -2$.

7. a) **1** $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$, **2** $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$,

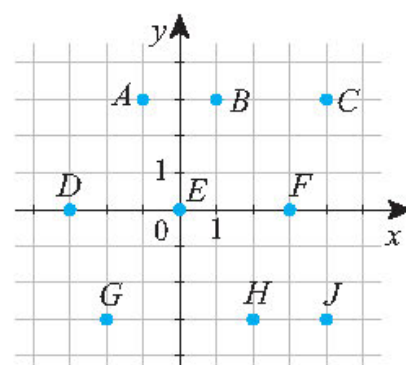
b) **1** $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$, **2** $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Zadania utrwalające

9.1. Na rysunku zaznaczono dziesięć punktów.

Wskaż pary punktów symetrycznych względem:

a) osi x , **b)** osi y .



9.2. Wiedząc, że $S_x(P) = P'$ i $S_y(P) = P''$, oblicz współrzędne punktów:

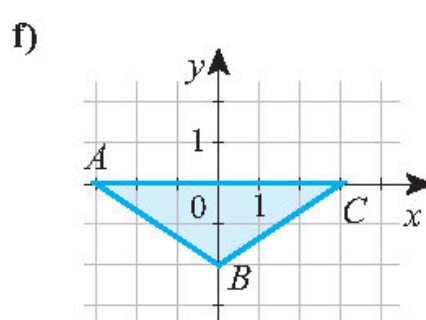
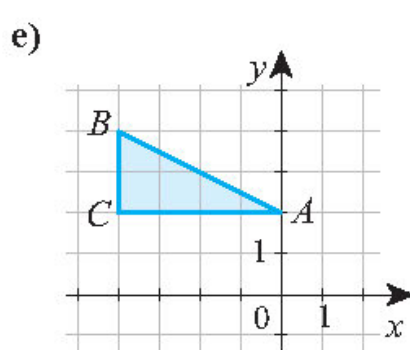
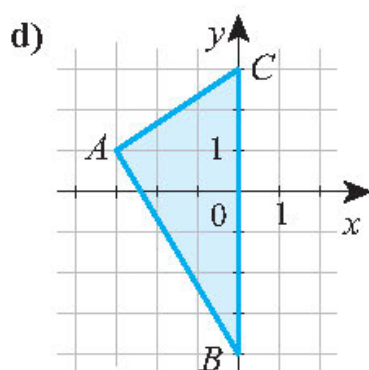
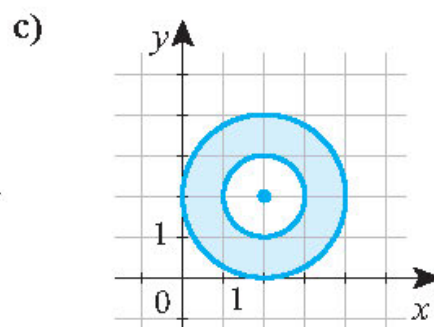
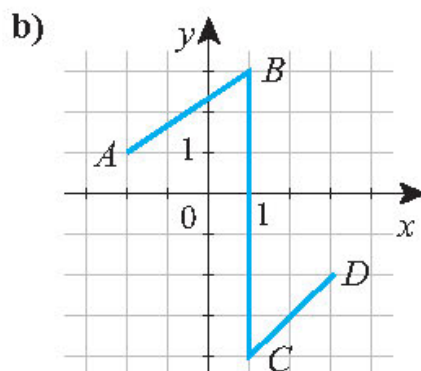
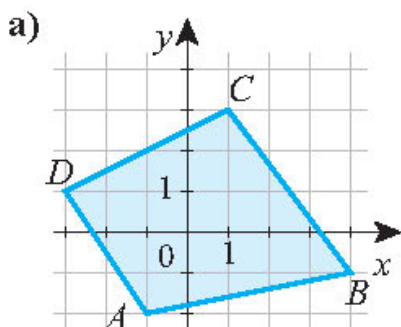
a) P' i P'' , gdy $P = (-3, 4)$,

b) P i P'' , gdy $P' = (2, -3)$,

c) P i P' , gdy $P'' = (-2, 0)$,

d) P' i P'' , gdy $P = (0, 0)$.

9.3. Przerysuj rysunek do zeszytu i narysuj obraz przedstawionej figury w symetrii względem: **1** osi x , **2** osi y .



9.4. Wykaż, że jeśli $P = (x_p, y_p)$ oraz $S_x(P) = P'$ i $S_y(P) = P''$, to środkiem odcinka $P'P''$ jest początek układu współrzędnych.

9.5. Napisz równanie prostej zawierającej obraz odcinka AB w symetrii względem:

1 osi x , **2** osi y , gdy:

a) $A = (0, 0)$, $B = (3, -2)$,

b) $A = (-3, -2)$, $B = (-1, 4)$,

c) $A = (-2, 1)$, $B = (-1, 3)$,

d) $A = (0, 5)$, $B = (3, 0)$.

9.6. Napisz równanie okręgu symetrycznego względem: **1** osi x , **2** osi y do okręgu o równaniu:

a) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, b) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$, c) $x^2 + y^2 + 8x = 0$.

9.7. Podstawami trapezu $ABCD$ są odcinki AB i DC . Wiedząc, że osią symetrii tego trapezu jest prosta l , oblicz współrzędne wierzchołków B i C , gdy:

a) $A = (-1, -2)$, $D = (2, 5)$, $l: x = 5$,

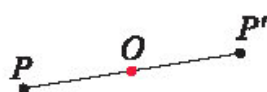
b) $A = (3, 7)$, $D = (-1, -2)$, $l: y = -4$.

Obrazy figur w symetrii względem początku układu współrzędnych

Definicja

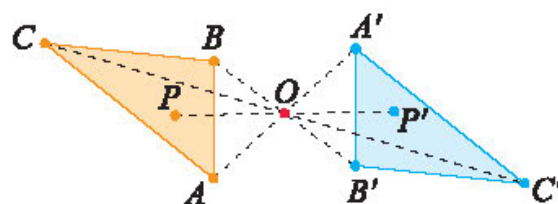
Symetrią środkową względem punktu O nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które dowolnemu punktowi P przyporządkowuje taki punkt P' , że punkt O jest środkiem odcinka PP' .

Symetrię środkową o środku O oznaczamy S_O , punkt O nazywamy środkiem tej symetrii.



Punkt O jest środkiem odcinka PP' .

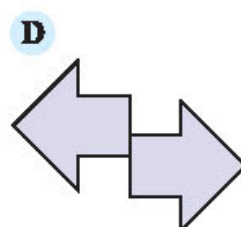
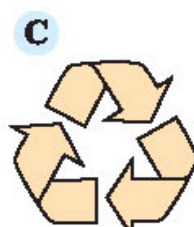
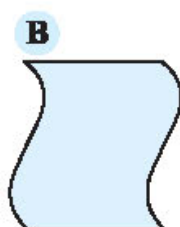
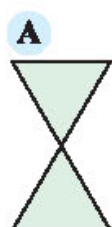
$$S_O(P) = P' \text{ i } S_O(P') = P$$



$$S_O(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$$

- Jeżeli punkt O jest środkiem symetrii, to $S_O(O) = O$.
- Jeśli istnieje taki punkt O , że obrazem figury F w symetrii środkowej S_O jest ta sama figura ($S_O(F) = F$), to mówimy, że figura F jest **środkowosymetryczna**, a punkt O jest środkiem symetrii tej figury.

Ćwiczenie 8. Które z figur oznaczonych literami A, B, C, D, E są środkowosymetryczne?



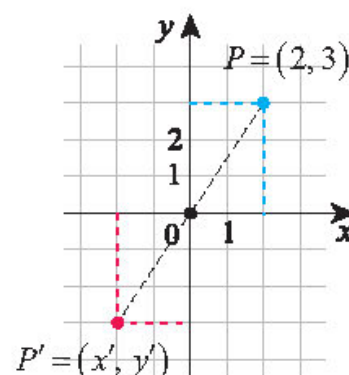
Przykład 5. Punkt P' jest obrazem punktu $P = (2, 3)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych. Oblicz współrzędne punktu P' .

Rozwiązanie

Jeżeli $P' = S_O(P)$, to z definicji symetrii środkowej wynika, że punkt O jest środkiem odcinka PP' .

$$\begin{cases} \frac{2+x'}{2} = 0 \\ \frac{3+y'}{2} = 0 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} x' = -2 \\ y' = -3 \end{cases}, \text{ więc } P' = (-2, -3).$$

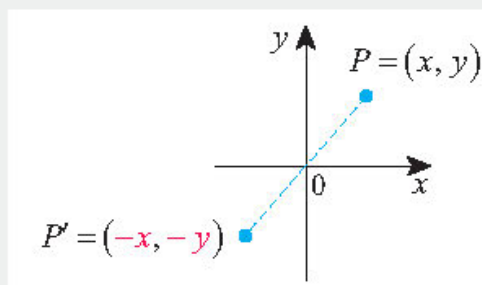
Odp.: $S_O(P) = S_O((2, 3)) = (-2, -3)$.



Uwaga

Obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych jest punkt P' , taki że $P' = (-x, -y)$, co zapisujemy

$$S_O((x, y)) = (-x, -y).$$

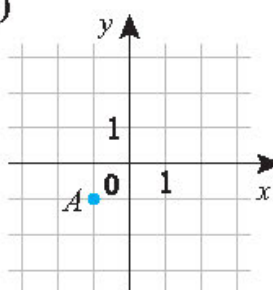


Ćwiczenie 9. Wiedząc, że $S_O(A) = B$, podaj współrzędne punktu B .

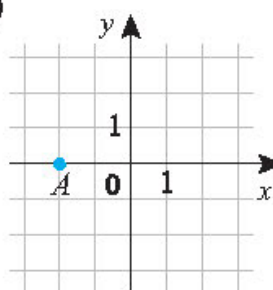
a)



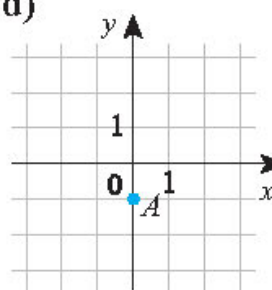
b)



c)

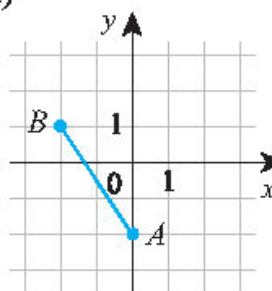


d)

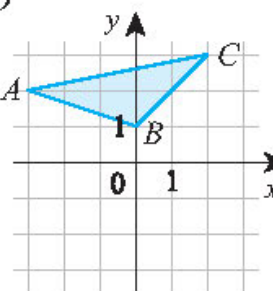


Ćwiczenie 10. Przerysuj rysunek do zeszytu i narysuj obraz przedstawionej figury w symetrii względem początku układu współrzędnych.

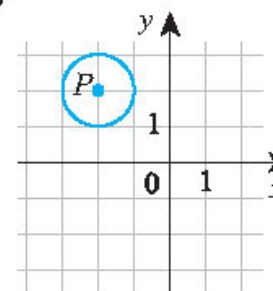
a)



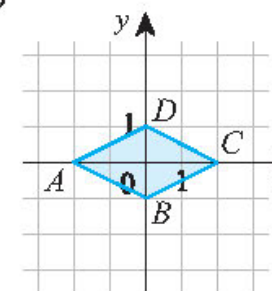
b)



c)



d)



Przykład 6. Na płaszczyźnie kartezjańskiej narysuj prostą o równaniu $y = x - 2$ i jej obraz w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Napisz równanie otrzymanej prostej.

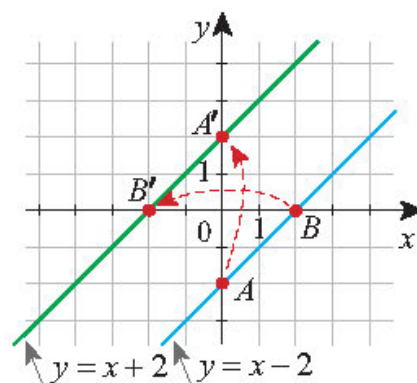
Rozwiązanie

W symetrii środkowej obrazem prostej jest prosta. Na prostej o równaniu $y = x - 2$ obieramy dwa punkty, np. $A = (0, -2)$ i $B = (2, 0)$.

Wyznaczamy obrazy punktów A i B w symetrii względem punktu $O = (0, 0)$.

$$S_O(A) = A', \quad S_O((0, -2)) = (0, 2), \quad \text{więc } A' = (0, 2),$$

$$S_O(B) = B', \quad S_O((2, 0)) = (-2, 0), \quad \text{więc } B' = (-2, 0).$$



Przez punkty A' i B' prowadzimy prostą i piszemy jej równanie.

$$y - y_{A'} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}}(x - x_{A'}), \text{ skąd } y = x + 2.$$

Odp.: Obrazem prostej o równaniu $y = x - 2$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest prosta do niej równoległa o równaniu $y = x + 2$.



Ćwiczenie 11. Narysuj w zeszycie prostą l i jej obraz w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych, gdy:

a) $l: y = -x - 2$, b) $l: y = 3$, c) $l: x = -1$, d) $l: y = -5x$.



Ćwiczenie 12. Przepisz równania do zeszytu i w miejsce ■ wpisz takie liczby, aby proste o podanych równaniach były symetryczne względem początku układu współrzędnych.

a) $y = 5x + 3$ i $y = \blacksquare x + \blacksquare$, b) $x = -4$ i $x = \blacksquare$, c) $y = 5x$ i $y = \blacksquare x$,
d) $y = -\sqrt{2}$ i $y = \blacksquare$, e) $2x + y + 1 = 0$ i $\blacksquare x + \blacksquare y + \blacksquare = 0$.

Uwaga

W symetrii środkowej figura i jej obraz są figurami przystającymi.

Na przykład obrazem:

- odcinka jest odcinek tej samej długości i równoległy do niego,
- wielokąt jest wielokąt do niego przystający,
- okręgu jest okrąg o takim samym promieniu,
- prostej jest prosta do niej równoległa.

Odpowiedzi do ćwiczeń

8. A, B, D, E. 9. a) $(1, -2)$, b) $(1, 1)$, c) $(2, 0)$, d) $(0, 1)$.

10. a) Odcinek o końcach: $A' = (0, 2)$, $B' = (2, -1)$, b) trójkąt o wierzchołkach: $A' = (3, -2)$, $B' = (0, -1)$, $C' = (-2, -3)$, c) okrąg o środku $P' = (2, -2)$ i promieniu 1, d) ten sam czworokąt.

11. Wskazówka. Obrazem jest prosta o równaniu: a) $y = -x + 2$, b) $y = -3$, c) $x = 1$, d) $y = -5x$.

12. a) 5 i -3, b) 4, c) 5, d) $\sqrt{2}$, e) 2, 1, -1.

Zadania utrwalające

9.8. Punkty A i B są symetryczne względem początku układu współrzędnych. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakujące współrzędne.



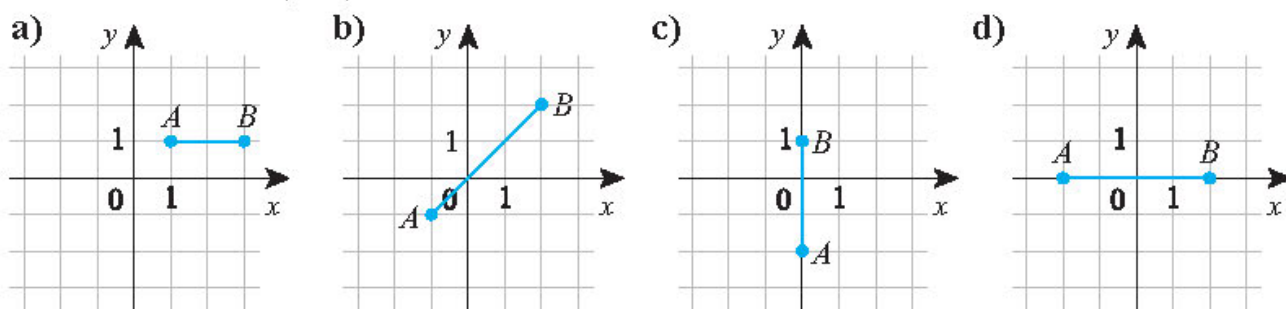
a) $A = (4, 3)$ i $B = (\blacksquare, \blacksquare)$,

b) $A = (\blacksquare, 1)$ i $B = (2, \blacksquare)$,

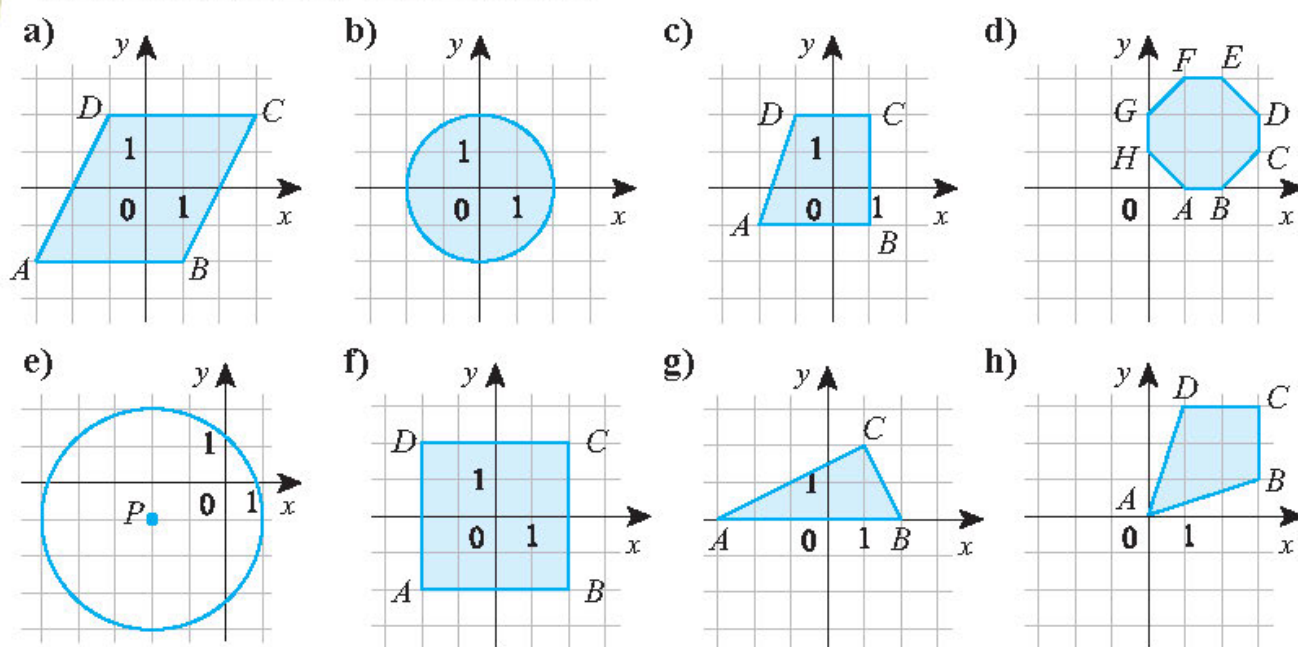
c) $A = (\blacksquare, -8)$ i $B = (-8, \blacksquare)$,

d) $A = (\blacksquare, \blacksquare)$ i $B = (0, -4)$.

9.9. Przerysuj rysunek do zeszytu i narysuj obraz przedstawionej figury w symetrii względem punktu $O = (0, 0)$.



9.10. Przerysuj rysunek do zeszytu i narysuj obraz przedstawionej figury w symetrii względem początku układu współrzędnych.



9.11. Każdej prostej określonej równaniem oznaczonym cyframi od **1** do **4** przyporządkuj prostą spośród prostych oznaczonych literami A, B, C, D tak, by proste te były symetryczne względem punktu $O = (0, 0)$.

- 1** $y = -2x + 3$, **2** $2x - y - 1 = 0$, **3** $8x - 12 = 0$, **4** $2y - 3 = 0$,
A $2x + 3 = 0$, **B** $2x + y + 3 = 0$, **C** $y = 2x + 1$, **D** $14y + 21 = 0$.

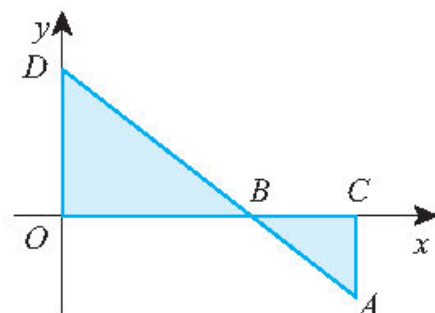
9.12. Punkty $A = (-5, -3)$, $B = (0, -2)$, $C = (-3, 1)$, $D = (-6, -2)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Podaj współrzędne wierzchołków czworokąta A', B', C', D' , który jest obrazem czworokąta $ABCD$ w symetrii względem punktu $O = (0, 0)$.

9.13. Punkt S jest środkiem symetrii równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego równoległoboku, gdy:

- a) $S = (0, 7)$, $A = (-3, 6)$ i $B = (1, 2)$, b) $S = (0, 0)$, $A = (-2, 2)$ i $B = (3, 4)$,
c) $S = (-2, 0)$, $A = (-4, -2)$ i $B = (1, -3)$.

- 9.14. Na trójkącie o wierzchołkach $A = (5, 5)$, $B = (-2, 4)$, $C = (-1, -3)$ opisano okrąg o środku S i promieniu R .
- Oblicz współrzędne punktu S i promień R tego okręgu.
 - Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej trójkąt ABC i zaznacz punkt S . Czy trójkąt ABC jest rozwartokątny? Odpowiedź uzasadnij.
 - Oblicz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta ABC w symetrii środkowej względem punktu S .

- 9.15. Na rysunku przedstawione są dwa trójkąty prostokątne DOB i ACB , których stosunek pól jest równy 4. Punkt $A = (12, -3)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC .



- Wyznacz współrzędne punktu D .
 - Napisz równanie prostej zawierającej przeciwprostokątne obu trójkątów.
 - Oblicz sumę pól obu trójkątów.
 - Figura F jest sumą trójkątów ACB i DOB . Oblicz współrzędne wierzchołków figury F' , która jest obrazem figury F w symetrii względem początku układu współrzędnych.
- 9.16. Napisz równanie okręgu symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu o równaniu:
- $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, b) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$, c) $x^2 + y^2 + 8x = 0$.



Zestaw powtórkowy

1. Prosta k ma równanie $y = 3x - 2$.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Prosta symetrycznie położona względem osi x do prostej k ma równanie:

A. $y = -3x + 2$, B. $y = -3x - 2$.

Prosta symetrycznie położona względem początku układu współrzędnych do prostej k ma równanie:

C. $y = -3x + 2$, D. $y = 3x + 2$.

2. Kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$ są punkty $A = (-1, 3)$, $B = (1, 1)$ i $C = (3, 5)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Środkiem symetrii równoległoboku jest punkt S o współrzędnych:

- A. $(4, 2)$, B. $(4, 4)$, C. $(1, 4)$, D. $(-2, -1)$.

3. W symetrii osiowej względem osi x obrazem punktu $A = (-1, 2)$ jest punkt A' , a obrazem punktu $B = (2, 1)$ jest punkt B' .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole czworokąta $AA'B'B$ jest równe:

- A. 18, B. 9, C. 8, D. 6.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Obrazem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest okrąg o równaniu:

- A. $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$, B. $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 16$,
C. $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$, D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$.

5. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Punkty $K = (k, -4)$ i $P = (5, p)$ są symetryczne względem osi x , gdy $k = 5$ i $p = 4$.	P	F
W symetrii względem osi y obrazem odcinka AB , gdzie $A = (2, 2)$ i $B = (4, 5)$, jest odcinek $A'B'$, gdy $A' = (-2, 2)$ i $B' = (-4, 5)$.	P	F
Punkty $A = (a, -8)$ i $B = (3, b)$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych, gdy $a = -3$ i $b = -8$.	P	F

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Punkt $A' = (-a+2, 4)$ jest obrazem punktu $A = (-5, b+3)$ w symetrii względem osi x , gdy:

- A. $a = 7$ i $b = -7$, B. $a = -7$ i $b = -7$, C. $a = 7$ i $b = 7$, D. $a = -7$ i $b = 7$.

7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Punkt $B' = (\sqrt{2}a+1, -3)$ jest obrazem punktu $A = (\sqrt{2}-1, 2b+3)$ w symetrii względem osi y , gdy:

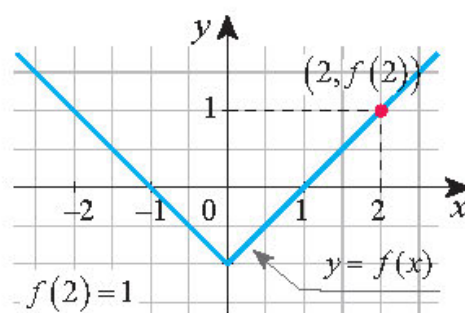
- A. $a = 1$ i $b = 3$, B. $a = -1$ i $b = -3$, C. $a = 3$ i $b = -1$, D. $a = 1$ i $b = -3$.

10. Przekształcanie wykresów funkcji

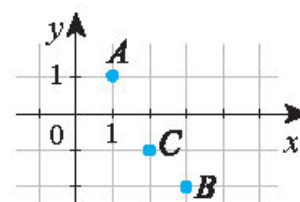
Przekształcanie wykresów funkcji przez symetrię względem osi układu współrzędnych

Przypomnijmy

Wykres funkcji f jest zbiorem punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y) , gdzie x jest argumentem funkcji f , a y wartością funkcji f dla tego argumentu x . Do wykresu funkcji f należą wszystkie punkty o współrzędnych $(x, f(x))$.



Ćwiczenie 1. Określ, które z punktów A, B, C przedstawionych na rysunku należą do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = 3 - 2x$.

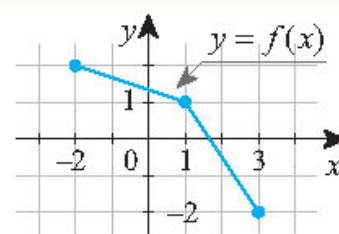


Zbiór wszystkich punktów $(x, f(x))$ należących do wykresu funkcji określonej wzorem $y = f(x)$ jest figurą geometryczną.

Aby przekształcić wykres funkcji f w symetrii względem osi układu współrzędnych, wystarczy przekształcić tylko te punkty, które pozwalają nam narysować (naszkić) wykres nowej funkcji, który jest obrazem wykresu funkcji f w tej symetrii.

Przykład 1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Narysuj wykres funkcji:

- g , który jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem osi x ,
- h , który jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem osi y .



Rozwiązanie

Zauważamy, że do wykresu funkcji f należą punkty $(-2, 2)$, $(1, 1)$ i $(3, -2)$.

Aby narysować wykresy funkcji g i h , wystarczy znaleźć obrazy tych trzech punktów.

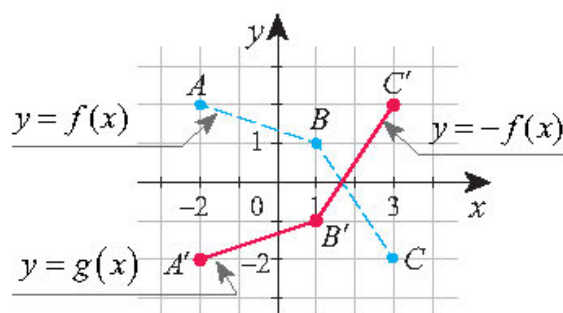
x	-2	1	3
$y = f(x)$	2	1	-2

a) $A = (-2, 2), \quad B = (1, 1), \quad C = (3, -2),$

$A' = (-2, -2), \quad B' = (1, -1), \quad C' = (3, 2).$

Zauważamy, że $S_x((x, y)) = (x, -y),$

więc $g(x) = -f(x).$

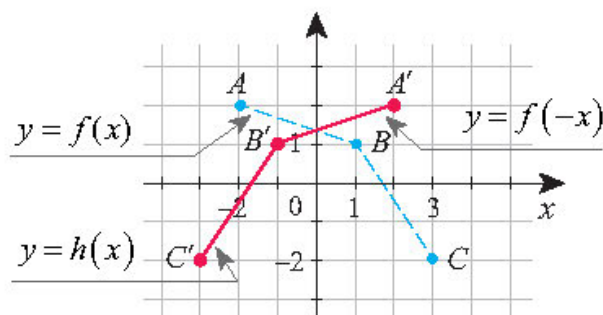


b) $A = (-2, 2), \quad B = (1, 1), \quad C = (3, -2),$

$A' = (2, 2), \quad B' = (-1, 1), \quad C' = (-3, -2).$

Zauważamy, że $S_y((x, y)) = (-x, y),$

więc $h(x) = f(-x).$



Uwaga

Obrazem wykresu funkcji f :

- w symetrii względem osi x jest wykres funkcji określonej wzorem $y = -f(x),$
- w symetrii względem osi y jest wykres funkcji określonej wzorem $y = f(-x).$

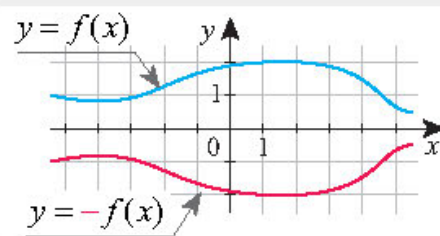
- Wykresy funkcji o równaniach

$y = f(x)$ i $y = -f(x)$

są wzajemnie symetryczne względem osi $x.$

Wartości tych funkcji dla tych samych argumentów są liczbami przeciwnymi.

Ich dziedziny są identyczne.

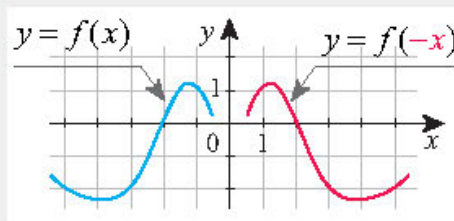


- Wykresy funkcji o równaniach

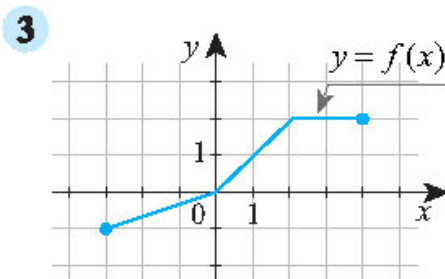
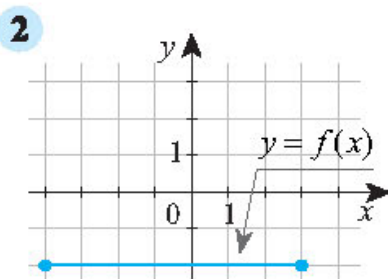
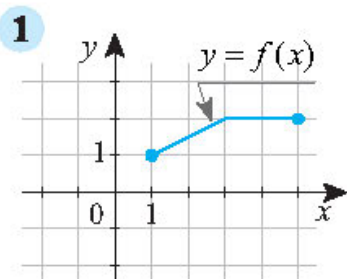
$y = f(x)$ i $y = f(-x)$

są wzajemnie symetryczne względem osi $y.$

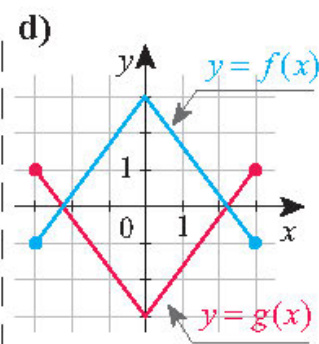
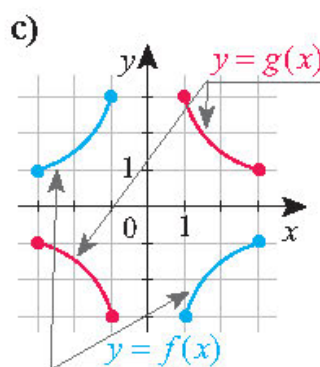
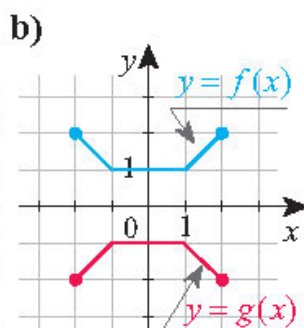
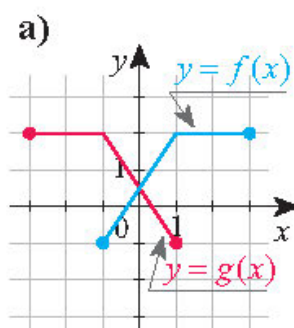
Wartości tych funkcji dla argumentów przeciwnych są równe.



Ćwiczenie 2. Na rysunkach oznaczonych numerami **1**, **2** i **3** przedstawiono wykresy funkcji f . Narysuj w zeszycie wykres funkcji: a) $y = -f(x)$, b) $y = f(-x)$.



Ćwiczenie 3. W jednym układzie współrzędnych narysowano wykresy funkcji f i g . Czy wykresy tych funkcji są symetryczne względem jednej lub drugiej osi układu? Jeśli tak, określ oś symetrii, w której obrazem wykresu jednej funkcji jest wykres drugiej funkcji i zapisz wzorem zależność między funkcjami f i g .



Przykład 2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x|$. Do wykresu funkcji f należą punkty A i B , gdzie $A = (3, y_A)$ i $B = (-1, y_B)$.

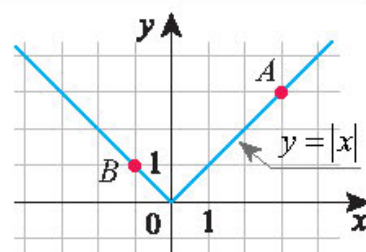
a) Odczytaj z rysunku współrzędne y_A i y_B .

b) Oblicz współrzędne punktów A' i B' takich,

że $A' = S_y(A)$ i $B' = S_y(B)$.

c) Sprawdź, czy punkty A' i B' należą do wykresu funkcji f .

d) Sprawdź, czy wykres funkcji $f(x) = |x|$ ma oś symetrii?



Rozwiązanie

Odczytujemy z wykresu:

a) $A = (3, y_A)$, więc $y_A = |3| = 3$, zatem $A = (3, 3)$,

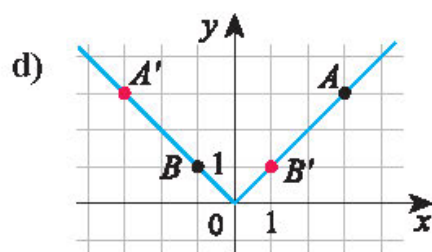
$B = (-1, y_B)$, więc $y_B = |-1| = 1$, zatem $B = (-1, 1)$.

b) $S_y(A) = A'$, czyli $S_y((3, 3)) = (-3, 3)$, więc $A' = (-3, 3)$,

$S_y(B) = B'$, czyli $S_y((-1, 1)) = (1, 1)$, więc $B' = (1, 1)$.

$$S_y((x, y)) = (-x, y)$$

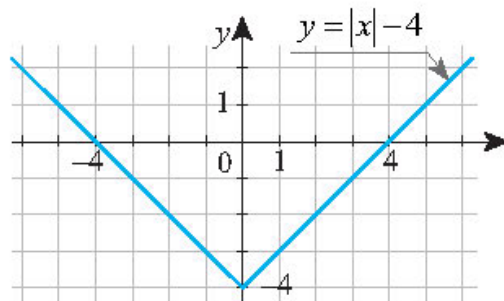
- c) Współrzędne punktu A' spełniają równanie $y = |x|$, bo $3 = |-3|$,
współrzędne punktu B' spełniają równanie $y = |x|$, bo $1 = |1|$,
zatem punkty A' i B' należą do wykresu funkcji f .



Ośią symetrii wykresu funkcji f
jest oś y i $f(-x) = f(x)$.

Ćwiczenie 4. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x| - 4$. Do wykresu funkcji f należą punkty A i B , gdzie $A = (-3, y_A)$ i $B = (2, y_B)$.

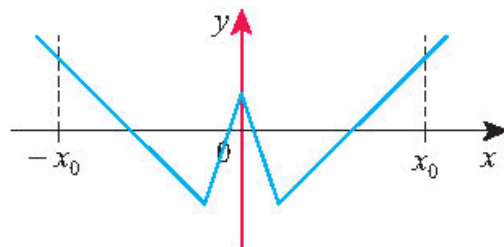
- Oblicz współrzędne y_A i y_B .
- Oblicz współrzędne punktów A' i B' takich, że $A' = S_y(A)$ i $B' = S_y(B)$.
- Sprawdź, czy punkty A' i B' należą do wykresu funkcji f .
- Czy wykres funkcji f ma oś symetrii?



Definicja

Funkcję f określoną na zbiorze D_f nazywamy **parzystą**, jeżeli dla każdego argumentu $x \in D_f$ liczba $-x \in D_f$ oraz $f(-x) = f(x)$.

Ośią symetrii wykresu funkcji parzystej jest oś y .



Ćwiczenie 5. Spośród wzorów funkcji oznaczonych cyframi od **1** do **4** wybierz te, które są wzorami funkcji parzystych:

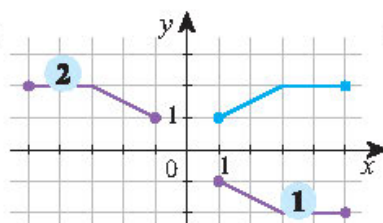
- 1** $f(x) = x^2 - 4$, **2** $f(x) = 3$, **3** $f(x) = \frac{2}{x}$, **4** $f(x) = -2x^2 + 2$.

Ćwiczenie 6. Wyszukaj w Internecie definicję funkcji nieparzystej i określ, jaką własność ma jej wykres. Podaj przykłady dwóch wzorów funkcji nieparzystych.

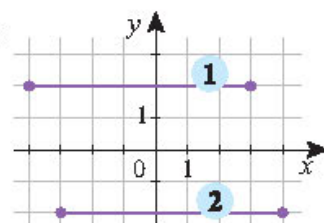
Odpowiedzi do ćwiczeń

1. A i C. 3. a) Tak, $f(x) - g(-x)$, b) tak, $f(x) - -g(x)$, c) nie, d) tak, $f(x) - -g(x)$.

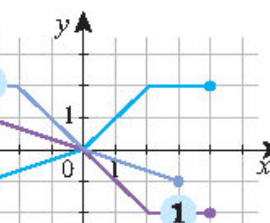
2. a)



b)



c)

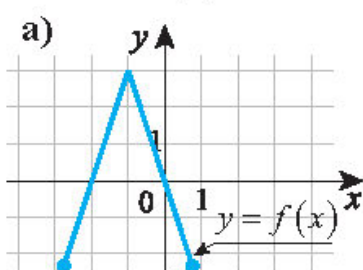


4. a) $y_1 = -1$, $y_2 = -2$, b) $A' = (3, -1)$, $B' = (-2, -2)$, c) punkty A' i B' należą do wykresu funkcji f ,
d) tak, osią symetrii wykresu funkcji f jest oś y . 5. 1, 2, 4. 6. Np. $y = -3x$, $y = x^3$.

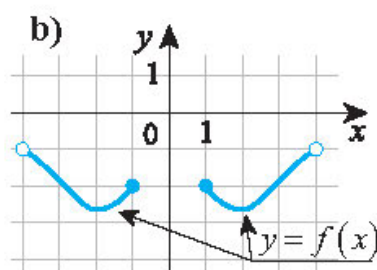
Zadania utrwalające

0.1. Sporządź w zeszycie wykres funkcji g , który jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem osi x .

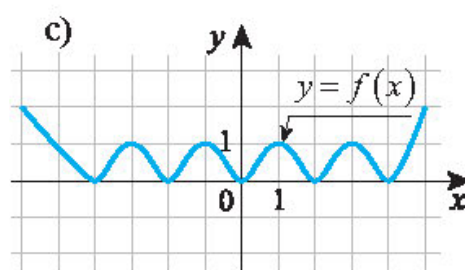
a)



b)

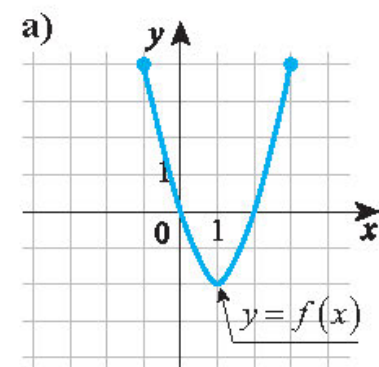


c)

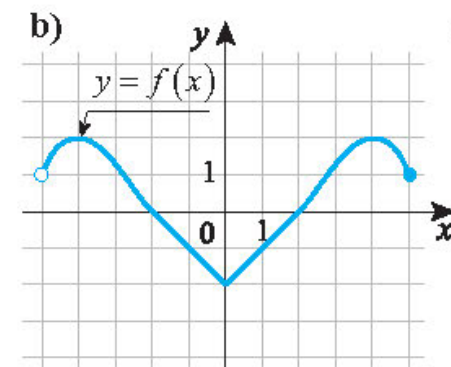


0.2. Sporządź w zeszycie wykres funkcji g , który jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem osi y .

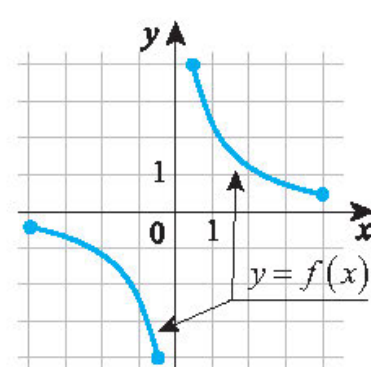
a)



b)



c)



10.3. Dobierz w pary (jeśli to możliwe) wzory funkcji, których wykresy są symetryczne względem jednej z osi układu współrzędnych:

1 $f_1(x) = 4 - x$, 2 $f_2(x) = -\frac{4}{x}$, 3 $f_3(x) = \frac{2}{x-1}$, 4 $f_4(x) = 2x^3$, 5 $f_5(x) = (-x)^2$,

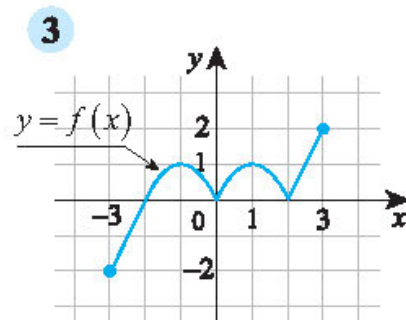
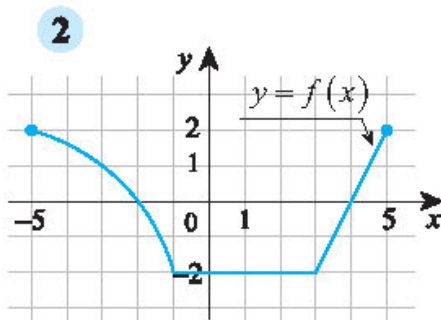
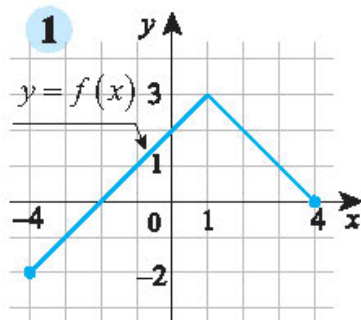
6 $f_6(x) = \frac{2}{1-x}$, 7 $f_7(x) = x + 4$, 8 $f_8(x) = x^2$, 9 $f_9(x) = -2x^3$, 10 $f_{10}(x) = \frac{4}{x}$.

10.4. Napisz wzór funkcji g , której wykres jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem **1** osi x , **2** osi y , gdy:

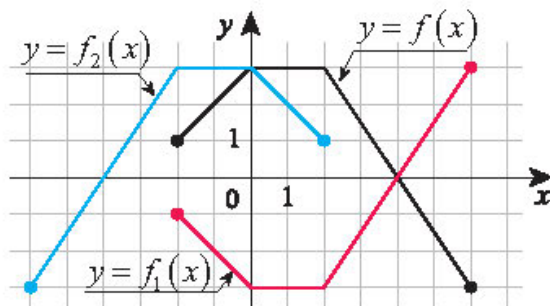
- a) $f(x) = x$, b) $f(x) = -2$, c) $f(x) = x^2 - x$, d) $f(x) = \frac{1}{x} - 2$.



10.5. Na rysunkach oznaczonych numerami **1**, **2**, **3** przedstawiono wykresy funkcji f . Naszkicuj w zeszycie wykresy funkcji: a) $y = -f(x)$, b) $y = f(-x)$.

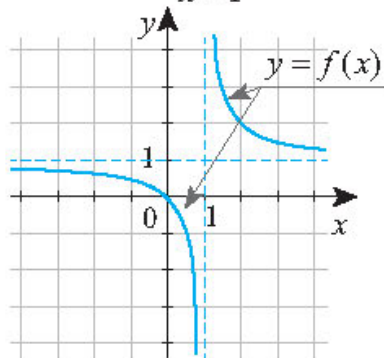


10.6. Wykresy funkcji f_1 i f_2 są obrazami wykresu funkcji f w symetrii względem osi układu współrzędnych. Określ, względem której osi układu należy przekształcić przez symetrię wykres funkcji f , by otrzymać wykres funkcji f_1 , a względem której osi, by otrzymać wykres funkcji f_2 .

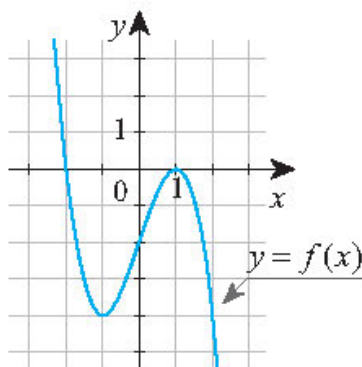


10.7. Sporządź w zeszycie wykres funkcji g i napisz jej wzór, gdy:

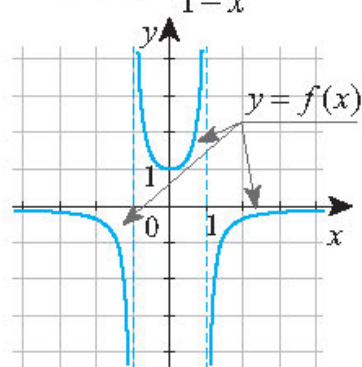
a) $g(x) = f(-x)$, gdzie $f(x) = \frac{x}{x-1}$,



b) $g(x) = -f(x)$, gdzie $f(x) = -x^3 + 3x - 2$,



c) $g(x) = f(-x)$, gdzie $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.



10.8. Czy przekształcając wykres funkcji f w symetrii względem jednej z osi układu, można otrzymać wykres funkcji g , gdy:

- a) $f(x) = 1 - x^2 + x^3$ i $g(x) = 1 - x^2 - x^3$, b) $f(x) = (x+2)^2$ i $g(x) = (x-2)^2$?

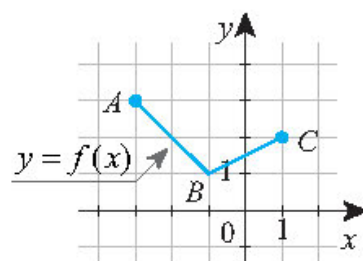
Przesunięcie wykresu funkcji równoległe do osi y

Przemieszczanie przedmiotów w praktyce oznacza ich przesuwanie, a zmiana położenia w matematyce i fizyce oznacza przesunięcie o wektor.

Przykład 3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Narysuj wykresy funkcji g i h , które powstają przez przesunięcie równoległe wzdłuż osi y wykresu funkcji f :

a) o 2 jednostki w górę, b) o 4 jednostki w dół.

Wyraż wzory funkcji g i h w zależności od wzoru funkcji f . Podaj współrzędne wektorów przesunięcia.



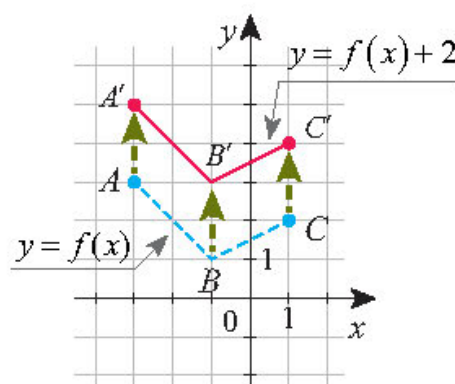
Rozwiązanie

Zauważamy, że do wykresu funkcji należą punkty

$$A = (-3, 3), \quad B = (-1, 1) \quad \text{ i } \quad C = (1, 2).$$

a) Aby otrzymać punkty A' , B' i C' , które należą do wykresu $y = f(x) + 2$, wystarczy do rzędnych y punktów A , B i C **dodać 2**.

$$\begin{array}{ccc} A = (-3, 3) & B = (-1, 1) & C = (1, 2) \\ \downarrow +2 & \downarrow +2 & \downarrow +2 \\ A' = (-3, 5), & B' = (-1, 3), & C' = (1, 4). \end{array}$$



$$\text{Zauważamy, że} \quad g(-3) = f(-3) + 2$$

$$g(-1) = f(-1) + 2$$

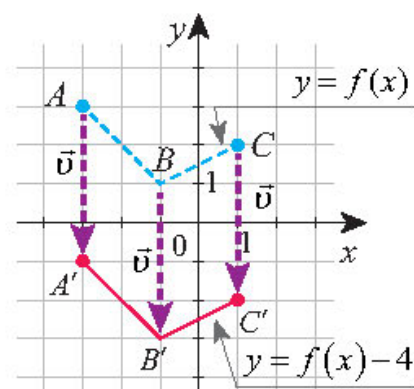
$$g(1) = f(1) + 2.$$

$$\text{Zatem} \quad g(x) = f(x) + 2 \quad \text{ i } \quad \vec{v} = [0, 2] = A\vec{A'}.$$

Dla każdego argumentu x wartości funkcji g są o 2 większe od wartości funkcji f .

b) Aby otrzymać punkty A' , B' i C' , które należą do wykresu $y = f(x) - 4$, wystarczy od rzędnych y punktów A , B i C **odjąć 4**.

$$\begin{array}{ccc} A = (-3, 3) & B = (-1, 1) & C = (1, 2) \\ \downarrow -4 & \downarrow -4 & \downarrow -4 \\ A' = (-3, -1), & B' = (-1, -3), & C' = (1, -2). \end{array}$$



Zauważamy, że $h(-3) = f(-3) - 4$

$$h(-1) = f(-1) - 4$$

$$h(1) = f(1) - 4.$$

Zatem $h(x) = f(x) - 4$ i $\vec{v} = [0, -4] = A\vec{A}'$.

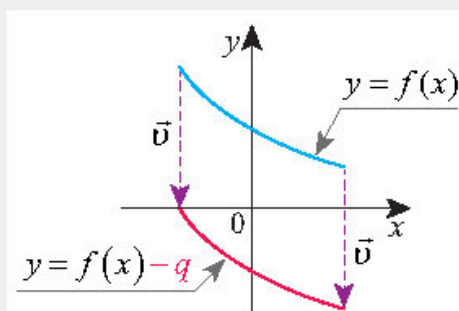
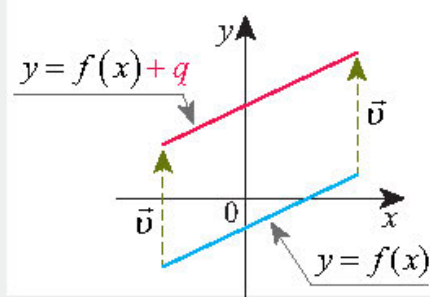
Dla każdego argumentu x wartości funkcji h są o 4 mniejsze od wartości funkcji f .

Odp.: a) $g(x) = f(x) + 2$, $\vec{v} = [0, 2]$, b) $h(x) = f(x) - 4$, $\vec{v} = [0, -4]$.

Uwaga

Jeśli $q > 0$ i $y = f(x)$, to aby otrzymać wykres funkcji:

- $y = f(x) + q$, przesuwamy wykres funkcji f równoległe do osi y (osi rzędnych) o q jednostek **w górę**, czyli o wektor $\vec{v} = [0, q]$
- $y = f(x) - q$, przesuwamy wykres funkcji f równoległe do osi y (osi rzędnych) o q jednostek **w dół**, czyli o wektor $\vec{v} = [0, -q]$.

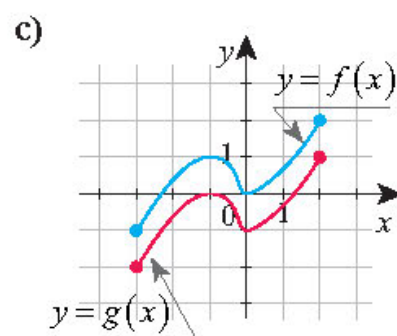
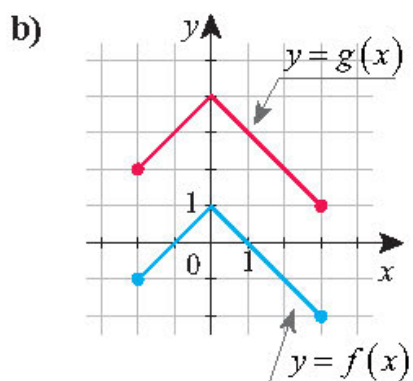
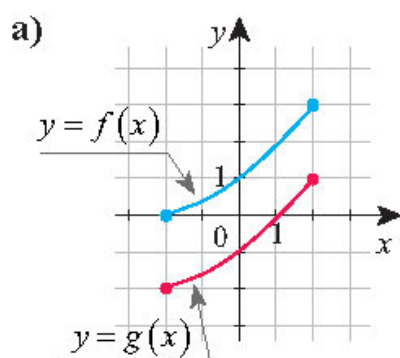


Ćwiczenie 7. Określ, o ile jednostek i w którą stronę należy przesunąć równoległe do osi y wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji określonej wzorem:

a) $y = f(x) + 3$, b) $y = f(x) - 4$, c) $y - 2 = f(x)$, d) $y + \sqrt{2} = f(x)$.

Podaj wektor przesunięcia.

Ćwiczenie 8. Ustal, o ile jednostek i w którą stronę należy przesunąć równoległe do osi y wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g . Podaj wektor przesunięcia.



Ćwiczenie 9. Funkcja f określona jest tabelą.

x	-3	-2	0	1	6	28
$y = f(x)$	-4	-1	2	9	11	80

Przedstaw w postaci tabeli funkcję określoną wzorem:

a) $g(x) = f(x) + 6$, b) $h(x) = f(x) - 12$, c) $k(x) = f(x) - 1$.

Przesunięcie wykresu funkcji równoległe do osi x

Przykład 4. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Narysuj wykresy funkcji g i h , które powstają przez przesunięcie równoległe wzdłuż osi x wykresu funkcji f :

a) o 2 jednostki w lewo, b) o 3 jednostki w prawo.

Wyraż wzory funkcji g i h w zależności od wzoru funkcji f . Podaj współrzędne wektorów przesunięcia.

Rozwiązanie

Zauważamy, że do wykresu funkcji f należą punkty $A = (-3, 2)$, $B = (0, -1)$, $C = (4, 3)$.

a) Aby otrzymać punkty A' , B' i C' , które należą do wykresu $y = f(x + 2)$, wystarczy od odciętych x punktów A , B i C odjąć 2.

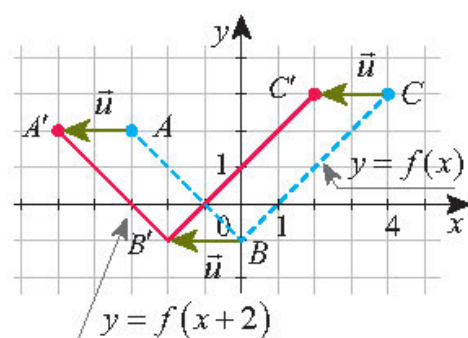
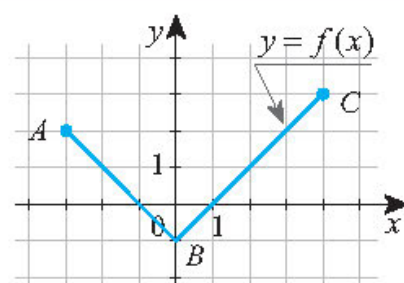
$$\begin{array}{ccc} A = (-3, 2) & B = (0, -1) & C = (4, 3) \\ \downarrow -2 & \downarrow -2 & \downarrow -2 \\ A' = (-5, 2) & B' = (-2, -1) & C' = (2, 3) \end{array}$$

Zauważamy, że

$$\begin{aligned} 2 &= f(-3) = g(-5), \text{ czyli } g(-5) = f(\underbrace{-5+2}_{-3}) \\ -1 &= f(0) = g(-2), \text{ czyli } g(-2) = f(\underbrace{-2+2}_{0}) \\ 3 &= f(4) = g(2), \text{ czyli } g(2) = f(\underbrace{2+2}_{4}). \end{aligned}$$

Zatem $g(x) = f(x + 2)$ i $\vec{u} = [-2, 0]$.

Funkcja g przyjmuje dla argumentu x taką samą wartość, jak funkcja f dla argumentu $x + 2$.



b) Aby otrzymać punkty A' , B' i C' , które należą do wykresu $y = f(x-3)$, wystarczy do odciętych x punktów A , B i C **dodać 3**.

$$\begin{array}{ccc} A = (-3, 2) & B = (0, -1) & C = (4, 3) \\ \downarrow +3 & \downarrow +3 & \downarrow +3 \\ A' = (0, 2) & B' = (3, -1) & C' = (7, 3) \end{array}$$

Zauważamy, że

$$2 = f(-3) = h(0), \text{ czyli } h(0) = f(\overbrace{0-3}^{-3})$$

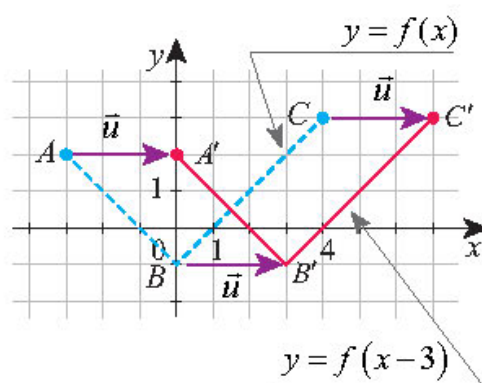
$$-1 = f(0) = h(3), \text{ czyli } h(3) = f(\overbrace{3-3}^0)$$

$$3 = f(4) = h(7), \text{ czyli } h(7) = f(\overbrace{7-3}^4)$$

Zatem $h(x) = f(x-3)$ i $\vec{u} = [3, 0] = A\vec{A}'$.

Funkcja h przyjmuje dla argumentu x taką samą wartość, jak funkcja f dla argumentu $x-3$.

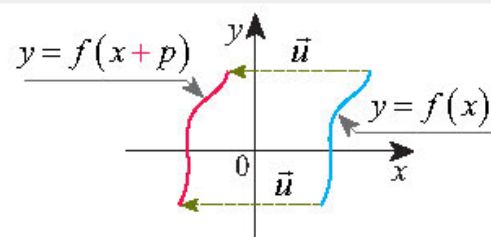
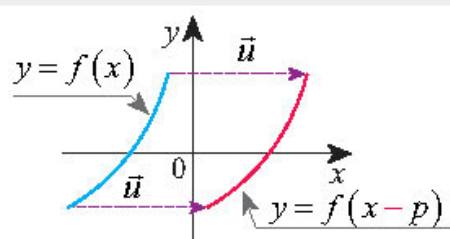
Odp.: a) $g(x) = f(x+2)$, $\vec{u} = [-2, 0]$ b) $h(x) = f(x-3)$, $\vec{u} = [3, 0]$.



Uwaga

Jeśli $p > 0$ i $y = f(x)$, to aby otrzymać wykres funkcji określonej wzorem:

- $y = f(x-p)$, przesuwamy wykres funkcji f równoległe do osi x (osi odciętych) o p jednostek **w prawo**, czyli o wektor $\vec{u} = [p, 0]$,
- $y = f(x+p)$, przesuwamy wykres funkcji f równoległe do osi x (osi odciętych) o p jednostek **w lewo**, czyli o wektor $\vec{u} = [-p, 0]$.

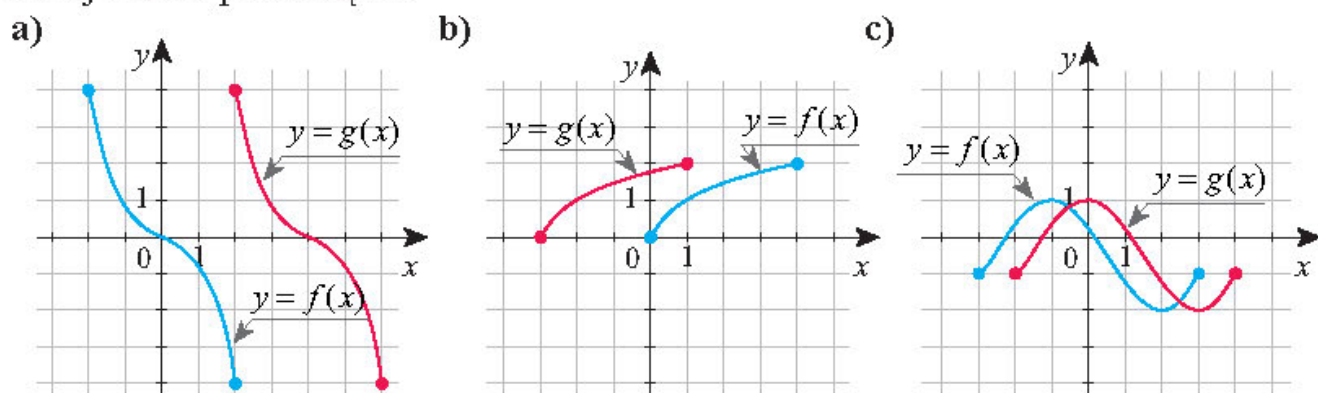


Ćwiczenie 10. Ustal, o ile jednostek i w którą stronę należy przesunąć równoległe do osi x wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji określonej wzorem:

a) $y = f(x-1)$, b) $y = f(x+2)$, c) $y = f(x-10)$, d) $y = f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Ćwiczenie 11. Narysuj wykres funkcji g , który jest obrazem funkcji $f(x) = x^2$ w przesunięciu o wektor $\vec{u}$, gdy: a) $\vec{u} = [0, 2]$ b) $\vec{u} = [0, -1]$.

Ćwiczenie 12. Ustal, o ile jednostek i w którą stronę należy przesunąć równoległe do osi x wykres funkcji f (kolor niebieski), aby otrzymać wykres funkcji g (kolor czerwony). Podaj wektor przesunięcia.



Przykład 5. Napisz wzór funkcji g , gdy $g(x) = f(x-5)$, jeśli:

- a) $f(x) = -2x + 4$, b) $f(x) = \frac{3}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$, c) $f(x) = -x^2 + 2x$.

Rozwiązanie

W każdym z podanych wzorów funkcji f w miejsce x podstawiamy $x-5$, bo $g(x) = f(x-5)$.

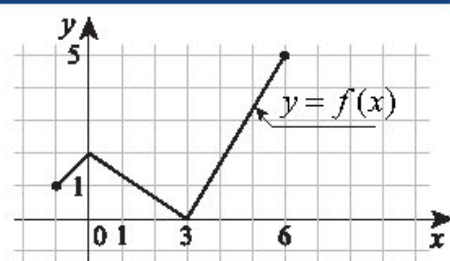
a) $f(x) = -2x + 4$, więc $g(x) = -2 \cdot (x-5) + 4$. Zatem $g(x) = -2x + 14$.	b) $f(x) = \frac{3}{x+1}$, więc $g(x) = \frac{3}{x-5+1}$. Zatem $g(x) = \frac{3}{x-4}$, gdzie $x \neq 4$.	c) $f(x) = -x^2 + 2x$, więc $g(x) = -(x-5)^2 + 2 \cdot (x-5)$. Zatem $g(x) = -x^2 + 12x - 35$.
--	---	---

Odp.: a) $g(x) = -2x + 14$, b) $g(x) = \frac{3}{x-4}$, c) $g(x) = -x^2 + 12x - 35$.

Ćwiczenie 13. Napisz wzór funkcji g , wiedząc, że $g(x) = f(x+2)$, gdy:

- a) $f(x) = -x - 2$, b) $f(x) = \frac{2}{3-x}$, gdzie $x \neq 3$, c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

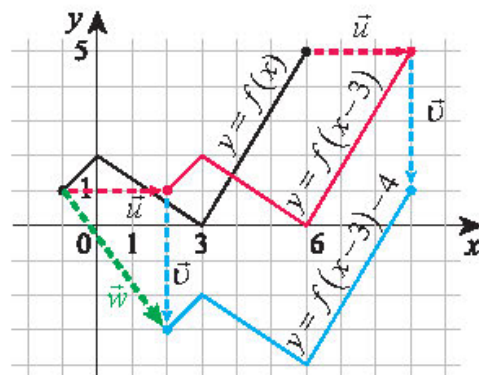
Przykład 6. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x-3) - 4$ i podaj współrzędne wektora przesunięcia.



Rozwiązanie

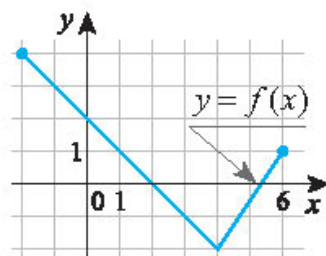
Aby narysować wykres funkcji określonej wzorem $y = f(x-3) - 4$, należy kolejno:

- 1° Wykres funkcji f przesunąć równolegle do osi x w prawo o 3 jednostki (kolor czerwony), czyli o wektor $\vec{u} = [3, 0]$.
- 2° Wykres funkcji określonej wzorem $y = f(x-3)$ przesunąć równolegle do osi y w dół o 4 jednostki, czyli o wektor $\vec{v} = [0, -4]$. Otrzymamy wtedy wykres funkcji $y = f(x-3) - 4$ (kolor niebieski).



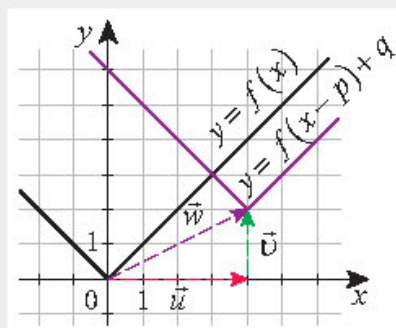
Zauważamy, że wektor przesunięcia $\vec{w}$ jest sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Ćwiczenie 14. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Narysuj w zeszycie wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x+2) - 2$ i podaj współrzędne wektora przesunięcia.



Uwaga

Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o wektor $\vec{w} = [p, q]$, czyli równolegle do osi x o wektor $\vec{u} = [p, 0]$ oraz równolegle do osi y o wektor $\vec{v} = [0, q]$ to wzór funkcji g , której wykres otrzymamy po przesunięciu, ma postać $g(x) = f(x-p) + q$.



- Jeżeli punkt $P = (x, y)$ należy do wykresu funkcji f , to punkt $P' = (x-p, y+q)$ należy do wykresu funkcji g , który jest obrazem wykresu funkcji f w przesunięciu o wektor $\vec{w} = [p, q]$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

7. a) 3 jednostki w górę, $[0, 3]$, b) 4 jednostki w dół, $[0, -4]$, c) 2 jednostki w górę, $[0, 2]$, d) $\sqrt{2}$ jednostek w dół, $[0, -\sqrt{2}]$.
8. a) 2 jednostki w dół, $[0, -2]$, b) 3 jednostki w górę, $[0, 3]$, c) 1 jednostkę w dół, $[0, -1]$.

9.

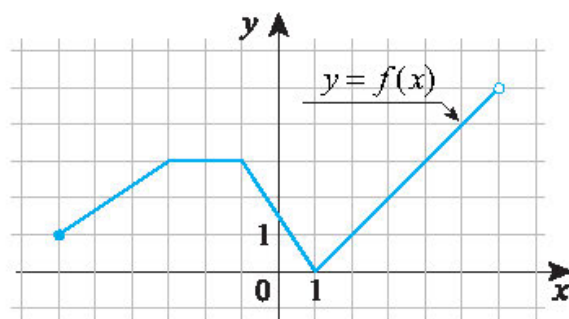
x	-3	-2	0	1	6	28
$y = f(x)$	-4	-1	2	9	11	80
$y = g(x)$	2	5	8	15	17	86
$y = h(x)$	-16	-13	-10	-3	-1	68
$y = k(x)$	-5	-2	1	8	10	79

Odpowiedzi do ćwiczeń

- 10.** a) W prawo o 1 jednostkę, czyli o wektor $[1, 0]$, b) w lewo o 2 jednostki, czyli o wektor $[-2, 0]$,
 c) w prawo o 10 jednostek, czyli o wektor $[10, 0]$, d) w lewo o $\frac{1}{2}$ jednostki, czyli o wektor $[-\frac{1}{2}, 0]$.
12. a) O 4 jednostki w prawą stronę, czyli o wektor $[4, 0]$, b) o 3 jednostki w lewą stronę, czyli o wektor $[-3, 0]$, c) o 1 jednostkę w prawą stronę, czyli o wektor $[1, 0]$.
13. a) $g(x) = -x - 4$, b) $g(x) = \frac{2}{1-x}$, gdzie $x \neq 1$, c) $g(x) = 2x^2 + 5x + 3$. **14.** $\vec{w} = [-2, -2]$.

Zadania utrwalające

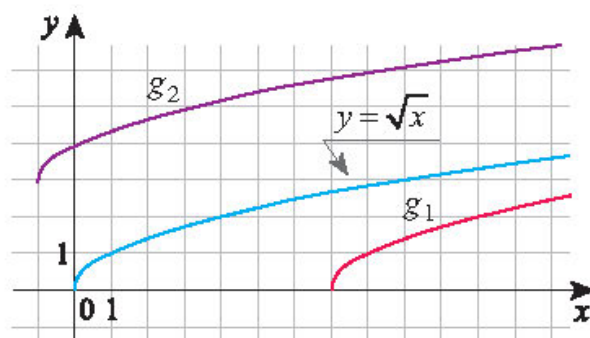
- 10.9.** Oblicz współrzędne wektora przesunięcia punktu A , aby otrzymać punkt B , gdy:
 a) $A = (0, 0)$ i $B = (-2, 0)$, b) $A = (3, 4)$ i $B = (3, -2)$,
 c) $A = (-4, 3)$ i $B = (7, 3)$, d) $A = (-8, 2)$ i $B = (-8, -8)$.
- 10.10.** Punkt A przesunięto równoległe wzdłuż osi x o wektor $[p, 0]$ i otrzymano punkt B , a następnie punkt B przesunięto równoległe wzdłuż osi y o wektor $[0, q]$ i otrzymano punkt C . Zaznacz w układzie współrzędnych punkty A, B, C i podaj współrzędne punktów B i C , gdy:
 a) $A = (0, 0)$, $p = -4$, $q = 2$, b) $A = (0, 3)$, $p = 4$, $q = -3$,
 c) $A = (-1, 0)$, $p = 2$, $q = -1$, d) $A = (2, -5)$, $p = -2$, $q = -5$.
- 10.11.** Określ współrzędne wektora przesunięcia wykresu funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g , gdy:
 a) $g(x) = f(x+2)$, b) $g(x) = f(x-1)$, c) $g(x) = f(x) + 2$,
 d) $g(x) = f(x) - 1$, e) $g(x) = f(x+1-\sqrt{2})$, f) $g(x) = f(x) + 2 - 2\sqrt{3}$.
- 0.12.** Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Przerysuj do zeszytu wykres funkcji f i naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem:



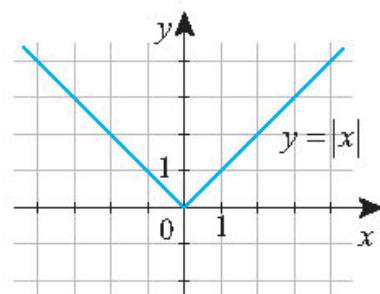
- a) $y = f(x+4)$, b) $y = f(x-2)$,
 c) $y = f(x) + 3$, d) $y = f(x) - 1$.

R

- 10.13.** Wykresy funkcji g_1 , g_2 powstały w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$.
Napisz wzory funkcji g_1 i g_2 oraz podaj wektory przesunięcia.



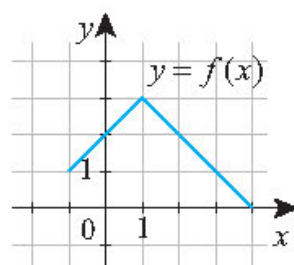
- 10.14.** Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = |x|$. Stosując odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji g , naszkicuj w zeszycie wykres funkcji f , gdy:



- a) $f(x) = |x| + 2$, b) $f(x) = |x| - 2$,
c) $f(x) = |x + 1|$, d) $f(x) = |x - 3|$,
e) $f(x) = |x + 1| + 2$, f) $f(x) = |x - 3| - 2$.

- 10.15.** Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .

Narysuj w zeszycie wykres funkcji g , gdy:



- a) $g(x) = f(-x)$, b) $g(x) = -f(x)$,
c) $g(x) = f(x) + 2$, d) $g(x) = f(x) - 2$,
e) $g(x) = -f(x) + 2$, f) $g(x) = f(-x) - 2$,
g) $g(x) = f(x + 3)$, h) $g(x) = -f(x + 3)$, i) $g(x) = f(x + 3) + 2$.

- 10.16.** Opisz za pomocą wektora przesunięcie, w wyniku którego z wykresu funkcji f otrzymasz wykres funkcji h , gdy:

- a) $f(x) = 3x$, $h(x) = 3x + 5$, b) $f(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{x - 1}$,
c) $f(x) = -|x|$, $h(x) = -|x| - 2$, d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{x - 2}$,
e) $f(x) = x^2$, $h(x) = x^2 - \sqrt{2}$, f) $f(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{x + 4} - 3$.

- 10.17.** Napisz wzory funkcji g i h , gdy $g(x) = f(x - 1)$ i $h(x) = f(x) + 3$, jeżeli:

- a) $f(x) = -x + 1$, b) $f(x) = 2$, c) $f(x) = \frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$,
d) $f(x) = \sqrt{x}$, gdzie $x \geq 0$, e) $f(x) = 2^x$, f) $f(x) = 3^{-x}$.

R

Wykres funkcji $y = |f(x)|$

Przypomnijmy

Definicja

Wartością bezwzględną (modułem) liczby:

- nieujemnej x jest liczba x ,
- ujemnej x jest liczba $-x$.

Wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest zawsze liczbą nieujemną, czyli $|x| \geq 0$ dla $x \in \mathbf{R}$.

- $|x| = x$, gdy $x \geq 0$
- $|x| = -x$, gdy $x < 0$,

co zapisujemy

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Jeżeli $y = f(x)$ i $g(x) = |f(x)|$, to zgodnie z definicją wartości bezwzględnej wzór funkcji g możemy zapisać w postaci:

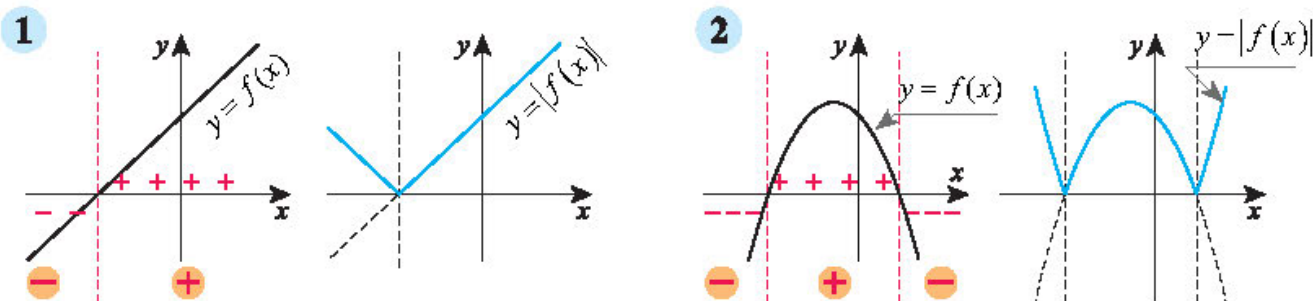
$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{gdy } f(x) < 0 \end{cases}$$

(funkcja f ma wartości nieujemne)
(funkcja f ma wartości ujemne)

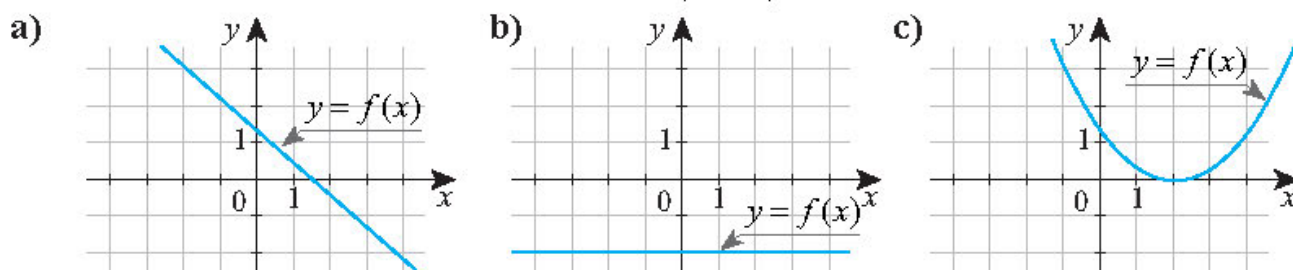
Aby narysować wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$, znając wykres funkcji f , wystarczy określić znaki funkcji f . W tych przedziałach, w których funkcja f przyjmuje:

- wartości nieujemne, wykres funkcji g pokrywa się z wykresem funkcji f ,
- wartości ujemne, wykres funkcji g jest symetryczny względem osi x do wykresu funkcji f .

Na przykład:



Ćwiczenie 15. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Narysuj w zeszycie wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = |f(x)|$.



R

Przykład 7. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |-4x^2 + 8x - 3|$.

Rozwiązanie

Sporządzamy wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = -4x^2 + 8x - 3$, obliczając jej miejsca zerowe i współrzędne wierzchołka W paraboli.

$$g(x) = -4x^2 + 8x - 3$$

$$\Delta = 16$$

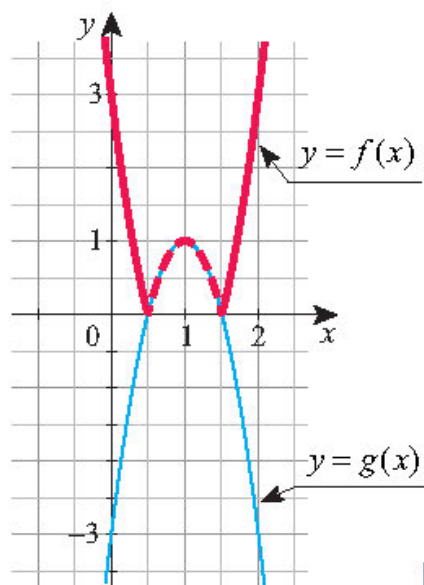
$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

$$p = 1, \quad q = 1, \text{ więc } W = (1, 1).$$

Rysujemy wykres funkcji f , gdy

$$f(x) = |g(x)|, \text{ czyli}$$

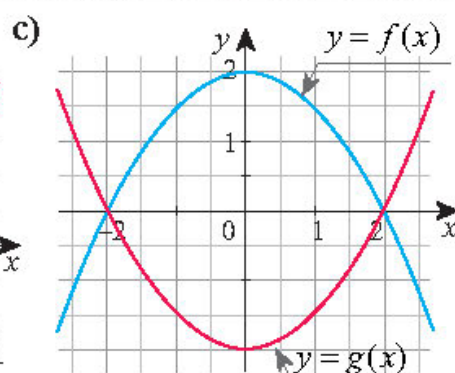
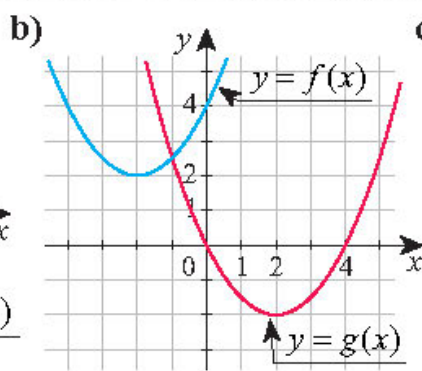
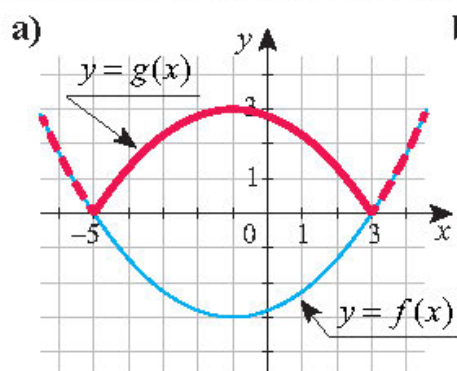
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{gdy } x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ -g(x), & \text{gdy } x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$



Ćwiczenie 16. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem:

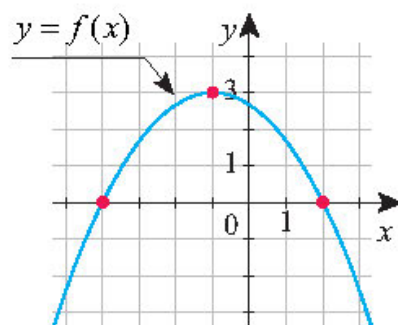
a) $f(x) = |x^2 - 4|$, b) $f(x) = |-4x^2 + 4x - 1|$, c) $f(x) = |-4x^2 - 16x - 15|$.

Ćwiczenie 17. Na rysunku przedstawione są wykresy funkcji f i g . Wiedząc, że wykres funkcji g powstał przez przekształcenie wykresu funkcji f , określ, jakie to przekształcenie.



Ćwiczenie 18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Narysuj w zeszycie wykres funkcji g , gdy:

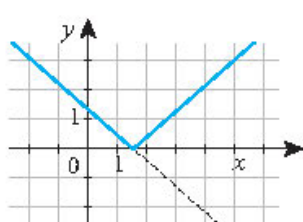
a) $g(x) = -f(x)$, b) $g(x) = f(-x)$,
c) $g(x) = f(x-3) - 2$, d) $g(x) = |f(x)|$.



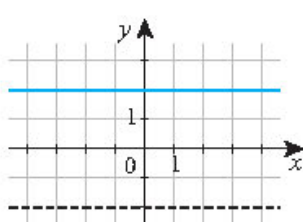
R

Odpowiedzi do ćwiczeń

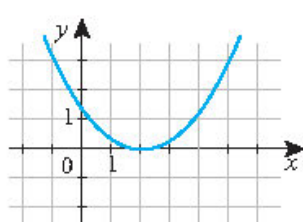
15. a)



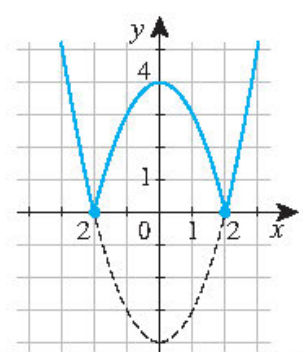
b)



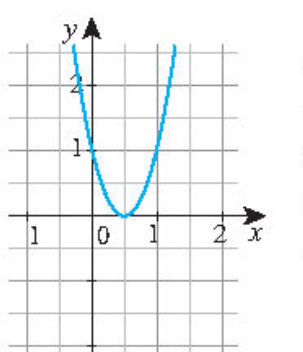
c)



16. a)



b)

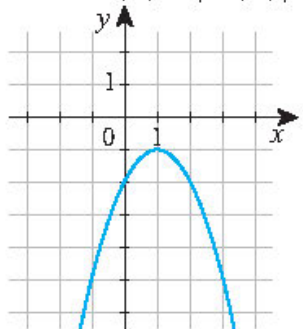
17. a) $g(x) = |f(x)|$, b) $g(x) = f(x-4) - 4$,c) $g(x) = -f(x)$.18. Wykres funkcji f jest przekształcony:a) S_x , b) S_y , c) o wektor $[3, -2]$,

d) przez wartość bezwzględną.

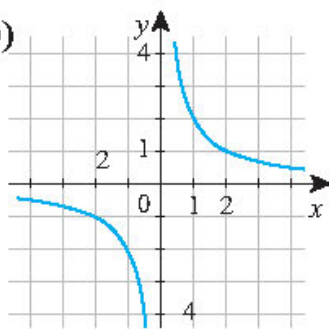
Zadania utrwalające

10.18. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$.

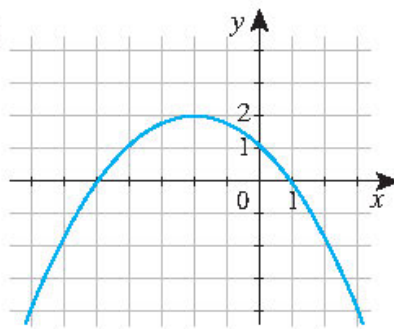
a)



b)



c)



10.19. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = |2x - 4|$,

b) $f(x) = |-x + 3|$,

c) $f(x) = |-x^2 + 4|$,

d) $f(x) = |(x-1)^2 - 2|$,

e) $f(x) = \left| -\frac{2}{x} \right|$,

f) $f(x) = \left| \frac{5}{x} \right|$.

10.20. Sporządź wykres funkcji f , gdy:

a) $f(x) = |x^2 + 2x - 8|$,

b) $f(x) = |2x^2 - x| + 1$,

c) $f(x) = |-x^2 + 1| - 2$,

d) $f(x) = -|x^2 - 4|$,

e) $f(x) = x^2 - 3|x|$,

f) $f(x) = -2x^2 - 7|x| + 4$.

10.21. Sporządź wykres funkcji f , gdy:

a) $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right| - 2$,

b) $f(x) = \left| -\frac{2}{x} \right| + 1$,

c) $f(x) = -\left| \frac{1}{x} \right| + 2$.

R

10.22. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji g , gdy:

1 $g(x) = -f(x)$,

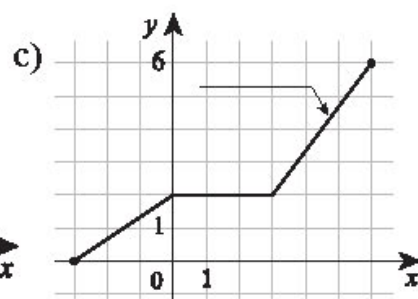
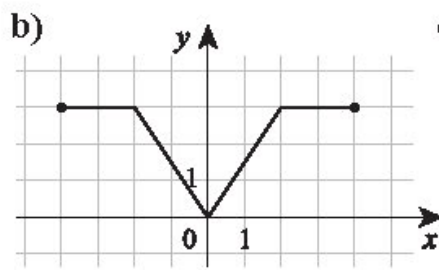
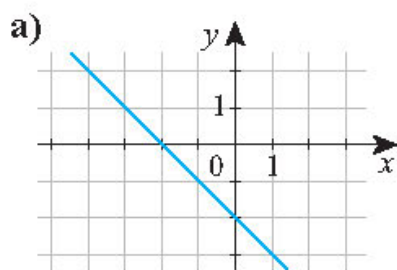
2 $g(x) = f(-x)$,

3 $g(x) = f(x-3)$,

4 $g(x) = f(x) - 2$,

5 $g(x) = f(x+1) - 1$,

6 $g(x) = |f(x)|$.



10.23. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .

Narysuj wykres funkcji g , gdy:

a) $g(x) = |f(x) - 1|$,

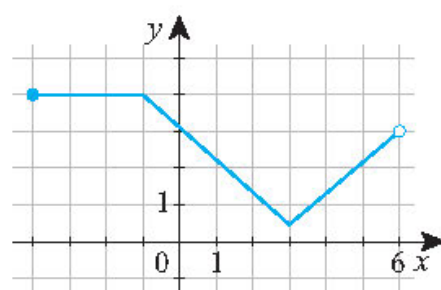
b) $g(x) = |f(x+3)|$,

c) $g(x) = |f(x-1) - 2|$,

d) $g(x) = f(-x) - 3$,

e) $g(x) = -f(-x)$,

f) $g(x) = -|f(x+1) - 1| + 2$.

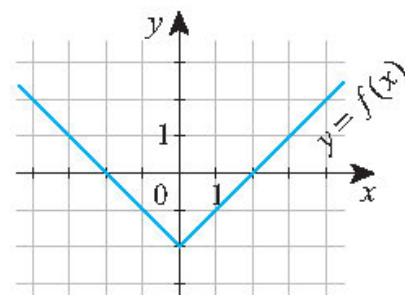


10.24. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x| - 2$. Narysuj w zeszycie wykres funkcji g , gdy:

a) $g(x) = ||x| - 2|$,

b) $g(x) = -2 \cdot (|x| - 2)$,

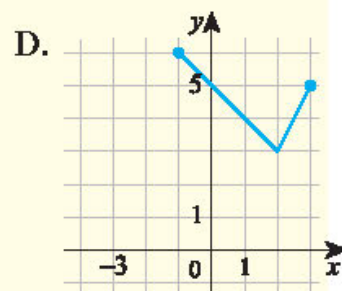
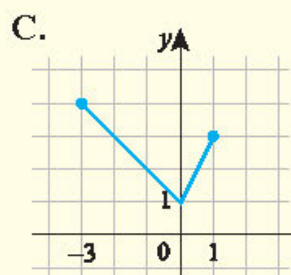
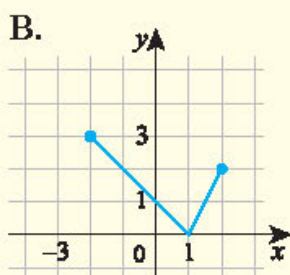
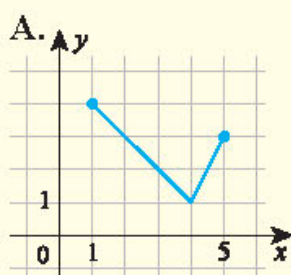
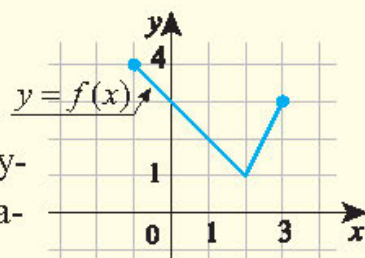
c) $g(x) = |2x| - 2$.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f , to wykres funkcji g określonej wzorem $g(x) = f(x+2)$ przedstawiony jest na rysunku:

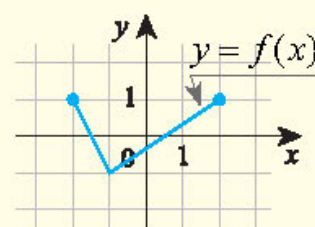


2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

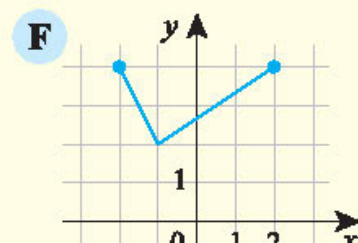
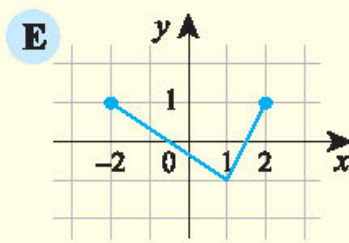
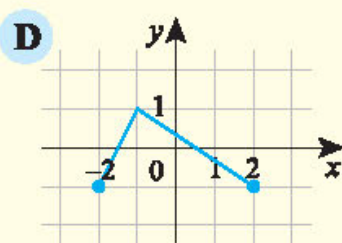
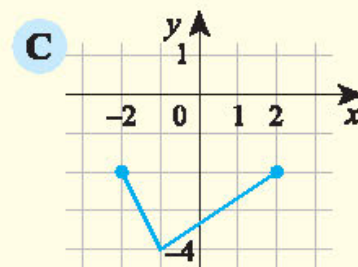
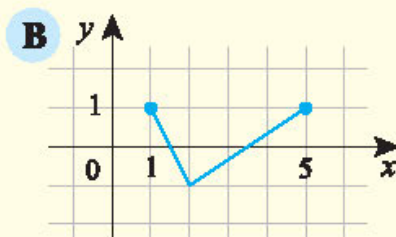
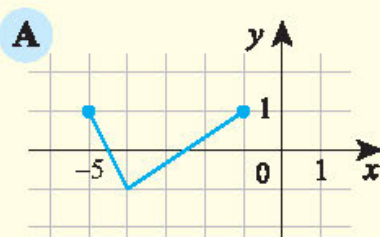
Wykres funkcji f przedstawiony na rysunku przekształcono i otrzymano wykresy określone wzorami:

$$1^\circ y = f(x) - 3 \quad 2^\circ y = f(x + 3) \quad 3^\circ y = f(x - 3)$$

$$4^\circ y = f(x) + 3 \quad 5^\circ y = f(-x) \quad 6^\circ y = -f(x)$$



Przyporządkuj każdemu wzorowi jeden wykres wybrany spośród wykresów oznaczonych literami A, B, C, D, E, F.



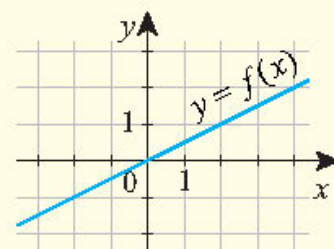
3. Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + x$ przekształcono symetrycznie względem osi y i otrzymano wykres funkcji g . Czy funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 - x$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$g(x) = f(-x)$, zatem $g(x) = -2x^2 - x$.
N	Nie,		B.	$g(x) = f(-x)$, zatem $g(x) = 2x^2 - x$.

4. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej f .

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.



Miejscem zerowym funkcji g jest liczba -2 , gdy $g(x) = f(x - 2)$.	P	F
Wykres funkcji g , gdy $g(x) = f(x) + 4$, przecina oś y w punkcie $(4, 0)$.	P	F
Do wykresu funkcji g , gdy $g(x) = f(-x)$, nie należy punkt $(-2, 1)$.	P	F

11. Wzory skróconego mnożenia

Wzory skróconego mnożenia pozwalają sprawniej wykonywać mnożenie sum algebraicznych. Dotychczas poznaliście trzy z nich.

Przypomnijmy

$$\bullet (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \bullet (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad \bullet (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

kwadrat sumy kwadrat różnicy różnica kwadratów

Ćwiczenie 1. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj działania:

a) $(1+\sqrt{2})^2$, b) $(\sqrt{3}-1)^2$, c) $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$, d) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Istnieje jeszcze jeden wzór pozwalający sprawnie podnosić sumę wyrażeń do kwadratu, który warto zapamiętać.

Przykład 1. Wykaż, że $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) = \\ &= a \cdot (a+b+c) + b \cdot (a+b+c) + c \cdot (a+b+c) = \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \quad \text{cnnw.}\end{aligned}$$

Uwaga

Kwadrat sumy trzech wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń powiększonej przez podwojone iloczyny par tych wyrażeń.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

Przykład 2. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $(x-\sqrt{2}+3)^2$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}(x-\sqrt{2}+3)^2 &= [x+(-\sqrt{2})+3]^2 = \\ &= x^2 + (-\sqrt{2})^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot (-\sqrt{2}) + 2 \cdot x \cdot 3 + 2 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot 3 = \\ &= x^2 + 2 + 9 - 2\sqrt{2}x + 6x - 6\sqrt{2} = x^2 + (6-2\sqrt{2})x + 11.\end{aligned}$$

Ćwiczenie 2. Wykonaj działania, stosując wzór skróconego mnożenia:

a) $(2+x+y)^2$, b) $(x-y+3)^2$, c) $(2a+\sqrt{2}-4)^2$, d) $(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)^2$.

Sześcián sumy i różnicy dwóch wyrażeń

Przykład 3. Wykonaj potęgowanie $(a+b)^3$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Odp.: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Ćwiczenie 3. Wykaż, że $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Uwaga

Wzory skróconego mnożenia	
Sześcián sumy dwóch wyrażeń	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Sześcián różnicy dwóch wyrażeń	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Przykład 4. Wykonaj potęgowanie: a) $(2x+y)^3$, b) $(3x-2y)^3$.

Rozwiązanie

a) $(\textcircled{2x} + \textcircled{y})^3 = \textcircled{2x}^3 + 3\textcircled{2x}^2\textcircled{y} + 3\textcircled{2x}\textcircled{y}^2 + \textcircled{y}^3$

$$(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3 \cdot 2xy^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3.$$

b) $(\textcircled{3x} - \textcircled{2y})^3 = (\textcircled{3x})^3 - 3 \cdot (\textcircled{3x})^2 \cdot \textcircled{2y} + 3 \cdot \textcircled{3x} \cdot (\textcircled{2y})^2 - (\textcircled{2y})^3 =$
 $= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3.$

Ćwiczenie 4. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie.

a) $(x-7)^3$, b) $\left(\frac{1}{2}m+3\right)^3$, c) $(4-x)^3$, d) $(y-x)^3$.

Ćwiczenie 5. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $(a+b)^3 - (a-b)^3$, b) $(a+b)^3 + (a-b)^3$, c) $a(a+b)^3 + b(a+b)^3$.

Przykład 5. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:

a) $(\sqrt{5}+2)^3$, b) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } (\sqrt{5}+2)^3 &= (\sqrt{5})^3 + 3 \cdot (\sqrt{5})^2 \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 2^2 + 2^3 = \\ &= 5\sqrt{5} + 30 + 12\sqrt{5} + 8 = 38 + 17\sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\sqrt{3}-\sqrt{2})^3 &= (\sqrt{3})^3 - 3 \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 = \\ &= 3\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = 9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:

a) $(\sqrt{3}+1)^3$, b) $(\sqrt{2}-1)^3$, c) $(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$, d) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})^3$.

Przykład 6. Wyrażenie $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ przedstaw w postaci sześcianu różnicy dwóch wyrażeń.

Rozwiązanie Zauważamy, że

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = \underbrace{(2x)^3}_a - 12x^2 + 6x - \underbrace{1^3}_b. \quad a = 2x, \quad b = 1$$

Sprawdzamy, czy $(2x-1)^3 \stackrel{?}{=} 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

$$(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 - 1^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1.$$

Odp.: $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x-1)^3$.

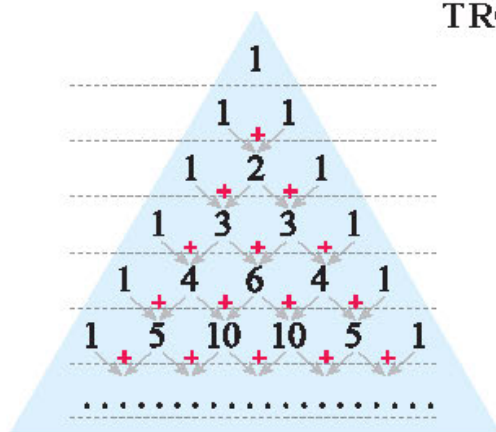
Ćwiczenie 7. Przedstaw w postaci sześcianu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń wyrażenie:

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, b) $y^3 - 3y^2 + 3y - 1$, c) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Ćwiczenie 8. Dokonaj analizy zapisanych obok równości i odkryj pewną prawidłowość. Stosując tę prawidłowość, podnieś do piątej potęgi wyrażenie $(a+b)$.

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= 1a^1 + 1b^1 \\ (a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\ (a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ (a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\ (a+b)^5 &= \end{aligned}$$

TRÓJKĄT PASCALA



Współczynniki liczbowe sum algebraicznych, które są kolejnymi potęgami wyrażenia $(a+b)$, tworzą tablicę liczb, którą nazywa się trójkątem Pascala (czytaj Paskala).



Blaise Pascal
(1623–1662)

Przykład 7. Skorzystaj z własności trójkąta Pascala i wykonaj potęgowanie $(x-3)^4$.

Rozwiązanie

$$(x-3)^4 = [x+(-3)]^4$$

$$(x + (-3))^4 = x^4 + 4x^3(-3) + 6x^2(-3)^2 + 4x(-3)^3 + (-3)^4$$

$$\begin{aligned} [x+(-3)]^4 &= x^4 + 4x^3(-3) + 6x^2(-3)^2 + 4x(-3)^3 + (-3)^4 = \\ &= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 9. Skorzystaj z własności trójkąta Pascala i wykonaj potęgowanie:

a) $(2x-3)^3$, b) $(4-2y)^3$, c) $(x-1)^4$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

2. a) $x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 4y + 4$, b) $x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 6y + 9$, c) $4a^2 - 16a + 4\sqrt{2}a - 8\sqrt{2} + 18$,
 d) $6 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$. 4. a) $x^3 - 21x^2 + 147x - 343$, b) $\frac{1}{8}m^3 + \frac{9}{4}m^2 + \frac{27}{2}m + 27$, c) $64 - 48x + 12x^2 - x^3$,
 d) $y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 = -x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$.
 5. a) $2b^3 + 6a^2b$, b) $2a^3 + 6ab^2$, c) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
 6. a) $6\sqrt{3} + 10$, b) $5\sqrt{2} - 7$, c) $34\sqrt{2} + 27\sqrt{3}$, d) $41\sqrt{5} - 54\sqrt{3}$. 7. a) $(x+1)^3$, b) $(y-1)^3$, c) $(x-2)^3$.
 9. a) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$, b) $64 - 96y + 48y^2 - 8y^3$, c) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

Zadania utrwalające

11.1. Wykonaj potęgowanie:

- a) $(x+1)^3$, b) $(3x+y)^3$, c) $(2x-1)^3$, d) $(2x-3y)^3$,
 e) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right)^3$, f) $\left(\frac{3}{2}x - 4y\right)^3$, g) $(3x+y)^4$, h) $(1-x^2)^5$.

11.2. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $(m+7)^2 + (-m+2)^3 - 3(2-m)(m+2)$,

b) $(4-x)^3 - (x-4)^3$,

c) $(x+2)^3 - (2x-1)^3 - 6x(3x+1)$,

d) $\left(\frac{1}{2}x-2\right)^3 - \left(\frac{1}{2}x+2\right)^3$,

e) $(2a+3)^3 - (2a-3)^3 - (2a-3)$,

f) $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$.

11.3. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:

a) $(2\sqrt{2}+1)^3$,

b) $(3-\sqrt{3})^3$,

c) $(\sqrt[3]{2}+1)^3$,

d) $(\sqrt[3]{3}-2)^3$,

e) $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})^3$,

f) $(\sqrt[4]{2}+1)^3$,

g) $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4})^3$,

h) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^3$,

i) $(\sqrt[6]{27}-\sqrt[6]{8})^3$.

11.4. Wyrażenie przedstaw w postaci sześciianu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń:

a) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$,

b) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$,

c) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$,

d) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$,

e) $\frac{1}{27}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + x - 1$,

f) $x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{27}$.



1.5. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz takie wyrażenie, aby prawdziwa była równość:

a) $(\blacksquare - 5y)^3 = 8x^3 - \blacksquare x^2y + \blacksquare xy^2 - 125y^3$, b) $(\blacksquare + \blacksquare)^3 = 27x^3 + \blacksquare + \blacksquare + 64y^3$,

c) $(2x - \blacksquare)^3 = 8x^3 - 36x^2 + \blacksquare - \blacksquare$, d) $(\blacksquare - 4)^3 = \blacksquare - 3m^2 + \blacksquare - 64$.

Suma i różnica sześcianów dwóch wyrażeń

Ćwiczenie 10. Wykaż, że:

a) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

Uwaga

Wzory skróconego mnożenia		
Iloczyn sumy i niepełnego kwadratu różnicy dwóch wyrażeń	$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$	Suma sześcianów dwóch wyrażeń
Iloczyn różnicy i niepełnego kwadratu sumy dwóch wyrażeń	$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$	Różnica sześcianów dwóch wyrażeń

Przykład 8. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i wykonaj działanie:

a) $(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$, b) $(x-3)(x^2 + 3x + 9)$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } \overbrace{(x+2)}^{\overbrace{a} \quad \overbrace{b}} \cdot \overbrace{(x^2 - 2x + 4)}^{\overbrace{a^2} \quad \overbrace{ba} \quad \overbrace{b^2}} = x^3 - 2^3 = x^3 - 8.$$

$$\text{b) } \overbrace{(x-3)}^{\overbrace{a} \quad \overbrace{b}} \cdot \overbrace{(x^2 + 3x + 9)}^{\overbrace{a^2} \quad \overbrace{ba} \quad \overbrace{b^2}} = x^3 - 3^3 = x^3 - 27.$$

Ćwiczenie 11. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i wykonaj działanie:

a) $(x-1)(x^2 + x + 1)$,

b) $(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)$,

c) $(x^2 - 6x + 36) \cdot (x + 6)$,

d) $(x^2 + 8x + 64) \cdot (x - 8)$,

e) $(3x - \sqrt{2}) \cdot (9x^2 + 3\sqrt{2}x + 2)$,

f) $\left(\sqrt{5}y + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(5y^2 - \sqrt{5}y + \frac{1}{4}\right)$.

Przypomnijmy

Rozłożyć wyrażenie algebraiczne na czynniki, to znaczy przedstawić je w postaci iloczynu co najmniej dwóch czynników.

Jeżeli zapiszemy wzory skróconego mnożenia w postaci $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ i $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, to mówimy, że stosujemy je do rozkładania sumy $a^3 + b^3$ i różnicy $a^3 - b^3$ na czynniki.

Przykład 9. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i zapisz w postaci iloczynu czynników (rozłóż na czynniki) wyrażenie $8x^3 + 27$.

Rozwiązanie

$$\overbrace{8x^3}^{\overbrace{a^3}} + \overbrace{27}^{\overbrace{b^3}} = \overbrace{(2x)^3}^{\overbrace{a}} + \overbrace{3^3}^{\overbrace{b}} = \overbrace{(2x+3)}^{\overbrace{a} \quad \overbrace{b}} \left[\overbrace{(2x)^2}^{\overbrace{a^2}} - \overbrace{2x \cdot 3}^{\overbrace{a} \quad \overbrace{b}} + \overbrace{3^2}^{\overbrace{b^2}} \right] = (2x+3)(4x^2 - 6x + 9).$$

Odp.: $(2x+3)(4x^2 - 6x + 9)$.

Ćwiczenie 12. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i zapisz w postaci iloczynu (rozłóż na czynniki) wyrażenie: a) $64x^3 - 1$, b) $0,001 + x^3$, c) $125x^3 - 8y^3$.

Ćwiczenie 13. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz takie wyrażenia, aby prawdziwa była równość:

a) $(x - y)(x^2 + \blacksquare + \blacksquare) = x^3 - y^3$, b) $(\blacksquare + \blacksquare)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8$,
 c) $(\blacksquare - \blacksquare)(9x^2 + 6x + 4y^2) = 27x^3 - 8y^3$, d) $(2x - y)(\blacksquare + \blacksquare + \blacksquare) = 8x^3 - y^3$.

Przykład 10. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$, b) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$.

Rozwiązanie

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \cdot 1 + 1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \cdot 1 + 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} =$
 $= \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{2-1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1.$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{(\sqrt[3]{3})^3-1^3} = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}.$

Odp.: a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$, b) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}.$

Ćwiczenie 14. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}-2}$, b) $\frac{11}{9-3\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}}$, c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}.$

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $x^3 - 1$, b) $x^3 + 1$, c) $x^3 + 216$, d) $x^3 - 512$, e) $27x^3 - 2\sqrt{2}$, f) $5\sqrt{5}y^3 + \frac{1}{8}$.

12. a) $(4x-1)(16x^2+4x+1)$, b) $(0,1+x)(0,01-0,1x+x^2)$, c) $(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$.

13. Kolejno: a) xy, y^2 , b) $x, 2$, c) $3x, 2y$, d) $4x^2, 2xy, y^2$.

14. a) $-\sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{5} - 4$, b) $\frac{3+\sqrt[3]{6}}{3}$, c) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$.

Zadania utrwalające

11.6. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i wykonaj działanie:

a) $(1-x)(1+x+x^2)$,

b) $(x^2-x+1)(1+x)$,

c) $(7-x)(49+7x+x^2)$,

d) $(81-9y+y^2)(9+y)$,

e) $(2x-\sqrt{6})(4x^2+2\sqrt{6}x+6)$,

f) $(\sqrt{2}x+0,5)\left(2x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+0,25\right)$.

11.7. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i rozłóż na czynniki wyrażenie:

a) $125x^3+1$,

b) $0,008-x^3$,

c) $343a^3+729b^3$,

d) $6x^3-1$,

e) $5x^3+1$,

f) y^3-4 ,

g) x^3-2 ,

h) $3x^3-2y^3$,

i) $x^3-\sqrt{2}$.

11.8. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce  wpisz takie wyrażenia, aby prawdziwa była równość:

a) $(x+2y) \cdot (x^2 - \blacksquare + \blacksquare) = x^3 + 8y^3$,

b) $(\blacksquare - \blacksquare) \cdot (16x^2 + 4x + 1) = 64x^3 - 1$,

c) $(\blacksquare + \blacksquare) \cdot (9x^2 - 15xy + 25y^2) = 27x^3 + 125y^3$,

d) $(8x+2y) \cdot (\blacksquare - \blacksquare + \blacksquare) = 512x^3 + 8y^3$,

e) $(\blacksquare + \blacksquare) \cdot (2x^2 - \sqrt{6}x + 3) = 2\sqrt{2}x^3 + 3\sqrt{3}$,

f) $5\sqrt{5}x^3 - 2\sqrt{2}y^3 = (\blacksquare - \blacksquare) \cdot (\blacksquare + \sqrt{10}xy + \blacksquare)$.

11.9. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}+1}$,

b) $\frac{-2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$,

c) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}+4}$,

d) $\frac{2}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$,

e) $\frac{12}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$,

f) $\frac{-8}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{49}}$.

11.10. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $2(3p-1)^2 - (p-2)^3$,

b) $-(2p+5)(4p^2-10p+25) + (-p-1)^2$.

11.11. Wyznacz liczby całkowite x i y , dla których prawdziwa jest równość:

a) $(2-\sqrt{5})^3 = x + y\sqrt{5}$,

b) $(\sqrt{3}+4)^3 = x\sqrt{3} + y$,

c) $(\sqrt{7}-1)^3 = x + y\sqrt{7}$,

d) $(2\sqrt{5}-3)^3 = x + y\sqrt{5}$.

11.12. Wykaż, że:

D

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}} = \frac{3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{36} + 3\sqrt[3]{2}}{3}$,

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}{5}$.

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia

Wzory skróconego mnożenia stosujemy między innymi do:

- rozkładania wyrażeń algebraicznych na czynniki,
- obliczania wartości wyrażeń,
- uzasadniania podzielności.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 11. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i rozłóż na czynniki wyrażenie $x^{12} - 1$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
 x^{12} - 1 &= \underbrace{(x^6)^2}_{a^2} - \underbrace{1^2}_{b^2} = & a^2 - b^2 - (a-b)(a+b) \\
 &= (x^6 - 1)(x^6 + 1) = \left[(x^3)^2 - 1^2 \right] \cdot \left[(x^2)^3 + 1^3 \right] = & x^6 - 1 - (x^3)^2 - 1^2 \\
 &= (x^3 - 1)(x^3 + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^4 - x^2 + 1) = & x^6 + 1 - (x^2)^3 + 1^3 \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).
 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 15. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i rozłóż na czynniki wyrażenie:

a) $x^4 - 16$, b) $x^8 - 1$, c) $x^6 - 729$.

Przykład 12. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$, gdy $x + \frac{1}{x} = 4$ i $x \neq 0$, b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$, gdy $x + \frac{1}{x} = 1$ i $x \neq 0$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
 \text{a) } x^2 + \frac{1}{x^2} &= x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2x \cdot \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14. & a^2 = x^2 & b^2 = \frac{1}{x^2} \\
 \text{b) } x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 \right) = \\
 &= \left(x + \frac{1}{x} \right) \left[\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 - 1 \right] = 1 \cdot (1 - 3) = -2. & x^2 + \frac{1}{x^2} - \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2
 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 16. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$, gdy $x - \frac{1}{x} = 5$ i $x \neq 0$, b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$, gdy $x + \frac{1}{x} = 3$ i $x \neq 0$.

Przykład 13. Oblicz wartość wyrażenia $4x^2y^2$, gdy $x + y = 3$ i $x^3 + y^3 = 9$.

Rozwiązanie

$$x^3 + y^3 = 9$$

$$\underbrace{(x + y)}_3 (x^2 - xy + y^2) = 9$$

$$a^3 + b^3 - (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$3 \cdot (x^2 - xy + y^2) = 9 \quad / : 3$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

$$x^2 + 2xy - 2xy + y^2 - xy = 3$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - (x + y)^2$$

$$(x + y)^2 - 3xy = 3$$

$$9 - 3xy = 3$$

$$(x + y)^2 - 3^2$$

$$xy = 2$$

$$4x^2y^2 = 4 \cdot (xy)^2 = 4 \cdot 2^2 = 16.$$

Ćwiczenie 17. Oblicz wartość wyrażenia xy , gdy $x + y = 5$ i $x^3 + y^3 = 35$.

Przykład 14. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i uzasadnij, że:

a) liczba $18^8 - 15^8$ jest podzielna przez 11, b) liczba $94^6 - 9^6$ jest podzielna przez 17.

Rozwiązanie

Rozkładamy każdą z podanych liczb na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia.

a) $18^8 - 15^8 = (18^4)^2 - (15^4)^2 = (18^4 - 15^4)(18^4 + 15^4) =$

$$= [(18^2)^2 - (15^2)^2] \cdot (18^4 + 15^4) = (18^2 - 15^2)(18^2 + 15^2)(18^4 + 15^4) =$$

$$= \underbrace{(18 - 15)}_3 \cdot \underbrace{(18 + 15)}_{33} \cdot (18^2 + 15^2)(18^4 + 15^4) =$$

$$a^2 - b^2 - (a - b)(a + b)$$

$$= 11 \cdot 9 \cdot (18^2 + 15^2)(18^4 + 15^4).$$

c.n.u.

b) $94^6 - 9^6 = (94^3)^2 - (9^3)^2 = (94^3 - 9^3)(94^3 + 9^3) =$

$$a^2 - b^2 - (a - b)(a + b)$$

$$= \underbrace{(94 - 9)}_{85} (94^2 + 94 \cdot 9 + 9^2) \cdot (94^3 + 9^3) =$$

$$a^3 - b^3 - (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= 17 \cdot 5 \cdot (94^2 + 94 \cdot 9 + 9^2) \cdot (94^3 + 9^3).$$

c.n.u.

Ćwiczenie 18. Uzasadnij, że liczba:

a) $5^{12} - 1$ jest podzielna przez 31, b) $3^{18} - 2^{18}$ jest podzielna przez 19.

Do dowodzenia podzielności liczb bardzo przydatna jest znajomość wzoru o różnicy n -tych potęg dwóch wyrażeń.

Twierdzenie

Jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 1, to różnicę n -tych potęg wyrażeń a i b można przedstawić w postaci

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Dowód:

Jeżeli $n = 2$, to $a^2 - b^2 = a^2 \underbrace{-ab + ab}_{0} - b^2 =$ $a \pm 0 = a$

$$= (a^2 - ab) + (ab - b^2) =$$

$$= a(a - b) + b(a - b) =$$

$$= (a - b)(a + b).$$

Jeżeli $n = 3$, to $a^3 - b^3 = a^3 \underbrace{-a^2b + a^2b}_{0} \underbrace{-ab^2 + ab^2}_{0} - b^3 =$

$$= (a^3 - a^2b) + (a^2b - ab^2) + (ab^2 - b^3) =$$

$$= a^2(a - b) + ab(a - b) + b^2(a - b) =$$

$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Jeżeli $n = 4$, to $a^4 - b^4 = a^4 \underbrace{-a^3b + a^3b}_{0} \underbrace{-a^2b^2 + a^2b^2}_{0} \underbrace{-ab^3 + ab^3}_{0} - b^4 =$

$$= (a^4 - a^3b) + (a^3b - a^2b^2) + (a^2b^2 - ab^3) + (ab^3 - b^4) =$$

$$= a^3(a - b) + a^2b(a - b) + ab^2(a - b) + b^3(a - b) =$$

$$= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Analogicznie dla dowolnej liczby naturalnej n większej od 1:

$$a^n - b^n = a^n \underbrace{-a^{n-1}b + a^{n-1}b}_{0} \underbrace{-a^{n-2}b^2 + a^{n-2}b^2}_{0} + \dots + a^2b^{n-2} \underbrace{-ab^{n-1} + ab^{n-1}}_{0} - b^n =$$

$$= (a^n - a^{n-1}b) + (a^{n-1}b - a^{n-2}b^2) + (a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3) + \dots + (a^2b^{n-2} - ab^{n-1}) + (ab^{n-1} - b^n) =$$

$$= a^{n-1}(a - b) + a^{n-2}b(a - b) + a^{n-3}b^2(a - b) + \dots + ab^{n-2}(a - b) + b^{n-1}(a - b) =$$

$$= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \quad \text{c.n.u.}$$

Ćwiczenie 19. Uzasadnij, że $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Przykład 15. Zastosuj wzór na różnicę n -tych potęg dwóch wyrażeń i zapisz w postaci iloczynu wyrażenie:

a) $3^5 - 1$, b) $4^6 - 3^6$, c) $a^n - 1$.

Rozwiązanie

a) $3^5 - 1 = 3^5 - 1^5 = (3 - 1)(3^4 + 3^3 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^3 + 1^4) = 2 \cdot (3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1)$,

b) $4^6 - 3^6 = (4 - 3)(4^5 + 4^4 \cdot 3 + 4^3 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4 + 3^5)$,

c) $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot 1 + a^{n-3} \cdot 1^2 + \dots + a^2 \cdot 1^{n-3} + a \cdot 1^{n-2} + 1^{n-1}) =$
 $= (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + a^2 + a + 1)$.

Ćwiczenie 20. Zastosuj wzór na różnicę n -tych potęg dwóch wyrażeń i zapisz w postaci iloczynu wyrażenie: a) $2^7 - 1$, b) $5^6 - 3^6$, c) $1 - x^n$.

Przykład 16. Uzasadnij, że liczba $11^{12} - 7^{12}$ jest podzielna przez liczbę 72.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} 11^{12} - 7^{12} &= (11^6 - 7^6) \cdot (11^6 + 7^6) = & a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ &= (11^3 - 7^3) \cdot (11^3 + 7^3) \cdot (11^6 + 7^6) = \\ &= (11 - 7)(11^2 + 11 \cdot 7 + 7^2) \cdot (11 + 7) \cdot (11^2 - 11 \cdot 7 + 7^2) \cdot (11^6 + 7^6) = \\ &= 4 \cdot 18 \cdot 247 \cdot 93 \cdot (11^6 + 7^6). \quad \text{c.n.u.} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 21. Uzasadnij, że liczba:

a) $7^{13} - 5^{13}$ jest podzielna przez 2, b) $101^{101} - 1$ jest podzielna przez 100.

Przykład 17. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $6^n + 4$ jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} 6^n + 4 &= 6^n - \underbrace{1}_{0} + 1 + 4 = 6^n - 1 + 5 = \\ &= (6 - 1)(6^{n-1} + 6^{n-2} + \dots + 6^2 + 6 + 1) + 5 = \\ &= 5(6^{n-1} + 6^{n-2} + \dots + 6^2 + 6 + 1) + 5 = 5(6^{n-1} + 6^{n-2} + \dots + 6^2 + 6 + 2). \end{aligned}$$

Liczba $6^n + 4$ jest podzielna przez 5.

Ćwiczenie 22. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $7^n + 5$ jest podzielna przez 6.

Uwaga

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA			
kwadrat sumy	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	sześcian sumy	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
kwadrat różnicy	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	sześcian różnicy	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
różnica kwadratów	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	suma sześciątów	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
kwadrat sumy trzech wyrazów	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	różnica sześciątów	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
różnica n -tych potęg	$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$		

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. a) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$, b) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$, c) $(x-3)(x+3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$.

16. a) 27, b) 18. 17. $xy = 6$.

18. Wskazówka. a) $5^{12} - 1 = 124 \cdot 126 \cdot (5^6 + 1)$, b) $3^{18} - 2^{18} = (3^3 + 2^3) \left(\frac{3^3 - 2^3}{19} \right) (3^6 + 6^3 + 2^6) (3^6 - 6^3 + 2^6)$.

20. a) $(2-1)(2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1)$, b) $(5-3)(5^5 + 5^4 \cdot 3 + 5^3 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 3^5)$,

c) $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1})$.

21. Wskazówka. Zastosuj wzór na różnicę n -tych potęg, gdy: a) $n = 13$, b) $n = 101$.

22. Wskazówka. $7^n + 5 = 7^n - 1 + 1 + 5 = (7^n - 1) + 6$.

Zadania utrwalające

11.13. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i rozłóż na czynniki wyrażenie:

- a) $(x+1)^3 - 8$, b) $(x+2)^3 + 27$, c) $(2x-1)^3 - 64$,
 d) $(x-2)^3 - (x+1)^3$, e) $(2x-1)^3 + (x-2)^3$, f) $(3x-2)^3 - (2x+3)^3$.

11.14. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i uzasadnij, że liczba $65^{12} - 35^{12}$ jest podzielna przez:

- a) 3, b) 5, c) 10.

D

- D

D

D

- D

- $$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Zestaw powtórkowy

1. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

W równości $(2x-3)^3 = 8x^3 \square + 54x + 27$ w miejsce $\square$ należy wpisać wyrażenie:

A. $-36x^2$, B. $-12x^2$.

Liczba $101^4 - 1$ jest podzielna przez:

C. 102 000, D. 10 200.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeśli wykonamy potęgowanie $(3\sqrt{2}x + 5y)^3$, to w miejsce $\square$ przy iloczynie $\square x^2 y$ należy wpisać liczbę:

A. 270, B. 125, C. $54\sqrt{2}$, D. $45\sqrt{2}$.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli $a + 3b = -5$ i $ab = -1$, to wartość wyrażenia $a^3 + 27b^3$ jest równa:

A. -170, B. -140, C. 125, D. 170.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczby a i b różne od zera spełniają warunek $a^3 + b^3 = 0$. Zatem:

A. $a = b$, B. $a^2 + b^2 = 0$, C. $a + b = 0$, D. $(a - b)^2 = 0$.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Aby usunąć z mianownika ułamka $\frac{5}{2-\sqrt{7}}$ niewymierność, należy jego licznik i mianownik pomnożyć przez:

A. $2 - \sqrt{7}$, B. $\sqrt{7}$, C. $2\sqrt{7}$, D. $2 + \sqrt{7}$.

6. *Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.*

Czy liczba $555^2 - 333^2$ jest podzielna przez 222?

T	Tak,	ponieważ	A.	$555^2 - 333^2 = (555 - 333)^2 = 222^2$.
N	Nie,		B.	$555^2 - 333^2 = 222 \cdot 888$.

12. Wielomiany

Wielomiany jednej i wielu zmiennych

Przypomnijmy

Jednomianem nazywamy takie wyrażenie algebraiczne, które jest pojedynczą liczbą lub pojedynczą literą, lub iloczynem liczb i liter.

$$5, a^2, 2a, \frac{a}{3}, 4x^2y, \\ -x, abc, -4x^2y$$

- Iloczyn jednomianów jest jednomianem.
- **Jednomianami podobnymi** nazywamy jednomiany, które różnią się co najwyżej współczynnikami liczbowymi.

$$-5a, -\frac{1}{3}a, \frac{a}{7}, -a, a \quad - \text{jednomiany podobne}$$

$$kat, tak, akt \quad - \text{jednomiany podobne}$$

$$ab, a^2b, ab^2 \quad - \text{jednomiany, które nie są podobne}$$

Sumę jednomianów nazywamy **wielomianem**,

np. $a+3$, $2a+b$, x^2-x+4 , $5-y^2$.

- W zależności od liczby jednomianów w sumie (składników sumy) wyróżniamy:

- **dwumiany**, np. $x-1$, x^2+2 , $6a-2b$,
- **trójmiany**, np. $a+b+c$, $x-y+2$, $2x^2-3x+1$, x^5-x^3+1 ,
-

$$a+b, \\ \frac{1}{2}x-y, 2+m, \\ x^2+3x-2$$

Definicja

Wielomianem (funkcją wielomianową) stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję określoną wzorem $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_1 \in \mathbb{R}$, ..., $a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

n – stopień wielomianu W , co zapisujemy $\text{st.}[W(x)]$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ – współczynniki liczbowe wielomianu W , gdzie $a_n \neq 0$

a_0 – wyraz wolny wielomianu

Funkcja liniowa oraz funkcja kwadratowa są przykładami wielomianu (funkcji wielomianowej).

Wielomiany zmiennej x oznaczamy: $W(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $f(x)$, $g(x)$ itp.

Wielomian W , taki że $W(x) = -x^2 + 3x^4 - 2x + 1$, jest sumą składników:

$-x^2$, $3x^4$, $-2x$, 1 , które nazywamy **jednomianami** lub **wyrazami wielomianu**.

$-x^2$ to jednomian zmiennej x stopnia 2,	$-2x$ to jednomian zmiennej x stopnia 1,
$3x^4$ to jednomian zmiennej x stopnia 4,	1 to jednomian stopnia 0.

Wielomian W jest czwartego stopnia, co zapisujemy $\text{st.}[W(x)] = 4$.

Uwaga

- **Stopień jednomianu** ax^k zmiennej x jest równy k , gdzie $k \in \mathbb{N}$, gdy współczynnik liczbowy a jest różny od zera ($a \neq 0$).
- **Stopień wielomianu** jednej zmiennej jest równy największemu z wykładników potęgi tej zmiennej, przy której współczynnik liczbowy jest różny od zera.

Ćwiczenie 1. Określ stopień wielomianu: **a)** $W(x) = 3$, **b)** $G(x) = 5x^2 - 1$,
c) $H(x) = 1 - 3x + 7x^5$, **d)** $P(y) = (y - 3)^2 + (y - 2)^3$.

Wielomian $W(x) = -x^2 + 3x^4 - 2x + 1$ można uporządkować malejąco (lub rosnąco) według malejących (rosnących) wykładników potęg zmiennej x . Na przykład:

$W(x) = 3x^4 - x^2 - 2x + 1$ – wielomian $W(x)$ uporządkowany malejąco,

$W(x) = 1 - 2x - x^2 + 3x^4$ – wielomian $W(x)$ uporządkowany rosnąco.

Ćwiczenie 2. Wielomian $W(x) = x^5 - 2x^7 - 3x + 5x^2 + 2x^3 + 3 - x^4 + 2x^7$ uporządkuj malejąco i określ jego stopień.

Ćwiczenie 3. Napisz wielomian zmiennej y uporządkowany malejąco, gdy jego kolejnymi współczynnikami liczbowymi są: **a)** $-1, 0, 0, 2$, **b)** $\frac{1}{2}, -1, 0, 0$, **c)** $3, 0, -3, 0$.

Uwaga

Jeżeli $W(x) = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x , to wielomian W nazywamy **wielomianem zerowym** i zapisujemy $W(x) \equiv 0$.

Wielomian zerowy nie ma określonego stopnia.

Przykład 1. Wielomian W określony jest wzorem $W(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x + 7$.

Oblicz $W(0)$ i $W(1)$.

Rozwiązanie

$$W(0) = 5 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 7 = 7, \text{ czyli } W(0) = 7,$$

$$W(1) = 5 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 7 = 5 + 2 - 4 + 7 = 10, \text{ czyli } W(1) = 10.$$

Uwaga

Jeżeli wielomian W określony jest wzorem $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, to:

$$\bullet W(0) = a_0, \quad \bullet W(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0.$$

Ćwiczenie 4. Oblicz sumę współczynników i wyraz wolny wielomianu W , gdy:

$$\text{a) } W(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)(x + 2), \quad \text{b) } W(x) = (4x^{10} - 7x^5 + 3x^2 - 1)(3x^7 + 5x^3 - 1).$$

Wielomianem dwóch zmiennych, np. x i y , nazywamy funkcję, która jest sumą jednomianów zmiennych x i y .

Wyrażenie postaci $ax^k y^m$ nazywamy jednomianem zmiennych x i y , gdzie a jest ustaloną liczbą, którą nazywamy współczynnikiem jednomianu.

Podobnie definiujemy jednomiany trzech lub większej liczby zmiennych.

Wielomian wielu zmiennych to suma jednomianów wielu zmiennych, np.:

$$W(x, y) = x^2 + xy - 5, \quad R(x, y) = x^3 - y^3 - \text{wielomiany dwóch zmiennych } x \text{ i } y,$$

$$G(x, y, z) = z^3 + xy + 2yz - x, \quad P(x, y, z) = 3x^2 yz^5 - \text{wielomiany trzech zmiennych } x, y \text{ i } z.$$

Wielomian W , taki że $W(a, b) = ab^3 - 6a^2b$, jest sumą jednomianów ab^3 i $-6a^2b$.

ab^3 – jednomian ze względu na zmienną a ma stopień 1,

– jednomian ze względu na zmienną b ma stopień 3,

– jednomian ze względu na zmienne a i b ma stopień 4,

$-6a^2b$ – jednomian ze względu na zmienną a ma stopień 2,

– jednomian ze względu na zmienną b ma stopień 1,

– jednomian ze względu na zmienne a i b ma stopień 3.

Wielomian W jest czwartego stopnia, co zapisujemy st. $[W(a, b)] = 4$.

Uwaga

Stopniem wielomianu wielu zmiennych jest najwyższy stopień jednomianu (określony ze względu na te zmienne), którego współczynnik liczbowy jest różny od 0.

Ćwiczenie 5. Określ stopień wielomianu:

$$\text{a) } W(x, y) = 3xy^3 - 3x^4 + x^2y^3, \quad \text{b) } H(x, y) = 2x^2y - 3x^2 - 3y^2 + xy - 5,$$

$$\text{c) } P(a, b) = (a - 3)^2 + 2(b + 1)^2, \quad \text{d) } U(x, y, z) = (x + y)^2 - 3(x - y)^2 + z,$$

$$\text{e) } Q(a, b, c) = 2a^2bc - (a^2 - bc)^2, \quad \text{f) } V(a, b, x) = (a + b)^3 - (abx)^2.$$

Wielomiany dwóch zmiennych, podobnie jak wielomiany jednej zmiennej, zwykle zapisujemy w postaci uporządkowanej malejącej, ze względu na stopień jednomianów i ze względu na potęgę jednej ze zmiennych.

Na przykład wielomian $W(x, y) = x^2y^3 + x + x^3y^2 + x^2y + y + xy^4$:

- uporządkowany ze względu na zmienną x ma postać

$$W(x, y) = x^3y^2 + x^2y^3 + x^2y + xy^4 + x + y,$$

- uporządkowany ze względu na zmienną y ma postać

$$W(x, y) = y^4x + y^3x^2 + y^2x^3 + yx^2 + y + x.$$

Ćwiczenie 6. Wielomian $W(x, y) = xy - x^2y^3 + 2xy^4 + x^3y + 2x - y$ uporządkuj malejąco ze względu na: a) zmienną x , b) zmienną y .

Równość wielomianów

Wiemy, że wielomian jest funkcją, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$.

Dwa niezerowe wielomiany jednej zmiennej są równe $W(x) = P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej mają taką samą wartość.

Wykażemy na przykładzie wielomianów drugiego stopnia, że gdy są one równe, to mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej.

$$\begin{array}{l|l} Z \text{ (założenie): } W(x) = P(x), \text{ gdzie} & T \text{ (teza): } a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0. \\ W(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, P(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0. & \end{array}$$

Dowód:

$W(x) = P(x)$, więc:

$$1^\circ W(0) = P(0), \text{ skąd } a_0 = b_0$$

$$W(0) = a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$$

$$P(0) = b_2 \cdot 0^2 + b_1 \cdot 0 + b_0 = b_0$$

$$2^\circ W(1) = P(1), \text{ skąd } a_2 + a_1 = b_2 + b_1$$

$$W(1) = a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_2 + a_1 + a_0$$

$$P(1) = b_2 \cdot 1^2 + b_1 \cdot 1 + b_0 = b_2 + b_1 + b_0$$

$$3^\circ W(-1) = P(-1), \text{ skąd } a_2 - a_1 = b_2 - b_1$$

$$W(-1) = a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 = a_2 - a_1 + a_0$$

$$P(-1) = b_2 \cdot (-1)^2 + b_1 \cdot (-1) + b_0 = b_2 - b_1 + b_0$$

Z warunków 2° i 3° otrzymujemy układ:

$$\begin{array}{rcl} + \begin{cases} a_2 + a_1 = b_2 + b_1 \\ a_2 - a_1 = b_2 - b_1 \end{cases} & - \begin{cases} a_2 + a_1 = b_2 + b_1 \\ a_2 - a_1 = b_2 - b_1 \end{cases} & \\ \hline 2a_2 = 2b_2 & 2a_1 = 2b_1 & \end{array}$$

Zatem $a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.

c.n.u.

Ćwiczenie 7. Wykaż, że jeżeli $W(x) = P(x)$, gdzie:

- a) $W(x) = a_1x + a_0$ i $P(x) = b_1x + b_0$, to $a_1 = b_1$ i $a_0 = b_0$,
 b) $W(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ i $P(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$,
 to $a_3 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$ i $a_0 = b_0$.

Aby stwierdzić równość dwóch dowolnych wielomianów, korzystamy z następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Dwa niezerowe wielomiany jednej zmiennej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej.

Jeśli $W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$
 i $P(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + b_{k-2}x^{k-2} + \dots + b_0$, gdzie $b_k \neq 0$,
 to $W(x) = P(x)$ wtedy i tylko wtedy,
 gdy $n = k$, $a_n = b_k$, $a_{n-1} = b_{k-1}$, $a_{n-2} = b_{k-2}$, ..., $a_0 = b_0$.

Ćwiczenie 8. Sprawdź, czy wielomiany W i Q zmiennej x są równe, gdy
 $W(x) = x(x^2 - 2) - x^2 - 1$ i $Q(x) = x^3 - (x+1)^2$.

Przykład 2. Oblicz, dla jakich wartości m i n wielomiany W i G są równe, gdy:

- a) $W(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + m$ i $G(x) = 2x^3 + nx^2 - 3x + 2$,
 b) $W(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 4$ i $G(x) = (m-n)x^3 + (4+m)x^2 + (2m-n)x + 4$.

Rozwiązanie

- a) $\text{st.}[W(x)] = 3$ i $\text{st.}[G(x)] = 3$, czyli $\text{st.}[W(x)] = \text{st.}[G(x)]$.

Zauważamy, że współczynniki liczbowe wielomianów W i G przy x^3 i przy x są odpowiednio równe, a zatem wystarczy porównać współczynniki liczbowe przy x^2 i wyrazy wolne.

$$W(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + m$$

$$G(x) = 2x^3 + nx^2 - 3x + 2, \text{ więc } W(x) = G(x), \text{ gdy } \begin{cases} m = 2 \\ n = 5 \end{cases}.$$

$$\text{b) } W(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 4 \text{ i } G(x) = (m-n)x^3 + (4+m)x^2 + (2m-n)x + 4,$$

$$\text{więc st. } [W(x)] = 3 \text{ i st. } [G(x)] = 3 \text{ oraz } \begin{cases} m-n=2 \\ 4+m=-1 \\ 2m-n=-3 \end{cases},$$

skąd $m = -5$ i $n = -7$.

Odp.: a) $m = 2$ i $n = 5$, b) $m = -5$ i $n = -7$.

Ćwiczenie 9. Oblicz, dla jakich wartości p i k wielomiany P i Q są równe, gdy:

$$\text{a) } P(x) = 3x^3 + px^2 - 6x + 2 \text{ i } Q(x) = 3x^3 - 2x^2 - kx + 2,$$

$$\text{b) } P(x) = (x-1)(x^2 - 2x) \text{ i } Q(x) = px^3 - 6kx^2 + 2x + p - 1.$$

Ćwiczenie 10. Wyznacz takie liczby całkowite x i y , aby spełniona była równość:

$$\text{a) } (2\sqrt{5} + 1)^2 = x\sqrt{5} - y, \quad \text{b) } (\sqrt{3} - 2)^3 = x\sqrt{3} + y.$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

$$1. \text{ a) } 0, \text{ b) } 2, \text{ c) } 5, \text{ d) } 3. \quad 2. W(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 3x + 3, \text{ st. } [W(x)] = 5.$$

$$3. \text{ a) } W(y) = -y^3 + 2, \text{ b) } W(y) = \frac{1}{2}y^3 - y^2, \text{ c) } W(y) = 3y^3 - 3y.$$

$$4. \text{ a) } W(1) = 3, W(0) = 2, \text{ b) } W(1) = -7, W(0) = 1. \quad 5. \text{ a) } 5, \text{ b) } 3, \text{ c) } 2, \text{ d) } 2, \text{ e) } 4, \text{ f) } 6.$$

$$6. \text{ a) } W(x, y) = x^3y - x^2y^3 + 2xy^4 + xy + 2x - y, \text{ b) } W(x, y) = 2xy^4 - x^2y^3 + x^3y + xy - y + 2x.$$

$$8. \text{ Tak} \quad 9. \text{ a) } p = -2, k = 6, \text{ b) } p = 1, k = \frac{1}{2} \quad 10. \text{ a) } x = 4, y = -21, \text{ b) } x = 15, y = -26.$$

Zadania utrwalające

12.1. Ustal, czy podana funkcja jest wielomianem. Jeśli tak, to podaj współczynniki liczbowe wielomianu i określ jego stopień:

$$\text{a) } W(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x - 5,$$

$$\text{b) } P(y) = 5y^3 - \sqrt{3}y^2 - 4y + 1,$$

$$\text{c) } G(x) = |x|,$$

$$\text{d) } H(x) = \sqrt[3]{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}.$$

12.2. Napisz wielomian W w postaci $W(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ i określ jego stopień, gdy:

$$\text{a) } a_4 = 2, a_3 = 3, a_2 = 0, a_1 = -1, a_0 = \sqrt{2},$$

$$\text{b) } a_0 = -5, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, a_5 = \sqrt{2}.$$

12.3. Uporządkuj malejąco wielomian P i określ jego stopień oraz wypisz jego współczynniki liczbowe, gdy:

a) $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^4 - x + 3x^2 - 5$, b) $P(y) = y + 4 - 2y^5 + 3y - 7y^2$,

c) $P(x) = -3(x^2 + 2x - 1) - x(4 + 3x)$, d) $P(z) = 3(1 - z)^3 - 3(1 + z)^3$.

12.4. Oblicz sumę współczynników wielomianu W , gdy:

a) $W(x) = (3 - 2x)^{200} (2 + 4x - 5x^2)^{500}$,

b) $W(x) = (4 - 5x)^{999} (7 - 4x^3 - 3x^4 + x^5)^{5000}$,

c) $W(x) = (\log 4 + 2x \log 5)^5$,

d) $W(x) = (\sqrt[3]{3}x - \sqrt[3]{2})^{40} (\sqrt[3]{9}x^2 + \sqrt[3]{6}x + \sqrt[3]{4})^{40}$.

12.5. Oblicz:

a) $W(-1)$, gdy $W(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x - 1$,

b) $W(\sqrt{2})$, gdy $W(x) = x^3 + (3 - \sqrt{2})x^2 - (1 + 3\sqrt{2})x + \sqrt{2}$,

c) $W(1 + \sqrt{2})$, gdy $W(x) = x^3 - 2x^2 - (3 + 2\sqrt{2})x + 6 + 4\sqrt{2}$,

d) $W(0,5)$, gdy $W(x) = -x^3 - 6x^2 + 12x - 5$.

12.6. Oblicz wyraz wolny wielomianu W , gdy:

a) $W(x) = (x - 2)^3 \cdot (x - 1)^5$,

b) $W(x) = (x - 2)^3 \cdot (x - 1)^{10}$,

c) $W(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$,

d) $W(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdot \dots \cdot (x - 9)(x - 10)$.

12.7. Wyznacz współczynniki m i n wielomianów W i P tak, aby wielomiany były równe, gdy:

a) $W(x) = mx^3 - 2x^2 + 7x - 3$ i $P(x) = -x^3 - 2x^2 + nx - 3$,

b) $W(x) = mx^3 + 5x^2 - 3x + 2$ i $P(x) = 2x^3 + nx^2 - 3x + 2$,

c) $W(x) = (2x + 1)(x^2 + 3)$ i $P(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + 3$.

12.8. Oblicz, dla jakich wartości a , b , c wielomiany P i Q są równe, gdy:

a) $P(x) = (x^2 - 5)^2$ i $Q(x) = x^4 + (a + 3)x^3 - bx^2 + (1 - c)x + 25$,

b) $P(x) = (3 - x^2)^2$ i $Q(x) = x^4 + (4 - a)x^3 - (3 - b)x^2 + (c + 3)x + 9$.

Suma, różnica oraz iloczyn wielomianów

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów wykonujemy analogicznie do działań na wyrażeniach algebraicznych.

Przypomnijmy

Dodając (odejmując) wielomiany, uwalniamy się od nawiasów, a następnie przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych. Możemy również wykonać te działania „pisemnie”, w sposób analogiczny jak pisemne dodawanie liczb.

Mnożąc wielomian przez wielomian, korzystamy z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, a następnie przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych.

Możemy również wykonać to działanie „pisemnie”, w sposób analogiczny jak pisemne mnożenie liczb.

$$\begin{array}{r} 5x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \\ + \quad -2x^2 + 5x - 6 \\ \hline 5x^3 - 5x^2 + 3x - 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (a+b) \cdot (c+d) = \\ = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \end{array}$$

Przykład 3. Wiedząc, że $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$ i $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 5$, oblicz sumę $P + Q$ oraz różnicę $P - Q$ wielomianów P i Q .

Rozwiązanie

I sposób

Obliczamy sumę wielomianów.

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^2 - 3x + 5) + (x^3 - 5x^2 + 2x - 5) = \\ &= \underline{2x^2} - \underline{3x} + \underline{5} + \underline{x^3} - \underline{5x^2} + \underline{2x} - \underline{5} = x^3 - 3x^2 - x. \end{aligned}$$

Obliczamy różnicę wielomianów.

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (2x^2 - 3x + 5) - (x^3 - 5x^2 + 2x - 5) = \\ &= \underline{2x^2} - \underline{3x} + \underline{5} - \underline{x^3} + \underline{5x^2} - \underline{2x} + \underline{5} = -x^3 + 7x^2 - 5x + 10. \end{aligned}$$

II sposób

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} 2x^2 - 3x + 5 & \leftarrow P(x) \\ x^3 - 5x^2 + 2x - 5 & \leftarrow Q(x) \end{array} \right. \\ \hline x^3 - 3x^2 - x + 0 \\ P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)] \\ \left\{ \begin{array}{ll} 2x^2 - 3x + 5 & \leftarrow P(x) \\ -x^3 + 5x^2 - 2x + 5 & \leftarrow -Q(x) \end{array} \right. \\ \hline -x^3 + 7x^2 - 5x + 10. \end{array}$$

Odp.: $P(x) + Q(x) = x^3 - 3x^2 - x$, $P(x) - Q(x) = -x^3 + 7x^2 - 5x + 10$.

Ćwiczenie 11. Wiedząc, że $Q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x$ i $W(x) = 6x^3 - 8x + 2$, oblicz sumę $Q + W$ oraz różnice $Q - W$ i $W - Q$ wielomianów Q i W .

Ćwiczenie 12. Określ stopień wielomianu W , takiego że $W(x) = P(x) + Q(x)$, gdy:

- $P(x) = -3x^4 + 2x - 1$, $Q(x) = 2 - 3x^3 + 3x^4$,
- $P(x) = 2x^5 + 2x^2 - x - 1$, $Q(x) = 3x^4 - 2x^2 + x + 1$,
- $P(x) = (2 - x)^6$, $Q(x) = (x - 1)^6$.

Przykład 4. Oblicz iloczyn wielomianów P i Q , gdy $P(x) = 2x - 3$, $Q(x) = 4x^2 + x - 1$.

Rozwiązanie

I sposób

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x - 3)(4x^2 + x - 1) = \\ &= 2x \cdot (4x^2 + x - 1) - 3 \cdot (4x^2 + x - 1) = \\ &= 8x^3 + 2x^2 - 2x - 12x^2 - 3x + 3 = \\ &= 8x^3 - 10x^2 - 5x + 3. \end{aligned}$$

II sposób

$$\begin{array}{r} 4x^2 + x - 1 \\ \cdot \quad 2x - 3 \\ \hline -12x^2 - 3x + 3 \quad \leftarrow -3 \cdot (4x^2 + x - 1) \\ + \left\{ \begin{array}{l} 8x^3 + 2x^2 - 2x \quad \leftarrow 2x \cdot (4x^2 + x - 1) \end{array} \right. \\ \hline 8x^3 - 10x^2 - 5x + 3. \end{array}$$

Ćwiczenie 13. Określ stopień wielomianu W , takiego że $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$, gdy:

a) $P(x) = x^2 + 3$, $Q(x) = x^5 - 3x^2 + 2x - 1$, b) $P(x) = (x + 2)^3$, $Q(x) = (x^2 - 5)^6$.

Uwaga

Iloczyn wielomianu jednej zmiennej stopnia m i wielomianu tej samej zmiennej stopnia n jest wielomianem stopnia $m + n$.

Ćwiczenie 14. Wiedząc, że $W(x) = (2x - 1)(x^2 + 2)$ i $Q(x) = 4 - 2x$, wykonaj działania:

a) $W(x) \cdot Q(x)$, b) $3W(x) - 5Q(x) + W(x)Q(x)$, c) $3W(x) - Q(x)W(x)$.

Przykład 5. Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu prawidłowego jest równa 32. Napisz wzór wielomianu V zmiennej a , który opisuje wartość objętości tego prostopadłościanu w zależności od długości a jego krawędzi podstawy.

Rozwiązanie Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

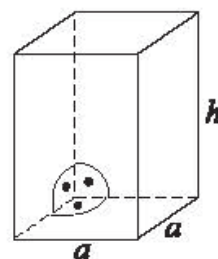
Z warunków zadania $8a + 4h = 32$, skąd $h = 8 - 2a$.

$h > 0$ i $a > 0$, więc

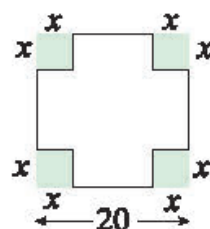
$$\begin{cases} 8 - 2a > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0; 4).$$

$V = a^2 h$, więc $V(a) = a^2(8 - 2a)$, gdzie $a \in (0; 4)$.

Odp.: $V(a) = -2a^3 + 8a^2$, gdzie $a \in (0; 4)$.



Ćwiczenie 15. W rogach kwadratowego arkusza brystolu, którego bok ma długość 20, wycięto cztery kwadraty o boku długości x i zrobiono prostopadłościenne pudełko. Napisz wzór wielomianu V zmiennej x , który opisuje wartość objętości tego pudełka.



Odpowiedzi do ćwiczeń

11. $Q(x) + W(x) - 9x^3 + 2x^2 - 12x + 2$, $Q(x) - W(x) - 3x^3 + 2x^2 + 4x - 2$,

$W(x) - Q(x) - 3x^3 - 2x^2 - 4x + 2$. 12. a) 3, b) 5, c) 6. 13. a) 7, b) 15.

14. a) $-4x^4 + 10x^3 - 12x^2 + 20x - 8$, b) $-4x^4 + 16x^3 - 15x^2 + 42x - 34$, c) $4x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 8x + 2$.

15. $V(x) - (20 - 2x)^2 \cdot x$, gdzie $x \in (0; 10)$.

Zadania utrwalające

12.9. Uporządkuj malejąco wielomian W , gdy:

a) $W(a) = a^2 - (\sqrt{2}a^2 - a + 1)$, b) $W(x) = (\sqrt{5}x^3 + 5x - 1) - (1 - \sqrt{5}x + x^3)$,

c) $W(y) = (y^2 + \sqrt{2}y + 1)(y - 1)$, d) $W(x) = x(x - 2a) - (x + a)(x - 2a)$.

12.10. Wiedząc, że $W(x) = x^3 - 2x + 1$, $Q(x) = -x^3 + 3x$ i $P(x) = 2x + 3$, wykonaj wskazane działania:

a) $W(x) + Q(x)$, b) $W(x) - Q(x)$, c) $W(x) - P(x)$, d) $W(x) \cdot Q(x)$,

e) $W(x) \cdot P(x)$, f) $W(x) - P(x) + Q(x)$, g) $2W(x) - 5Q(x) + W(x) \cdot P(x)$.

12.11. Uporządkuj malejąco wielomiany W i H , gdy

$W(x) = P(x) + Q(x)$ i $H(x) = P(x) - Q(x)$ oraz:

a) $P(x) = 3x^2 - x + 4$ i $Q(x) = (\sqrt{2} - 1)^2 x - 3$,

b) $P(x) = (m - 1)(4 - 3x)^2$ i $Q(x) = (m + 2)(3 - 4x)^2$.

12.12. Uporządkuj wielomian, a następnie oblicz jego wartość dla podanych wartości zmiennych:

a) $G(a, b) = 2(a - b)(a + b) - (a + 2b)(a + 2b)^2$, gdy $a = -3$, $b = 3$,

b) $H(x, y) = (2x - 3y)(3y + 2x) - (2x + 3y)^2 + (2x - 3y)^2$, gdy $x = -2,5$, $y = 1,5$.

12.13. Wiedząc, że $W(x) = ax + b$, $P(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$, $Q(x) = 2x^2 - x - 1$ i $W(x) \cdot Q(x) = P(x)$, oblicz współczynniki a i b wielomianu W .

12.14. Wiedząc, że $W(x, y) = ax^2 + y + b$, $P(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + 2xy - y^2$, $S(x, y) = 2x - y$ i $S(x, y) \cdot W(x, y) = P(x, y)$, oblicz współczynniki a i b wielomianu W .

Dzielenie wielomianu przez dwumian

Dzielenie wielomianów wykonujemy według podobnego algorytmu jak dzielenie liczb całkowitych.

Przykład 6. Wykonaj sposobem pisemnym dzielenie liczb:

a) $52\,625 : 421$, b) $627 : 51$.

Rozwiązanie a)

$$\begin{array}{r}
 \text{125} \\
 \hline
 52625 : 421 \\
 -421 \leftarrow -(1 \cdot 421) \\
 \hline
 1052 \\
 -842 \leftarrow -(2 \cdot 421) \\
 \hline
 2105 \\
 -2105 \leftarrow -(5 \cdot 421) \\
 \hline
 0 \leftarrow \text{reszta: } R = 0 \\
 52\,625 = 125 \cdot 421 + 0
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r}
 \text{12} \\
 \hline
 627 : 51 \\
 -51 \leftarrow -(1 \cdot 51) \\
 \hline
 117 \\
 -102 \leftarrow -(2 \cdot 51) \\
 \hline
 15 \leftarrow \text{reszta: } R = 15 \\
 627 = 12 \cdot 51 + 15
 \end{array}$$

Uwaga: Jeżeli przy dzieleniu liczby p przez liczbę k różną od zera otrzymujemy iloraz m i resztę R , to $p = m \cdot k + R$.

Przykład 7. Wielomian W , taki że $W(x) = 8x^3 - 12x^2 + 4x$, podziel przez jednomian $2x$.

Rozwiązanie

I sposób

$$\begin{aligned}
 (8x^3 - 12x^2 + 4x) : (2x) &= \\
 &= \frac{8x^3 - 12x^2 + 4x}{2x} = \\
 &= \frac{8x^3}{2x} - \frac{12x^2}{2x} + \frac{4x}{2x} = \\
 &= 4x^2 - 6x + 2.
 \end{aligned}$$

II sposób

$$\begin{array}{r}
 4x^2 - 6x + 2 \\
 \hline
 + \left\{ \begin{array}{l} (8x^3 - 12x^2 + 4x) : (2x) \\ -8x^3 \leftarrow -(4x^2) \cdot 2x \\ \hline -12x^2 + 4x \\ -12x^2 \leftarrow -(-6x) \cdot 2x \\ \hline 4x \\ -4x \leftarrow -(2) \cdot 2x \\ \hline 0 \end{array} \right. \\
 0 \text{ reszta: } R(x) \equiv 0^*)
 \end{array}$$

Diagramy pomocnicze:

- $[8x^3 : (2x) - 4x^2]$
- $[-12x^2 : (2x) - -6x]$
- $[4x : (2x) - 2]$

$$W(x) = (4x^2 - 6x + 2) \cdot 2x + 0$$

$$\text{Odp.: } (8x^3 - 12x^2 + 4x) : (2x) = 4x^2 - 6x + 2.$$

*) Zapis $R(x) = 0$ oznacza, że dla każdej liczby rzeczywistej x wielomian R jest równy 0.

Ćwiczenie 16. Wielomian P , taki że $P(x) = 9x^3 - 18x^2 + 15x$, podziel przez jednomian $3x$ dwoma sposobami.

Uwaga

Przed wykonaniem dzielenia $W(x) : P(x)$ należy wielomiany W i P uporządkować malejąco. Dzielnik P nie może być wielomianem zerowym.

Twierdzenie o dzieleniu wielomianu z resztą

Jeżeli W i P są wielomianami, gdzie wielomian P nie jest wielomianem zerowym, to istnieją takie dwa jednoznacznie wyznaczone wielomiany Q i R , że

$$\underbrace{W(x)}_{\text{dzielna}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{iloraz}} \cdot \underbrace{P(x)}_{\text{dzielnik}} + \underbrace{R(x)}_{\text{reszta}}$$

przy czym $\text{st.}[W(x)] \geq \text{st.}[P(x)]$, $\text{st.}[R(x)] < \text{st.}[P(x)]$ albo $R(x) \equiv 0$.

Przykład 8. Wykonaj dzielenie wielomianu W przez wielomian P , gdy

$W(x) = x^3 - 5x^2 + 4 + 6x$ i $P(x) = x - 2$. Określ resztę R i iloraz Q .

Zapisz wielomian W w postaci $W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$.

Rozwiązanie

Aby podzielić wielomian W przez wielomian P , postępujemy następująco:

- wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ porządkujemy malejąco,
- pierwszy wyraz „ x^3 ” wielomianu $W(x)$ dzielimy przez pierwszy wyraz „ x ” wielomianu $P(x)$, a wynik „ x^2 ” zapisujemy jako pierwszy wyraz ilorazu $Q(x)$.
Iloczyn $(x-2) \cdot x^2$ odejmujemy (dodajemy ze znakiem przeciwnym) od wielomianu $W(x)$,
- pierwszy wyraz „ $-3x^2$ ” otrzymanego w wyniku odejmowania wielomianu $-3x^2 + 6x + 4$ dzielimy przez pierwszy wyraz „ x ” wielomianu $P(x)$,
Otrzymany wynik dzielenia „ $-3x$ ” zapisujemy jako kolejny wyraz ilorazu $Q(x)$.
Iloczyn $(x-2)(-3x)$ odejmujemy od wielomianu $-3x^2 + 6x + 4$, otrzymując liczbę 4.

$$\begin{array}{r} \overset{x^2}{} \swarrow \\ (x^3 - 5x^2 + 6x + 4) : (x - 2) \quad (x^3 : x = x^2) \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \quad \leftarrow -[(x-2) \cdot x^2] \\ -3x^2 + 6x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{x^2 - 3x}{} \swarrow \\ (x^3 - 5x^2 + 6x + 4) : (x - 2) \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ -3x^2 + 6x + 4 \quad \leftarrow (-3x^2 : x = -3x) \\ \underline{3x^2 - 6x} \quad \leftarrow -(x-2) \cdot (-3x) \\ 4 \end{array}$$

Liczba 4 jest wielomianem stopnia zerowego. Zatem 4 jest resztą z dzielenia wielomianu W przez wielomian P , czyli $R(x) = 4$.

Ilorazem tych wielomianów jest wielomian Q , taki że $Q(x) = x^2 - 3x$.

$$\text{Odp.: } W(x) = \underbrace{(x^2 - 3x)}_{Q(x)} \cdot \underbrace{(x - 2)}_{P(x)} + \underbrace{4}_{R(x)}.$$

Ćwiczenie 17. Wykonaj dzielenie wielomianu W przez wielomian P , określ resztę R i iloraz Q . Zapisz wielomian W w postaci $W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$, gdy:

- a) $W(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$, $P(x) = x + 2$,
- b) $W(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$, $P(x) = x - 1$,
- c) $W(x) = x^5 + 3x^3 - 5x^2 + x - 38$, $P(x) = x - 2$.

Uwaga

Jeżeli przy dzieleniu wielomianu W przez wielomian P , gdzie $P \neq 0$, otrzymujemy wielomian Q oraz resztę R , to:

- $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$, gdy $R(x) \equiv 0$, (wielomian W jest podzielny przez wielomian P)
- $W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$, gdy $R(x) \neq 0$. (wielomian W nie jest podzielny przez wielomian P)

Przykład 9. Wykonaj dzielenie $(6x^3 - 48) : (-2x + 4)$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że $6x^3 - 48 = 6x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 48$.

$$\begin{array}{r}
 \underline{-3x^2 - 6x - 12} \\
 (6x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 48) : (-2x + 4) \\
 \underline{-6x^3 + 12x^2} \quad \leftarrow 3x^2 \cdot (-2x + 4) \\
 12x^2 + 0 \cdot x - 48 \\
 \underline{-12x^2 + 24x} \quad \leftarrow 6x \cdot (-2x + 4) \\
 24x - 48 \\
 \underline{-24x + 48} \quad \leftarrow 12 \cdot (-2x + 4) \\
 0 \quad \leftarrow R(x) \equiv 0
 \end{array}$$

Odp.: $(6x^3 - 48) : (-2x + 4) = -3x^2 - 6x - 12$, czyli

$$6x^3 - 48 = (-2x + 4) \cdot (-3x^2 - 6x - 12), \text{ bo } R(x) \equiv 0.$$

Ćwiczenie 18. Wykonaj dzielenie: a) $(x^4 + 1) : (x + 2)$, b) $(8x^3 + 27) : (2x + 3)$.

Twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - r$ jest równa liczbie $W(r)$, czyli $R(x) = W(r)$.

Z (założenie): R – reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x - r$.

T (teza): $R(x) = W(r)$.

Dowód:

Dzieląc wielomian W przez dwumian $x - r$, otrzymujemy jako iloraz pewien wielomian P i resztę R , która jest liczbą rzeczywistą, gdyż stopień reszty jest mniejszy niż stopień dzielnika (dzielnik $x - r$ jest pierwszego stopnia) lub $R(x) \equiv 0$.

$$W(x) = P(x) \cdot (x - r) + R(x)$$

$$W(r) = \overbrace{P(r) \cdot (r - r)}^0 + R(x)$$

$$R(x) = W(r).$$

ckd.

Ćwiczenie 19. Oblicz, nie wykonując dzielenia wielomianów, resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian P , gdy:

a) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ i $P(x) = x - 1$, b) $W(x) = (x + 4)^5$ i $P(x) = x + 3$.

Przykład 10. Dla jakich wartości parametru m reszta R z dzielenia wielomianu W , takiego że $W(x) = 3x^4 + 2x^2 - 5x + m$, przez dwumian $x - 2$ jest równa -4 ?

Rozwiązanie

Wielomian W dzielimy przez dwumian $x - 2$, więc $r = 2$ i $W(2) = R(x) = -4$.

$$W(2) = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + m = 46 + m,$$

więc $46 + m = -4$, skąd $m = -50$.

Odp.: $m = -50$.

Ćwiczenie 20. Oblicz, dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian P jest równa R , gdy:

a) $W(x) = x^3 + 5x^2 - x - m$, $P(x) = x - 3$, $R(x) \equiv 5$,

b) $W(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 2x + m$, $P(x) = x$, $R(x) \equiv 100$.

Przykład 11. Określ, dla jakich wartości parametrów a i b wielomian

$W(x) = 2x^3 + ax^2 - 13x + b$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x - 2$ i $x - 3$.

Rozwiązanie

Wielomian W jest podzielny przez dwumian:

$$x - 2, \text{ więc } R(x) = W(2) = 0,$$

$$x - 3, \text{ więc } R(x) = W(3) = 0.$$

Otrzymujemy zatem układ warunków:

$$\begin{cases} W(2) = 0 \\ W(3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + b = 0 \\ 2 \cdot 3^3 + a \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^3 + a \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + b - 10 = 0 \\ 9a + b - 15 = 0 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}.$$

Odp.: $a = 1, b = 6$.

Ćwiczenie 21. Określ, dla jakich wartości parametrów k i m wielomian W jest podzielny przez każdy z dwumianów $x - 1$ i $x + 2$, gdy:

a) $W(x) = x^3 - mx^2 + kx - m$, b) $W(x) = mx^3 - kx^2 + 3x + k$.

Uwaga

Jeżeli $r_1 \neq r_2$ i wielomian W dzieli się przez dwumiany $x - r_1$ i $x - r_2$, to dzieli się również przez iloczyn tych dwumianów, czyli przez $(x - r_1) \cdot (x - r_2)$.

Ćwiczenie 22. Określ, dla jakich wartości k i m wielomian W jest podzielny przez trójmian Q , gdy:

a) $W(x) = x^3 + mx^2 + kx - 6m$ i $Q(x) = x^2 - 2x - 3$,

b) $W(x) = mx^3 - kx^2 - mx + k$ i $Q(x) = x^2 - 1$.

Oprócz przedstawionego sposobu dzielenia wielomianu W przez dwumian $x - r$ istnieje jeszcze inny sposób obliczania współczynników liczbowych wielomianu Q , który jest ilorazem z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x - r$ oraz reszty R z tego dzielenia. Jest to tzw. schemat Hornera.

Schemat Hornera

Twierdzenie

Jeżeli $W(x) = (x - r) \cdot P(x) + R(x)$, gdzie $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ i $P(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$, to współczynnikami wielomianu P

są liczby:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + r \cdot b_{n-1} \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + r \cdot b_{n-2} \\ &\dots, \\ b_0 &= a_1 + r \cdot b_1 \text{ oraz } R(x) = a_0 + r \cdot b_0. \end{aligned}$$

Dowód przeprowadzimy, gdy wielomian W jest czwartego stopnia.

Z (założenie):

$$\begin{aligned} W(x) &= (x - r) \cdot P(x) + R(x) \\ W(x) &= a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ P(x) &= b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

T (teza):

$$\begin{aligned} b_3 &= a_4 \\ b_2 &= a_3 + r \cdot b_3 \\ b_1 &= a_2 + r \cdot b_2 \\ b_0 &= a_1 + r \cdot b_1 \\ R(x) &= a_0 + r \cdot b_0. \end{aligned}$$

Dowód:

$$W(x) = (x - r) \cdot (b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) + R(x) = \quad W(x) = (x - r) \cdot P(x) + R(x)$$

$$= \underbrace{b_3}_{\downarrow} x^4 + \underbrace{(b_2 - b_3 r)}_{\downarrow} x^3 + \underbrace{(b_1 - b_2 r)}_{\downarrow} x^2 + \underbrace{(b_0 - b_1 r)}_{\downarrow} x - \underbrace{b_0 r + R(x)}_{\downarrow}, \text{ więc}$$

$$W(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\begin{cases} a_4 = b_3 \\ a_3 = b_2 - r \cdot b_3 \\ a_2 = b_1 - r \cdot b_2 \\ a_1 = b_0 - r \cdot b_1 \\ a_0 = R(x) - r \cdot b_0 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} b_3 = a_4 \\ b_2 = a_3 + r \cdot b_3 \\ b_1 = a_2 + r \cdot b_2 \\ b_0 = a_1 + r \cdot b_1 \\ R(x) = a_0 + r \cdot b_0 \end{cases}. \quad \text{ckd.}$$

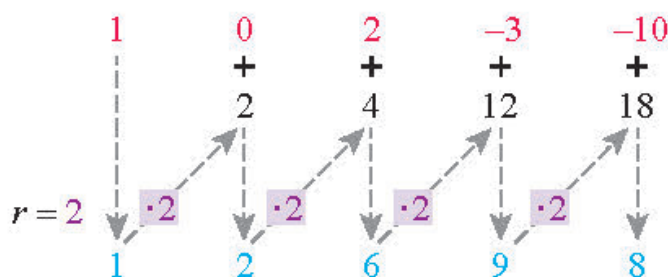
Sposób stosowania schematu Hornera pokażemy na przykładzie.

Przykład 12. Zastosuj schemat Hornera i przedstaw wielomian

$$W(x) = x^4 + 2x^2 - 3x - 10 \text{ w postaci } W(x) = (x - 2) \cdot P(x) + R(x).$$

Rozwiązanie

$$W(x) = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + (-3) \cdot x - 10$$



$$P(x) = 1 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 9 \text{ i } R(x) = 8.$$

Schemat możemy również przedstawić w tabeli.

	1	0	2	-3	-10
$r = 2$		$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 9$
	1	2	6	9	8

$$\text{Odp.: } W(x) = (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 6x + 9) + 8.$$

Uwaga

Jeżeli $W(x) = (x - r) \cdot P(x) + R(x)$, gdzie $W(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $P(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$, to schemat Hornera można przedstawić w tabeli.

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
$\downarrow$	+	+	+	+
	$r \cdot b_3$	$r \cdot b_2$	$r \cdot b_1$	$r \cdot b_0$
b_3	b_2	b_1	b_0	$R(x)$

Schemat Hornera możemy stosować tylko wtedy, gdy dzielimy wielomian przez dwumian postaci $x - r$ (przy zmiennej x znajduje się współczynnik 1).

Ćwiczenie 23. Zastosuj schemat Hornera i przedstaw wielomian W w postaci

$$W(x) = (x - r) \cdot P(x) + R(x), \text{ gdy: a) } r = 3 \text{ i } W(x) = 5x^2 + 3x - 1,$$

$$\text{b) } r = -2 \text{ i } W(x) = 2x^3 - 4x + 2, \quad \text{c) } r = -1, W(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 - x - 1.$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

16. $3x^2 - 6x + 5$. 17. a) $W(x) = (x+2)(x^2+1) - 4$, b) $W(x) = (x-1)(x^3-2x+1) - 2$,
 c) $W(x) = (x-2)(x^4+2x^3+7x^2+9x+19) + 0$. 18. a) $(x+2)(x^3-2x^2+4x-8) + 17$,
 b) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$. 19. a) $R(x) = W(1) = 0$, b) $R(x) = W(-3) = 1$. 20. a) $m = 64$, b) $m = 100$.
 21. a) $k = -\frac{7}{3}$, $m = -\frac{2}{3}$, b) $k = 6$, $m = -3$.
 22. a) $k = -11$, $m = 2$, b) $k \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$. Wskazówka. a) $Q(x) = (x+1)(x-3)$, b) $Q(x) = (x+1)(x-1)$,
 23. a) $W(x) = (x-3)(5x+18) + 53$, b) $W(x) = (x+2)(2x^2-4x+4) - 6$,
 c) $W(x) = (x+1)(-2x^3+3x^2-4x+3) - 4$.

Zadania utrwalające

12.15. Wykonaj dzielenie wielomianu P przez wielomian Q , gdy:

- a) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 9$ i $Q(x) = x - 1$,
 b) $P(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4$ i $Q(x) = 3x - 1$,
 c) $P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 16x - 4$ i $Q(x) = x - 2$,
 d) $P(x) = x^5 - 1$ i $Q(x) = x - 1$.

12.16. Wykonaj dzielenie:

- a) $(3x^4 + x^2 - 2x + 5) : (x + 2)$, b) $(x^5 + 2x^3 - 2x^2 + x + 2) : (x - 2)$,
 c) $x^5 : (x + 1)$, d) $(x^4 - 16x) : (x - 2)$, e) $(x^7 - 1) : (x - 1)$.

12.17. Wykonaj dzielenie wielomianu W przez wielomian P , a następnie zapisz wielomian W w postaci $W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$, gdzie Q jest ilorazem, a R resztą z dzielenia.

- a) $W(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 7$ i $P(x) = x + 3$,
 b) $W(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ i $P(x) = x + 1$,
 c) $W(x) = 3x^4 - 3x + 2$ i $P(x) = x - 2$,
 d) $W(x) = 2x^4 + x^3 + 4x + 3$ i $P(x) = x - 1$.

12.18. Oblicz wartość wielomianu W zmiennej x , gdy $x = r$. Podaj wielomian, który jest ilorazem wielomianu W przez dwumian $x - r$, gdy:

- a) $W(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2$, $r = -1$, b) $W(x) = x^3 - x^2 - x - 2$, $r = 2$,
 c) $W(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, $r = 1$, d) $W(x) = 7x^3 + 2x^2 - 28x - 8$, $r = -2$.

- 12.19.** Oblicz reszty z dzielenia wielomianu W przez każdy z dwumianów podanych obok.
- a) $W(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$,
 b) $W(x) = 4x^3 - 19x^2 + 13x - 4$, $x + 1$, $x - 2$, $x - 4$.
- 12.20.** Oblicz, dla jakich wartości parametru m reszta R z dzielenia wielomianu W przez wielomian P jest równa R , gdy:
- a) $W(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + m$, $P(x) = x - 3$, $R(x) = 2$,
 b) $W(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - m$, $P(x) = x$, $R(x) = 2004$,
 c) $W(x) = 2x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + m - 1$, $P(x) = x + 1$, $R(x) = 99$.
- 12.21.** Podaj przykład wielomianu W trzeciego stopnia, który jest podzielny przez wielomian Q , gdy:
- a) $Q(x) = x + 2$, b) $Q(x) = (x - 2)(x + 3)$, c) $Q(x) = (1 - 3x)(1 + 3x)$.
- 12.22.** Podaj liczbę, jaką należy dodać do wielomianu W , aby był on podzielny przez dwumian $x + 2$, gdy:
- a) $W(x) = x^3$, b) $W(x) = 2x^3 + 4x$, c) $W(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$.
- 12.23.** Oblicz, dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x + 1$ jest równa -11 , gdy:
- a) $W(x) = x^3 + 2x^2 + m^2x - 8$, b) $W(x) = x^3 - m^2x^2 + mx - 8$.
- 12.24.** Oblicz, dla jakich wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{21} + 3x + |2 - |m||$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 4.
- 12.25.** Oblicz resztę z dzielenia, nie wykonując go.
- a) $[x^3 - (a - 1)x^2 - ax + 2a + 1] : (x - 1)$,
 b) $[x^3 - (a - 1)x^2 - ax + 2a + 1] : (x + 1)$,
 c) $(a^3 - 3a^2b + 9ab^2 + b^3) : (a - b)$,
 d) $[x^3 - (a - b)x^2 + (a^2 - b^2)x - (a + b)^3] : (x - a - b)$.
- 12.26.** Wielomian $W(x) = x^4 + ax^2 + bx + 3$ jest podzielny przez trójmian $x^2 - 1$. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x + 2$.

Pierwiastki wielomianu jednej zmiennej i twierdzenie Bézouta

Definicja

Pierwiastkiem (miejscem zerowym) wielomianu W nazywamy każdą liczbę rzeczywistą r , dla której $W(r) = 0$.

Przykład 13. Sprawdź, czy liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu W , gdy $W(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$. Wykonaj dzielenie wielomianu W przez dwumian $x - 3$.

Rozwiązanie

Sprawdzamy, czy liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu W :

$$W(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$$

$$W(3) = 0.$$

Odp.: Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu W .

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ (x^3 - 2x^2 - 2x - 3) : (x - 3) \\ \underline{-x^3 + 3x^2} \\ x^2 - 2x - 3 \\ \underline{-x^2 + 3x} \\ x - 3 \\ \underline{-x + 3} \\ 0 \quad R(x) \equiv 0 \end{array}$$

Ćwiczenie 24. Sprawdź, czy liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu P , gdy $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$. Wykonaj dzielenie wielomianu P przez dwumian $x + 2$.

Twierdzenie Bézouta

Liczba r jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - r$.

Twierdzenie ma postać równoważności, należy więc udowodnić dwa twierdzenia (proste i odwrotne).

Twierdzenie proste

Jeżeli liczba r jest pierwiastkiem wielomianu W , czyli $W(r) = 0$, to wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - r$.

Z (założenie): $W(r) = 0$. | T (teza): Istnieje taki wielomian $P(x)$, że $W(x) = (x - r) \cdot P(x)$.

Dowód:

Wielomian W można przedstawić w postaci $W(x) = (x - r) \cdot P(x) + R(x)$.

$W(r) = 0$ i $W(r) = (r - r) \cdot P(r) + R(x)$, więc $0 = 0 \cdot P(r) + R(x)$.

Zatem $R(x) \equiv 0$, więc $W(x) = (x - r) \cdot P(x)$.

ckd.

Twierdzenie odwrotne

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - r$, to liczba r jest pierwiastkiem wielomianu W , czyli $W(r) = 0$.

Z (założenie):

Istnieje taki wielomian $P(x)$, że $W(x) = (x - r) \cdot P(x)$.

T (teza):

$W(r) = 0$.

Dowód:

Z założenia $W(x) = (x - r) \cdot P(x)$, więc

$$W(r) = (r - r) \cdot P(r), \text{ skąd}$$

$$W(r) = 0 \cdot P(r) = 0.$$

ckd.

Ćwiczenie 25. Wielomian trzeciego stopnia jest podzielny przez dwumiany $x + 3$, $x - 2$ i $x + 5$. Podaj pierwiastki tego wielomianu.

Przykład 14. Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu W , gdzie $W(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$. Przedstaw wielomian W w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia niższego niż 3.

Rozwiązanie

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu W , więc wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

I sposób

$$\begin{array}{r} x^2 + 4x + 5 \\ (x^3 + 2x^2 - 3x - 10) : (x - 2) \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \downarrow \\ 4x^2 - 3x \downarrow \\ \underline{-4x^2 + 8x} \downarrow \\ 5x - 10 \downarrow \\ \underline{-5x + 10} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad W(x) : (x - 2) &= x^2 + 4x + 5, \\ \text{zatem } W(x) &= (x - 2)(x^2 + 4x + 5). \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } W(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 5).$$

II sposób

Wielomian W dzielimy przez $x - 2$, stosując schemat Hornera.

	1	2	-3	-10
		+	+	+
2		2 · 1	2 · 4	2 · 5
	1	4	5	0

Otrzymujemy iloraz, który jest wielomianem o współczynnikach 1, 4 i 5, czyli $x^2 + 4x + 5$.

Ćwiczenie 26. Liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu W , takiego że $W(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 7$. Przedstaw wielomian W w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia niższego niż 3.

Twierdzenia o pierwiastkach wielomianu

Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu

Jeżeli liczba całkowita r , taka że $r \neq 0$, jest pierwiastkiem wielomianu W określonego wzorem $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, o współczynnikach całkowitych, gdzie $a_0 \neq 0$ i $n \geq 1$, to liczba r jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

$$\begin{array}{l|l} Z \text{ (założenie): } W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, & T \text{ (teza): Liczba } r \text{ jest} \\ \text{gdzie } a_n \in \mathbb{Z}, a_{n-1} \in \mathbb{Z}, \dots, a_1 \in \mathbb{Z}, & \text{dzielnikiem liczby } a_0. \\ a_0 \in \mathbb{Z}, W(r) = 0, \text{ gdzie } r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. & \end{array}$$

$$\text{Dowód: } W(r) = 0 \Leftrightarrow a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r = -a_0$$

$$\otimes r(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0.$$

Lewa strona równości $\otimes$ jest iloczynem dwóch liczb całkowitych:

r oraz $(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + \dots + a_1)$. Zatem liczba r jest dzielnikiem liczby a_0 . **ckd.**

Ćwiczenie 27. Wypisz całkowite dzielniki wyrazu wolnego wielomianu W , gdzie $W(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$, a następnie sprawdź, który z nich jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Przykład 15. Oblicz pierwiastki całkowite wielomianu $W(x) = 2x^3 + 5x^2 - 11x + 4$.

Rozwiązanie

$a_0 = 4$, więc pierwiastków całkowitych wielomianu W szukamy wśród całkowitych dzielników liczby 4, czyli wśród liczb: 1, -1, 2, -2, 4, -4.

$$W(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 + 4 = 0, \text{ więc } W(1) = 0$$

1 jest pierwiastkiem całkowitym wielomianu.

$$W(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) + 4 = 18, \text{ więc } W(-1) \neq 0$$

$$W(2) = 2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 + 4 = 18, \text{ więc } W(2) \neq 0$$

$$W(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 11 \cdot (-2) + 4 = 30, \text{ więc } W(-2) \neq 0$$

$$W(4) = 2 \cdot 4^3 + 5 \cdot 4^2 - 11 \cdot 4 + 4 = 168, \text{ czyli } W(4) \neq 0$$

-4 jest pierwiastkiem całkowitym wielomianu.

$$W(-4) = 2 \cdot (-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 11 \cdot (-4) + 4 = 0, \text{ czyli } W(-4) = 0.$$

Odp.: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Ćwiczenie 28. Oblicz pierwiastki całkowite wielomianu:

a) $W(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$, b) $W(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 - x$.

Uwaga

Liczba 0 jest pierwiastkiem każdego wielomianu, w którym wyraz wolny jest równy 0.

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x = x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1)$$

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu

Jeżeli wielomian W o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny różny od 0 w postaci nieskracalnego ułamka $\frac{p}{q}$, to licznik tego ułamka jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a mianownik dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej.

Z (założenie):

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$

są liczbami całkowitymi, oraz $W\left(\frac{p}{q}\right) = 0$,

gdzie $\frac{p}{q}$ jest wymiernym nieskracalnym ułamkiem,

czyli $\text{NWD}(p, q) = 1$.

T (teza):

Liczba:

p jest dzielnikiem wyrazu a_0 ,

q jest dzielnikiem wyrazu a_n .

Dowód: Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu W , to

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_2 \frac{p^2}{q^2} + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Po pomnożeniu obu stron równości przez q^n otrzymujemy

$$a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + a_{n-2} q^2 p^{n-2} + \dots + a_2 q^{n-2} p^2 + a_1 q^{n-1} p + q^n a_0 = 0.$$

Stąd po odpowiednich przekształceniach możemy otrzymać równości:

1 $p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} q p^{n-2} + a_{n-2} q^2 p^{n-3} + \dots + a_2 q^{n-2} p^1 + a_1 q^{n-1}) = -q^n a_0,$

2 $a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} q^1 p^{n-2} + \dots + a_2 q^{n-3} p^2 + a_1 q^{n-2} p + a_0 q^{n-1}).$

Liczby p i q są względnie pierwsze, więc z równości **1** wynika, że liczba p jest dzielnikiem a_0 , a z równości **2** wynika, że liczba q jest dzielnikiem a_n . **c.n.u.**

R

Przykład 16. Wielomian $W(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$ ma pierwiastki wymierne. Wypisz wszystkie możliwe liczby, które mogą być pierwiastkami wielomianu W .

Rozwiązanie

$$a_0 = 2, \text{ więc } p \in \{-2, -1, 1, 2\},$$

$$a_3 = 4, \text{ więc } q \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}.$$

$$\text{Zatem } \frac{p}{q} \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}.$$

p – dzielniki wyrazu wolnego

q – dzielniki współczynnika przy
najwyższej potęgze zmiennej

$\frac{p}{q}$ – możliwe pierwiastki
wymierne wielomianu W

Ćwiczenie 29. Wielomian $W(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$ ma trzy pierwiastki wymierne. Wypisz wszystkie możliwe liczby, które mogą być pierwiastkami wielomianu W .

Przykład 17. Sprawdź, czy wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ma pierwiastki wymierne.

Rozwiązanie

$$a_0 = -1, \text{ więc } p \in \{-1, 1\},$$

$$a_3 = 2, \text{ więc } q \in \{-2, 2\}, \text{ skąd } \frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}.$$

Sprawdzamy, czy wielomian W ma pierwiastki całkowite:

$$W(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1 = -9, \text{ więc } W(-1) \neq 0,$$

$$W(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 1, \text{ więc } W(1) \neq 0.$$

Zatem wielomian W nie ma pierwiastków całkowitych.

Sprawdzamy, czy wielomian W ma pierwiastki wymierne, które nie są liczbami całkowitymi:

$$W\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3\frac{1}{2}, \text{ więc } W\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0,$$

$$W\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0, \text{ więc } W\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Odp.: Wielomian W ma jeden pierwiastek wymierny równy $\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 30. Sprawdź, czy wielomian W , gdzie $W(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$, ma pierwiastki wymierne.

R

Uwaga

Jeżeli liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są pierwiastkami wielomianu W zmiennej x , to wielomian ten można przedstawić w postaci

$$W(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \cdot P(x),$$

gdzie $a \neq 0$ i $P(x)$ jest wielomianem.

- Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.
- Wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek.

Przykład 18. Podaj przykład wielomianu W zmiennej x trzeciego stopnia, którego jedy-
nymi pierwiastkami są liczby: a) $-2, 1, 5$, b) $-1, 0$.

Rozwiązanie

a) st. $[W(x)] = 3$, a liczby $-2, 1, 5$ są pierwiastkami W , więc ma on postać

$$W(x) = a(x + 2)(x - 1)(x - 5), \text{ gdzie } a \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Np. gdy } a = 3, \text{ mamy } W(x) &= 3(x + 2)(x - 1)(x - 5) = \\ &= 3(x^3 - 4x^2 - 7x + 10) = 3x^3 - 12x^2 - 21x + 30. \end{aligned}$$

b) $W(x) = a(x + 1)^2(x - 0)$ lub $W(x) = b(x + 1)(x - 0)^2$, gdzie $a \neq 0, b \neq 0$.

$$\text{Np. gdy } a = 1, \text{ mamy } W(x) = (x + 1)^2(x - 0) = x^3 + 2x^2 + x.$$

Definicja

Liczbę r nazywamy k -krotnym (gdzie $k \leq n$) pierwiastkiem wielomianu W stopnia n , gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x - r)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - r)^{k+1}$.

Ćwiczenie 31. Podaj przykład wielomianu W zmiennej x czwartego stopnia, którego jedy-
nymi pierwiastkami są liczby: a) $-2, -1, 0, 3$, b) $-5, 1$, c) 2 .

Przykład 19. Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x) = 3x(x - 1)(x + 2)(x - 6)^2$.

Rozwiązanie

Aby obliczyć pierwiastki wielomianu zapisanego w postaci iloczynu czynników, należy każdy czynnik zawierający zmienną x przyrównać do zera.

$$\begin{aligned} W(x) = 0, \text{ gdy } 3x = 0 \text{ lub } x - 1 = 0, \text{ lub } x + 2 = 0, \text{ lub } (x - 6)^2 = 0, \\ x = 0 \text{ lub } x = 1, \text{ lub } x = -2, \text{ lub } x = 6. \end{aligned}$$

Odp.: $-2, 0, 1, 6$ (liczbę 6 nazywamy dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu).

Ćwiczenie 32. Podaj pierwiastki wielomianu $W(x) = (x-3)^3(x+2)^2(x+5)$. Określ krotność każdego z tych pierwiastków.

Odpowiedzi do ćwiczeń

24. Tak. 25. $x_1 = -5$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$. 26. $W(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 7)$. 27. -3 , -1 , 1 , 3 , $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.
 28. a) $x_0 = -1$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. 29. $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, 3 , $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 , -3 , $-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{8}$, -1 , $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$.
 30. $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$.
 31. Np.: a) $W(x) = 3x(x+2)(x+1)(x-3)$, b) $W(x) = 4(x+5)^3(x-1)$, c) $W(x) = 2(x-2)^4$.
 32. 3 , -2 , -5 , 3 – pierwiastek trzykrotny, -2 – pierwiastek dwukrotny, -5 – pierwiastek jednokrotny.

Zadania utrwalające

- 12.27. Sprawdź, która z liczb -2 , 0 , 1 jest pierwiastkiem wielomianu P , gdy $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$.
- 12.28. Liczba r jest pierwiastkiem wielomianu W . Przedstaw wielomian W w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopni niższych niż stopień wielomianu W , gdy:
- a) $W(x) = x^2 - 3x - 4$, $r = -1$, b) $W(x) = -x^3 + 6x + 4$, $r = -2$,
 c) $W(x) = x^4 + 2x^3 + 6x - 9$, $r = 1$, d) $W(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 7x - 3$, $r = 3$.
- 12.29. Oblicz, dla jakich wartości parametru m liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W , gdy:
- a) $W(x) = x^3 + x^2 + mx + 1$, $x_0 = -1$, b) $W(x) = -2x^3 + x^2 - mx + 3$, $x_0 = 3$.
- 12.30. Oblicz, dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ jest podzielny przez dwumiany $x - 4$ i $x + 1$.
- 12.31. Oblicz, dla jakich wartości parametrów a i b wielomian W jest podzielny przez wielomian P , gdy:
- a) $W(x) = ax^3 + 4x^2 - 2x - b$, $P(x) = 2x^2 + 2x - 4$,
 b) $W(x) = x^3 - 3x^2 - 2ax + b + 1$, $P(x) = x^2 - 5x + 6$.
- 12.32. Oblicz wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu W , gdy:
- a) $W(x) = x^4 - 3x^2 - 4$, b) $W(x) = x^4 + 4x^2 + 3$,
 c) $W(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, d) $W(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

12.33. Sprawdź, czy wielomian W ma pierwiastki wymierne, gdy:

- a) $W(x) = 24x^3 + 10x^2 - 7x - 2$, b) $W(x) = 12x^3 + 32x^2 + 3x - 5$,
c) $W(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x - 10$, d) $W(x) = 12x^4 + x^3 - 18x^2 - x + 6$.

12.34. Oblicz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu W , gdy:

- a) $W(x) = x^3 - x^2 - 8x - 4$, b) $W(x) = 4x^3 - 7x - 3$,
c) $W(x) = 4x^3 - 4x^2 - 3x + 2$, d) $W(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$.

12.35. Uzasadnij, że wielomian W nie ma pierwiastków wymiernych, gdy:

- D** a) $W(x) = x^3 + 3x + 1$, b) $W(x) = 2x^5 + 7$,
c) $W(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 4$, d) $W(x) = x^{2005} - x + 1$.

12.36. Podaj pierwiastki wielomianu W , gdy:

- a) $W(x) = x(x+2)(x-3)(x+4)$, b) $W(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$,
c) $W(x) = -3x(1-x)(x-2)(7+x)$, d) $W(x) = 7(x-\sqrt{3})(x+2)(x-7)(5-x)$.

12.37. Podaj pierwiastki wielomianu W i określ ich krotności, jeżeli:

- a) $W(x) = (x-1)(x+3)^2$, b) $W(x) = (x+3)^3(x-1)^2$,
c) $W(x) = x(x+2)^3$, d) $W(x) = -3(x-7)^2(1-x^2)(x^2-5x+6)$.

12.38. Uzasadnij, że liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu

- D** $W(x) = x^4 + 3x^3 - 5x - 3$.

12.39. Podaj przykład wielomianu W zmiennej x :

- a) trzeciego stopnia, b) czwartego stopnia, c) szóstego stopnia,
którego jedynymi pierwiastkami są liczby -2 , 1 i 5 .

12.40. Podaj przykład takiego wielomianu W zmiennej x czwartego stopnia, którego jedynymi pierwiastkami są liczby:

- a) $2, 3, -5, -7$, b) $-1, 2, 4$, c) $0, 2$, d) 0 .

12.41. Liczby $1, 2$ i 3 są trzema pierwiastkami wielomianu W określonego wzorem $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$.

- a) Przedstaw wielomian W w postaci iloczynowej. b) Oblicz $\frac{W(0)}{W(-1)}$.

Rozkładanie wielomianów na czynniki

Zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian jednej zmiennej stopnia wyższego niż dwa można przedstawić w postaci iloczynu czynników, które są wielomianami pierwszego lub drugiego stopnia, którego nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Dowód tego twierdzenia pomijamy, ponieważ wykracza on poza wiadomości podstawy programowej.

Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że istnieje rozkład wielomianu co najmniej trzeciego stopnia na czynniki, ale nie wskazuje metody znalezienia tego rozkładu.

Nie zawsze potrafimy znaleźć taki rozkład. Z twierdzenia tego wynika wniosek:

Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek, którego prawdziwość uzasadnimy.

Uzasadnienie

Nie wszystkie czynniki, na które rozkłada się wielomian nieparzystego stopnia, są stopnia drugiego, bo iloczyn czynników drugiego stopnia jest wielomianem stopnia parzystego.

Zatem wśród tych czynników istnieje co najmniej jeden wielomian pierwszego stopnia

postaci $ax + b$, gdzie $a \neq 0$. Pierwiastkiem tego czynnika jest liczba $-\frac{b}{a}$, która jest pierwiastkiem wielomianu nieparzystego stopnia. **C.N.U.**

Ćwiczenie 33. Czy jest możliwe, by wielomian:

- a) drugiego stopnia nie miał pierwiastków,
- b) trzeciego stopnia nie miał pierwiastków?

Wielomiany możemy rozkładać na czynniki, stosując **wzory skróconego mnożenia**. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 20. Stosując wzory skróconego mnożenia, rozłóż na czynniki wielomian:

- a) $W(x) = (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1$, b) $W(x) = (x^2 + 9)^2 - 36x^2$,
- c) $W(x) = x^6 - 64$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } W(x) &= (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1 = \\ &= (x^2 + 2x + 1)^2 = [(x + 1)^2]^2 = (x + 1)^4, \end{aligned}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \\ \text{gdzie } a = x^2 + 2x \text{ i } b = 1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } W(x) &= (x^2 + 9)^2 - 36x^2 = (x^2 + 9)^2 - (6x)^2 = \\ &= (x^2 + 9 - 6x)(x^2 + 9 + 6x) = (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2, \end{aligned}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \text{ gdzie} \\ a = x^2 + 9 \text{ i } b = 6x$$

$$\begin{aligned} \text{c) } W(x) &= x^6 - 64 = (x^3)^2 - 8^2 = (x^3 - 8)(x^3 + 8) = \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4). \end{aligned}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Wielomiany $x^2 + 2x + 4$ i $x^2 - 2x + 4$ nie rozkładają się na czynniki.

Odp.: a) $W(x) = (x + 1)^4$, b) $W(x) = (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2$,

c) $W(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$.

Ćwiczenie 34. Stosując wzory skróconego mnożenia, rozłóż na czynniki wielomian:

a) $W(x) = (x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) + 1$, b) $W(x) = (x^2 + 4)^2 - 16x^2$, c) $W(x) = x^6 - 27^2$.

Przykład 21. Rozłóż na czynniki wielomian:

a) $W(x) = x^4 + 1$, b) $W(x) = x^4 - 3x^2 + 9$.

Rozwiązanie

a) $W(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 =$

$$0 - 2x^2 - 2x^2$$

$$= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x).$$

Wielomiany $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ i $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ nie rozkładają się na czynniki.

b) $W(x) = x^4 - 3x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9 - 9x^2 =$

$$-3x^2 - 6x^2 - 9x^2$$

$$= (x^2 + 3)^2 - (3x)^2 =$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$= (x^2 + 3 - 3x)(x^2 + 3 + 3x).$$

Wielomiany $x^2 - 3x + 3$ i $x^2 + 3x + 3$ nie rozkładają się na czynniki.

Odp.: a) $W(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$, b) $W(x) = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 3)$.

Ćwiczenie 35. Rozłóż na czynniki wielomian:

a) $W(x) = x^4 + 16$, b) $W(x) = x^4 - 2x^2 + 4$.

Jedną z metod rozkładu wielomianu na czynniki jest **metoda grupowania wyrazów** tak, by wyłączyć z tych grup wspólny czynnik przed nawias. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 22. Stosując metodę grupowania wyrazów, rozłóż na czynniki wielomian:

a) $W(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$, b) $W(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$.

Rozwiązanie

a) $W(x) = (x^3 + 3x^2) + (-4x - 12) =$

Grupujemy wyrazy.

$$= x^2(x+3) - 4(x+3) =$$

Wyciągamy wspólny czynnik z każdej grupy wyrazów.

$$= (x+3)(x^2 - 4) =$$

Wyciągamy wspólny czynnik.

$$= (x+3)(x-2)(x+2),$$

Stosujemy wzór skróconego mnożenia.

b) $W(x) = (x^5 + x^3) + (-x^2 - 1) = x^3(x^2 + 1) - 1 \cdot (x^2 + 1) =$
 $= (x^2 + 1)(x^3 - 1) = (x^2 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1).$

Wielomianów $x^2 + 1$ i $x^2 + x + 1$ nie można rozłożyć na czynniki.

Odp.: a) $W(x) = (x+3)(x-2)(x+2)$, b) $W(x) = (x^2 + 1)(x-1)(x^2 + x + 1).$

Ćwiczenie 36. Stosując metodę grupowania wyrazów, rozłóż na czynniki wielomian:

a) $W(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, b) $W(x) = 9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$.

Przykład 23. Wielomian W , gdzie $W(x) = x^3 - 13x + 12$, rozłóż na czynniki możliwie najniższych stopni.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} W(x) &= x^3 - 13x + 12 = x^3 \overbrace{-13x}^{-13x} + 12 = \\ &= (x^3 - x) + (-12x + 12) = x(x^2 - 1) - 12(x - 1) = \\ &= x(x-1)(x+1) - 12(x-1) = (x-1)[x(x+1) - 12] = \\ &= (x-1)(x^2 + x - 12) = (x-1)(x+4)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 12 &= 0, \\ \Delta &= 49, \sqrt{\Delta} = 7, \\ x_1 &= -4, \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

Odp.: $W(x) = (x-1)(x+4)(x-3).$

Ćwiczenie 37. Wielomian W , taki że $W(x) = x^3 + 6x + 7$, rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia.

Ćwiczenie 38. Wielomian P rozłóż na czynniki i podaj jego pierwiastki, gdy:

a) $P(x) = 2x^3 - 6x^2$, b) $P(x) = 5(x-2) + x(x-2)$,

c) $P(x) = (x+1)^2 - 3(x+1)$, d) $P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

Jeżeli znamy pierwiastek wielomianu lub potrafimy go wyznaczyć, to do rozkładu tego wielomianu na czynniki możemy stosować twierdzenie Bezoute'a.

Przykład 24. Liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu $G(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Rozłóż ten wielomian na czynniki.

Rozwiązanie

I sposób

Zapisujemy wielomian G w takiej postaci, by z grup wyrazów można było wyłączyć przed nawias czynnik $x+3$.

$$\begin{aligned}
 G(x) &= x^3 + 4x^2 + x - 6 = x^3 + \overbrace{3x^2 + x^2}^{4x^2} + \overbrace{3x - 2x}^x - 6 = \\
 &= x^2(x+3) + x(x+3) - 2(x+3) = (x+3)(x^2 + x - 2) = \\
 &= (x+3)(x-1)(x+2).
 \end{aligned}$$

II sposób

1° Wykonujemy dzielenie

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x - 2 \\
 \overline{) (x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x + 3)} \\
 \underline{-x^3 - 3x^2} \\
 x^2 + x \\
 \underline{-x^2 - 3x} \\
 -2x - 6 \\
 \underline{2x + 6} \\
 0.
 \end{array}$$

2° Rozkładamy na czynniki trójmian

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 + x - 2 \\
 x^2 + x - 2 &= (x+2)(x-1).
 \end{aligned}$$

Zatem $G(x) = (x+3)(x+2)(x-1)$.

Ćwiczenie 39. Sprawdź, czy liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu P , gdzie $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. Jeśli tak, to rozłóż ten wielomian na czynniki.

Odpowiedzi do ćwiczeń

33. a) Tak, **b)** nie. **34. a)** $W(x) = (x^2 - x + 1)^2$, **b)** $W(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2)^2$,

c) $W(x) = (x-3)(x+3)(x^2 - 3x + 9)(x^2 + 3x + 9)$.

35. a) $W(x) = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$, **b)** $W(x) = (x^2 - \sqrt{6}x + 2)(x^2 + \sqrt{6}x + 2)$.

36. a) $W(x) = (x-1)(x^2 + 1)$, **b)** $W(x) = (9x-4)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

37. $W(x) = (x+1)(x^2 - x + 7)$. **38. a)** $P(x) = 2x^2(x-3)$, $0, 3$, **b)** $P(x) = (x-2)(x+5)$, $-5, 2$,

c) $P(x) = (x+1)(x-2)$, $-1, 2$, **d)** $P(x) = (x+1)(x-1)(2x+1)$, $-1, 1, -\frac{1}{2}$. **39.** Tak, $P(x) = (x+1)(x+3)(x-2)$.

Zadania utrwalające

12.42. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i rozłóż wielomian W na czynniki, gdy:

- a) $W(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$, b) $W(x) = 8x^3 + 27$, c) $W(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$,
 d) $W(x) = 125x^3 - 8$, e) $W(x) = 81x^4 - 16$, f) $W(x) = (x-1)^3 + 8$.

12.43. Zastosuj metodę wyłączania wspólnego czynnika poza nawias i rozłóż wielomian W na czynniki, gdy:

- a) $W(x) = x^2(x+2) - 4(x+2)$, b) $W(x) = x^3(x-1) - (x-1)$,
 c) $W(x) = x(x^2 - 6x + 9) - 3(x^2 - 6x + 9)$, d) $W(x) = (x^2 - 9)(x+2) + 3(x-3)$.

12.44. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i rozłóż na czynniki wielomian:

- a) $W(x) = (x^2 + 4)^2 - 4(x^2 + 4) + 4$, b) $W(x) = -x^5 - 4x^4 - 4x^3$,
 c) $W(x) = (x-1)^4 - 81(x+2)^4$, d) $W(x) = 64(x+3)^{10} + (x+3)^7$,
 e) $W(x) = 256x^4 + 1$, f) $W(x) = x^8 + 2x^4 + 1$,
 g) $W(x) = x^3(x+2)^2 - 9x$, h) $W(x) = x^3(x-7)^2 - 36x$.

12.45. Zastosuj metodę grupowania wyrazów i rozłóż wielomian W na czynniki, gdy:

- a) $W(x) = x^3 + 7x^2 - x - 7$, b) $W(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$,
 c) $W(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x - 3$, d) $W(x) = 7x^3 + 2x^2 - 21x - 6$.

12.46. Wyznacz jeden wymierny pierwiastek wielomianu W , a następnie rozłóż wielomian W na czynniki, gdy:

- a) $W(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$, b) $W(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$.

12.47. Rozłóż na czynniki wielomian W , gdy:

- a) $W(x) = (x^2 - 5)^2 - x^2 + 5$, b) $W(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^2 - 8x$,
 c) $W(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$, d) $W(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$.

12.48. Wiedząc, że liczba r jest pierwiastkiem wielomianu W , oblicz wartość parametru m , a następnie rozłóż wielomian W na czynniki, gdy:

- a) $W(x) = x^3 + 5x^2 + 2x + m$, $r = -4$, b) $W(x) = x^3 + 2x^2 + mx - 10$, $r = 2$,
 c) $W(x) = 6x^3 + mx^2 + 48x - 20$, $r = \frac{2}{3}$, d) $W(x) = 2x^3 + 9x^2 + mx - 30$, $r = -\frac{3}{2}$.

Równania wielomianowe

Definicja

Równanie $W(x) = 0$, gdzie W jest wielomianem, nazywamy **równaniem wielomianowym**.

Rozwiązanie równania $W(x) = 0$ polega na obliczeniu pierwiastków wielomianu W . Przy obliczaniu pierwiastków wielomianu W stosujemy metodę:

- rozkładu wielomianu na czynniki,
- podstawienia pomocniczej zmiennej.

Jeżeli wielomian W w równaniu $W(x) = 0$ ma postać iloczynową, to korzystamy z własności iloczynu: **iloczyn czynników jest równy zero, gdy jeden z nich jest zerem**.

$a \cdot b \cdot c = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$a = 0$ lub $b = 0$, lub $c = 0$

Ćwiczenie 40. Rozwiąż równanie:

a) $(x-2)(x+3)=0$, b) $2x(x-1)=0$, c) $(x-1)^2=0$.

Przykład 25. Rozwiąż równanie:

a) $(1-x)(2x-3)(6x+2)=0$, b) $-5x(x+\sqrt{3})^2(4-3x)=0$.

Rozwiązanie

$$a \cdot b \cdot c = 0, \text{ gdy } a = 0 \text{ lub } b = 0, \text{ lub } c = 0$$

a) $(1-x)(2x-3)(6x+2)=0$ $1-x=0$ lub $2x-3=0$, lub $6x+2=0$ $x=1$ lub $x=\frac{3}{2}$, lub $x=-\frac{1}{3}$.	b) $-5x(x+\sqrt{3})^2(4-3x)=0$ $x=0$ lub $x+\sqrt{3}=0$, lub $4-3x=0$ $x=0$ lub $x=-\sqrt{3}$, lub $x=\frac{4}{3}$.
--	---

Odp.: a) $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, b) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{4}{3}$.

Ćwiczenie 41. Rozwiąż równanie:

a) $3(\sqrt{2}-x)(4x+2)(7-x)=0$, b) $-8x(\sqrt{3}x-3)(\sqrt{8}x+\sqrt{2})=0$.

Metodę rozwiązywania równań wielomianowych opisaną w przykładzie 25. można stosować tylko wtedy, gdy po jednej stronie równania jest iloczyn czynników, a po drugiej liczba 0. W matematyce najczęściej równanie jest podane w postaci równości sum algebraicznych. Metodę sprowadzenia sum algebraicznych do postaci iloczynowej pokażemy na przykładach.

Przykład 26. Rozwiąż równanie: a) $x^3 + x = 2x^2$, b) $x^2(x-1) = 2(x-1)$.

Rozwiązanie

a) $x^3 + x = 2x^2$

$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0, \text{ skąd } x = 1.$$

Grupujemy wszystkie wyrazy
po jednej stronie równania.

Wspólny czynnik x wyłączamy
przed nawias.

$$x^3 - 2x^2 + x - \cancel{x} \cdot x^2 - 2 \cdot \cancel{x} \cdot x + 1 \cdot \cancel{x}$$

b) $x^2(x-1) = 2(x-1)$

$$x^2(\cancel{x-1}) - 2(\cancel{x-1}) = 0$$

$$(\cancel{x-1})(x^2 - 2) = 0$$

$$x-1 = 0 \text{ lub } x^2 - 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = \sqrt{2}, \text{ lub } x = -\sqrt{2}.$$

„Przenosimy” wszystkie wyrazy na
jedną stronę równania.

Wspólny czynnik $x-1$
wyłączamy przed nawias.

Odp.: a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, b) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 42. Rozwiąż równanie:

a) $x^3 - 4x = 0$, b) $2x^2(x+3) = 18(x+3)$, c) $5x^2 \left(1 - x + \frac{1}{4}x^2\right) = 0$.

Przykład 27. Rozwiąż równanie: a) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$, b) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$.

Rozwiązanie

a) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$

$$(x^3 - 3x^2) + (4x - 12) = 0$$

$$\cancel{x^2}(x-3) + 4(x-3) = 0$$

$$(x-3)(\cancel{x^2} + 4) = 0$$

$$x-3 = 0 \text{ lub } x^2 + 4 = 0 \text{ — równanie nie ma rozwiązania}$$

$$x = 3,$$

Grupujemy wyrazy.

Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik
z każdej grupy wyrazów.

Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik $x-3$.

b) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

$$(x^3 + x^2) + (-x - 1) = 0$$

$$\cancel{x^2}(x+1) - 1 \cdot (x+1) = 0$$

$$(x+1)(\cancel{x^2} - 1) = 0$$

$$x+1 = 0 \text{ lub } x^2 - 1 = 0$$

$$x = -1 \text{ lub } x = -1, \text{ lub } x = 1, \text{ czyli } x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Grupujemy wyrazy.

Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik
z każdej grupy wyrazów.

Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik $x+1$.

Ćwiczenie 43. Rozwiąż równanie: a) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$, b) $3x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = 0$.

Przy rozkładzie wielomianu na czynniki możemy korzystać z poznanych twierdzeń o pierwiastkach wielomianu. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 28. Rozwiąż równanie $x^3 - 5x + 4 = 0$.

Rozwiązanie

$$x^3 - 5x + 4 = 0, \text{ czyli } W(x) = 0, \text{ gdzie } W(x) = x^3 - 5x + 4.$$

Zauważamy, że $W(1) = 0$.

Rozkładamy wielomian W na dwa czynniki, z których jednym jest dwumian $x - 1$.

I sposób

$$x^3 - 5x + 4 = 0$$

$$x^3 - x^2 + x^2 - x - 4x + 4 = 0$$

$$-x^2 + x^2 = 0$$

$$x^2(x-1) + x(x-1) - 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x - 4) = 0.$$

II sposób

Dzielimy wielomian W przez dwumian $x - 1$.

$$(x^3 - 5x + 4) : (x - 1) = x^2 + x - 4$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$x^2 - 5x$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + x \\ \hline \end{array}$$

$$-4x + 4$$

$$\begin{array}{r} 4x - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$= =$$

$$\text{Zatem } (x-1)(x^2 + x - 4) = 0.$$

III sposób Stosujemy schemat Hornera.

$$W(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 4.$$

$$r = 1$$

1	0	-5	4
	1	1	-4
1	1	-4	0

$$\text{Zatem } (x-1)(1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 4) = 0.$$

$$x^3 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 4) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\text{lub } x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Odp.: } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Ćwiczenie 44. Rozwiąż równanie $x^3 - 6x + 5 = 0$.

Niektóre z równań wielomianowych można rozwiązać, sprowadzając je do równania kwadratowego poprzez wprowadzenie nowej zmiennej. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 29. Rozwiąż równanie:

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, b) $(x^2 - 5x)^2 + (x^2 - 5x) - 20 = 0$.

Rozwiązanie

Wprowadzamy zmienną pomocniczą tak, by po podstawieniu otrzymać równanie kwadratowe.

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, $x^2 = t$, gdzie $t \geq 0$

$$(x^2)^2 - 3 \cdot x^2 - 4 = 0, \text{ więc } t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t = -1 \text{ lub } t = 4.$$

$$x^2 \geq 0$$

Zatem $x^2 = -1$ lub $x^2 = 4$
(brak rozwiązania) $x_1 = -2, x_2 = 2.$

b) $(x^2 - 5x)^2 + (x^2 - 5x) - 20 = 0$, $x^2 - 5x = t$

$$t^2 + t - 20 = 0$$

$$t = -5 \text{ lub } t = 4.$$

Zatem $x^2 - 5x = -5$ lub $x^2 - 5x = 4$

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ lub } x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \quad \text{lub} \quad x = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}, \text{ lub } x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}.$$

Odp.: a) $x_1 = -2, x_2 = 2$, b) $x_1 = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}.$

Ćwiczenie 45. Rozwiąż równanie:

a) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$, b) $-2(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1) + 1 = 0$.

Przykład 30. Określ liczbę pierwiastków równania $x^2(x - m) = 3x^2 - 4x$ w zależności od wartości parametru m .

Rozwiązanie

$$x^2(x - m) = 3x^2 - 4x \Leftrightarrow x[x^2 - (m + 3)x + 4] = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 - (m + 3)x + 4 = 0.$$

Niezależnie od wartości parametru m równanie ma co najmniej jeden pierwiastek $x_1 = 0$. Większa liczba pierwiastków zależy od wyróżnika $\Delta = m^2 + 6m - 7$ równania kwadratowego $\otimes x^2 - (m+3)x + 4 = 0$.

Zauważamy, że liczba 0 nie jest pierwiastkiem równania $\otimes$.

Równanie $\otimes$:

1° ma jeden pierwiastek, gdy $\Delta = 0$.

$$m^2 + 6m - 7 = 0$$

$$m_1 = -7, m_2 = 1.$$

2° ma dwa pierwiastki, gdy $\Delta > 0$.

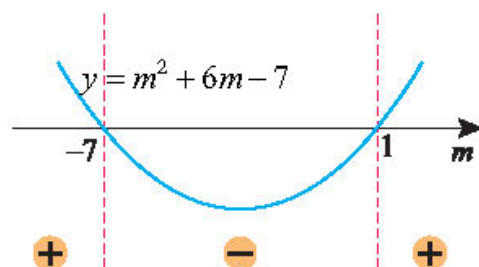
$$m^2 + 6m - 7 > 0$$

$$m \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty).$$

3° nie ma pierwiastków, gdy $\Delta < 0$.

$$m^2 + 6m - 7 < 0$$

$$m \in (-7; 1).$$



Sumujemy liczby pierwiastków i podajemy odpowiedź.

Odp.: Równanie ma: jeden pierwiastek, gdy $m \in (-7; 1)$; dwa pierwiastki, gdy $m = -7$ lub $m = 1$; trzy pierwiastki, gdy $m \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$.

Ćwiczenie 46. Określ liczbę pierwiastków równania $x \cdot [x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 1] = 0$ w zależności od wartości parametru m .

Odpowiedzi do ćwiczeń

40. a) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, c) $x_0 = 1$. 41. a) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = 7$, b) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

42. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, b) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, c) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

43. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, b) $x_0 = 1$. 44. $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$. 45. a) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

b) $x \in \left\{-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$. 46. 3 pierwiastki, gdy $m < 0$; 2 pierwiastki, gdy $m = 0$; 1 pierwiastek, gdy $m > 0$.

Zadania utrwalające

12.49. Rozwiąż równanie:

a) $-\frac{3}{4}x^2 = 0$,

b) $\frac{1}{2}x^2 + 1 = 0$,

c) $10x^2 = 2$,

d) $x^2 = x$,

e) $\sqrt{2}x^2 = \sqrt{6}x$,

f) $8x(x^2 + x + 1) = x^2 + x + 1$.

12.50. Rozwiąż równanie:

a) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$,

b) $17(4-x)(1-x)(x+3)=0$,

c) $3x^2(5x+1)(-x-1)=0$,

d) $7x(4^{10}x-2^{19})(\sqrt[5]{6}\cdot x+\sqrt[3]{6})=0$,

e) $-x^2[(\log_2 36)x - \log_2 6][(\log_2 8)x + \log_2 64]=0$.

12.51. Rozwiąż równanie:

a) $(x-1)(x+3)(x^2+1)=0$,

b) $(x+2)(x-1)(x^2-x+17)=0$,

c) $(x-1)^2(x+5)^2(x-2)^2=0$,

d) $8x(2-x)^2(x^2+6x-7)=0$.

12.52. Rozwiąż równanie:

a) $(x^2-16)(x^2-2x+1)=0$,

b) $(x^2-1)(x^2-3x+2)=0$,

c) $(x^2-6x+5)(x^2+6x+5)=0$,

d) $(4-x^2)(x^2-8x-9)=0$.

12.53. Rozwiąż równanie:

a) $x = x \cdot (x^2 + 1)$,

b) $x = (x^2 - 1)x$,

c) $x^2 = x^2(x-1)^2$,

d) $2x^3 - 8x^2 + 8x = 0$,

e) $4x^3 - 4x^2 + x = 0$,

f) $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$.

12.54. Rozwiąż równanie:

a) $3x(x+2) - 6x^2(x+2) = 0$,

b) $x(x^2-9) - 5(x^2-9) = 0$,

c) $(x^2+2)(2x-3) + (x^2+2)(x+1) = 0$,

d) $(3x^2+1)(x-1) - (3x^2+1)(2x+5) = 0$.

12.55. Rozwiąż równanie:

a) $(16-x^2)(1-x) + \frac{1}{4}x^2(16-x^2) = 0$,

b) $4x^2(125-5x^2) - (125-5x^2)(-2+4\sqrt{2}x) = 0$,

c) $(\sqrt{2}x^2+x)x^2 - x(\sqrt{2}x^2+x) - 6(\sqrt{2}x^2+x) = 0$.

12.56. Rozwiąż równanie:

a) $(x-2)^2(x^2+3x-4) = (x-1)^2(x^2+3x-4)$,

b) $(3x^2+13x-10)(3x-1)^2 - (9x^2-1)(3x^2+13x-10) = 0$,

c) $|(x+2)^2 - 18| = 18$.

12.57. Rozwiąż równanie:

a) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$,

b) $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$,

c) $24x^3 + 16x^2 + 3x + 2 = 0$,

d) $3x^3 + 6x^2 + 7x + 14 = 0$.

12.58. Rozwiąż równanie:

a) $6x^3 - 7x^2 + 1 = 0$,

b) $8x^3 + 10x^2 - x - 3 = 0$,

c) $15x^3 - 17x^2 - 24x - 4 = 0$,

d) $4x^3 - 12x^2 - 2x + 6 = 0$.

12.59. Rozwiąż równanie:

a) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$,

b) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$,

c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$,

d) $2(x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) + 1 = 0$,

e) $(x^2 - 4)^2 - 4(x^2 - 4) + 4 = 0$.

12.60. Rozwiąż równanie:

a) $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$,

b) $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$,

c) $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$,

d) $3x - 2\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt[3]{x} - 26 = 0$.

12.61. Rozwiąż równanie, wprowadzając pomocniczą zmienną t , gdy:

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$, $t = x^2 + x + 1$,

b) $(x^2 - 3)^3 - x^2 + 3 = 0$, $t = x^2 - 3$,

c) $(x^2 - 3x + 1)^2 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$, $t = x^2 - 3x + 1$,

d) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, $t = x^2 - x$.

12.62. Uzasadnij, że nie ma pierwiastków równanie:

D

a) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$,

b) $x^8 + 2,5x^4 + 1 = 0$,

c) $x^4 + 5x^2 - 2x + 7 = 0$.

12.63. Oblicz wszystkie możliwe całkowite wartości parametru m , dla których co najmniej jeden pierwiastek wymierny ma równanie:

a) $x^3 - x^2 + mx + 1 = 0$,

b) $x^3 + 2x^2 + mx - 3 = 0$.

12.64. Określ, w zależności od wartości parametru m , liczbę pierwiastków równania:

a) $x^3 - mx = 0$,

b) $x^3 + (m+2)x^2 + x = 0$,

c) $x^4 + (m-3)x^2 + m^2 = 0$,

d) $x^3 - mx + m - 1 = 0$.

Równanie typu $x^n = a$

Obliczamy wartości funkcji określonych wzorem $f(x) = x^n$ dla wybranych argumentów, gdy:

a) n – liczba naturalna nieparzysta i $n > 1$,

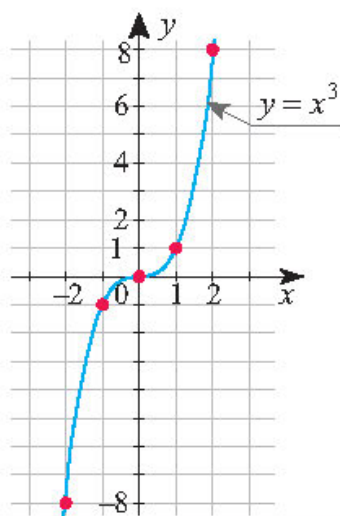
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	-8	-1	0	1	8
$y = x^5$	-32	-1	0	1	32
$y = x^7$	-128	-1	0	1	128
$y = x^9$	-512	-1	0	1	512



Odczytujemy z tabeli, że:

- punkt $(0, 0)$ jest środkiem symetrii wykresu każdej funkcji,
- wykres każdej funkcji przechodzi przez punkty $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.

Wykres każdej funkcji $f(x) = x^n$, gdy n jest liczbą naturalną nieparzystą większą od 1, jest krzywą, której kształt jest podobny do wykresu funkcji $f(x) = x^3$.



b) n – liczba naturalna parzysta i $n \geq 2$.

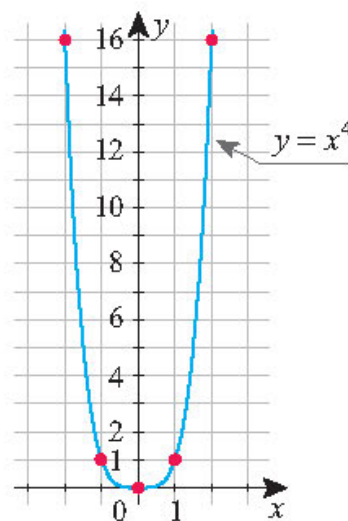
x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = x^4$	16	1	0	1	16
$y = x^6$	64	1	0	1	64
$y = x^8$	256	1	0	1	256



Odczytujemy z tabeli, że:

- oś y jest osią symetrii wykresu każdej funkcji,
- wykres każdej funkcji przechodzi przez punkty $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.

Wykres każdej funkcji $f(x) = x^n$, gdy n jest liczbą naturalną parzystą, jest krzywą, której kształt jest podobny do wykresu funkcji $f(x) = x^2$.



Uwaga

Równanie $x^n = a$ ma tyle rozwiązań, ile punktów wspólnych ma wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^n$ z prostą o równaniu $y = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

Przykład 31. Określ liczbę rozwiązań równania:

a) $x^3 = a$, b) $x^4 = a$

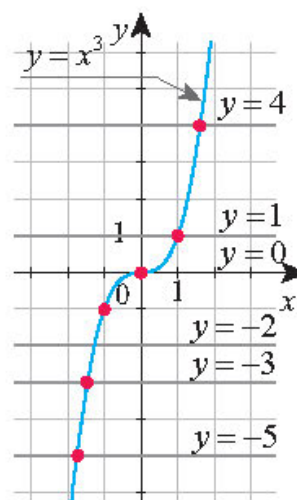
w zależności od wartości a .

Rozwiązanie

a) Szkicujemy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^3$.

Każda prosta o równaniu postaci $y = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, jest równoległa do osi x . Zauważmy, że każda prosta o równaniu $y = a$ przecina wykres funkcji f w jednym punkcie.

Zatem równanie $x^3 = a$ dla każdej liczby rzeczywistej a ma jedno rozwiązanie.



b) Szkicujemy wykres funkcji określonej

wzorem $f(x) = x^4$.

Zauważmy, że prosta o równaniu $y = a$, gdy:

$a < 0$ – nie przecina wykresu funkcji f ,

$a = 0$ – ma z wykresem funkcji f jeden punkt wspólny,

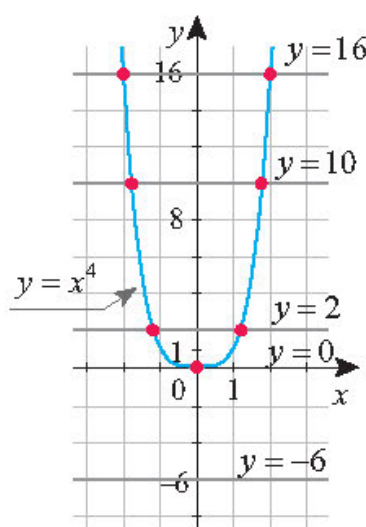
$a > 0$ – przecina wykres funkcji f w dwóch punktach.

Zatem równanie $x^4 = a$:

– nie ma rozwiązania, gdy $a < 0$,

– ma jedno rozwiązanie, gdy $a = 0$,

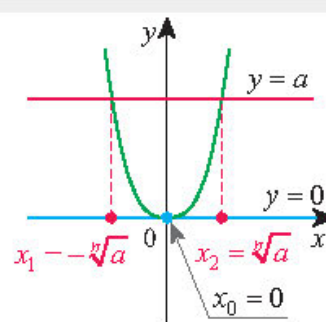
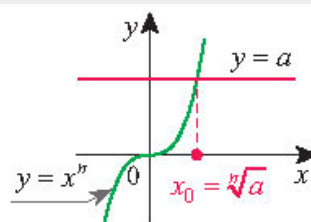
– ma dwa rozwiązania, gdy $a > 0$.



Ćwiczenie 47. Określ liczbę rozwiązań równania: a) $x^5 = a$, b) $x^2 = a$ w zależności od wartości a .

Uwaga

- Jeżeli n jest liczbą naturalną nieparzystą większą od 1, to równanie $x^n = a$ ma jedno rozwiązanie $x_0 = \sqrt[n]{a}$.
- Jeżeli n jest liczbą naturalną parzystą większą od 1, to równanie $x^n = a$:
 - ma dwa rozwiązania $x_1 = -\sqrt[n]{a}$ i $x_2 = \sqrt[n]{a}$, gdy $a > 0$,
 - ma jedno rozwiązanie $x_0 = 0$, gdy $a = 0$,
 - nie ma rozwiązania, gdy $a < 0$.



Przykład 32. Rozwiąż równanie:

a) $x^3 = -8$, b) $x^{10} = 1024$, c) $x^5 = 100$, d) $x^{50} = -1$.

Rozwiązanie

a) $x^3 = -8$, więc $x = \sqrt[3]{-8}$, skąd $x_0 = -2$

3 – liczba nieparzysta

b) $x^{10} = 1024$, więc $x = -\sqrt[10]{1024}$ lub $x = \sqrt[10]{1024}$,
skąd $x_1 = -2$, $x_2 = 2$,

10 – liczba parzysta

c) $x^5 = 100$, więc $x_0 = \sqrt[5]{100}$,

5 – liczba nieparzysta

d) $x^{50} = -1$, równanie nie ma rozwiązania.

50 – liczba parzysta i $-1 < 0$

Ćwiczenie 48. Rozwiąż równanie: a) $x^7 = 0$, b) $x^{15} = -1$, c) $x^6 = 729$, d) $x^{100} = 1$.

Przykład 33. Rozwiąż równanie:

a) $x^5(x^3+1)(x^2+1)(x+1)=0$, b) $x^6(x-2)+x^3(x-2)=0$.

Rozwiązanie

a) $x^5(x^3+1)(x^2+1)(x+1)=0$

Przyrównujemy każdy z czynników do zera.

$x^5 = 0$ lub $x^3 + 1 = 0$, lub $x^2 + 1 = 0$, lub $x + 1 = 0$

$x = 0$ lub $x^3 = -1$, lub $x^2 = -1$, lub $x = -1$

$x = 0$ lub $x = \sqrt[3]{-1} = -1$.

Równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązania.

b) $x^6(x-2)+x^3(x-2)=0$

$x^3(x-2)(x^3+1)=0$

Wylączamy wspólny czynnik $x^3(x-2)$ przed nawias.

$x^3 = 0$ lub $x - 2 = 0$, lub $x^3 + 1 = 0$

$x = 0$ lub $x = 2$, lub $x^3 = -1$

$x = -1$.

Przyrównujemy każdy z czynników do zera.

Odp.: a) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Ćwiczenie 49. Rozwiąż równanie:

a) $x^2(x^3-1)(x^2-1)(x-2)=0$, b) $x^5(x+3)+x^2(x+3)=0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

47. a) Równanie $x^5 = a$ ma jedno rozwiązanie, gdy $a \in \mathbb{R}$, b) równanie $x^2 = a$ nie ma rozwiązania, gdy $a < 0$, ma jedno rozwiązanie, gdy $a = 0$, ma dwa rozwiązania, gdy $a > 0$.

48. a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = -1$, c) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, d) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. 49. a) $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$, b) $x \in \{-3, -1, 0\}$.

Zadania utrwalające**12.65.** Rozwiąż równanie:

- a) $x^4 = -16$, b) $x^4 = 0$, c) $x^4 = 5$, d) $x^5 = -32$,
e) $x^5 = 2$, f) $x^5 = -4$, g) $x^{10} + 10 = 0$, h) $x^{10} - 10 = 0$.

12.66. Określ warunki, dla których równanie $x^n = a$:

- a) nie ma rozwiązania, b) ma jedno rozwiązanie, c) ma dwa rozwiązania.

12.67. Rozwiąż równanie:

- a) $54x^3 + 2 = 0$, b) $81x^4 - 1 = 0$, c) $0,001x^3 - 1000 = 0$,
d) $\sqrt[3]{2}x^6 - \sqrt[3]{2^{19}} = 0$, e) $\sqrt[3]{3}x^3 + \sqrt[3]{81} = 0$, f) $32x^{10} - 2^{25} = 0$.

12.68. Rozwiąż równanie:

- a) $(x^6 - 1)(x^5 + 32) = 0$, b) $(x^4 + 64)(x^4 - 81) = 0$,
c) $(x^{20} - 1024^2)(x^4 - 49^2) = 0$, d) $(2x^7 + 256)(10x^8 + 10^9) = 0$.

12.69. Rozwiąż równanie:

- a) $4(2x - 1)^3 = 0$, b) $(2x - 1)^3 - (x + 2)^3 = 0$,
c) $(4x + 3)^3 + (2 - x)^3 = 0$, d) $(x^2 - 2x)^3 - 8 = 0$.

12.70. Wylącz wspólny czynnik poza nawias i rozwiąż równanie:

- a) $x^2(x^5 + 243) + x(x^5 + 243) - 2(x^5 + 243) = 0$,
b) $x^2(3x^8 - 768) - 2x(3x^8 - 768) - 8(3x^8 - 768) = 0$,
c) $25x^4(1000x^4 - 1,6) - 10x^3(1000x^4 - 1,6) + x^2(1000x^4 - 1,6) = 0$.

12.71. Rozwiąż równanie:

- a) $[-(x+1)(x-3)]^5 = 0$, b) $(x^2 + 1)^7 = 0$, c) $(8 - x^2)^4 = 0$,
d) $(2 + x - x^2)^{100} = 0$, e) $(x^2 - 0,2x - 0,24)^{2000} = 0$, f) $(3x^2 - 2x + 10)^{50} = 0$.

12.72. Rozwiąż równanie:

- a) $x^{2000}(x - 2) + 2 - x = 0$, b) $x^{30}(x^3 - 27) + 27 - x^3 = 0$,
c) $x^3(2x^5 - 64) + (64 - 2x^5)2x = 0$, d) $x^4(x^3 - 0,125) + x(0,5 - 4x^3) = 0$.

12.73. Wprowadzając zmienną pomocniczą, rozwiąż równanie:

- a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$, b) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$, c) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$,
 d) $x^8 + 15x^4 - 16 = 0$, e) $(x+1)^{10} - 5(x+1)^5 + 4 = 0$, f) $\frac{8}{x^6} - \frac{7}{x^3} - 1 = 0$.

12.74. Uzasadnij, że równanie:

- D** a) $x^3 + a^2x + a^2 + 1 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie,
 b) $x^3 + x^2 + a^2x + a^2 = 0$ ma co najwyżej dwa rozwiązania.

12.75. Uzasadnij, że nie ma rozwiązania równanie:

- D** a) $x^6 + 2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$, b) $4x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = 0$,
 c) $4x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 4 = 0$.



Nierówności wielomianowe

Definicja

Nierównością wielomianową nazywamy nierówność postaci

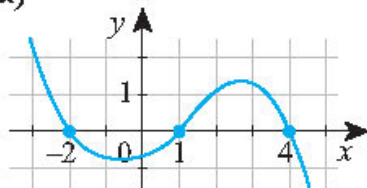
$$W(x) > 0 \text{ lub } W(x) < 0, \text{ lub } W(x) \geq 0, \text{ lub } W(x) \leq 0,$$

gdzie W jest wielomianem zmiennej x .

Rozwiązać nierówność wielomianową, to znaczy znaleźć wszystkie wartości argumentu x , dla których wielomian W przyjmuje wartości dodatnie ($W(x) > 0$) lub ujemne ($W(x) < 0$), lub nieujemne ($W(x) \geq 0$), lub niedodatnie ($W(x) \leq 0$).

Ćwiczenie 50. Odczytaj rozwiązania nierówności **1** i **2** zapisanych pod szkicem wykresu wielomianu W .

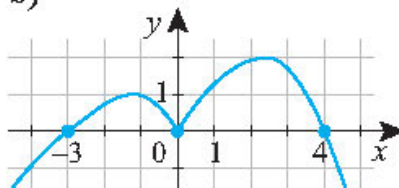
a)



1 $W(x) > 0$,

2 $W(x) < 0$.

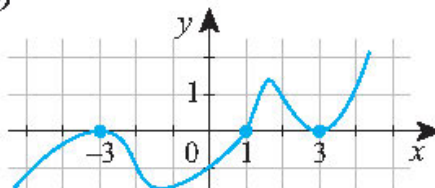
b)



1 $W(x) \geq 0$,

2 $W(x) < 0$.

c)



1 $W(x) \leq 0$,

2 $W(x) > 0$.

Rozwiązanie nierówności wielomianowej możemy odczytywać z wykresu wielomianu lub jego linii znaku, czyli przybliżonego wykresu wielomianu, na którym nie uwzględnia się osi y . Pokażemy to na przykładach.



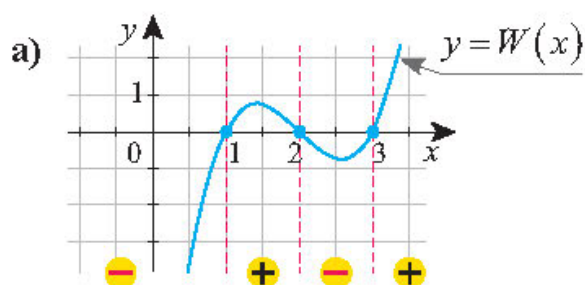
Przykład 34. Za pomocą programu komputerowego sporządzono wykres wielomianu W . Narysuj odpowiednią linię znaku wielomianu W , a następnie podaj rozwiązanie nierówności:

a) $W(x) > 0$ i $W(x) \leq 0$, gdy $W(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$,

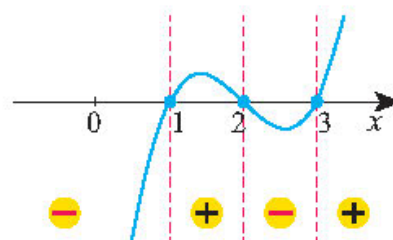
b) $W(x) < 0$ i $W(x) \geq 0$, gdy $W(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x+3)$.

Rozwiązanie

Sporządzamy wykres wielomianu W .

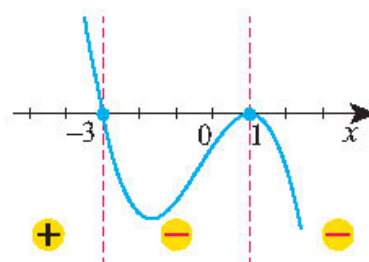
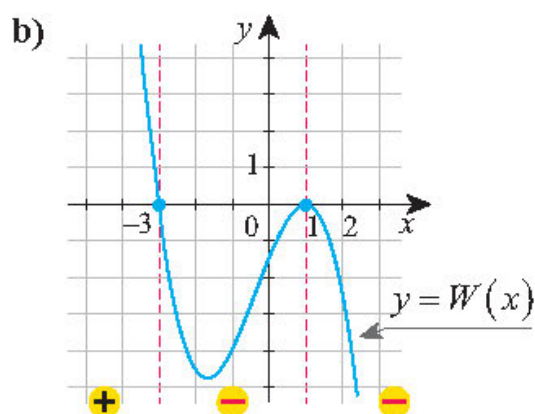


Rysujemy linię znaku, czyli przybliżonego wykresu wielomianu W , na którym nie uwzględnia się osi y .



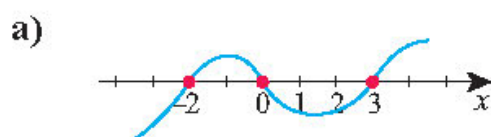
Z wykresu lub linii znaku wielomianu W odczytujemy rozwiązanie nierówności:

$$W(x) > 0, \text{ gdy } x \in (1; 2) \cup (3; +\infty), \quad W(x) \leq 0, \text{ gdy } x \in (-\infty; 1] \cup [2; 3].$$



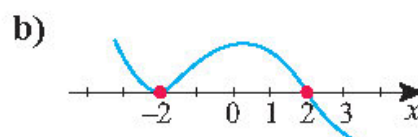
$$W(x) < 0, \text{ gdy } x \in (-3; 1) \cup (1; +\infty), \quad W(x) \geq 0, \text{ gdy } x \in (-\infty; -3] \cup \{1\}.$$

Ćwiczenie 51. Przeanalizuj linię znaku wielomianu W , a następnie podaj rozwiązanie nierówności **1** i **2** zapisanych pod rysunkiem.



1 $W(x) < 0$,

2 $W(x) \geq 0$.



1 $W(x) > 0$,

2 $W(x) \leq 0$.

R

Rysowanie „linii znaku” zaczynamy od prawej strony.

Początek zależy od wartości współczynnika a_n występującego przy najwyższej potędze zmiennej.

Gdy $a_n > 0$, to rysowanie „linii znaku” zaczynamy nad osią x , a gdy $a_n < 0$, to zaczynamy pod osią x .

Uwaga

Jeżeli liczba r jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, czyli istnieje taki wielomian $P(x)$, że $W(x) = (x-r)^k \cdot P(x)$ i $P(r) \neq 0$, to gdy:

liczba k	jest liczbą parzystą	jest liczbą nieparzystą
fragment „linii znaku” wielomianu		

W celu rozwiązania nierówności wielomianowej rozkładamy wielomian na czynniki.

Znaki wielomianu w przedziałach określamy na podstawie znaków czynników liniowych lub kwadratowych występujących w postaci iloczynowej tego wielomianu. Istnieje kilka sposobów określania znaków wielomianu. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 35. Rozwiąż nierówność $(x+2)(2x-1)(x-3) \geq 0$.

Rozwiązanie

$$(x+2)(2x-1)(x-3) \geq 0, \text{ czyli } W(x) \geq 0, \text{ gdzie } W(x) = (x+2)(2x-1)(x-3).$$

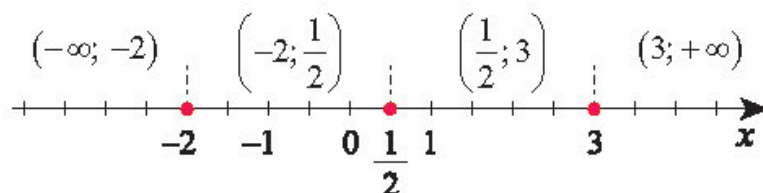
Obliczamy pierwiastki wielomianu W i określamy przedziały, które wyznaczają na osi x te pierwiastki.

$$W(x) = 0, \text{ gdy } (x+2)(2x-1)(x-3) = 0$$

$$x+2=0 \quad \text{lub} \quad 2x-1=0, \quad \text{lub} \quad x-3=0$$

$$x=-2 \quad \text{lub} \quad x=\frac{1}{2}, \quad \text{lub} \quad x=3.$$

Pierwiastki wielomianu W dzielą zbiór liczb rzeczywistych na przedziały:



R

I sposób (siatka znaków)

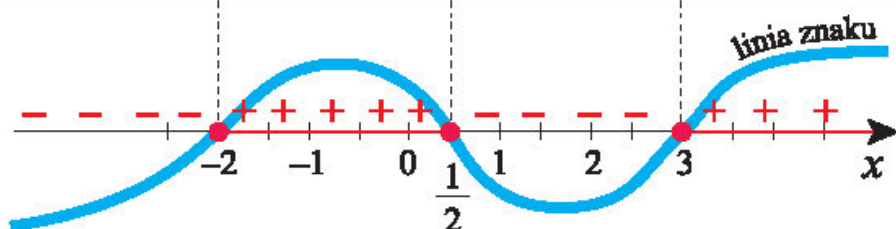
Sporządzamy tabelę (siatkę znaków), aby zbadać w poszczególnych przedziałach znak wartości każdego z czynników, których iloczynem jest wielomian W .

czynniki \ x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}; 3)$	3	$(3; +\infty)$
znak wartości wyrażenia $x+2$	-	0	+	+	+	+	+
znak wartości wyrażenia $2x-1$	-	-	-	0	+	+	+
znak wartości wyrażenia $x-3$	-	-	-	-	-	0	+
znak wartości iloczynu $(x+2)(2x-1)(x-3)$	-	0	+	0	-	0	+

II sposób (linia znaku)

Ilustracja graficzna rozwiązania nierówności $W(x) \geq 0$, gdy $a_3 = 2$.

$$W(x) \geq 0, \text{ gdy } x \in \left\langle -2; \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle.$$



III sposób (wykresy czynników)

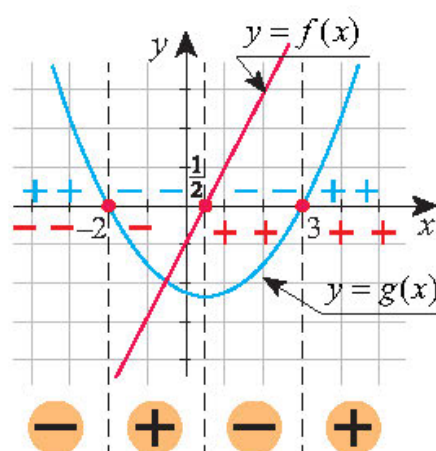
Wielomian W jest przedstawiony w postaci iloczynu trzech czynników. Stosowanie tej metody jest łatwiejsze, gdy wielomian jest przedstawiony w postaci iloczynu dwóch czynników.

Niech $W(x) = f(x) \cdot g(x)$, gdzie

$$f(x) = 2x-1 \text{ i } g(x) = (x+2)(x-3).$$

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji f i g .

$$f(x) \cdot g(x) \geq 0, \text{ gdy } x \in \left\langle -2; \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle.$$



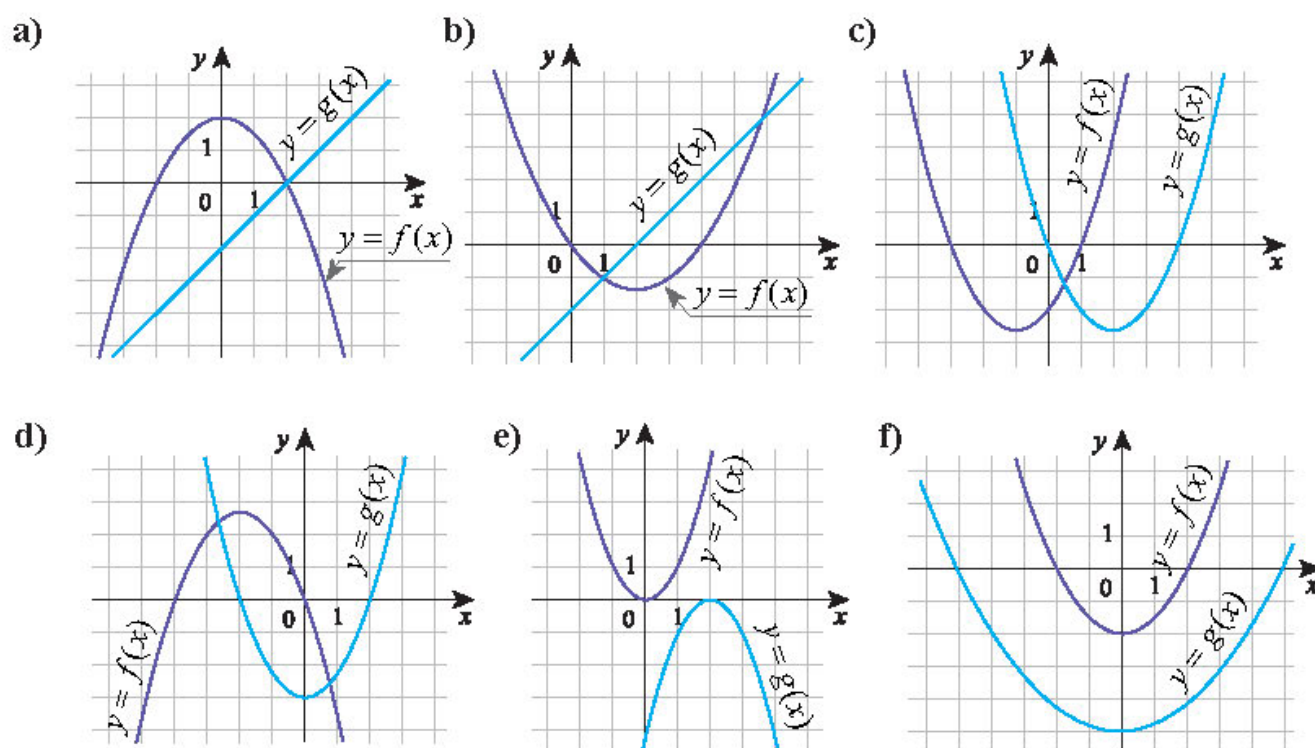
Odp.: $x \in \left\langle -2; \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$, czyli nierówność $(x+2)(2x-1)(x-3) \geq 0$ spełnia każda liczba x należąca do sumy przedziałów $\left\langle -2; \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$.

Ćwiczenie 52. Rozwiąż nierówność:

a) $(x^2-1)(x-4) > 0$, b) $(x+4)(x+1)(3-x) < 0$, c) $(x^2-9)(4-x^2) \geq 0$.

Ćwiczenie 53. Przeanalizuj szkice wykresów funkcji f oraz g i podaj rozwiązanie nierówności:

1 $f(x) \cdot g(x) > 0$, **2** $f(x) \cdot g(x) \leq 0$.



Przykład 36. Rozwiąż nierówność $(x+2)^3(x-3)^2(5-x) < 0$.

Rozwiązanie

Obliczamy pierwiastki wielomianu W .

$$W(x) = 0, \text{ gdy } (x+2)^3(x-3)^2(5-x) = 0$$

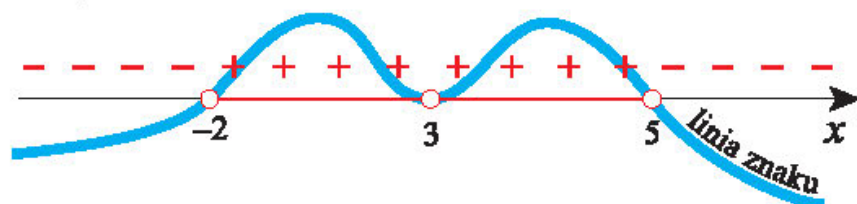
$$\begin{array}{lll} (x+2)^3 = 0 & \text{lub} & (x-3)^2 = 0, \quad \text{lub} \quad 5-x = 0, \\ x = -2 & \text{lub} & x = 3, \quad \text{lub} \quad x = 5. \end{array}$$

*-2 – pierwiastek trzykrotny,
3 – pierwiastek dwukrotny*

Pierwiastki wielomianu W dzielą zbiór liczb rzeczywistych na przedziały:

$$(-\infty; -2), \quad (-2; 3), \quad (3; 5), \quad (5; +\infty).$$

Rysujemy linię znaku wielomianu W i podajemy rozwiązanie nierówności $W(x) < 0$, gdy $a_6 = -1$.



Odp.: $x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

Ćwiczenie 54. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-1)(x+1)^2(x-2)^3 \geq 0$, b) $x^2(2-x)(x+3)^2 \leq 0$, c) $x^3 + x^2 - 2 > 0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

50. a) **1** $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 4)$, **2** $x \in (-2; 1) \cup (4; +\infty)$, b) **1** $x \in \{-3; 4\}$, **2** $x \in (-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$,

c) **1** $x \in (-\infty; 1) \cup \{3\}$, **2** $x \in (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

51. a) **1** $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 3)$, **2** $x \in (-2; 0) \cup (3; +\infty)$, b) **1** $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2)$, **2** $x \in \{-2\} \cup (2; +\infty)$.

52. a) $x \in (-1; 1) \cup (4; +\infty)$, b) $x \in (-4; -1) \cup (3; +\infty)$, c) $x \in \{-3; -2\} \cup \{2; 3\}$.

53. a) **1** $x \in (-\infty; -2)$, **2** $x \in \{-2; +\infty\}$, b) **1** $x \in (0; 2) \cup (4; +\infty)$, **2** $x \in (-\infty; 0) \cup \{2; 4\}$,

c) **1** $x \in (-\infty; -3) \cup (0; 1) \cup (4; +\infty)$, **2** $x \in \{-3; 0\} \cup \{1; 4\}$,

d) **1** $x \in (-4; -2) \cup (0; 2)$, **2** $x \in (-\infty; -4) \cup \{-2; 0\} \cup (2; +\infty)$, e) **1** i **2** brak rozwiązania,

f) **1** $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; 2) \cup (5; +\infty)$, **2** $x \in \{-5; -2\} \cup \{2; 5\}$.

54. a) $x \in (-\infty; -1) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$, b) $x \in \{-3; 0\} \cup (2; +\infty)$, c) $x \in (1; +\infty)$.

Zadania utrwalające

12.76. Podaj rozwiązanie nierówności:

a) $x^2 > 0$,

b) $x^2 \leq 0$,

c) $(x^2 + 1)(x + 1) > 0$,

d) $(x - 3)(3 - x) \leq 0$,

e) $x^2(x - 3) < 0$,

f) $x^2(x + 2)^2 > 0$.

12.77. Rozwiąż nierówność:

a) $(x - 3)(x + 2)(x - 5) < 0$, b) $(x + 4)(2 - x)(x - 3) > 0$, c) $(x^2 - 1)(x + 1) \leq 0$,

d) $(x^2 - 16)(x^2 - 4) < 0$, e) $x(1 - x)(x + 2) > 0$, f) $x(1 - x)(x - 5)(x + 2) \geq 0$.

12.78. Rozwiąż nierówność:

a) $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4) < 0$,

b) $(x + 3)(3 - x)(x - 5)(5 - x) \geq 0$,

c) $x(2x - 1)(1 - 2x)(x + 2) < 0$,

d) $(2x - 1)(6 - x)(x^2 - 2) > 0$.

12.79. Rozwiąż nierówność:

a) $(x^2 - 1)(x^2 - 3x + 2) < 0$,

b) $(x^2 - 9)(x^2 - 5x + 4) > 0$,

c) $(x^2 - x - 6)(x^2 + 2x - 3) < 0$,

d) $(x - x^2 - 1)(x^2 - 6x + 5) > 0$.

12.80. Rozwiąż nierówność:

a) $x^3 - x^2 > x - 1$,

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0$,

c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 9 \leq 0$,

d) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

12.81. Rozwiąż nierówność:

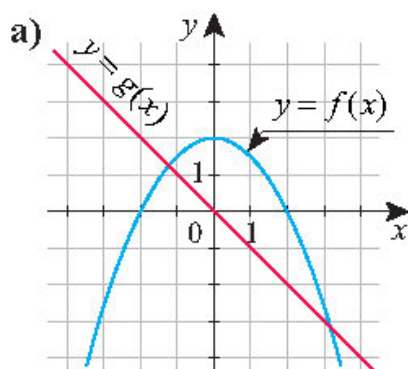
a) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 < 0$,

b) $4x^3 - 7x + 3 > 0$,

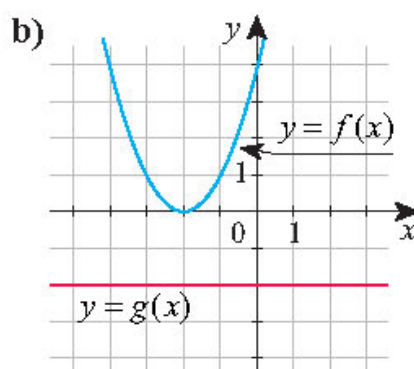
c) $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$,

d) $x^3 + x - 2 < 0$.

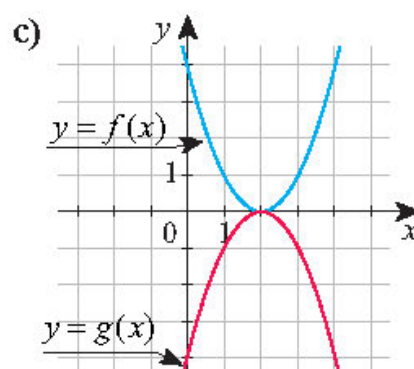
12.82. Przeanalizuj szkice wykresów funkcji f oraz g i podaj rozwiązanie nierówności zapisanej pod rysunkiem.



$$f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

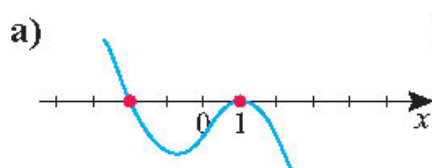


$$f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

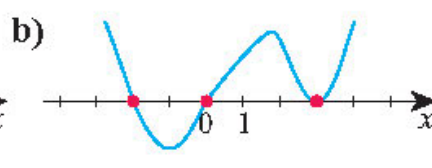


$$f(x) \cdot g(x) > 0$$

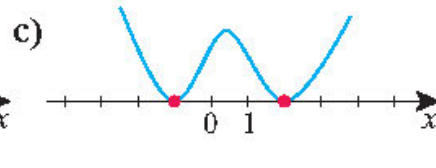
12.83. Przeanalizuj linię znaku wielomianu W i podaj rozwiązanie nierówności zapisanej pod rysunkiem.



$$W(x) \geq 0$$



$$W(x) \leq 0$$



$$W(x) \leq 0$$

12.84. Określ dziedzinę funkcji f , gdy:

a) $f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$,

b) $f(x) = \sqrt{x^4 - 1}$,

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}}$,

d) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2(x-1)}$,

e) $f(x) = \sqrt{(x-2)^2(x-1)}$,

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2(x-1)}}$.

12.85. Podaj przykład nierówności wielomianowej, którą spełniają liczby x , takie że:

a) $x \in (0; 3)$,

b) $x \in (-3; -1) \cup (1; 3)$,

c) $x \in \{0; 1\} \cup \{2\}$.

12.86. Dla jakich wartości parametru m wielomiany P i Q są podzielne przez ten sam dwumian, gdy $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2m$? Dla obliczonej wartości m rozwiąż nierówność $Q(x) > 0$.

12.87. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność:

a) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 > 0$,

b) $x^6 + x^4 + 2x^2 \geq 0$.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Rozwiązaniami równania $3x(x-2)(x+2)=0$ są liczby:

- A. 3, 0, 2, B. 3, 0, 2, -2, C. 0, 2, -2, D. 3, 2, -2.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Równanie $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$ ma:

- A. 0 pierwiastków, B. 1 pierwiastek, C. 2 pierwiastki, D. 3 pierwiastki.

3. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.*

Iloczyn pierwiastków równania $x^3 - 4x = 0$ jest równy 0.	P	F
Suma pierwiastków równania $(x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$ jest równa 0.	P	F
Liczbą całkowitą spełniającą równanie $x(2x-1)(3x-1)(4x-1) = 0$ jest liczba 1.	P	F
Równanie $x^2(x-1) + 4(x-1) = 0$ ma jeden pierwiastek.	P	F

4. Czy rozwiązaniem równania $4x^2(x+3) + 4x(x+3) + 1(x+3) = 0$ jest liczba $-\frac{1}{2}$?

D

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	A.	Równanie $4x^2(x+3) + 4x(x+3) + 1(x+3) = 0$ jest równoważne równaniu $4x(x+3)(x+1) = 0$, którego rozwiązaniem nie jest liczba $-\frac{1}{2}$.
N	Nie,	B.	Równanie $4x^2(x+3) + 4x(x+3) + 1(x+3) = 0$ jest równoważne równaniu $(x+3)(4x^2 + 4x + 1) = 0$, którego rozwiązaniem jest liczba $-\frac{1}{2}$.

5. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

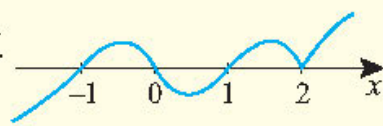
Na rysunku przedstawiona jest linia znaku wielomianu W .

Wielomian ten przyjmuje wartości niedodatnie, gdy:

- A. $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 0; 1 \rangle$, B. $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 0; 1 \rangle \cup \{2\}$.

Jeżeli $W(x) = (x^3 - 1)(x + 1)$, to $W(x) > 0$, gdy:

- C. $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, D. $x \in (-1; 1)$.



13. Wyrażenia wymierne

Wyrażenie wymierne i jego dziedzina

Definicja

Wyrażeniem wymiernym nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{W}{P}$, gdzie W i P są wielomianami jednej zmiennej lub wielu zmiennych, a wielomian P nie jest wielomianem zerowym.

Funkcję $f(x) = \frac{W(x)}{P(x)}$ nazywamy **funkcją wymierną**.

Przykłady wyrażeń wymiernych:

$$\frac{1}{x}, \frac{2x-3}{x^2-4}, \frac{\sqrt[4]{5}y^3 - \sqrt{3}y + 2}{y^2 + \sqrt{7}} - \text{wyrażenia wymierne jednej zmiennej},$$

$$\frac{1}{xy}, \frac{\sqrt[3]{2}x + 3y - 2}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{6x - y}{x + y} - \text{wyrażenia wymierne wielu zmiennych}.$$

Do wyrażeń wymiernych zaliczamy również liczby rzeczywiste i wielomiany.

W dalszych rozważaniach będziemy zajmować się wyrażeniami wymiernymi jednej zmiennej.

Definicja

Dziedziną wyrażenia wymiernego jednej zmiennej nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których jest określona wartość liczbową tego wyrażenia.

- Wyrażenie wymierne postaci $\frac{W(x)}{P(x)}$, gdzie $\text{st.}[P(x)] \geq 1$, ma sens liczbowy dla tych x , dla których $P(x) \neq 0$.
- Jeżeli wyrażenie wymierne jest wielomianem, to jego dziedziną D jest zbiór $\mathbf{R}$, czyli $D = \mathbf{R}$.

Aby wyznaczyć dziedzinę D wyrażenia wymiernego $\frac{W(x)}{P(x)}$, gdy $\text{st.}[P(x)] \geq 1$, należy:

- rozwiązać równanie $P(x) = 0$,
- podać dziedzinę D , gdzie $D = \mathbf{R} \setminus \{x : P(x) = 0\}^*$.

*) Zapis $\{x : P(x) = 0\}$ – „zbiór takich liczb x , że $P(x) = 0$ ”.

Przykład 1. Określ dziedzinę D wyrażenia wymiernego:

a) $\frac{x+3}{x^2-16}$, b) $\frac{5x+1}{x^3-2x^2-x+2}$, c) $\frac{x+2}{x^3-5x^2+8x-4}$.

Rozwiązanie Rozwiązujemy równanie:

a) $x^2-16=0$, skąd $x_1=-4$, $x_2=4$, więc

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\} \quad \text{inny zapis } D: x \neq -4 \text{ i } x \neq 4.$$

$$P(x) = 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x: P(x) = 0\}$$

b) $x^3-2x^2-x+2=0$

$$P(x) = 0$$

$$x^2(x-2)-(x-2)=0$$

$$(x-2)(x^2-1)=0, \text{ skąd } x_1=-1, x_2=1, x_3=2, \text{ więc}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\} \quad \text{inny zapis } D: x \neq \pm 1 \text{ i } x \neq 2.$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x: P(x) = 0\}$$

c) $x^3-5x^2+8x-4=0$.

Zauważamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$,

więc $P(x) = (x-1)(x-2)^2$.

$P(x) = 0$, gdy $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, więc

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \quad \text{inny zapis } D: x \neq 1 \text{ i } x \neq 2.$$

Odp.: a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

Ćwiczenie 1. Określ dziedzinę D wyrażenia:

a) $\frac{x}{2x^2-72}$, b) $\frac{x^2+1}{2x^3-x^2-2x+1}$, c) $\frac{2x+4}{x^3-5x+4}$.

Ćwiczenie 2. Podaj przykład wyrażenia wymiernego, którego dziedziną jest zbiór D , taki że: a) $D = \mathbb{R}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Przykład 2. Określ, dla jakich wartości parametru m dziedziną D wyrażenia wymiernego

$$\frac{x^2+4}{mx^2+m-1}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie

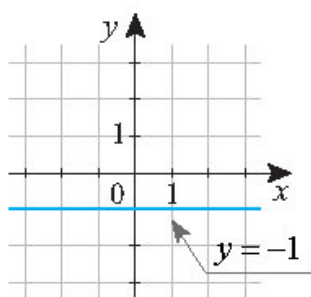
Zauważamy, że dziedziną danego wyrażenia będzie zbiór $\mathbb{R}$, gdy równanie $mx^2 + m - 1 = 0$ nie będzie miało rozwiązania, czyli gdy wykres funkcji $f(x) = mx^2 + m - 1$ będzie leżał pod osią x albo nad nią.

Wzór funkcji f ma postać

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a = m, b = 0, c = m - 1 \text{ i } \Delta = -4m(m-1).$$

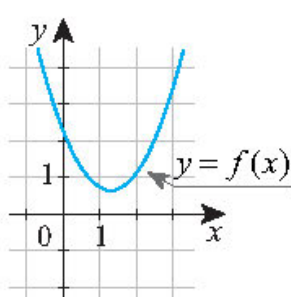
Rozpatrujemy trzy przypadki:

1° $a = 0$, czyli $m = 0$



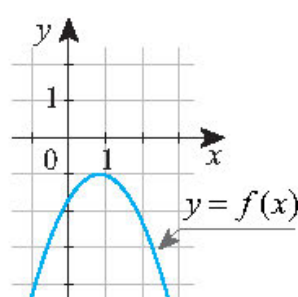
$m = 0$, więc $f(x) = -1$.
Funkcja f nie ma miejsc zerowych.

2° $a > 0$, czyli $m > 0$



$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$, więc
 $\begin{cases} m > 0 \\ -4m(m-1) < 0 \end{cases}$,
skąd $m > 1$.

3° $a < 0$, czyli $m < 0$



$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$, więc
 $\begin{cases} m < 0 \\ -4m(m-1) < 0 \end{cases}$,
skąd $m < 0$.

Zatem $D = \mathbb{R}$, gdy $m = 0$ lub $m > 1$, lub $m < 0$.

Odp.: $D = \mathbb{R}$, gdy $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Ćwiczenie 3. Określ, dla jakich wartości parametru m dziedziną D wyrażenia wymiernego

$\frac{2x}{mx^2 - 6x + m}$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

Definicja

Dwa wyrażenia wymierne nazywamy **równymi**, jeśli mają takie same dziedziny i równe wartości dla jednakowych wartości zmiennych.

Np. wyrażenia $\frac{2x^2}{x}$ i $2x$ mają różne dziedziny. Jeżeli ograniczymy dziedzinę wyrażenia $2x$ do zbioru $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to wyrażenia $\frac{2x^2}{x}$ i $2x$ są równe, czyli $\frac{2x^2}{x} = 2x$, gdy $x \neq 0$.

Ćwiczenie 4. Określ dziedzinę D wyrażen $\frac{3x-9}{x^2-9}$ i $\frac{3}{x+3}$ tak, aby były one równe.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-6, 6\}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, 1, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

2. Np.: a) $\frac{1}{x^2+3}$, b) $\frac{4x+3}{(x-1)^3}$, c) $\frac{2}{x^2-x}$, d) $\frac{x^2+4}{x(1-x^2)}$. 3. $m \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. 4. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Zadania utrwalające

13.1. Jeśli wyrażenie jest wymierne, to określ jego dziedzinę D :

- a) $\sqrt{x^2-1}$, b) $3x^2-8x+6$, c) $\frac{5x+2}{(x-1)(x+1)}$,
 d) $\frac{\sqrt{x}+2}{x^2-4}$, e) $\frac{(x+3)(x-3)}{(3-x)(3+x)}$, f) $\frac{5x^2-50}{x^2+25}$.

13.2. Dla jakich wartości zmiennej x wyrażenie wymierne ma sens liczbowy?

- a) $\frac{12x^3}{3x+5}$, b) $\frac{2x^2+x+6}{4x+3}$, c) $\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+1}$,
 d) $\frac{15x^3+17x^2+7x+1}{5x^2+4x+1}$, e) $\frac{x^2-1}{x^2+2x}$, f) $\frac{9x^2-12x+4}{3x^3+x^2-2x}$.

13.3. Wyznacz dziedzinę D wyrażenia wymiernego:

- a) $\frac{x^2+2x+1}{x^3-4x^2+4x}$, b) $\frac{x^3+5x}{9x^3-6x^2+x}$, c) $\frac{x^3+1}{x^3+3x^2+3x+1}$,
 d) $\frac{3x^2+1}{x^4+3x^2-4}$, e) $\frac{x+2}{x^4-5x^2+4}$, f) $\frac{5x^2+3x-1}{x^4-13x^2+36}$.

13.4. Wyznacz dziedzinę D wyrażenia wymiernego:

- a) $\frac{5x+5}{x^3-x^2-x+1}$, b) $\frac{(x+3)^2}{x^3+3x^2-9x-27}$, c) $\frac{8x^2+4x-1}{x^3-4x^2-x+4}$,
 d) $\frac{5x^2+3x}{x^3+6x-7}$, e) $\frac{3x+2}{3x^3+7x^2-4}$, f) $\frac{3x^2+8x}{4x^3-3x+1}$.

13.5. Uzasadnij, że dziedziną wyrażenia $\frac{x^3+2x-1}{x^4+5x^2+6}$ jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

13.6. Określ, dla jakich wartości parametru m zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest dziedziną wyrażenia wymiernego:

- a) $\frac{3x+2}{x^2+2mx+m}$, b) $\frac{7x^2-2}{mx^2+6x+9m}$, c) $\frac{3x^2+x-1}{mx^2+4mx+m-3}$.

13.7. Określ dziedzinę D wyrażen wymiernych tak, aby były one równe:

- a) $\frac{x^2-1}{x+1}$ i $x-1$, b) $\frac{-3x^2-3}{x^2+1}$ i -3 , c) $\frac{-2x^4+2}{x^2-1}$ i $-2(x^2+1)$.

13.8. Określ, dla jakich wartości parametru m równe są wyrażenia wymierne:

a) $\frac{x^2-1}{x+m}$ i $x-1$, b) $\frac{x^3+8}{x+m}$ i x^2-2x+4 , c) $\frac{x^2-4mx}{x-12}$ i x .

Skracanie i rozszerzanie wyrażeń wymiernych

Aby skrócić wyrażenie wymierne, np. $\frac{W(x)}{P(x)} = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3}$, należy:

- określić dziedzinę D danego wyrażenia $x^2-2x-3=0$, więc $x=-1$ lub $x=3$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$,
- wielomiany występujące w liczniku i mianowniku rozłożyć na czynniki $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x-3} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-3)}$,
- podzielić (skrócić) rozłożone wielomiany przez ich wspólne czynniki $\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-3)}$, czyli
 $\frac{W(x)}{P(x)} = \frac{x+1}{x-3}$, gdzie $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

Przykład 3. Skróć wyrażenie wymierne $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} &= \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2} = \\ &= \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{x-1}{x^2-1} = \\ &= \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4-2x^2+1 &= 0 \\ (x^2-1)^2 &= 0, \\ x^2-1 &= 0, \text{ skąd} \\ x &= -1 \text{ lub } x = 1, \text{ więc} \\ D &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5. Wyznacz dziedzinę i skróć wyrażenie:

a) $\frac{x^2-5x}{2x^2-10x}$, b) $\frac{x^3-8}{2-x}$, c) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.

Aby wyrażenie wymierne, np. $\frac{3+x}{x}$, **rozszerzyć** przez wyrażenie $x+2$, należy:

- pomnożyć licznik i mianownik wyrażenia przez $x+2$ $\frac{3+x}{x} \cdot \frac{x+2}{x+2} = \frac{(3+x)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x}$,
- ustalić dziedzinę otrzymanego wyrażenia wymiernego $x \neq 0$ i $x+2 \neq 0$
 $x \neq 0$ i $x \neq -2$, więc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

Przykład 4. Rozszerz wyrażenie, mnożąc licznik i mianownik przez wyrażenie podane obok. Określ dziedzinę D otrzymanego wyrażenia.

a) $\frac{x-3}{x+3} \cdot \sqrt{2}$, b) $\frac{3x}{x-5} \cdot x+5$.

Rozwiązanie

a) $\frac{x-3}{x+3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(x-3)\sqrt{2}}{(x+3)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}x+3\sqrt{2}}$,

$x+3 \neq 0 \Leftrightarrow^{*)} x \neq -3$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

b) $\frac{3x}{x-5} \cdot \frac{x+5}{x+5} = \frac{3x(x+5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{3x^2+15x}{x^2-25}$.

$(x-5)(x+5) \neq 0$
 $x \neq 5$ i $x \neq -5$, więc
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$.

Uwaga

Jeżeli D_1 jest dziedziną wyrażenia wymiernego, to rozszerzając je, otrzymujemy wyrażenie o dziedzinie D_2 , która nie musi być równa dziedzinie D_1 .

Ćwiczenie 6. Rozszerz wyrażenie, mnożąc licznik i mianownik przez wyrażenie podane obok. Określ dziedzinę D otrzymanego wyrażenia. a) $\frac{x+2}{x-7} \cdot 2x$, b) $\frac{x^3-5}{6x} \cdot x-2$.

Przykład 5. Rozszerz wyrażenie tak, aby otrzymać wyrażenie o wskazanym mianowniku. Określ dziedzinę D otrzymanego wyrażenia.

a) $\frac{7x}{15(x-1)} = \frac{\boxed{}}{60(x-1)}$, b) $\frac{x}{x-2} = \frac{\boxed{}}{x^2-5x+6}$, c) $\frac{4x}{x+2} = \frac{\boxed{}}{x^3+8}$.

Rozwiązanie

a) $60:15=4$, więc

$\frac{7x}{15(x-1)} = \frac{7x \cdot 4}{15(x-1) \cdot 4} = \frac{28x}{60(x-1)}$, gdzie $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

*) Zapis $\Leftrightarrow$ – czytamy „wtedy i tylko wtedy, gdy”.

b) $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, więc $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{x \cdot (x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6}.$$

c) $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$, więc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$a^3 + b^3 - (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\frac{4x}{x+2} = \frac{4x}{x+2} \cdot \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 2x + 4} = \frac{4x(x^2 - 2x + 4)}{x^3 + 8}.$$

$$x^3 + 8 = 0, \text{ gdy } x = -2$$



Ćwiczenie 7. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz takie wyrażenie, aby otrzymać wyrażenie o wskazanym mianowniku.

a) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{\blacksquare}{x^2-9},$ b) $\frac{2x}{x+2} = \frac{\blacksquare}{(x+2)^2},$ c) $\frac{x}{x-1} = \frac{\blacksquare}{x^3-1}.$



Ćwiczenie 8. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz takie wyrażenie, aby otrzymać wyrażenie o wskazanym liczniku. Określ dziedzinę D otrzymanego wyrażenia.

a) $\frac{5a-3}{4a} = \frac{20a-12}{\blacksquare},$ b) $\frac{a-7}{a} = \frac{a^2-49}{\blacksquare},$ c) $\frac{a-3}{a+4} = \frac{a^2-6a+9}{\blacksquare}.$

Ćwiczenie 9. Wyznacz wielomian W możliwie najniższego stopnia, który jest podzielny przez wielomiany: a) $x-1$ i $2x$, b) $3x+3$ i $4x+4$, c) $x+6$ i x^2-36 ,

d) $x-1$ i x^2+x+1 , e) $x+2$ i x^2-2x+4 .

Sprawdzić wyrażenia wymierne do wspólnego mianownika, to znaczy rozszerzyć te wyrażenia tak, by w ich mianownikach był taki sam wielomian.

Uwaga Wspólny mianownik wyrażeń wymiernych to wielomian, który jest iloczynem wszystkich czynników występujących w mianowniku jednego wyrażenia i tych czynników występujących w mianownikach pozostałych wyrażeń, których nie ma w tym jednym.

Przykład 6. Sprawdz do wspólnego mianownika wyrażenia:

a) $x-3$ i $\frac{1}{x+3},$ b) $\frac{x+1}{2x+6}$ i $\frac{x-1}{3x+9},$ c) $\frac{1}{x^2-4x}$ i $\frac{1}{x^2-16}.$

Rozwiązanie

a) $x-3 = \frac{x-3}{1}$

1 – mianownik pierwszego wyrażenia

$$\frac{1}{x+3}.$$

$x+3$ – mianownik drugiego wyrażenia

Wspólny mianownik: $1 \cdot (x+3)$, czyli $x+3$.

Rozszerzamy zatem tylko wyrażenie $x-3$, bo mianownik wyrażenia $\frac{1}{x+3}$ jest już wspólnym mianownikiem.

$$x-3 = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \frac{x^2-9}{x+3}.$$

b) Wyrażenia w mianownikach rozkładamy na czynniki:

$$\frac{x+1}{2x+6} = \frac{x+1}{2 \cdot (x+3)} \quad \text{i} \quad \frac{x-1}{3x+9} = \frac{x-1}{3 \cdot (x+3)}.$$

$2 \cdot (x+3)$ – mianownik pierwszego wyrażenia

$3 \cdot (x+3)$ – mianownik drugiego wyrażenia

Wspólny mianownik: $2 \cdot 3 \cdot (x+3)$, czyli $6 \cdot (x+3)$.

$$\frac{x+1}{2x+6} = \frac{x+1}{2 \cdot (x+3)} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3x+3}{6 \cdot (x+3)}$$

$$\frac{x-1}{3x+9} = \frac{x-1}{3 \cdot (x+3)} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2x-2}{6(x+3)}.$$

c) Wyrażenia w mianownikach rozkładamy na czynniki:

$$\frac{1}{x^2-4x} = \frac{1}{x \cdot (x-4)} \quad \text{i} \quad \frac{1}{x^2-16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)}.$$

Wspólny mianownik: $x \cdot (x-4) \cdot (x+4)$.

$$\frac{1}{x^2-4x} = \frac{1}{x(x-4)} \cdot \frac{x+4}{x+4} = \frac{x+4}{x(x-4)(x+4)}$$

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x}{x(x-4)(x+4)}.$$

$x(x-4)$ – mianownik pierwszego wyrażenia

$(x-4)(x+4)$ – mianownik drugiego wyrażenia

Odp.: a) $\frac{x^2-9}{x+3}$ i $\frac{1}{x+3}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, b) $\frac{3x+3}{6(x+3)}$ i $\frac{2x-2}{6(x+3)}$, gdzie

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, c) $\frac{x+4}{x(x-4)(x+4)}$ i $\frac{x}{x(x-4)(x+4)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$.

Ćwiczenie 10. Sprowadź do wspólnego mianownika wyrażenia:

a) 3 i $\frac{8}{2x-1}$, b) $\frac{4}{x+3}$ i $\frac{5}{x+6}$, c) $\frac{4}{x^2}$ i $\frac{5}{x^2+7x}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$, $\frac{1}{2}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $-x^2 - 2x - 4$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{x+2}{x-2}$.

6. a) $\frac{2x^2+4x}{2x^2-14x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 7\}$, b) $\frac{x^4-2x^3-5x+10}{6x^2-12x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

7. a) x^2+5x+6 , $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, b) $2x^2+4x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, c) x^3+x^2+x , $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

8. a) $16a$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, b) a^2+7a , $D = \mathbb{R} \setminus \{-7, 0\}$, c) a^2+a-12 , $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 3\}$.

9. a) $2x(x-1)$, b) $12(x+1)$, c) x^2-36 , d) x^3-1 , e) x^3+8 .

10. a) $\frac{6x-3}{2x-1}$ i $\frac{8}{2x-1}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, b) $\frac{4x+24}{(x+3)(x+6)}$ i $\frac{5x+15}{(x+3)(x+6)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6, -3\}$,

c) $\frac{4x+28}{x^2(x+7)}$ i $\frac{5x}{x^2(x+7)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 0\}$.

Zadania utrwalające

13.9. Określ dziedzinę D i skróć wyrażenie wymierne:

a) $\frac{x-3}{x^2-9}$, b) $\frac{a^3-1}{a-1}$, c) $\frac{4x^2+3x}{5x^2-3x}$, d) $\frac{x^2+4}{x^4-16}$,
 e) $\frac{y^3-1}{y^2+y+1}$, f) $\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$, g) $\frac{x^2+x-12}{x^2+9x+20}$.

13.10. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce  wpisz takie wyrażenie, aby otrzymać wyrażenie o wskazanym mianowniku. Określ dziedzinę D otrzymanego wyrażenia.

a) $\frac{1}{3x^3} = \frac{\text{blue box}}{15x^5}$, b) $\frac{3x}{x^2-1} = \frac{\text{blue box}}{x^4-1}$,
 c) $\frac{x-5}{x+5} = \frac{\text{blue box}}{x^2+3x-10}$, d) $\frac{3}{x^2+3x} = \frac{\text{blue box}}{x^3+3x^2}$,
 e) $\frac{4}{x-1} = \frac{\text{blue box}}{x^3-1}$, f) $\frac{7}{x+5} = \frac{\text{blue box}}{x^3+125}$.

13.11. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce  wpisz takie wyrażenie, aby otrzymać wyrażenie o wskazanym liczniku. Określ dziedzinę D otrzymanego wyrażenia.

a) $\frac{2x}{x+3} = \frac{6x^3}{\text{blue box}}$, b) $\frac{x+4}{x+1} = \frac{2x^2+8x}{\text{blue box}}$, c) $\frac{x-1}{x+3} = \frac{x^2-6x+5}{\text{blue box}}$.

13.12. Sprowadź do wspólnego mianownika wyrażenia:

a) x i $\frac{x}{x+2}$, b) $\frac{4}{2x-6}$ i $\frac{1}{x-3}$,
 c) $x+2$ i $\frac{1}{x+2}$, d) $\frac{3x}{x-1}$ i $\frac{4}{x^2+2x-3}$,
 e) $\frac{5x}{x^2+x-2}$ i $\frac{3}{x^2+5x+6}$, f) $\frac{4}{x-3}$ i $\frac{2x}{x^3-27}$,
 g) $\frac{3}{8x^3+1}$ i $\frac{4}{2x+1}$, h) $\frac{2x}{x^2-4x+16}$ i $\frac{1}{x+4}$.

Działania na wyrażeniach wymiernych

Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych wykonujemy analogicznie do mnożenia i dzielenia ułamków zwykłych.

Aby wykonać **mnożenie** wyrażeń wymiernych, np. $\frac{x^2+8x+16}{x^2-3x} \cdot \frac{x^2-9}{2x+8}$, należy:

- określić dziedzinę D , zakładając, że każdy mianownik, w którym występują zmienne, jest różny od zera

$$x^2-3x \neq 0 \text{ i } 2x+8 \neq 0$$

$$x(x-3) \neq 0 \text{ i } 2x \neq -8$$

$$x \neq 0 \text{ i } x \neq 3, \text{ i } x \neq -4$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 3\},$$
- rozłożyć (jeśli można i jest taka potrzeba) licznik i mianownik każdego z wyrażeń na czynniki

$$\frac{x^2+8x+16}{x^2-3x} \cdot \frac{x^2-9}{2x+8} = \frac{(x+4)^2}{x(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{2(x+4)},$$
- znaleźć wspólne czynniki liczników i mianowników, a następnie skrócić

$$\frac{(x+4)^2}{x(x-3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{2(x+4)} = \frac{x+4}{x} \cdot \frac{x+3}{2},$$
- wykonać mnożenie licznika przez licznik i mianownika przez mianownik

$$\frac{x+4}{x} \cdot \frac{x+3}{2} = \frac{(x+4)(x+3)}{2x} = \frac{x^2+7x+12}{2x}.$$

Przykład 7. Wykonaj mnożenie $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-8} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-8} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1} &= \frac{x^3-3x^2+3x-1-(x-1)^3}{x^3-8} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-2x+1-(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^3}{(x-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2} = \left| \begin{array}{l} x^3 \neq 8 \text{ i } (x-1)^2 \neq 0 \\ x \neq 2 \text{ i } x \neq 1 \\ D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}. \end{array} \right. \\ &= \frac{x-1}{x^2+2x+4} \cdot \frac{x+2}{1} = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x+4}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 11. Wykonaj mnożenie:

a) $\frac{x^3-8}{x^2+2x+4} \cdot \frac{5x}{x^2-4},$ b) $\frac{x+3}{x^2+x-2} \cdot \frac{x+2}{x-1},$ c) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2+6x+9}.$

Aby wykonać dzielenie wyrażeń wymiernych, np. $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4} : \frac{x^2-9}{2x-4}$, należy:

- określić dziedzinę D , zakładając, że każdy mianownik oraz licznik dzielnika jest różny od zera

$$\begin{aligned} x^2-4x+4 \neq 0 \text{ i } 2x-4 \neq 0, \text{ i } x^2-9 \neq 0 \\ (x-2)^2 \neq 0 \text{ i } 2x \neq 4, \text{ i } x+3 \neq 0, \text{ i } x-3 \neq 0 \\ x \neq 2 \text{ i } x \neq 2, \text{ i } x \neq -3, \text{ i } x \neq 3, \\ D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3\}, \end{aligned}$$

- iloraz wyrażeń zastąpić iloczynem dzielnej i odwrotności dzielnika

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4} : \frac{x^2-9}{2x-4} = \frac{x^2+x-6}{x^2-4x+4} \cdot \frac{2x-4}{x^2-9} =$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \text{ gdzie } b \cdot c \cdot d \neq 0$$

- rozłożyć liczniki i mianowniki na czynniki (jeżeli jest to możliwe)

$$= \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2} \cdot \frac{2(x-2)}{(x+3)(x-3)} =$$

$$\begin{aligned} x^2+x-6 &= 0 \\ \Delta &= 25 \\ x_1 &= -3, \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

- znaleźć wspólne czynniki liczników i mianowników, a następnie skrócić

$$= \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)^2} \cdot \frac{2(x-2)}{(x+3)(x-3)} =$$

- wykonać mnożenie

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{x-3} = \frac{2}{x-3}.$$

Uwaga Gdy dzielimy wyrażenia wymierne $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} : \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, to dziedziną D ilorazu jest zbiór tych liczb rzeczywistych x , dla których $W_2(x) \neq 0$, $P_1(x) \neq 0$ i $P_2(x) \neq 0$.

Przykład 8. Wykonaj dzielenie $\frac{16x}{x^2-4} : \frac{8x^2}{x^2-2x}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{16x}{x^2-4} : \frac{8x^2}{x^2-2x} &= \\ = \frac{16x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x}{8x^2} &= \\ = \frac{16x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x(x-2)}{8x^2} &= \frac{2}{x+2} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x^2-4 \neq 0 \text{ i } 8x^2 \neq 0, \text{ i } x^2-2x \neq 0 \\ x^2 \neq 4 \text{ i } x^2 \neq 0, \text{ i } x(x-2) \neq 0, \\ D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\} \end{array} \right.$$

Ćwiczenie 12. Wykonaj dzielenie:

a) $(x+3) : \frac{x^2+6x+9}{x+2}$, b) $\frac{a+1}{a-1} : (a+1)$, c) $\frac{2x^3-2}{3x+3} : \frac{x^2-2x+1}{9x^2-9}$.

Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych wykonujemy analogicznie do dodawania i odejmowania ułamków zwykłych.

Aby wykonywać **dodawanie (odejmowanie)** wyrażeń wymiernych, np. $\frac{x+10}{x^2-25} + \frac{1}{2x+10}$, należy:

- określić dziedzinę D , zakładając, że każdy mianownik jest różny od zera
- rozłożyć mianowniki na czynniki
- ustalić wspólny mianownik i rozszerzyć każde wyrażenie do wspólnego mianownika (**wspólny mianownik to iloczyn wszystkich czynników pierwszego mianownika i tych czynników drugiego, których nie ma w pierwszym**)
- dodać (odjąć) liczniki i wykonać działania w liczniku i mianowniku oraz skrócić, jeżeli jest to możliwe

$$x^2 - 25 \neq 0 \quad \text{i} \quad 2x + 10 \neq 0, \\ x - 5 \neq 0 \quad \text{i} \quad x + 5 \neq 0, \quad \text{i} \quad x \neq -5, \quad \text{więc} \\ D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\},$$

$$\begin{aligned} \frac{x+10}{(x-5)(x+5)} + \frac{1}{2(x+5)} &= \\ &= \frac{(x+10) \cdot 2}{2 \cdot (x-5)(x+5)} + \frac{1 \cdot (x-5)}{2 \cdot (x-5)(x+5)} = \\ &= \frac{(x+10) \cdot 2 + 1 \cdot (x-5)}{2(x-5)(x+5)} = \frac{2x+20+x-5}{2(x-5)(x+5)} = \\ &= \frac{3x+15}{2(x-5)(x+5)} = \frac{3(x+5)}{2(x-5)(x+5)} = \frac{3}{2x-10}. \end{aligned}$$

Przykład 9. Wykonaj działania: a) $\frac{7}{x^2+3x} - \frac{x}{x+3}$, b) $\frac{1}{x} + \frac{3x}{x+1} - 2$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{7}{x^2+3x} - \frac{x}{x+3} &= \frac{7}{x(x+3)} - \frac{x}{x+3} = \\ &= \frac{7}{x(x+3)} - \frac{x \cdot x}{x(x+3)} = \frac{7-x^2}{x^2+3x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &| \quad x(x+3) \neq 0 \quad \text{i} \quad x+3 \neq 0 \\ &| \quad x \neq 0 \quad \text{i} \quad x \neq -3, \\ &| \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{1}{x} + \frac{3x}{x+1} - 2 &= \frac{1 \cdot (x+1)}{x(x+1)} + \frac{3x \cdot x}{x(x+1)} - \frac{2 \cdot x(x+1)}{x(x+1)} = \\ &= \frac{x+1+3x^2-2x^2-2x}{x(x+1)} = \frac{x^2-x+1}{x^2+x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &| \quad x \neq 0 \quad \text{i} \quad x+1 \neq 0 \\ &| \quad x \neq 0 \quad \text{i} \quad x \neq -1, \\ &| \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 13. Wykonaj działania:

$$\text{a) } \frac{2}{x-4} - \frac{x+5}{4-x}, \quad \text{b) } \frac{5}{x^2-9} - \frac{x}{x+3} + 1, \quad \text{c) } \frac{7}{2x-4} - \frac{3}{x+2} + \frac{12}{x^2-4} + x.$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $\frac{5x}{x+2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, **b)** $\frac{x+3}{(x-1)^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, **c)** $\frac{x+2}{x+4}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 0\}$. **12. a)** $\frac{x+2}{x+3}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$, **b)** $\frac{1}{a-1}$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, **c)** $6(x^2+x+1)$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. **13. a)** $\frac{x+7}{x-4}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$, **b)** $\frac{3x-4}{x^2-9}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, **c)** $\frac{2x^3-7x+50}{2(x-2)(x+2)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Zadania utrwalające

13.13. Wykonaj mnożenie:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (x+2) \cdot \frac{1}{x^2-4}, & \text{b) } \frac{3x^2+3x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{6x}, & \text{c) } \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \cdot \frac{x-1}{x+1}, \\ \text{d) } \frac{x^2+5x+6}{x^2-7x+12} \cdot \frac{x-4}{x+3}, & \text{e) } \frac{27-x^3}{9+3x+x^2} \cdot \frac{5x}{3-x}, & \text{f) } \frac{4x^3-8x^2}{16x^2-64} \cdot \frac{4x+8}{x^2}, \\ \text{g) } \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1} \cdot \frac{4}{x+3}, & & \text{h) } \frac{2}{x^2+10x+25} \cdot \frac{x^3+5x^2-2x-10}{x^2-2}. \end{array}$$

13.14. Wykonaj dzielenie:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 3x^2 : \frac{x^2(x+1)}{x-1}, & \text{b) } \frac{x-1}{x+1} : \frac{2x-2}{x^2+x}, \\ \text{c) } \frac{2x^2-18}{x} : (x+3), & \text{d) } \frac{9x^2-4}{x^2-2x} : \frac{9x^2-12x+4}{x-2}, \\ \text{e) } \frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12} : \frac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9}, & \text{f) } \frac{2x^3-2}{x^2-5x-14} : \frac{x^2+x+1}{x^2-14x+49}, \\ \text{g) } \frac{x^3+8x^2-x-8}{x^2+1} : \frac{x^2-1}{x^3+x}, & \text{h) } \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} : \frac{x^2+1}{x+1}. \end{array}$$

13.15. Wykonaj działania:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 1 - \frac{x-1}{x+1}, & \text{b) } \frac{3}{x^2-1} - 1, & \text{c) } \frac{4}{x-1} - \frac{3}{1-x}, \\ \text{d) } \frac{x}{x-4} - \frac{x+1}{4-x} + \frac{2}{x^2-16}, & & \text{e) } \frac{x-1}{3x-6} - \frac{x+1}{3x+6}. \end{array}$$

13.16. Wykonaj działania:

a) $\frac{x-1}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x},$

b) $\frac{x+2}{x-1} - \frac{4}{x^2-2x+1} - \frac{x+1}{x},$

c) $3 - \frac{x}{x-2} + \frac{3}{x+2},$

d) $\frac{2x-1}{x^3+3x^2-4x-12} - \frac{2}{x^2+4x+4},$

e) $\frac{2x+1}{x^2-3x} - \frac{x-2}{x^2+3x} - \frac{x+1}{x^2-9},$

f) $\frac{y}{y-2} + \frac{8y^2-4y}{8-y^3} + \frac{4}{y^2+2y+4}.$

13.17. Wykonaj działania:

a) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

b) $\left(\frac{1}{x+1} + x\right) \cdot \left(\frac{x}{x-1} - 1\right),$

c) $\left(\frac{x}{x^3-1} - \frac{1}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{x^2+x+1} + \frac{1-x}{x^2}\right).$

Równania wymierne

Definicja

Równanie $\frac{W(x)}{P(x)} = 0$, gdzie $P(x) \neq 0$ oraz W i P są wielomianami, nazywamy równaniem wymiernym.

Rozwiązując równania wymierne, korzystamy z własności ilorazu.

Przypomnijmy

Iloraz (ułamek) jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy jego dzielna (licznik) jest równa zero, a dzielnik (mianownik) jest różny od zera.

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge^*) b \neq 0$$

Przykład 10. Rozwiąż równanie: a) $\frac{1}{x} = 0$, b) $\frac{x^2-7x}{x} = 0$.

Rozwiązanie

a) $\frac{1}{x} = 0$, gdzie $x \neq 0$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Równanie nie ma rozwiązania, bo licznik nigdy nie przyjmuje wartości 0.

b) $\frac{x^2-7x}{x} = 0$, gdy $x^2-7x=0$ i $x \neq 0$

$$\frac{a}{b} = 0, \text{ gdy } a = 0 \text{ i } b \neq 0$$

$$x(x-7) = 0$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 7.$$

Tylko liczba 7 jest rozwiązaniem równania, bo $0 \notin D$.

*) Zapis $\wedge$ - czytamy „i”.

Ćwiczenie 14. Rozwiąż równanie: a) $\frac{1}{x+2} = 0$, b) $\frac{x-10}{x-5} = 0$, c) $\frac{(x^2-1)(x+2)}{x-2} = 0$.

Rozwiązując równania wymierne, możemy korzystać bezpośrednio z własności ilorazu.

Jeżeli $b \neq 0$, to $\frac{a}{b} = c$, gdy $a = b \cdot c$.

Przykład 11. Rozwiąż równanie $\frac{x+1}{x+3} = 2$.

Rozwiązanie

I sposób

1° Zapisujemy założenie:

$$x+3 \neq 0, \text{ więc } x \neq -3,$$

$$\text{czyli } D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

2° Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{x+1}{x+3} = 2 \quad / \cdot (x+3)$$

$$x+1 = 2(x+3) \\ x = -5.$$

3° Sprawdzamy, czy liczba -5 spełnia założenie.

$-5 \in D$, więc liczba -5 jest pierwiastkiem równania.

Odp.: $x_0 = -5$.

II sposób

1° Rozwiązujemy równanie, korzystając z proporcji:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{1}$$

$$x+1 = 2(x+3) \\ x = -5.$$

2° Sprawdzamy, czy liczba -5 spełnia równanie:

$$\frac{-5+1}{-5+3} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Liczba -5 jest pierwiastkiem równania.

Ćwiczenie 15. Rozwiąż równanie: a) $\frac{x+2}{x} = 3$, b) $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$, c) $\frac{x+4}{x-2} = -2$.

Przykład 12. Rozwiąż równanie: a) $\frac{x+1}{x} = 1$, b) $\frac{2x-4}{x-2} = 2$.

Rozwiązanie

a) $\frac{x+1}{x} = 1$, gdzie $x \neq 0$, czyli $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$x+1 = x$$

$$1 = 0 \quad - \text{równość fałszywa.}$$

Równanie nie ma rozwiązania.

$$x+1-1 \cdot x$$

$$\text{b)} \quad \frac{2x-4}{x-2} = 2, \text{ gdzie } x \neq 2, \text{ czyli } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

$$2 = \frac{2}{1}$$

$$2x - 4 = 2(x - 2)$$

$$2x - 4 = 2x - 4 \quad - \text{równość prawdziwa dla każdej liczby } x.$$

Uwzględniając założenie, stwierdzamy, że rozwiązaniem równania jest każda liczba różna od 2.

Odp.: a) Równanie nie ma rozwiązania, b) $x \neq 2$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Jeżeli równanie wymierne podane jest w postaci równości dwóch wyrażeń wymiernych, to rozwiązując je, możemy skorzystać z własności proporcji.

W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

Jeżeli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ($b \neq 0$ i $d \neq 0$), to $a \cdot d = b \cdot c$.

Przykład 13. Rozwiąż równanie: a) $\frac{x+1}{x} = \frac{4}{5}$, b) $\frac{x+2}{x} = \frac{x-1}{x+3}$.

Rozwiązanie

$$\text{a)} \quad \frac{x+1}{x} = \frac{4}{5}, \text{ gdzie } x \neq 0,$$

$$\text{czyli } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$5(x+1) = 4x$$

$$x = -5 \quad -5 \neq 0.$$

Odp.: a) $x_0 = -5$, b) $x_0 = -1$.

$$\text{b)} \quad \frac{x+2}{x} = \frac{x-1}{x+3}, \text{ gdzie } x \neq 0 \text{ i } x \neq -3,$$

$$\text{czyli } D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$$

$$(x+2)(x+3) = x(x-1)$$

$$x = -1 \quad -1 \neq 0 \text{ oraz } -1 \neq -3.$$

Ćwiczenie 16. Rozwiąż równanie: a) $\frac{x-3}{x+2} = \frac{2}{3}$, b) $\frac{x-4}{x+1} = \frac{x+2}{x-1}$.

Jeżeli w równaniu występuje wyrażenie wymierne, to rozwiązując je, należy:

- podać dziedzinę D tego równania,
- rozłożyć licznik i mianownik wyrażenia wymiernego na czynniki (o ile to możliwe) i skrócić je,
- rozwiązać otrzymane równanie i sprawdzić, czy jego rozwiązania należą do dziedziny D .

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 14. Rozwiąż równanie $\frac{x^2-1}{x+1} = 2(x^2-x)$.

Rozwiązanie

$$\frac{x^2-1}{x+1} = 2(x^2-x), \text{ gdzie } x \neq -1, \text{ czyli } D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = 2(x^2-x)$$

$$x-1 = 2x^2-2x$$

$$2x^2-3x+1=0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ lub } x = 1$$

$$\frac{1}{2} \in D \text{ i } 1 \in D.$$

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

Skracamy przy założeniu, że $x \neq -1$.

$$\text{Odp.: } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1.$$

Ćwiczenie 17. Rozwiąż równanie: a) $\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x}{2x^2-4x}$, b) $\frac{x^2-16}{x+4} + \frac{6x}{x-2} = 0$.

Rozwiązując niektóre równania wymierne, korzystamy z równości dwóch ułamków o równych mianownikach.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b}, \text{ gdy } a = c \text{ i } b \neq 0$$

Przykład 15. Rozwiąż równanie $\frac{14}{x^2-9} + \frac{4-x}{3+x} = \frac{7}{x+3} - \frac{1}{3-x}$.

Rozwiązanie

$$\frac{14}{x^2-9} + \frac{4-x}{3+x} = \frac{7}{x+3} - \frac{1}{3-x}, \quad D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$$

$$\frac{14 + (4-x)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{7(x-3) + 1 \cdot (x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

Wspólny mianownik $(x-3)(x+3)$

$$14 + (4-x)(x-3) = 7(x-3) + (x+3) \text{ i } x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$$

$$-x^2 - x + 20 = 0$$

$$x = 4 \text{ lub } x = -5$$

$$4 \in D \text{ i } -5 \in D.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b}, \text{ gdy } a = c \text{ i } b \neq 0$$

$$4 \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}, -5 \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$$

$$\text{Odp.: } x_1 = -5, x_2 = 4.$$

Ćwiczenie 18. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{4}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{20}{x^2-4}$, b) $\frac{5x^2-32x+3}{x^2-4x+3} = 2 - \frac{9-3x}{x-1}$.

Przykład 16. Rozwiąż równanie $1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+1}{2x}$.

Rozwiązanie

I sposób

Przekształcamy równanie

do postaci $\frac{W(x)}{G(x)} = 0$.

$$1 - \frac{1}{x+2} - \frac{x+1}{2x} = 0$$

$$\frac{2x(x+2) - 2x - (x+1)(x+2)}{2x(x+2)} = 0$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{2x(x+2)} = 0.$$

Zatem $\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ 2x(x+2) \neq 0 \end{cases}$, skąd

$$\begin{cases} x = -1 \text{ lub } x = 2 \\ x \neq 0 \text{ i } x \neq -2 \end{cases},$$

więc $x = -1$ lub $x = 2$.

Odp.: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

II sposób

Określamy dziedzinę D równania

$x+2 \neq 0$ i $2x \neq 0$, skąd

$x \neq -2$ i $x \neq 0$, czyli $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

Mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik i porządkujemy:

$$1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+1}{2x} \quad / \cdot 2x(x+2)$$

$$2x(x+2) - 2x = (x+1)(x+2)$$

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Sprawdzamy, czy rozwiązania równania należą do dziedziny D :

$-1 \in D$, $2 \in D$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

14. a) Brak rozwiązania, b) $x_0 = 10$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

15. a) $x_0 = 1$, b) $x_0 = -1$, c) $x_0 = 0$.

16. a) $x_0 = 13$, b) $x_0 = \frac{1}{4}$.

17. a) $x_0 = 6$, b) brak rozwiązania.

18. a) Nie ma rozwiązania, b) $x_0 = -5$.

Zadania utrwalające

13.18. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{5}{x} = 0$, b) $\frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = 0$, c) $\frac{4x^2+2x}{x+2} = 0$, d) $\frac{x^2-x-6}{x+2} = 0$.

13.19. Rozwiąż równanie:

$$\text{a)} \frac{2x+1}{x-3} = 4, \quad \text{b)} \frac{x+4}{x-1} = 4, \quad \text{c)} \frac{x}{x+1} = 8, \quad \text{d)} \frac{7-x}{x+2} = \frac{1}{3}.$$

13.20. Rozwiąż równanie:

$$\text{a)} \frac{2x}{3+2x} = 1, \quad \text{b)} \frac{3-6x}{1-2x} = 3, \quad \text{c)} \frac{3-x}{x-3} = -1, \quad \text{d)} \frac{1-0,4x}{2x-5} = -\frac{1}{5}.$$

13.21. Rozwiąż równanie:

$$\text{a)} \frac{1}{x-2} = \frac{2}{x+3}, \quad \text{b)} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{-x}{2}, \quad \text{c)} \frac{x+3}{x+2} = \frac{2x-1}{x}, \quad \text{d)} \frac{x+1}{2x-5} = \frac{x+1}{3x-1}.$$

13.22. Rozwiąż równanie:

$$\begin{aligned} \text{a)} \frac{4}{x} &= \frac{x}{4}, & \text{b)} \frac{1}{x} &= x, & \text{c)} \frac{16}{x} &= \frac{x}{4}, \\ \text{d)} \frac{4}{x} - \frac{6}{x} &= \frac{x}{4} - \frac{3x}{4}, & \text{e)} \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-1} &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}, & \text{f)} \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+2} &= \frac{x}{3} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

13.23. Rozwiąż równanie:

$$\text{a)} \frac{1}{2(x-1)} = \frac{2x-1}{x-1} - 3, \quad \text{b)} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{20} + \frac{1}{x+2}, \quad \text{c)} \frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{x^2-1} - 5.$$

13.24. Rozwiąż równanie:

$$\begin{aligned} \text{a)} \frac{x+7}{x-4} + \frac{x-7}{x-2} &= \frac{22}{x^2-6x+8}, & \text{b)} \frac{10x+1}{2(x+1)} - \frac{8x^2+6x-8}{4(x+1)^2} &= 3, \\ \text{c)} \frac{8}{2x+1} - \frac{10x-4}{(2x+1)^2} &= \frac{12x^2+20x+27}{(2x+1)^3}, & \text{d)} \frac{3}{x^3+8} - \frac{1}{x^2-4} &= \frac{2}{x^2-2x+4}. \end{aligned}$$

13.25. Uzasadnij, że pierwiastkami równania $\frac{2}{x^2+x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{6x}$ są dwie kolejne liczby naturalne.

13.26. Wprowadź zmienną pomocniczą i rozwiąż równanie:

$$\begin{aligned} \text{a)} x^2 - 4x - \frac{15}{x^2 - 4x} &= 2, & \text{b)} \frac{x^2 - 6x + 3}{4} - \frac{5}{x^2 - 6x + 3} &= 2, \\ \text{c)} \frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} &= 3, & \text{d)} \frac{x^2 + x - 3}{2} - \frac{3}{2x^2 + 2x - 6} &= 1. \end{aligned}$$

13.27. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{1}{|x|} = 2,$

b) $\left| \frac{1}{x-2} \right| = 2,$

c) $\left| \frac{x-2}{x+3} \right| = 1,$

d) $\frac{3}{|x+4|} = 6.$

Nierówności wymierne

Definicja

Każdą z nierówności: $\frac{W(x)}{P(x)} > 0,$ $\frac{W(x)}{P(x)} < 0,$ $\frac{W(x)}{P(x)} \geq 0,$ $\frac{W(x)}{P(x)} \leq 0,$

gdzie W i P są wielomianami, przy czym $P(x) \neq 0$, nazywamy nierównością wymierną.

Przykład 17. Rozwiąż nierówności: **1** $(x+4)(x-1) \leq 0,$ **2** $\frac{x+4}{x-1} \leq 0.$

Porównaj zbiory rozwiązań nierówności **1** i **2**.

Rozwiązanie

Rozwiązując nierówności **1** i **2**, skorzystamy odpowiednio z własności iloczynu i ilorazu.

1 $a \cdot b \leq 0,$ gdy $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}.$

Zatem

$$\begin{cases} x+4 \leq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

brak rozwiązań $x \in \langle -4; 1 \rangle.$

Odp.: $x \in \langle -4; 1 \rangle.$

2 $\frac{a}{b} \leq 0,$ gdy $\begin{cases} a \leq 0 \\ b > 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a \geq 0 \\ b < 0 \end{cases}.$

Zatem

$$\begin{cases} x+4 \leq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -4 \\ x > 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x \geq -4 \\ x < 1 \end{cases}$$

brak rozwiązań $x \in \langle -4; 1 \rangle.$

Odp.: $x \in \langle -4; 1 \rangle.$

Zbiory rozwiązań nierówności (przedziały) $\langle -4; 1 \rangle$ i $\langle -4; 1 \rangle$ nie są równe, bo $1 \in \langle -4; 1 \rangle$ i $1 \notin \langle -4; 1 \rangle.$

Ćwiczenie 19. Rozwiąż nierówności **1** i **2**, a następnie porównaj zbiory ich rozwiązań, gdy:

a) **1** $(x+2)(x-1) \geq 0,$ **2** $\frac{x+2}{x-1} \geq 0,$ b) **1** $(3-x)(x+1) > 0,$ **2** $\frac{3-x}{x+1} > 0.$

Uwaga

Rozwiązując nierówności wymierne, korzystamy z następujących twierdzeń, które wynikają bezpośrednio z własności ilorazu i iloczynu:

- $\frac{W(x)}{P(x)} > 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) > 0,$ $\frac{W(x)}{P(x)} < 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) < 0,$
- $\frac{W(x)}{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) \geq 0 \wedge P(x) \neq 0,$
- $\frac{W(x)}{P(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) \leq 0 \wedge P(x) \neq 0.$

Przykład 18. Rozwiąż nierówność $\frac{x+3}{x-2} \leq 2$.

Rozwiązanie

$$\frac{x+3}{x-2} \leq 2, \text{ więc } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

$$x-2 \neq 0$$

I sposób

Sprowadzamy nierówność do postaci

$$\begin{aligned} \frac{W(x)}{P(x)} &\leq 0, \\ \frac{x+3}{x-2} &\leq \frac{2(x-2)}{x-2} \\ \frac{x+3-2(x-2)}{x-2} &\leq 0 \\ \frac{7-x}{x-2} &\leq 0. \end{aligned}$$

Wspólny
mianownik
 $x-2$

Korzystamy z twierdzenia

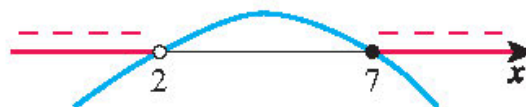
$$\begin{aligned} \frac{W(x)}{P(x)} \leq 0 &\Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) \leq 0 \wedge P(x) \neq 0, \\ \underbrace{(7-x)(x-2)}_{V(x)} &\leq 0 \wedge x \neq 2. \end{aligned}$$

II sposób

Obie strony nierówności mnożymy przez kwadrat mianownika, bo gdy $x \in D$, to $(x-2)^2 > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x-2} \leq 2 &\quad / \cdot (x-2)^2 \\ (x+3)(x-2) &\leq 2(x-2)^2 \\ (x+3)(x-2) - 2(x-2)^2 &\leq 0 \\ (x-2)[x+3-2(x-2)] &\leq 0 \\ \underbrace{(x-2)(7-x)}_{V(x)} &\leq 0. \end{aligned}$$

Sporzadzamy linię znaku dla wielomianu $V(x) = (x-2)(7-x)$, gdy $x \neq 2$.



Odp.: $x \in (-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$.

Ćwiczenie 20. Rozwiąż nierówność: a) $\frac{x-1}{x+3} \geq -1$, b) $\frac{2x-3}{x-1} < \frac{x^2-1}{x-1}$.

Przykład 19. Rozwiąż nierówność $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x-1}$.

Rozwiązanie

Nierówność $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x-1}$ sprowadzamy do wspólnego mianownika

i zapisujemy w postaci $\frac{W(x)}{P(x)} \leq 0$.

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \leq 0, \text{ więc } D = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$$

$$x-3 \neq 0 \text{ i } x-2 \neq 0, \text{ i } x-1 \neq 0$$

$$\frac{(x-2)(x-1) + (x-3)(x-1) - (x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)(x-1)} \leq 0$$

Wspólny mianownik
 $(x-3)(x-2)(x-1)$

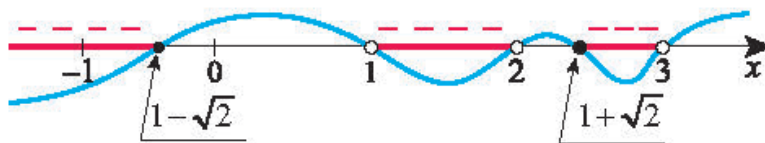
$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-3)(x-2)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{W(x)}{P(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W(x) \cdot P(x) \leq 0 \wedge P(x) \neq 0.$$

Korzystamy z twierdzenia

$$(x^2 - 2x - 1)(x-3)(x-2)(x-1) \leq 0 \text{ i } x \in D.$$

Rysujemy linię znaku wielomianu $W(x) = (x^2 - 2x - 1)(x-3)(x-2)(x-1)$.



$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &= 0, \\ \Delta &= 8, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2} \\ x_1 &= 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Odp.: } x \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1; 2) \cup (1 + \sqrt{2}; 3).$$

Ćwiczenie 21. Rozwiąż nierówność:

$$\text{a) } \frac{4-x}{x^2-2x-15} < 0, \quad \text{b) } \frac{(x+1)^2(x^2-4)}{x-3} \geq 0, \quad \text{c) } \frac{x-4}{x-3} \leq \frac{x-2}{x-1}.$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

19. a) 1 $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, **2** $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, **b) 1** $x \in (-1; 3)$, **2** $x \in (-1; 3)$.

20. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, **b)** $x \in (1; +\infty)$.

21. a) $x \in (-3; 4) \cup (5; +\infty)$, **b)** $x \in (-2; 2) \cup (3; +\infty)$, **c)** $x \in (1; 3)$.

Zadania utrwalające

13.28. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{4}{1-x} > 0$,

b) $x < \frac{1}{x}$,

c) $\frac{1}{x} \geq 2x$,

d) $x+1 \geq \frac{1}{x+1}$.

13.29. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{4-x}{x+2} < 0$,

b) $\frac{4x-3}{x-1} \leq 0$,

c) $\frac{x}{x+2} \geq 0$,

d) $\frac{5-x}{5+x} \leq 0$,

e) $\frac{x(x+2)(x-4)}{x+3} \geq 0$,

f) $\frac{(x-2)^2(x+5)}{(x+1)^3} \leq 0$.

13.30. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{2x}{x-1} < 1$,

b) $\frac{1}{1-x} \geq 1$,

c) $\frac{4x-1}{x} \geq 3$,

d) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} \leq 1$.

13.31. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{2x}{2x-1} > \frac{2}{2x+1}$,

b) $\frac{x}{x+3} \geq \frac{x-3}{x}$,

c) $\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x}$,

d) $\frac{x-2}{x-3} \leq \frac{x-3}{x-2}$,

e) $x+2 > \frac{4}{x+2}$,

f) $\frac{x+3}{x+1} < \frac{x+13}{x+11}$.

13.32. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} \geq 0$,

b) $\frac{x^2-2x}{x^2-7x+10} < 0$,

c) $\frac{x^2-4}{x^2-4x} \leq 0$,

d) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-4} < 0$,

e) $\frac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15} > 1$,

f) $\frac{x^2-8x+6}{x^2+2} < 5$.

13.33. Rozwiąż nierówność:

a) $x+5 - \frac{x}{x+4} < \frac{5}{x+4}$,

b) $\frac{x+2}{x+1} - \frac{3}{x+1} > 2$,

c) $\frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}$,

d) $\frac{2}{x+5} - \frac{x}{x+5} - 2 > 0$.

13.34. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} > 3$,

b) $\frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}$,

c) $\frac{x-2}{x-3} - \frac{2}{x-1} < \frac{8}{x^2-4x+3}$,

d) $\frac{x+3}{x+1} + \frac{8}{x-5} < \frac{x-13}{x^2-4x-5}$.

Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania równań wymiernych

Za pomocą równań i nierówności wymiernych możemy rozwiązywać wiele problemów matematycznych, a także praktycznych. Pokażemy to na przykładach.

Rozwiązując niektóre równania wymierne lub ich układy, wprowadzamy zmienną pomocniczą.

Przykład 20. Rozwiąż równanie $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{x-1} - 3 = 0$.

Rozwiązanie

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{x-1}\right) - 3 = 0, \text{ gdzie } x \neq 1, \text{ czyli } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą t , gdzie $t = \frac{x}{x-1}$, i otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t .

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 3$$

$$\frac{x}{x-1} = -1 \quad \text{lub} \quad \frac{x}{x-1} = 3, \text{ skąd}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \in D \quad \frac{3}{2} \in D.$$

W równaniu $\frac{x}{x-1} = t$
podstawiamy $t = -1$ i $t = 3$.

$$\frac{1}{2} \neq 1 \quad \text{i} \quad \frac{3}{2} \neq 1$$

$$\text{Odp.: } x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}.$$

Ćwiczenie 22. Rozwiąż równanie $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0$.

Ćwiczenie 23. Rozwiąż układ równań, wprowadzając pomocnicze zmienne:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9 \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{10}{x-5} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-5} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{cases}.$$

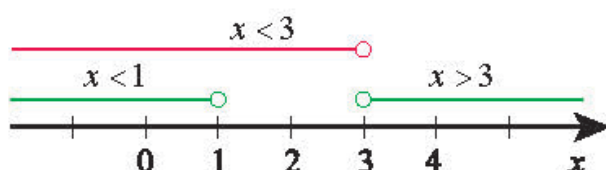
Przykład 21. Rozwiąż nierówność podwójną $-1 < \frac{x+3}{3-x} < 2$.

Rozwiązanie

Nierówność $-1 < \frac{x+3}{3-x} < 2$, gdzie $x \neq 3$, jest równoważna układowi nierówności

$$\begin{cases} \frac{x+3}{3-x} > -1 \\ \frac{x+3}{3-x} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{3-x} + 1 > 0 \\ \frac{x+3}{3-x} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3+3-x}{3-x} > 0 \\ \frac{x+3-6+2x}{3-x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{3-x} > 0 \\ \frac{3(x-1)}{3-x} < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Zatem } \begin{cases} 6(3-x) > 0 \\ 3(x-1)(3-x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1).$$



Odp.: $x \in (-\infty; 1)$.

Ćwiczenie 24. Rozwiąż nierówność podwójną $-2 \leq \frac{x-2}{x-1} \leq 4$.

Przykład 22. Ewa co rano biega wytyczoną trasą o długości 880 m. Pierwszą połowę tej trasy pokonuje w czasie 2,5 minuty. W jakim czasie przebiega drugą połowę trasy, jeżeli osiąga średnią prędkość co najmniej $160 \frac{\text{m}}{\text{min}}$?

Rozwiązanie Przyjmujemy oznaczenia:

- x – czas, w którym Ewa przebiega drugą połowę trasy, więc $x > 0$,
- $2,5 + x$ – czas, w którym przebiega całą trasę, więc $2,5 + x > 0$,
- $\frac{880}{2,5 + x}$ – średnia prędkość Ewy na całej trasie biegu.

Z warunków zadania: $\frac{880}{2,5 + x} \geq 160$.

Gdy $x > 0$, to $2,5 + x > 0$, więc

$$880 \geq 160(2,5 + x), \text{ skąd } x \leq 3.$$

Odp.: Drugą połowę trasy Ewa przebiega w ciągu co najwyżej 3 minut.

Ćwiczenie 25. Suma dodatniej liczby i jej odwrotności jest równa co najmniej $2\frac{1}{12}$.

Czy jest to liczba należąca do sumy przedziałów $\left(0; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$?

Przykład 23. Dwaj tynkarze pracując razem, otynkują ścianę w ciągu 8 godzin. Jeżeli każdy z nich wykonywałby tę pracę sam, to pierwszy tynkarz zakończyłby ją 12 godzin wcześniej niż drugi. W ciągu ilu godzin każdy z tynkarzy wykona samodzielnie tę pracę?

Rozwiązanie

- x – czas samodzielnej pracy pierwszego tynkarza,
 $x + 12$ – czas samodzielnej pracy drugiego tynkarza,
 $\frac{1}{x}$ – wydajność pracy pierwszego tynkarza,
 $\frac{1}{x + 12}$ – wydajność pracy drugiego tynkarza,
 $\frac{1}{8}$ – wydajność obu tynkarzy pracujących razem.

Wydajność pracy to część produkcji przypadająca na jednego zatrudnionego w ustalonej jednostce czasu.

Z warunków zadania otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}, \text{ gdzie } x > 0, \text{ czyli } D = (0; +\infty).$$

$$\frac{2x+12}{x(x+12)} = \frac{1}{8}$$

$$x^2 - 4x - 96 = 0$$

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 12,$$

$$-8 \notin D, \quad 12 \in D.$$

Odp.: Pierwszy tynkarz pracowałby samodzielnie 12 godzin, a drugi 24 godziny.

Ćwiczenie 26. Jeden tynkarz otynkował pół ściany w ciągu 6 godzin, resztę otynkował drugi tynkarz w ciągu 9 godzin. Ile czasu tynkowaliby tę ścianę razem?

Ćwiczenie 27. Odległość między dwoma miastami wzdłuż rzeki jest równa 80 km. Statek przepływa tę drogę w obie strony w czasie 8 godzin i 20 minut. Oblicz prędkość własną statku, jeżeli prędkość prądu rzeki jest równa $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

22. $x_1 = -1 - \sqrt{3}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{3}, \quad x_3 = 2.$ 23. a) $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$, c) $\begin{cases} x=10 \\ y=-3 \end{cases}$. 24. $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

25. Tak. 26. 7 godzin i 12 minut. Wskazówka. $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{1}{t}$, gdzie t to czas tynkowania ściany przez obu tynkarzy.

27. $v = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wskazówka. $\frac{80}{v-4} + \frac{80}{v+4} = 8\frac{1}{3}$, gdzie v to prędkość własna statku.

Zadania utrwalające

13.35. Wprowadź pomocniczą niewiadomą i rozwiąż równanie:

a) $\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2 - 6 \cdot \frac{x+2}{x-4} + 9 = 0,$

b) $\left(\frac{x}{x+3}\right)^2 + \frac{x}{x+3} - 2 = 0,$

c) $x^2 - 4x - \frac{15}{x^2 - 4x} = 2,$

d) $\frac{x^2 - 6x + 3}{4} - \frac{5}{x^2 - 6x + 3} = 2,$

e) $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^3 - 3x} = 3,$

f) $3 \cdot \frac{x-1}{x+1} - 68 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + 11 = 0.$

13.36. Rozwiąż układ równań:

a)
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 30 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 31 \end{cases},$$

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{5}{8} \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8} \end{cases},$$

c)
$$\begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases},$$

d)
$$\begin{cases} \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y^2 - 1} = 3 \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2 - 1} = 9 \end{cases}.$$

13.37. Rozwiąż układ nierówności:

a)
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-2} < 0 \end{cases},$$

b)
$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} < 2 \\ \frac{2x-1}{x-1} \geq -2 \end{cases},$$

c)
$$\begin{cases} \frac{7-x}{2x+6} \geq 1 \\ \frac{-3x-1}{x+2} \leq 2 \end{cases},$$

d)
$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{x} \leq 2 \\ \frac{16-5x^2}{3-x} > -4 \end{cases}.$$

13.38. Rozwiąż nierówność:

a) $-1 \leq \frac{x+2}{x-2} \leq 1,$

b) $0 < \frac{x+4}{x+8} < 5,$

c) $-1 \leq \frac{x-1}{x-2} < 0.$

13.39. Rozwiąż nierówność:

a) $\left| \frac{3x+7}{x-5} \right| < 1,$

b) $\left| \frac{2x-3}{x+1} \right| > 2,$

c) $\left| \frac{3x}{x^2-4} \right| \leq 1.$

13.40. Wyznacz dziedzinę D_f funkcji f , gdy:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}},$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}} - 1,$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2x-1}} + \sqrt{\frac{4-x}{x}}.$

13.41. Wiedząc, że $f(x) = \frac{1}{2x+3} + 2$, rozwiąż nierówność $f(-x) > f(x) - 2$.

13.42. Uzasadnij, że jeśli $f(x) > f(2-x)$ i $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, to $x \in (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

D

13.43. Pod semaforem pociąg miał przymusowy postój trwający 16 minut. Powstałe opóźnienie nadrobił na trasie 80 km, jadąc szybciej niż normalnie o $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Z jaką średnią prędkością zazwyczaj porusza się pociąg na tej trasie?

13.44. Samolot, którego prędkość własna jest równa $900 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, leci 5500 km z wiatrem i 4500 km pod wiatr wiejący ze stałą prędkością. Czasy obu przelotów są jednakowe. Oblicz prędkość wiatru.

13.45. Wynajęcie sali na połowinki organizowane przez uczniów drugich klas pewnego liceum kosztuje 1500 zł. Ponieważ 50 uczniów z klas drugich zrezygnowało z udziału w zabawie, to każdy z pozostałych uczniów powinien zapłacić o 1 zł więcej niż planowano. Ilu uczniów jest w klasach drugich?

13.46. Dwaj tynkarze pracując razem, otynkują ścianę w ciągu 3 godzin. Gdyby pierwszy z nich sam tynkował tę ścianę przez 1 godzinę, a po nim drugi przez 6 godzin, to otynkowaliby $\frac{3}{4}$ powierzchni ściany. W ciągu ilu godzin każdy z nich może otynkować tę ścianę samodzielnie?

13.47. Uzasadnij, że jeśli suma liczby i jej odwrotności jest mniejsza od $\frac{9}{20}$, to liczba ta jest ujemna.

D



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Równanie $\frac{x-3}{x-4} = \frac{x-1}{2}$ ma sens liczbowy, gdy:

- A. $x \neq 1$, B. $x \neq 2$, C. $x \neq 3$, D. $x \neq 4$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Równanie, które nie ma rozwiązania, to równanie:

- A. $\frac{x-3}{x+3} = 0$, B. $\frac{7x-7}{x-1} = 0$, C. $\frac{1}{x} = x$, D. $\frac{2}{x} = \frac{x}{2}$.

3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.

Pierwiastkiem równania $\frac{3}{x+2} = 4$ jest liczba $-1\frac{1}{4}$.	P	F
Równanie $\frac{3x-7}{x-1} = \frac{-3x-1}{x-1}$ ma jeden pierwiastek.	P	F
Pierwiastkiem równania $\frac{2}{x+2} = \frac{3}{3-x}$ jest liczba 0.	P	F
Jeżeli $\frac{x+2x+3x+4x}{x \cdot x} = 9$, to $x = 1\frac{1}{9}$.	P	F

4. Czy liczba 5 jest rozwiązaniem równania $\frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)(x-5)} = 0$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	ponieważ	A	$(x-5)(x+1) = 0$, gdy $x-5=0$ lub $x+1=0$ $x=5$ lub $x=-1$.
N		B	$(x-2)(x-5) \neq 0$, gdy $x-2 \neq 0$ i $x-5 \neq 0$ $x \neq 2$ i $x \neq 5$.

5. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba -5 należy do zbioru rozwiązań nierówności:

A. $\frac{(x+3)(x-5)}{(x+2)^2} > 0$, B. $\frac{x^3+125}{x^2-25} \geq 0$, C. $\frac{x+5}{(5-x)^2} < 0$, D. $\frac{x^2-25}{x^4-625} \geq 0$.

6. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{1}{2}$ nie jest rozwiązaniem równania $\frac{5}{x} - a^2 = 2x$ z niewiadomą x , gdy:

A. $a = 3$, B. $a = -3$, C. $a^2 = 10$, D. $a \in \{-3, 3\}$.

7. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+2}{x-2}$ ma taki sam zbiór rozwiązań, jak równanie:

A. $x^2 + 2 = 0$, B. $\frac{x^3}{x^2} = 0$, C. $|x| = 0$, D. $\frac{2}{x} = 0$.

Odpowiedzi i wskazówki

1. Nierówności kwadratowe

Odczytywanie własności funkcji kwadratowej z jej wykresu

1.1. a) $x_0 = 1$, b) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, c) $x_1 = -6$, $x_2 = 0$, d) funkcja nie ma miejsc zerowych.

1.2. a) $A = (-2, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (0, -6)$, b) $A = (-4, 0)$, $B = (-2, 4)$, $C = (0, 0)$,

c) $A = (-3, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (-1, 4)$.

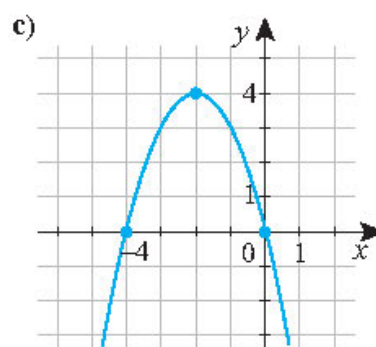
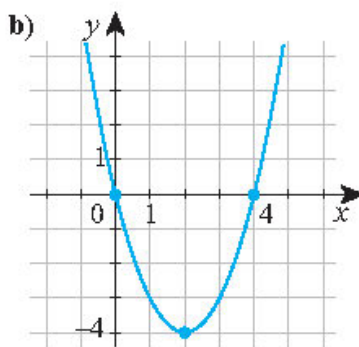
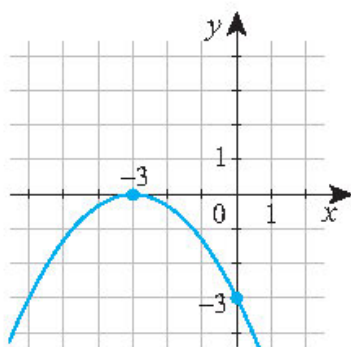
1.3. 1 a) $a < 0$, b) $c < 0$, c) $\Delta = 0$, d) $b < 0$,

2 a) $a > 0$, b) $c > 0$, c) $\Delta = 0$, d) $b < 0$, 3 a) $a < 0$, b) $c < 0$, c) $\Delta < 0$, d) $b < 0$,

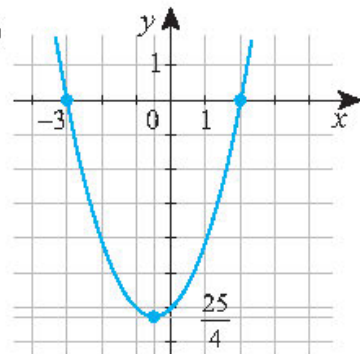
4 a) $a > 0$, b) $c < 0$, c) $\Delta > 0$, d) $b < 0$.

1.4. a) $(-\infty; 2]$, b) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, c) $(-\infty; 1]$, d) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

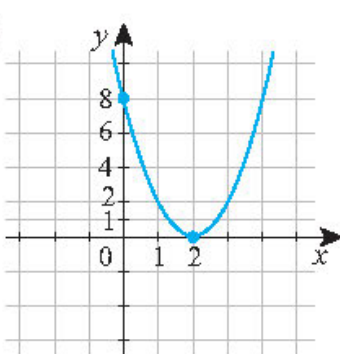
1.5. a)



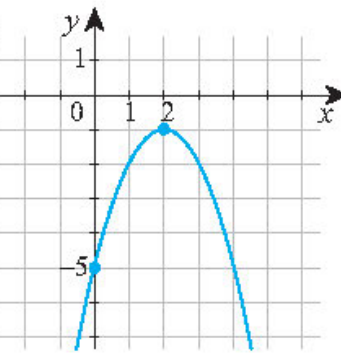
d)



e)



f)



Nierówności kwadratowe

1.6. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, b) $x \in (-1; 1)$, c) $x = -2$, d) $x \neq 1$, e) $x \in \mathbb{R}$,

f) nierówność nie ma rozwiązania.

1.7. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, b) $x \in (-2; 2]$, c) $x \in \mathbb{R}$, d) $x \in (-4; 2)$, e) $x \in \mathbb{R}$, f) $x \in \mathbb{R}$.

1.8. a) $x \in (-1; 0)$, b) $x \in (0; 3]$, c) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, d) $x \in (0; 2)$, e) $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$, f) $x \in (0; 2)$.

1.9. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, b) $x \in (-12; 0)$, c) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, d) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, e) $x \in (-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$,
 f) $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

1.10. a) $x \in \langle -1; 3 \rangle$, b) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 3; +\infty \rangle$, d) $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$,
 e) $x \in (-\infty; 5) \cup \langle 6; +\infty \rangle$, f) $x \in (1; 3)$.

1.11. a) $x \in \mathbf{R}$, b) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, c) nierówność nie ma rozwiązania, d) nierówność nie ma rozwiązania,
 e) $x \in \mathbf{R}$, f) nierówność nie ma rozwiązania.

1.12. Wskazówka. b) Przekształć nierówność do postaci $x^2 \geq 0$.

Nierówności kwadratowe – ciąg dalszy

1.13. a) $x \in (-4; 1)$, b) $x \in \mathbf{R}$, c) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle 7; +\infty \rangle$, d) $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$,
 e) $x \in (-\infty; -5) \cup (0, 2; +\infty)$, f) nierówność nie ma rozwiązania, g) $x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right)$, h) $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$,
 i) $x \in \left\langle -\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right\rangle$.

1.14. a) $x \in (-\infty; -5) \cup \langle 4; +\infty \rangle$, b) nierówność nie ma rozwiązania, c) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle -2; +\infty \rangle$,
 d) $x = -5$.

1.15. a) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$, b) $x = -2$, c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, d) $x \in \mathbf{R}$, e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, f) $x \in \mathbf{R}$.

1.16. a) $x \in \langle 2; 4 \rangle$, b) $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$, c) $x \in \langle -3; -1 \rangle$, d) $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \cup \left\langle -\frac{1}{3}; +\infty \right\rangle$,
 e) nierówność nie ma rozwiązania, f) $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{8}\right) \cup \left\langle -\frac{1}{8}; +\infty \right\rangle$.

1.17. 2, 3, 4. Wskazówka. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 6x + 5 < 0$ jest przedział $(1; 5)$.

1.18. 0. Wskazówka. $x \in (-\infty; 0) \cup \left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$.

1.19. -1, 0, 1. Wskazówka. $x \in (-2; 2)$.

1.20. $x \in (0; 16)$. Wskazówka. Ułóż i rozwiąż nierówność $4\sqrt{3} \cdot x > \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

1.21. $k = -15$. Wskazówka. Zauważ, że rozwiązaniami równania $(5x - 2)(3x + k) = 0$ są liczby $\frac{2}{5}$ i $-\frac{k}{3}$,
 gdzie $-\frac{k}{3} = 5$.

1.22. a) $D_f = (-\infty; -2) \cup \langle -1; +\infty \rangle$, b) $D_f = \langle 0; 4 \rangle$, c) $D_f = \mathbf{R}$, d) $D_f = \mathbf{R}$, e) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{3\}$,
 f) $D_f = (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Układy nierówności liniowych i kwadratowych z jedną niewiadomą

1.23. a) $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$, b) $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, c) $x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

1.24. a) $x \in (-2; 2)$, b) $x \in (-\infty; -2) \cup \{3; +\infty\}$, c) $x \in \{-2; 2\}$.

1.25. a) $x \in (-4; 3)$, b) $x \in (2; +\infty)$, c) $x \in (-1; 7)$, d) $x \in (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{3})$, e) $x \in \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$, f) $x \in (-2; 2)$.

1.26. a) $D_f = \{2; 5\}$, b) $D_f = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, c) $D_f = \{-2; -1\} \cup \{1; 2\}$, d) $D_f = (0; 2)$

Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania nierówności kwadratowych i ich układów

1.27. $\begin{cases} a \in \{12; 20\} \\ b = 45 - a \end{cases}$, gdzie a – krótszy bok prostokąta, b – dłuższy bok prostokąta.

Wskazówka. $a \cdot \frac{90 - 2a}{2} \leq 500$.

1.28. $x \in (0; 6) \cup \{42; 48\}$. *Wskazówka.* $x \cdot \frac{48 - x}{2} \leq 126$, gdzie $x \in (0; 48)$.

1.29. Długość jednego z boków dywanu jest liczbą ze zbioru $(0, 34; 0, 75)$ lub $(4, 5; 4, 9)$.

Wskazówka. $\frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 4, 5) < (6 - 2x)(4, 5 - 2x) < \frac{3}{4} \cdot (6 \cdot 4, 5)$, gdzie $x \in (0; 48)$

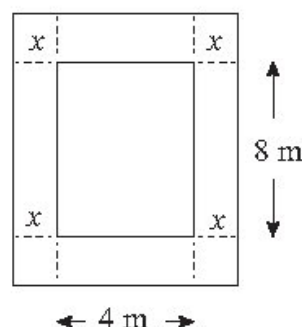
i powierzchnia dywanu $P(x) = (6 - 2x)(4, 5 - 2x)$.

1.30. $0, 6 \leq x \leq 1, 5$. *Wskazówka.* $(4 + 2x)(8 + 2x) \leq 77$, gdzie $x \in \{0, 6; 1, 5\}$.

1.31. a) Co najmniej 7 boków, b) co najmniej 13 boków.

Wskazówka. a) $\frac{n(n-3)}{2} > 2n$, gdzie n – liczba boków wielokąta.

1.32. *Wskazówka.* Wykaż, że układ nierówności $\begin{cases} x^2 + (22 - x)^2 > 580 \\ 0 < x < 22 \end{cases}$ nie ma rozwiązania.



Równania kwadratowe z parametrem

1.33. a) $x_0 = 2$, gdy $m = -4$; $x_1 = 2$ i $x_2 = -m - 2$, gdy $m \neq -4$,

b) $x_0 = -1$, gdy $m = 3$ lub $m = 4$; $x_1 = -1$ i $x_2 = \frac{1}{3 - m}$, gdy $m \neq 3$ i $m \neq 4$,

c) $x_0 = -2$, gdy $m = 4$ lub $x_0 = 2$, gdy $m = -4$; $x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 16}}{2}$

i $x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 16}}{2}$, gdy $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$,

$$\text{d)} x_0 = \frac{1}{2}, \text{ gdy } m = 0; x_1 = \frac{m-2+\sqrt{m^2+4}}{2m} \text{ i } x_2 = \frac{m-2-\sqrt{m^2+4}}{2m}, \text{ gdy } m \neq 0,$$

$$\text{e)} \text{ równanie nie ma pierwiastków, f)} x_0 = \frac{2}{1-m}, \text{ gdy } m \neq 1.$$

1.34. Równanie ma: a) 0 pierwiastków, gdy $m \in (-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; 1 pierwiastek, gdy $m \in \{-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}\}$; 2 pierwiastki, gdy $m \in (-\infty; -4\sqrt{2}) \cup (4\sqrt{2}; +\infty)$,

b) 0 pierwiastków, gdy $m \in (1; 9)$; 1 pierwiastek, gdy $m \in \{1, 9\}$; 2 pierwiastki, gdy $m \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$,

c) 0 pierwiastków, gdy $m \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$; 1 pierwiastek, gdy $m \in \left\{1, \frac{4}{3}\right\}$;

2 pierwiastki, gdy $m \in (-\infty; 1) \cup \left(1, \frac{4}{3}\right)$;

d) 0 pierwiastków, gdy $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; 1 pierwiastek, gdy $m \in \{-3, -1\}$;

2 pierwiastki, gdy $m \in (-3; -1) \cup (-1; 1)$;

e) 0 pierwiastków, gdy $m \in \left(-\frac{47}{9}; 1\right)$; 1 pierwiastek, gdy $m \in \left\{-6, -\frac{47}{9}\right\}$; 2 pierwiastki, gdy

$$m \in (-\infty; -6) \cup \left(-6; -\frac{47}{9}\right) \cup (1; +\infty),$$

f) 1 pierwiastek, gdy $m \in \left\{-1, -\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right\}$; 2 pierwiastki, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right\}$.

$$\text{1.35. a)} m \in (6; +\infty), \text{ b)} m \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right).$$

$$\text{1.36. } m \in \left(\frac{-7-\sqrt{210}}{7}; \frac{-7+\sqrt{210}}{7}\right).$$

$$\text{1.37. a)} m \in \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (10; +\infty), \text{ b)} m \in (-\infty; 0).$$

$$\text{1.38. } x_1 = -5 \text{ i } x_2 = -2, \text{ gdy } m = 7; x_1 = 5 \text{ i } x_2 = 2, \text{ gdy } m = -7.$$

$$\text{Wskazówka. } \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 40 > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 40 > 0 \\ (-m)^2 - 4 \cdot 10 = 9 \end{cases}.$$

$$\text{1.39. } m = 1. \text{ Wskazówka. } x_1^2 + x_2^2 = m^2 - 2m + 2 = f(m), m \in \mathbb{R} \ (\Delta \geq 0).$$

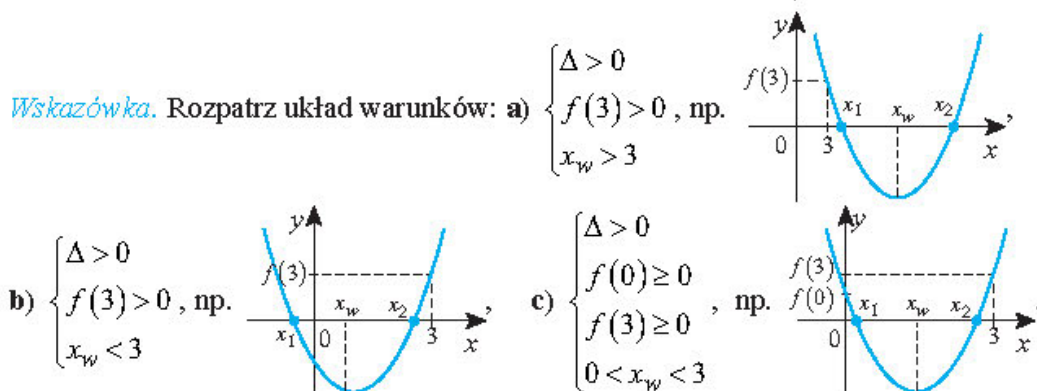
$$\text{1.40. } m = \frac{2}{5}. \text{ Wskazówka. } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}.$$

$$\text{1.41. Równanie ma: 0 rozwiązań, gdy } m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty);$$

$$1 \text{ rozwiązanie, gdy } m = \frac{1}{3} \text{ lub } m = 1, \text{ lub } m = 3; 2 \text{ rozwiązania, gdy } m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 3).$$

1.42. $k > 4$.

1.43. a) $m \in \left(\frac{11}{9}; +\infty\right)$, b) $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{9}\right)$, c) $m \in \left(2\sqrt{2}; 3\frac{2}{3}\right)$.



Nierówność i funkcja kwadratowa z parametrem

1.44. a) $x \in \mathbf{R}$, gdy $m \in (-\infty; 0)$; $x \in \left(-\frac{2}{\sqrt{m}}; \frac{2}{\sqrt{m}}\right)$, gdy $m \in (0; +\infty)$,

b) $x \in \mathbf{R}$, gdy $m \in (0; +\infty)$; $x \in \left(-\frac{2}{\sqrt{-m}}; \frac{2}{\sqrt{-m}}\right)$, gdy $m \in (-\infty; 0)$,

c) $x \in (m; 0)$, gdy $m < 0$; $x \in (0; m)$, gdy $m > 0$,

d) $x \in (-m; 0)$, gdy $m > 0$; $x \in (0; -m)$, gdy $m < 0$,

e) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, gdy $m > 0$; $x \in (-1; 1)$, gdy $m < 0$,

f) $x \in \mathbf{R}$, gdy $m \leq 0$; $x \in \left(-\sqrt{\frac{1-m}{m}}; \sqrt{\frac{1-m}{m}}\right)$, gdy $m \in (0; 1)$.

Wskazówka. b) $m < 0$ i $x^2 = -\frac{4}{m}$, to $-\frac{4}{m} > 0$, zatem $\sqrt{\frac{-4}{m}} = \sqrt{\frac{4}{-m}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-m}} = \frac{2}{\sqrt{-m}}$.

1.45. a) $m > 1$, b) $m \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$, c) $m = 0$, d) nie istnieje takie m , e) $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$,

f) $m \in (9; +\infty)$.

1.46. $k \in \left(-1; \frac{11}{13}\right)$. **1.47.** $k = 1$. *Wskazówka.* $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

1.48. $m = -\frac{1}{3}$. *Wskazówka.* $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$. **1.49.** $m = 5$.

1.50. a) $m \in (-2; 6)$, b) $m \in (-2; 6)$, c) $m = 1$, d) nie istnieje takie m , e) $m \in (0; 1)$, f) $m \in (0; 1)$.

Wskazówka. Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania nierówności z parametrem:

a) $x^2 - mx + m + 3 \geq 0$, b) $x^2 - mx + m + 3 > 0$, c) $mx^2 - (m+1)x + 1 \geq 0$, d) $mx^2 - (m+1)x + 1 > 0$,

e) $mx^2 + 4mx + m + 3 \geq 0$, f) $mx^2 + 4mx + m + 3 > 0$ lub $mx^2 + 4mx + m + 3 < 0$.

1.51. a) $m \in \left(-\infty; -\frac{4}{5}\right)$. *Wskazówka.* $f(x) < g(x)$, czyli $(2m+1)x^2 + 2(m-1)x + 3m-3 < 0$.

b) $m \in \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$. *Wskazówka.* $f(x) > g(x)$, czyli $(m-1)x^2 + mx + m > 0$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Odpowiedź	B	B i C	C	A	C	D	B i C	T-A	Kolejno: P, P, F.

2. Funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180°

Pojęcie kąta skierowanego i określenie funkcji trygonometrycznych kątów od 0° do 180°

2.1. a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$, **b)** $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$,

c) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -2$, **d)** $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$,

e) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$, **f)** $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$.

2.2. a) 1, **b)** 1, **c)** 0, **d)** 2, **e)** 1, **f)** 1.

2.3. Wskazówka. Na końcowym ramieniu kąta leży punkt o współrzędnych, np.:

a) (3, 1), **b)** (-2, 3), **c)** $(1, 2\sqrt{2})$, **d)** (-3, 4), **e)** (3, 4) lub (-3, 4), **f)** $(1, \sqrt{3})$ lub $(-1, \sqrt{3})$.

2.4. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, **c)** $-\sqrt{3}$, **d)** 0,9848, **e)** -0,9397, **f)** -2,7475.

Wskazówka. **d)** $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$, **e)** $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$, **f)** $\operatorname{tg} 110^\circ = -\operatorname{tg} 70^\circ$.

2.5. a) 3, **b)** 5, **c)** $1+\sqrt{2}$, **d)** 1, **e)** -3, **f)** $-\frac{2}{3}$. **2.6. a)** -1, **b)** -2, **c)** 1, **d)** 1.

2.7. a) $\alpha = 45^\circ$, **b)** $\alpha = 135^\circ$, **c)** $\alpha = 60^\circ$, **d)** $\alpha = 120^\circ$, **e)** $\alpha = 30^\circ$, **f)** $\alpha = 150^\circ$.

2.8. a) $\alpha = 30^\circ$, **b)** $\alpha = 120^\circ$, **c)** $\alpha = 45^\circ$ lub $\alpha = 135^\circ$.

Przykłady zastosowań funkcji trygonometrycznych kątów od 0° do 180°

2.10. a) 48, **b)** $48\sqrt{2}$, **c)** $48\sqrt{3}$, **d)** ok. 94,5408, **e)** $48\sqrt{3}$, **f)** 48. **2.11. a)** 30, **b)** $20\sqrt{2}$, **c)** 45 000.

2.12. Wskazówka. Podziel równoległobok przekątną na dwa trójkąty.

2.13. Wskazówka. Zauważ, że $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$. **2.14. a)** $12+6\sqrt{3}$, **b)** $24\sqrt{3}$, **c)** $12+20\sqrt{2}$.

2.15. 21 ha.

2.16. a) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, b) $f(x) = -\sqrt{3}x$, c) $f(x) = x$, d) $f(x) = -x$, e) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

2.17. a) $\operatorname{tg} \alpha = 4$, b) $\operatorname{tg} \alpha = -2$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, d) $\operatorname{tg} \alpha = -3$.

2.18. a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{3} + 4$, b) $y = x + 6$, c) $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 4$, d) $y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 4$,

e) $y = -x + 2$, f) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 4$.

2.19. a) $y = \sqrt{3}x + 1 - 2\sqrt{3}$, b) $y = -\sqrt{3}x + 4 - \sqrt{3}$, c) $y = -x + 6$.

2.20. a) 135° , b) 120° .

2.21. a) $0 < m < 1$, b) $-\sqrt{3} < m < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, c) $\frac{3-\sqrt{3}}{2} < m \leq \frac{9-\sqrt{3}}{6}$, d) $0 \leq m < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Odpowiedź	B	C	B	B	C	T-B

Wskazówka. 2. $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Prosta na płaszczyźnie kartezjańskiej i interpretacja geometryczna układu równań liniowych

Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej

3.1. Wskazówka. Trójkąt ABC przedstawiony na rysunku jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych CA i CB , więc $|CA| = |x_B - x_A|$, $|CB| = |y_B - y_A|$, gdzie $C = (x_B, y_A)$.

3.2. a) 14, b) 15, c) 9.

3.3. a) $4 + 2\sqrt{13}$, b) $4\sqrt{5} + 6\sqrt{2}$, c) $4\sqrt{29}$.

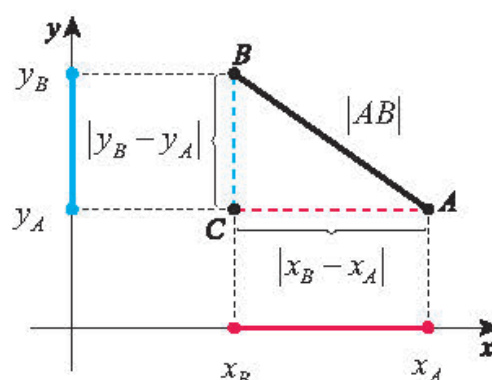
Wskazówka. c) Zauważ, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

3.4. a) Nie, b) tak, c) tak.

3.5. Nie.

3.7. a) Tak, b) nie.

3.8. $|BD| = \sqrt{5}$.



3.9. Wskazówka. Czworokąt jest prostokątem, gdy ma równe przekątne i długości przeciwległych boków są równe.

3.10. a) $D = (5, 6)$, **b)** $D = (0, 1)$.

Równanie prostej w postaci ogólnej

3.11. A, B, C, D, E.

3.12. $A \notin l$, $B \in l$, $C \in l$.

3.14. a) $y = 0$, **b)** $y = -4$, **c)** $y = 8$.

3.15. a) **2** i **8**, **b)** **3** i **7**.

3.16. Np.: **a)** $(0, 3)$, $(-2, 3)$, $(3, 3)$, **b)** $(-2, 0)$, $(-2, -3)$, $(-2, 2)$, **c)** $(-2, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$,

d) $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-2, 2)$.

3.17. Np. $(-1, 0)$, $(1, 1)$ oraz $(4, 3)$.

3.18. $m = -4$ lub $m = 5$.

Równanie prostej w postaci kierunkowej

3.21. a) $y = -2x + 1$, **b)** $y = -2$, **c)** $y = \frac{3}{4}x$, **d)** niemożliwe.

3.22. a) $3x + 4y - 8 = 0$, **b)** $2x + 2y - 1 = 0$, **c)** $y - \sqrt{2} = 0$, **d)** $y - 4 + 2\sqrt{3} = 0$.

3.23. a) $y = 3$, **b)** $y = -x - 2$, **c)** $y = \sqrt{2}x + 4$, **d)** $y = -0,2x - 0,24$, **e)** $y = (\sqrt{2} - 1)x + 2\sqrt{2} - 5$,

f) $y = \sqrt[3]{6}x$.

3.24. a) 60° , **b)** 30° , **c)** 150° , **d)** 120° , **e)** 135° , **f)** 120° .

3.25. a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$, **b)** $y = -x$, **c)** $y = 3$, **d)** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, **e)** $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{2} + 1$,

f) $y = \sqrt{3}x - \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

3.26. a) $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, **b)** $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{4}$, **c)** $y = \frac{3}{4}x + 5\frac{1}{2}$, **d)** $y = 2\sqrt{2}x + 8\sqrt{2} - 3$.

3.27. a) $a \cdot b < 0$, **b)** $a \cdot b > 0$.

3.28. $m_1 = -2 - \sqrt{3}$, $m_2 = \sqrt{3} - 2$, $m_3 = 2 - \sqrt{3}$, $m_4 = 2 + \sqrt{3}$. **Wskazówka.** Jeżeli $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, to $\alpha = 60^\circ$ lub $\alpha = 120^\circ$ i $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$. Zatem $|m| - 2 = \sqrt{3}$ lub $|m| - 2 = -\sqrt{3}$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

3.29. a) -2 , b) -2 , c) -1 , d) 0 , e) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, f) nie istnieje.

3.30. a) Tak, b) nie.

3.31. a) $y = \frac{2}{3}x - 2$, czyli $2x - 3y - 6 = 0$, b) $y = -5$, czyli $y + 5 = 0$, c) $x = 2$, czyli $x - 2 = 0$,

d) $y = 2x$, czyli $2x - y = 0$.

3.32. a) Tak, b) nie. *Wskazówka.* a) Punkty A, B, C nie są współliniowe,

b) punkty A, B, C są współliniowe.

3.33. a) $m = 7, 4$, b) $m = 6$.

3.34. a) Kąt rozwarty, gdy $m \in (-\infty; 2)$; ostry, gdy $m \in (2; +\infty)$,

b) kąt rozwarty, gdy $m \in (-2; +\infty)$; ostry, gdy $m \in (-\infty; -2)$, c) kąt ostry, gdy $m \in \mathbb{R}$.

3.35. $k \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie kartezjańskiej

3.36. a) Proste przecinają się i nie są prostopadłe, b) $k \parallel l$, c) $k = l$, d) są prostopadłe.

3.37. a) $y = 2x - 5$, b) $\frac{3}{4}x + y - \frac{9}{2} = 0$, c) $y = -3$, d) $x = 4$.

3.38. a) $y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$, b) $2x - y + 9 = 0$, c) $y = -3$, d) $x = -3$.

3.39. a) $m = 3$, b) $m = 3$. *Wskazówka.* a) $\frac{m+2}{5} - 3 = -2$.

3.40. a) $m = -9$, b) $m = -8$. *Wskazówka.* a) $\left(\frac{m-3}{4} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} = -1$.

3.41. a) $k \perp l$, gdy $m = -3$; $k \parallel l$, gdy $m = \frac{4}{3}$,

b) $k \perp l$, gdy $m = -1 - \sqrt{3}$ lub $m = -1 + \sqrt{3}$; nie istnieje m , dla którego proste k i l są równoległe.

3.42. a) $m_1 = -2$, $m_2 = 2$, b) $m_1 = -3$, $m_2 = 1$.

Interpretacja geometryczna układów dwóch równań liniowych

3.44. Np.: a) **1** i **2**, b) **3** i **4**, c) **1** i **1**.

3.45. a) $(3, 4)$, b) układ sprzeczny, c) $(0, 2)$, d) $(2, 3)$, e) układ nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań), f) $(5, 5)$.

3.46. a) 1 i 6, b) np. 2 i -1 , c) np. 3 i 2.

3.47. Np. a) 1 $4x+3y=0$, 2 $4x+y=3$, 3 $8x+6y=10$, d) 1 $y=3$, 2 $x=1$, 3 $y=2$.

3.48. a) $\begin{cases} y=x+2 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y=x+3 \\ y=\frac{3}{2}x-3 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

3.49. Nie.

Odległość punktu od prostej i odległość dwóch prostych równoległych

3.50. a) $\frac{\sqrt{10}}{5}$, b) $3\sqrt{3}$, c) 0, d) $\frac{\sqrt{178}}{2}$.

3.51. a) $m_1 = \frac{12}{5}$, $m_2 = \frac{38}{5}$, b) $m_1 = -\sqrt{2}-2$, $m_2 = \sqrt{2}-2$, c) $m_1 = -4 - \frac{6\sqrt{7}}{7}$, $m_2 = 4 - \frac{6\sqrt{7}}{7}$,
d) $m_1 = -\frac{3}{17}$, $m_2 = 1$.

3.52. a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, b) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$, c) $\frac{\sqrt{5}}{10}$, d) 0.

3.53. a) $m_1 = 0$, $m_2 = 10$, b) $m_1 = -\frac{19}{2}$, $m_2 = 10$, c) $m \in \mathbb{R}$.

3.54. a) $x+3y-4=0$ lub $3x-y-2=0$, b) $16y-9=0$ lub $12x-9=0$.

Wskazówka. a) Dwusieczna jest zbiorem punktów $P=(x, y)$ równo oddalonych od danych prostych,

więc $\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$, skąd $|x-2y+1| = |2x+y-3|$.

3.55. $5x+12y-7=0$ lub $5x+12y+1=0$. *Wskazówka.* $\frac{|5x+12y-3|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{4}{13}$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Odpowiedź	C	B	C	T-B	A	Kolejno: P, P

4. Wektory

Pojęcie wektora

4.1. a) $\vec{AA}$, $\vec{BB}$, $\vec{CC}$, $\vec{DD}$, b) $\vec{DC}$, $\vec{AB}$, d) $\vec{AC}$, $\vec{CA}$, $\vec{BD}$, $\vec{DB}$.

4.3. a) $\vec{DS}$, $\vec{SD}$, $\vec{BS}$, $\vec{SB}$, $\vec{BD}$, $\vec{DB}$, e) $\vec{AS}$, $\vec{SA}$, $\vec{AC}$, $\vec{CA}$, $\vec{SC}$, $\vec{CS}$.

4.4. a) 24, b) 6, c) 12.

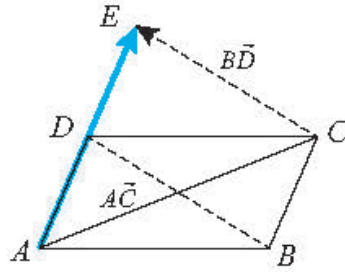
4.5. a) $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$, $\vec{PR} = \vec{PQ} - \vec{RQ}$.

4.7. a) $\vec{DB}$, b) $\vec{O}$, c) $\vec{O}$, d) $\vec{AB}$, e) $\vec{O}$.

4.8. a) $\vec{O}$, b) $\vec{O}$, e) $\vec{O}$, f) $\vec{O}$, h) $\vec{O}$.

Iloczyn wektora swobodnego przez liczbę

4.14. Wskazówka. a)



Wektor na płaszczyźnie kartezjańskiej

4.15. a) **1** Brak, **2** np. $\vec{AB} = -\vec{BA}$, **3** np. $\vec{AC} \perp \vec{AB}$, b) **1** np. $\vec{AB} = \vec{DC}$, **2** np. $\vec{AB} = -\vec{CD}$, **3** brak, c) **1** np. $\vec{AB} = \vec{DC}$, **2** np. $\vec{AB} = -\vec{CD}$, **3** np. $\vec{AC} \perp \vec{BD}$.

4.16. a) $\vec{AB} = [-5, -4]$, b) $\vec{AB} = [4, 4]$, c) $\vec{AB} = [-6, 0]$, d) $\vec{AB} = [0, 4]$.

4.17. a) $\vec{AB} = [-1, 0]$, $\vec{BA} = [1, 0]$, b) $\vec{AB} = [7, 1]$, $\vec{BA} = [-7, -1]$, c) $\vec{AB} = [4, 5]$, $\vec{BA} = [-4, -5]$, d) $\vec{AB} = [2, -16]$, $\vec{BA} = [-2, 16]$.

4.18. a) $B = (9, 8)$, b) $B = (4, -4)$, c) $A = (-4, 4)$, d) $A = (0, 0)$.

4.19. $\vec{AB} = [2, -2]$, $\vec{CD} = [4, 2]$, $\vec{EF} = [2, -2]$, $\vec{EG} = [-4, -2]$, $\vec{HK} = [4, 2]$, $\vec{AB} = \vec{EF}$, $\vec{CD} = \vec{HK}$, $\vec{CD} = -\vec{EG}$, $\vec{HK} = -\vec{EG}$.

4.20. a) $A = (4, 2)$, b) $B = (-1, 1)$, c) $M = (0, 0)$, d) $D = (-2, -3)$.

4.21. a) $P = (4, 4)$, b) $P = (-3, 2)$, c) $P = (1, -5)$, d) $P = (0, 7)$.

4.22. a) $S = (-1, 1)$, $|\vec{AB}| = 4$, b) $S = \left(\frac{5}{2}, -3\right)$, $|\vec{AB}| = 1$, c) $S = (1, 1)$, $|\vec{AB}| = 3\sqrt{2}$, d) $S = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$, $|\vec{AB}| = 2\sqrt{5}$.

4.23. a) $18\sqrt{2}$, b) $2 + \sqrt{2}$, c) $\sqrt{7}$, d) $8\sqrt{5}$.

4.24. a) $B = (-3, -1)$, $C = (1, -4)$, b) $B = (-1, 6)$, $C = (-3, -2)$, c) $B = (8, 8)$, $C = (-1, 2)$.

4.25. a) $\vec{AS} = [1, 2]$, b) $\vec{BS} = [3, -3]$, c) $\vec{SA} = [8, 2]$, d) $\vec{SB} = \left[-\frac{3}{2}, 3\right]$.

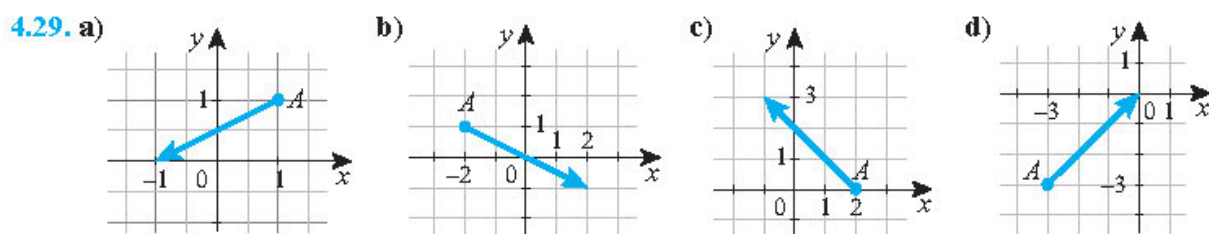
4.26. $C = (9, 8)$, $D = (6, 9)$.

Działania na wektorach w układzie współrzędnych

4.27. a) $\vec{AB} + \vec{CD} = [5, 0]$, $\vec{AB} - \vec{CD} = [3, 6]$, b) $\vec{AB} + \vec{CD} = [0, 0]$, $\vec{AB} - \vec{CD} = [6, 6]$,

c) $\vec{AB} + \vec{CD} = [5, 5]$, $\vec{AB} - \vec{CD} = [5, -5]$, d) $\vec{AB} + \vec{CD} = [8, 8]$, $\vec{AB} - \vec{CD} = [4, 4]$.

4.28. a) $[-1, -2]$, $\sqrt{5}$, b) $[3, -4]$, 5, c) $[-2, 6]$, $2\sqrt{10}$, d) $[-3, -1]$, $\sqrt{10}$, e) $\left[\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right]$, $\frac{\sqrt{130}}{2}$,
f) $[4, -7]$, $\sqrt{65}$, g) $[-2, -4]$, $2\sqrt{5}$, h) $[12, -21]$, $3\sqrt{65}$.



4.30. a) $[6, 2]$, b) $[9, -15]$, c) $[0, 0]$, d) $[0, 0]$, e) $[-12, -16]$, f) $[-18, -30]$.

4.31. $E = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Wskazówka. $\vec{0} = [0, 0]$.

4.32. a) $M = (5, 2)$ i $N = (8, 3)$, b) $M = (0, 9)$ i $N = (3, 11)$, c) $M = (-4, 4)$ i $N = (4, -4)$.

4.33. a) $K_1 = (1, 4)$ b) $K_1 = (-4, 0)$, $K_2 = (0, -4)$, c) $K_1 = (5, 5)$, $K_2 = (11, 11)$, $K_3 = (17, 17)$,

d) $K_1 = (-10, 10)$, $K_2 = (-20, 20)$, $K_3 = (-30, 30)$, $K_4 = (-40, 40)$.

4.34. $m = -5$ i $n = 4$.

4.35. $m = \frac{1}{3}$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Odpowiedź	D	B	A i D	A	B	C

5. Kąty w kole i styczna do okręgu

Kąt środkowy i pole wycinka koła

5.1. a) $\frac{1}{36}$, b) $\frac{1}{8}$, c) $\frac{7}{12}$, d) $\frac{5}{6}$.

5.2. a) π , b) 2π , c) 4π , d) $\frac{9}{2}\pi$, e) $\frac{21}{4}\pi$.

5.3. 75° , 65° , 40° .

5.4. a) 120° , b) 40° , c) 315° .

5.5. a) 4π , b) 8π , c) $\frac{27}{2}\pi$, d) 15π , e) $22,5\pi$, f) 33π .

5.6. a) 90° , b) 270° , c) 315° .

5.7. a) $P = 40\pi$, b) $P = \frac{35}{8}\pi$, c) $P = 6\frac{2}{3}\pi$. Wskazówka. a) $P = \pi \cdot (4+3)^2 - \pi \cdot 3^2$,

b) $P = \frac{75^\circ}{360^\circ} \pi \cdot (2+3)^2 - \frac{75^\circ}{360^\circ} \pi \cdot 2^2$, c) $P = \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi \cdot (2+2)^2 - \frac{120^\circ}{360^\circ} \pi \cdot 2^2 + \frac{240^\circ}{360^\circ} \pi \cdot 2^2$.

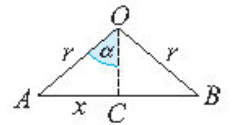
5.8. a) $P_\Delta = 16$, b) $P_\Delta = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, c) $P_\Delta = 25\sqrt{3}$, d) $P_\Delta = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

5.9. 1) $P = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4}$, 2) $P = \frac{125}{3}\pi - 25$, 3) $P = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$.

5.10. a) $P = 22\,403$, b) $P = 184,10$, c) $P = 1,61$. Wskazówka. a) $P = P_1 + P_2$, gdzie P_1 – pole wycinka koła o kącie środkowym 220° i promieniu 100, P_2 – pole trójkąta AOB . $P_1 = \frac{220^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 100^2$, więc $P_1 \approx 19\,188,89$, $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \sin 140^\circ$, więc $P_2 \approx 3214$.

5.11. a) $|AB| = 6\sqrt{3}$, b) $|AB| = 7\sqrt{2}$, c) $|AB| = 2r \cdot \sin \alpha$.

Wskazówka. c) $\triangle ACO$ jest prostokątny, więc $\frac{x}{r} = \sin \alpha$, skąd $x = r \cdot \sin \alpha$ i $|AB| = 2x$.



Kąt wpisany i jego związek z kątem środkowym

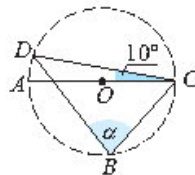
5.12. a) 90° i 45° , b) 240° i 120° , c) 36° i 18° , d) 10° i 5° .

5.13. $\alpha = 53^\circ$, $\beta = 42^\circ$.

5.14. a) 120° , b) 50° , c) 70° , d) 60° .

5.15. a) 80° , b) 50° , c) 260° .

Wskazówka. a) $|\sphericalangle DAC| = 80^\circ$



5.16. a) $\alpha = 48^\circ$, $\beta = 96^\circ$, b) $\alpha = 210^\circ$, $\beta = 105^\circ$,
c) $\alpha = \beta = 70^\circ$.

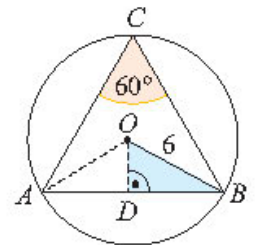
5.17. $24 + 5 \cdot \pi$.

5.18. a) $\alpha = 120^\circ$, b) $\alpha = 25^\circ$, c) $\alpha = 110^\circ$, d) $\alpha = 70^\circ$.

5.19. a) $|AB| = 4$, b) $|AB| = 6\sqrt{3}$, c) $|AB| = 10\sqrt{3}$.

Wskazówka. b) $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot 60^\circ$ (kąt środkowy i wpisany oparty na tym samym łuku),

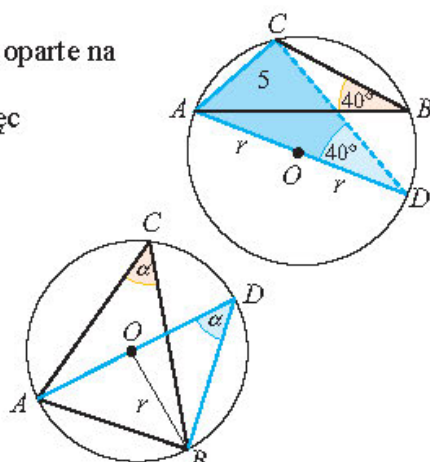
$\triangle ABO$ jest równoramienny o kącie między ramionami 120° . $\triangle ODB$ jest prostokątny, więc $\frac{|DB|}{6} = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 120^\circ\right)$ i $|AB| = 2 \cdot |DB|$.



5.20. $|AB| \approx 7,78$. *Wskazówka.* $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 40^\circ$ (kąty wpisane oparte na łuku AC) i $\triangle DCA$ jest prostokątny (kąt ACD oparty na średnicy AD), więc

$$\frac{5}{|AD|} = \sin 40^\circ, \text{ skąd } |AD| = 2r = \frac{5}{\sin 40^\circ}.$$

5.21. *Wskazówka.* Z punktu A poprowadzono średnicę i $|\sphericalangle ADB| = \alpha$ (dwa kąty wpisane oparte na tym samym łuku AB). $\triangle ABD$ jest prostokątny ($|\sphericalangle ABD| = 90^\circ$ – kąt wpisany oparty na średnicy), więc $\frac{|AB|}{2r} = \sin \alpha$, skąd $|AB| = 2r \cdot \sin \alpha$.



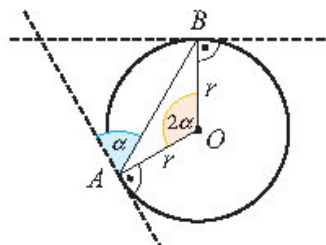
5.22. *Wskazówka.* Kąt środkowy oparty na łuku AB ma miarę 90° (kąt między przekątnymi kwadratu), więc kąt wpisany α oparty na tym samym łuku AB ma miarę $\frac{1}{2} \cdot 90^\circ$.

Styczna do okręgu i jej własności

5.24. a) $\alpha = 55^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$, c) $\alpha = 100^\circ$.

5.25. a) $|AP| = 2\sqrt{21}$, b) $|OP| = 6$, c) $|AB| = 6\sqrt{3}$.

5.26. $\alpha = 60^\circ$. *Wskazówka.* $2\alpha = 120^\circ$ (kąt środkowy oparty na łuku, którego długość stanowi $\frac{1}{3}$ długości okręgu).

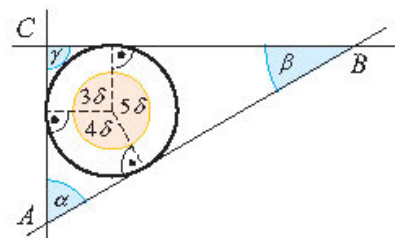


5.27. a) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$.

Wskazówka. (Rysunek) $3\delta + 4\delta + 5\delta = 360^\circ$, skąd $\delta = 30^\circ$.

Zatem $3\delta = 90^\circ$, więc $\gamma = 180^\circ - 90^\circ$, $4\delta = 120^\circ$, więc $\alpha = 180^\circ - 120^\circ$,

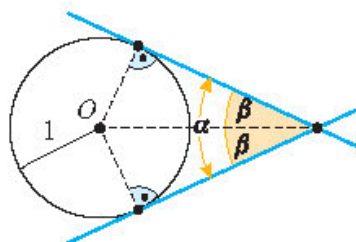
$5\delta = 150^\circ$, więc $\beta = 180^\circ - 30^\circ$, b) $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$, c) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.



5.28. a) 2 i $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, b) 4 i $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, c) 20 i $\frac{20\sqrt{3}}{3}$, d) 400 i $\frac{400\sqrt{3}}{3}$.

Wskazówka. a) $\frac{r}{|O_2P|} = \sin 30^\circ$ i $\frac{r}{|O_1P|} = \sin 60^\circ$.

5.29. a) $\sqrt{3}$, b) 1 , c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, d) $\frac{1}{\tan \beta}$. *Wskazówka.* d)



5.30. a) $x = 4$, b) $x = 10$, c) $x = 2$.

5.31. *Wskazówka.* a) $|PM|^2 = |PC| \cdot |PD|$ i $|PM|^2 = |PB| \cdot |PA|$, b) $|PB| \cdot |PA| = |PC|^2$ i $|PB| \cdot |PA| = |PD|^2$.

Okręgi styczne i ich własności

5.32. a) Nie, b) nie, c) tak, d) nie

5.33. a) $x = 3$ lub $x = 5$, b) $x = 4$. Wskazówka. a) $(2\sqrt{15})^2 = 2x \cdot 2 \cdot (8-x)$, b) $(4\sqrt{6})^2 = 2x \cdot 2 \cdot (x+2)$.

5.34. $r_1 = 3$, $r_2 = 9$.

5.35. Wskazówka. Porównaj rozwiązanie przykładu 8.

5.38. Wskazówka. Jeżeli $o(B, r_1)$ i $o(C, r_2)$, to $|AB| = R - r_1$, $|BC| = r_1 + r_2$, $|AC| = R - r_2$.

Zatem $|AB| + |BC| + |AC| = R - r_1 + r_1 + r_2 + R - r_2$.

Zestaw powtórkowy

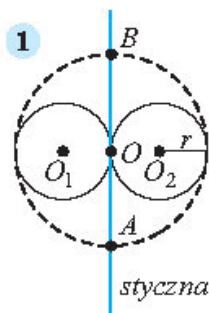
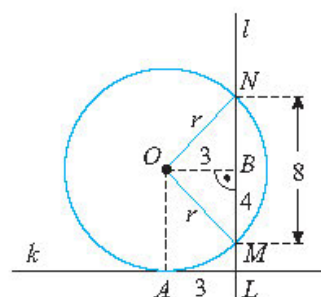
Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.
Odpowiedź	B	C	D	C	B

4. $x^2 = 6,5^2 - 2,5^2$.

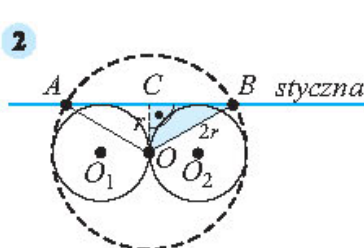
5. $x^2 = (8+16)^2 - 8^2$.

6. $r = 5$. Wskazówka. Przyjmujemy dane jak na rysunku. $\triangle MNO$ jest równoramienny i $|OB| = 3$ oraz $r^2 = 4^2 + 3^2$.

7. Wskazówka. Zauważ, że możliwe są dwa przypadki.



1 $|AB| = 4r$
– odcinek AB jest
średnicą okręgu
o środku O
i promieniu $2r$.

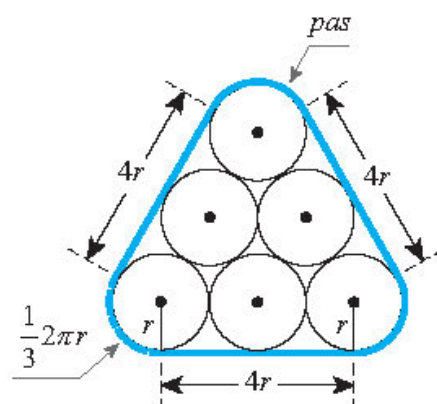


2 $|AB| = 2\sqrt{3} \cdot r$ – odcinek AB jest
cięciwą $o(O, 2r)$, która jest
styczna do okręgów $o(O_1, r)$
i $o(O_2, r)$.

8. Nie można, bo pas powinien być dłuższy

niż $3 \cdot 4r + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi r$, gdzie $r = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$,

czyli pas powinien być dłuższy niż 3,656 m.



6. Okręgi na płaszczyźnie kartezjańskiej

Równanie okręgu

6.1. a) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$, b) $x^2 + (y+1)^2 = \frac{16}{25}$, c) $(x+7)^2 + y^2 = 2$.

6.2. a) $S=(0,-1)$, $r=\sqrt{5}$, b) $S=(-2,0)$, $r=3$, c) $S=(2,-4)$, $r=2\sqrt{3}$, d) $S=(3,0)$, $r=5$,
e) $S=(1,-1)$, $r=2$, f) $S=(4,5)$, $r=\sqrt{13}$.

6.3. a) $(x-1)^2+(y-2)^2=18$, b) $(x+5)^2+(y-5)^2=13$, c) $x^2+(y-4)^2=121$,

d) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{169}{4}$.

6.4. a) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$, b) $(x-1)^2+(y+3)^2=68$, c) $(x+8)^2+(y-2)^2=50$,

d) $(x-9)^2+(y+4)^2=97$.

6.5. a) $\sqrt{41}-2$, b) $4-\sqrt{5}$, c) $5\sqrt{2}-5$, d) 0.

6.6. a) Tak, b) nie, c) nie, d) tak, e) tak, f) nie.

6.7. a) $m \in (-\infty; 5)$, b) $m \in (-3; 3)$, c) $m \in (-\infty; 6)$, d) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,

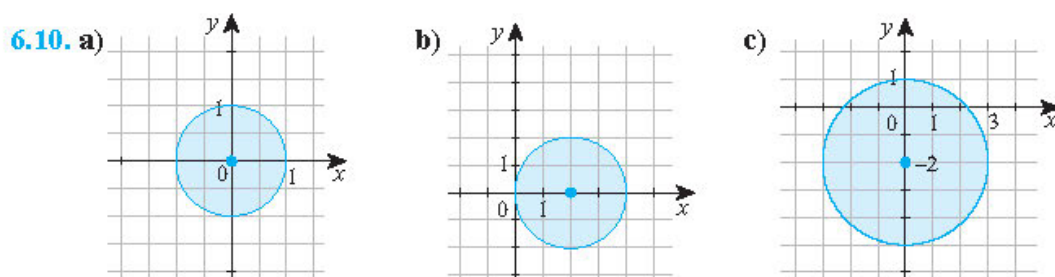
f) $m \in \left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

6.8. Okręgi są: a) styczne wewnętrznie, b) rozłączne wewnętrznie, c) przecinają się,

d) styczne wewnętrznie, e) przecinają się, f) styczne zewnętrznie, g) wzajemnie zewnętrzne,

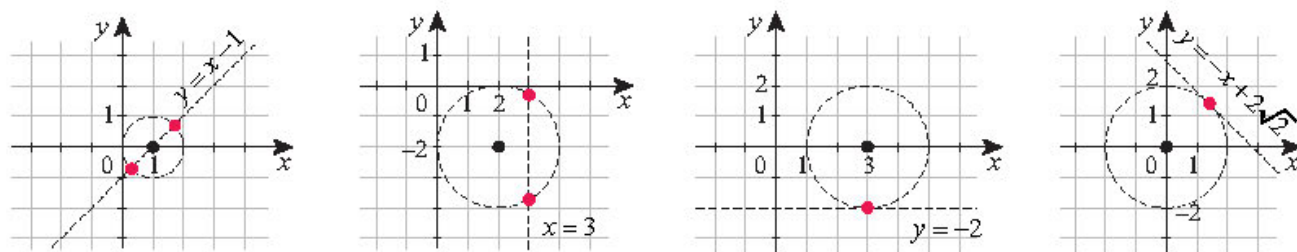
h) współśrodkowe.

6.9. a) $m_1=2$, $m_2=4$, b) $m \in (2; 8)$, c) $m \in \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.



Wzajemne położenie prostej i okręgu

6.11. a) Dwa punkty wspólne, b) dwa punkty wspólne, c) jeden punkt wspólny, d) jeden punkt wspólny.



6.12. a) Prosta zewnętrzna, b) prosta sieczna, c) prosta styczna, d) prosta sieczna, e) prosta styczna.

6.13. a) 1) $m_1=-9$, $m_2=3$, 2) $m \in (-9; 3)$, 3) $m \in (-\infty; -9) \cup (3; +\infty)$,

b) 1) $m_1=-2\sqrt{2}$, $m_2=2\sqrt{2}$, 2) $m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, 3) $m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$,

- c) **1** $m_1 = -12$, $m_2 = -2$, **2** $m \in (-12; -2)$, **3** $m \in (-\infty; -12) \cup (-2; +\infty)$,
 d) **1** $m_1 = -2$, $m_2 = 6$, **2** $m \in (-2; 6)$, **3** $m \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$,
 e) **1** $m_1 = -\sqrt{2}$, $m_2 = \sqrt{2}$, **2** $m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$, **3** $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$,
 f) **1** $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, **2** $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$, **3** $m \in (1; 3)$.

Wyznaczanie równań stycznych do okręgu

6.14. a) Nie, b) tak.

6.15. a) Nie, b) tak, c) tak.

6.16. a) $y = -x + 2$, b) przez punkt P nie da się poprowadzić stycznej, c) $y = -2$ i $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$,

d) $y = -3x + 15$, e) $y = -2x + 7$, f) $x = -7$ i $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$, g) $y = \sqrt{3}x + 4$ i $y = -\sqrt{3}x + 4$,

h) $y = -2x - 2$ i $y = \frac{1}{2}x + 3$. *Wskazówka.* b) $|PS| < r$, gdzie $S = (1, -5)$ i $r = 4$.

6.17. $m = -2$ lub $m = 4$, $y = -\frac{4}{3}x - 2$ lub $y = \frac{4}{3}x + 4$.

6.18. $y = -2x + 5$.

6.19. a) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$, $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$,

b) $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$, $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$, $(x+r)^2 + (y+r)^2 = r^2$, $(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$.

6.20. a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ i $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$,

b) $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$ i $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$,

c) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$ i $(x-20)^2 + (y-20)^2 = 400$,

d) $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$ i $(x-15)^2 + (y+15)^2 = 225$.

Wskazówka c) i d): Skorzystaj z zadania 6.19 b).

6.21. a) **1** $2x - y - \sqrt{5} = 0$ i $2x - y + \sqrt{5} = 0$, **2** $x + 2y - \sqrt{5} = 0$ i $x + 2y + \sqrt{5} = 0$,

b) **1** $2x + y + 1 = 0$ i $2x + y + 21 = 0$, **2** $-x + 2y - 18 = 0$ i $-x + 2y + 2 = 0$,

c) **1** $x - 2y - 10 = 0$ i $x - 2y + 20 = 0$, **2** $2x + y - 15 = 0$ i $2x + y + 15 = 0$,

d) **1** $x - \sqrt{2}y + 5 - 3\sqrt{2} = 0$ i $x - \sqrt{2}y - 7 - 3\sqrt{2} = 0$, **2** $\sqrt{2}x + y + 9 - \sqrt{2} = 0$ i $\sqrt{2}x + y - 3 - \sqrt{2} = 0$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Odpowiedź	C	A	D	B	B	P, F

7. Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest drugiego stopnia

Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest liniowe, a drugie stopnia drugiego

7.1. a) $(0, -2)$, $(5, 3)$, b) $(2, 3)$, $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, c) $(-2, -2)$, $(1, 1)$.

7.2. a) $\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, b) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, c) $(2, 0)$.

7.3. a) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $(2, 3)$, b) $(-1, 3)$, c) nie ma rozwiązania.

7.4. *Wskazówka.* a) Wystarczy uzasadnić, że wyróżnik Δ równania $(4-3y)^2 + y^2 = 1$, otrzymanego przez podstawienie $x = 4-3y$ do drugiego równania, jest ujemny.

Interpretacja geometryczna układów równań drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi

7.6. a) $\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1\right)$, $\left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}, -1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$, b) $(1, 0)$, $(0, -1)$, c) $(1, 1)$.

7.7. a) $\left(\frac{1}{2}, -1\frac{3}{4}\right)$, $(4, 0)$, b) $(1, 1)$, c) brak punktów wspólnych.

7.8. a) Brak punktów wspólnych, b) $(-5, -2)$, $(-2, -5)$, c) $(2, 3)$, $(3, 2)$.

7.9. a) $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 16 \\ y = 4 - x \end{cases}$, b) $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} \\ y + 3 = 0 \end{cases}$, c) $\begin{cases} xy = 4 \\ y = x \end{cases}$.

7.10. a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, b) brak rozwiązania.

7.11. Dłuższy bok należy zwiększyć o 2, a krótszy zmniejszyć o 1.

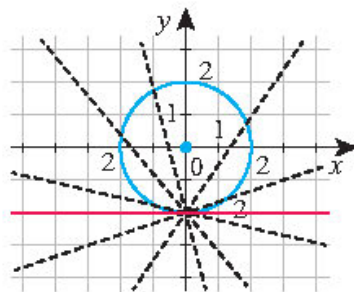
Wskazówka. $\begin{cases} 6 \cdot 4 = (6+x) \cdot (4-y) \\ 2(6+x) + 2(4-y) = 22 \end{cases}$, gdzie

x – wielkość o którą zwiększamy bok długości 6, y – wielkość o którą zmniejszamy bok długości 4.

7.12. $m = 0$. *Wskazówka.* Zauważ, że możliwa jest tylko jedna sytuacja.

7.13. Prosta z parabolą: • ma dwa punkty wspólne, gdy $m > -\frac{5}{4}$,

• ma jeden punkt wspólny, gdy $m = -\frac{5}{4}$, • nie ma punktów wspólnych, gdy $m < -\frac{5}{4}$.



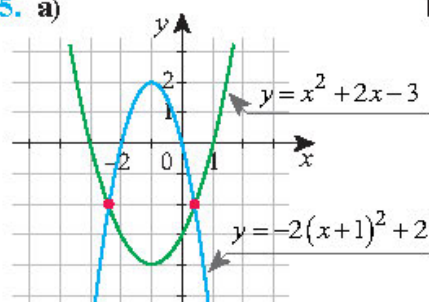
Wskazówka. Zauważ, że rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = x + m \end{cases}$ otrzymasz równanie kwadratowe

$x^2 - 5x + 5 - m = 0$ z parametrem m , które w zależności od wyróżnika $\Delta = 4m + 5$ może mieć dwa, jedno lub zero rozwiązań.

- 7.14. a)** 1 $m \in (-2; 2)$, 2 $m_1 = -2, m_2 = 2$, 3 $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, **b)** 1 $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$,
2 $m_1 = 0, m_2 = 2$, 3 $m \in (0; 2)$, **c)** 1 $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, 2 $m_1 = -2, m_2 = 2$,
3 $m \in (-2; 2)$, **d)** 1 nie istnieje takie m , 2 $m = 0$, 3 $m \neq 0$.

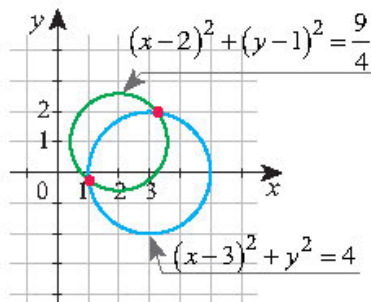
Układy równań z dwiema niewiadomymi, z których każde jest drugiego stopnia

7.15. a)



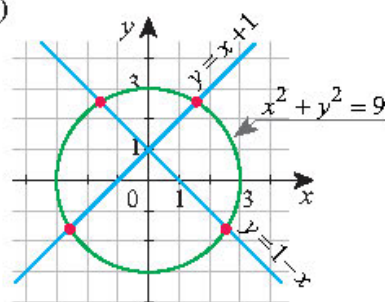
dwa rozwiązania

b)



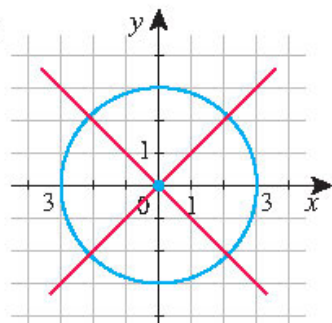
dwa rozwiązania

c)



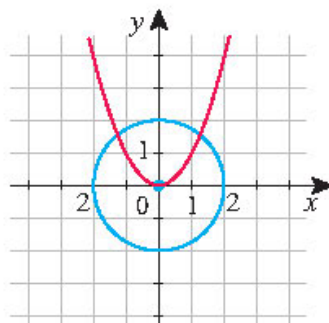
cztery rozwiązania

7.16. a)



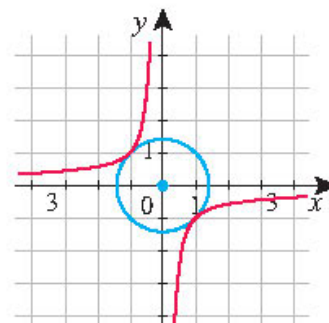
cztery rozwiązania

b)



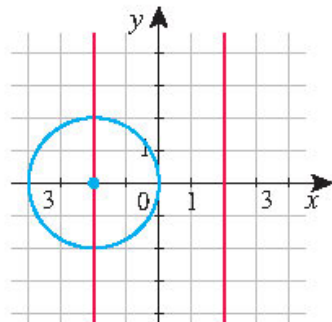
dwa rozwiązania

c)



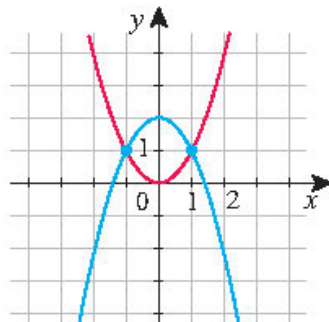
dwa rozwiązania

d)



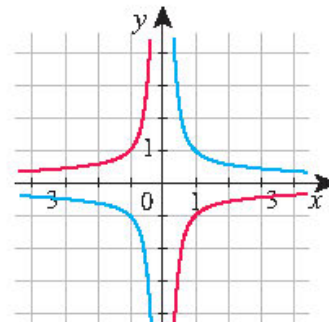
dwa rozwiązania

e)



dwa rozwiązania

f)



brak rozwiązań

Wskazówka. a) Aby stwierdzić, że równanie $x^2 - y^2 = 0$ opisuje dwie proste, możemy zastosować podstawienie jednorodne $y = t \cdot x$. Otrzymujemy równanie $x^2 - (tx)^2 = 0$, skąd $x^2(1 - t^2) = 0$, zatem $1 - t^2 = 0$, więc $t = \pm 1$. Otrzymane wartości 1 i -1 podstawiamy do równania $y = t \cdot x$.

7.17. a) $(-1, -3)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{71}{9}\right)$, b) brak rozwiązania, c) $(-1, 2)$.

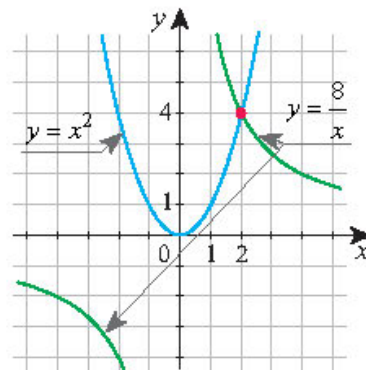
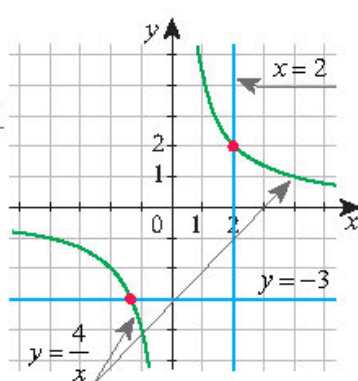
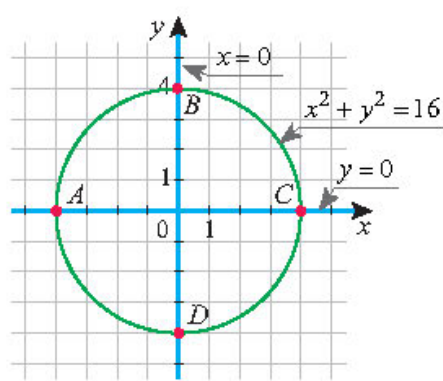
7.18. a) $(0, -2)$, $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, b) $(0, 1)$, c) brak rozwiązania.

7.19. a) $(-3, 7)$, $(3, -7)$, $(-7, 3)$, $(7, -3)$, b) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$,

c) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

7.20. a) $(2, 3)$, b) brak rozwiązania.

7.21. a) $A = (-4, 0)$, $B = (0, 4)$, b) $A = \left(-\frac{4}{3}, -3\right)$, $B = (2, 2)$, c) $A = (2, 4)$.
 $C = (4, 0)$, $D = (0, -4)$,



7.22. 2. *Wskazówka.* Punkty przecięcia okręgów to $(-1, 1)$ i $(1, 1)$.

7.23. a) 4 i 5, b) 3 i 6.

Wskazówka. a) $\begin{cases} a \cdot b = 20 \\ 2a + 2b = 18 \end{cases}$, b) $\begin{cases} a \cdot b = 18 \\ a^2 + b^2 = 45 \end{cases}$, gdzie a i b to długości boków prostokąta.

7.24. $(20 - 10\sqrt{2}) \times (20 + 10\sqrt{2})$.

7.25. Oznacz: k – długość wysokości trójkąta ABC , $|AB| = 2a$ – długość podstawy trójkąta ABC .

a) $h = 4$, $|AB| = 6$ lub $h = 3$ i $|AB| = 8$, b) taki trójkąt nie istnieje.

7.26. $100 \text{ m} \times 30 \text{ m}$.

7.27. Przed naprawą drogi $V = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $t = 20$ minut, po naprawie $V = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wskazówka. 5 minut to $\frac{1}{12}$ godziny.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Odpowiedź	C	D	P, F	A – 3, B – 4, C – 2, D – 1

8. Rodzaje trójkątów i ich punkty szczególne

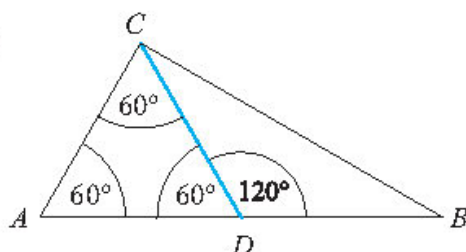
Rodzaje trójkątów

- 8.1. Trójkąt jest: a) rozwartokątny, b) rozwartokątny.
- 8.2. a) Nie, b) tak.
- 8.3. a) Nie, b) tak, c) tak, d) nie, e) tak, f) nie.
- 8.4. Trójkąt jest: a) rozwartokątny, b) prostokątny, c) ostrokątny.
- 8.5. 7 lub 8.
- 8.6. *Wskazówka.* Zauważ, że $x + 4 < x + (x + 2)$.
- 8.7. a) $a = -4$, b) nie ma takiego a .

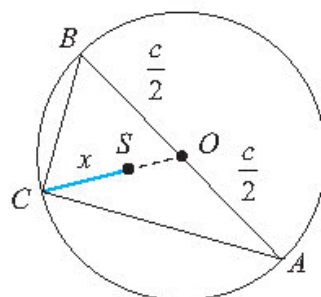
Środek ciężkości trójkąta i jego własności

- 8.9. a) 30° , 60° , 90° , b) 15° , 75° , 90° .

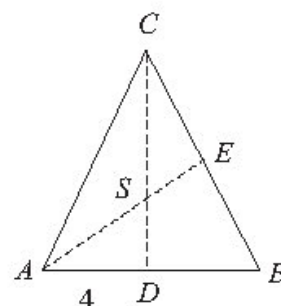
- 8.10. *Wskazówka.* a)



- 8.11. 14. *Wskazówka.* Zauważ, że w trójkącie prostokątnym ABC środkowa CO jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC , więc $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}c$.

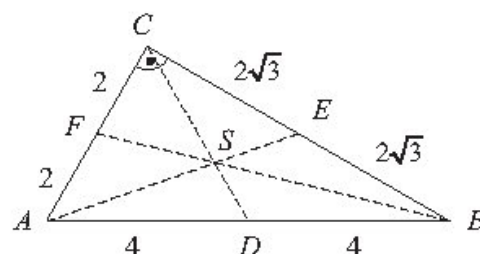


- 8.12. 14. *Wskazówka.* $|AS| = 6$, więc $|SD| = 2\sqrt{5}$, skąd $|CD| = 6\sqrt{5}$.



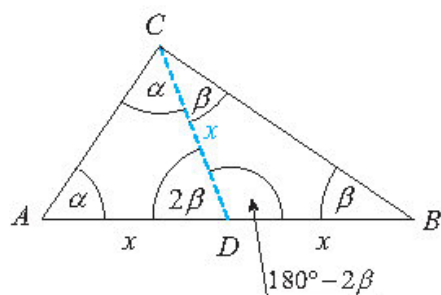
- 8.13. 4, $2\sqrt{13}$, $2\sqrt{7}$.

Wskazówka. Zauważ, że trójkąt ADC jest równoboczny.

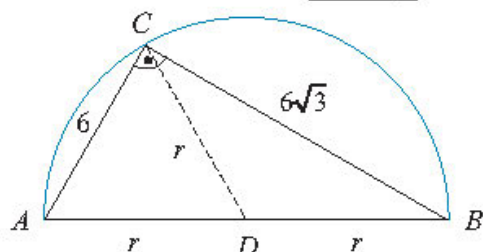


8.14. Wskazówka. Zauważ, że trójkąty ADC i BDC

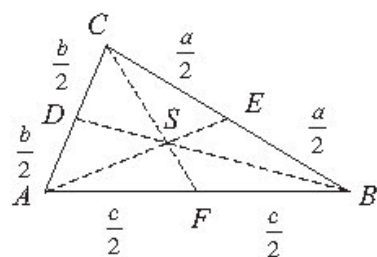
są równoramienne, więc $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$.



8.15. 6, $3\sqrt{13}$, $3\sqrt{7}$. **Wskazówka.** Zauważ, że jedna ze środkowych jest równa połowie przeciwprostokątnej.



8.16. Wskazówka. Przyjmij oznaczenia $s_1 = |AE|$, $s_2 = |BD|$, $s_3 = |CF|$ i skorzystaj z nierówności trójkąta.



8.17. Wskazówka. Zauważ, że trójkąty ADC i DBC mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka C .

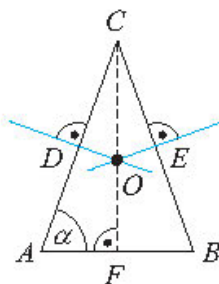
Środek okręgu opisanego na trójkącie

8.18. 45° , 45° .

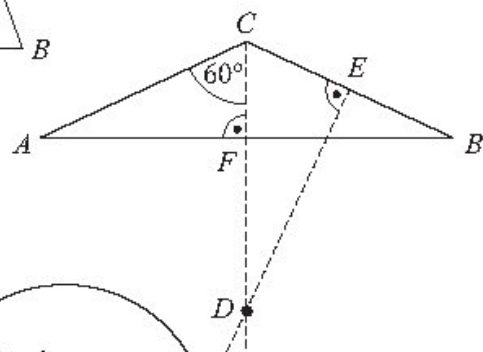
8.19. $10 + 10\sqrt{2}$. **Wskazówka.** Zauważ, że trójkąt jest prostokątny równoramienny.

8.20. a) $R = 4$, b) 4 i $4\sqrt{3}$.

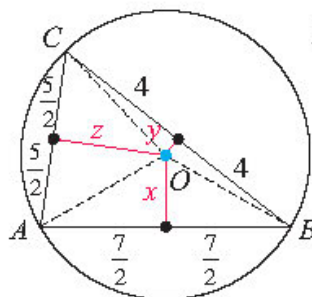
8.21. Wskazówka. Zauważ, że $\triangle AFC \sim \triangle ODC$.



8.22. $12 + 6\sqrt{3}$. **Wskazówka.** Zauważ, że trójkąt CED jest prostokątny, w którym $|CD| = 6$, $|CE| = 3$ i $|DE| = 3\sqrt{3}$, więc $|BC| = 6$.



8.23. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. **Wskazówka.** $x = \frac{7\sqrt{3}}{6}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z = \frac{11\sqrt{3}}{6}$.



8.25. a) $R = 3\sqrt{2}$, b) $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, c) $R = 16,9$, d) $R = \frac{25}{4}$.

8.26. Maszt powinien stać w środku okręgu opisanego na trójkącie utworzonym między trzema ulicami.

Ortocentrum trójkąta i jego własności

8.27. a) $x = 3\sqrt{2}$, b) $x = 8$, c) $x = 3,6$.

8.28. $|AC| = 10\sqrt{3}$, $|BC| = 10\sqrt{6}$, $|AB| = 30$.

8.29. $\frac{9}{2}\sqrt{2}$, $\frac{18}{5}\sqrt{5}$. *Wskazówka.* Najkrótsza jest wysokość poprowadzona na najdłuższy bok.

8.30. a) $48\sqrt{3}$, b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}d^2$.

8.32. 30° .

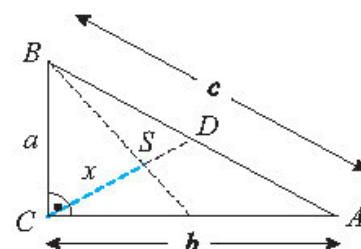
8.33. *Wskazówka.* Zauważ, że $\triangle AEC \sim \triangle ABD$ (kkk).

8.34. 5. *Wskazówka.* Zauważ, że $|AD|^2 = 13^2 - x^2$ i $|AD|^2 = 15^2 - (14-x)^2$, więc $13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$.

8.35. 9 i 16.

8.36. $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. *Wskazówka.* Zauważ, że $|CD| = \frac{1}{2}c$ i $x = \frac{2}{3}|CD|$,

gdzie $c = \sqrt{a^2+b^2}$.



Środek okręgu wpisanego w trójkąt

8.37. a) BC: 4 i 12, AB: 12 i 8, AC: 4 i 8, b) BC: 6 i 10, AC: 6 i 10, AB: 6 i 6.

8.38. a) $r = \frac{3}{2}$, b) $r = 2,4$, $r = 9\frac{1}{3}$.

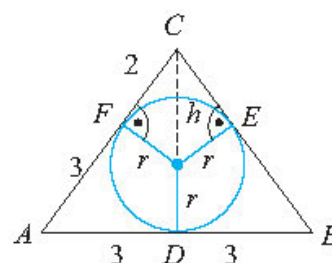
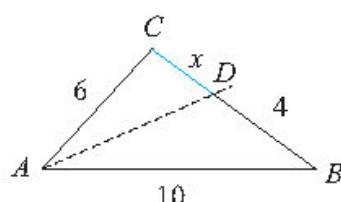
Wskazówka. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku. $2^2 + r^2 = (h-r)^2$,

gdzie $h = \sqrt{5^2 - 3^2}$.

8.39. a) $r = 17$, b) $r = 22$, c) $r = 12$.

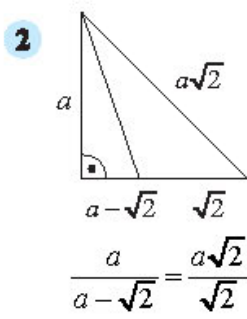
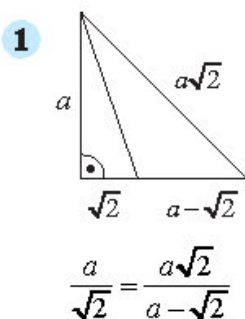
8.40. a) 2,4, b) $5\frac{5}{31}$ i $4\frac{26}{31}$.

Wskazówka. a) $\frac{6}{x} = \frac{10}{4}$.

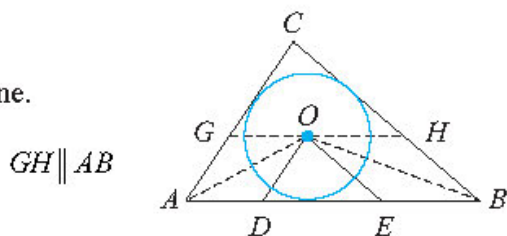


8.41. 2 lub 1.

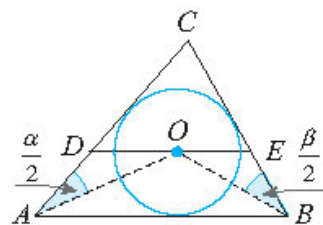
Wskazówka. Przyjmij oznaczenia jak na rysunkach.



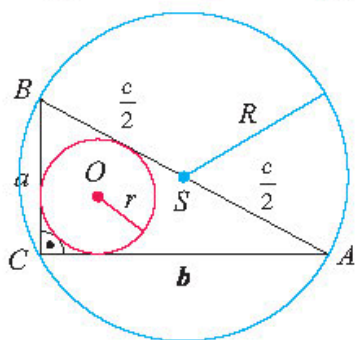
8.43. *Wskazówka.* Zauważ, że trójkąty AOD i BOE są równoramienne.



8.44. *Wskazówka.* Zauważ, że trójkąty AOD i BOE są równoramienne.



8.45. *Wskazówka.* Zauważ, że $R = \frac{c}{2}$ i $r = \frac{a+b-c}{2}$.



Trójkąty na płaszczyźnie kartezjańskiej

8.46. Trójkąt ABC jest: a) równoramienny, b) różnoboczny, c) równoboczny.

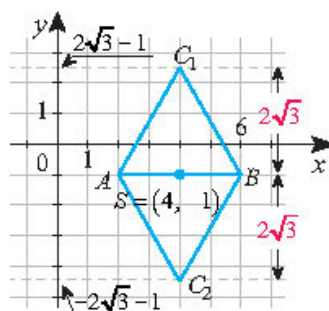
8.47. Trójkąt jest: a) prostokątny, b) rozwartokątny, c) rozwartokątny.

8.48. a) Nie, b) tak, $R = \frac{\sqrt{26}}{2}$, $r = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{26}}{2}$, c) nie, d) tak, $R = 2\sqrt{5}$, $r = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5}$.

8.49. a) $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, b) $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$, c) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

8.50. a) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{25}{4}$, b) $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 65$, c) $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{2}$.

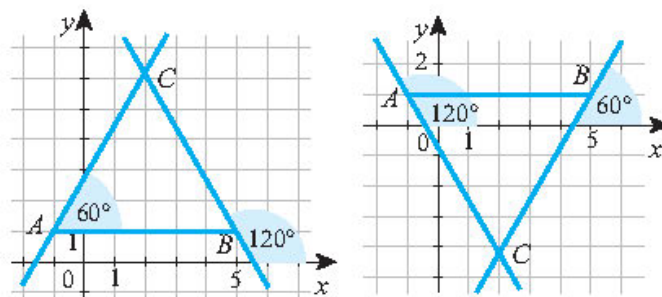
8.51. $C_1 = (4, 2\sqrt{3} - 1)$, $C_2 = (4, -2\sqrt{3} - 1)$. *Wskazówka.*



8.52. $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} + 1$ i $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3} + 1$ lub $y = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3} + 1$ i $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 1$.

Wskazówka. $y - y_A = \operatorname{tg} 60^\circ (x - x_A)$

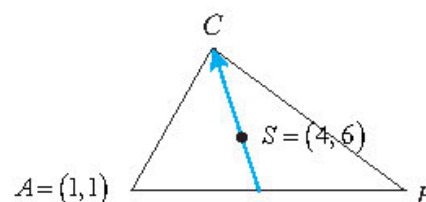
i $y - y_B = \operatorname{tg} 120^\circ (x - x_B)$.



8.53. $B = (5, 3)$ i $C = (6, 14)$.

Wskazówka. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Zauważ, że $S_1 \bar{C} = 3 \cdot S_1 \bar{S}$, gdzie $S_1 = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.



8.54. a) $a = 3$, $b = -1$, $c = 5$, **b)** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Odpowiedź	A	B	C	B	C	Kolejno: P, P, P.	A i D.		$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{85}{9}$

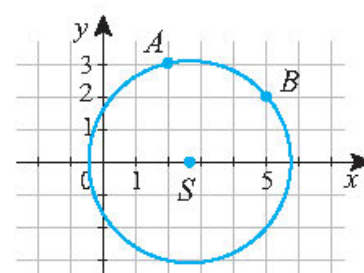
Wskazówki

8. Zauważ, że $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{a^2 b^2} = \left(\frac{c}{ab}\right)^2$, gdzie $c = \frac{ab}{h}$, bo $P_\Delta = \frac{1}{2}ab$ i $P_\Delta = \frac{1}{2}ch$.

9. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

Zauważ, że $|SA|^2 = |SB|^2 = r^2$, czyli

$(a-2)^2 + (0-3)^2 = (a-5)^2 + (0-2)^2$, skąd $a = \frac{8}{3}$.



9. Obrazy figur w symetrii względem osi układu współrzędnych i względem jego początku

Obrazy figur w symetrii względem osi układu współrzędnych

9.1. a) Ci J, Di D, Ei E, Fi F, **b)** Ai B, Gi H, Di F, Ei E.

9.2. a) $P' = (-3, -4)$, $P'' = (3, 4)$, **b)** $P' = (2, 3)$, $P'' = (-2, 3)$, **c)** $P = (2, 0)$, $P' = (2, 0)$,

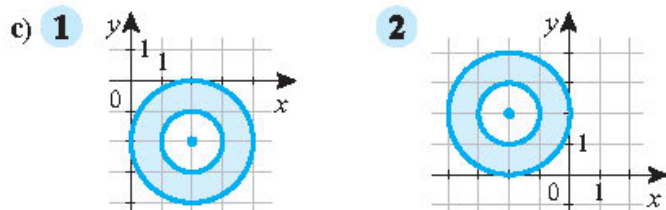
d) $P' = (0, 0)$, $P'' = (0, 0)$.

9.3. a) 1 $A' = (-1, 2)$, $B' = (4, 1)$, $C' = (1, -3)$, $D' = (-3, -1)$,

2 $A'' = (1, -2)$, $B'' = (-4, -1)$, $C'' = (-1, 3)$, $D'' = (3, 1)$,

b) 1 $A' = (-2, -1)$, $B' = (1, -3)$, $C' = (1, 4)$, $D' = (3, 2)$,

2 $A'' = (2, 1)$, $B'' = (-1, 3)$, $C'' = (-1, -4)$, $D'' = (-3, -2)$,



d) 1 $A' = (-3, -1)$, $B' = (0, 4)$, $C' = (0, -3)$, 2 $A'' = (3, 1)$, $B'' = (0, -4)$, $C'' = (0, 3)$,

e) 1 $A' = (1, -1)$, $B' = (6, -3)$, $C' = (1, -3)$, 2 $A'' = (-1, 1)$, $B'' = (-6, 3)$, $C'' = (-1, 3)$,

f) 1 $A' = (-3, 0)$, $B' = (0, 2)$, $C' = (3, 0)$, 2 $A'' = (3, 0)$, $B'' = (0, -2)$, $C'' = (-3, 0)$.

9.4. Wskazówka. $P' = (x_p, -y_p)$, $P'' = (-x_p, y_p)$.

9.5. 1 a) $y = \frac{2}{3}x$, b) $y = -3x - 7$, c) $y = -2x - 5$, d) $y = \frac{5}{3}x - 5$,

2 a) $y = \frac{2}{3}x$, b) $y = -3x + 7$, c) $y = -2x + 5$, d) $y = \frac{5}{3}x + 5$.

9.6. a) 1 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$, 2 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$,

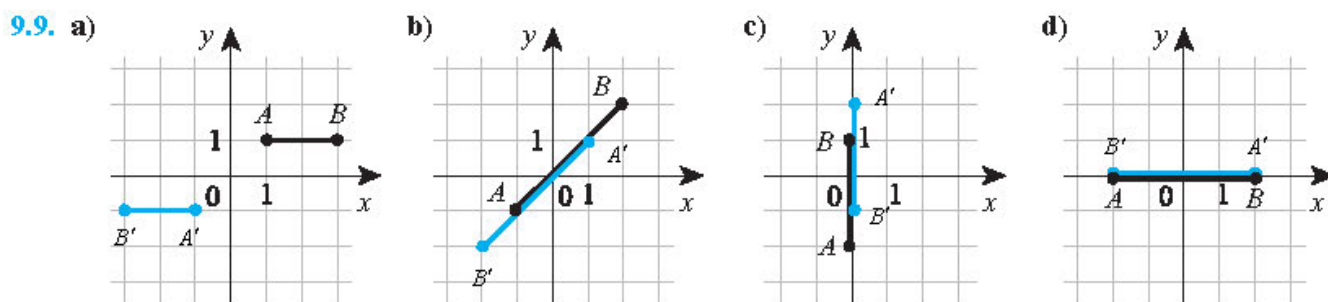
b) 1 $x^2 + (y+3)^2 = 4$, 2 $x^2 + (y-3)^2 = 4$,

c) 1 $(x+4)^2 + y^2 = 16$, 2 $(x-4)^2 + y^2 = 16$.

9.7. a) $B = (11, -2)$, $C = (8, 5)$, b) $B = (3, -15)$, $C = (-1, -6)$.

Obrazy figur w symetrii względem początku układu współrzędnych

9.8. a) $B = (-4, -3)$, b) $A = (-2, 1)$ i $B = (2, -1)$, c) $A = (8, -8)$ i $B = (-8, 8)$, d) $A = (0, 4)$.



9.11. 1 - B, 2 - C, 3 - A, 4 - D.

9.12. $A' = (5, 3)$, $B' = (0, 2)$, $C' = (3, -1)$, $D' = (6, 2)$.

9.13. a) $C = (3, 8)$, $D = (-1, 12)$, b) $C = (2, -2)$, $D = (-3, -4)$, c) $C = (0, 2)$ i $D = (-5, 3)$.

9.14. a) $S = (2, 1)$, $R = 5$, b) nie, bo środek S okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na boku AC , czyli trójkąt jest prostokątny, c) $A' = (-1, -3)$, $B' = (6, -2)$, $C' = (5, 5)$.

9.15. a) $D = (0, 6)$, b) $y = -\frac{3}{4}x + 6$, c) 30, d) $A' = (-12, 3)$, $B' = (-8, 0)$, $C' = (-12, 0)$, $O' = (0, 0)$, $D' = (0, -6)$.

Wskazówka. a) $|AC| = 3$, zatem $|OD| : 3 = 2$, skąd $|OD| = 6$. Jeżeli $P_{\Delta BOD} : P_{\Delta ABC} = 4$, to $|OD| : |AC| = 2$.

9.16. a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$, b) $x^2 + (y+3)^2 = 4$, c) $(x-4)^2 + y^2 = 16$.

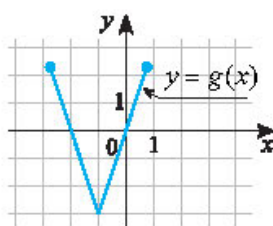
Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Odpowiedź	A i D	C	B	A	Kolejno: P, P, F	A	D

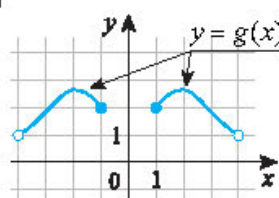
10. Przekształcanie wykresów funkcji

Przekształcanie wykresów funkcji przez symetrię względem osi układu współrzędnych

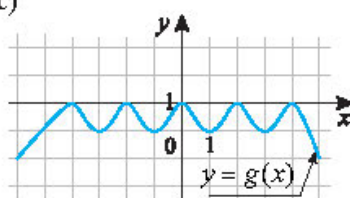
10.1. a)



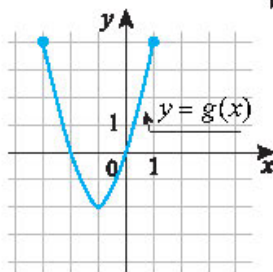
b)



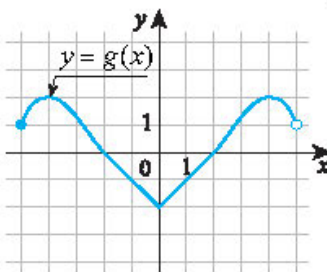
c)



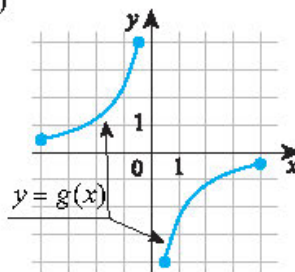
10.2. a)



b)



c)



10.3. 1 - 7, 2 - 10, 3 - 6, 4 - 9, 5 - 8.

10.4. a) 1 $g(x) = -x$, 2 $g(x) = -x$, b) 1 $g(x) = 2$, 2 $g(x) = -2$,

c) 1 $g(x) = -x^2 + x$, 2 $g(x) = x^2 + x$, d) 1 $g(x) = -\frac{1}{x} + 2$, 2 $g(x) = -\frac{1}{x} - 2$.

10.5. Do wykresu funkcji należą punkty: **a)** **1** $(-4, 2)$, $(1, -3)$, $(4, 0)$,

2 $(-5, -2)$, $(-1, 2)$, $(3, 2)$, $(5, -2)$, **3** $(-3, 2)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(3, -2)$,

b) **1** $(4, -2)$, $(-1, 3)$, $(-4, 0)$, **2** $(5, 2)$, $(1, -2)$, $(-3, -2)$, $(-5, 2)$,

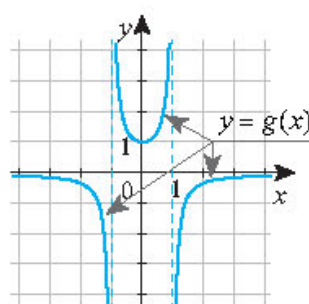
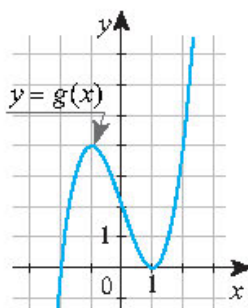
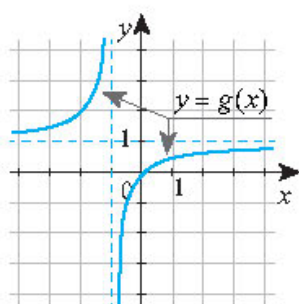
3 $(3, -2)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 0)$, $(-3, 2)$.

10.6. Względem osi x ($f \rightarrow f_1$), względem osi y ($f \rightarrow f_2$).

10.7. a) $g(x) = \frac{x}{x+1}$,

b) $g(x) = x^3 - 3x + 2$,

c) $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$.



10.8. a) Tak, **b)** $g(x) = f(-x)$.

Przesunięcie wykresów funkcji równoległe do osi y i równoległe do osi x

10.9. a) $\vec{AB} = [-2, 0]$, **b)** $\vec{AB} = [0, -6]$, **c)** $\vec{AB} = [11, 0]$, **d)** $\vec{AB} = [0, -10]$.

10.10. a) $B = (-4, 0)$, $C = (-4, 2)$, **b)** $B = (4, 3)$, $C = (4, 0)$, **c)** $B = (1, 0)$, $C = (1, -1)$,

d) $B = (0, -5)$, $C = (0, -10)$.

10.11. a) $\vec{u} = [-2, 0]$, **b)** $\vec{u} = [1, 0]$, **c)** $\vec{v} = [0, 2]$, **d)** $\vec{v} = [0, -1]$, **e)** $\vec{u} = [\sqrt{2} - 1, 0]$, **f)** $\vec{v} = [0, 2 - 2\sqrt{3}]$.

10.12. Wskazówka. Wykres funkcji f przesun równoległe wzdłuż: **a)** osi x o 4 jednostki w lewo,

b) osi x o 2 jednostki w prawo, **c)** osi y o 3 jednostki w górę, **d)** osi y o 1 jednostkę w dół.

10.13. $g_1(x) = \sqrt{x-7}$, $\vec{u} = [7, 0]$, $g_2(x) = \sqrt{x+1} + 3$, $\vec{w} = [-1, 3]$.

10.14. Wskazówka. Zauważ, że: **a)** $f(x) = g(x) + 2$, **b)** $f(x) = g(x) - 2$, **c)** $f(x) = g(x+1)$,

d) $f(x) = g(x-3)$, **e)** $f(x) = g(x+1) + 2$, **f)** $f(x) = g(x-3) - 2$.

Wykres funkcji g przesun równoległe wzdłuż: **a)** osi y o 2 jednostki w górę, **b)** osi y o 2 jednostki w dół,

c) osi x o 1 jednostkę w lewo, **d)** osi x o 3 jednostki w prawo,

e) osi x o 1 jednostkę w lewo, a następnie wzdłuż osi y o 2 jednostki w górę,

f) osi x o 3 jednostki w prawo, a następnie wzdłuż osi y o 2 jednostki w dół.

10.15. Wskazówka. Wykres funkcji f : a) przekształcono symetrycznie względem osi y , b) przekształcono symetrycznie względem osi x , c) przesunięto wzdłuż osi y o 2 jednostki w górę, d) przesunięto wzdłuż osi y o 2 jednostki w dół, e) przekształcono symetrycznie względem osi x , a następnie przesunięto równolegle wzdłuż osi y o 2 jednostki w górę, f) przekształcono symetrycznie względem osi y , a następnie przesunięto równolegle wzdłuż osi y o 2 jednostki w dół, g) przesunięto równolegle wzdłuż osi x o 3 jednostki w lewo, h) przekształcono symetrycznie względem osi x , a następnie przesunięto równolegle wzdłuż osi x o 3 jednostki w lewo, i) przesunięto równolegle wzdłuż osi x o 3 jednostki w lewo, a następnie wzdłuż osi y o 2 jednostki w górę.

10.16. Wykres funkcji f przesunięto o wektor: a) $[0, 5]$, b) $[1, 0]$, c) $[0, -2]$, d) $[2, 0]$, e) $[0, -\sqrt{2}]$, f) $[-4, -3]$.

10.17. a) $g(x) = -x + 2$, $h(x) = -x + 4$, b) $g(x) = 2$, $h(x) = 5$,

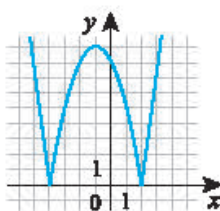
c) $g(x) = \frac{1}{x-1}$, gdzie $x \neq 1$; $h(x) = \frac{1}{x} + 3$, gdzie $x \neq 0$,

d) $g(x) = \sqrt{x-1}$, gdzie $x \geq 1$; $h(x) = \sqrt{x} + 3$, gdzie $x \geq 0$, e) $g(x) = 2^{x-1}$, $h(x) = 2^x + 3$,

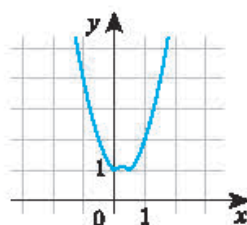
f) $g(x) = 3^{-x+1}$, $h(x) = 3^{-x} + 3$.

Wykres funkcji $y = |f(x)|$

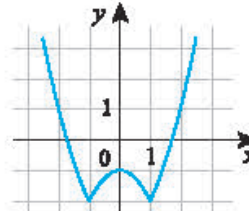
10.20. a) $y = |x^2 + 2x - 8|$,



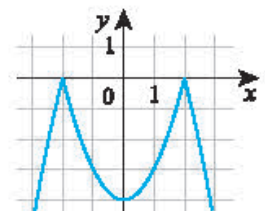
b) $y = |2x^2 - x| + 1$,



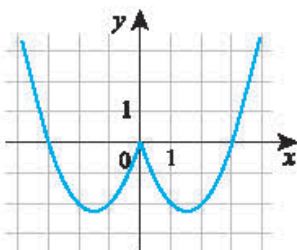
c) $y = |-x^2 + 1| - 2$,



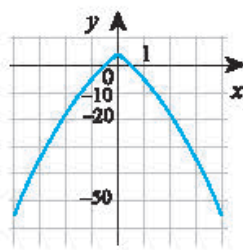
d) $y = -|x^2 - 4|$,



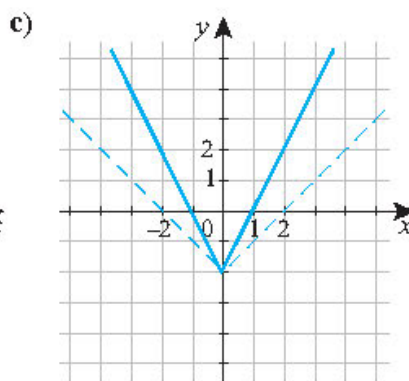
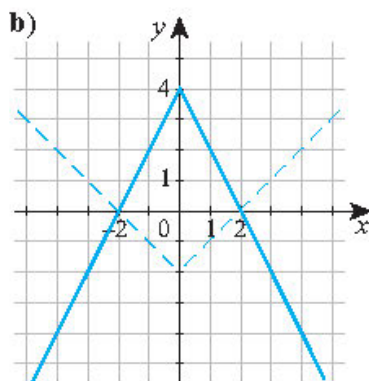
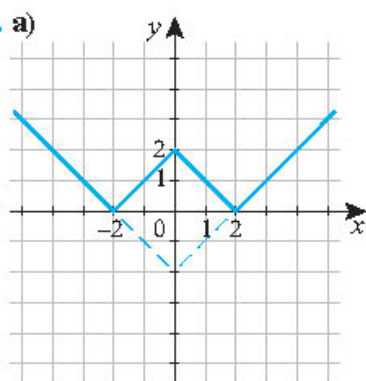
e) $y = x^2 - 3|x|$,



f) $y = -2x^2 - 7|x| + 4$.



10.24. a)



Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1	2	3	4
Odpowiedź	C	A - 2, B - 3, C - 1, D - 6, E - 5, F - 4	T - A	Kolejno: F, F, F

11. Wzory skróconego mnożenia

Sześcian sumy i różnicy dwóch wyrażeń

11.1. a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, b) $27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$, c) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$,

d) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$, e) $\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{27}$, f) $\frac{27}{8}x^3 - 27x^2y + 72xy^2 - 64y^3$,

g) $81x^4 + 108x^3y + 54x^2y^2 + 12xy^3 + y^4$, h) $1 - 5x^2 + 10x^4 - 10x^6 + 5x^8 - x^{10}$.

11.2. a) $-m^3 + 10m^2 + 2m + 45$, b) $-2x^3 + 24x^2 - 96x + 128$, c) $-7x^3 + 9$, d) $-3x^2 - 16$,

e) $72a^2 - 2a + 57$, f) $3(-a^2b + ab^2 - ac^2 + a^2c - b^2c + bc^2)$.

11.3. a) $22\sqrt{2} + 25$, b) $54 - 30\sqrt{3}$, c) $3 + 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}$, d) $-5 - 6\sqrt[3]{9} + 12\sqrt[3]{3}$, e) $1 - 3\sqrt[3]{18} + 3\sqrt[3]{12}$,

f) $\sqrt[4]{8} + 3\sqrt[4]{4} + 3\sqrt[4]{2} + 1$, g) $5 - 9\sqrt[3]{12} + 6\sqrt[3]{18}$, h) $148\sqrt{5} - 234\sqrt{2}$, i) $9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$.

Wskazówka. g) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4})^3 = (\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2})^3$, i) $(\sqrt[6]{27} - \sqrt[6]{8})^3 = (\sqrt[6]{3^3} - \sqrt[6]{2^3})^3 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$.

11.4. a) $(x+3)^3$, b) $(x-3)^3$, c) $(x+4)^3$, d) $(2x-3)^3$, e) $\left(\frac{1}{3}x-1\right)^3$, f) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^3$.

11.5. a) $(2x-5y)^3 = 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$, b) $(3x+4y)^3 = 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3$,

c) $(2x-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$, d) $\left(\frac{1}{2}m-4\right)^3 = \frac{1}{8}m^3 - 3m^2 + 24m - 64$.

Suma i różnica sześciątów dwóch wyrażeń

11.6. a) $1 - x^3$, b) $x^3 + 1$, c) $343 - x^3$, d) $729 + y^3$, e) $8x^3 - 6\sqrt{6}$, f) $2\sqrt{2}x^3 + 0,125$.

11.7. a) $(5x+1)(25x^2-5x+1)$, b) $(0,2-x)(0,04+0,2x+x^2)$, c) $(7a+9b)(49a^2-63ab+81b^2)$,

d) $(\sqrt[3]{6}x-1)(\sqrt[3]{36}x^2+\sqrt[3]{6}x+1)$, e) $(\sqrt[3]{5}x+1)(\sqrt[3]{25}x-\sqrt[3]{5}x+1)$, f) $(y-\sqrt[3]{4})(y^2+\sqrt[3]{4}y+\sqrt[3]{16})$,

g) $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})$, h) $(\sqrt[3]{3}x-\sqrt[3]{2}y)(\sqrt[3]{9}x^2+\sqrt[3]{6}xy+\sqrt[3]{4}y^2)$, i) $(x-\sqrt[6]{2})(x^2+\sqrt[6]{2}x+\sqrt[3]{2})$.

Wskazówka. i) $\sqrt{2} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^3 = (\sqrt[6]{2})^3$.

11.8. Kolejno: a) $2xy$, $4y^2$, b) $4x$, 1 , c) $3x$, $5y$, d) $64x^2$, $16xy$, $4y^2$, e) $\sqrt{2}x$, $\sqrt{3}$,

f) $\sqrt{5}x$, $\sqrt{2}y$, $5x^2$, $2y^2$.

11.9. a) $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)$, b) $-2(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$, c) $-\sqrt[3]{4}+2$, d) $\frac{2}{5}(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$, e) $4(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$,

f) $2(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{7})$.

11.10. a) $-p^3+24p^2-24p+10$, b) $-8p^3+p^2+2p-124$.

11.11. a) $x=38$ i $y=-17$, b) $x=51$ i $y=100$, c) $x=-22$ i $y=10$, d) $x=-207$ i $y=94$.

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia

11.13. a) $(x-1)(x^2+4x+7)$, b) $(x+5)(x^2+x+7)$, c) $(2x-5)(4x^2+4x+13)$, d) $-9(x^2-x+1)$,

e) $9(x-1)(x^2-x+1)$, f) $(x-5)(19x^2+5x+7)$.

11.16. a) 2, b) 198, c) 102.

11.17. a) -4, b) -12, c) -14, d) 40.

11.18. 9.

11.20. *Wskazówka.* $c = -(a+b)$, więc $a^3+b^3+c^3 = a^3+b^3-(a+b)^3$.

11.23. *Wskazówka.* a) $10^n+8 = (10^n-1)+9$, b) $10^n+4^n-2 = (10^n-1)+(4^n-1)$.

11.24. *Wskazówka.* $a^n+b^n = a^n-(-b^n)$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Odpowiedź	A i D	A	A	C	D	T-B

Wskazówka. 3. $(a+3b)^2=25$, skąd $a^2+9b^2=31$ i $a^3+27b^3=(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$.

12. Wielomiany

Wielomiany jednej i wielu zmiennych

12.1. a) Tak, $a_2 = 2$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_0 = -5$, b) tak, $a_3 = 5$, $a_2 = -\sqrt{3}$, $a_1 = -4$, $a_0 = 1$,

c) nie jest wielomianem, d) tak, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$. *Wskazówka.* d) $H(x) = x^2 + 1$.

12.2. a) $W(x) = 2x^4 + 3x^3 - x + \sqrt{2}$, $\text{st.}[W(x)] = 4$, b) $W(x) = \sqrt{2}x^5 - 5$, $\text{st.}[W(x)] = 5$.

12.3. a) $P(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - x - 5$, $\text{st.}[P(x)] = 4$, $a_4 = 1$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 3$, $a_1 = -1$, $a_0 = -5$,

b) $P(y) = -2y^5 - 7y^2 + 4y + 4$, $\text{st.}[P(y)] = 5$, $a_5 = -2$, $a_4 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2 = -7$, $a_1 = 4$, $a_0 = 4$,

c) $P(x) = -6x^2 - 10x + 3$, $\text{st.}[P(x)] = 2$, $a_2 = -6$, $a_1 = -10$, $a_0 = 3$, d) $P(z) = -6z^3 - 18z$, $\text{st.}[P(z)] = 3$,
 $a_3 = -6$, $a_2 = 0$, $a_1 = -18$, $a_0 = 0$.

12.4. a) $W(1) = 1$, b) $W(1) = -1$, c) $W(1) = 32$, d) $W(1) = 1$.

12.5. a) $W(-1) = 7$, b) $W(\sqrt{2}) = 0$, c) $W(1 + \sqrt{2}) = 0$, d) $W\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8}$.

12.6. a) $W(0) = 8$, b) $W(0) = -8$, c) $W(0) = 24$, d) $W(0) = 3\,628\,800$.

12.7. a) $m = -1$ i $n = 7$, b) $m = 2$ i $n = 5$, c) $m = 1$ i $n = 6$.

12.8. a) $a = -3$, $b = 10$, $c = 1$, b) $a = 4$, $b = -3$, $c = -3$.

Suma, różnica oraz iloczyn wielomianów

12.9. a) $W(a) = (1 - \sqrt{2})a^2 + a - 1$, b) $W(x) = (\sqrt{5} - 1)x^3 + (5 + \sqrt{5})x - 2$,

c) $W(y) = y^3 + (\sqrt{2} - 1)y^2 + (1 - \sqrt{2})y - 1$, d) $W(x) = -ax + 2a^2$.

12.10. a) $x + 1$, b) $2x^3 - 5x + 1$, c) $x^3 - 4x - 2$, d) $-x^6 + 5x^4 - x^3 - 6x^2 + 3x$, e) $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3$,
f) $-x - 2$, g) $2x^4 + 10x^3 - 4x^2 - 23x + 5$.

12.11. a) $W(x) = 3x^2 + 2(1 - \sqrt{2})x + 1$, $H(x) = 3x^2 - 2(2 - \sqrt{2})x + 7$,

b) $W(x) = (25m + 23)x^2 - 24(2m + 1)x + 25m + 2$, $H(x) = -(7m + 41)x^2 + 72x + 7m - 34$.

12.12. a) $G(a, b) = -(a^3 + 6a^2b - 2a^2 + 12ab^2 + 8b^3 + 2b^2)$, -27 , b) $H(x, y) = 4x^2 - 24xy - 9y^2$, $94, 75$.

12.13. $a = -1$ i $b = 1$.

12.14. $a = 2$ i $b = 0$.

Dzielenie wielomianu przez dwumian

12.15. a) $x^2 - 3x - 9$, b) $x^2 + 4x + 4$, c) $3x^2 - 7x + 2$, d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

12.16. a) $3x^3 - 6x^2 + 13x - 28$, $R(x) = 61$, b) $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 10x + 21$, $R(x) = 44$,

c) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $R(x) = -1$, d) $x^3 + 2x^2 + 4x - 8$, $R(x) = -16$,

e) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $R(x) = 0$.

12.17. a) $W(x) = (x+3)(x^2 - 13x + 41) - 130$, b) $W(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 7) - 8$,

c) $W(x) = (x-2)(3x^3 + 6x^2 + 12x + 21) + 44$, d) $W(x) = (x-1)(2x^3 + 3x^2 + 3x + 7) + 10$.

12.18. a) $W(-1) = 0$, $x^2 - 4x + 2$, b) $W(2) = 0$, $x^2 + x + 1$, c) $W(1) = 0$, $x^2 - x - 2$, d) $W(-2) = 0$, $7x^2 - 12x - 4$.

12.19. a) $R(x) = W(-1) = -6$, $R(x) = W(-2) = 0$, $R(x) = W(-3) = 0$,

b) $R(x) = W(-1) = -40$, $R(x) = W(2) = -22$, $R(x) = W(4) = 0$.

12.20. a) $m = -82$, b) $m = -2004$, c) $m = 100$.

12.21. Np.: a) $W(x) = (x+2)(x^2 + 1)$, b) $W(x) = x(x-2)(x+3)$, c) $W(x) = (1-3x)(1+3x)(x+3)$.

12.22. a) 8, b) 24, c) 40.

12.23. a) $m = -2$ lub $m = 2$, b) $m = -2$ lub $m = 1$.

12.24. $m = -10$ lub $m = 10$.

12.25. a) $R(x) = 3$, b) $R(x) = 2a + 1$, c) $R(x) = 8b^3$, d) $R(x) = 0$.

12.26. $R(x) = 3$.

Pierwiastki wielomianu jednej zmiennej i twierdzenie Bezoute'a

12.27. 0 i 1.

12.28. a) $W(x) = (x+1)(x-4)$, b) $W(x) = (x+2)(-x^2 + 2x + 2)$, c) $W(x) = (x-1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 9)$,

d) $W(x) = (x-3)(x^4 - 2x + 1)$.

12.29. a) $m = 1$, b) $m = -14$.

12.30. $a = -7$ i $b = -4$.

12.31. a) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 11 \end{cases}$.

12.32. a) $-2, 2$, b) brak pierwiastków, c) $-1, -2, -3$, d) $-2, -1, 1, 3$.

12.33. a) Tak, są to liczby: $-\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, b) tak, są to liczby: $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, c) nie,

d) tak, są to liczby: $-1, -\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, 1$.

12.34. a) -2 , b) $-1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $-2, 1, \frac{3}{2}$.

12.36. a) $-4, -2, 0, 3$, b) $1, 2, 3$, c) $-7, 0, 1, 2$, d) $-2, \sqrt{3}, 5, 7$.

12.37. a) $-3, 1$; -3 – pierwiastek dwukrotny, 1 – pierwiastek jednokrotny,

b) $-3, 1$; -3 – pierwiastek trzykrotny, 1 – pierwiastek dwukrotny,

c) $-2, 0$; -2 – pierwiastek trzykrotny, 0 – pierwiastek jednokrotny,

d) $-1, 1, 2, 3, 7$; -1 – pierwiastek jednokrotny, 1 – pierwiastek jednokrotny, 2 – pierwiastek jednokrotny, 3 – pierwiastek jednokrotny, 7 – pierwiastek dwukrotny.

12.39. Np.: a) $W(x) = (x+2)(x-1)(x-5)$, b) $W(x) = (x+2)(x-1)(x-5)^2$,

c) $W(x) = (x+2)(x-1)^2(x-5)^3$.

12.40. Np.: a) $W(x) = (x-2)(x-3)(x+5)(x+7)$, b) $W(x) = (x+1)^2(x-2)(x-4)$,

c) $W(x) = x^2(x-2)^2$, d) $W(x) = x^4$.

12.41. a) $W(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$, b) $\frac{1}{4}$.

Rozkładanie wielomianów na czynniki

12.42. a) $W(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, b) $W(x) = (2x+3)(4x^2-6x+9)$, c) $W(x) = (2x+1)^3$,

d) $W(x) = (5x-2)(25x^2+10x+4)$, e) $W(x) = (3x-2)(3x+2)(9x^2+4)$,

f) $W(x) = (x+1)(x^2-4x+7)$.

12.43. a) $W(x) = (x+2)^2(x-2)$, b) $W(x) = (x-1)^2(x^2+x+1)$,

c) $W(x) = (x-3)^3$, d) $W(x) = (x-3)(x^2+5x+9)$.

12.44. a) $W(x) = (x^2+2)^2$, b) $W(x) = -x^3(x+2)^2$, c) $W(x) = -(4x+5)(2x+7)(10x^2+34x+37)$,

d) $W(x) = (x+3)^7(4x+13)(16x^2+92x+133)$, e) $W(x) = (16x^2-4\sqrt{2}x+1)(16x^2+4\sqrt{2}x+1)$,

f) $W(x) = (x^2-\sqrt{2}x+1)^2(x^2+\sqrt{2}x+1)^2$, g) $W(x) = x(x+3)(x-1)(x^2+2x+3)$,

h) $W(x) = x(x-6)(x-1)\left(x-\frac{7-\sqrt{73}}{2}\right)\left(x-\frac{7+\sqrt{73}}{2}\right)$.

12.45. a) $W(x) = (x+7)(x+1)(x-1)$, **b)** $W(x) = (2x+1)(x+2)(x-2)$,

c) $W(x) = (2x-3)(x+1)(x^2-x+1)$, **d)** $W(x) = (7x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

12.46. a) $W(x) = (x-1)(x+3)^2$, **b)** $W(x) = (x-1)^2(x-7)$.

12.47. a) $W(x) = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$,

b) $W(x) = x(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)$, **c)** $W(x) = (x-3)(x^2+x+2)$, **d)** $W(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x-2)$.

12.48. a) $m = -8$, $W(x) = (x+4)(x+2)(x-1)$, **b)** $m = -3$, $W(x) = (x-2)(x^2+4x+5)$, **c)** $m = -31$,

$W(x) = (3x-2)(2x-5)(x-2)$, **d)** $m = -11$, $W(x) = (2x+3)(x+5)(x-2)$.

Równania wielomianowe

12.49. a) $x_0 = 0$, **b)** brak rozwiązań, **c)** $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, **d)** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, **e)** $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$,

f) $x_0 = \frac{1}{8}$.

12.50. a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, **b)** $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$,

c) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{5}$, $x_3 = 0$, **d)** $x_1 = -\sqrt[6]{6}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, **e)** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

12.51. a) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, **b)** $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, **c)** $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$,

d) $x_1 = -7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

12.52. a) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, **b)** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, **c)** $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$,

d) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 9$.

12.53. a) $x_0 = 0$, **b)** $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{2}$, **c)** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, **d)** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, **e)** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$,

f) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

12.54. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, **b)** $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, **c)** $x_0 = \frac{2}{3}$, **d)** $x_0 = -6$.

12.55. a) $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, **b)** $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = 5$, **c)** $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$.

12.56. a) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, **b)** $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$, **c)** $x_1 = -8$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

12.57. a) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, **b)** $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$, **c)** $x_0 = -\frac{2}{3}$, **d)** $x_0 = -2$.

12.58. a) $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, **b)** $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, **c)** $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$, $x_3 = 2$,

d) $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = 3$.

12.59. a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, b) brak rozwiązania, c) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$,

d) $x \in \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$, e) $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{6}$.

12.60. a) $x_0 = 1$, b) $x_1 = 1$, $x_2 = 16$, c) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, d) $x_0 = 8$.

12.61. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, b) $x_1 = -2$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{2}$, $x_5 = \sqrt{3}$, $x_6 = 2$,

c) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$, d) $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Wskazówka. Przedstaw podane równanie w postaci:

a) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1 + 1) = 12$, b) $(x^2 - 3)^3 - (x^2 - 3) = 0$, c) $(x^2 - 3x + 1)^2 - 4(x^2 - 3x + 1) - 5 = 0$,

d) $x^4 - x^3 - x^3 + x^2 + x^2 - x - 2 = 0$, więc $x^2(x^2 - x) - x(x^2 - x) + (x^2 - x) - 2 = 0$, skąd
 $(x^2 - x)^2 + (x^2 - x) - 2 = 0$.

12.62. *Wskazówka.* c) $x^4 + 5x^2 - 2x + 7 = 0 \Leftrightarrow (x^4 + 4x^2 + 4) + (x^2 - 2x + 1) + 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 + (x - 1)^2 + 2 = 0$.

12.63. a) $m = -1$, b) $m \in \{-4, -2, 0, 14\}$.

12.64. a) Jeden pierwiastek, gdy $m \leq 0$; trzy pierwiastki, gdy $m > 0$,

b) jeden pierwiastek, gdy $m \in (-4; 0)$; dwa pierwiastki, gdy $m \in \{-4, 0\}$; trzy pierwiastki, gdy
 $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$,

c) nie ma pierwiastków, gdy $m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; dwa pierwiastki, gdy $m \in \{-3, 1\}$; trzy pierwiastki,
gdy $m = 0$; cztery pierwiastki, gdy $m \in (-3; 0) \cup (0; 1)$,

d) jeden pierwiastek, gdy $m \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$; dwa pierwiastki, gdy $m \in \left\{\frac{3}{4}; 3\right\}$; trzy pierwiastki, gdy
 $m \in \left(\frac{3}{4}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

Wskazówka. c) Równanie $t^2 + (m - 3)t + m^2 = 0$, gdzie $t = x^2$, ma:

4 pierwiastki, gdy $\Delta > 0$ i $t_1 \cdot t_2 > 0$, i $t_1 + t_2 > 0$; 3 pierwiastki, gdy $\Delta > 0$ i $t_1 \cdot t_2 = 0$, i $t_1 + t_2 > 0$;

2 pierwiastki, gdy $\Delta > 0$ i $t_1 \cdot t_2 < 0$ lub $\Delta = 0$ i $t > 0$; nie ma pierwiastków, gdy $\Delta < 0$.

d) Zauważ, że liczba 1 jest pierwiastkiem równania i równanie to można zapisać w postaci

$$(x - 1)(x^2 + x + 1 - m) = 0.$$

Równanie typu $x^n = a$

12.65. a) brak rozwiązania, b) 0, c) $-\sqrt[4]{5}$ i $\sqrt[4]{5}$, d) -2, e) $\sqrt[5]{2}$, f) $-\sqrt[5]{4}$, g) brak rozwiązania, h) $-\sqrt[10]{10}$ i $\sqrt[10]{10}$.

12.66. a) n – parzyste i $a < 0$, b) n – nieparzyste i $a \in \mathbb{R}$ lub n – parzyste i $a = 0$, c) n – parzyste i $a > 0$.

12.67. a) $-\frac{1}{3}$, b) $-\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{3}$, c) 100, d) -2 i 2, e) $-\sqrt[3]{3}$, f) -4 i 4.

12.68. a) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, b) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, c) $x_1 = -7$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 7$, d) $x_0 = -2$.

12.69. a) $x_0 = \frac{1}{2}$, b) $x_0 = 3$, c) $x_0 = -\frac{5}{3}$, d) $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

12.70. a) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, b) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, c) $x_1 = -0,2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0,2$.

12.71. a) -1 i 3, b) brak rozwiązania, c) $-2\sqrt{2}$ i $2\sqrt{2}$, d) -1 i 2, e) -0,4 i 0,6, f) brak rozwiązania.

12.72. a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, c) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = 2$, d) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \sqrt[3]{4}$.

12.73. a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, b) $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt[3]{6}$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, d) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, e) $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[5]{4} - 1$, f) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

12.74. Wskazówka.

a)	$x^3 + a^2x + a^2 + 1 = 0$	b)	$x^3 + x^2 + a^2x + a^2 = 0$
	$x^3 + 1 + a^2x + a^2 = 0$		$x^2(x+1) + a^2(x+1) = 0$
	$(x+1)(x^2 - x + 1) + a^2(x+1) = 0$		$(x+1)(x^2 + a^2) = 0$
	$(x+1)(x^2 - x + 1 + a^2) = 0$		$x+1 = 0$ lub $x^2 + a^2 = 0$
	$x+1 = 0$ lub $x^2 - x + 1 + a^2 = 0$		$x^2 = -a^2$ ma, gdy $a = 0$.
	$\Delta = 1 - 4(1 + a^2)$		
	$\Delta < 0$.		

12.75. Wskazówka. a) $x^6 > 0$, $2x^4 > 0$, $4x^2 > 0$ i $1 > 0$, więc $x^6 + 2x^4 + 4x^2 + 1 > 0$,

b) $4x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x^2(4x^2 - 4x + 1) + (2x + 1)^2 = 0$$

$$x^2(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 = 0$$

c) $4x^4 - 4x^3 + x^2 + x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x^2(4x^2 - 4x + 1) + (x - 2)^2 = 0$$

$$x^2(2x - 1)^2 + (x - 2)^2 = 0.$$

Nierówności wielomianowe

12.76. a) $x \neq 0$, b) $x = 0$, c) $x > -1$, d) $x \in \mathbf{R}$, e) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$, f) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$.

12.77. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (3; 5)$, b) $x \in (-\infty; -4) \cup (2; 3)$, c) $x \in (-\infty; 1]$, d) $x \in (-4; -2) \cup (2; 4)$,
e) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1)$, f) $x \in \{-2; 0\} \cup \{1; 5\}$.

12.78. a) $x \in (-2; 2)$, b) $x \in (-\infty; -3) \cup \{3; +\infty\}$, c) $x \in (-\infty; -2) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$,
d) $x \in \left(-\sqrt{2}; \frac{1}{2}\right) \cup (\sqrt{2}; 6)$, e) $x \in \{-2; 0\} \cup \{1\} \cup \{3; +\infty\}$, f) $x \in (-\infty; 1) \cup \{4, 6\}$.

12.79. a) $x \in (-1; 2) \setminus \{1\}$, b) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$, c) $x \in (-3; -2) \cup (1; 3)$, d) $x \in (1; 5)$.

12.80. a) $x \in (-1; +\infty) \setminus \{1\}$, b) $x \in (-2; -1) \cup (1; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; 3]$, d) $x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right) \cup \{1; +\infty\}$.

12.81. a) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; 5)$, b) $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -1) \cup \{2; 3\}$, d) $x \in (-\infty; 1)$.

12.82. a) $x \in (-\infty; -2) \cup \{0; 2\}$, b) $x \in \mathbf{R}$, c) nie ma rozwiązania.

12.83. a) $x \in (-\infty; -2) \cup \{1\}$, b) $x \in \{-2; 0\} \cup \{3\}$, c) $x \in \{-1, 2\}$.

12.84. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, b) $D_f = (-\infty; -1) \cup \{1; +\infty\}$, c) $D_f = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$,

d) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$, e) $D_f = \{1; +\infty\}$, f) $D_f = (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

12.85. Np.: a) $-x(x-3) > 0$, b) $(x+3)(x+1)(x-1)(x-3) < 0$, c) $x(x-1)(x-2)^2 \leq 0$.

12.86. Gdy $m = 2$, to $Q(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1-\sqrt{3}; 1) \cup (1+\sqrt{3}; +\infty)$; gdy $m = 4$, to

$Q(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 2) \cup (2; +\infty)$; gdy $m = 0$, to $Q(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (3; +\infty)$.

12.87. Wskazówka. a) Przedstaw nierówność $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 > 0$ w postaci

$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 2 > 0$, skąd $x^2(x^2 + 2x + 2) + (x^2 + 2x + 2) > 0$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.
Odpowiedź	C	D	Kolejno P, P, F, P	T - B	B i C

13. Wyrażenia wymierne

Wyrażenie wymierne i jego dziedzina

13.1. b) $D = \mathbf{R}$, c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, f) $D = \mathbf{R}$. *Wskazówka.* Wymiernymi nie są wyrażenia w podpunktach a) i d).

13.2. a) $x \neq -\frac{5}{3}$, b) $x \neq -\frac{3}{4}$, c) $x \in \mathbf{R}$, d) $x \in \mathbf{R}$, e) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 0\}$, f) $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-1, 0, \frac{2}{3}\right\}$.

13.3. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$, b) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$, c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, d) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, e) $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$, f) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, -2, 2, 3\}$.

13.4. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, b) $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1, 4\}$, d) $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, e) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{-2, -1, \frac{2}{3}\right\}$, f) $D = \mathbf{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$. *Wskazówka.* e) $3x^3 + 7x^2 - 4 = 3x^3 + 3x^2 + 4x^2 - 4 = 3x^2(x+1) + 4(x^2 - 1)$.

13.6. a) $m \in (0; 1)$, b) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, c) $m \in (-1; 0)$.

13.7. a) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, b) $D = \mathbf{R}$, c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

13.8. a) $m = 1$ i $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, b) $m = 2$ i $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, c) $m = 3$ i $x \in \mathbf{R} \setminus \{12\}$.

Skracanie i rozszerzanie wyrażeń wymiernych

13.9. a) $\frac{1}{x+3}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$, b) $a^2 + a + 1$, $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, c) $\frac{4x+3}{5x-3}$, $D = \mathbf{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{5}\right\}$, d) $\frac{1}{x^2-4}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$, e) $y-1$, $D = \mathbf{R}$, f) $\frac{x-2}{x+3}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 2\}$, g) $\frac{x-3}{x+5}$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, -4\}$.

13.10. a) $5x^2$, $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, b) $3x^3 + 3x$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, c) $x^2 - 7x + 10$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-5, 2\}$, d) $3x$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, e) $4x^2 + 4x + 4$, $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, f) $7(x^2 - 5x + 25)$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-5\}$.

13.11. a) $3x^2(x+3)$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$, b) $2x(x+1)$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, c) $(x+3)(x-5)$, $D = \mathbf{R} \setminus \{-3, 5\}$.

13.12. a) $\frac{x^2+2x}{x+2}$ i $\frac{x}{x+2}$, gdzie $x \neq -2$, b) $\frac{2}{x-3}$ i $\frac{1}{x-3}$, gdzie $x \neq 3$,

c) $\frac{(x+2)^2}{x+2}$ i $\frac{1}{x+2}$, gdzie $x \neq -2$, d) $\frac{3x^2+9x}{(x-1)(x+3)}$ i $\frac{4}{(x-1)(x+3)}$, gdzie $x \neq -3$ i $x \neq 1$,

e) $\frac{5x^2+15x}{(x+2)(x-1)(x+3)}$ i $\frac{3x-3}{(x+2)(x-1)(x+3)}$, gdzie $x \neq -3$ i $x \neq -2$, i $x \neq 1$,

f) $\frac{4x^2+12x+36}{x^3-27}$ i $\frac{2x}{x^3-27}$, gdzie $x \neq 3$, g) $\frac{3}{8x^3+1}$ i $\frac{16x^2-8x+4}{8x^3+1}$, gdzie $x \neq -\frac{1}{2}$,

h) $\frac{2x^2+8x}{x^3+64}$ i $\frac{x^2-4x+16}{x^3+64}$, gdzie $x \neq -4$.

Działania na wyrażeniach wymiernych

13.13. a) $\frac{1}{x-2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, b) $\frac{1}{2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$,

c) $\frac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, d) $\frac{x+2}{x-3}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 4\}$,

e) $5x$, gdzie $x \neq 3$, f) 1 , gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$,

g) 4 , gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$, h) $\frac{2}{x+5}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

13.14. a) $\frac{3(x-1)}{x+1}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, b) $\frac{x}{2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$,

c) $\frac{2(x-3)}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$, d) $\frac{3x+2}{x(3x-2)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{2}{3}, 2\}$,

e) $\frac{x^2-9}{(x+4)(x-2)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 2\}$, f) $\frac{2(x^2-8x+7)}{x+2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 7\}$,

g) $x(x+8)$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, h) 1 , gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

13.15. a) $\frac{2}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$, b) $\frac{4-x^2}{x^2-1}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, c) $\frac{7}{x-1}$, gdzie $x \neq 1$,

d) $\frac{2x^2+9x+6}{x^2-16}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, e) $\frac{2x}{3(x+2)(x-2)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

13.16. a) $\frac{x^2-2x+4}{x^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, b) $\frac{2x^2-5x-1}{x(x-1)^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

c) $\frac{2x^2+x-18}{(x-2)(x+2)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, d) $\frac{x+10}{(x+3)(x-2)(x+2)^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$,

e) $\frac{11x-3}{x(x-3)(x+3)}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$, f) $\frac{(y-2)^2}{y^2+2y+4}$, gdzie $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

13.17. a) $\frac{x+1}{x-1}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, b) $\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, c) $\frac{1}{x-1}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Równania wymierne

13.18. a) Brak rozwiązania, b) $x_0 = -3$, c) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, d) $x_0 = 3$.

13.19. a) $x_0 = 6,5$, b) $x_0 = \frac{8}{3}$, c) $x_0 = -\frac{8}{7}$, d) $x_0 = \frac{19}{4}$.

13.20. a) Brak rozwiązania, b) $x \neq \frac{1}{2}$, c) $x \neq 3$, d) $x \neq \frac{5}{2}$.

13.21. a) $x_0 = 7$, b) $x_1 = -6$, $x_2 = 1$, c) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, d) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$.

13.22. a) $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, c) $x_1 = -8$, $x_2 = 8$, d) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, e) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,
f) brak rozwiązania.

13.23. a) $x_0 = \frac{3}{2}$, b) $x_1 = -6$, $x_2 = 3$, c) brak rozwiązania.

13.24. a) $x_0 = -1$, b) $x_0 = -\frac{1}{4}$, c) $x_0 = \frac{3}{2}$, d) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1$.

13.26. a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$, c) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$,
 $x_4 = 4$, d) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$. *Wskazówka.* a) Podstaw $t = x^2 - 4x$, gdy $x \neq 0$ i $x \neq 4$,
rozwiąż równanie $t - \frac{15}{t} = 2$ i wróć do podstawienia.

13.27. a) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, b) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, c) $x_0 = -\frac{1}{2}$, d) $x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$.

Nierówności wymierne

13.28. a) $x \in (-\infty; 1)$, b) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$, c) $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, d) $x \in \langle -2; -1 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$.

13.29. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$, b) $x \in \left\langle \frac{3}{4}; 1 \right\rangle$, c) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle 0; +\infty \rangle$,

d) $x \in (-\infty; -5) \cup \langle 5; +\infty \rangle$, e) $x \in (-\infty; -3) \cup \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 4; +\infty \rangle$, f) $x \in \langle -5; -1 \rangle \cup \{2\}$.

13.30. a) $x \in (-1; 1)$, b) $x \in \langle 0; 1 \rangle$, c) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; +\infty \rangle$, d) $x \in \left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

13.31. a) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, b) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$, c) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right)$,

d) $x \in (-\infty; 2) \cup \left\langle \frac{5}{2}; 3 \right\rangle$, e) $x \in (-4; -2) \cup (0; +\infty)$, f) $x \in (-11; -1)$.

13.32. a) $x \in (-\infty; -2) \cup \langle -1; 1 \rangle \cup (2; +\infty)$, b) $x \in (0; 5) \setminus \{2\}$, c) $x \in \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$,

d) $x \in (-2; 1) \cup (2; 4)$, e) $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 5) \cup (7; +\infty)$, f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

13.33. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (-4; -3)$, b) $x \in (-3; -1)$, c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, d) $x \in \left(-5; -\frac{8}{3}\right)$.

13.34. a) $x \in \left(\frac{1-\sqrt{73}}{6}; -1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{73}}{6}\right)$, b) $x \in (-5; -4) \cup (4; +\infty)$, c) $x \in (0; 1) \cup (3; 5)$,

d) $x \in (-3; -2) \cup (-1; 5)$.

Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania równań wymiernych

13.35. a) $x_0 = 7$, b) $x_0 = -2$, c) $x \in \{-1, 1, 3, 5\}$, d) $x \in \{-1, 1, 5, 7\}$, e) $x \in \{-1, 1, 2, 4\}$, f) $x_0 = -3$.

13.36. a) $x = \frac{1}{5}$ i $y = \frac{1}{4}$, b) $x = 5$ i $y = 3$, c) $x = 5$ i $y = 1$,

d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

13.37. a) $x \in (1; 2)$, b) $x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$, c) $x \in (-3; -2) \cup \left(-1; \frac{1}{3}\right)$, d) $x \in (-2; 8; 0) \cup \{1\}$.

13.38. a) $x \in (-\infty; 0)$, b) $x \in (-\infty; -9) \cup (-4; +\infty)$, c) $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

13.39. a) $x \in \left(-6; -\frac{1}{2}\right)$, b) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{4}\right)$, c) $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; +\infty)$.

13.40. a) $D_f = (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$, b) $D_f = \left(-2; \frac{3}{2}\right)$, c) $D_f = \left(\frac{1}{2}; 4\right)$.

13.41. $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{37}}{4}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{4}; +\infty\right)$.

13.42. Wskazówka. $f(2-x) = \frac{1}{2-x} + 1$.

13.43. Planowana prędkość pociągu to $v = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wskazówka. x – planowana prędkość pociągu, y – czas przejazdu. Rozwiąż układ
$$\begin{cases} x \cdot y = 80 \\ (x+10)\left(y - \frac{4}{15}\right) = 80 \end{cases}$$

13.44. $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wskazówka. $\begin{cases} (900+v) \cdot t = 5\,500 \\ (900-v) \cdot t = 4\,500 \end{cases}$, gdzie v to prędkość wiatru i t czas przelotu.

13.45. 250 uczniów. Wskazówka. $\begin{cases} xy = 1500 \\ (x-50) \cdot (y+1) = 1\,500 \end{cases}$, gdzie x to liczba uczniów klas drugich.

13.46. Pierwszy tynkarz w ciągu 4 h, drugi w ciągu 12 h. Wskazówka. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} \cdot 1 + \frac{1}{y} \cdot 6 = \frac{3}{4} \end{cases}$, gdzie x i y to czasy

samodzielnej pracy tynkarzy.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Odpowiedź	D	B	Kolejno P, F, P, P	N – B	A	D	C