

Alicja Cewe • Małgorzata Krawczyk • Maria Kruk,
Alina Magryś-Walczak • Halina Nahorska

MATEMATYKA

i przykłady jej zastosowań

zakres podstawowy i rozszerzony

Podręcznik

- licea ogólnokształcące
- technika

Podręcznik dla absolwentów
ośmioletniej szkoły podstawowej



Oznaczenia graficzne

- W niebieskiej ramce umieszczono treści odpowiadające definicjom lub twierdzeniom.

Przypomnijmy

- W pomarańczowej ramce umieszczono te treści, które powinny być znane z wcześniejszych lat nauki.
- Na szarym tle umieszczono uwagi, które są podsumowaniem ważnych treści; warto je zapamiętać.
- Na fioletowym tle umieszczono ćwiczenia przewidziane jako zadania domowe, ponieważ ich rozwiązanie wymaga większej ilości czasu niż inne.
- Na żółtym tle umieszczono zadania otwarte i zamknięte różnego rodzaju pod hasłem **Zestaw powtórkowy**.
-  Niebieski pasek na marginesie książki oznacza treści przeznaczone tylko dla zakresu rozszerzonego.
-  Symbol zeszytu na marginesie oznacza, że przykłady z ćwiczenia lub zadania należy przepisać do zeszytu i rozwiązać je; **odpowiedzi do tych zadań i ćwiczeń nie należy wpisywać w podręczniku.**
- **6.32.** Na niebieskim tle umieszczono numery zadań o podwyższonym stopniu trudności.
- **2.48.**
 Literka D przy numerze zadania oznacza zadanie na dowodzenie.

Skróty: *c.n.u.* – co należało uzasadnić (udowodnić),
c.n.w. – co należało wykazać,
c.k.d. – co kończy dowód.

Alicja Cewe • Małgorzata Krawczyk • Maria Kruk
Alina Magryś-Walczak • Halina Nahorska

MATEMATYKA **i przykłady jej zastosowań**

zakres podstawowy i rozszerzony

Podręcznik **1**



Gdańsk

Autorki: Alicja Cewe, Małgorzata Krawczyk, Maria Kruk,
Alina Magryś-Walczak, Halina Nahorska

Opracowanie edytorskie i redakcyjne: Alicja Cewe, Halina Nahorska, Alina Magryś-Walczak

Konsultacja polonistyczna: Beata Różańska

Projekt okładki: Alicja Cewe

Skład i ilustracje: Jarosław Mach

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr Marii Borowskiej, dr. hab. Edwarda Tutaja, dr. hab. Iwony Benenowskiej.

Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony.

Etap edukacyjny: III.

Typ szkoły: szkoły ponadpodstawowe.

Rok dopuszczenia: 2019.

Numer ewidencyjny w wykazie: 1068/1/2019.

Podręcznik zgodny z podstawą programową kształcenia ogólnego w liceach ogólnokształcących i technikach – zakres podstawowy i rozszerzony, określoną w rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz.U. z 2018 r., poz. 467.)

ISBN 978-83-65120-81-6

© Copyright by Wydawnictwo Podkowa
Gdańsk, ul. Paganiniego 17/17



Dystrybucja i zamówienia:

✉ Skr. pocztowa 18, 80-460 Gdańsk 6
tel. 602 211 526 } dział zamówień
tel./fax 585 208 745 } i reklamacji

pinia@podkowa.gda.pl • www.podkowa.gda.pl

Spis treści

Wstęp	6	Logarytm iloczynu, ilorazu oraz logarytm potęgi.	85
1. Język i symbole logiki w matematyce.	7	Przykłady zastosowań potęg i logarytmów.	89
Rodzaje zdań złożonych	8	Zamiana podstawy logarytmu	93
Twierdzenie i jego dowód.	14	<i>Zestaw powtórkowy</i>	96
2. Zbiory i działania na nich	17	5. Wzory skróconego mnożenia.	98
Zbiory i działania na nich	17	Kwadrat sumy i kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.	98
Część wspólna zbiorów (iloczyn zbiorów).	19	Różnica kwadratów dwóch wyrażeń ..	102
Suma zbiorów (złączenie zbiorów).	20	Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia	106
Różnica zbiorów.	21	<i>Zestaw powtórkowy</i>	112
3. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory	24	6. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą	113
Liczby naturalne.	24	Równanie liniowe z jedną niewiadomą	115
Algorytm Euklidesa.	30	Nierówność liniowa z jedną niewiadomą	121
Liczby całkowite	33	Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania nierówności liniowych.	127
Liczby wymierne	36	Własności wartości bezwzględnej.	131
Liczby niewymierne	42	Równania z wartością bezwzględną ...	136
Liczby rzeczywiste.	46	Nierówności z wartością bezwzględną.	143
Przedziały liczbowe.	50	<i>Zestaw powtórkowy</i>	149
Działania na przedziałach liczbowych ..	55	7. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi	150
<i>Zestaw powtórkowy</i>	58	Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi	150
4. Potęgowanie, pierwiastkowanie i logarytmowanie.	60	Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi ...	152
Potęga o wykładniku całkowitym	60	Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania układów równań liniowych.	159
Pierwiastki kwadratowe i pierwiastki sześciennie	65		
Pierwiastki stopnia n i działania na nich.	69		
Potęga o wykładniku wymiernym.	75		
Pojęcie logarytmu.	80		

Równania, nierówności i układy równań liniowych z parametrem.....	163	Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego.....	247
<i>Zestaw powtórkowy</i>	169	<i>Zestaw powtórkowy</i>	252
8. Funkcja i jej własności	171	11. Funkcja liniowa i jej własności ...	254
Pojęcie funkcji	171	Wzór i wykres funkcji liniowej	254
Sposoby określania funkcji.....	175	Interpretacja współczynników liczbowych we wzorze funkcji liniowej.....	257
Dziedzina i zbiór wartości funkcji.....	180	Miejsce zerowe i znak funkcji liniowej.....	263
Funkcje różnowartościowe.....	186	Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej ..	269
Miejsce zerowe i znak funkcji w przedziale	189	Przykłady funkcji liniowych określonych w różnych przedziałach różnymi wzorami	273
Monotoniczność funkcji	193	Funkcja liniowa w zastosowaniach.....	280
Wartość najmniejsza i największa funkcji w przedziale domkniętym.....	197	<i>Zestaw powtórkowy</i>	285
<i>Zestaw powtórkowy</i>	199		
9. Figury podobne i twierdzenie Talesa	201	12. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ i wielkości odwrotnie proporcjonalne	287
Proporcja i przekształcanie wzorów ...	201	Wykres i własności funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$	287
Wielokąty podobne i ich własności. ...	204	Wielkości odwrotnie proporcjonalne ..	292
Cechy podobieństwa trójkątów	210	<i>Zestaw powtórkowy</i>	298
Podobieństwo trójkątów w zadaniach .	216		
Twierdzenie Talesa.....	221	13. Równania kwadratowe	300
<i>Zestaw powtórkowy</i>	226	Równania kwadratowe niezupełne	301
10. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym	227	Równanie kwadratowe zupełne a wzory skrótowego mnożenia	304
Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.....	228	Wyróżnik równania kwadratowego i liczba jego pierwiastków	307
Sinus i cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym	232	Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania równań kwadratowych.	311
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60°	237	Suma i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.....	314
Odczytywanie wartości funkcji trygonometrycznych z tablic	241	Równania kwadratowe z parametrem. .	319
Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	244	<i>Zestaw powtórkowy</i>	322

14. Funkcja kwadratowa	324	11. Funkcja liniowa i jej własności...	385
Wykres i własności funkcji		12. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ i wielkości	
kwadratowej $f(x) = ax^2$	324	odwrotnie proporcjonalne	390
Postać kanoniczna		13. Równania kwadratowe	391
funkcji kwadratowej	330	14. Funkcja kwadratowa	395
Postać kanoniczna a postać ogólna			
funkcji kwadratowej	337		
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej			
i jej postać iloczynowa	341		
Najmniejsza i największa wartość			
funkcji kwadratowej w przedziale			
domkniętym.	347		
Wyznaczanie wzoru funkcji			
kwadratowej na podstawie			
informacji o niej	352		
Funkcja kwadratowa w zastosowaniach	357		
<i>Zestaw powtórkowy</i>	364		
Wskazówki i odpowiedzi	366		
1. Język i symbole logiki			
matematycznej	366		
2. Zbiory i działania na nich.	366		
3. Zbiór liczb rzeczywistych i jego			
podzbiory	366		
4. Potęgowanie, pierwiastkowanie			
i logarytmowanie.	369		
5. Wyrażenia algebraiczne i wzory			
skrótowego mnożenia	372		
6. Równania i nierówności liniowe			
z jedną niewiadomą.	374		
7. Układy równań liniowych			
z dwiema niewiadomymi.	377		
8. Funkcja i jej własności.	380		
9. Figury podobne i twierdzenie			
Talesa.	381		
10. Funkcje trygonometryczne kąta			
ostrego w trójkącie prostokątnym.	383		

Wstęp

Umieć matematykę, to między innymi wiedzieć, jak w codziennym życiu korzystać z jej dobrodziejstw.

Książka „**Podręcznik 1 – zakres podstawowy i rozszerzony**” z serii **Matematyka i przykłady jej zastosowań** jest podręcznikiem dla liceum ogólnokształcącego i technikum.

Naszym zdaniem w podręczniku jest wystarczająca liczba zadań i ćwiczeń, by nabyć umiejętności wymienione w podstawie programowej z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz.U. z 2017r., poz. 59, 949 i 2203).

W końcowej części każdego realizowanego tematu lekcji zamieszczono zadania pozwalające na utrwalenie przerobionego materiału (zadania utrwalające).

Odpowiedzi do zadań utrwalających znajdują się na ostatnich stronach książki.

Odpowiedzi do ćwiczeń są umieszczone w fioletowej ramce przed każdym zestawem zadań utrwalających.

Każdy rozdział kończy się zestawem powtórkowym, w którym są zadania zamknięte różnego rodzaju oraz zadania otwarte.

Przy rozwiązywaniu problemów można korzystać z dostępnych narzędzi i technologii informatycznych, czyli encyklopedii, tablic matematycznych, kalkulatorów i komputerów.

Życzymy powodzenia,

Autorki

1. Język i symbole logiki w matematyce

Logika to nauka o metodach wnioskowania i poprawnym rozumowaniu, ustalająca reguły, których naruszenie prowadzi do błędów.

Ucząc się matematyki badamy pewne zależności, formułujemy twierdzenia, wyciągamy wnioski i stosujemy pewne reguły, które pozwalają precyzyjnie przedstawić tok rozumowania i sposób zapisu naszych myśli. Do tego służą nam zdania, często zapisywane z użyciem symboli matematycznych.

Za prekursora logiki uważa się Arystotelesa (384 p.n.e.–322 p.n.e.).

Logika matematyczna, jako dziedzina wiedzy, rozwinęła się na przełomie XIX i XX wieku.

Ćwiczenie 1. Wyszukaj w internecie nazwiska Polaków, którzy przyczynili się do rozwoju logiki matematycznej.

Definicja

Zdaniem w sensie logiki nazywamy takie wypowiedzenie, któremu można jednoznacznie przyporządkować jedną z dwóch wartości logicznych: **prawdę** (1) lub **falsz** (0).

W logice matematycznej zdania oznaczamy najczęściej symbolami: $p, q, r, s, \dots$

W sensie logiki zdaniami nie są pytania i wykrzyknienia.

Lp.	Zdanie p	Wartość logiczna zdania p
1.	Zrób zakupy!	<i>to nie jest zdanie w sensie logiki</i>
2.	$7 \cdot 8 = 65$	0
3.	Liczba 0,5 jest odwrotnością liczby 2.	1
4.	Przekątna kwadratu jest krótsza od każdego jego boku.	0
5.	Suma miar wszystkich kątów wewnętrznych każdego trójkąta jest równa 180° .	1
6.	Czy pójdziesz do kina?	<i>to nie jest zdanie w sensie logiki</i>
7.	Liczba naturalna n jest podzielna przez 2.	<i>to nie jest zdanie w sensie logiki</i>
8.	Najładniejsze z wielokątów to sześciokąty.	<i>to nie jest zdanie w sensie logiki</i>

Zdanie **Najładniejsze z wielokątów to sześciokąty** wartościuje wielkości, których prawdziwości nie można ocenić w sensie logiki.

Rodzaje zdań złożonych

Rozróżniamy zdania proste i zdania złożone, np. *Liczba 15 jest nieparzysta* to zdanie proste. Zdania proste można łączyć w zdania złożone, używając **spójników logicznych**, tzw. **funktorów zdaniotwórczych**, np. *Liczba 15 jest nieparzysta i jest podzielna przez 5*.

Spójnik logiczny	Symbol spójnika logicznego	Nazwa zdania ze spójnikiem logicznym	Symboliczny zapis zdania złożonego
nieprawda, że ...	$\sim$	negacja	$\sim p$
... i ...	$\wedge$	koniunkcja	$p \wedge q$
... lub ...	$\vee$	alternatywa	$p \vee q$
jeżeli ... to ...	$\Rightarrow$	implikacja	$p \Rightarrow q$
... wtedy i tylko wtedy, gdy...	$\Leftrightarrow$	równoważność	$p \Leftrightarrow q$

Negacja zdania

Definicja

Negacja, czyli zaprzeczeniem zdania p , nazywamy zdanie **nieprawda, że p** , co zapisujemy $\sim p$.

Wartości logiczne negacji

Zdanie	p	$\sim p$
Wartość logiczna zdania	1	0
	0	1

Uwaga Negacja (zaprzeczenie) zdania prawdziwego jest zdaniem fałszywym, a negacja zdania fałszywego jest zdaniem prawdziwym.

Zdanie p	Wartość logiczna zdania p	Zdanie $\sim p$	Wartość logiczna zdania $\sim p$
$5 + 3 = 8$	1	$5 + 3 \neq 8$	0
Numer NIP ma sześć cyfr.	0	Nieprawda, że numer NIP ma sześć cyfr.	1

Ćwiczenie 2. Utwórz negację zdania i oceń wartość logiczną zdania oraz jego zaprzeczenia: a) $7 : 2 > 1$, b) każdy kwadrat ma oś symetrii, c) $0 : 3 = 5$, d) $\sim (3 \cdot 5 = 20)$.

*) NIP – Numer Identyfikacji Podatkowej

Koniunkcja zdań

Definicja

Koniunkcją zdań nazywamy zdanie złożone z dwóch zdań p i q , połączonych spójnikiem „i”, czyli zdanie p i q .

Koniunkcję zdań p i q zapisujemy $p \wedge q$, czytamy p i q .

Wartości logiczne koniunkcji

Zdanie	p	q	$p \wedge q$
Wartość logiczna zdania	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	0

Uwaga Koniunkcja dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania p i q są prawdziwe.

Zdanie p	Wartość logiczna zdania p	Zdanie q	Wartość logiczna zdania q	Zdanie $p \wedge q$	Wartość logiczna zdania $p \wedge q$
Dzień jest przeciwieństwem nocy.	1	Noc jest przeciwieństwem dnia.	1	Dzień jest przeciwieństwem nocy i noc jest przeciwieństwem dnia.	1
2 jest liczbą całkowitą.	1	$\sqrt{2}$ jest liczbą całkowitą.	0	2 jest liczbą całkowitą i $\sqrt{2}$ jest liczbą całkowitą.	0
$5 > 7$	0	$3 < 7$	1	$5 > 7 \wedge 3 < 7$	0
$\sqrt{2} > 2$	0	$\sqrt{3} > 3$	0	$\sqrt{2} > 2 \wedge \sqrt{3} > 3$	0

Ćwiczenie 3. Oceń wartość logiczną koniunkcji zdań.

- Liczba 3 jest pierwiastkiem równania $2x - 6 = 0$ i liczba 5 jest dzielnikiem liczby 25.
- Liczba 2 jest liczbą naturalną i liczbą pierwszą.
- Każdy prostokąt jest trapezem i ma wszystkie kąty równe.
- $2 > 5$ i $3 < 1$.
- Liczby 2 i 5 są dzielnikami liczby 30.
- $4 > -3$ i $\sqrt{5} = 2$.

Alternatywa zdań

Definicja

Alternatywą zdań nazywamy zdanie złożone z dwóch zdań p i q , połączonych spójnikiem „lub”, czyli zdanie p lub q .

Alternatywę zdań p i q zapisujemy $p \vee q$, czytamy p lub q .

Wartości logiczne alternatywy

Zdanie	p	q	$p \vee q$
Wartość logiczna zdania	1	1	1
	1	0	1
	0	1	1
	0	0	0

Uwaga

- Alternatywa dwóch zdań jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania są fałszywe.
- Niekiedy znaczenie spójnika „lub” w matematyce jest inne niż w języku polskim.

Zdanie p	Wartość logiczna zdania p	Zdanie q	Wartość logiczna zdania q	Zdanie $p \vee q$	Wartość logiczna zdania $p \vee q$
Warszawa jest miastem.	1	Warszawa jest stolicą Polski.	1	Warszawa jest miastem lub Warszawa jest stolicą Polski.	1
$4 = 2^2$	1	$4 > 2^2$	0	$4 = 2^2 \vee 4 > 2^2$	1
Romb jest kołem.	0	Romb jest trapezem.	1	Romb jest kołem lub trapezem.	1
$24 : 6 = 5$	0	$31 - 10 = 16$	0	$24 : 6 = 5 \vee 31 - 10 = 16$	0

Ćwiczenie 4. W zdaniu złożonym wskaż zdania proste, z których składa się alternatywa i oceń jej wartość logiczną.

- Każdy uczeń klasy pierwszej liceum ma pięć lub sześć lat.
- Każdy kwadrat jest rombem lub równoległobokiem.
- Liczba 12 jest podzielna przez 3 lub liczba 4 jest liczbą pierwszą.
- Każdy czworościan jest ostrosłupem lub wielościanem.

Implikacja zdań

Definicja

Implikacją zdań o poprzedniku p i następniku q nazywamy zdanie złożone mające postać **jeżeli p , to q** .

Implikację o poprzedniku p i następniku q zapisujemy $p \Rightarrow q$, czytamy jeżeli p , to q .

Wartości logiczne implikacji

Zdanie	p	q	$p \Rightarrow q$
Wartość logiczna zdania	1	1	1
	1	0	0
	0	1	1
	0	0	1

Uwaga Implikacja $p \Rightarrow q$ jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy p jest zdaniem prawdziwym, a q fałszywym.
Zdanie p – poprzednik implikacji,
zdanie q – następnik implikacji.

Zdanie p	Wartość logiczna zdania p	Zdanie q	Wartość logiczna zdania q	Zdanie $p \Rightarrow q$	Wartość logiczna zdania $p \Rightarrow q$
Skrzyp jest paprotnikiem.	1	Skrzyp jest rośliną zarodnikową.	1	Jeżeli skrzyp jest paprotnikiem, to jest rośliną zarodnikową.	1
Skrzyp jest paprotnikiem.	1	Skrzyp jest rośliną nasienną.	0	Jeżeli skrzyp jest paprotnikiem, to jest rośliną nasienną.	0
$2 < 0$	0	$2 > 0$	1	$2 < 0 \Rightarrow 2 > 0$	1
$1 = 2$	0	$2 = 3$	0	$1 = 2 \Rightarrow 2 = 3$	1

Ćwiczenie 5. Oceń wartość logiczną implikacji.

- Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma miar jego kątów wewnętrznych ostrych jest równa 90° .
- Jeżeli 7 jest dzielnikiem liczby 8, to 8 jest dzielnikiem liczby 9.
- Jeżeli $10 : 2 = 5$, to $5 + 2 = 25$.
- $2 \cdot 3 = 7 \Rightarrow 8 : 2 = 4$.
- Jeżeli liczba 10 dzieli się przez 2, to 10 jest liczbą parzystą.
- Jeżeli $2 < 5$, to $7 > 9$.

Równoważność zdań

Definicja

Równoważnością zdań nazywamy zdanie złożone ze zdań p i q , połączonych spójnikiem logicznym **wtedy i tylko wtedy**.

Równoważność zdań p i q zapisujemy $p \Leftrightarrow q$, czytamy p wtedy i tylko wtedy, gdy q .

Wartości logiczne równoważności

Zdanie	p	q	$p \Leftrightarrow q$
Wartość logiczna zdania	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	1

Uwaga Równoważność dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy albo oba zdania są prawdziwe, albo oba fałszywe.

Zdanie p	Wartość logiczna zdania p	Zdanie q	Wartość logiczna zdania q	Zdanie $p \Leftrightarrow q$	Wartość logiczna zdania $p \Leftrightarrow q$
$-2 < 0$	1	$2 > 0$	1	$-2 < 0 \Leftrightarrow 2 > 0$	1
$27 : 3 = 9$	1	$3 \cdot 9 = 28$	0	$27 : 3 = 9 \Leftrightarrow 3 \cdot 9 = 28$	0
Kraków jest stolicą Polski.	0	Kraków był stolicą Polski.	1	Kraków jest stolicą Polski wtedy i tylko wtedy, gdy Kraków był stolicą Polski.	0
6 jest liczbą pierwszą.	0	5 jest liczbą złożoną.	0	6 jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy 5 jest liczbą złożoną.	1

Ćwiczenie 6. Oceń wartość logiczną równoważności:

a) $8 < 0 \Leftrightarrow 88 < 0$.

b) $5 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot 5 = 0$.

c) $(-2)^3 = -8 \Leftrightarrow (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

d) $3 - [3 - (-3)] > 0 \Leftrightarrow 3 + [3 - (-3)] > 0$.

Definicja

Formą zdaniową nazywamy wyrażenie, w którym występują zmienne i które zmienia się w zdanie logiczne (prawdziwe lub fałszywe), gdy za zmienne podstawimy wartości liczbowe lub nazwy przedmiotów.

Formy zdaniowe oznaczamy np.: $p(x)$, $f(y)$, $q(n)$, gdzie x , y , n to zmienne form zdaniowych.

Uwaga

- Dziedziną formy zdaniowej jest zbiór takich elementów, które po podstawieniu do formy zdaniowej w miejsce zmiennej, czynią ją zdaniem w sensie logiki.
- Mówimy, że pewien element spełnia formę zdaniową pewnej zmiennej, jeśli po podstawieniu go w jej miejsce otrzymamy zdanie prawdziwe.

Zdanie **Liczba naturalna n jest podzielna przez 2** jest zdaniem oznajmującym, ale nie określa wartości liczby n . Nie można więc ocenić jego wartości logicznej.

Jeśli w zdaniu w miejsce zmiennej n wstawimy liczbę, np.:

- 100, to otrzymamy zdanie prawdziwe,
- 51, to otrzymamy zdanie fałszywe.

Wyrażenie **Liczba naturalna n jest podzielna przez 2** w sensie logiki jest formą zdaniową ze zmienną n .

Zdanie **Dla każdego x prawdziwa jest nierówność $x^2 \geq 0$** zapisujemy symbolicznie

$$\forall_x x^2 \geq 0.$$

Zdanie **Istnieje takie x , że $x - 4 < 0$** zapisujemy symbolicznie

$$\exists_x x - 4 < 0.$$

Ćwiczenie 7. Zapisz słownie zdanie: a) $\forall_x (x+1)^2 \geq 0$, b) $\exists_x 3x - 5 < 6x$.

Uwaga

	Zapis symboliczny	Zapis słowny (czytamy)
Kwantyfikator ogólny (duży)	$\forall_x$	dla każdego x
Kwantyfikator szczegółowy (mały)	$\exists_x$	istnieje takie x , że

Ćwiczenie 8. Zapisz zdanie za pomocą symboli logicznych, znaków działań, znaków równości lub nierówności oraz kwantyfikatorów.

- Istnieje taka liczba x , która pomnożona przez 4 daje 1000.
- Czwarta potęga każdej liczby x jest liczbą nieujemną.

Twierdzenie i jego dowód

Twierdzeniem w matematyce nazywamy każde zdanie udowodnione w danej teorii matematycznej. Jeżeli twierdzenie ma postać implikacji $Z \Rightarrow T$, której poprzednik Z nazywamy **założeniem**, a następnik T nazywamy **tezą**, to przyjmujemy następującą terminologię:

<i>implikacja prosta</i>	$Z \Rightarrow T$
<i>implikacja przeciwna do implikacji prostej</i>	$\sim Z \Rightarrow \sim T$
<i>implikacja odwrotna do implikacji prostej</i>	$T \Rightarrow Z$
<i>implikacja przeciwstawna do implikacji prostej</i>	$\sim T \Rightarrow \sim Z$

Uwaga

Jeżeli dla twierdzenia prostego mającego postać implikacji $Z \Rightarrow T$, prawdziwa jest implikacja odwrotna $T \Rightarrow Z$, to mówimy, że do twierdzenia prostego istnieje twierdzenie odwrotne.

Przykład 1. W twierdzeniu „Jeżeli liczba n jest podzielna przez 4, to liczba n jest podzielna przez 2.”:

- 1) wskaż założenie Z i tezę T ,
- 2) oceń wartość logiczną implikacji odwrotnej $T \Rightarrow Z$.

Rozwiązanie

- 1) Jeżeli $\underbrace{\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez 4}}_{\text{założenie } Z}$, to $\underbrace{\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez 2.}}_{\text{teza } T}$
- 2) Twierdzenie odwrotne:
Jeżeli $\underbrace{\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez 2}}_{\text{założenie } T}$, to $\underbrace{\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez 4.}}_{\text{teza } Z}$

Wartość logiczna implikacji odwrotnej $T \Rightarrow Z$ jest równa 0.

Uwaga

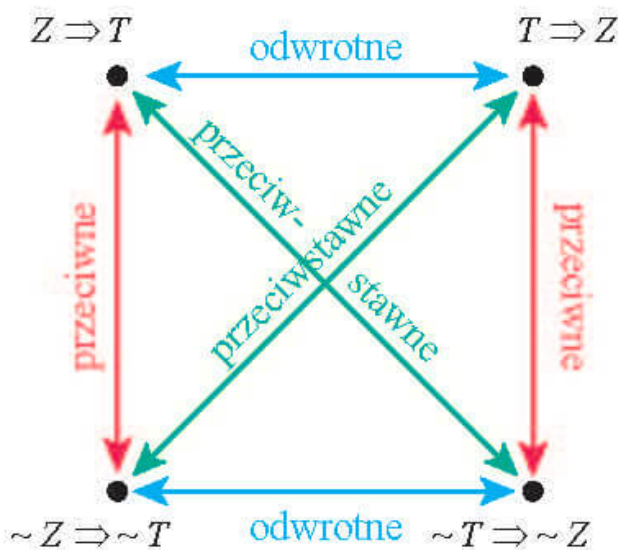
Jeżeli prawdziwa jest implikacja prosta $Z \Rightarrow T$ i implikacja odwrotna $T \Rightarrow Z$, to prawdziwa jest równoważność $Z \Leftrightarrow T$.

Dowód, w którym, na podstawie założenia i wcześniej udowodnionych twierdzeń, wyciąga się kolejne wnioski, dochodząc do tezy twierdzenia, nazywa się **dowodem wprost**.

Innym sposobem dowodzenia jest dowód nie wprost, którego podstawę stanowi prawo transpozycji: $(Z \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\sim T \Rightarrow \sim Z)$.

W dowodzie tym zakładamy, że teza nie jest prawdziwa. Na podstawie kolejno wyciąganych wniosków dochodzimy do sprzeczności z założeniem dowodzonego twierdzenia lub innymi twierdzeniami wcześniej udowodnionymi.

Zamknięty układ twierdzeń (kwadrat logiczny)



Własności twierdzeń

- Twierdzenia przeciwstawne są równoważne.
- Twierdzenia przeciwne tworzą tak zwany zamknięty układ twierdzeń.

Uwaga

- Jeżeli prawdziwa jest implikacja $Z \Rightarrow T$, to T jest **warunkiem koniecznym** dla Z , a Z jest **warunkiem wystarczającym** dla T .
- Jeżeli prawdziwa jest równoważność $Z \Leftrightarrow T$, to Z jest **warunkiem koniecznym i wystarczającym** dla T (i odwrotnie).

Odpowiedzi do ćwiczeń

2.

Zdanie	Wartość logiczna zdania	Zaprzeczenie zdania	Wartość logiczna zaprzeczenia zdania
$7:2 > 1$	1	$7:2 \leq 1$	0
Każdy kwadrat ma oś symetrii.	1	Kwadrat nie ma osi symetrii.	0
$0:3 = 5$	0	$0:3 \neq 5$	1
$\sim (3 \cdot 5 = 20)$	1	$3 \cdot 5 = 20$	0

3. a) 1, b) 1, c) 1, d) 0, e) 1, f) 0.

4. a) 0, b) 1, c) 1, d) 1.

5. a) 1, b) 1, c) 0, d) 1, e) 1, f) 0.

6. a) 1, b) 1, c) 1, d) 0.

7. a) Dla każdego x prawdziwa jest nierówność $(x+1)^2 \geq 0$.

b) istnieje takie x , że $3x - 5 < 6x$.

8. a) $\exists_x 4x = 1000$, b) $\forall_x x^4 \geq 0$.

Zadania utrwalające

1.1. Określ, czy podane wyrażenie jest zdaniem w sensie logiki.

a) Czy lubisz śpiewać?

b) Mieszko I był królem Polski.

c) Liczby 2 i 6 są liczbami parzystymi.

d) Każdy trapez jest pięciokątem foremnym.

- e) $10 + 3 = 13$, f) Istnieje trójkąt o dwóch kątach prostych.
 g) $3x + 5 > 4$, h) $x^2 + 4 = 0$.

1.2. Oceń wartość logiczną podanych zdań.

- a) $\sqrt{7}$ jest liczbą naturalną.
 b) Nieprawda, że 8 jest liczbą nieparzystą.
 c) Liczby 5 i 2 są dzielnikami liczby 30.
 d) $4 > -3 \wedge \sqrt{5} = 2$. e) $2 \cdot 3 = 7 \Rightarrow 8 : 2 = 4$.
 f) Kąt o mierze 120° jest kątem ostrym lub kątem rozwartym.
 g) Jeżeli liczby 5, 12, 13 są długościami boków trójkąta, to ten trójkąt jest prostokątny.
 h) Przekątne każdego rombu są prostopadłe i mają tę samą długość.
 i) Każdy romb jest równoległobokiem.

1.3. Zapisz następujące zdania, używając kwantyfikatorów.

- a) Istnieje taka liczba rzeczywista x , która spełnia warunek $x^3 = 27$.
 b) Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $x^2 + 1 > 0$.
 c) Niektóre liczby naturalne są większe od liczby 9^{20} .
 d) Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

1.4. Zapisz słownie zdanie.

- a) $\forall_x x^2 + 4 > 0$, b) $\forall_x \sqrt{x^2} = x$, c) $\exists_x n^2 - 3 = 0$,
 d) $\exists_x x \cdot 1 = x$, e) $\exists_x \sqrt{x^2} = x$, f) $\forall_x (a > -1 \Rightarrow 3a > -3)$,
 g) $\forall_x (a < 1 \Rightarrow a^2 < 1)$, h) $\forall_x (a > 1 \Rightarrow a^2 > 1)$.

1.5. Napisz twierdzenie Pitagorasa.

- a) Wskaż założenie i tezę.
 b) Napisz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, a następnie wskaż w nim założenie i tezę.

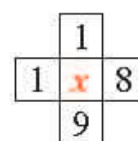
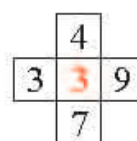
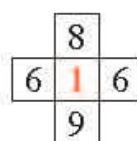
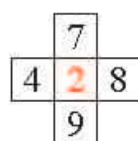
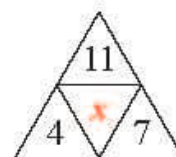
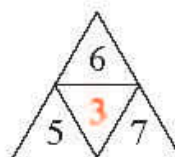
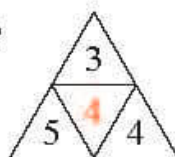
1.6. Jaką liczbę należy wpisać w miejsce x ?

Ustalamy regułę i zauważamy,

$$\text{że: } \frac{5+4}{3} + 1 = 4, \quad \frac{5+7}{6} + 1 = 3,$$

$$\frac{4+7}{11} + 1 = 2, \quad \text{więc } x = 2.$$

Ustal regułę i w miejsce x wpisz odpowiednią liczbę.



2. Zbiory i działania na nich

Zbiory i działania na nich

Punktem wyjścia do definiowania wielu nowych pojęć w matematyce jest pojęcie zbioru. Mówimy o zbiorze uczniów w szkole, zbiorze samochodów na parkingu, zbiorze książek na półce, zbiorze rozwiązań równania itp. Jednak gdyby ktoś nas zapytał, co to jest zbiór, to nie udzielimy ścisłej odpowiedzi.

Zbiór to pojęcie pierwotne, czyli takie, którego nie definiujemy.

Zbiory będziemy oznaczać dużymi literami alfabetu, np.: $A, B, C, T, X, \dots$.

Elementy zbioru będziemy oznaczać małymi literami alfabetu, np.: $a, b, x, y, \dots$.

Stwierdzenie, że:

- a jest elementem zbioru A zapisujemy $a \in A$ i czytamy „ a należy do A ”.
- a nie jest elementem zbioru A zapisujemy $a \notin A$ i czytamy „ a nie należy do A ”.

Zbiór określamy, podając jego elementy lub opisując warunki, które te elementy spełniają, np. zbiór dni tygodnia $A = \{\text{poniedziałek, wtorek, środa, czwartek, piątek, sobota, niedziela}\}$.

Przykład 1. Podaj przykład dwóch liczb, które są elementami zbioru B takiego, że $B = \{-3, 0, 1, 5\}$, oraz przykład liczby, która do zbioru B nie należy.

Rozwiązanie Liczba 1 jest elementem zbioru B , co zapisujemy $1 \in B$,

liczba 5 jest elementem zbioru B , co zapisujemy $5 \in B$,

liczba 3 nie jest elementem zbioru B , co zapisujemy $3 \notin B$.

Ćwiczenie 1. Które spośród liczb $-4, -1, 0, 2, 4$ są, a które nie są elementami zbioru A takiego, że $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$?

Ze względu na liczbę elementów rozróżniamy zbiory skończone i nieskończone.

Zbiór skończony to zbiór, którego liczba elementów jest równa pewnej liczbie naturalnej n , np. zbiór uczniów w twojej szkole.

Zbiór o elementach a, b, c może mieć zapis symboliczny $\{a, b, c\}$ lub $\{b, c, a\}$, lub $\{a, c, b, a\}, \dots$. Zatem $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{a, c, b, a\} = \dots$.

Zbiór pusty (oznaczamy go symbolem $\emptyset$) to zbiór skończony, który nie ma żadnego elementu, np. zbiór liczb rzeczywistych spełniających równanie $x^2 = -3$.

Zbiór nieskończony to zbiór, który nie jest skończony (ma nieskończenie wiele elementów), np. zbiór liczb naturalnych.

W matematyce szczególnie ważną rolę odgrywają te zbiory, których elementami są liczby. Nazywamy je **zbiorami liczbowymi**.

Uwaga

Wypisując elementy zbioru nieskończonego, zwykle piszemy kilka kolejnych elementów, a w miejsce pozostałych wstawiamy wielokropek, np.:

- zbiór liczb naturalnych parzystych: $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$,
- zbiór liczb całkowitych ujemnych: $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$.

Ćwiczenie 2. Spośród zbiorów A , B , C , D i E takich, że:

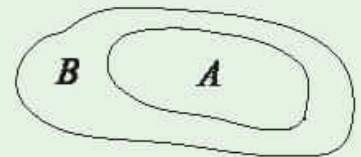
- A to zbiór wszystkich liczb naturalnych nie większych niż 5,
- B to zbiór wszystkich naturalnych dzielników liczby 12,
- C to zbiór wszystkich potęg liczby 3 o wykładnikach naturalnych,
- D to zbiór wszystkich liczb x spełniających warunek $|x| < 0$,
- E to zbiór wszystkich liczb x spełniających równanie $2x + 1 = 0$,

wybierz ten, który jest:

- a) zbiorem skończonym, b) zbiorem nieskończonym,
c) zbiorem pustym, d) zbiorem jednoelementowym.

Definicja

Zbiór A zawiera się w zbiorze B , co zapisujemy $A \subset B$, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B .
Zbiór A nazywamy **podzbiorem zbioru B** .



Uwaga

- Każdy zbiór jest jednocześnie swoim podzbiorem, bo każdy element zbioru A jest elementem zbioru A .
- Przyjmujemy, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

$$A \subset A$$

$$\emptyset \subset A$$

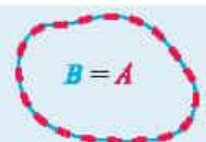
Ćwiczenie 3. Określ relacje zawierania się zbiorów A , B , C i D , gdy:

A – zbiór trapezów, B – zbiór równoległoboków,
 C – zbiór prostokątów, D – zbiór rombów.

Twierdzenie

Jeżeli $A \subset B$ i $B \subset A$, to $A = B$.

$$A \subset B \text{ i } B \subset A$$



Na zbiorach wykonujemy działania. Wyznaczamy iloczyn (inaczej część wspólną), sumę (inaczej złączenie) i różnicę zbiorów. Pojęcia te wyjaśnimy na przykładzie.

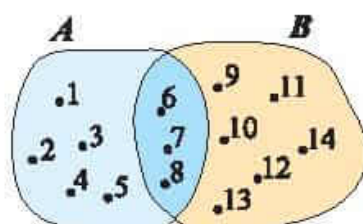
Przykład 2. Czternastu uczniów klasy Ia w ramach zajęć pozalekcyjnych uprawia pływanie lub grę w piłkę nożną. Wiadomo też, że uczeń może uprawiać obie te dyscypliny. W dzienniku zajęć pozalekcyjnych uczniowie uprawiający pływanie są zapisani na liście od numeru 1 do 8, natomiast uprawiający piłkę nożną zapisani są od numeru 6 do 14.

Pisząc 1, mamy na myśli Alę,

pisząc 8, mamy na myśli Pawła,

pisząc 14, mamy na myśli Tadeusza itd.

Opisaną sytuację przedstawiamy graficznie.



Oznaczenie: A – zbiór uczniów uprawiających pływanie,

B – zbiór uczniów uprawiających piłkę nożną.

1.	Ala
2.	Adaś
3.	Basia
4.	Beata
5.	Halina
6.	Wojtek
7.	Kasia
8.	Paweł
9.	Romek
10.	Piotr
11.	Irek
12.	Heniek
13.	Andrzej
14.	Tadek

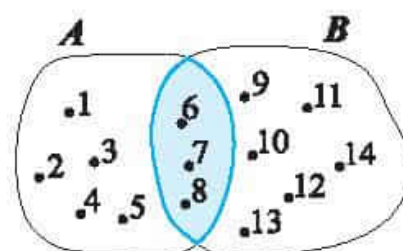
A
Zbiór uczniów
uprawiających
pływanie.

B
Zbiór uczniów
uprawiających
piłkę nożną.

Część wspólna zbiorów (iloczyn zbiorów)

Analizując zawarte w przykładzie 2. informacje o uczniach, zauważamy, że troje uczniów zapisanych pod numerami 6, 7 i 8 uprawia pływanie i grę w piłkę nożną.

Mówimy, że zbiór uczniów uprawiających obie te dyscypliny sportowe jest częścią wspólną zbiorów A i B , co zapisujemy $A \cap B = \{6, 7, 8\}$.

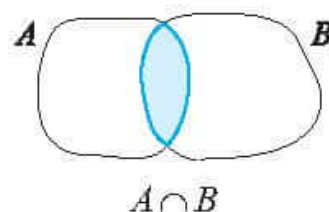


Definicja

Częścią wspólną zbiorów A i B (iloczynem zbiorów A i B) nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B . Część wspólną zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

$x \in A \cap B$ oznacza, że $x \in A$ i $x \in B$

Do części wspólnej zbiorów A i B należą te elementy, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Część wspólną zbiorów A i B można zilustrować za pomocą rysunku.



Ćwiczenie 4. Wyznacz zbiór $A \cap B$, gdy:

- a) $A = \{-7, -3, 1, 6\}$, $B = \{-3, 0, 3\}$, b) $A = \{\pi, \sqrt{3}, 13\}$, $B = \left\{\frac{1}{3}, \sqrt{2}\right\}$,
 c) $A = \{a, b, k, x\}$, $B = \{b, x\}$.

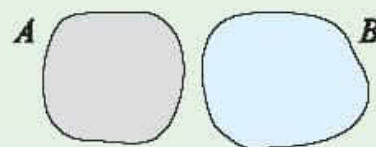
Przykład 3. Wyznacz zbiór $A \cap B$, gdy: A – zbiór liczb całkowitych dodatnich,
 B – zbiór liczb całkowitych ujemnych.

Rozwiązanie Nie ma liczb, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B . Zbiory te nie mają elementów wspólnych. Mówimy o nich, że są rozłączne. Ich wspólna część jest zbiorem pustym, co zapisujemy $A \cap B = \emptyset$.

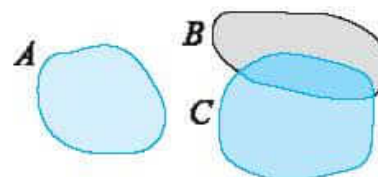
Definicja

Dwa zbiory, których wspólna część jest zbiorem pustym, nazywamy **rozłącznymi**.

$$A \cap B = \emptyset$$



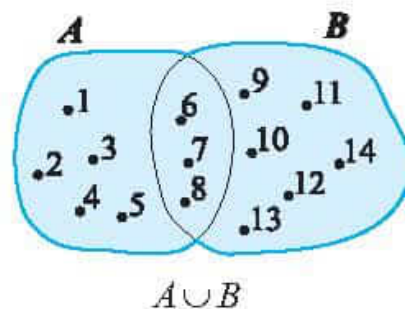
Ćwiczenie 5. Wypisz pary zbiorów rozłącznych przedstawionych na rysunku.



Suma zbiorów (złączenie zbiorów)

Zbiór uczniów uprawiających co najmniej jedną z dyscyplin sportowych z przykładu 2. jest sumą zbiorów A i B , co zapisujemy

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}.$$



Definicja

Sumą dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

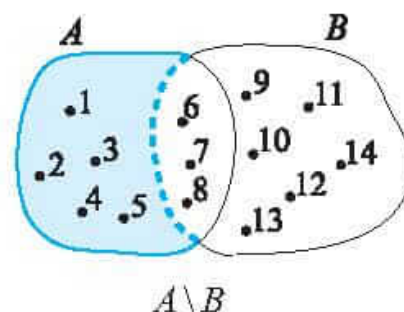
$$x \in A \cup B \text{ oznacza, że } x \in A \text{ lub } x \in B$$

Ćwiczenie 6. Wyznacz sumę zbiorów A i B , gdy:

- a) $A = \{-3, 0, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, b) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$.

Różnica zbiorów

Jeżeli spośród uczniów klasy Ia z przykładu 2., uprawiających pływanie lub grę w piłkę nożną, wszyscy trenujący grę w piłkę nożną wyjechali na zgrupowanie, to zbiór uczniów, którzy pozostali w szkole, zapisujemy symbolicznie i jest on różnicą zbiorów A i B .



Definicja

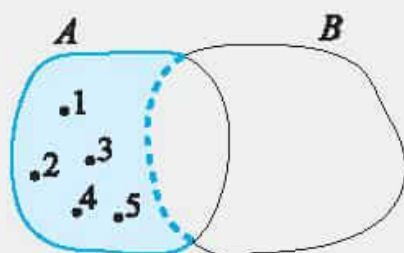
Różnicą dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A \setminus B$.

$x \in A \setminus B$ oznacza, że $x \in A$ i $x \notin B$

Uwaga

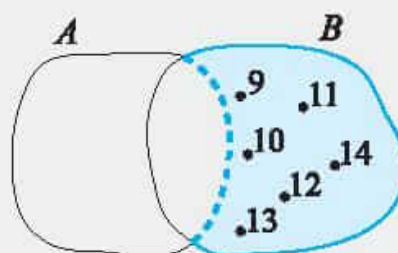
Dla zbiorów A i B z przykładu 2. możemy określić dwie różnice: $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

$A \setminus B$ – zbiór uczniów, którzy uprawiają tylko pływanie.



$$A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$B \setminus A$ – zbiór uczniów, którzy uprawiają tylko piłkę nożną.



$$B \setminus A = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

Ćwiczenie 7. Wiedząc, że $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, wyznacz różnice zbiorów: $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus B$.

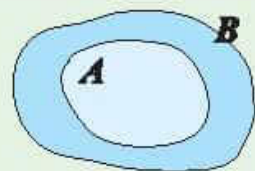
Przykład 4. Zbiór A jest zbiorem trójkątów prostokątnych, a zbiór B zbiorem trójkątów równoramiennych. Nazwij trójkąty należące odpowiednio do zbiorów: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Rozwiązanie

Do zbioru $A \cap B$ należą trójkąty prostokątne równoramienne,
do zbioru $A \cup B$ należą trójkąty prostokątne lub równoramienne,
do zbioru $A \setminus B$ należą trójkąty prostokątne, które nie są równoramienne,
do zbioru $B \setminus A$ należą trójkąty równoramienne, które nie są prostokątne.

Definicja

Jeżeli $A \subset B$, to różnicę $B \setminus A$ nazywamy dopełnieniem zbioru A do zbioru B .

 $B \setminus A$ 

Ćwiczenie 8. Zbiór X jest zbiorem wszystkich trójkątów, A – zbiorem trójkątów ostrokatnych, B – zbiorem trójkątów prostokatnych, C – zbiorem trójkątów rozwartokatnych. Nazwij trójkąty należące odpowiednio do zbioru: a) $X \setminus A$, b) $X \setminus B$, c) $X \setminus C$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

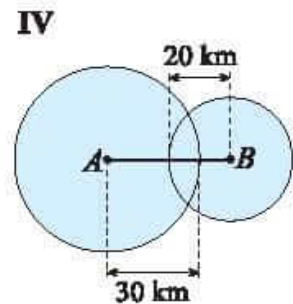
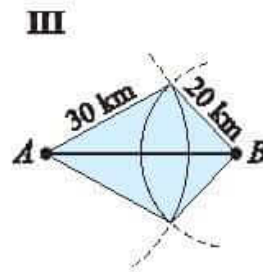
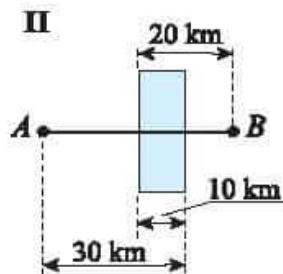
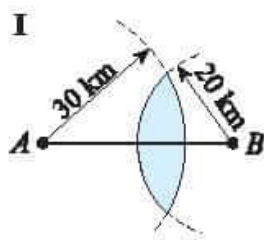
1. $-4 \notin A$, $-1 \in A$, $0 \in A$, $2 \in A$, $4 \notin A$ 2. a) A, B, E , b) C , c) D , d) E 3. $B \subset A$, $D \subset A$, $C \subset A$, $C \subset B$, $D \subset B$
 4. a) $\{-3\}$, b) $\emptyset$, c) $\{b, x\}$ 5. $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ 6. a) $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$, b) $\{-1, 0, 1, 2\}$
 7. $A \setminus B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B \setminus A = \emptyset$, $B \setminus C = B$, $C \setminus B = C$
 8. a) Trójkąty rozwartokątne lub prostokątne, b) trójkąty rozwartokątne lub ostrokatne, c) trójkąty ostrokatne lub prostokątne.

Zadania utrwalające

- 2.1. Określ, jakim zbiorem, skończonym czy nieskończonym, jest zbiór A , gdy:
- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$, b) $A = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$,
 c) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$, d) $A = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$.
- 2.2. Wypisz niepuste podzbiory trójelementowego zbioru liter $\{a, b, c\}$. Ile podzbiorów otrzymałaś(eś)? Czy pamiętałaś(eś), że każdy zbiór jest swoim podzbiorem?
- 2.3. W supermarkecie na półce znajdują się 234 opakowania płynów do prania, w tym 157 do prania wyłącznie w pralkach automatycznych i 97 do prania ręcznego. Czy wśród wszystkich opakowań są płyny, które można stosować do prania ręcznego i do prania w pralce automatycznej? Ile jest takich płynów?
- 2.4. Z klasy liczącej 32 uczniów na wakacje wyjechali wszyscy. Osiemnastu wyjechało do rodziny, a dwudziestu czterech poza województwo, w którym mieszkają. Ilu uczniów spędziło wakacje u rodziny mieszkającej poza województwem?
- 2.5. Wiedząc, że zbiór A jest zbiorem liczb całkowitych nie mniejszych niż -2 i mniejszych niż 5 , a zbiór B zbiorem liczb naturalnych nie większych niż 7 , wypisz elementy zbioru:
- a) A , b) B , c) $A \cup B$, d) $A \cap B$, e) $A \setminus B$, f) $B \setminus A$.



2.6. Stacje radiowe A i B położone są w odległości 40 km od siebie. Audycje nadawane przez stację A mogą być odbierane w promieniu 30 km od niej, zaś audycje nadawane przez stację B w promieniu 20 km od niej.



Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D .

Rejon zasięgu obu stacji radiowych jednocześnie przedstawiono na rysunku:

A. I,

B. II.

Rejon zasięgu co najmniej jednej z tych stacji przedstawiono na rysunku:

C. III,

D. IV.

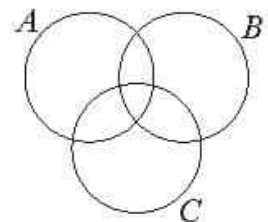
2.7. Wiedząc, że:

- X to zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych,
 - A to zbiór parzystych liczb naturalnych dwucyfrowych,
 - B to zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 3,
 - C to zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6,
- opisz słowami zbiór:

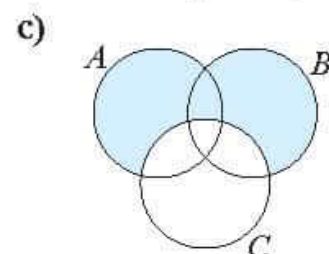
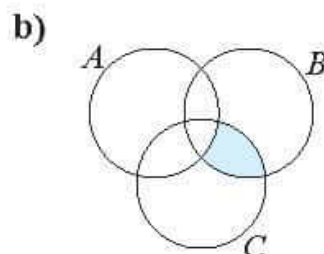
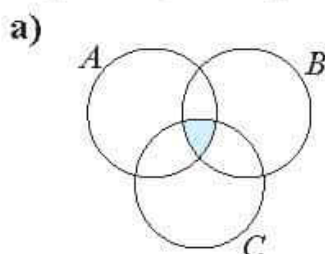
a) $A \cup B$, b) $B \cap C$, c) $X \cap C$, d) $X \setminus A$, e) $X \cup C$.

2.8. Zbiory A , B , C przedstawiono za pomocą grafu. Na oddzielnych rysunkach pokoloruj zbiory:

- a) $D = A \cup B \cup C$, b) $E = (A \cap B) \cup C$,
c) $F = (A \cup B) \setminus C$, d) $H = (A \setminus B) \cap C$.



2.9. Opisz za pomocą działań na zbiorach A , B i C zbiory pokolorowane poniżej.



3. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

W szkole podstawowej wykonywaliście działania na liczbach naturalnych, całkowitych, wymiernych oraz na liczbach, które nie są wymierne.

Wszystkie poznane we wcześniejszych latach nauki liczby tworzą zbiór liczb rzeczywistych, który oznaczamy symbolem $\mathbb{R}$.

Np.: $0 \in \mathbb{R}$, $-2 \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$, $3\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$.

W matematyce liczby o określonej własności tworzą zbiory liczbowe, które oznaczają się symbolami jak w tabeli.

	Zbiór liczb:				
	naturalnych	całkowitych	wymiernych	niewymiernych	rzeczywistych
Oznaczenie międzynarodowe	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$

Ćwiczenie 1. Podaj trzy liczby, które należą do zbioru liczb:

a) naturalnych ($\mathbb{N}$), b) wymiernych ($\mathbb{Q}$), c) całkowitych ($\mathbb{Z}$).

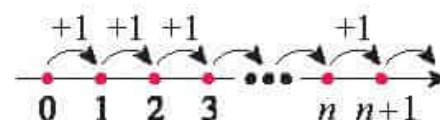
Liczby naturalne

Przypomnijmy

Liczby naturalne: $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Najmniejszą liczbą naturalną jest liczba zero.

Wśród liczb naturalnych wyróżniamy liczby pierwsze i liczby złożone.



- **Liczba pierwsza** to liczba naturalna większa od 1, która jest podzielna tylko przez 1 i przez samą siebie, np. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.
- **Liczba złożona** to liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki naturalne, np. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14.
- Każda liczba złożona ma co najmniej jeden dzielnik, który jest liczbą pierwszą.
- Każdą naturalną liczbę złożoną można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych.
- **Liczby 0 i 1** nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do liczb złożonych.

Uwaga Wszystkie liczby naturalne tworzą zbiór liczb naturalnych, który oznaczamy N .

- $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych.
- $N^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Zbiór N jest zbiorem nieskończonym. Nie można podać największej liczby naturalnej.

Ćwiczenie 2. Spośród liczb naturalnych większych od 17 i mniejszych od 30 wypisz:

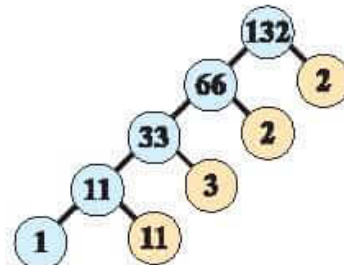
- a) wszystkie liczby pierwsze, b) wszystkie liczby złożone.

Przedstawienie liczby złożonej w postaci iloczynu liczb pierwszych nazywamy **rozkładem na czynniki pierwsze**. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 1. Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę 132 i zapisz ją jako iloczyn liczb pierwszych.

Rozwiązanie

	132	2
pierwszy iloraz	66	2
drugi iloraz	33	3
trzeci iloraz	11	11
czwarty iloraz	1	



Odp.: $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$.

Ćwiczenie 3. Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę: a) 70, b) 192, c) 2016.

Cechy podzielności liczb

Liczba naturalna jest podzielna przez:	
2,	jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 albo 8,
3,	jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 3,
4,	jeśli liczba, wyrażona kolejnymi dwiema ostatnimi jej cyframi, jest podzielna przez 4,
5,	jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 albo 5,
6,	jeśli jest podzielna przez 2 i przez 3,
8,	jeśli liczba, wyrażona trzema kolejnymi ostatnimi jej cyframi, jest podzielna przez 8,
9,	jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9,
10,	jeśli ostatnią jej cyfrą jest 0,
25,	jeśli jej dwie ostatnie cyfry to zera lub liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry jest podzielna przez 25.

Ćwiczenie 4. Sformułuj cechę podzielności przez 100.



Ćwiczenie 5. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz cyfrę tak, aby otrzymana liczba była podzielna przez podany obok dzielnik.

Liczba	Dzielnik liczby	Liczba	Dzielnik liczby
6745■	3	301■■■	25
1583■	4	31■■54	6
6321■	5	35■■2■	8
3■■291	9	1389■■■	50

Rozkład na czynniki ułatwia nam wyznaczanie **największego wspólnego dzielnika (NWD)** liczb oraz ich **najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW)**. Jeżeli a i b są różnymi dodatnimi liczbami naturalnymi, to:

- $\text{NWD}(a, b)$ to największa liczba, przez którą są podzielne liczby a i b .
- $\text{NWW}(a, b)$ to najmniejsza liczba, która jest podzielna przez liczby a i b .

Uwaga

Najmniejszą wspólną wielokrotność NWW różnych liczb naturalnych dodatnich a i b

można wyznaczyć z zależności
$$\text{NWW}(a, b) = \frac{ab}{\text{NWD}(a, b)}.$$

Przykład 2. Oblicz NWD i NWW liczb: a) 90 i 54, b) $2^2 \cdot 7^5$ i $2^3 \cdot 7^3$.

Rozwiązanie

a)

90		2
45		3
15		3
5		5
1		1

54		2
27		3
9		3
3		3
1		1

$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$
 $\text{NWD}(90, 54) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18,$
 $\text{NWW}(90, 54) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 270.$

b) $2^2 \cdot 7^5 = 2^2 \cdot 7^3 \cdot 7^2, \quad 2^3 \cdot 7^3 = 2^2 \cdot 2 \cdot 7^3.$
 $\text{NWD}(2^2 \cdot 7^5, 2^3 \cdot 7^3) = 2^2 \cdot 7^3,$

I sposób $\text{NWW}(2^2 \cdot 7^5, 2^3 \cdot 7^3) = 2^2 \cdot 7^3 \cdot 7^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 7^5,$

II sposób $\text{NWW}(2^2 \cdot 7^5, 2^3 \cdot 7^3) = \frac{2^2 \cdot 7^5 \cdot 2^3 \cdot 7^3}{2^2 \cdot 7^3} = 2^3 \cdot 7^5.$

Odp.: a) $\text{NWD}(90, 54) = 18, \text{NWW}(90, 54) = 270,$

b) $\text{NWD}(2^2 \cdot 7^5, 2^3 \cdot 7^3) = 2^2 \cdot 7^3, \text{NWW}(2^2 \cdot 7^5, 2^3 \cdot 7^3) = 2^3 \cdot 7^5.$

Ćwiczenie 6. Oblicz NWW i NWD liczb:

a) $2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^3$ i $2 \cdot 3^2 \cdot 7$, b) $3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ i $3^2 \cdot 7^4 \cdot 11^3$.

Ćwiczenie 7. Uzasadnij, że każde dwie kolejne liczby naturalne dodatnie są względnie pierwsze, czyli że $\text{NWD}(n, n+1) = 1$, gdy n jest liczbą naturalną dodatnią.

Przykład 3. Uzasadnij twierdzenie.

Twierdzenie

Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Dowód wprost

Z (założenie)



dowód

T (teza) *c.n.u.*

Dowód nie wprost

zaprzeczenie tezie T



dowód

zaprzeczenie założenia Z *c.k.d.*

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. W dowodzie tym zakładamy, że teza nie jest prawdziwa. Na podstawie kolejno wyciąganych wniosków dochodzimy do sprzeczności z założeniem dowodzonego twierdzenia lub innymi twierdzeniami wcześniej udowodnionymi.

Z (założenie):

P – zbiór wszystkich liczb pierwszych,

T (teza):

P – zbiór nieskończony.

Dowód:

1° Zaprzeczamy tezie T , czyli zakładamy, że zbiór P wszystkich liczb pierwszych jest zbiorem skończonym i największą liczbą pierwszą jest p ,

$$P = \{2, 3, 5, 7, \dots, 97, \dots, p\}.$$

2° Tworzymy liczbę a , która jest iloczynem wszystkich liczb pierwszych ze zbioru P ,

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 97 \cdot \dots \cdot p.$$

3° Wnioskujemy, z 1° i 2°, że:

- liczba $a+1$ jest liczbą złożoną, *Nie jest elementem zbioru P .*
- liczby $a+1$ w rozkładzie na czynniki pierwsze nie można przedstawić w postaci iloczynu elementów zbioru P . $\text{NWD}(a, a+1) = 1$

4° Wniosek z 3°.

Poza zbiorem P musi istnieć co najmniej jedna liczba pierwsza, która będzie się znajdować w rozkładzie na czynniki liczby $a+1$.

5° Wniosek z 4°.

Zbiór P nie jest zbiorem skończonym. *c.k.d.*

Zaprzeczenie założenia.

Zatem istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Uwaga

Jeżeli $m = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ jest rozkładem liczby naturalnej m na czynniki pierwsze, to liczba m ma $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$ dzielników, gdzie $n_1, n_2, \dots, n_k$ są dodatnimi liczbami naturalnymi.

Przykład 4. Oblicz, ile dzielników naturalnych ma liczba 120.

Rozwiązanie Rozkładamy liczbę 120 na czynniki pierwsze:

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1, \text{ więc } p_1 = 2 \text{ i } n_1 = 3, p_2 = 3 \text{ i } n_2 = 1, p_3 = 5 \text{ i } n_3 = 1.$$

Liczba naturalnych dzielników liczby 120 jest równa

$$(3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Odp.: Liczba 120 ma 16 dzielników.

Ćwiczenie 8. Oblicz, ile dzielników naturalnych ma liczba:

a) 450, b) 1520, c) 1 000 000.

Uwaga

Wśród kolejnych liczb naturalnych dodatnich:

co druga jest parzysta	<i>$n, n+1$ – dwie kolejne liczby naturalne dodatnie, jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta</i>
co druga jest nieparzysta	
co trzecia jest podzielna przez 3	<i>$n, n+1, n+2$ – trzy kolejne liczby naturalne, wśród których jedna jest podzielna przez 3</i>
co czwarta jest podzielna przez 4 itd.	<i>$n, n+1, n+2, n+3$ – cztery kolejne liczby naturalne, wśród których jedna jest podzielna przez 4</i>

Przykład 5. Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

Rozwiązanie Zapisujemy założenie Z i tezę T .

Z (założenie):

$n, n+1, n+2, n+3$ – cztery kolejne liczby naturalne dodatnie.

T (teza):

Liczba $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ jest podzielna przez 24.

Dowód:

Wśród czterech kolejnych liczb naturalnych: jedna jest podzielna przez 4, co najmniej jedna jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2, więc iloczyn $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ jest podzielny przez iloczyn $4 \cdot 3 \cdot 2$, czyli przez 24. **c.n.u.**

Ćwiczenie 9. Udowodnij, że iloczyn:

- dwóch kolejnych liczb naturalnych dodatnich jest podzielny przez 2,
- pięciu kolejnych liczb naturalnych dodatnich jest podzielny przez 120.

Przypomnijmy

$$a = q \cdot n + r,$$

gdzie reszta r jest liczbą naturalną mniejszą od dzielnika q oraz n jest ilorazem.

$$\frac{12}{6} = 2, \text{ więc } 12 = 6 \cdot 2 + 0, \text{ czyli } r = 0,$$

$$\frac{33}{5} = 6\frac{3}{5} = 6 + \frac{3}{5}, \text{ więc } 33 = 5 \cdot 6 + 3, \text{ czyli } r = 3,$$

$$\frac{132}{25} = 5\frac{7}{25} = 5 + \frac{7}{25}, \text{ więc } 132 = 25 \cdot 5 + 7, \text{ czyli } r = 7,$$

$$\frac{1}{5} = 0\frac{1}{5} = 0 + \frac{1}{5}, \text{ więc } 1 = 5 \cdot 0 + 1, \text{ czyli } r = 1.$$

Przykład 6. Zapisz trzy kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez:

- 3 dają resztę 2, b) 5 dają resztę 1.

Rozwiązanie

- Zauważamy, że kolejne liczby różnią się o 3, więc aby otrzymać następną liczbę, do poprzedniej należy dodać 3.

$$3k + 2, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N},$$

$$3k + 2 + 3 = 3k + 5,$$

$$3k + 2 + 6 = 3k + 8.$$

$3k + 2$ – najmniejsza liczba

$3k + 5$ – druga liczba, $3k + 5 = 3(k + 1) + 2$

$3k + 8$ – trzecia liczba, $3k + 8 = 3(k + 2) + 2$

- Zauważamy, że kolejne liczby różnią się o 5.

$$5k + 1, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N},$$

$$5k + 1 + 5 = 5k + 6,$$

$$5k + 1 + 10 = 5k + 11.$$

$5k + 1$ – najmniejsza liczba

$5k + 6$ – druga liczba, $5k + 6 = 5(k + 1) + 1$

$5k + 11$ – trzecia liczba, $5k + 11 = 5(k + 2) + 1$

Ćwiczenie 10. Zapisz trzy kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez:

- 3 dają resztę 1, b) 7 dają resztę 4.

Przykład 7. Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

Rozwiązanie

Z (założenie):

$2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$ – cztery kolejne liczby naturalne nieparzyste.

T (teza):

Suma $2n+1+2n+3+2n+5+2n+7$ jest podzielna przez 8.

Dowód:

$$\begin{aligned} 2n+1+2n+3+2n+5+2n+7 &= \\ &= 8n+16 = \\ &= 8 \cdot (n+2). \end{aligned}$$

Wylączamy liczbę 8 przed nawias.

Liczba $8 \cdot (n+2)$ jest podzielna przez 8, bo jest iloczynem liczb naturalnych 8 i $n+2$. **c.n.u.**

Ćwiczenie 11. Wykaż, że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5.

Ćwiczenie 12. Obok podana jest informacja o największej odkrytej na początku 2018 roku liczbie pierwszej. Sprawdź w internecie, czy w dniu, w którym czytasz to ćwiczenie, znaleziono już większą liczbę pierwszą. Jeśli tak, to ją podaj.

$2^{77\,232\,917} - 1$ to liczba,
do której zapisu
potrzeba 23 249 425 cyfr.

Algorytm Euklidesa

Algorytm Euklidesa służy do wyznaczania m.in. największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych.

Euklides urodził się około roku 365 p.n.e., zmarł około roku 300 p.n.e.

Był greckim matematykiem pochodzącym z Aten, który przez większą część życia działał w sławnej Bibliotece Aleksandryjskiej.

Jego dzieło Elementy stanowi syntezę ówczesnej wiedzy matematycznej.



Przykład 8. Stosując algorytm Euklidesa, oblicz NWD liczb:

a) 90 i 54, b) 816 i 700, c) 1261 i 936.

Rozwiązanie

a) $90 = 54 \cdot 1 + 36$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2 + 0$$

$$\text{NWD}(90, 54) = 18$$

b) $816 = 700 \cdot 1 + 116$

$$700 = 116 \cdot 6 + 4$$

$$116 = 4 \cdot 29 + 0$$

$$\text{NWD}(816, 700) = 4$$

c) $1261 = 936 \cdot 1 + 325$

$$936 = 325 \cdot 2 + 286$$

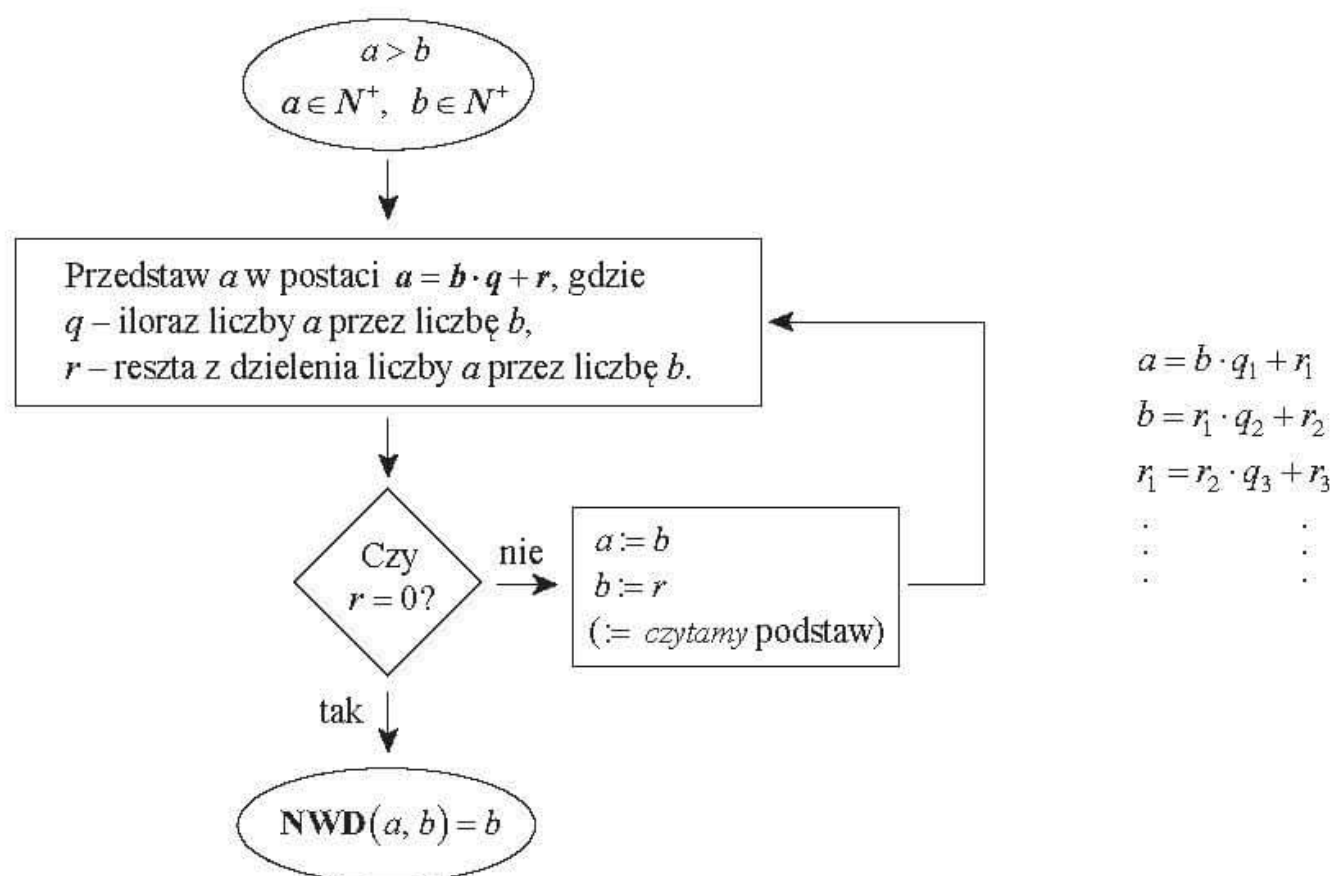
$$325 = 286 \cdot 1 + 39$$

$$286 = 39 \cdot 7 + 13$$

$$39 = 13 \cdot 3 + 0$$

$$\text{NWD}(1261, 936) = 13.$$

Schemat blokowy algorytmu Euklidesa



- W ciągu reszt $r_1, r_2, r_3, \dots$, musi wystąpić w pewnym miejscu reszta równa zero.
- Ostatnia różna od zera reszta w ciągu reszt $r_1, r_2, r_3, \dots$ jest największym wspólnym dzielnikiem liczb naturalnych dodatnich a i b , gdzie $a > b$.

Ćwiczenie 13. Zastosuj algorytm Euklidesa i oblicz NWD liczb:

a) 234 i 186, b) 132 i 124, c) 4321 i 2745, d) 11358 i 336.

Odpowiedzi do ćwiczeń

- Np.: a) 0, 5, 9, b) $-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5}$, c) -5, -1, 0.
- a) 19, 23, 29, b) 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28.
- Liczba naturalna jest podzielna przez 100, jeśli jej dwie ostatnie cyfry są zerami.
- a) $\text{NWW}(2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^3, 2 \cdot 3^2 \cdot 7) = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^3$, $\text{NWD}(2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^3, 2 \cdot 3^2 \cdot 7) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$,
b) $\text{NWW}(3^3 \cdot 7^2 \cdot 11, 3^2 \cdot 7^4 \cdot 11^3) = 3^3 \cdot 7^4 \cdot 11^3$, $\text{NWD}(3^3 \cdot 7^2 \cdot 11, 3^2 \cdot 7^4 \cdot 11^3) = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$.
- Wskazówka.* Zauważ, że wśród dwóch kolejnych liczb naturalnych jedna jest parzysta, a druga nieparzysta.
- a) 18, b) 20, c) 49.
- a) $3n+1, 3n+4, 3n+7$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, b) $7n+4, 7n+11, 7n+18$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.
- a) 6, b) 4, c) 1, d) 6.

Zadania utrwalające

3.1. Liczby 108 i 1944 rozłóż na czynniki pierwsze.

3.2. Liczby 12 i 15 można przedstawić w postaci sumy kolejnych liczb naturalnych w następujący sposób: $12 = 3 + 4 + 5$ oraz $15 = 7 + 8$ lub $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Podobnie przedstaw liczby 18 i 21.

3.3. Oblicz NWD i NWW liczb:

- a) $2^3 \cdot 5^4 \cdot 3^2$ i $2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^4$, b) 75, 120 i 96, c) 10^6 i 10^{12} .

3.4. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*



NWD(180, 54) = 18.	P	F
NWW(180, 54) = 540.	P	F

3.5. Masz pociąć prostokątny arkusz blachy o wymiarach 48 cm $\times$ 60 cm na jednakowe kwadraty o możliwie najdłuższym boku, którego długość jest liczbą naturalną wyrażoną w centymetrach.

- a) Jaką długość powinien mieć bok każdego z tych kwadratów?
b) Ile otrzymasz takich kwadratów?

3.6. Na dwóch kolejnych skrzyżowaniach długiej ulicy są światła sygnalizacyjne. Na pierwszym skrzyżowaniu światła zmieniają się co 40 sekund, a na drugim – co 1 minutę. W pewnym momencie światła czerwone włączyły się jednocześnie na obu skrzyżowaniach. Co ile najmniej minut sytuacja będzie się powtarzała?

3.7. Uzasadnij, że suma dzielników każdej liczby pierwszej jest o 1 od niej większa.

D

3.8. 69 jabłek i 92 gruszki rozdzielono po równo między uczniów klasy pierwszej. Uzasadnij, że 161 cukierków można również rozdzielić po równo między uczniów tej klasy.

D

3.9. Uzasadnij, że jeżeli w czterocyfrowej liczbie naturalnej suma cyfr tysięcy i dziesiątek jest równa sumie cyfr setek i jedności, to liczba ta jest podzielna przez 11.

D

- a) Sprawdź, czy liczba 9735 jest podzielna przez 11.
b) Podaj, jaką cyfrę należy wpisać w miejsce ■, aby liczby

4 ■ 76, ■ 689, 139 ■, 68 ■ 7

były podzielne przez 11.



Liczby całkowite

Przypomnijmy

- Oś liczbowa to prosta, na której ustalono zwrot dodatni, punkt zerowy i odcinek jednostkowy.

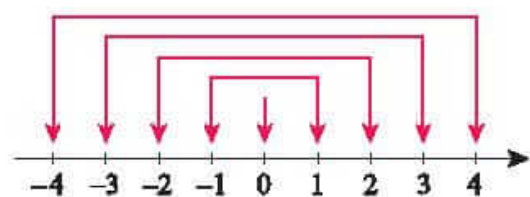
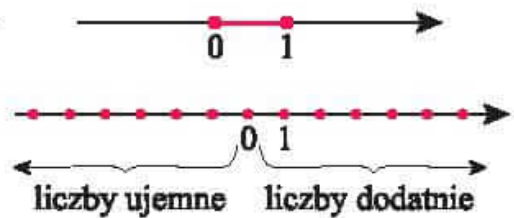
Liczby całkowite: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Liczba 0 nie jest ani liczbą całkowitą dodatnią, ani liczbą całkowitą ujemną.

- Liczby położone na osi liczbowej symetrycznie względem liczby 0 nazywamy **liczbami przeciwnymi**.

- Jeżeli a jest pewną liczbą, to $-a = -1 \cdot a$ oznacza liczbę do niej przeciwną.

Np. $-(-1) = -1 \cdot (-1) = 1$ jest liczbą przeciwną do liczby -1 .



$$-a + a = 0$$

$$-(-a) = a$$

Uwaga

- Wszystkie liczby całkowite tworzą zbiór liczb całkowitych, który oznaczamy Z .

- $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb całkowitych.

Nie ma w nim liczby najmniejszej ani największej.

- $Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb całkowitych dodatnich, czyli $Z^+ = N^+$.

Liczba 1 to najmniejsza liczba w tym zbiorze.

- $Z^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ – zbiór liczb całkowitych ujemnych.

Liczba -1 to największa liczba w tym zbiorze.

 **Ćwiczenie 14.** Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce  wpisz odpowiednią liczbę.

a	-4	17			-13			0
$-a$			2			-9		
$-(-a)$				-8			7	

Uwaga

Wszystkie własności dotyczące podzielności liczb naturalnych i reszt z dzielenia odnoszą się również do liczb całkowitych.

Np. liczby $\dots, -18, -13, -8, -3, 2, 7, \dots$ są liczbami postaci $5k + 2$, gdzie $k \in Z$, czyli liczbami, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2.

Przykład 9. Oblicz resztę z dzielenia liczby:

- a) -20 przez 3 , b) -24 przez 7 , c) -30 przez -4 .

Rozwiązanie

- a) Przedstawiamy liczbę -20 w postaci $-20 = 3 \cdot q + r$ tak, by r było liczbą naturalną, taką, że $0 \leq r < 3$.

$$-20 = 3 \cdot (-7) + 1,$$

$$21 + 1 = 20$$

- b) $-24 = 7 \cdot q + r$, gdzie $0 \leq r < 7$, więc $-24 = 7 \cdot (-4) + 4$,

$$28 + 4 = 24$$

- c) $-30 = -4 \cdot q + r$, gdzie $0 \leq r < 4$, więc $-30 = -4 \cdot 8 + 2$.

$$32 + 2 = 30$$

Odp.: a) 1, b) 4, c) 2.

Ćwiczenie 15. Oblicz resztę z dzielenia liczby:

- a) -53 przez 20 , b) -200 przez 9 , c) -132 przez -5 .

Przypomnijmy

$$\begin{array}{ccccccc} a + 0 = a & a - 0 = a & a \cdot 1 = a & a : 1 = a \\ 1 + (-1) = 0 & 1 \cdot 1 = -1 \cdot (-1) = 1 & & \\ a - b = a + (-b) & a - b = -b + a & -1 \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1 & \end{array}$$

- Wykonując działania łączne na liczbach, należy pamiętać o kolejności działań. Jeśli nie ma nawiasów, to kolejność działań jest następująca:

a następnie **mnóżenie** i **dzielenie** *w kolejności ich występowania,*
dodawanie i **odejmowanie**.

- Przy obliczeniach zawierających nawiasy najpierw wykonujemy działania w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma już nawiasów.

Przykład 10. Oblicz wartość wyrażenia:

- a) $[27 : (-3)] : (14 - 5)$, b) $(-12) : (-4) - (-3) \cdot (-5) + (-8) : 4 + 44$.

Rozwiązanie

- a) $[27 : (-3)] : (14 - 5) = -9 : 9 = -1$,

- b) $(-12) : (-4) - (-3) \cdot (-5) + (-8) : 4 + 44 = 3 - 15 - 2 + 44 =$
 $= (3 + 44) - (15 + 2) = 47 - 17 = 30$.

Ćwiczenie 16. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $-32 : (16 : 8)$, b) $(-7 + 9) \cdot (3 - 5)$, c) $4 - 4 \cdot 7 + 5 - 5 \cdot 2 + 3 - 3 \cdot 4$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. a) 7, b) 7, c) 3. Wskazówka. a) $-53 = 20 \cdot (-3) + 7$, b) $-200 = 9 \cdot (-23) + 7$, c) $-132 = -5 \cdot 27 + 3$.

16. a) -16, b) -4, c) -38.

Zadania utrwalające

3.10. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(-3) \cdot (-2) + 5 \cdot (-4) - (-3) \cdot 2$, b) $(-12) : (-4) - 3 \cdot (-5) + (-8) \cdot 4$,
c) $1 - [(-2) \cdot 3 - (-4) \cdot (-5)] \cdot (-2) + (-2) \cdot 4$.

3.11. Oblicz:

a) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$, b) $(-1) : (-1) : (-1) : (-1)$,
c) $(-1) : (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$, d) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$,
e) $(-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 0$, f) $[(-13) \cdot (-17) \cdot 0] : (-2)$,
g) $(-27 - 45) \cdot [-23 - (-23)]$, h) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-2)$.

3.12. Uzasadnij, że jeśli $n \in \mathbb{Z}$, to liczba całkowita zapisana w postaci:

- D** a) $3n - 4$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2,
b) $4n - 30$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 2,
c) $7n - 21$ jest podzielna przez 7,
d) $6n + 19$ przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1.

3.13. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba $5n - 21$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę:

- A. 1, B. 2, C. 3, D. 4.

3.14. Oblicz reszty z dzielenia liczby:

- a) -12 przez 3, 5, 8 i 10, b) -20 przez 2, 6, 7 i 15.

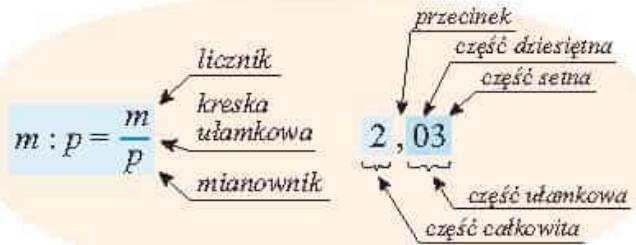
3.15. Wykaż, że liczba:

- D** a) $11^{10} - 1$ jest podzielna przez 10,
b) $10^n - 4$ jest podzielna przez 6, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

Liczby wymierne

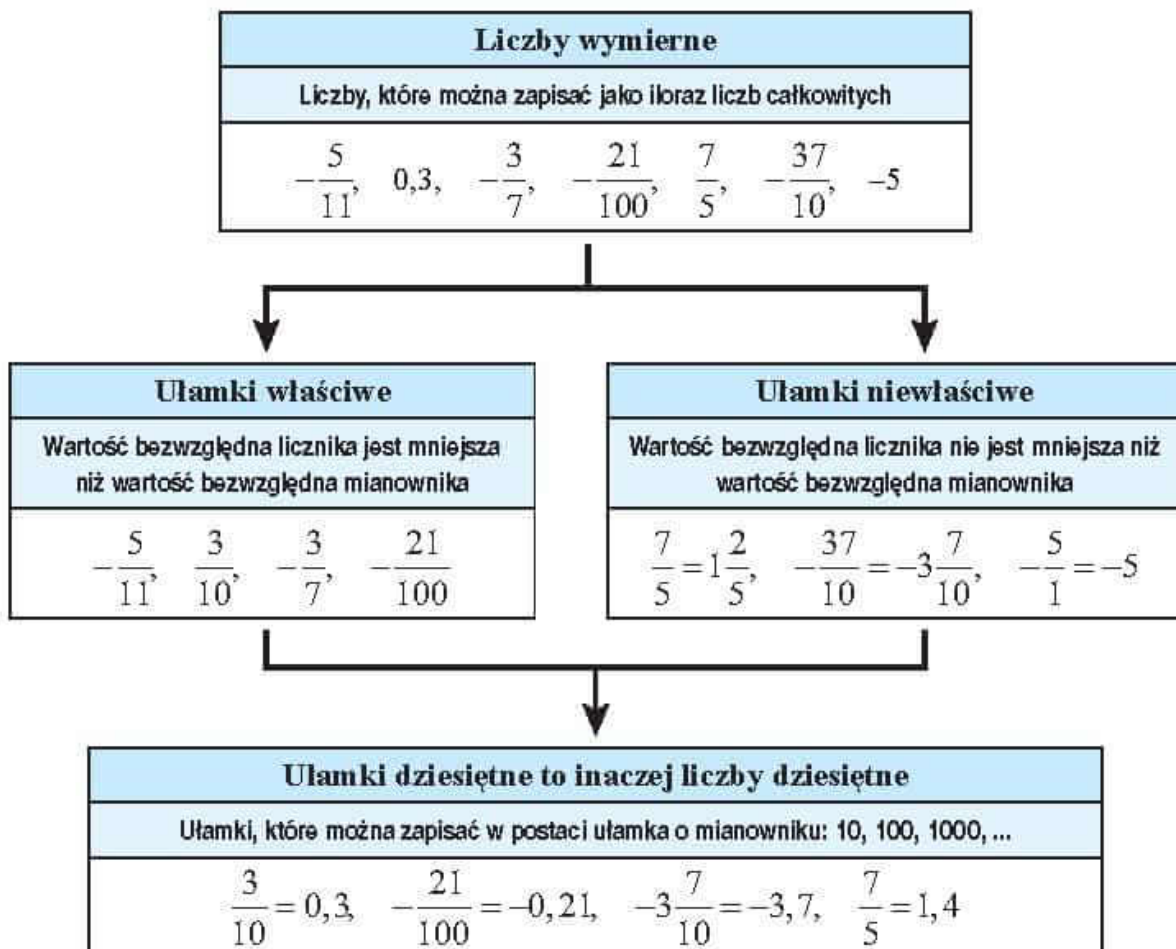
Przypomnijmy

Liczbę nazywamy **wymierną**, jeżeli można przedstawić ją w postaci ułamka liczb całkowitych $\frac{m}{p}$, gdzie $p \neq 0$.



Uwaga

- Wszystkie liczby wymierne tworzą zbiór liczb wymiernych, który oznaczamy $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Q}^+$ – zbiór liczb wymiernych dodatnich.
- $\mathbb{Q}^-$ – zbiór liczb wymiernych ujemnych.
- $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Ćwiczenie 17. Podaj ułamek:

- a) niewłaściwy mniejszy od -1 ,
- b) dziesiętny ujemny większy od -1 ,
- c) właściwy większy od zera, którego suma licznika i mianownika jest równa 9. Czy jest tylko jeden taki ułamek właściwy? Jeśli nie, to podaj wszystkie możliwości.

Ćwiczenie 18. Porównaj liczby:

- a) $-\frac{2}{5}$ i $-\frac{6}{5}$, b) $-2\frac{1}{3}$ i $-2\frac{2}{3}$, c) $-\frac{4}{3}$ i $-\frac{4}{5}$, d) $-1,3$ i $-1,4$,
- e) $-1,0015$ i $-\frac{116}{100}$.

Uwaga

Liczby całkowite są liczbami wymiernymi, bo każdą z nich można przedstawić w postaci ułamka. Na przykład:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots, \quad 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{5} = \dots, \quad -2 = \frac{-2}{1} = -\frac{4}{2} = \frac{6}{-3} = \dots$$

Jeżeli $a \neq 0$, to liczby a i $\frac{1}{a}$ nazywamy liczbami odwrotnymi.

Liczba 0 nie ma swojej odwrotności.

Jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to odwrotnością liczby $\frac{a}{b}$ jest liczba $\frac{b}{a}$.

Przypomnijmy

Skracanie i rozszerzanie ułamków

- **Skrócić ułamek** to znaczy **podzielić** jego **licznik i mianownik** przez tę samą liczbę całkowitą różną od zera.
- **Rozszerzyć ułamek** to znaczy **pomnożyć** jego **licznik i mianownik** przez tę samą liczbę całkowitą różną od zera.

Jeżeli $b \neq 0$ i $c \neq 0$, to:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad \text{skracanie ułamka}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \text{rozszerzanie ułamka}$$

- Polecenie „**skróć ułamek**” oznacza przedstawienie tego ułamka w najprostszej postaci, czyli w postaci nieskracalnego ułamka.
- **Ułamek nieskracalny** to iloraz dwóch liczb całkowitych, dla których największy wspólny dzielnik ich wartości bezwzględnych jest równy 1.



Ćwiczenie 19. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taką liczbę, by prawdziwa była równość: a) $\frac{16}{40} = \frac{\blacksquare}{15}$, b) $\frac{75}{100} = \frac{-6}{\blacksquare}$, c) $-0,12 = \frac{\blacksquare}{-175}$.

Uwaga

Jednoczesne zachodzenie dwóch nierówności $a < b$ i $b < c$ można zapisać w postaci $a < b < c$, zwanej **nierównością podwójną**.



Ćwiczenie 20. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taką liczbę, by prawdziwa była nierówność: a) $2 < \frac{\blacksquare}{3} < 3$, b) $-\frac{2}{3} < \frac{\blacksquare}{-9} < -\frac{1}{3}$, c) $-\frac{7}{9} < \frac{-25}{\blacksquare} < -\frac{6}{9}$.

Ćwiczenie 21. Oblicz: a) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{12}$, b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(6\frac{3}{5} - 7\right)$, c) $\frac{1\frac{1}{3} : 2\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{0,2}$.

Przypomnijmy

Rozwinięcie dziesiętne ułamków

Jedną z metod zamiany ułamka zwykłego na dziesiętny jest dzielenie licznika tego ułamka przez jego mianownik. Możemy wtedy otrzymać **rozwinięcie dziesiętne** tej liczby, które może być **skończone** lub **nieskończone okresowe**.

Aby odróżnić ułamki mające rozwinięcie skończone od tych o rozwinięciu nieskończonym okresowym, warto je najpierw skrócić.

Ułamek nieskracalny ma rozwinięcie dziesiętne:

- **skończone**, gdy jego mianownik można przedstawić jako iloczyn liczb 2 lub 5, na przykład

$$\frac{1}{40} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = 0,025, \quad \frac{5}{32} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 0,15625,$$

- **nieskończone (okresowe)**, gdy jego mianownik można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych, z których co najmniej jedna jest różna od 2 i 5, na przykład

$$\frac{5}{12} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 0,41666..., \quad \frac{8}{15} = \frac{8}{3 \cdot 5} = 0,5333...$$

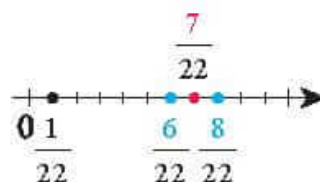
$$\begin{aligned} \frac{1}{9} &= 0,111... \\ \frac{2}{9} &= 0,222... \quad \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0,333... \\ \frac{4}{9} &= 0,444... \end{aligned}$$

Przykład 11. Podaj przykład liczby wymiernej w takiej, że $\frac{3}{11} < w < \frac{4}{11}$.

Rozwiązanie Podane ułamki rozszerzamy w taki sposób, by między ich nowymi licznikami znajdowała się co najmniej jedna liczba całkowita.

$$\frac{3}{11} = \frac{6}{22} \text{ i } \frac{4}{11} = \frac{8}{22}, \text{ więc } \frac{6}{22} < w < \frac{8}{22}.$$

$$6 < 7 < 8, \text{ więc } w = \frac{7}{22}, \text{ bo } \frac{6}{22} < \frac{7}{22} < \frac{8}{22}.$$



Ćwiczenie 22. Podaj przykład liczby wymiernej w takiej, że:

a) $\frac{7}{15} < w < \frac{8}{15}$,

b) $1 < w < 1,1$,

c) $1 < w < 1,0001$,

d) $0,01 < w < 0,011$,

e) $\sqrt{2} < w < \sqrt{3}$,

f) $\sqrt{2} < w < \frac{3}{2}$.

Przypomnijmy

Rozwinięcie okresowe ułamka to takie rozwinięcie dziesiętne, które jest nieskończone i w którym od pewnego miejsca ta sama cyfra lub taka sama grupa cyfr powtarza się. Powtarzającą się cyfrę lub grupę cyfr nazywamy **okresem** i zapisujemy ją w nawiasie. Na przykład:

$$\frac{1}{6} = 0,1666... = 0,1(6),$$

powtarza się cyfra 6

$$\frac{2}{7} = 0,28571428571428... = 0,(285714).$$

powtarzają się cyfry 285714

Ćwiczenie 23. Odczytaj z rozwinięcia dziesiętnego okres i zapisz z użyciem tego okresu liczbę:

a) $0,444...$, b) $5,2012012012...$, c) $1,0121212...$, d) $0,34434343...$,

e) $7,21721721...$, f) $0,0010010010...$.



Ćwiczenie 24. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz odpowiedni znak:

„<”, „>” lub „=”.

a) $0,(3) \blacksquare \frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{4} \blacksquare 0,(25)$, c) $0,(2) \blacksquare \frac{1}{5}$, d) $\frac{1}{10} \blacksquare 0,(1)$.

Przykład 12. Uzasadnij, że: a) $0,(3) = \frac{1}{3}$, b) $1,2(7) = 1\frac{5}{18}$.

Rozwiązanie

a) $x = 0,(3)$. $x = 0,333... \quad / \cdot 10$ $10x = 3,333...$ $10x = 3 + \underbrace{0,333...}_x$ $10x = 3 + x$, skąd $x = \frac{1}{3}$. Zatem $0,(3) = \frac{1}{3}$. c.n.u.	b) $1,2(7) = 1,2777... = 1,2 + 0,0777...$ $x = 0,0777...$ $x = 0,0777... \quad / \cdot 10$ $10x = 0,777... \quad / \cdot 10$ $100x = 7,777...$ $ \underbrace{777...}_{10x}$ $100x = 7 + 10x$, skąd $x = \frac{7}{90}$. Zatem $1,2(7) = 1,2 + \frac{7}{90} = \frac{23}{18}$. c.n.u.
---	---

Ćwiczenie 25. Uzasadnij, że: a) $0,(9) = 1$, b) $0,(72) = \frac{8}{11}$, c) $2,4(5) = 2\frac{41}{90}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

17. c) $\frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{4}{5}$. 18. a) $-\frac{2}{5} > -\frac{6}{5}$, b) $-2\frac{1}{3} > -2\frac{2}{3}$, c) $-\frac{4}{3} < -\frac{4}{5}$, d) $-1,3 > -1,4$, e) $-1,0015 > -\frac{116}{100}$.

19. a) 6, b) -8, c) 21. 20. a) Np. 8, b) np. 5, c) 36. 21. a) 2, b) 0,7, c) 5.

22. Np.: a) 0,5, b) 1,09, c) 1,00005, d) 0,01055, e) 1,6, f) 1,43.

23. a) $0,(4)$, b) $5,(201)$, c) $1,0(12)$, d) $0,34(43)$, e) $7,(217)$, f) $0,(001)$. 24. a) „=”, b) „<”, c) „>”, d) „<”.

Zadania utrwalające

3.16. Wypisz wszystkie ułamki właściwe dodatnie, których:

- a) suma licznika i mianownika jest równa 10,
- b) iloczyn licznika i mianownika jest równy 12.

3.17. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{18}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}$, b) $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{14}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{100}$, c) $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{15}, -\frac{7}{15}$.

3.18. Bartek ma zaznaczyć na osi liczbowej liczby: $-\frac{2}{3}, -\frac{28}{42}, -\frac{35}{42}, -\frac{10}{15}, -\frac{15}{18}$.

Ile różnych punktów powinien Bartek zaznaczyć na osi?

3.19. Skróć ułamek:

a) $\frac{131313}{686868}$,

b) $\frac{80808080}{91919191}$,

c) $\frac{505505505}{711711711}$.

3.20. Uzasadnij, że rozwinięcie dziesiętne skończone ma ułamek:

D

a) $\frac{7}{125}$,

b) $\frac{15}{16}$,

c) $\frac{51}{85}$,

d) $\frac{26}{65}$.

3.21. Uzasadnij, że rozwinięcie dziesiętne okresowe ma ułamek:

D

a) $\frac{7}{75}$,

b) $\frac{11}{150}$,

c) $\frac{199}{120}$,

d) $\frac{15}{140}$.

3.22. Podaj najmniejszą liczbę dziesiętną z dwoma miejscami po przecinku, która jest większa od liczby:

a) $0,(3)$,

b) $0,(2)$,

c) $0,(1)$,

d) $0,(5)$.

3.23. Zamień na ułamek zwykły liczbę:

a) $1,(5)$,

b) $0,(45)$,

c) $0,(729)$,

d) $0,0(27)$.

3.24. Uzasadnij, że:

D

a) $0,(4) + 0,(2) = 0,(6)$,

b) $0,(4) - 0,(2) = 0,(2)$,

c) $0,(4) \cdot 0,(2) = 0,(8)$,

d) $0,(4) : 0,(2) = 2$.

3.25. Jaka cyfra występuje na 192. miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby:

a) $0,7(2)$,

b) $0,(27)$,

c) $5,(123)$.

3.26. Napisz rozwinięcie dziesiętne ułamków: $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$.

a) Podaj okres każdego z ułamków.

b) Wymień własności tych rozwinięć.

Wskazówka. Ustal, co mają wspólne te rozwinięcia, a czym się różnią.

3.27. Oblicz:

a) $\left[15\frac{2}{3} - \left(-7\frac{1}{2}\right)\right] : \frac{3}{2}$,

b) $2\frac{1}{3}\left(\frac{7}{8} + 1,5 - 0,75\right)$,

c) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2,1 : 1\frac{2}{5}$.

Liczby niewymierne

Wszystkie liczby niewymierne tworzą zbiór liczb niewymiernych, który oznaczamy $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Definicja

Liczbę nazywamy **niewymierną**, gdy nie jest ona liczbą wymierną, czyli **nie można jej przedstawić w postaci ułamka** $\frac{m}{p}$, gdzie m i p są liczbami całkowitymi oraz $p \neq 0$.

- **Liczbami niewymiernymi są wszystkie pierwiastki:**
 - **kwadratowe**, gdy liczba podpierwiastkowa nie jest kwadratem liczby wymiernej. Np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, ..., $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{0,5}$, ...
 - **sześcienne**, gdy liczba podpierwiastkowa nie jest sześcianem liczby wymiernej. Np. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, ..., $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$, ...

Wykażemy, że na przykład liczba $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną. W dowodzie skorzystamy z jednego z podstawowych twierdzeń arytmetyki.

Jeżeli liczba pierwsza p dzieli iloczyn liczb naturalnych $a \cdot b$, to liczba p dzieli a lub liczba p dzieli b .

Przykład 13. Udowodnij, że liczba $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód nie wprost:

1° Zakładamy, że $\sqrt{5}$ jest liczbą wymierną, czyli że

$$\sqrt{5} = \frac{m}{n}, \text{ gdy } \text{NWD}(m, n) = 1,$$

gdzie $m \in \mathbf{N}^+$ i $n \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\}$.

$\frac{m}{n}$ – ułamek nieskracalny

$$2^\circ \sqrt{5} = \frac{m}{n}, \text{ więc } 5 = \frac{m^2}{n^2},$$

Kwadraty liczb dodatnich równych są równe.

$$\text{czyli } \frac{m \cdot m}{n \cdot n} = 5, \text{ skąd } 5 \cdot n \cdot n = m \cdot m.$$

Liczba 5 dzieli iloczyn liczb $m \cdot m$.

3° Z równości $5 \cdot n \cdot n = m \cdot m$ wnioskujemy, że liczba 5 jest dzielnikiem m .

4° Z 3° wnioskujemy, że 25 jest dzielnikiem m^2 .

5° Z 3° i 4° wnioskujemy, że 5 jest dzielnikiem n , tzn. że ułamek $\frac{m}{n}$ można skrócić przez 5, co jest sprzeczne z założeniem. **c.k.d.**

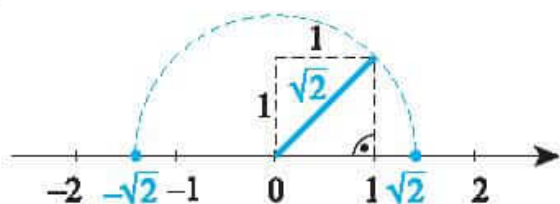
Ćwiczenie 28. Uzasadnij, że liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Przykład 14. Na osi liczbowej zaznacz punkty, których współrzędnymi są liczby:

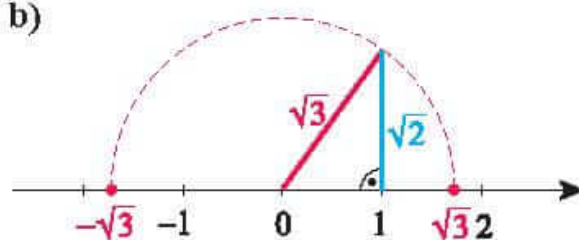
a) $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$.

Rozwiązanie Zauważmy, że długość przekątnej kwadratu o boku 1 jest równa $\sqrt{2}$, a długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i $\sqrt{2}$ jest równa $\sqrt{3}$.

a)



b)



Ćwiczenie 29. Na osi liczbowej zaznacz punkty A, B, C, D, E takie, że:

$$A = \left(-6\frac{1}{2}\right), \quad B = \left(\frac{1}{3}\right), \quad C = (\sqrt{2} - 1), \quad D = (2\sqrt{2}), \quad E = (-2\sqrt{3}).$$

Przykład 15. Podaj przykład liczby niewymiernej p takiej, że $-50 < p < -49$.

Rozwiązanie Przedstawiamy liczby -50 i -49 z użyciem np. pierwiastków kwadratowych:

$$-50 = -\sqrt{2500} \quad \text{i} \quad -49 = -\sqrt{2401}.$$

Zatem p może być równe np: $-\sqrt{2402}$, $-\sqrt{2415}$ itp.

Odp.: $p = -\sqrt{2499}$.

Ćwiczenie 26. Podaj przykład liczby niewymiernej p takiej, że:

a) $1 < p < 2$, b) $0 < p < 1$, c) $0 < p < 0,1$, d) $-1 < p < 0$.

Uwaga

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a < b$, istnieje taka liczba wymierna w , że $a < w < b$.
- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a < b$, istnieje taka liczba niewymierna p , że $a < p < b$.

Ćwiczenie 27. Zapisz liczby w takiej kolejności, w jakiej leżą na osi liczbowej.

a) π , $\frac{22}{7}$, 3 , (14) , b) $-\sqrt{2}$, -1 , (4) , $\sqrt{3} - 3$.

- Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe.

Na przykład: $\pi = 3,141592653\dots$, $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$,
 $-\sqrt{5} = -2,2360679\dots$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,8660254\dots$

- Suma (różnica) oraz iloczyn (iloraz) liczby wymiernej różnej od 0 i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

Przykład 16. Uzasadnij, że $\sqrt{2} - 3$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie

Z (założenie):		T (teza):
$\sqrt{2}$ – liczba niewymierna,		$\sqrt{2} - 3$ – liczba niewymierna.
-3 – liczba wymierna.		

Dowód nie wprost:

1° Zaprzeczamy tezie T

$$\sqrt{2} - 3 = \frac{m}{n}, \text{ gdzie } m \in Z \text{ i } n \in Z \setminus \{0, 1\}.$$

2° $\sqrt{2} = \frac{m}{n} + 3.$

$\frac{m}{n} + 3$ – liczba wymierna

3° Z równości w punkcie 2° wnioskujemy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, co jest sprzeczne z założeniem Z . **c.k.d.**

Ćwiczenie 30. Uzasadnij, że niewymierną jest liczba: a) $\sqrt{3} + 1$, b) $\pi - 2$.

Uwaga Jeżeli a jest liczbą wymierną i b liczbą niewymierną, to liczby:

$$\bullet a + b, \quad \bullet a - b, \quad \bullet a \cdot b, \quad \bullet \frac{a}{b}, \quad \bullet \frac{b}{a}, \text{ gdzie } a \neq 0,$$

są liczbami niewymiernymi.

Odpowiedzi do ćwiczeń

28. Np. a) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{0,99}$, $\sqrt{0,3}$, c) $\sqrt{0,00002}$, $\sqrt{0,0003}$, d) $-\sqrt{0,2}$, $-\sqrt{\frac{3}{4}}$

29. a) $3, (14), \pi, \frac{22}{7}$, b) $-1, (4), -\sqrt{2}, \sqrt{3} - 3$.

Zadania utrwalające

3.28. Wskaż liczby niewymierne wśród liczb:

a) $\sqrt{1,21}$, $\sqrt[3]{2,7}$, $\sqrt[3]{0,008}$, $\sqrt{-0,125}$, $\sqrt{1,96}$,

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}$, $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16}$, $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{22,5}$,

c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{-2}}, \frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11}}, \frac{\sqrt[3]{0,01}}{\sqrt[3]{100}}, \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{10}}.$

3.29. Spośród liczb $\sqrt{3}, \sqrt{5}+1, \sqrt[3]{125}, -\sqrt{0,04}, \sqrt{2\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{1}+\sqrt{9}, \pi$ wybierz te liczby,

które są:

a) niewymierne, b) wymierne, c) całkowite, d) naturalne.

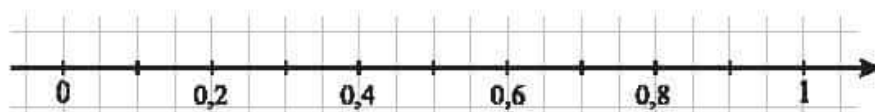
3.30. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Pole koła o promieniu 1 jest liczbą wymierną.	P	F
Obwód koła o promieniu $\frac{1}{\pi}$ jest liczbą wymierną.	P	F

3.31. Przerysuj do zeszytu

oś, zaznacz na niej

liczby: $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}-1, \pi-3$ i je porównaj.



3.32. Liczby: $\sqrt{2}, -3, 2, -2\pi, 2, 8, -6\frac{1}{3}, 4$ uporządkuj w takiej kolejności, w jakiej leżą na osi liczbowej.

3.33. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczbą wymierną w spełniającą warunek $\frac{\sqrt{2}}{2} < w < \frac{\sqrt{3}}{2}$ może być liczba:

A. $\frac{9}{16},$ B. $\frac{10}{16},$ C. $\frac{11}{16},$ D. $\frac{12}{16}.$

3.34. Uzasadnij, że niewymierną jest liczba:

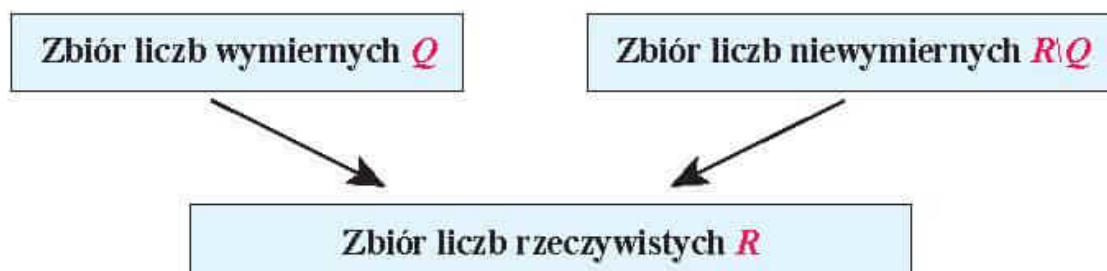
D a) $\sqrt{2}+1,$ b) $\pi-2,$ c) $\sqrt{3}+3.$

3.35. Podaj przykład liczby niewymiernej p takiej, że:

a) $10 < p < 11,$ b) $-5 < p < -4,$ c) $1000 < p < 1001,$
d) $\sqrt{2} < p < \sqrt{3},$ e) $\sqrt[3]{3} < p < \sqrt[3]{4},$ f) $\sqrt{5} < p < \sqrt[3]{30}.$

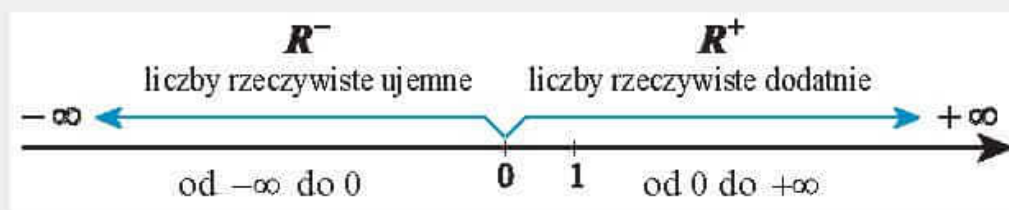
3.36. Podaj przykład liczby niewymiernej p takiej, że $-100 < p < -99.$

Liczby rzeczywiste



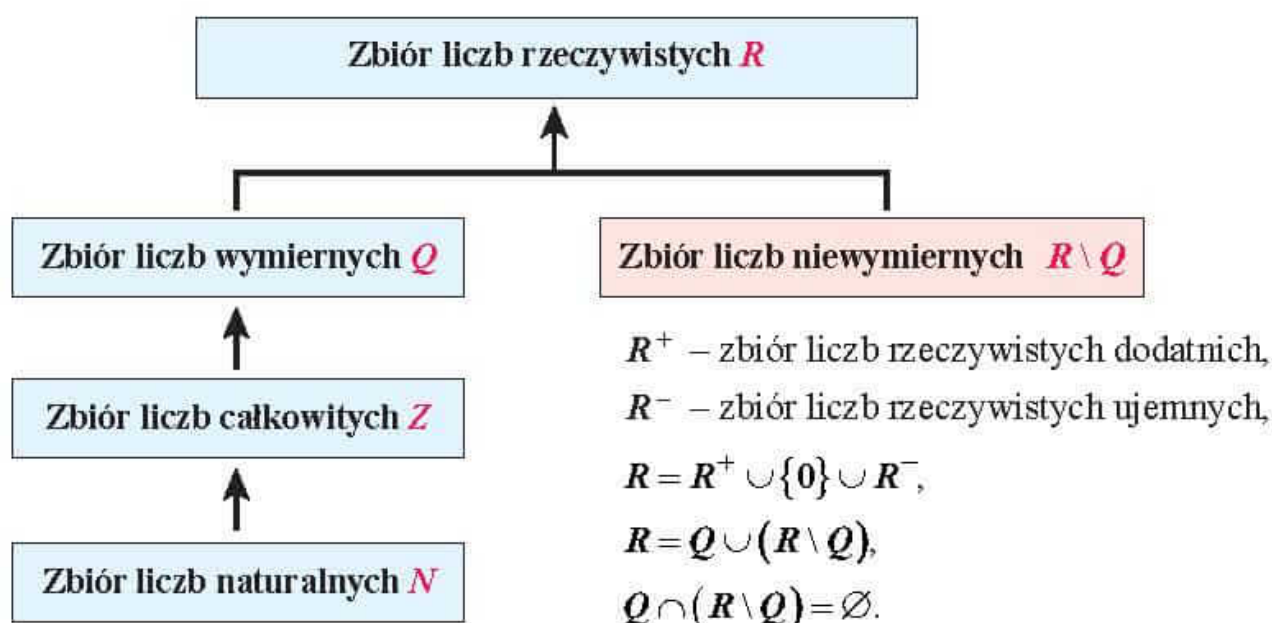
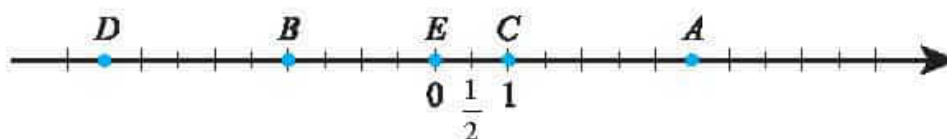
Uwaga

Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada jakiś punkt na osi liczbowej. Zamiast mówić „punkt o współrzędnej”, mówimy „liczba na osi”.



$-\infty$ czytamy minus nieskończoność $+\infty$ czytamy plus nieskończoność

Ćwiczenie 31. Odczytaj i zapisz współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



Zbiory liczbowe: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ są podzbiorymi zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Prawa i własności, które zachodzą dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b i c .

Działanie	Prawa i własności działania
Dodawanie	$a + b = b + a$ – przemienność dodawania $a + (b + c) = (a + b) + c$ – łączność dodawania
Odejmowanie	$a - b = a + (-b)$
Mnożenie	$a \cdot b = b \cdot a$ – przemienność mnożenia $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – łączność mnożenia $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ – rozdzielność mnożenia względem dodawania
Dzielenie	$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$, gdzie $b \neq 0$



Ćwiczenie 32. Spośród równości oznaczonych cyframi od **1** do **5** wskaż te, w których błędnie zastosowano prawa działań.

1 $4 + (-7) = -7 + 4$, **2** $(1 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 1 - 3$, **3** $-3 + (8 - 12) = (-3 + 8) - 12$,

4 $\left[6 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \cdot (-2) = (-2 \cdot 6) \cdot \left[(-2) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right]$, **5** $-2 \cdot [(-4) + 7] = (-2) \cdot (-4) + (-2) \cdot 7$.



Ćwiczenie 33. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce kratki ■ wpisz taką liczbę, by prawdziwa była równość:

a) $-15 + \blacksquare = -15$, b) $\blacksquare \cdot 7 = 1$, c) $\sqrt{2} \cdot \blacksquare = \sqrt{2}$, d) $3 + \blacksquare = 0$,

e) $\blacksquare \cdot \sqrt{3} = -1$, f) $\sqrt{2} - 1 + \blacksquare = 0$.

Uwaga

Jeżeli w wyrażeniu arytmetycznym nie ma nawiasów, to kolejność wykonywania działań jest następująca:

potem **potęgowanie** i **pierwiastkowanie**,
 mnożenie i **dzielenie**, w kolejności ich występowania,
 a następnie **dodawanie** i **odejmowanie**.

Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy wykonujemy najpierw działania (według powyższych reguł) w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych nawiasów.

Każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w różnej postaci, np.:

$$\underbrace{\frac{7}{2}}_{\text{ułamek}} = \underbrace{3\frac{1}{2}}_{\substack{\text{liczba} \\ \text{mieszana}}} = \underbrace{3,5}_{\text{liczba} \\ \text{dziesiętna}} = \underbrace{7 \cdot \frac{1}{2}}_{\substack{\text{iloczyn} \\ \text{dwóch liczb}}} = \underbrace{7:2}_{\substack{\text{iloraz} \\ \text{dwóch liczb}}} = \underbrace{\sqrt{\frac{49}{4}}}_{\text{pierwiastek}} = \underbrace{2 + 1\frac{1}{2}}_{\substack{\text{suma dwóch} \\ \text{liczb}}} = \underbrace{5 - 1\frac{1}{2}}_{\substack{\text{różnica} \\ \text{dwóch liczb}}} = \dots$$

Ćwiczenie 34. Przedstaw w trzech różnych postaciach liczbę:

- a) 0, b) 1, c) $\frac{1}{2}$, d) -2.

Odpowiedzi do ćwiczeń

31. $A = \left(3\frac{1}{2}\right)$, $B = (-2)$, $C = (1)$, $D = \left(-4\frac{1}{2}\right)$, $E = (0)$. 32. 2 i 4

33. a) 0, b) $\frac{1}{7}$, c) 1, d) -3, e) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, f) $1 - \sqrt{2}$. 34. a) Np.: $\frac{0}{2}$, $\sqrt{0}$, $(1-1)^2$.

Zadania utrwalające

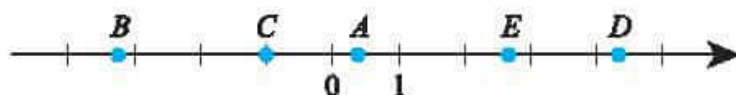
3.37. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce $\blacksquare$ wpisz symbol „ $\in$ ” lub „ $\notin$ ” tak, by otrzymać zdanie prawdziwe.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2} \blacksquare Q$, b) $0, (3) - 0,3 \blacksquare Q$, c) $(\sqrt{5})^2 \blacksquare Z$,
d) $\sqrt{3} - 2 \blacksquare R^+$, e) $-3 + \sqrt{5} \blacksquare R^-$, f) $\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{12}) \blacksquare Z^-$.

3.38. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce $\blacksquare$ wpisz znak „ $\cap$ ”, „ $\cup$ ” lub „ $\setminus$ ” tak, by otrzymać zdanie prawdziwe.

- a) $R \blacksquare Q = Q$, b) $R \blacksquare Q = R$, c) $N \blacksquare Q = N$,
d) $N \blacksquare R \setminus Q = \emptyset$, e) $N \blacksquare Q = Q$, f) $(R \setminus Q) \blacksquare Q = R$.

3.39. Każdemu z punktów A, B, C, D, E zaznaczonych na rysunku



przyporządkuj jedną spośród liczb: $-3\frac{1}{4}$, -1, $\frac{1}{3}$, 2, 8, 4, (3), która jest jego współrzędną.

3.40. Podaj przykłady liczb całkowitych dodatnich m i k takich, że $\frac{4}{9} < \frac{m}{k} < \frac{5}{9}$.

3.41. Podaj przykłady liczb a, b, c i d spełniających jednocześnie warunki: $a < b$, $c < d$, $a > c$, $d > b$ i zaznacz je na osi liczbowej.

3.42. Przedstaw w postaci pierwiastka iloczyn liczb:

- a) $3\sqrt{6}$, b) $-2\sqrt{3}$, c) $3\sqrt[3]{6}$, d) $-2\sqrt[3]{3}$.

3.43. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Druga potęga liczby $2\sqrt{2}$ jest równa:

- A. $4\sqrt{2}$, B. 8.

Trzecia potęga liczby $2\sqrt[3]{-2}$ jest równa:

- C. -8, D. -16.

3.44. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Liczba 2,4 przedstawiona w postaci pierwiastka kwadratowego to $\sqrt{5\frac{19}{25}}$.	P	F
Liczba $1\frac{2}{3}$ przedstawiona w postaci pierwiastka sześciennego to $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$.	P	F
Liczbę 0 można przedstawić w postaci wyrażenia: $-1 - [-(-1)]$.	P	F
Wartość wyrażenia $\sqrt{6 + 5\sqrt{2(9 + 3\sqrt{9})}}$ jest liczbą wymierną.	P	F

3.45. O ile suma liczb $8\frac{3}{5}$ i $-1\frac{2}{3}$ jest większa od ilorazu liczby $1\frac{3}{8}$ przez $\frac{1}{4}$?

3.46. Liczbę -7,2 przedstaw w postaci:

- a) sumy dwóch liczb, z których jedna jest dodatnia, a druga ujemna,
b) różnicy dwóch liczb, z których jedna jest dodatnia, a druga ujemna.

3.47. Spośród liczb: $-1\frac{1}{5}$, 1,25, $2\frac{2}{5}$, -2,5 wybierz wszystkie możliwe pary liczb tak, aby wynik ich:

- a) mnożenia był liczbą całkowitą, b) dzielenia był liczbą całkowitą.

3.48. Przedstaw w postaci potęgi jednej liczby wyrażenie:

- a) $2^{19} + 2^{19}$, b) $3 \cdot 2^{15} - 2^{15}$, c) $\left(\frac{1}{4}\right)^6 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6$,
d) $3 \cdot 2^{25} + 5 \cdot 2^{25}$, e) $2 \cdot 3^{34} + 4 \cdot 3^{34} - 3^{34} + 4 \cdot 3^{34}$.

Przedziały liczbowe

Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada jakiś punkt na osi liczbowej. Zatem na osi liczbowej można wskazywać zbiory liczb spełniających pewne określone warunki.

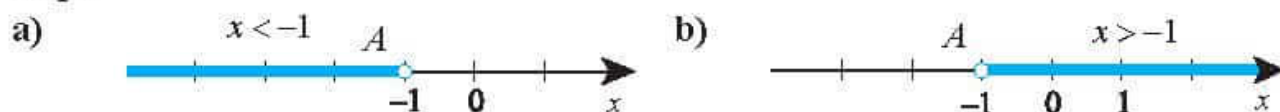
Przykład 17. Wiedząc, że $A = (-1)$, zaznacz na osi liczbowej zbiór punktów, których współrzędne są liczbami:

- mniejszymi od współrzędnej punktu A ,
- większymi od współrzędnej punktu A .

Jakimi figurami geometrycznymi są wyznaczone zbiory punktów?

Rozwiązanie Wiedząc, że na osi liczbowej punkty o współrzędnych mniejszych od -1 leżą po „lewej stronie” punktu A , a o współrzędnych większych od -1 leżą po „prawej stronie” punktu A , przedstawiamy to na osi liczbowej.

Odp.:



Wyznaczone zbiory punktów są półprostymi o początku w punkcie A , ale bez tego punktu.

Uwaga

Zbiór liczb rzeczywistych x spełniających warunek:

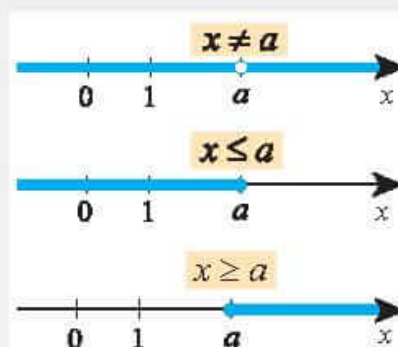
- $x < -1$ nazywamy przedziałem otwartym od $-\infty$ (minus nieskończoności) do -1 i zapisujemy symbolicznie $(-\infty; -1)$,
- $x > -1$ nazywamy przedziałem otwartym od -1 do $+\infty$ (plus nieskończoności) i zapisujemy symbolicznie $(-1; +\infty)$.

Ćwiczenie 35. Zaznacz na osi liczbowej zbiór punktów, których współrzędne x spełniają warunek: a) $x > \sqrt{2}$, b) $x < \sqrt{5}$, c) $x < -\sqrt{3}$, d) $x > 0$.

Uwaga

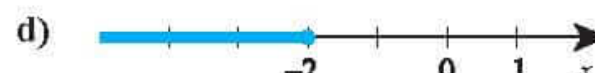
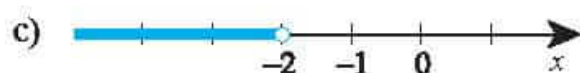
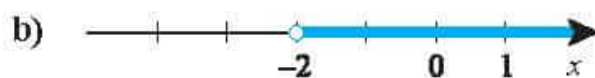
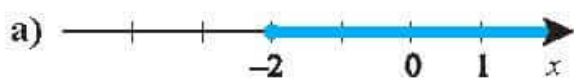
Jeżeli na osi liczbowej zaznaczymy dowolny punkt o współrzędnej a , to zapis:

- $x \neq a$ oznacza zbiór punktów leżących na osi, których współrzędne spełniają warunek: $x < a$ lub $x > a$,
- $x \leq a$ oznacza zbiór punktów leżących na osi, których współrzędne spełniają warunek: $x < a$ lub $x = a$,
- $x \geq a$ oznacza zbiór punktów leżących na osi, których współrzędne spełniają warunek: $x > a$ lub $x = a$.



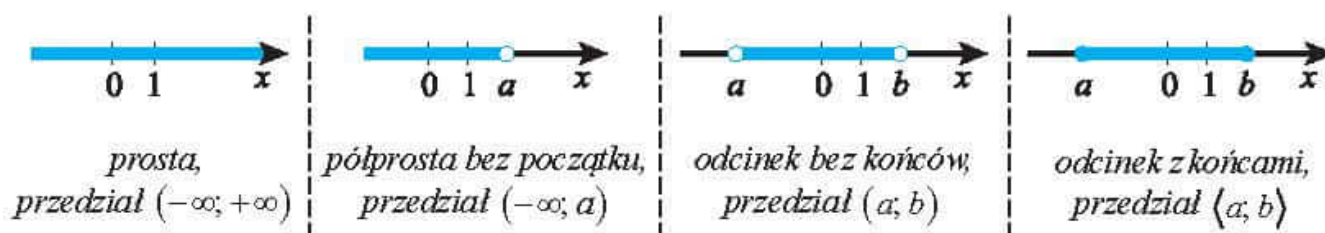
Ćwiczenie 36. Zaznacz na osi liczbowej zbiór punktów, których współrzędne x spełniają warunek: a) $x \neq 3$, b) $x \geq 2$, c) $x \leq -5$.

Ćwiczenie 37. Zapisz symbolicznie warunek, który spełniają liczby x zaznaczone na osi liczbowej.



Na osi liczbowej wyróżniamy szczególne zbiory, zwane przedziałami liczbowymi.

Ich ilustracją graficzną na osi może być prosta (oś liczbową), półprosta z początkiem lub bez, i odcinek z końcami lub bez.



Przedział	Nazwa przedziału	Warunek, który spełniają liczby rzeczywiste x należące do przedziału	Ilustracja graficzna przedziału na osi
$(a; +\infty)$	przedział otwarty	$x > a$	
$(-\infty; a)$	przedział otwarty	$x < a$	
$\langle a; +\infty)$	przedział lewostronnie domknięty	$x \geq a$	
$(-\infty; a\rangle$	przedział prawostronnie domknięty	$x \leq a$	

Uwaga

Zbiór liczb rzeczywistych R możemy zapisać jako przedział $(-\infty; +\infty)$, czyli $R = (-\infty; +\infty)$.

Ćwiczenie 38. Nazwij i zaznacz na osi liczbowej przedział:

- a) $(-\infty; 4)$, b) $(-\infty; -5)$, c) $(3; +\infty)$, d) $\langle -4; +\infty)$.

Przykład 18. Na osi liczbowej zaznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , które są większe od liczby -1 i jednocześnie są mniejsze od liczby 4 , czyli liczby x spełniające warunki $x > -1$ i $x < 4$.

Rozwiązanie

Warunki $x > -1$ i $x < 4$ można zapisać w postaci $-1 < x < 4$.

Ilustracją graficzną zbioru liczb x spełniających powyższe warunki jest odcinek bez końców (co oznaczono na rysunku pustymi kółeczkami).



Jeżeli zastąpimy warunek $x > -1$ przedziałem $(-1; +\infty)$ oraz warunek $x < 4$ przedziałem $(-\infty; 4)$, to warunek $-1 < x < 4$ opisuje przedział $(-1; 4)$, który nazywamy przedziałem obustronnie otwartym lub krótko – przedziałem otwartym o końcach -1 i 4 .

Przedział	Nazwa przedziału	Warunek, który spełniają liczby rzeczywiste x należące do przedziału	Ilustracja graficzna przedziału na osi
$(a; b)$	przedział otwarty	$a < x < b$	
$\langle a; b \rangle$	przedział domknięty	$a \leq x \leq b$	
$(a; b]$	przedział prawostronnie domknięty (lewostronnie otwarty)	$a < x \leq b$	
$\langle a; b \rangle$	przedział prawostronnie otwarty (lewostronnie domknięty)	$a \leq x < b$	

Ćwiczenie 39. Zaznacz na osi liczbowej przedział:

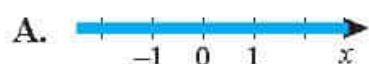
a) $(-3; 2)$, b) $\langle -1; 4 \rangle$, c) $\langle -5; -1 \rangle$.

Ćwiczenie 40. Zapisz warunki, które spełniają liczby rzeczywiste x należące do przedziału:

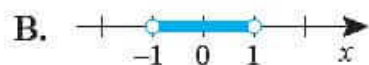
a) $(-\infty; 0]$, b) $\langle 4; +\infty \rangle$, c) $\langle -5; +\infty \rangle$, d) $(-2; 0)$, e) $\langle 1; 3 \rangle$,
 f) $\langle -2; 4 \rangle$, g) $(-3; 5]$, h) $\langle 0; 4 \rangle$, i) $\langle -2; 2 \rangle$.



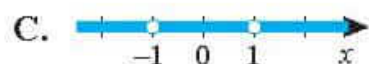
Ćwiczenie 41. Każdemu przedziałowi oznaczonemu literą A, B lub C przyporządkuj odpowiedni opis słowny oznaczony cyfrą **1**, **2** lub **3**.



1 Liczby rzeczywiste większe od -1 i mniejsze od 1 .



2 Liczby rzeczywiste różne od -1 i 1 .

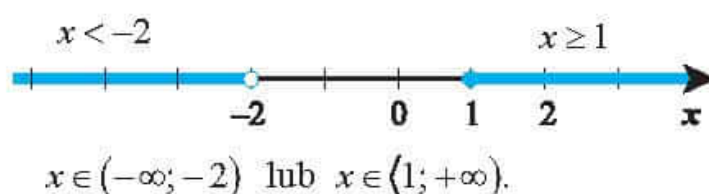


3 Liczby rzeczywiste większe od -1 lub mniejsze od 1 .

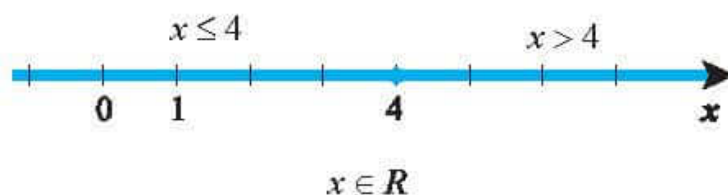
Przykład 19. Na osi liczbowej zaznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , które spełniają warunki: a) $x < -2$ lub $x \geq 1$, b) $x \leq 4$ lub $x > 4$, c) $x < 2$ i $x > 2$.

Rozwiązanie

a) Warunki $x < -2$ lub $x \geq 1$ spełniają liczby rzeczywiste x należące do przedziału $(-\infty; -2)$ lub do przedziału $[1; +\infty)$.



b) Warunki $x \leq 4$ lub $x > 4$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste x , bo każda liczba rzeczywista może być mniejsza niż 4 , równa 4 lub większa niż 4 .



c) Warunków $x < 2$ i $x > 2$ nie spełnia żadna liczba rzeczywista, bo liczba nie może być jednocześnie mniejsza niż 2 i większa od 2 .

Ćwiczenie 42. Na osi liczbowej zaznacz zbiór liczb, które należą:

a) do przedziału $(1; +\infty)$ lub do przedziału $(-\infty; -3)$,

b) do przedziału $(-\infty; 0)$ lub do przedziału $[0; +\infty)$,

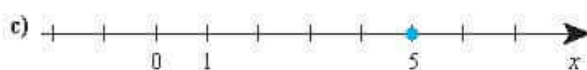
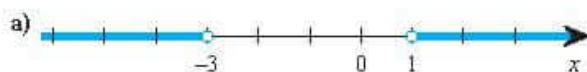
c) do przedziału $(-\infty; 5)$ i do przedziału $[5; +\infty)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

37. a) $x \geq -2$, b) $x > -2$, c) $x < -2$, d) $x \leq -2$. 40. a) $x \leq 0$, b) $x \geq 4$, c) $x \geq -5$, d) $-2 < x < 0$,

e) $1 \leq x \leq 3$, f) $-2 \leq x < 4$, g) $-3 < x \leq 5$, h) $0 \leq x < 4$, i) $-2 \leq x \leq 2$. 41. A-3, B-1, C-2.

42.



Zadania utrwalające

3.49. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Spośród nierówności ponumerowanych od **1** do **12**:

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|---|
| 1 $6 \geq 3$, | 2 $17 \leq 23$, | 3 $-10 \leq -15$, | 4 $-1 > -2$, |
| 5 $4 > -4 > -1$, | 6 $-5 < 5 < 9$, | 7 $3 > 0 > -5$, | 8 $-1,5 < 0,5 < 2,5$, |
| 9 $ -4 \geq 0$, | 10 $ -2 > -8 $, | 11 $2^4 < 4^2$, | 12 $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ |

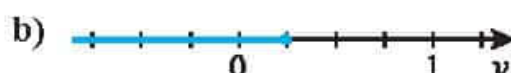
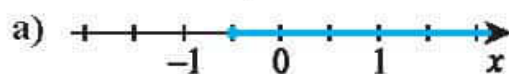
nieprawdziwe są nierówności o numerach:

- A. 4, 5, 7, 10, 11, B. 1, 3, 5, 7, 9, C. 3, 5, 10, 11, 12, D. 2, 4, 6, 8, 10.

3.50. Zapisz za pomocą nierówności warunek:

- | | |
|--|---|
| a) Liczba m jest większa od $-3,3$. | b) Liczba n jest nie większa od 0 . |
| c) Liczba k jest ujemna. | d) Liczba s jest dodatnia. |
| e) Liczba x jest niedodatnia. | f) Liczba y jest mniejsza od 14 . |
| g) Liczba z jest nie mniejsza niż -5 . | h) Liczba t jest nieujemna. |

3.51. Zapisz warunek, który spełniają wszystkie liczby zaznaczone kolorem niebieskim na osi liczbowej.



3.52. Zaznacz na osi liczbowej przedział:

- a) $\langle -2; 1 \rangle$, b) $(-\infty; 3)$, c) $(-3; 4)$, d) $(0; +\infty)$, e) $(-5; 1)$.

3.53. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb rzeczywistych spełniających warunki:

- a) $x > -2$, b) $x \leq -5$, c) $x \geq 0$ i $x < 2$, d) $x > -3$ i $x < -1$,
 e) $x \leq 4$ i $x \geq 0$, f) $x > 5$ i $x \leq 10$, g) $x \geq -\sqrt{2}$ i $x \leq \sqrt{2}$.

3.54. Zapisz warunki, jakie spełniają liczby rzeczywiste x należące do przedziału:

- a) $(-\infty; 0)$, b) $\langle 4; +\infty)$, c) $\langle -5; +\infty)$, d) $(-2; 0)$, e) $\langle 1; 3)$,
 f) $\langle -2; 4)$, g) $(-3; 5)$, h) $\langle 0; 4)$, i) $\langle -2; 2)$, j) $\langle -100; 1)$.

3.55. Podaj wszystkie liczby naturalne należące do przedziału:

- a) $(-1; 1)$, b) $\langle -1; 1)$, c) $(0; 3)$, d) $\langle 0; 3)$, e) $(0; 3)$.

3.56. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do przedziału:

- a) $(-1; 4)$, b) $\left\langle -\frac{1}{5}; 2 \right\rangle$, c) $(-\pi; \pi)$, d) $(-2\sqrt{2}; \sqrt{7})$.

3.57. Zaznacz na osi liczbowej przedział $\langle -8; 3 \rangle$ i podaj:

- wszystkie liczby naturalne należące do tego przedziału,
- trzy liczby niewymierne należące do tego przedziału,
- trzy liczby całkowite, które nie należą do tego przedziału,
- liczbę najmniejszą należącą do tego przedziału,
- liczbę największą należącą do tego przedziału,
- wszystkie liczby całkowite z tego przedziału nie mniejsze niż zero,
- liczby naturalne dodatnie należące do tego przedziału.

3.58. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb rzeczywistych:

- nieujemnych,
- dodatnich,
- ujemnych,
- niedodatnich.

3.59. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb x spełniających warunki:

- $x < -5$ lub $x > 1$,
- $x \leq -2$ lub $x > 1$,
- $x \leq 2$ lub $x \geq 2$,
- $x < 2$ i $x \in \langle 0; 3 \rangle$,
- $-3 \leq x \leq 8$ i $x > 0$,
- $-2 \leq x \leq 0$ i $x \in \langle 0; 5 \rangle$,
- $x \in \mathbb{R}$ lub $2 < x < 5$,
- $x \in \langle 2; 5 \rangle$ i $x \in \mathbb{R}$,
- $x \leq -1$ lub $-1 < x < 3$.

Działania na przedziałach liczbowych

Przedziały liczbowe to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Wykonując działania na przedziałach liczbowych, stosujemy te same prawa co dla dowolnych zbiorów.

Przykład 20. Wiedząc, że $A = (-\infty; 2]$ i $B = (-1; 5]$, wyznacz takie zbiory C , D , E i F , że: $C = A \cap B$, $D = A \cup B$, $E = A \setminus B$, $F = B \setminus A$.

Rozwiązanie

$$A = (-\infty; 2]$$

$$B = (-1; 5]$$

$$C = A \cap B = (-\infty; 2] \cap (-1; 5] = (-1; 2]$$

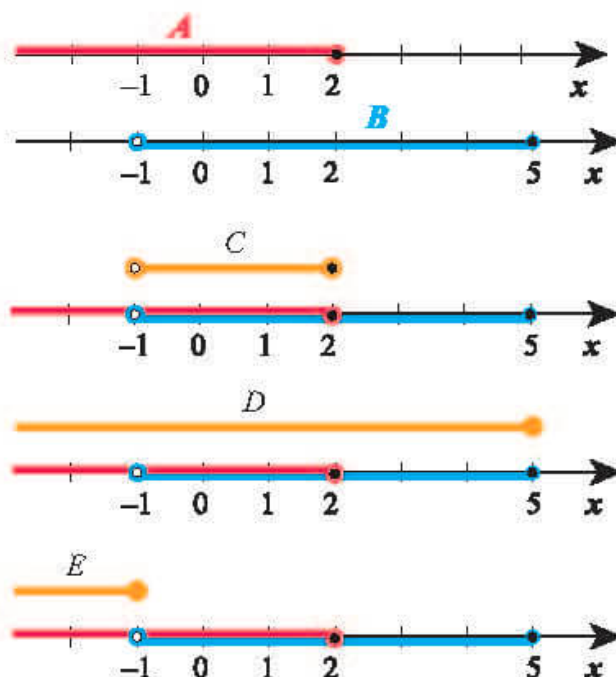
$$C = (-1; 2]$$

$$D = A \cup B = (-\infty; 2] \cup (-1; 5] = (-\infty; 5]$$

$$D = (-\infty; 5]$$

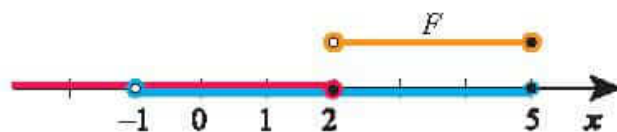
$$E = A \setminus B = (-\infty; 2] \setminus (-1; 5] = (-\infty; -1]$$

$$E = (-\infty; -1]$$



$$F = B \setminus A = (-1; 5) \setminus (-\infty; 2] = (2; 5)$$

$$F = (2; 5)$$



Uwaga. Na rysunkach wyniki działań na zbiorach A i B zaznaczono kolorem pomarańczowym.

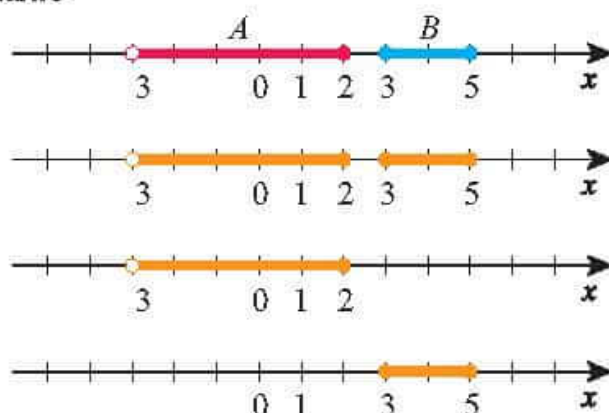
Odp.: $C = (-1; 2]$, $D = (-\infty; 5]$, $E = (-\infty; -1]$, $F = (2; 5]$.

Ćwiczenie 43. Wiedząc, że $A = (-5; 3]$ i $B = \langle 0; 4)$, wyznacz zbiory:

a) $A \cap B$, b) $A \cup B$, c) $A \setminus B$, d) $B \setminus A$.

Przykład 21. Podaj ilustrację graficzną i wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy $A = (-3; 2]$ i $B = \langle 3; 5)$.

Rozwiązanie



$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = (-3; 2] \cup \langle 3; 5)$$

$$A \setminus B = A$$

$$B \setminus A = B$$

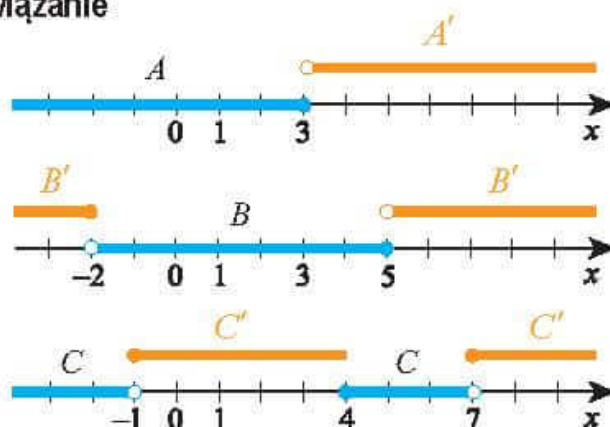
Odp.: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = (-3; 2] \cup \langle 3; 5)$, $A \setminus B = (-3; 2]$, $B \setminus A = \langle 3; 5)$.

Ćwiczenie 44. Podaj ilustrację graficzną i wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy:

a) $A = \langle -5; 5)$ i $B = (-2; 2]$, b) $A = (-\infty; -2]$ i $B = (-2; +\infty)$.

Przykład 22. Wiedząc, że $A = (-\infty; 3]$, $B = (-2; 5]$, $C = (-\infty; -1) \cup \langle 4; 7)$, wyznacz zbiory A' , B' , C' , gdy $A' = \mathbb{R} \setminus A$, $B' = \mathbb{R} \setminus B$, $C' = \mathbb{R} \setminus C$.

Rozwiązanie



$$A' = \mathbb{R} \setminus A = (3; +\infty)$$

$$B' = \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$$

$$C' = \mathbb{R} \setminus C = [-1; 4] \cup [7; +\infty)$$

Ćwiczenie 45. Wyznacz zbiory: $R \setminus A$, $R \setminus B$, $R \setminus C$, gdy: $A = \langle -3; 0 \rangle$, $B = \langle -7; +\infty \rangle$, $C = \langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

43. a) $\langle 0; 3 \rangle$, b) $\langle -5; 4 \rangle$, c) $\langle -5; 0 \rangle$, d) $\langle 3; 4 \rangle$.

44. a) $A \cap B = B$, $A \cup B = A$, $A \setminus B = \langle -5; -2 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$, $B \setminus A = \emptyset$, b) $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = R$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

45. $R \setminus A = \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$, $R \setminus B = \langle -\infty; -7 \rangle$, $R \setminus C = \langle -4; 1 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$.

Zadania utrwalające

3.60. Wyznacz sumę, iloczyn i obie różnice przedziałów A i B , gdy:

a) $A = \langle -3; 4 \rangle$, $B = \langle 1; 7 \rangle$, b) $A = \langle -\infty; 1 \rangle$, $B = \langle -5; +\infty \rangle$, c) $A = \langle -1; 0 \rangle$, $B = \langle 1; 5 \rangle$.

3.61. Zaznacz na osi liczbowej odpowiednie przedziały. Wykonaj działania na nich i wynik przedstaw graficznie.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\langle -\infty; 2 \rangle \setminus \langle -3; +\infty \rangle$, | b) $\langle 3; 5 \rangle \cap \langle 5; 6 \rangle$, | c) $\langle -10; 6 \rangle \cap \langle -4; 7 \rangle$, |
| d) $\langle -\infty; 1 \rangle \setminus \langle 1; +\infty \rangle$, | e) $\langle -3; -2 \rangle \cap \langle -3; 4 \rangle$, | f) $\langle -4; 2 \rangle \cup \langle 3; 7 \rangle$, |
| g) $\langle -\infty; 1 \rangle \cup \langle -1; +\infty \rangle$, | h) $\langle -\infty; 6 \rangle \cup \langle 5; 8 \rangle$, | i) $\langle -4; 10 \rangle \cup \langle 0; 11 \rangle$, |
| j) $\langle -\infty; 1 \rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle$, | k) $\langle -5; 3 \rangle \cup \langle -7; 4 \rangle$, | l) $\langle -5; 1 \rangle \setminus \langle 1; 10 \rangle$. |

3.62. Za pomocą sumy przedziałów zapisz różnicę zbiorów:

- a) $R \setminus \{0\}$, b) $R \setminus \{-1, 1\}$, c) $R \setminus \{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$.

3.63. Określ, czy wynik działania jest przedziałem lub sumą przedziałów:

- | | | | |
|----------------------|----------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $N \cup Z$, | b) $N \cap Z$, | c) $R \cup N$, | d) $R \cap N$, |
| e) $R \setminus N$, | f) $N \setminus R$, | g) $R^+ \cup R^- \cup \{0\}$, | h) $Q \cup (R \setminus Q)$. |

3.64. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D .

Jeżeli $D = \langle -\infty; 2 \rangle$, to $R \setminus D$ jest przedziałem:

- A. $\langle 2; +\infty \rangle$, B. $\langle 2; +\infty \rangle$.

Częścią wspólną $A \cap B$, gdy $A = \langle -\infty; 1 \rangle$ i $B = \langle 1; 2 \rangle$, jest zbiór:

- C. pusty, D. jednoelementowy.

3.65. Wyznacz zbiór:

a) $(-3; 2) \cap \mathbb{Z}$,

b) $\{6; 10\} \cap \mathbb{N}$,

c) $\langle -3; 0 \rangle \cap \mathbb{N}$,

d) $\langle -4; 0 \rangle \cap \mathbb{R}$,

e) $(-5; 5) \cap \mathbb{R}$,

f) $\emptyset \cap \mathbb{R}$.

3.66. Uzasadnij, że jeżeli $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, to:

D

a) $(a; b) = (a; +\infty) \cap (-\infty; b)$,

b) $\langle a; b \rangle = \left\langle a; \frac{a+b}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{a+b}{2}; b \right\rangle$.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczbą mniejszą od 1 jest iloraz liczb:

A. $0,01 : 0,001$,

B. $0,001 : 100$,

C. $10 : 0,0001$,

D. $0,1 : 0,000001$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Nieprawdą jest, że:

A. $0,(15) < 0,15$,

B. $0,(15) = \frac{5}{33}$,

C. $1,(7) > 1,777$,

D. $2,8(27) < 2,(827)$.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\frac{2^{15} + 2^{15}}{2}$ jest równa:

A. 2^{29} ,

B. $2^{15} + 2^{14}$,

C. $3 \cdot 2^{14}$,

D. 2^{15} .

4. Czy liczba 4 270 008 jest podzielna przez 6?

D

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B i C.

T	Tak,	ponieważ	A.	liczba jest parzysta.
N	Nie,		B.	suma cyfr liczby dzieli się przez 3.
			C.	liczba jest parzysta i suma cyfr jest podzielna przez 3.

5. Liczby a i b spełniają warunek $a \cdot b = 100$.

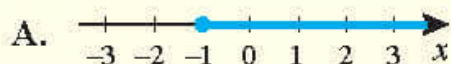
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeśli liczby a i b są parzyste, to 10 jest dzielnikiem jednej z nich.	P	F
Jeśli liczby a i b są naturalne, to 10 jest dzielnikiem jednej z nich.	P	F
Jeśli $a = \sqrt[3]{50}$, to $b = \sqrt[3]{20\,000}$.	P	F

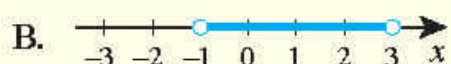
6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wszystkie liczby całkowite należące do przedziału $\langle -\sqrt{3}; 2\sqrt{2} \rangle$ to liczby:

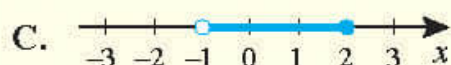
- A. $-2, -1, 0, 1, 2, 3$, B. $-1, 0, 1, 2, 3$, C. $-1, 0, 1, 2$, D. $0, 1, 2$.

7. Przyporządkuj każdemu przedziałowi przedstawionemu na osiach liczbowych oznaczonych literami od A do F odpowiedni opis słowny, oznaczony cyfrą od **1** do **6**.

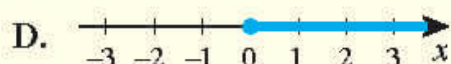
1 Liczby rzeczywiste nieujemne.



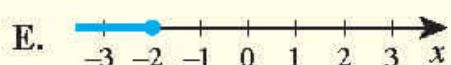
2 Liczby rzeczywiste mniejsze lub równe -2 .



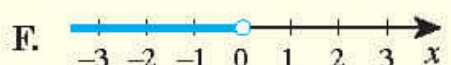
3 Liczby rzeczywiste większe od -1 i mniejsze od 3 .



4 Liczby rzeczywiste ujemne.



5 Liczby rzeczywiste większe od -1 i mniejsze lub równe 2 .



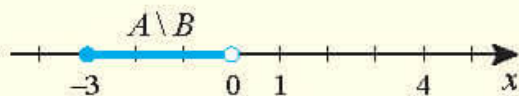
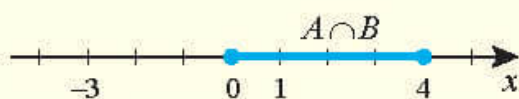
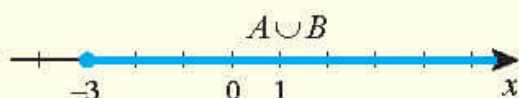
6 Liczby rzeczywiste większe lub równe -1 .

8. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

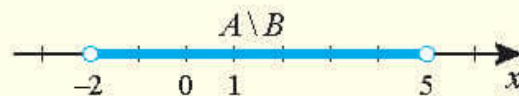
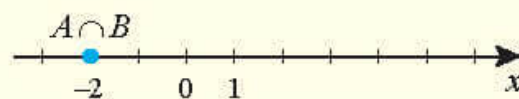
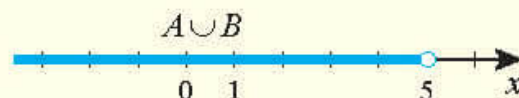
$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \in (0; 1)$.	P	F
$-2 \notin \langle -\sqrt{8}; -\sqrt{4} \rangle$.	P	F

9. Zbiory A i B są przedziałami liczbowymi, dla których wyniki działań (sumy, iloczynu i różnicy) przedstawiono na rysunkach poniżej. Wyznacz zbiory A i B .

a)



b)



4. Potęgowanie, pierwiastkowanie i logarytmowanie

Potęga o wykładniku całkowitym

Przypomnijmy

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

5^4 – czwarta potęga liczby 5

(czytamy: pięć do potęgi czwartej)

- Potęgowanie zastępuje mnożenie przez siebie tych samych czynników.
- Potęgą a^n liczby rzeczywistej a nazywamy iloczyn n czynników, z których każdy jest równy a , gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1.

Przyjmujemy: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$, gdy $a \neq 0$

$$5^4 = 625$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Uwaga

0^0 – symbol nieoznaczony, $a^n \cdot a = a^{n+1}$, $a^n : a = a^{n-1}$, gdy $a \neq 0$.

Ćwiczenie 1. Każdą z liczb:

- 9, 81, 243 zapisz w postaci potęgi liczby 3,
- 32, 64, 128, 1024 zapisz w postaci potęgi liczby 2.

Przykład 1. Oblicz:

a) $(-3)^4$, b) -3^4 , c) $\left(-\frac{10}{3}\right)^2$, d) $3,5^0$.

Rozwiązanie

a) $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$,

b) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$,

c) $\left(-\frac{10}{3}\right)^2 = \left(-\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$,

d) $3,5^0 = 1$.

Ćwiczenie 2. Oblicz:

a) -6^3 , b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, c) $\left(-\frac{11}{12}\right)^2$, d) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$, e) $(0,02)^3$.

Wykonując działania na potęgach, korzystamy z twierdzenia o działaniach na potęgach.

Przypomnijmy

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b różnych od zera oraz wykładników m, n , które są liczbami naturalnymi, prawdziwe są wzory:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ iloczyn potęg o tych samych podstawach

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ iloraz potęg o tych samych podstawach

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ potęga potęgi

4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ potęga iloczynu

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ potęga ilorazu

Dowód twierdzenia o działaniach na potęgach wynika bezpośrednio z definicji potęgi.

Dowód:

1. $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n}$.

2. $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{(m-n)+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}$, ponieważ $m-n > 0$.

3. $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_n \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_n = a^n \cdot b^n$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_n = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_n} = \frac{a^n}{b^n}$.

5. $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m \cdot \dots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m+n} = a^{m+n}$.

Ćwiczenie 3. Oblicz: a) $\left(1\frac{1}{4}\right)^5 \cdot (0,8)^5$, b) $(0,5)^2 \cdot (0,5)^3$, c) $3^5 : 3^2$,
d) $3^4 : 2^4$, e) $(2^3)^3$, f) $\left(4\frac{2}{3}\right)^{10} : \left(\frac{7}{3}\right)^{10}$.

Definicja

Dla każdej liczby naturalnej dodatniej n i dla każdej liczby rzeczywistej a , różnej od zera, przyjmujemy, że $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Powyższa definicja pozwala rozszerzyć pojęcie potęgi o wykładniki całkowite.

Nie tracimy żadnej z własności działań na potęgach o wykładnikach naturalnych, bo:

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}.$$

$a \neq 0, n$ – liczba naturalna dodatnia.

Przykład 2. Oblicz: a) 5^{-1} , b) 2^{-3} , c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$.

Rozwiązanie a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$, b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{1}\right)^2 = 16$.

Ćwiczenie 4. Oblicz:

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$, b) $(-3)^{-2}$, c) -3^{-2} , d) $\frac{1}{6^{-2}}$, e) $\left(3\frac{1}{2}\right)^{-3}$, f) $(0,125)^{-2}$.

Uwaga

Jeżeli a i b są liczbami różnymi od 0 oraz n jest liczbą naturalną dodatnią, to

$$\bullet \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad \bullet a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Ćwiczenie 5. Uzasadnij, że jeżeli liczba rzeczywista a jest różna od 0 i n jest liczbą naturalną dodatnią, to liczby a^{-n} i a^n są liczbami odwrotnymi.

Przykład 3. Zastosuj prawa działań na potęgach i oblicz:

a) $\frac{2^3(2^2)^3}{2^5}$, b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 10^{-3}$.

Rozwiązanie a) $\frac{2^3(2^2)^3}{2^5} = \frac{2^3 \cdot 2^{2 \cdot 3}}{2^5} = \frac{2^{3+6}}{2^5} = 2^{9-5} = 16$,

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 10^{-3} = \left(\frac{1}{5} \cdot 10\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ćwiczenie 6. Zastosuj prawa działań na potęgach i oblicz:

a) $\frac{(4^2)^3}{4^2 \cdot 4^3}$, b) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^4 : \left(\frac{6}{5}\right)^4$, c) $\left[\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2$, d) $\left(7\frac{3}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{19}{3}\right)^{-3}$.

Ćwiczenie 7. Wyrażenie $\frac{10^8 + 10^9}{11\,000 \cdot 10^5}$ zapisane w postaci potęgi liczby 10 to:

A. 10^0 ,

B. 10^3 ,

C. 10^6 ,

D. 10^{-3} .

Przypomnijmy

Do zapisywania bardzo małych i bardzo dużych liczb wygodnie posługiwać się notacją wykładniczą, np. $2\,500\,000 = 2,5 \cdot 1\,000\,000 = 2,5 \cdot 10^6$.

Liczby wymierne dodatnie a możemy przedstawić w postaci $a = x \cdot 10^n$, gdzie $1 \leq x < 10$ i $n \in \mathbb{Z}$. Taki zapis liczby a nazywamy **notacją wykładniczą**.

Przykład 4. Zapisz z użyciem notacji wykładniczej liczbę:

a) 5 270 000, b) 0,00653, c) 1 000 000.

Rozwiązanie

a) $5\,270\,000 = 5,27 \cdot 10^6$,

$$1 \leq 5,27 < 10$$

b) $0,00653 = 6,53 \cdot 10^{-3}$,

$$1 \leq 6,53 < 10$$

c) $1\,000\,000 = 1 \cdot 10^6$.

$$1 \leq 1 < 10$$

Ćwiczenie 8. Średnica Ziemi jest równa około 12 750 km. Długość tę podaj w metrach i zapisz z użyciem notacji wykładniczej.

Ćwiczenie 9. Polska ma powierzchnię około $3,13 \cdot 10^5 \text{ km}^2$. Wielkość tę zapisz bez użycia notacji wykładniczej.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $3^2, 3^4, 3^5$, b) $2^5, 2^6, 2^7, 2^{10}$. 2. a) -216 , b) $\frac{1}{81}$, c) $\frac{121}{144}$, d) $-\frac{125}{8}$, e) $0,000008$.
 3. a) 1 , b) $\frac{1}{32}$, c) 27 , d) $\frac{91}{16}$, e) 512 , f) 1024 . 4. a) 36 , b) $\frac{1}{9}$, c) $-\frac{1}{9}$, d) 36 , e) $\frac{8}{343}$, f) 64 .
 6. a) 4 , b) 1 , c) 1 , d) $\frac{125}{216}$ 7. A. 8. $1,275 \cdot 10^7 \text{ m}$ 9. $313\,000 \text{ km}^2$.

Zadania utrwalające

4.1. Oblicz:

- a) -2^2 , b) $(-3)^3$, c) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, d) $(-1)^6$, e) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$,
 f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, g) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}$, h) $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$, i) $16 \cdot 2^{-3}$.

4.2. Oblicz, korzystając z kalkulatora:

- a) $(0,012)^{-2}$, b) $(1,75)^{-3}$, c) $\left(3\frac{1}{2}\right)^{-3}$, d) $(-0,31)^{-2}$.

4.3. Każdą z liczb:

- a) $64, 128, 256, 512$ zapisz w postaci potęgi liczby 2 ,
 b) $0,2; 0,008; 1; 625$ zapisz w postaci potęgi liczby 5 ,
 c) $\frac{1}{9}, \frac{1}{243}, 27, 729$ zapisz w postaci potęgi liczby 3 ,
 d) $0,01; 0,001; 10; 100; (0,01)^{-4}$ zapisz w postaci potęgi liczby $0,1$.

4.4. Oblicz:

- a) $5 \cdot 2^{-5}$, b) $4^{-2} + 4 \cdot 3$, c) $2^6 - 2^{-1} \cdot 6$,
 d) $(1+0,5)^2 - (1-0,5)^3$, e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, f) $(-1)^3 \cdot 2^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$,
 g) $(2^{-2})^3$, h) $[(-2)^2]^{-3}$, i) $(-2^2)^3$, j) $\frac{3^{-2}(3^3)^2}{3^5}$.

4.5. Oblicz:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} : \left(\frac{9}{49}\right)^{-2}, & \text{b)} \left[4 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, & \text{c)} \frac{(3^5)^2 : (3^7 \cdot 3^0)}{3^2}, \\ \text{d)} 4 - 2^{-1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0, & \text{e)} \frac{1}{2} \cdot 2^0 - 3^{-2}, & \text{f)} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^0. \end{array}$$

4.6. Oblicz:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{5^{13} + 5^{12}}{5^{10}}, & \text{b)} \frac{7^{21} - 7^{19}}{49^9}, & \text{c)} \frac{(3^{18} + 3^{16}) \cdot 27}{(3^{14} + 3^{12}) \cdot 9}, \\ \text{d)} \frac{(2^5 + 2^8) \cdot (3^7 - 3^5)}{(2^2 \cdot 3^3)^3}, & \text{e)} \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}. \end{array}$$

4.7. Zapisz z użyciem notacji wykładniczej liczbę:

$$\text{a)} 0,01, \quad \text{b)} 0,012, \quad \text{c)} 0,00078, \quad \text{d)} 1680, \quad \text{e)} 231\,000\,000.$$

4.8. Podaj n , gdzie $n \in \mathbb{Z}$, gdy:

$$\text{a)} 0,0000825 = 8,25 \cdot 10^n, \quad \text{b)} (4,8 \cdot 10^{-7}) \cdot (6,5 \cdot 10^{-3})^2 = 2,028 \cdot 10^n.$$

4.9. Jeden rok astronomiczny to $365,25 \cdot 86\,400$ sekund. Liczbę sekund zapisz z użyciem notacji wykładniczej.

4.10. Wykaż, że liczba $2 \cdot 9^{100} - 9^{99} - 9^{98}$ jest podzielna przez 19.

D

Pierwiastki kwadratowe i pierwiastki sześciennie

Przypomnijmy

$\sqrt{25}$ – pierwiastek drugiego stopnia z liczby 25
lub krótko „pierwiastek z 25”,
co zapisujemy $\sqrt{25}$.

$$\sqrt{25} = 5$$

- Symbol $\sqrt{}$ czytamy: „pierwiastek kwadratowy” albo „pierwiastek drugiego stopnia”.

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , która podniesiona do kwadratu jest równa a .

Jeśli $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to $\sqrt{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a$.

Gdy $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ gdy } b > 0, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}.$$

Przykład 5. Oblicz:

a) $\sqrt{81 \cdot 144}$, b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$, c) $(\sqrt{6})^2$, d) $\sqrt{25 \cdot 3}$, e) $\sqrt{13^2 - 5^2}$.

Rozwiązanie a) $\sqrt{81 \cdot 144} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{144} = 9 \cdot 12 = 108$,

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$,

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

c) $(\sqrt{6})^2 = 6$,

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

d) $\sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$,

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$$

e) $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$.

Wykonujemy działania pod pierwiastkiem i obliczamy pierwiastek.

Ćwiczenie 10. Oblicz: a) $\sqrt{4 \cdot 25}$, b) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}}$, c) $(\sqrt{7})^2$, d) $\sqrt{100 \cdot 7}$.

Uwaga

Nie istnieją pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych, ponieważ kwadrat każdej liczby jest liczbą nieujemną (większą od zera lub równą zero).

Przykład 6. Uzasadnij, że $\sqrt{75} = \sqrt{27} + \sqrt{12}$.

Rozwiązanie Wprowadzamy oznaczenia:

$$\underbrace{\sqrt{75}}_L = \underbrace{\sqrt{27} + \sqrt{12}}_P.$$

L – lewa strona równości
 P – prawa strona równości

Sprawdzamy, czy prawą stronę P można tak przekształcić, by otrzymać stronę lewą L .

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} = \\ &= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 b} &= a\sqrt{b} \\ a\sqrt{b} &= \sqrt{a^2 b} \end{aligned}$$

$$L = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}. \text{ Zatem } L = P.$$

c.n.u.

Ćwiczenie 11. Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{128} = \sqrt{50} + \sqrt{18}$, b) $2\sqrt{288} - 3\sqrt{98} + 2\sqrt{125} - \sqrt{500} = 3\sqrt{2}$.

Uwaga

Przedstawianie iloczynu liczb $a \cdot \sqrt{b}$ w postaci pierwiastka kwadratowego $\sqrt{a^2 \cdot b}$ nazywamy włączaniem czynnika pod znak pierwiastka.

Przykład 7. Przedstaw w postaci pierwiastka kwadratowego (włącz czynnik pod pierwiastek): a) $4 \cdot \sqrt{3}$, b) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$.

Rozwiązanie Korzystamy z zależności $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$, gdy liczby a i b są nieujemne.

a) $4 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$,

b) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ćwiczenie 12. Przedstaw w postaci pierwiastka kwadratowego:

a) $3\sqrt{7}$, b) $0,1 \cdot \sqrt{60}$, c) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{27}$.

Przypomnijmy

$\sqrt[3]{-27} = -3$, bo $(-3)^3 = -27$.

$\sqrt[3]{0,001} = 0,1$, bo $(0,1)^3 = 0,001$.

- Symbol $\sqrt[3]{}$ czytamy:
„pierwiastek trzeciego stopnia” albo
„pierwiastek sześcienny”.

stopień pierwiastka
symbol pierwiastka
wartość pierwiastka
liczba podpierwiastkowa

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby a nazywamy taką liczbę b , która podniesiona do potęgi 3 jest równa liczbie a .

Jeśli $\sqrt[3]{a} = b$, to $b^3 = a$.

Jeśli liczby a i b są rzeczywiste, to:

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}, \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \text{ gdy } b \neq 0, \quad (\sqrt[3]{a})^3 = a, \quad \sqrt[3]{a^3 \cdot b} = a \cdot \sqrt[3]{b}.$$

Przykład 8. Oblicz: a) $\sqrt[3]{216 \cdot 64}$, b) $\frac{\sqrt[3]{-162}}{\sqrt[3]{48}}$, c) $(\sqrt[3]{5})^3$, d) $\sqrt[3]{-500}$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } \sqrt[3]{216 \cdot 64} = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{64} = 6 \cdot 4 = 24,$$

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt[3]{-162}}{\sqrt[3]{48}} = \sqrt[3]{\frac{-162}{48}} = \sqrt[3]{-\frac{27 \cdot 6}{8 \cdot 6}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

$$\text{c) } (\sqrt[3]{5})^3 = 5,$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a$$

$$\text{d) } \sqrt[3]{-500} = \sqrt[3]{-125 \cdot 4} = \sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[3]{4} = -5 \cdot \sqrt[3]{4}.$$

$$\sqrt[3]{a^3 \cdot b} = a \cdot \sqrt[3]{b}$$

Ćwiczenie 13. Oblicz:

$$\text{a) } -\sqrt[3]{7^3}, \quad \text{b) } \sqrt[3]{64 \cdot 343}, \quad \text{c) } \frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{-320}}, \quad \text{d) } \sqrt[3]{7 \cdot 343}.$$

Ćwiczenie 14. Sprawdź, czy:

$$\text{a) } \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{98}, \quad \text{b) } \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}.$$

Ćwiczenie 15. Uzasadnij, że $\sqrt[3]{4^3 + 5^3} = \sqrt[3]{8^3 - 7^3}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

10. a) 10, b) $\frac{2}{3}$, c) 7, d) $10\sqrt{7}$. 12. a) $\sqrt{63}$, b) $\sqrt{0,6}$, c) $\sqrt{12}$. 13. a) -7, b) 28, c) $-\frac{3}{4}$, d) $7 \cdot \sqrt[3]{7}$.

14. a) Nie, b) tak.

Zadania utrwalające

4.11. Oblicz w pamięci:

$$\text{a) } \sqrt{0,0036}, \quad \sqrt{\frac{16}{81}}, \quad \sqrt{\frac{144}{169}}, \quad \sqrt{\frac{100}{225}}, \quad \sqrt{\frac{256}{289}}, \quad \sqrt{\frac{324}{196}}, \quad \sqrt{\frac{361}{400}}, \quad \sqrt{\frac{121}{441}}.$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{\frac{27}{216}}, \quad \sqrt[3]{0,008}, \quad \sqrt[3]{64}, \quad \sqrt[3]{\frac{343}{125}}, \quad \sqrt[3]{0,729}, \quad \sqrt[3]{1331}, \quad \sqrt[3]{\frac{512}{216}}.$$

4.12. Oblicz:

$$\text{a) } \sqrt{16 \cdot 169}, \quad \text{b) } \sqrt[3]{64 \cdot 125}, \quad \text{c) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{32}, \quad \text{d) } \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{100},$$

$$\text{e) } \sqrt{80} : \sqrt{5}, \quad \text{f) } \sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2}, \quad \text{g) } \sqrt[3]{\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{\frac{2}{81}}, \quad \text{h) } \sqrt[3]{0,27} : \sqrt[3]{10}.$$

4.13. Przedstaw w postaci iloczynu liczby wymiernej i niewymiernej wyrażenie:

- a) $\sqrt{25 \cdot 3}$, b) $\sqrt{5 \cdot 25}$, c) $\sqrt[3]{2 \cdot 8}$, d) $\sqrt[3]{27 \cdot 3}$,
e) $\sqrt{162}$, f) $\sqrt{128}$, g) $\sqrt[3]{375}$, h) $\sqrt[3]{135}$.

4.14. Przedstaw w postaci pierwiastka kwadratowego iloczyn liczb:

- a) $2\sqrt{3}$, b) $3\sqrt{2}$, c) $4\sqrt{5}$, d) $5\sqrt{6}$, e) $6\sqrt{2}$.

4.15. Przedstaw w postaci pierwiastka sześciennego iloczyn liczb:

- a) $-2 \cdot \sqrt[3]{2}$, b) $3 \cdot \sqrt[3]{2}$, c) $2 \cdot \sqrt[3]{3}$, d) $4 \cdot \sqrt[3]{-3}$, e) $-3 \cdot \sqrt[3]{-5}$.

4.16. Uzasadnij, że:

D

- a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$, b) $(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}) \cdot (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}) = -2\sqrt{3}$,
c) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$, d) $(\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{0,016}) : \sqrt[3]{2} = 8,8$.

4.17. Czy $\sqrt{3,0625} = \sqrt[3]{5,35975}$?



Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$\sqrt{3,0625} = \sqrt{\frac{49}{16}}$ i $\sqrt[3]{5,35975} = \sqrt[3]{\frac{343}{64}}$.
N	Nie,		B.	$\sqrt{3,0625} = 1,75$ i $\sqrt[3]{5,35975} = 5\frac{23}{64}$.

Pierwiastki stopnia n i działania na nich

a – liczba podpierwiastkowa,

n – stopień pierwiastka, gdzie n to liczba naturalna większa od 1,

b – wartość pierwiastka n -tego stopnia z liczby a .

$$\sqrt[n]{a} = b$$

stopień pierwiastka

liczba podpierwiastkowa

wartość pierwiastka

Pierwiastek $\sqrt[n]{a}$ nazywamy pierwiastkiem arytmetycznym stopnia n .

Wartością pierwiastka arytmetycznego (jeśli istnieje) może być tylko jedna liczba.

Definicja

Pierwiastkiem stopnia n , gdzie n jest liczbą naturalną:

parzystą większą od 0,

z liczby nieujemnej a , gdzie $a \geq 0$,

nazywamy

liczbę nieujemną b ($b \geq 0$),

taką że $b^n = a$.

nieparzystą większą od 1,

z liczby rzeczywistej a , gdzie $a \in R$,

nazywamy

liczbę rzeczywistą b ($b \in R$),

taką że $b^n = a$.

$\sqrt[n]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b^n = a$.

Na przykład:

$$\sqrt{121} = 11, \quad \text{bo} \quad 11^2 = 121,$$

$$\sqrt[4]{16} = 2, \quad \text{bo} \quad 2^4 = 16,$$

$$\sqrt[10]{1024} = 2, \quad \text{bo} \quad 2^{10} = 1024,$$

$$\sqrt[12]{1} = 1, \quad \text{bo} \quad 1^{12} = 1,$$

$$\sqrt[14]{0} = 0, \quad \text{bo} \quad 0^{14} = 0,$$

$$\sqrt[3]{64} = 4, \quad \text{bo} \quad 4^3 = 64,$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4, \quad \text{bo} \quad (-4)^3 = -64,$$

$$\sqrt[5]{-243} = -3, \quad \text{bo} \quad (-3)^5 = -243,$$

$$\sqrt[9]{1} = 1, \quad \text{bo} \quad 1^9 = 1,$$

$$\sqrt[11]{-1} = -1, \quad \text{bo} \quad (-1)^{11} = -1.$$

Ćwiczenie 16. Oblicz: a) $\sqrt[4]{81}$, b) $\sqrt[5]{-32}$, c) $\sqrt[5]{0,00001}$, d) $\sqrt[17]{0}$,
e) $\sqrt[3]{-343}$, f) $\sqrt[7]{\sqrt[6]{64} - \sqrt[8]{1}} - \sqrt[6]{\sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{32}}$, g) $\sqrt{3}(\sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{-64} + \sqrt[5]{-1})$.

Przykład 9. Przedstaw liczbę -5 w postaci pierwiastka stopnia n , gdy:

a) $n = 3$, b) $n = 5$.

Rozwiązanie

a) $(-5)^3 = -125$, więc $-5 = \sqrt[3]{-125}$,

b) $(-5)^5 = -3125$, więc $-5 = \sqrt[5]{-3125}$.

Ćwiczenie 17. Przedstaw liczbę -2 w postaci pierwiastka stopnia n , gdy:

a) $n = 7$, b) $n = 9$, c) $n = 11$.

Czy można liczbę -2 przedstawić w postaci pierwiastka szóstego stopnia? Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 18. Spośród liczb: -1 ; 0 ; $0,0081$; $-0,0081$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{8}$ wskaż te, których nie można przedstawić w postaci pierwiastka czwartego stopnia.

Uwaga

- Każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci pierwiastka stopnia nieparzystego.
- Liczb ujemnych **nie można** przedstawić w postaci pierwiastka stopnia parzystego.
- Każdą liczbę nieujemną można przedstawić w postaci pierwiastka stopnia parzystego.

Na pierwiastkach tego samego stopnia możemy wykonywać mnożenie i dzielenie.

Twierdzenie o działaniach na pierwiastkach

Jeśli istnieją pierwiastki $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[n]{b}$, to:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ *iloczyn pierwiastków tego samego stopnia (pierwiastek z iloczynu)*
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, gdzie $b \neq 0$ *iloraz pierwiastków tego samego stopnia (pierwiastek z ilorazu)*
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$ i $a \neq 0$ *potęga pierwiastka (pierwiastek z potęgi)*
- $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Ćwiczenie 19. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-27}$, b) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}}$, c) $(\sqrt[3]{-27})^3$.

Ćwiczenie 20. Uzasadnij, że jeżeli istnieją pierwiastki $\sqrt[n]{-a}$ i $\sqrt[n]{a}$, to $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Przykład 10. Przedstaw w postaci pierwiastka iloczyn liczb, czyli włącz liczbę pod znak pierwiastka:

a) $3 \cdot \sqrt[5]{7}$, b) $-2 \cdot \sqrt[4]{6}$, c) $-3 \cdot \sqrt[3]{-4}$.

Rozwiązanie

a) $3 \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 7} = \sqrt[5]{1701}$, $\sqrt[5]{3^5} = 3$

b) $-2 \cdot \sqrt[4]{6} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 6} = -\sqrt[4]{96}$, $\sqrt[4]{2^4} = 2$

c) $-3 \cdot \sqrt[5]{-4} = \sqrt[5]{(-3)^5 \cdot (-4)} = \sqrt[5]{(-243) \cdot (-4)} = \sqrt[5]{972}$. $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

Ćwiczenie 21. Przedstaw w postaci pierwiastka iloczyn liczb:

a) $-2 \cdot \sqrt[3]{3}$, b) $-2 \cdot \sqrt[10]{2}$, c) $-3 \cdot \sqrt[6]{2}$, d) $10 \sqrt[3]{-2}$, e) $-10 \sqrt[9]{-5}$.

Przykład 11. Przedstaw pierwiastek w postaci iloczynu liczby wymiernej i pierwiastka, czyli wyłącz czynnik przed znak pierwiastka: a) $\sqrt[4]{243}$, b) $\sqrt[5]{-864}$.

Rozwiązanie Obliczenie pierwiastka ułatwi rozkład liczby podpierwiastkowej na czynniki.

$$\begin{array}{lcl} \text{a) } \sqrt[4]{243} = \sqrt[4]{3^5} = & 243 = 3^5 & | \quad \text{b) } \sqrt[5]{-864} = -\sqrt[5]{2^5 \cdot 3^3} = & 864 = 2^5 \cdot 3^3 \\ & & & = -2\sqrt[5]{27}. \end{array}$$

Odp.: a) $\sqrt[4]{243} = 3\sqrt[4]{3}$, b) $\sqrt[5]{-864} = -2\sqrt[5]{27}$.

Ćwiczenie 22. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt[4]{32}$, b) $\sqrt[4]{5000}$, c) $\sqrt[5]{-224}$, d) $\sqrt[4]{7\frac{19}{32}}$.

Uwaga

Usuwać niewymierność z mianownika ułamka, mnożymy ten ułamek przez odpowiednio przedstawioną liczbę 1 (czynnik 1 nie zmienia wartości iloczynu, np. $a \cdot 1 = a$).

Przykład 12. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{7}{2\sqrt{3}}$, b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, c) $\frac{2}{\sqrt[3]{-3}}$, d) $\frac{8-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}\sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}, \quad \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = 1$$

$$\text{c) } \frac{2}{\sqrt[3]{-3}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[3]{3^4}} = -\frac{2\sqrt[3]{81}}{3}, \quad \frac{\sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[3]{3^4}} = 1$$

$$\text{d) } \frac{8-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{8-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(8-\sqrt{2})\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{8\sqrt{2}-2}{10} = \frac{4\sqrt{2}-1}{5}.$$

Ćwiczenie 23. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{8}{\sqrt[6]{2}}$, b) $\frac{4}{\sqrt[4]{-4}}$, c) $\frac{6-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

Przykład 13. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{80} + 2\sqrt[4]{405}$, b) $\frac{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{-64}}$, c) $\sqrt[9]{7^{18}}$, d) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{-32}}\right)^5$.

Rozwiązanie

a) $\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{80} + 2\sqrt[4]{405} =$ $80 = 5 \cdot 2^4$
 $= \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} + 2\sqrt[4]{3^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} + 2 \cdot 3\sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5},$ $405 = 5 \cdot 3^4, \sqrt[4]{2^4} = 2, \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\frac{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{-64}} = \frac{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{3^5 \cdot 2}}{-\sqrt[5]{2^5 \cdot 2}} = \frac{\sqrt[5]{2} - 3\sqrt[5]{2}}{-2\sqrt[5]{2}} = \frac{-2\sqrt[5]{2}}{-2\sqrt[5]{2}} = 1,$ $486 = 2 \cdot 3^5, 64 = 2 \cdot 2^5$
 $\sqrt[5]{3^5} = 3, \sqrt[5]{2^5} = 2$

c) $\sqrt[9]{7^{18}} = \sqrt[9]{7^{2 \cdot 9}} = \sqrt[9]{(7^2)^9} = \left(\sqrt[9]{7^2}\right)^9 = 7^2 = 49,$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$

d) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{-32}}\right)^5 = \sqrt[5]{-32} = -2.$ $(\sqrt[n]{a})^n = a, (-2)^5 = -32$

Ćwiczenie 24. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\sqrt[5]{-3} - \sqrt[5]{96} + 2\sqrt[5]{729}$, b) $\frac{\sqrt[4]{1250} - \sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{512}}$, c) $\sqrt[13]{5^{39}}$, d) $\left(\sqrt[7]{\sqrt[3]{-125}}\right)^7$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

16. a) 3, b) -2, c) 0,1, d) 0, e) -7, f) 0, g) $5\sqrt{3}$. 17. a) $\sqrt[7]{-128}$, b) $\sqrt[9]{-512}$, c) $\sqrt[14]{-2048}$. Nie, bo nie istnieją pierwiastki parzystego stopnia z liczb ujemnych. 18. -1, -0,0081, $-\frac{1}{8}$. 19. a) 3, b) $\frac{2}{3}$, c) -3.

20. Wskazówka. $\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{(-1) \cdot a}$. 21. a) $\sqrt[7]{-384}$, b) $-\sqrt[10]{2048}$, c) $-\sqrt[6]{1458}$, d) $\sqrt[5]{-200\,000}$,

e) $\sqrt[9]{5\,000\,000\,000}$. 22. a) $2\sqrt[4]{2}$, b) $5\sqrt[4]{8}$, c) $-2\sqrt[5]{7}$, d) $\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$. 23. a) $4\sqrt[6]{32}$, b) $-2\sqrt[7]{32}$, c) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$.

24. a) $3\sqrt[5]{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 125, d) -5.

Zadania utrwalające

4.18. Oblicz:

a) $\sqrt[4]{160\,000}$, b) $\sqrt[5]{0,00032}$, c) $\sqrt[5]{-1024}$, d) $\sqrt[6]{729}$,
 e) $\sqrt[7]{128}$, f) $\sqrt[8]{256}$, g) $\sqrt[3]{-1331}$, h) $\sqrt[4]{2401}$.

4.19. Przedstaw liczbę a w postaci pierwiastka stopnia n , gdy:

a) $a = 6$ i $n = 3$, b) $a = -2$ i $n = 9$, c) $a = 4$ i $n = 6$,
 d) $a = 7$ i $n = 3$, e) $a = 6$ i $n = 4$, f) $a = -5$ i $n = 5$.

4.20. Oblicz:

a) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$, b) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$, c) $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{2}$, d) $\sqrt[4]{0,128} : \sqrt[4]{0,008}$.

4.21. Wylącz czynnik przed pierwiastek:

a) $\sqrt[4]{162}$, b) $\sqrt[4]{112}$, c) $\sqrt[3]{64}$, d) $\sqrt[3]{486}$, e) $\sqrt[3]{6250}$,
f) $\sqrt[7]{-384}$, g) $\sqrt[4]{1280}$, h) $\sqrt[6]{1458}$, i) $\sqrt[3]{-9375}$, j) $\sqrt[3]{-1512}$.

4.22. Włącz pod pierwiastek czynnik stojący przed pierwiastkiem:

a) $3\sqrt[3]{2}$, b) $5\sqrt[3]{2}$, c) $7\sqrt[4]{2}$, d) $2\sqrt[4]{6}$, e) $2\sqrt[5]{3}$,
f) $3\sqrt[6]{2}$, g) $5\sqrt[4]{2}$, h) $-6\sqrt[3]{-5}$, i) $2\sqrt[7]{-3}$, j) $11\sqrt[4]{11}$.

4.23. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$, b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, c) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$, d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$,
e) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, f) $-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$, g) $\frac{-1}{\sqrt[3]{-2}}$, h) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$.

4.24. Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{98}$, b) $\sqrt{125} - \sqrt{20} + 3\sqrt{45}$, c) $\sqrt[3]{192} + \sqrt[3]{375} + \sqrt[3]{81}$,
d) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$, e) $\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162}$, f) $\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{243}$,
g) $\frac{3\sqrt{8}-\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$, h) $\frac{4\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{8}}$, i) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}}$, j) $\frac{\sqrt{125}+\sqrt{20}-\sqrt{45}}{-\sqrt{20}}$.

4.25. Dziecko bawiąc się kalkulatorem, wystukało pewną liczbę. Następnie trzy razy nacisnęło przycisk $\sqrt{}$ i otrzymało liczbę 3. Podaj liczbę, którą dziecko wystukało.

4.26. Oblicz:

a) $\sqrt{17^2 - 8^2}$, b) $\sqrt{15^2 + 8^2}$, c) $\sqrt[3]{(3^3)^4}$,
d) $\sqrt[3]{9^2 - 17} - \sqrt[3]{64}$, e) $\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{8} - 2\sqrt{32})$, f) $\sqrt[3]{3} (5\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{243})$,
g) $7\sqrt[3]{54} - 5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{128}$, h) $(2\sqrt[3]{9} - 5\sqrt[3]{72})\sqrt[3]{3}$, i) $\sqrt[3]{9} (5\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{243})$.

4.27. Zbadaj, dla jakich wartości m zachodzi równość:

a) $\sqrt{50} - \sqrt{98} = m\sqrt{18}$, b) $5\sqrt{12} + 2\sqrt{27} = m\sqrt{243}$.

Rozwiązanie

Ćwiczenie 27. Zapisz w postaci potęgi liczby 3 pierwiastek:

a) $\sqrt[4]{27}$, b) $\sqrt[3]{81}$, c) $\sqrt[3]{2187}$.



Ćwiczenie 28. Wiedząc, że a jest liczbą dodatnią, k i l są liczbami całkowitymi oraz n i m liczbami naturalnymi większymi od 1, przepisz wzory do zeszytu i w miejsce ■ wpisz właściwy wykładnik.

a) $a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{l}{m}} = a^{\blacksquare}$,

iloczyn potęg o tych samych podstawach

b) $a^{\frac{k}{n}} : a^{\frac{l}{m}} = a^{\blacksquare}$,

iloraz potęg o tych samych podstawach

c) $\left(a^{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{l}{m}} = a^{\blacksquare}$.

potęga potęgi

Przykład 17. Oblicz: a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$, b) $\frac{3^{2,5}}{\sqrt{3}}$, c) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Rozwiązanie

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 2^2 = 4$,
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$

$$a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{l}{m}} = a^{\frac{k}{n} + \frac{l}{m}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

b) $\frac{3^{2,5}}{\sqrt{3}} = \frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}} = 3^2 = 9$,
 $\frac{3^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3^5}{3}} = \sqrt{81} = 9$

$$a^{\frac{k}{n}} : a^{\frac{l}{m}} = a^{\frac{k}{n} - \frac{l}{m}}$$

c) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{6}} = (2^6)^{\frac{1}{6}} = 2^{6 \cdot \frac{1}{6}} = 2$,
 $\left(\sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

Ćwiczenie 29. Oblicz: a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}$, b) $\frac{2^{1,5}}{\sqrt{2}}$, c) $\left(729^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.



Ćwiczenie 30. Wiedząc, że a i b są liczbami dodatnimi, k jest liczbą całkowitą i n liczbą naturalną większą od 1, przepisz wzory do zeszytu i w miejsce $\blacksquare$ wpisz właściwy wykładnik.

a) $(a \cdot b)^{\frac{k}{n}} = a^{\blacksquare} \cdot b^{\blacksquare}$, potęga iloczynu

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{n}} = \frac{a^{\blacksquare}}{b^{\blacksquare}}$. potęga ilorazu

Przykład 18. Oblicz: a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot 2^{-\frac{1}{5}}$, b) $2^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Rozwiązanie

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot 2^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^{-\frac{1}{5}} = 1^{-\frac{1}{5}} = 1$,

$$a^{\frac{k}{n}} \cdot b^{\frac{k}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{k}{n}}$$

b) $2^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2 : \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

$$a^{\frac{k}{n}} : b^{\frac{k}{n}} = (a : b)^{\frac{k}{n}}$$

Ćwiczenie 31. Oblicz:

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$, b) $25^{-\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Przykład 19. Przedstaw w postaci potęgi liczby 2 pierwiastek $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Rozwiązanie $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}}$.

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}}$$

Ćwiczenie 32. Wykaż, że $\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Porównując potęgi o różnych podstawach należących do zbioru $\mathbf{R}^+$ i różnych wykładnikach:

- staramy się przedstawić te liczby w postaci potęg o takich samych wykładnikach, a następnie
- porównać ich podstawy i wyciągnąć wniosek.

Na przykład:

$$\begin{array}{ccc} 2^{500} & \text{i} & 5^{200} \\ (2^5)^{100} & \text{i} & (5^2)^{100} \\ 32^{100} & \text{i} & 25^{100} \\ 32 & > & 25. \end{array}$$

Wniosek: $32^{100} > 25^{100}$.

Zatem $2^{500} > 5^{200}$.

Przykład 20. Porównaj liczby $\sqrt[5]{3}$ i $\sqrt[3]{5}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{3} &= 3^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{3}{15}} = (3^3)^{\frac{1}{15}} = 27^{\frac{1}{15}} \\ \text{oraz} \quad \sqrt[3]{5} &= 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{15}} = (5^5)^{\frac{1}{15}} = 3125^{\frac{1}{15}}\end{aligned}$$

$\frac{1}{5} = \frac{3}{15} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$

$$27 < 3125.$$

Wniosek: $27^{\frac{1}{15}} < 3125^{\frac{1}{15}}$.

Zatem $\sqrt[5]{3} < \sqrt[3]{5}$.

Ćwiczenie 33. Porównaj liczby:

a) 4^{300} i 3^{400} , b) $\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt{3}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

25. a) $3^{\frac{1}{2}}$, b) $5^{\frac{1}{2}}$, c) $12^{\frac{1}{3}}$, d) $4^{\frac{1}{8}}$. 26. a) $\sqrt[3]{9}$, b) $\sqrt{3125}$, c) $\sqrt[4]{49}$.

27. a) $3^{\frac{3}{4}}$, b) $3^{\frac{4}{5}}$, c) 3. 29. a) 9, b) 2, c) 3. 31. a) $\frac{1}{9}$, b) $\frac{1}{5}$.

33. a) $4^{300} < 3^{400}$, b) $\sqrt[3]{2} < \sqrt{3}$.

Zadania utrwalające

4.28. Liczba $2^{-\frac{11}{4}}$ przedstawiona w postaci potęgi liczby 16 to:

A. $16^{-\frac{11}{8}}$, B. $16^{-\frac{1}{8}}$, C. $16^{-\frac{1}{4}}$, D. $16^{-\frac{11}{16}}$.

4.29. Oblicz:

a) $64^{\frac{1}{3}}$, b) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$, c) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$, d) $\left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$, e) $(0,125)^{-\frac{1}{3}}$, f) $25^{\frac{3}{2}}$,
g) $(0,027)^{\frac{2}{3}}$, h) $1000^{-\frac{2}{3}}$, i) $2 \cdot 27^{\frac{2}{3}}$, j) $\left(\frac{49}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$, k) $256^{0,75} - 3^{-1} \cdot 21^0$.

4.30. Stosując prawa działań na potęgach, oblicz:

a) $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{3}{5}}$, b) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}}$, c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$, d) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{3}}$, e) $108^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{3}}$.

4.31. Określ, do której potęgi należy podnieść liczbę 8, aby otrzymać:

a) 64, b) 1, c) 2, d) 4, e) $\frac{1}{32}$, f) 32, g) $\frac{1}{2}$, h) $\frac{1}{256}$.

4.32. Przedstaw w postaci jednej potęgi wyrażenie:

a) $3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-2}$, b) $\sqrt[3]{9} \cdot 3^2 \cdot 3^0 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$, c) $\sqrt{3}\sqrt{3}$, d) $\sqrt[4]{3^{-3} \cdot \sqrt[5]{9}}$,
 e) $\left(3^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{27}\right)^2$, f) $\frac{2^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{4} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt{2} \cdot 16^{\frac{1}{2}}}$, g) $\frac{\sqrt{5} \cdot 125^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{25^{-\frac{1}{2}}}$, h) $\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5}}$.

4.33. Przedstaw w postaci pierwiastka wyrażenie:

a) $2^{\frac{3}{4}}$, b) $2^{0,5}$, c) $3^{\frac{4}{5}}$, d) $3^{0,4}$, e) $3^{-\frac{2}{3}}$, f) $8^{-\frac{3}{5}}$, g) $2^{\frac{7}{3}}$.

4.34. Uzasadnij, że:

D

a) $\sqrt{48} + \sqrt{147} = \sqrt{363}$, b) $\sqrt[3]{1080} - \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{320}$, c) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$,
 d) $7 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}} + \sqrt[3]{\frac{1}{54}}\right) = 5\frac{5}{6}$, e) $\sqrt[4]{a^9} = a^2 \cdot \sqrt[4]{a}$, gdy $a \geq 0$, f) $\sqrt[12]{16} = \sqrt[3]{2}$.

4.35. Oblicz:

a) $\sqrt[5]{-97\frac{21}{32}}$, b) $\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[6]{16}$, c) $2 \cdot \sqrt[5]{\frac{243}{1024}} + \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.

4.36. Porównaj liczby:

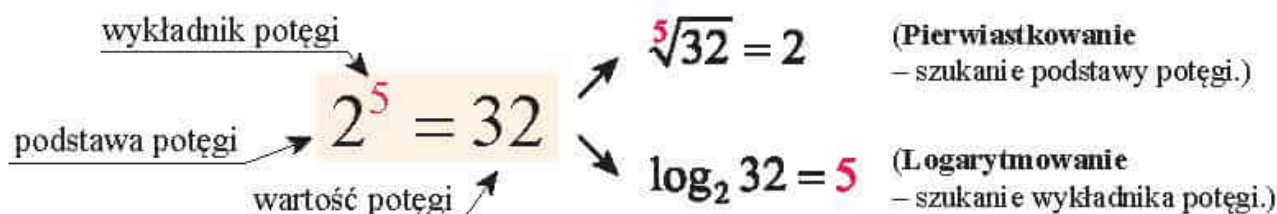
a) $\sqrt{2^{80}}$ i $\sqrt[3]{4^{60}}$, b) $\sqrt[5]{25^{75}}$ i $\sqrt[10]{125^{100}}$, c) $\sqrt[10]{11}$ i $\sqrt[11]{10}$, d) $\sqrt[3]{3}$ i $\sqrt[4]{4}$.

4.37. Uzasadnij, że:

D

a) $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, b) $3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$, c) $\sqrt[3]{-4\sqrt[4]{16}} + \sqrt[3]{-216} = -2$,
 d) jeżeli $a = 2^{45}$, $b = 3^{30}$ i $c = 5^{20}$, to $a < c < b$.

Pojęcie logarytmu



$$\begin{aligned} \log_2 8 &= 3, & \text{bo } 2^3 &= 8, \\ \log_3 9 &= 2, & \text{bo } 3^2 &= 9, \\ \log_5 25 &= 2, & \text{bo } 5^2 &= 25. \end{aligned}$$

liczba logarytmowana → $\log_a b = c$ ← logarytm

podstawa logarytmu → $\log_a b = c$

Definicja

Logarytmem liczby dodatniej b , przy dodatniej podstawie a różnej od 1, nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$c = \log_a b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^c = b$$

Przykład 21. Oblicz:

a) $\log_4 1$, $\log_4 4$, $\log_4 16$, $\log_4 64$,

b) $\log_{\frac{1}{3}} 1$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, $\log_{\frac{1}{3}} 3$, $\log_{\frac{1}{3}} 27$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_4 1 &= 0, & \text{bo } 4^0 &= 1, & \log_4 4 &= 1, & \text{bo } 4^1 &= 4, \\ \log_4 16 &= 2, & \text{bo } 4^2 &= 16, & \log_4 64 &= 3, & \text{bo } 4^3 &= 64. \\ \text{b) } \log_{\frac{1}{3}} 1 &= 0, & \text{bo } \left(\frac{1}{3}\right)^0 &= 1, & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} &= 1, & \text{bo } \left(\frac{1}{3}\right)^1 &= \frac{1}{3}, \\ \log_{\frac{1}{3}} 3 &= -1, & \text{bo } \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} &= 3, & \log_{\frac{1}{3}} 27 &= -3, & \text{bo } \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} &= 27. \end{aligned}$$

Odp.: a) 0, 1, 2, 3, b) 0, 1, -1, -3.

Ćwiczenie 34. Oblicz:

a) $\log_5 1$, $\log_5 5$, $\log_5 \frac{1}{5}$, $\log_5 \frac{1}{125}$, b) $\log_6 \frac{1}{6}$, $\log_6 1$, $\log_6 \frac{1}{36}$, $\log_6 216$.

Przykład 22. Uzasadnij, że jeśli a jest liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1, to:

a) $\log_a a = 1$, b) $\log_a 1 = 0$.

Rozwiązanie Założenia: $a > 0$ i $a \neq 1$. Bezpośrednio z definicji logarytmu wynika, że:

a) $\log_a a = 1$, bo $a^1 = a$. **c.n.u.** b) $\log_a 1 = 0$, bo $a^0 = 1$. **c.n.u.**

Ćwiczenie 35. Oblicz: a) $\log_6 6$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$, $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\log_{10} 10$,

b) $\log_2 1$, $\log_{1000} 1$, $\log_{0,1} 1$, **$\log_{\pi} 1$** , $\log_{2\sqrt{2}} 1$.

Przykład 23. Uzasadnij, że jeśli a jest liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1, to:

a) $\log_a a^k = k$, gdzie k jest dowolną liczbą rzeczywistą.

b) $\log_{a^p} a^k = \frac{k}{p}$, gdzie k jest dowolną liczbą rzeczywistą i p liczbą rzeczywistą różną od 0.

Rozwiązanie Założenie: $a > 0$ i $a \neq 1$.

a) Załóżmy, że $\log_a a^k = c$, gdzie $k \in \mathbb{R}$.

$$a^c = a^k$$

$$c = k. \quad \text{c.n.u.}$$

Z definicji logarytmu

$$\log_a b = c, \text{ więc } a^c = b.$$

b) Załóżmy, że $\log_{a^p} a^k = c$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ oraz $p \in \mathbb{R}$ i $p \neq 0$.

$$(a^p)^c = a^k$$

$$a^{p \cdot c} = a^k$$

$$p \cdot c = k$$

$$c = \frac{k}{p}.$$

c.n.u.

Z definicji logarytmu

$$\log_a b = c, \text{ więc } a^c = b.$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Twierdzenie

Jeżeli a jest liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1 oraz b liczbą rzeczywistą dodatnią, to:

• $\log_a 1 = 0$, • $\log_a a = 1$, • $\log_a a^k = k$, gdzie $k \in \mathbb{R}$

• $\log_{a^p} a^k = \frac{k}{p}$, gdzie $k \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ i $p \neq 0$, • $a^{\log_a b} = b$.

Ćwiczenie 36. Skorzystaj z definicji logarytmu i uzasadnij wzór $a^{\log_a b} = b$.

Przykład 24. Oblicz:

a) $\log_2 2^{-3}$, $\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^5$, $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-5}$, b) $\log_{\sqrt{2}} 4$, c) $\log_9 \frac{1}{3}$, d) $\log_{\frac{1}{4}} 8$.

Rozwiązanie

a) $\log_2 2^{-3} = -3$, $\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^5 = 5$, $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} = -5$, $\log_a a^k = k$

b) $\log_{\sqrt{2}} 4 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2 = 2 : \frac{1}{2} = 4$, $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $4 = 2^2$

c) $\log_9 \frac{1}{3} = \log_{3^2} 3^{-1} = -1 : 2 = -\frac{1}{2}$, $9 = 3^2$, $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

d) $\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = 3 : (-2) = -\frac{3}{2}$. $\frac{1}{4} = 2^{-2}$, $8 = 2^3$

Odp.: a) -3 , 5 , -5 , b) 4 , c) $-\frac{1}{2}$, d) $-\frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 37. Oblicz:

a) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4$, b) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^3$, c) $\log_{2\sqrt{2}} (\sqrt{8})^{-2}$, d) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4}$, e) $\log_2 \frac{1}{4}$.

Ćwiczenie 38. Oblicz:

a) $\log_4 8$, b) $\log_{2\sqrt{2}} 4$, c) $\log_{\frac{1}{8}} 16$, d) $\log_{\frac{1}{9}} 27$, e) $\log_{\frac{1}{125}} \frac{1}{5}$, f) $\log_{64} 32$.

Przykład 25. Oblicz:

a) $2^{\log_2 7}$, b) $2^{3 \log_2 5}$, c) $16^{\log_2 3}$.

Rozwiązanie

a) $2^{\log_2 7} = 7$, $a^{\log_a b} = b$

b) $2^{3 \log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^3 = 5^3 = 125$, $a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n$ i $2^{\log_2 5} = 5$

c) $16^{\log_2 3} = \left(2^4\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^4 = 3^4 = 81$. $16 = 2^4$ i $\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n$ i $2^{\log_2 3} = 3$

Odp.: a) 7 , b) 125 , c) 81 .

Ćwiczenie 39. Oblicz:

a) $3^{\log_3 5}$, b) $6^{\log_6 2}$, c) $5^{2\log_5 3}$, d) $64^{\log_8 3}$, e) $\sqrt{27^{\log_3 4}}$, f) $3^{2+\log_3 4}$.

Przykład 26. Przedstaw liczbę:

a) 2 w postaci potęgi liczby 7, b) 11 w postaci potęgi liczby 15.

Rozwiązanie Korzystamy z wzoru $a^{\log_a b} = b$.

a) $2 = 7^{\log_7 2}$, b) $11 = 15^{\log_{15} 11}$.

Ćwiczenie 40. Przedstaw liczbę: a) 3 w postaci potęgi liczby 10,

b) 25 w postaci potęgi liczby 4, c) 100 w postaci potęgi liczby 5.

Ćwiczenie 41. Przedstaw liczbę: a) 2 w postaci logarytmu o podstawie 3,

b) $\frac{1}{2}$ w postaci logarytmu o podstawie 2, c) 100 w postaci logarytmu o podstawie 10.

Uwaga

Ważną rolę w matematyce i naukach matematyczno-przyrodniczych odgrywa:

- logarytm przy podstawie 10 zwany **logarytmem dziesiętnym**, zamiast $\log_{10} b$ piszemy **log b** lub **lg b**,
- logarytm przy podstawie e (gdzie $e = 2,718281828\dots$) zwany **logarytmem naturalnym**, zamiast $\log_e b$ piszemy **ln b**.

Ćwiczenie 42. Przerysuj tabelę do zeszytu i w miejsce ■ wpisz właściwą liczbę.

b	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10 000	100 000	1000 000
$\log b$	-3	■	■	■	■	2	■	■	■	6

Posługując się uzupełnioną tabelą, oceń prawdziwość poniższych nierówności:

- a) $\log 34 > 0$, b) $\log 124 < 3$ i $\log 124 > 2$, c) $\log 0,02 > -3$ i $\log 0,02 < -1$,
d) $\log 10\,000\,000 < 5$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

34. a) 0, 1, -1, -3, b) -1, 0, -2, 3. 35. a) 1, b) 0. 36. Wskazówka. Załóż, że $\log_a b = c$.

37. a) 4, b) 3, c) -2, d) 2, e) -2. 38. a) $\frac{3}{2}$, b) $\frac{4}{3}$, c) $-\frac{4}{3}$, d) $-\frac{3}{2}$, e) $\frac{1}{3}$, f) $\frac{5}{6}$.

39. a) 5, b) 2, c) 9, d) 9, e) 8, f) 36. 40. a) $3 = 10^{\log_{10} 3}$, b) $25 = 4^{\log_4 25}$, c) $100 = 5^{\log_5 100}$.

41. a) $2 = \log_3 9$, b) $\frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{2}$, c) $100 = \log_{10} 10^{100}$. 42. a) Prawda, b) prawda, c) prawda, d) fałsz.

Zadania utrwalające

4.38. Oblicz:

- a) $\log_2 1$, $\log_2 4$, $\log_2 \sqrt{2}$, $\log_2 0,125$, b) $\log_{\frac{1}{2}} 2$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$, $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} 16$,
 c) $\log 100$, $\log \sqrt{10}$, $\log 0,01$, $\log \sqrt[3]{10}$, d) $\log_5 1$, $\log_5 \frac{1}{5}$, $\log_5 \sqrt{5}$, $\log_5 625$.

4.39. Oblicz:

- a) $\log_5 125$, $\log_4 16$, $\log_3 81$, $\log_6 6$, $\log_7 343$,
 b) $\log_5 \frac{1}{125}$, $\log_2 \frac{1}{8}$, $\log_3 \frac{1}{27}$, $\log_4 \frac{1}{64}$, $\log 0,001$,
 c) $\log_5 (25\sqrt{5})$, $\log_2 \sqrt{2}$, $\log_6 (6\sqrt{6})$, $\log_3 \sqrt{3}$, $\log_7 \sqrt[3]{49}$,
 d) $\log_4 \sqrt{2}$, $\log_{27} \sqrt{3}$, $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{32}$, $\log_9 \frac{1}{27}$, $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$.

4.40. Oblicz, nie używając kalkulatora:

- a) $3^{\log_3 8}$, $(0,5)^{\log_{0,5} 5}$, $(\sqrt{2})^{\log \sqrt{2} 3}$, $e^{\ln 12}$, b) $5^{2\log_5 7}$, $10^{3\log 5}$, $6^{2\log_6 10}$, $e^{2\ln 5}$,
 c) $25^{\log_5 2}$, d) $8^{\log_2 5}$, e) $7^{2\log_7 3+1}$, f) $3^{4\log_3 5-3}$, g) $27^{2\log_3 2-1}$.

4.41. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz właściwą liczbę.

-  a) $\log_7 \blacksquare = 2$, $\log_6 \blacksquare = 3$, $\log_9 \blacksquare = -\frac{1}{2}$, b) $\log \blacksquare 27 = 3$, $\log \blacksquare 64 = 6$, $\log \blacksquare 7 = -1$.

4.42. Zapisz za pomocą logarytmu równość:

- a) $6^3 = 216$, b) $11^3 = 1331$, c) $10^{-2} = 0,01$, d) $4^{0,5} = 2$, e) $(\sqrt{2})^4 = 4$.

4.43. Oblicz $\log_{0,2} b$, gdy:

- a) $b = 0,2$, b) $b = 625$, c) $b = \sqrt[3]{0,04}$, d) $b = 5$, e) $b = \frac{1}{5}$.

4.44. Spośród liczb:

- $\log_2 4$, $\log 0,0001$, $\ln e$, $\log_6 \frac{1}{36}$, $\log_7 1$, $\log_3 \sqrt{3}$, $\log_4 \frac{1}{4}$, $\log_8 8$, $\log_9 \frac{1}{27}$

wypisz te, które są:

- a) ujemne, b) równe 1, c) dodatnie i mniejsze od 1.

4.45. Przerysuj tabelę do zeszytu i w miejsce ■ wpisz właściwą liczbę.



b	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\log_2 b$	-3	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	10

Posługując się uzupełnioną tabelą, porównaj liczby:

a) $\log_2 0,1$ i -3 ,

b) $\log_2 0,8$ i $0,5$,

c) $\log_2 100$ i 7 .

4.46. Przedstaw liczbę 2 w postaci logarytmu o podstawie:

a) 2,

b) $\frac{1}{2}$,

c) 3,

d) 4,

e) 5,

f) 10.

Logarytm iloczynu, ilorazu oraz logarytm potęgi

Pojęcie logarytmu jest związane z pojęciem potęgi, więc z praw działań na potęgach wynikają prawa działań na logarytmach.

Twierdzenie

Jeśli a , b i c są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$, to:

• $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, *logarytm iloczynu*

• $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, *logarytm ilorazu*

• $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$, gdy $m \in \mathbb{R}$. *logarytm potęgi*

Udowodnimy dwa pierwsze wzory. Dowód wzoru trzeciego pozostawiamy Uczniowi.

Dowód: Jeśli $\log_a b = x$ i $\log_a c = y$, wtedy $b = a^x$ i $c = a^y$.

Zatem:

• $b \cdot c = a^x \cdot a^y$, skąd $b \cdot c = a^{x+y}$,

$$x + y = \log_a (b \cdot c).$$

Zatem $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

c.n.d.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Z definicji logarytmu
 $a^c = b$, więc $\log_a b = c$.

• $\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y}$, skąd $\frac{b}{c} = a^{x-y}$,

$$x - y = \log_a \frac{b}{c}.$$

Zatem $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

c.n.d.

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

Z definicji logarytmu
 $a^c = b$, więc $\log_a b = c$.

Przykład 27. Oblicz:

a) $\log_2 12,8 + \log_2 2,5$, b) $\log_2 40 - \log_2 10$, c) $2\log_3 6 - \log_3 4$.

Rozwiązanie

a) $\log_2 12,8 + \log_2 2,5 = \log_2 (12,8 \cdot 2,5) = \log_2 32 = 5$, $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$

b) $\log_2 40 - \log_2 10 = \log_2 \frac{40}{10} = \log_2 4 = 2$, $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

c) $2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3 6^2 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = 2$. $m \cdot \log_a b = \log_a b^m$

Ćwiczenie 43. Oblicz:

a) $\log_2 80 + \log_2 0,1$, b) $\log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{1}{6}$, c) $\log_4 10 + \log_4 0,4$,

d) $\log_2 48 - \log_2 3$, e) $\log_5 10 - \log_5 2$, f) $\log_2 9 - \log_2 72$,

g) $2\log_{10} 5 + 2\log_{10} 2$, h) $3\log 2 + 3\log 5$, i) $2\log_2 6 - 4\log_2 \sqrt{3}$.

Przykład 28. Oblicz: a) $\log_2 (\log 100)$, b) $\log_4 (\log_2 24 + \log_2 4 - \log_2 6)$.

Rozwiązanie

a) $\log_2 (\log 100) = \log_2 2 = 1$, $\log 100 = 2$

wykonujemy w pierwszej kolejności

b) $\log_4 (\log_2 24 + \log_2 4 - \log_2 6) = \log_4 \left(\log_2 \frac{24 \cdot 4}{6} \right) = \log_4 (\log_2 16) = \log_4 4 = 1$.

wykonujemy w pierwszej kolejności

Odp.: a) 1, b) 1.

Ćwiczenie 44. Oblicz: a) $\log_3 (\log_2 512)$, b) $\log_4 \left(\log_6 11 - \log_6 \frac{11}{72} - \log_6 2 \right)$.

Ćwiczenie 45. Wskaż za pomocą nawiasów kolejność wykonywania działań i oblicz:

a) $\log_2 \log_4 16$, b) $\log_3 \log_2 512$.

Przykład 29. Wiedząc, że $\log_2 5 \approx 2,322$, oblicz przybliżoną wartość logarytmu:

a) $\log_2 50$, b) $\log_2 6,25$.

Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Rozwiązanie

a) $\log_2 50 = \log_2 (2 \cdot 25) = \log_2 2 + \log_2 5^2 = 1 + 2\log_2 5$.

Zatem $\log_2 50 \approx 1 + 2 \cdot 2,322$, czyli $\log_2 50 \approx 5,64$.

$$\text{b) } \log_2 6,25 = \log_2 \frac{25}{4} = \log_2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2 \cdot \log_2 \frac{5}{2} = 2(\log_2 5 - \log_2 2) = 2 \cdot (\log_2 5 - 1).$$

Zatem $\log_2 6,25 \approx 2 \cdot (2,322 - 1)$, czyli $\log_2 6,25 \approx 2,64$.

Odp.: a) $\log_2 50 \approx 5,64$, b) $\log_2 6,25 \approx 2,64$.

Ćwiczenie 46. Wiedząc, że $\log 2 \approx 0,3010$, oblicz $\log 4 + \frac{1}{3} \log 8 - 4 \log \frac{1}{16}$.

Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Przykład 30. Oblicz: a) $3^{\frac{\log_4 3}{\log_4 9}}$, b) $\frac{\log 36 - \log 4}{\log 9 + \log 3}$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } 3^{\frac{\log_4 3}{\log_4 9}} = 3^{\frac{\log_4 3}{2 \log_4 3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\log_4 9 = 2 \log_4 3$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\log 36 - \log 4}{\log 9 + \log 3} &= \frac{\log \frac{36}{4}}{\log(9 \cdot 3)} = \\ &= \frac{\log 9}{\log 27} = \frac{\log 3^2}{\log 3^3} = \frac{2 \cdot \log 3}{3 \cdot \log 3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log a - \log b &= \log \frac{a}{b}, \\ \log a + \log b &= \log(a \cdot b) \end{aligned}$$

Ćwiczenie 47. Oblicz:

$$\text{a) } 5^{\frac{\log_3 16}{\log_3 4}}, \quad \text{b) } \frac{\log_2 48 - \log_2 8}{\log_2 9 + \log_2 4}, \quad \text{c) } \frac{\log_{\frac{1}{2}} 21 - \log_{\frac{1}{2}} 3}{\log_{\frac{1}{2}} 49}.$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

43. a) 3, b) -2, c) 1, d) 4, e) 1, f) -3, g) 2, h) 3, i) 2. 44. a) 2, b) $\frac{1}{2}$. 45. a) 1, b) 2. 46. 5,72.
47. a) 25, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}$.

Zadania utrwalające

4.47. Oblicz:

- | | | |
|---------------------------------|---|--|
| a) $\log 4 + \log 25$, | b) $\log 50 + \log 20$, | c) $\log_6 2 + \log_6 18$, |
| d) $\log_2 96 - \log_2 6$, | e) $\log_9 108 - \log_9 4$, | f) $\log_{\frac{1}{2}} 6 - \log_{\frac{1}{2}} 3$, |
| g) $\log 6 - \log 2 - \log 3$, | h) $\log_4 480 - \log_4 5 - \log_4 3$. | |

4.48. Oblicz:

- a) $2\log_3 6 - \log_3 4$, b) $\log 8 + 3\log 5$, c) $\log_4 3 + 2\log_4 \frac{2\sqrt{3}}{3}$,
 d) $2\log_{\frac{1}{2}} 5 + 4\log_{\frac{1}{2}} 2 - 2\log_{\frac{1}{2}} 10$, e) $\log_3 3 - 3\log_3 2 + \log_3 24$,
 f) $\log_{\frac{1}{4}} 18 + \log_{\frac{1}{4}} 8 - 2\log_{\frac{1}{4}} 3$, g) $\log 15 + \log 2 + 2\log 5 - \log \frac{3}{4}$.

4.49. Wykaż, że:

D

- a) $\log_5 50 = 2 + \log_5 2$, b) $\log_3 15 = 1 + \log_3 5$,
 c) $\log_4 6 + \log_4 8 = 2 + \log_4 3$, d) $\log_{\frac{1}{2}} 5 - 1 = \log_{\frac{1}{2}} 10$.

4.50. Przedstaw w postaci jednego logarytmu wyrażenie:

- a) $1 + \log_3 4$, b) $\log_2 5 - 1$, c) $\log_{\frac{1}{2}} 3 - 2$, d) $2 - \log_4 6$.

4.51. Oblicz:

- a) $\log_3 (\log 1000)$, b) $5^{\frac{\log 5}{\log 25}}$, c) $10 \cdot 10^{\log 3 - \log 2}$,
 d) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 9)$, e) $10^{2 + \log 8}$, f) $\frac{\log_5 36 \cdot \log_5 64}{\log_5 6 \cdot \log_5 512}$,
 g) $\frac{\log_{\frac{1}{2}} 75 - 2\log_{\frac{1}{2}} 5}{\log_{\frac{1}{2}} 6 - \log_{\frac{1}{2}} 2}$, h) $\frac{\log 36 + \log 4}{\log 3 + \log 4}$, i) $\frac{\log 4}{\log 2} + \frac{\log 9}{\log 3} - \frac{\log 25}{\log 125}$.

4.52. Porównaj liczby:

- a) $\sqrt{8}$ i $2^{\log_2 \sqrt{7}}$, b) $\sqrt{5}$ i $9^{\log_3 \sqrt{2,5}}$, c) 0 i $\frac{2}{\log_{\frac{1}{2}} 4}$, d) $\sqrt{26}$ i $4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{9}}$.

4.53. Wiedząc, że $\log 3 \approx 0,4771$, oblicz przybliżoną wartość logarytmu:

- a) $\log 30$, b) $\log \frac{1}{3}$, c) $\log \frac{1}{9}$, d) $\log 27$.

4.54. Wykaż, że jeśli $\log_2 5 = a$, to:

D

- a) $\log_2 10 = a + 1$, b) $\log_2 2,5 = a - 1$, c) $\log_2 100 = 2(a + 1)$.

4.55. Oblicz x , gdy:

- a) $\log x = 2\log 5$, b) $\log x = \log 40 - \log 5$,
 c) $\log x = \log 2 + \log 3 + \log 4$, d) $\log x = 2\log 3 + \log 4$,
 e) $\log x = 3\log 5 - \frac{1}{2}\log 9$, f) $\log_2 x = \log_2 10 + \log_2 5 - \log_2 25$.

Przykłady zastosowań potęg i logarytmów

Przypomnijmy

Notacją wykładniczą nazywamy zapis liczby wymiernej dodatniej x w postaci

$x = a \cdot 10^n$, gdzie $1 \leq a < 10$ i n jest liczbą całkowitą.

Na przykład: $2^5 = 3,2 \cdot 10$, $(0,02)^5 = 3,2 \cdot 10^{-9}$.

Ćwiczenie 48. Zapisz w notacji wykładniczej liczbę: a) 2^8 , b) 3^5 , c) 7^3 , d) 2^{10} .

Korzystając z zapisu liczb dodatnich w notacji wykładniczej przy użyciu logarytmów dziesiętnych, można określać liczbę cyfr potrzebnych do zapisywania wielkich liczb.

W tym celu wystarczy znać tylko kilka wartości logarytmów dziesiętnych: $\log 2 \approx 0,301$, $\log 3 \approx 0,4771$. Pokażemy to na przykładach.

$2^6 = \underbrace{64}_{\substack{\text{2 cyfry w zapisie} \\ 2 = 1 + 1}} = 6,4 \cdot 10^1$	$\log 2^6 = 6 \cdot \log 2 = 6 \cdot 0,301$ $\log 2^6 = 1,806$ $1 + 1 = 2$
$2^{15} = \underbrace{32\,768}_{\substack{\text{5 cyfr w zapisie} \\ 5 = 4 + 1}} = 3,2768 \cdot 10^4$	$\log 2^{15} = 15 \cdot \log 2 = 15 \cdot 0,301$ $\log 2^{15} = 4,515$ $4 + 1 = 5$

Uwaga

Jeżeli $x = a \cdot 10^n$ i $a \in \langle 1; 10 \rangle$, to do zapisu liczby x potrzebnych jest $n+1$ cyfr.

Przykład 31. Określ liczbę cyfr potrzebnych do zapisu liczby:

a) 2^{100} , b) 6^{50} , c) 5^{30} .

W obliczeniu przyjmij $\log 2 = 0,301$, $\log 3 = 0,4771$.

Rozwiązanie

a) $\log 2^{100} = 100 \cdot \log 2 = 100 \cdot 0,301 = 30,1$.

Zatem w zapisie liczby 2^{100} będzie 31 cyfr.

$$n+1 = 30+1$$

b) $\log 6^{50} = 50 \cdot \log 6 = 50 \cdot (\log 2 + \log 3) = 50 \cdot (0,301 + 0,4771) = 38,905$.

Zatem w zapisie liczby 6^{50} będzie 39 cyfr.

$$n+1 = 38+1$$

$$\text{c) } \log 5^{30} = \log \left(\frac{10}{2} \right)^{30} = 30 \cdot (\log 10 - \log 2) = 30 \cdot (1 - \log 2) = 30 \cdot 0,699 = \mathbf{20,97}.$$

Zatem w zapisie liczby 5^{30} będzie 21 cyfr.

$$n + 1 = 20 + 1$$

Odp.: a) 31 cyfr, b) 39 cyfr, c) 21 cyfr.

Ćwiczenie 49. Określ liczbę cyfr potrzebnych do zapisu liczby: a) 3^{100} , b) 8^{45} , c) 25^{50} .

Logarytmy przed erą komputerów i kalkulatorów miały olbrzymie zastosowanie w obliczeniach. Przyrząd zwany suwakiem logarytmicznym był powszechnie używany do końca lat 80. XX wieku przez techników i inżynierów.

Ćwiczenie 50. Poszukaj w internecie informacji o suwaku logarytmicznym i określ, jakie działania na liczbach można było wykonywać przy jego użyciu.

Wielu naukowców wyniki swoich doświadczeń i obserwacji starało się opisać wzorem. We wzorach tych wykorzystywali logarytmy dziesiętne ($\log$) albo logarytmy naturalne ($\ln$). Oto kilka przykładów.

Prawo Webera-Fechnera
(psychologia)

$$w = k \cdot \ln \frac{B}{B_0}$$

Wzór opisuje zależność pomiędzy fizyczną miarą bodźca B a reakcją zmysłową, np. wzroku, słuchu, węchu na jego siłę.

Wzór Ciołkowskiego
(kosmonautyka)

$$v = \omega \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

Wzór opisuje zależność między prędkością v rakiety a jej masą m_0 z paliwem i masą m bez paliwa oraz prędkością gazów wylotowych.

Skala Richtera
(sejsmologia)

$$R = \log \frac{A}{A_0}$$

Wzór określa wielkość trzęsienia ziemi na podstawie amplitudy A drgań wstrząsów sejsmicznych.

Przykład 32. Zastosuj wzór $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie $A_0 = 10^{-4}$ [cm] i oblicz, ile razy mniejszą siłę ma trzęsienie ziemi w skali Richtera 3 od trzęsienia ziemi w skali Richtera 5.

Rozwiązanie

$$R = \log \frac{A}{A_0} \text{ i } A_0 = 10^{-4} \text{ [cm]}$$

$$R = \log \frac{A}{10^{-4}}, \text{ skąd } R = \log A - \log 10^{-4}$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$R = \log A + 4 \log 10.$$

$$\log 10 = 1$$

Zatem $\log A = R - 4,$

$$A = 10^{R-4}.$$

$$\log_a b = c, \text{ to } b = a^c$$

Jeżeli: $R = 3$, to $A_3 = 10^{3-4} = \frac{1}{10}$
 $R = 5$, to $A_5 = 10^{5-4} = 10$ } skąd $\frac{A_3}{A_5} = \frac{1}{10} : 10 = \frac{1}{100}.$

Odp.: 100 razy.



Ćwiczenie 51. Przerysuj tabelę do zeszytu, zastosuj wzór $R = \log \frac{A}{10^{-4}}$

R	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A [cm]									

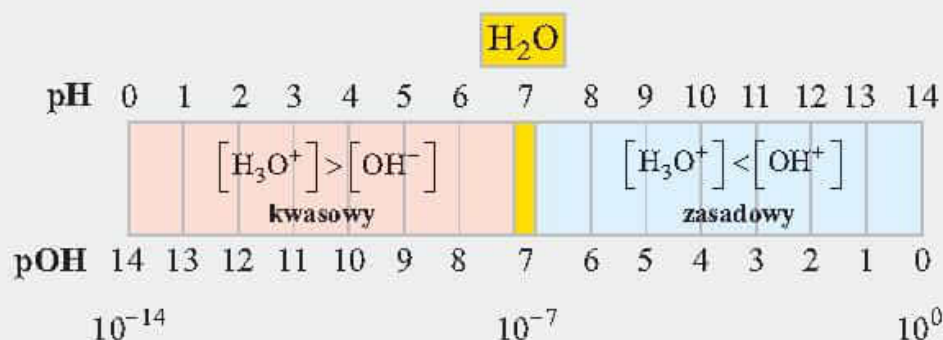
i w miejsce ■ wpisz właściwą liczbę. Z tabeli odczytaj wartość R, dla której:

a) $A = 1$ m, b) $A = 100$ m, c) $A = 1$ km.

Ćwiczenie 52. Poszukaj w internecie informacji o największych zarejestrowanych trzęsieniach ziemi: a) na całym świecie, b) w Europie, c) w Polsce.

Uwaga

Chemicy do określenia kwasowości roztworu wodnego posługują się określeniem czynnika pH: $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$, gdzie $[\text{H}^+]$ określa stężenie w roztworze jonów wodorowych.



$$\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+], \quad \text{pOH} = -\log [\text{OH}^-]$$

$$\text{Dla chemicznie czystej wody } \text{pH} = -\log 10^{-7} = 7.$$

Jeśli:

- $\text{pH} < 7$, to roztwór ma odczyn kwaśny,
- $\text{pH} > 7$, to roztwór ma odczyn zasadowy,
- $\text{pH} = 7$ (woda), to roztwór ma odczyn obojętny.

Przykład 33. Stężenie jonów wodorowych $[H^+]$ w mieszaninie jest równe $1,26 \cdot 10^{-4}$. Oblicz pH tego napoju. W obliczeniach przyjmij $\log 1,26 \approx 0,1$.

Rozwiązanie

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log[1,26 \cdot 10^{-4}] = -(\log 1,26 + \log 10^{-4}) = \log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$= -\log 1,26 - \log 10^{-4}, \text{ więc } pH \approx -0,1 + 4 = 3,9.$$

Odp.: $pH \approx 3,9$.

Ćwiczenie 53. Oblicz pH soku z pomarańczy, jeśli stężenie $[H^+]$ jest równe $1,26 \cdot 10^{-5}$. W obliczeniach przyjmij $\log 1,26 \approx 0,1$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

48. a) $2,56 \cdot 10^2$, b) $2,43 \cdot 10^2$, c) $3,43 \cdot 10^2$, d) $1,024 \cdot 10^3$. 49. a) 48 cyfr, b) 41 cyfr, c) 70 cyfr.

51.

R	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A [cm]	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

a) 6, b) 8, c) 9.

Wskazówka. Zastosuj wzór $A = 10^{R-4}$.

53. 4,9.

Zadania utrwalające

4.56. Określ liczbę cyfr potrzebnych do zapisu liczby:

- a) 12^{30} , b) 15^{15} , c) 40^{40} , d) 60^{60} .

W obliczeniu przyjmij $\log 2 = 0,301$ i $\log 3 = 0,4771$.

4.57. Oblicz amplitudę A trzęsienia ziemi o sile w skali Richtera:

- a) 4,7 (trzęsienie ziemi w Polsce – 1993 r.),
b) 9,5 (najsilniejsze trzęsienie ziemi na świecie – Chile, 1960 r.),
c) 9 (trzęsienie ziemi w Japonii – 2011 r.).

W obliczeniach zastosuj wzór $R = \log \frac{A}{10^{-4}}$.

4.58. Oblicz:

- a) pH octu, wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w occie jest równe $1,26 \cdot 10^{-3}$ (w obliczeniach przyjmij $\log 1,26 \approx 0,1$),
b) stężenie jonów wodorowych w mleku, wiedząc, że pH mleka jest równe 6,6 (w obliczeniach zastosuj wzór $pH = -\log[H_3O^+]$).

4.59. Poziom głośności dźwięku L , wyrażony w decybelach (skrót dB), oblicza się z wzoru

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}, \text{ gdzie } I \text{ to natężenie dźwięku, a } I_0 = 10^{-12} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \text{ jest natężeniem dźwięku}$$

ku odpowiadającego progowi słyszalności przez człowieka. Oblicz:

- poziom głośności startującego samolotu, dla którego $I = 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$,
- ile razy większe natężenie ma grzmot pioruna, dla którego $L = 120$ dB (decybeli), od najcichszego dźwięku, dla którego $L = 0$ dB.

4.60. Cichy szept to 30 dB (decybeli), głośna rozmowa 60 dB, a intensywny ruch uliczny to 90 dB. Oceń, ile razy większe natężenie głośności od szeptu ma:

- głośna rozmowa,
- ruchliwa ulica.

W obliczeniach zastosuj wzór $L = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$, gdzie L to pozioma głośności dźwięku, a I to jego natężenie.

4.61. Podgrzewany garnek z zupą kucharz zdejmuję z palnika i odstawia. Temperatura T garnka, wyrażona w stopniach Celsjusza, jest w procesie stygnięcia opisana

wzorem $T = 100 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{t}{10}}$, gdzie czas t mierzony jest w minutach.

- Podaj temperaturę garnka zaraz po zdjęciu z palnika.
- Oblicz temperaturę garnka po upływie 10 minut.
- Czy po 30 minutach można podnieść garnek gołymi rękoma, nie dotykając uchwyty?

Zamiana podstawy logarytmu

Twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu

Jeżeli a, b, c są dodatnimi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 1$ i $c \neq 1$, to

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$Z \text{ (założenie): } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}. \quad \Bigg| \quad T \text{ (teza): } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Dowód: Ponieważ $a^{\log_a b} = b$, więc $\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$,

$$\text{czyli } \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b \quad / : \log_c a$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

c.n.u.

Logarytmujemy obie strony równości.

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b \quad / : \log_c a$$

R

R

Ćwiczenie 54. Wykaż, że jeśli a i b są dodatnimi liczbami rzeczywistymi różnymi od 1, to $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Przykład 34. Wiedząc, że $\log_b \sqrt{a} = 0,125$, oblicz $\log_a b$.

Rozwiązanie

$$\log_b \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \log_b a, \text{ więc}$$

$$\frac{1}{2} \log_b a = \frac{1}{8} \quad / \cdot 2$$

$$\log_b a = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{4}$$

$$\log_a b = 4.$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Odp.: $\log_a b = 4$.

Ćwiczenie 55. Oblicz $\log_a b$, gdy:

a) $\log_b \left(\frac{1}{a^2} \right) = 10$, b) $\log_b \sqrt[3]{a^5} = 9$.

Przykład 35. Wykaż, że $\log_6 9 = \frac{2}{1 + \log_3 2}$.

$$\begin{aligned} \text{Rozwiązanie} \quad \log_6 9 &= \frac{\log_3 9}{\log_3 6} = \frac{2}{\log_3 (3 \cdot 2)} = \\ &= \frac{2}{\log_3 3 + \log_3 2} = \\ &= \frac{2}{1 + \log_3 2}. \end{aligned}$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_3 3 = 1$$

c.n.u.

Ćwiczenie 56. Wykaż, że:

a) $\log_4 100 = \frac{1}{\log 2}$,

b) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2$,

c) $\frac{5}{\log_2 10} = \frac{1}{2} \log 4 + 1 \frac{1}{3} \log 8$,

d) $\log 96^{0,25} - 0,25 \cdot \log \frac{2}{27} = \frac{1}{\log_6 10}$.

Przykład 36. Oblicz:

a) $\log_3 6 \cdot \log_6 9$, b) $\log_{25} 17 \cdot \log_{17} 5$.

Rozwiązanie

a) $\log_3 6 \cdot \log_6 9 = \log_3 6 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 6} = \log_3 9 = 2$,

$$\log_6 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 6}$$

b) $\log_{25} 17 \cdot \log_{17} 5 = \log_{25} 17 \cdot \frac{\log_{25} 5}{\log_{25} 17} = \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$.

$$\log_{17} 5 = \frac{\log_{25} 5}{\log_{25} 17}$$

Ćwiczenie 57. Oblicz: a) $\log_2 5 \cdot \log_5 8$, b) $\log_3 \sqrt{5} \cdot \log_{\sqrt{5}} 9$.**Odpowiedzi do ćwiczeń**

55. a) $\log_a b = -\frac{1}{5}$, b) $\log_a b = \frac{5}{27}$

56. Wskazówka. $\log_4 100 = \frac{\log 100}{\log 4}$

57. a) 3, b) 2.

Zadania utrwalające

4.62. Zamień na logarytm przy podstawie 3 logarytm:

a) $\log_{81} 2$,

b) $\log_{\frac{1}{3}} 25$,

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 5$,

d) $\log_{27} 8$.

4.63. Zapisz w postaci jednego logarytmu iloraz (iloczyn) logarytmów:

a) $\frac{\log_2 5}{\log_2 7}$,

b) $\frac{\log_3 4}{\log_3 5}$,

c) $\log_2 7 \cdot \log_7 3$,

d) $\log_4 3 \cdot \log_3 5$.

4.64. Zapisz w postaci jednego logarytmu sumę (różnicę) logarytmów:

a) $\log_2 5 + \log_4 9$,

b) $\log_{\frac{1}{2}} 7 + \log_2 11$,

c) $\log_3 2 - \log_9 4$.

4.65. Oblicz:

a) $\log \left[2 - \left(\frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} 5 \right) \right] \cdot \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}$,

b) $\log_3 7 \cdot \log_5 3 \cdot \log_7 5 - 1$.

4.66. Wykaż, że:

D

a) $\log_3 7 \cdot \log_7 3 = 1$,

b) $\log_2 5 \cdot \log_3 \sqrt[3]{3} \cdot \log_5 2 = \frac{1}{3}$,

c) $\log_9 20 = \frac{1 + \log 2}{2 \log 3}$,

d) $\log_{81} 16 = \frac{1}{\log_2 3}$,

e) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9 = \log 2$,

R f) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d e \cdot \log_e a = 1$,
gdy a, b, c, d, e są dodatnimi liczbami rzeczywistymi różnymi od 1.

4.67. Wiedząc, że $\log_3 4 = a$, wyraż w zależności od a liczbę:

- a) $\log_2 9$, b) $\log_8 27$, c) $\log_{16} \frac{1}{81}$, d) $\log_{32} 729$.

4.68. Wyraż za pomocą a :

- a) $\log_2 10$, gdy $a = \log_2 5$, b) $\log_2 2,5$, gdy $a = \log_2 5$,
c) $\log_6 16$, gdy $a = \log_3 2$, d) $\log_{49} 16$, gdy $a = \log_4 28$.

4.69. Wyraż za pomocą a i b :

- a) $\log_{27} 0,8$, gdy $a = \log_3 4$ i $b = \log_3 5$,
b) $\log_2 360$, gdy $a = \log_3 20$ i $b = \log_3 15$.

4.70. Wykaż, że liczbą całkowitą jest wartość wyrażenia:

- D** a) $\log \lg 40^\circ + \log \lg 50^\circ$,
b) $100^{\log \sin 40^\circ} + 100^{\log \sin 50^\circ}$,
c) $\log \lg 1^\circ + \log \lg 2^\circ + \log \lg 3^\circ + \dots + \log \lg 88^\circ + \log \lg 89^\circ$,
d) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Dziesiąta część liczby $2^{\frac{7}{3}} \cdot 5^{\frac{7}{3}}$ jest równa:

- A. $\sqrt[3]{10\,000\,000}$, B. $\sqrt[3]{1\,000\,000}$, C. $\sqrt[3]{100\,000}$, D. $\sqrt[3]{10\,000}$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{-96}}{-\sqrt[3]{-729}}$ jest równa:

- A. -2 , B. -1 , C. 0 , D. 1 .

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wyrażenie $\left[\sqrt[3]{5} \cdot 125^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}} \right] : 25^{-\frac{1}{2}}$ zapisane w postaci potęgi liczby 5 to:

- A. 5^{-2} , B. $5^{-\frac{1}{2}}$, C. $5^{\frac{1}{2}}$, D. 5^2 .

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\log_3 0,5 + \log_3 6$ jest równa:

- A. 6,5, B. 1, C. $\log_3 6,5$, D. 3.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba $\log_2 24$ jest równa:

- A. $1 + \log_2 6$, B. $2 + \log_2 12$, C. $3 + \log_2 3$, D. $4 \log_2 3$.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczbą ujemną jest wartość wyrażenia:

- A. $\log_5 125 - \log_5 5$, B. $2 \log_8 4 - \log_8 2$, C. $\log_9 9 - \log_{\frac{1}{2}} 2$, D. $\log_2 \frac{5}{6} + \log_2 \frac{3}{5}$.

7. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

$\sqrt[5]{-9} \cdot \sqrt[5]{-81} = 3.$	P	F
$\left(4 \cdot 3^{-1} - \sqrt{9^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.$	P	F
$\log \sqrt{10} = 0,5.$	P	F

8. Czy wartość wyrażenia $\left(\sqrt[3]{\sqrt[9]{-343}}\right)^9$ jest liczbą wymierną?

D

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$\left(\sqrt[3]{\sqrt[9]{-343}}\right)^9 = -\sqrt[3]{343} = -7.$
N	Nie,		B.	$\left(\sqrt[3]{\sqrt[9]{-343}}\right)^9 = \left(-\sqrt[12]{343}\right)^9.$

9. Wykaż, że liczbą całkowitą jest wartość wyrażenia:

D

- a) $10^2 \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{3} \log 16 + \frac{1}{6} \log 128$, b) $0,1^{\log 0,11} : 0,11^{\log 0,1}$, c) $3^{\log 2} - 2^{\log 3}$.

10. Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi różnymi od 1, to $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

D

5. Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy i kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

Przypomnijmy

Mnożąc dwa dwumiany, korzystamy najpierw z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, a następnie przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych, czyli jednomianów różniących się jedynie współczynnikiem liczbowym. Możemy również wykonać to działanie „pisemnie”, w sposób analogiczny jak pisemne mnożenie liczb.

$$\begin{aligned} (a+b) \cdot (c+d) &= \\ &= a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \end{aligned}$$

Na przykład. Wykonaj mnożenie $(5x-2) \cdot (2x-3)$.

I sposób:

$$\begin{aligned} (5x-2) \cdot (2x-3) &= \\ &= 5x \cdot 2x + 5x \cdot (-3) + \\ &\quad + (-2) \cdot 2x + (-2) \cdot (-3) = \\ &= 10x^2 - 19x + 6 \end{aligned}$$

II sposób:

$$\begin{array}{r} 5x-2 \\ \cdot 2x-3 \\ \hline -15x+6 \leftarrow -3 \cdot (5x-2) \\ + 10x^2-4x \leftarrow 2x \cdot (5x-2) \\ \hline 10x^2-19x+6 \end{array}$$

Przekształcając wyrażenia algebraiczne, często trzeba podnieść do kwadratu sumę lub różnicę dwóch wyrażeń albo też pomnożyć sumę dwóch wyrażeń przez ich różnicę.

Wzory, które ułatwiają wykonywanie wyżej wymienionych działań, nazywamy **wzorami skróconego mnożenia**.

Przykład 1. Wykaż, że $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned} \text{Rozwiązanie } (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

$$a \cdot b - b \cdot a$$

Ilustracja graficzna rozwiązania, gdy $a > 0$ i $b > 0$:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

Twierdzenie

Kwadrat sumy dwóch dowolnych wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń i ich podwojonego iloczynu.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Przykład 2. Zastosuj wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń i wykonaj potęgowanie:

a) $(x+3)^2$, b) $(4a+9c)^2$.

Rozwiązanie

a) $(\boxed{x} + \boxed{3})^2 = \boxed{x}^2 + \boxed{3}^2 + 2\boxed{x}\boxed{3}$
 $(x+3)^2 = x^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot 3 = x^2 + 6x + 9,$

b) $(\boxed{4a} + \boxed{9c})^2 = \boxed{4a}^2 + \boxed{9c}^2 + 2\boxed{4a}\boxed{9c}$
 $(4a+9c)^2 = (4a)^2 + (9c)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 9c = 16a^2 + 72ac + 81c^2.$

Ćwiczenie 1. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:

a) $(x+5)^2$, b) $(2x+7)^2$, c) $(9y+8z)^2$, d) $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2$, e) $(\sqrt{2}+1)^2$.

Przykład 3. Przedstaw w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń:

a) $x^2 + 14x + 49$, b) $4x^2 + 20x + 25$.

Rozwiązanie

a) $x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \cdot 7 \cdot x + 7^2 = (x+7)^2,$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

b) $4x^2 + 20x + 25 = 4x^2 + 2 \cdot 10x + 25 =$
 $= (2x)^2 + 2 \cdot \underbrace{2x \cdot 5}_{10x} + 5^2 = (2x+5)^2.$

Ćwiczenie 2. Przedstaw w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń:

a) $x^2 + 12x + 36$, b) $16x^2 + 8x + 1$, c) $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$,

d) $4x^2 + 12x + 9$, e) $0,01x^2 + 0,04x + 0,04$, f) $100x^2 + 400x + 400$.

Twierdzenie

Kwadrat różnicy dwóch dowolnych wyrażeń jest równy różnicy sumy kwadratów tych wyrażeń i ich podwojonego iloczynu.

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Ćwiczenie 3. Uzasadnij, że $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Przykład 4. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie $(3x-4)^2$.

Rozwiązanie

$$(\textcircled{3x} - \textcircled{4})^2 = \textcircled{3x}^2 + \textcircled{4}^2 - 2\textcircled{3x}\textcircled{4}$$

$$(3x-4)^2 = (3x)^2 + 4^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 = 9x^2 - 24x + 16.$$

Ćwiczenie 4. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie.

a) $(x-2)^2$, b) $(2x-7)^2$, c) $(4-3x)^2$, d) $\left(\frac{1}{2}y-5x\right)^2$, e) $(\sqrt{3}-1)^2$.

Przykład 5. Przedstaw w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń:

a) $x^2 - 20x + 100$, b) $36x^2 - 84x + 49$.

Rozwiązanie

a) $x^2 - 20x + 100 = x^2 - 2 \cdot 10 \cdot x + 10^2 =$
 $= (x-10)^2,$

$$a = x \text{ i } b = 10$$

b) $36x^2 - 84x + 49 = (6x)^2 - 2 \cdot 6x \cdot 7 + 7^2 =$
 $= (6x-7)^2.$

$$a = 6x \text{ i } b = 7$$

Ćwiczenie 5. Przedstaw w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń:

a) $x^2 - 6x + 9$, b) $4x^2 - 4x + 1$, c) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 16$.

Przykład 6. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i oblicz:

a) 2003^2 , b) 1999^2 .

Rozwiązanie

a) $2003^2 = (2000+3)^2 = 2000^2 + 2 \cdot 2000 \cdot 3 + 3^2 = 4\,012\,009,$

b) $1999^2 = (2000-1)^2 = 2000^2 - 2 \cdot 2000 \cdot 1 + 1^2 = 3\,996\,001.$

Ćwiczenie 6. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i oblicz:

- a) 305^2 , b) 102^2 , c) 99^2 , d) 999^2 .

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $x^2 + 10x + 25$, b) $4x^2 + 28x + 49$, c) $81y^2 + 144yz + 64z^2$, d) $\frac{1}{4}a^2 + ab + b^2$, e) $3 + 2\sqrt{2}$.
 2. a) $(x+6)^2$, b) $(4x+1)^2$, c) $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2$, d) $(2x+3)^2$, e) $(0,1x+0,2)^2$, f) $(10x+20)^2$.
 4. a) $x^2 - 4x + 4$, b) $4x^2 - 28x + 49$, c) $16 - 24x + 9x^2$, d) $\frac{1}{4}y^2 - 5xy + 25x^2$, e) $4 - 2\sqrt{3}$.
 5. a) $(x-3)^2$, b) $(2x-1)^2$, c) $\left(\frac{1}{3}x-4\right)^2$. 6. a) 93 025, b) 10 404, c) 9801, d) 998 001.

Zadania utrwalające

5.1. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:

- a) $(x + \sqrt{2})^2$, b) $(x+14)^2$, c) $(2y+6)^2$, d) $(3x^2+1)^2$,
 e) $(8x+y^3)^2$, f) $(2x^2+3y^2)^2$, g) $\left(2ab+\frac{1}{2}\right)^2$, h) $\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}y\right)^2$.

5.2. Przedstaw w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń:

- a) $x^2 + 8x + 16$, b) $4x^2 + 4x + 1$, c) $4x^2 + 12x + 9$,
 d) $9x^2 + 12x + 4$, e) $25x^2 + 40x + 16$, f) $64x^2 + 8x + \frac{1}{4}$.

5.3. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taki jednomian, aby podane wyrażenie było kwadratem sumy dwóch wyrażeń.

- a) ■ + $18x + 81$, b) $9x^2 + \blacksquare + 100$, c) $9x^2 + 12x + \blacksquare$.

5.4. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:

- a) $(2-x)^2$, b) $(\sqrt{3}-x)^2$, c) $(5z-1)^2$, d) $(1-xy)^2$,
 e) $(3x-2y)^2$, f) $(4xy-3)^2$, g) $\left(\frac{1}{4}x-3y\right)^2$, h) $(-2-x)^2$.

5.5. Uzasadnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych przy dzieleniu D przez 8 daje resztę 2.

5.6. Przedstaw w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń:

- a) $x^2 - 2x + 1$, b) $x^2 - x + \frac{1}{4}$, c) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$,
 d) $1,21x^2 - 2,2x + 1$, e) $9x^2 - 6x + 1$, f) $2x^2 - 4\sqrt{2}x + 4$.

5.7. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taki jednomian, aby podane wyrażenie było kwadratem różnicy dwóch wyrażeń.

a) ■ $-4x + \frac{1}{4}$,

b) $81x^2 - \blacksquare + \frac{1}{9}$,

c) $\frac{1}{25}x^2 - 4x + \blacksquare$.

5.8. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i oblicz:

a) $(3 + \sqrt{2})^2$, b) $(\sqrt{3} - 1)^2$, c) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$, d) $(1 - 3\sqrt{5})^2$, e) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$.

5.9. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i oblicz:

a) 39^2 ,

b) 103^2 ,

c) 202^2 ,

d) 499^2 .

5.10. Uzasadnij, że liczbą naturalną jest wartość wyrażenia:

D a) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 + 6\sqrt{2}$,

b) $(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{5}$,

c) $(\sqrt{6} - 5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{15} - 2\sqrt{5})^2$,

d) $(5\sqrt{3} - \sqrt{6})^2 - (\sqrt{10} - 3\sqrt{5})^2$.

5.11. Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą naturalną, to liczba $(10^n + 2)^2$ jest podzielna przez 9.

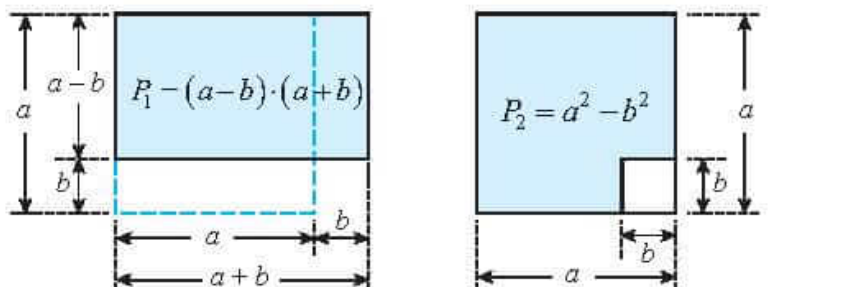
D

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń

Przykład 7. Wykaż, że $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Rozwiązanie $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) =$
 $= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$

Ilustracja graficzna rozwiązania, gdy $a > 0$, $b > 0$ i $a > b$:



P_1 i P_2 – pola obszarów zaznaczonych kolorem niebieskim.

Zauważamy, że $P_1 = P_2$ czyli $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Twierdzenie

Iloczyn sumy dwóch dowolnych wyrażeń przez ich różnicę jest równy różnicy kwadratów tych wyrażeń.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Przykład 8. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj działania:

a) $(5x-3y)(5x+3y)$, b) $53 \cdot 47$.

Rozwiązanie

a) $(\boxed{5x} - \boxed{3y})(\boxed{5x} + \boxed{3y}) = \boxed{5x}^2 - \boxed{3y}^2$

$$(5x-3y)(5x+3y) = (5x)^2 - (3y)^2 = 25x^2 - 9y^2,$$

b) $53 \cdot 47 = (\boxed{50} + \boxed{3})(\boxed{50} - \boxed{3})$

$$53 \cdot 47 = (50+3)(50-3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491.$$

Ćwiczenie 7. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj działania:

a) $(x+4)(x-4)$, b) $(5-2y)(5+2y)$, c) $\left(2m+\frac{1}{5}n\right)\left(2m-\frac{1}{5}n\right)$, d) $31 \cdot 29$.

Ćwiczenie 8. Oblicz i określ, czy otrzymany wynik jest liczbą wymierną.

a) $(2-\sqrt{5})^2$, b) $(1+\sqrt{7})^2$, c) $(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})$, d) $(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{5})$.

Przykład 9. Przedstaw w postaci iloczynu dwóch wyrażeń różnicę kwadratów:

a) $(x+4)^2 - 25$, b) $(x+1)^2 - 3$, c) $(x-2)^2 - (x+1)^2$.

Rozwiązanie

a) $(x+4)^2 - 25 = (x+4)^2 - 5^2 =$
 $= (x+4+5)(x+4-5) =$
 $= (x+9)(x-1),$

$$a = x+4 \text{ i } b = 5$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

b) $(x+1)^2 - 3 = (x+1)^2 - (\sqrt{3})^2 =$
 $= (x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3}),$

$$3 = (\sqrt{3})^2$$

c) $(x-2)^2 - (x+1)^2 = [x-2-(x+1)] \cdot [x-2+(x+1)] =$
 $= -3(2x-1).$

Ćwiczenie 9. Przedstaw w postaci iloczynu dwóch wyrażeń różnicę kwadratów:

a) $(x-2)^2 - 16$, b) $(x+7)^2 - 81$, c) $(x+3)^2 - 5$,
d) $x^4 - 1$, e) $9x^4 - 49$, f) $(x-1)^2 - (x+2)^2$.

Przykład 10. Przedstaw $x^2 - 3x$ w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \\ &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}_0 = \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Korzystamy z równości
 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Ćwiczenie 10. Przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń wyrażenie:

- a) $x^2 - 4x$, b) $x^2 + 5x$, c) $x^2 - 6x + 5$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

7. a) $x^2 - 16$, b) $25 - y^2$, c) $4m^2 - \frac{1}{25}n^2$, d) 899 8. a) $9 - 4\sqrt{5}$, nie, b) $8 + 2\sqrt{7}$, nie, c) -2, tak, d) 13, tak
 9. a) $(x+2)(x-6)$, b) $(x+16)(x-2)$, c) $(x+3+\sqrt{5})(x+3-\sqrt{5})$, d) $(x^2-1)(x^2+1)$, e) $(3x^2-7)(3x^2+7)$,
 f) $-3(2x+1)$ 10. a) $(x-2)^2 - 2^2$, b) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$, c) $(x-3)^2 - 2^2$.

Zadania utrwalające

5.12. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj działanie:

- a) $\left(a - \frac{1}{4}\right)\left(a + \frac{1}{4}\right)$, b) $(x+2y)(x-2y)$, c) $(2a-5)(2a+5)$,
 d) $(6a-2b)(6a+2b)$, e) $(4-3x)(4+3x)$, f) $(1-x^2)(1+x^2)$,
 g) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, h) $(2x^2-3y)(2x^2+3y)$, i) $(3x^3-4y^2)(3x^3+4y^2)$.

5.13. Zapisz w postaci iloczynu wyrażenie:

- a) $9a^2 - 100$, b) $144 - y^2$, c) $1 - 9x^2$,
 d) $49x^2 - 9y^2$, e) $64x^2 - 25y^2$, f) $169x^2 - 225$,
 g) $x^4 - 16$, h) $x^4 - y^2$, i) $x^4 - 4y^2$, j) $x^4 - y^4$.

5.14. Oblicz i ustal, czy otrzymany wynik jest liczbą wymierną.

- a) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, b) $(2\sqrt{6}-3)(2\sqrt{6}+3)$, c) $(3\sqrt{2}-4\sqrt{3})(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$.

5.15. Wykonaj wskazane działania i zapisz w najprostszej postaci wyrażenie:

a) $(x+3)(x-3)+(x+3)^2$,

b) $(x-1)^2-x(x+1)$,

c) $(x-5)^2-(x-5)(x+5)$,

d) $2(3x-1)^2+3(1-2x)^2$,

e) $4(x-y)(x+y)-3(x-y)^2$,

f) $(2x-y)^2-(2x+y)^2$.

5.16. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość liczbowa dla podanych wartości zmiennych zapisanych obok.

a) $(x+2)^2-3(5-x)^2$, $x=\sqrt{2}$,

b) $4(x-1)(x+1)-(2x-1)(2x+1)$, $x=\sqrt[3]{3}$,

c) $(x-y)^2-(x+y)^2$, $x=0,5$, $y=-0,2$,

d) $(3x-5y)(3x+5y)$, $x=\frac{1}{9}$, $y=-\frac{1}{5}$.

5.17. Zastosuj wzór na różnicę kwadratów i oblicz:

a) $199 \cdot 201$,

b) $7,9 \cdot 8,1$,

c) $3,02 \cdot 2,98$,

d) $1,2 \cdot 10^6 \cdot 0,8 \cdot 10^7$.

5.18. Uzasadnij, że liczbą wymierną jest wartość wyrażenia:

D

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}}$,

b) $\sqrt{10-5\sqrt{3}} \cdot \sqrt{10+5\sqrt{3}}$,

c) $\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{8}}$,

d) $\sqrt{6+3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

5.19. Przedstaw w postaci iloczynu dwóch wyrażeń różnicę kwadratów:

a) $(x+4)^2-100$,

b) $(2x+1)^2-9$,

c) $(4x-1)^2-2$,

d) $(x+2)^2-(2x-1)^2$,

e) $4x^2-(x-1)^2$,

f) $16x^2-(3-x)^2$.

5.20. Przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń:

a) x^2-8x ,

b) x^2+10x ,

c) x^2-x ,

d) x^2+3x ,

e) $x^2+\sqrt{2}x$,

f) $x^2-\sqrt{3}x$.

5.21. Uzasadnij, że wartość wyrażenia:

D

a) 999^4-1 jest liczbą podzielną przez 1000,

b) $5^{12}-1$ jest liczbą podzielną przez 31,

c) $a^2+b^2=0$, gdy $a=0$ i $b=0$.

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia

Wzory skróconego mnożenia stosujemy między innymi do:

- usuwania niewymierności w mianownikach ułamków – czynimy tak dlatego, że dzieląc przez liczbę wymierną, otrzymujemy dokładniejszy wynik, niż gdy dzielimy przez liczbę niewymierną,
- rozkładania wyrażeń algebraicznych na czynniki – jest to pomocne przy rozwiązywaniu równań i nierówności różnego typu,
- zapisywania wyrażeń w prostszych albo dla nas wygodniejszych postaciach,
- porównywania liczb niewymiernych.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 11. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia $\frac{3}{\sqrt{2}+5}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{2}+5} &= \frac{3}{\sqrt{2}+5} \cdot \frac{\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-5} = \\ &= \frac{3 \cdot (\sqrt{2}-5)}{(\sqrt{2})^2 - 5^2} = \frac{3\sqrt{2}-15}{2-25} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23}.\end{aligned}$$

Mnożymy ułamek przez liczbę $1 - \frac{\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-5}$, by zastosować w mianowniku wzór $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Ćwiczenie 11. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$, b) $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$, c) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$, d) $\frac{7}{2\sqrt{5}+1}$, e) $\frac{1+\sqrt{7}}{2-\sqrt{7}}$.

Przykład 12. Uzasadnij, że jeśli $a > 0$, $b > 0$ i $a - b = 1$, to $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Rozwiązanie

Z (założenie): $a > 0$, $b > 0$, $a - b = 1$, | T (teza): $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Dowód:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}. \quad \text{c.n.u.}\end{aligned}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \text{ i } (\sqrt{b})^2 = b$$

z założenia $a - b = 1$

Ćwiczenie 12. Uzasadnij, że jeżeli $a > 0$, $b > 0$ i $a - b = 1$, to $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

 **Ćwiczenie 13.** *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Nieprawdziwa jest równość:

A. $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$,

B. $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$,

C. $\sqrt{7} + 6 = \frac{1}{\sqrt{7} - 6}$,

D. $\sqrt{8} - \sqrt{7} = \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}}$.

Uwaga Jeżeli zapiszemy poznane wzory skróconego mnożenia w postaci:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2, \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

to mówimy, że stosujemy je do przekształcania sumy algebraicznej na iloczyn odpowiednich wyrażeń.

Przekształcenia te nazywamy **rozkładaniem wyrażeń algebraicznych na czynniki** z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia.

Ćwiczenie 14. Zastosuj wzory skróconego mnożenia, rozłóż na czynniki wyrażenie:

a) $9x^2 - 6x + 1$, b) $25m^2 - 0,36$, c) $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$, d) $(4x - 3)^2 - (2 - x)^2$.

Przykład 13. Wykaż, że $\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = ab$.

Rozwiązanie $\underbrace{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}}_L = \underbrace{ab}_P$.

L – lewa strona równości
 P – prawa strona równości

Aby wykazać równość, należy przekształcić jedną z jej stron (w naszym przykładzie stronę lewą L) tak, aby otrzymać drugą stronę:

$$L = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} =$$

$$= \frac{[(a+b) - (a-b)] \cdot [(a+b) + (a-b)]}{4} =$$

$$= \frac{2b \cdot 2a}{4} = \frac{4ab}{4} = ab = P.$$

Stosujemy wzory skróconego mnożenia.

Zatem $L = P$.

c.n.w.

Ćwiczenie 15. Wykaż, że $\frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4}$.

Przykład 14. Porównaj liczby a i b , gdy $a = \frac{(\sqrt{3}+5)^2}{2}$ i $b = \frac{5\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie Przedstawiamy liczby a i b w najprostszej postaci:

$$a = \frac{(\sqrt{3}+5)^2}{2} = \frac{3+10\sqrt{3}+25}{2} = \frac{28+10\sqrt{3}}{2} = \frac{28}{2} + \frac{10\sqrt{3}}{2} = 14 + 5\sqrt{3}$$

$$b = \frac{5\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}+15}{4-3} = 10\sqrt{3}+15.$$

Badamy różnicę $a-b$:

$$a-b = 14 + 5\sqrt{3} - (10\sqrt{3} + 15) = -5\sqrt{3} - 1.$$

$-5\sqrt{3} - 1 < 0$, więc $a-b < 0$. Zatem $a < b$.

Uwaga Porównując dwie liczby rzeczywiste a i b między sobą, możemy badać:

- różnicę $a-b$ i porównywać ją z liczbą 0, wtedy jeśli:
 - $a-b > 0$, to $a > b$, ■ $a-b < 0$, to $a < b$,
- iloraz $\frac{a}{b}$, gdy $b > 0$, i porównywać go z liczbą 1, wtedy jeśli:
 - $\frac{a}{b} > 1$, to $a > b$, ■ $\frac{a}{b} < 1$, to $a < b$.

Ćwiczenie 16. Porównaj liczby a i b , gdy $a = \frac{(\sqrt{7}-1)^2}{7}$ i $b = \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$.

Przykład 15. Oblicz $(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2 = & (a-b)^2 - a^2 - 2ab + b^2 \\ & = (\sqrt{3+\sqrt{5}})^2 - 2\sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} + (\sqrt{3-\sqrt{5}})^2 = & \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - \sqrt{a \cdot b} \\ & = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + 3 - \sqrt{5} = \\ & = 6 - 2\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 4 = 2. & (a+b)(a-b) - a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 17. Oblicz $(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})^2$.

Przykład 16. Przedstaw w postaci kwadratu sumy albo kwadratu różnicy wyrażenie:

a) $3 + 2\sqrt{2}$, b) $29 - 12\sqrt{5}$.

Rozwiązanie

a) Stosujemy wzór $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

$$\begin{array}{ccc} & 3 + 2 \cdot \sqrt{2} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ a^2 + b^2 & & 2 \cdot ab \end{array}$$

$$ab = \sqrt{2} \text{ i } \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 1. \text{ Zatem } 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2.$$

$$\begin{array}{l} \text{Jeśli } a = 1 \text{ i } b = \sqrt{2}, \\ \text{to } a^2 + b^2 = 3. \end{array}$$

b) Stosujemy wzór $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

$$\begin{array}{ccc} 29 - 12\sqrt{5} = 29 - 2 \cdot 6\sqrt{5} & & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ a^2 + b^2 & & 2 \cdot ab \end{array}$$

czyli $ab = 6\sqrt{5}$ i $6\sqrt{5} = \begin{cases} 6 \cdot \sqrt{5} \\ \text{lub} \\ 2 \cdot 3\sqrt{5} \\ \text{lub} \\ 3 \cdot 2\sqrt{5} \end{cases}$.

$$\begin{array}{l} \text{Jeśli:} \\ a = 6 \text{ i } b = \sqrt{5}, \text{ to } a^2 + b^2 \neq 29, \\ a = 2 \text{ i } b = 3\sqrt{5}, \text{ to } a^2 + b^2 \neq 29, \\ a = 3 \text{ i } b = 2\sqrt{5}, \text{ to } a^2 + b^2 = 29. \end{array}$$

$$\text{Zatem } 29 - 12\sqrt{5} = (3 - 2\sqrt{5})^2.$$

Ćwiczenie 18. Przedstaw w postaci kwadratu sumy albo kwadratu różnicy wyrażenie:

a) $6 + 4\sqrt{2}$, b) $124 - 70\sqrt{3}$.

Umiejętność przedstawiania liczb niewymiernych w postaci kwadratu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń pozwala obliczać między innymi pierwiastki kwadratowe z liczb niewymiernych. Korzystamy wtedy z własności $\sqrt{a^2} = |a|$. Pokażemy to na przykładzie.

Przypomnijmy

Dla dowolnej liczby rzeczywistej a :

- $|a| = a$, gdy $a \geq 0$,
- $|a| = -a$, gdy $a < 0$,
- $\sqrt{a^2} = |a|$.

Przykład 17. Oblicz:

$$\text{a) } \sqrt{(3-\sqrt{8})^2} + \sqrt{(2-2\sqrt{2})^2}, \quad \text{b) } \sqrt{9-4\sqrt{5}}.$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{(3-\sqrt{8})^2} + \sqrt{(2-2\sqrt{2})^2} &= \overset{\oplus}{|3-2\sqrt{2}|} + \overset{\ominus}{|2-2\sqrt{2}|} = & \begin{array}{l} 3 \quad \sqrt{8} > 0 \\ 2 \quad 2\sqrt{2} < 0 \end{array} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = 1. \end{aligned}$$

b) Przedstawiamy liczbę $9-4\sqrt{5}$ w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń:

$$\begin{aligned} 9-4\sqrt{5} &= 9-2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = \\ &= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = (2-\sqrt{5})^2, \end{aligned}$$

Jeżeli $a=2$ i $b=\sqrt{5}$,
to $a^2+b^2=9$.

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \overset{\ominus}{|2-\sqrt{5}|} = \sqrt{5}-2. \quad \begin{array}{l} 2 \quad \sqrt{5} < 0 \end{array}$$

Ćwiczenie 19. Oblicz:

$$\text{a) } \sqrt{(10-3\sqrt{12})^2} - \sqrt{(2\sqrt{27}-9)^2}, \quad \text{b) } \sqrt{7-2\sqrt{6}}.$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

$$11. \text{ a) } \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ b) } \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{ c) } 3(\sqrt{5}+2), \text{ d) } \frac{14\sqrt{5}-7}{19}, \text{ e) } -3-\sqrt{7}. \quad 13. \text{ C.}$$

$$14. \text{ a) } (3x-1)^2, \text{ b) } (5m-0,6)(5m+0,6), \text{ c) } \left(\frac{1}{2}x+2\right)^2, \text{ d) } (5x-5)(3x-1). \quad 16. \text{ a} > \text{b}. \quad 17. \text{ 6.}$$

$$18. \text{ a) } (\sqrt{2}+2)^2, \text{ b) } (5\sqrt{3}-7)^2 \text{ lub } (7-5\sqrt{3})^2. \quad 19. \text{ a) } -1, \text{ b) } \sqrt{6}-1.$$

Zadania utrwalające**5.22.** Rozłóż na czynniki wyrażenie:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a^2+4ab+4b^2, & \text{b) } 9a^2-12ay+4y^2, & \text{c) } 9x^2-b^2, \\ \text{d) } 16b^2-9, & \text{e) } 4x^2-20x+25, & \text{f) } 4n^2+12n+9-4k^2, \\ \text{g) } (5x-2)^2-36, & \text{h) } (6x+1)^2-(6x-5)^2, & \text{i) } x^4-81, \\ \text{j) } 1-x^2-2xy-y^2, & \text{k) } 64z^2-a^2+2ab-b^2, & \text{l) } 3x^2-2y^2-2\sqrt{2}y-1. \end{array}$$

5.23. Usuń niewymierność z mianownika:

$$\text{a) } \frac{-2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}, \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt{3}+2}, \quad \text{c) } \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}, \quad \text{d) } \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

5.24. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*



Różnica kwadratów liczb $\sqrt{2}+1$ i $2-\sqrt{2}$ jest równa:

- A. -3 , B. $3(2\sqrt{2}-1)$.

Kwadrat różnicy liczb $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ jest równy:

- C. $11+4\sqrt{6}$, D. 3 .

5.25. Wykaż, że:

D

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$,

b) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$.

5.26. Wiedząc, że $m=3+\sqrt{5}$ i $n=3-\sqrt{5}$, oblicz:

- a) m^2 , b) n^2 , c) m^2-n^2 , d) $(m-n)^2$, e) $(m+n)^2$.

5.27. Przedstaw w postaci kwadratu sumy albo kwadratu różnicy wyrażenie:

- a) $7+2\sqrt{6}$, b) $4-2\sqrt{3}$, c) $21-8\sqrt{5}$, d) $5+2\sqrt{6}$.

5.28. Wykaż, że:

D

a) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 2$,

b) $\sqrt{8+2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1$.

5.29. Porównaj liczby a i b , gdy:

a) $a=\sqrt{6}+2$ i $b=2-\sqrt{3}$,

b) $a=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ i $b=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$,

c) $a=5\sqrt{2}+2$ i $b=\frac{5}{\sqrt{2}-1}$,

d) $a=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ i $b=\frac{2}{\sqrt{5}-1}-\frac{2}{\sqrt{5}+1}$.

5.30. Oblicz:

a) $(\sqrt{5-\sqrt{7}} + \sqrt{5+\sqrt{7}})^2$,

b) $(\sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{57+40\sqrt{2}})^2$,

c) $\frac{2^2-1}{2+1} + \frac{3^2-2^2}{3+2} + \frac{4^2-3^2}{4+3} + \frac{5^2-4^2}{5+4} + \dots + \frac{100^2-99^2}{100+99}$.

5.31. Wykaż, że liczba $\frac{(9-2\sqrt{14})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2} + \frac{(9+2\sqrt{14})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2}$ jest wymierna.

D

5.32. Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

D

5.33. Uzasadnij, że jeśli a i b są dowolnymi liczbami, to:

D a) $a^2 + 1 \geq 2a$, b) $4a^2 + 1 \geq 4a$, c) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, d) $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$.

5.34. Wykaż, że dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej x liczba postaci $(x-1)^2 + (x+3)^2$

D jest podzielna przez 8.

5.35. Wykaż, że $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \right)^2 = 2$.

D

Zestaw powtórkowy

1. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe lub F – jeśli jest fałszywe. Wpisz odpowiedź do zeszytu i ją uzasadnij.*

Wartość wyrażenia $(3\sqrt{2} - 4\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$ jest liczbą niewymierną.	P	F
Równość $(5 - 2\sqrt{6})^2 = x + y\sqrt{6}$ będzie prawdziwa, gdy w miejsce x podstawimy liczbę 49, a w miejsce y liczbę -20.	P	F

2. Wykaż, że wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{8}$ jest liczbą całkowitą.

D

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeśli $x^2 + y^2 = 65$ i $xy = 28$, to wartość wyrażenia $(x+y)^2$ jest równa:

A. 158, B. 121, C. 93, D. 37.

4. Wykaż, że:

- D** a) jeśli liczba całkowita przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4,
b) kwadrat liczby naturalnej niepodzielnej przez 3 powiększony o 2 dzieli się przez 3.

5. Wykaż, że $\sqrt{6-\sqrt{11}} \cdot (6+\sqrt{11}) \cdot (\sqrt{22}-\sqrt{2}) = 50$.

D

6. Wykaż, że jeśli $x \neq 0$ i $x + \frac{1}{x} = 5$, to $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$.

D

6. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą

Przypomnijmy

Dwa wyrażenia algebraiczne, z których przynajmniej jedno zawiera zmienną, połączone znakiem równości nazywamy **równaniem**.

Zmienną występującą w równaniu nazywamy **niewiadomą**.

- Tradycyjnie (najczęściej) niewiadomą w równaniu oznaczamy literą x .
- **Liczba spełnia równanie**, jeśli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymujemy równość prawdziwą.

Na przykład: $0 = 0$, $2 = 2$, $-1 = -1$, ... itp.

- Liczbę, która spełnia równanie, nazywamy **rozwiązaniem** równania lub **pierwiastkiem** równania.

$$2x + 1 = x + 2$$
$$\swarrow \quad \searrow$$
$$2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2$$
$$\underbrace{\quad\quad}_3 \quad \underbrace{\quad\quad}_3$$

Przykład 1. Sprawdź, która z liczb: -2 , 0 spełnia równanie:

a) $|x - 2| = 4$, b) $x(x + 2)(x - 6) = 0$.

Rozwiązanie

a) $\underbrace{|x - 2|}_L = \underbrace{4}_P$ b) $\underbrace{x(x + 2)(x - 6)}_L = \underbrace{0}_P$

- Sprawdzamy, czy liczba -2 spełnia równanie.

$$L = |-2 - 2| = |-4| = 4$$

$$L = P$$

$$L = -2 \cdot (-2 + 2) \cdot (-2 - 6) = -2 \cdot 0 \cdot (-8) = 0$$

$$L = P$$

- Sprawdzamy, czy liczba 0 spełnia równanie.

$$L = |0 - 2| = |-2| = 2$$

$$L \neq P$$

$$L = 0 \cdot (0 + 2) \cdot (0 - 6) = 0$$

$$L = P$$

Odp.: a) -2 , b) -2 i 0 .

Ćwiczenie 1. Sprawdź, które z liczb: -2 , 0 , 2 , 4 spełniają równanie:

a) $2(x - 2) = 4$, b) $|x - 1| = 3$, c) $\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{3}$, d) $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$, e) $x^2 = 1$.

Ćwiczenie 2. Ułóż równanie, którego pierwiastkiem jest liczba:

a) 1 , b) 3 , c) -2 , d) 0 .

Nie każdą liczbę można podstawić w równaniu za zmienną. Wszystko zależy od tego, czy po podstawieniu liczby za zmienną można wykonać działania na liczbach.

Definicja

Zbiór wszystkich liczb, które można podstawić w równaniu w miejsce niewiadomej, nazywamy **dziędziną** tego równania.

Najczęściej dziedzinę oznaczamy literą D .

Działania nieokreślone (niewykonalne), które poznaliśmy, to:

1° **dzielenie przez liczbę 0**, na przykład w równaniu:

- $\frac{1}{x} = 4$ nie możemy za zmienną x podstawić liczby 0, co zapisujemy $x \neq 0$, wtedy $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $\frac{x}{x-1} = 3$ za zmienną x nie możemy podstawić liczby 1, co zapisujemy $x \neq 1$, wtedy $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

2° **zerowa potęga liczby 0**, na przykład w równaniu:

- $x^0 = 1$ za zmienną x nie możemy podstawić liczby 0, co zapisujemy $x \neq 0$, wtedy $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $(a+1)^2 = (a+1)^0$ za zmienną a nie możemy podstawić liczby -1 , co zapisujemy $a \neq -1$, wtedy $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

3° **pierwiastki parzystego stopnia z liczb ujemnych**, na przykład w równaniu:

- $\sqrt{x+2} = 16$ za zmienną x możemy podstawić tylko liczby spełniające warunek $x+2 \geq 0$, wtedy $D = \langle -2; +\infty \rangle$,
- $\frac{4x}{\sqrt{x-1}} = 3$ za zmienną x możemy podstawić tylko liczby spełniające warunek $x-1 > 0$, wtedy $D = (1; +\infty)$,
- $\sqrt[4]{3-x} = 2$ za zmienną x możemy podstawić tylko liczby spełniające warunek $3-x \geq 0$, wtedy $D = (-\infty; 3]$.

Ćwiczenie 3. Spośród liczb: $-1, 0, 1$ wybierz te, które należą do dziedziny równania:

a) $x(x-1) = 2$, b) $\frac{5}{x(x-1)} = 3$, c) $\frac{3}{x^2-1} = 1$, d) $\sqrt{1-2x} = 2$.

Uwaga

- Równanie, które spełniają wszystkie liczby należące do jego dziedziny, nazywamy **równaniem tożsamościowym** (tożsamością) lub **równaniem nieoznaczonym**.
- Równanie, które spełnia jedna lub więcej liczb należących do jego dziedziny, nazywamy **równaniem oznaczonym**.
- Równanie, którego nie spełnia żadna liczba należąca do jego dziedziny, nazywamy **równaniem sprzecznym**.

Równanie liniowe z jedną niewiadomą**Definicja**

Równanie z niewiadomą x postaci $ax + b = 0$, gdzie $b \in \mathbb{R}$, nazywamy:

- **równaniem stopnia pierwszego z jedną niewiadomą**, gdy $a \neq 0$,
- **równaniem liniowym**, gdy $a \in \mathbb{R}$.

a, b – współczynniki liczbowe równania.

Dziedziną równania liniowego jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie liniowe i zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $4(x-1)+5=3+2x$, b) $2x-(4-x)=2\left(\frac{3}{2}x-2\right)$, c) $2(3x+7)=5+6x$.

Rozwiązanie

a) $4(x-1)+5=3+2x$
 $4x-4+5=3+2x$
 $4x-2x=3+4-5$
 $2x=2 \quad |:2$
 $x=1$

Odp.:



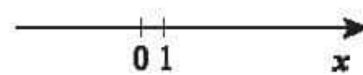
Równanie ma jedno rozwiązanie $x_0=1$ (równanie oznaczone).

b) $2x-(4-x)=2\left(\frac{3}{2}x-2\right)$
 $2x-4+x=3x-4$
 $3x-3x=-4+4$
 $0 \cdot x=0$
równość prawdziwa dla każdej liczby x , czyli $x \in \mathbb{R}$



Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista (równanie tożsamościowe).

c) $2(3x+7)=5+6x$
 $6x+14=5+6x$
 $6x-6x=5-14$
 $0 \cdot x=-9$
równość fałszywa



Równanie nie ma rozwiązania (równanie spreczne).

Ćwiczenie 4. Zbadaj, czy równanie jest równaniem oznaczonym, tożsamościowym czy sprzecznym. Jeśli równanie jest równaniem oznaczonym, to podaj jego pierwiastek.

- a) $4(x+1)-1=6(2x-3)-3(x-2)$, b) $(x-6)+4x=2(x-3)+3x$,
 c) $2(2x-3)+3=4(x-2)$, d) $2+(x-4)(x+4)=(x-1)^2$.

Uwaga

Równania, które mają takie same dziedziny i takie same zbiory rozwiązań, nazywamy **równaniami równoważnymi**.

Ćwiczenie 5. Sprawdź, czy równania **1** i **2** są równoważne, gdy:

- a) **1** $\frac{1}{x}=2$ i **2** $x-\frac{1}{2}=0$, b) **1** $(x+2)^2=x^2$ i **2** $1-\frac{2x-3}{2}=\frac{7}{2}$.

Ćwiczenie 6. Podaj przykładowe wartości a i b , dla których równanie $ax+b=0$ będzie równoważne równaniu $5x+3=0$, gdy $a \neq 5$ i $b \neq 3$.

W szkole podstawowej rozwiązywaliście równania metodą równań równoważnych.

Przypomnijmy

Rozwiązując równanie, możemy:

- do obu stron równania dodać to samo wyrażenie lub od obu stron równania odjąć to samo wyrażenie

$$4x-12=20 \longrightarrow 4x-12+12=20+12 \longrightarrow 4x=32,$$

$$3x=10-2x \longrightarrow 3x+2x=10-2x+2x \longrightarrow 5x=10,$$

$$6x=4x+12 \longrightarrow 6x-4x=4x+12-4x \longrightarrow 2x=12,$$

- obie strony równania pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera

$$\frac{x+5}{4}=3 \longrightarrow 4 \cdot \frac{x+5}{4}=4 \cdot 3 \longrightarrow x+5=12,$$

$$\sqrt{5} \cdot x=45 \longrightarrow \frac{\sqrt{5} \cdot x}{\sqrt{5}}=\frac{45}{\sqrt{5}} \longrightarrow x=\frac{45}{\sqrt{5}} \longrightarrow x=\frac{45}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \longrightarrow x=9\sqrt{5},$$

- przekształcać jedną lub obydwie strony równania, stosując znane prawa działań, np. uwalniać się od nawiasów i redukować wyrazy podobne

$$3(x-2)-3=0 \longrightarrow 3x-6-3=0 \longrightarrow 3x-9=0.$$

Uwaga

Rozwiązując równania metodą równań równoważnych, pamiętajmy, by na równaniu, w celu otrzymania równania równoważnego, wykonywać tylko takie działania, które nie zmieniają jego dziedziny i zbioru rozwiązań.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\frac{27-11c}{7} = \frac{5c}{14}$.

Rozwiązanie $\frac{27-11c}{7} = \frac{5c}{14} \quad / \cdot 14$

$$\frac{2 \cdot \cancel{14} \cdot (27-11c)}{\cancel{1} \cdot \cancel{7}} = \frac{\cancel{14} \cdot 5c}{\cancel{14} \cdot 1}$$

$$54 - 22c = 5c$$

$$54 = 5c + 22c$$

$$2 = c, \text{ czyli } c = 2.$$

Mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik.

Skracamy ułamki.

Przenosimy $-22c$ na prawą stronę ze zmienionym znakiem

(do obu stron równania dodajemy $22c$).

Ćwiczenie 7. Rozwiąż równanie i sprawdź, czy otrzymana liczba spełnia to równanie:

a) $\frac{x+2}{2} - \frac{x}{3} = 1$, b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - x = 1$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie:

a) $(x+2)^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, b) $\sqrt{3}x + 2 = x + \sqrt{3}$.

Rozwiązanie

a) $(x+2)^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$$x^2 + 4x + 4 - 3 = x^2 - 3$$

$$4x = -4$$

$$x = -1.$$

b) $\sqrt{3}x + 2 = x + \sqrt{3}$

$$\sqrt{3}x - x = \sqrt{3} - 2$$

$$x(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} - 2 \quad / : (\sqrt{3} - 1)$$

$$x = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Odp.: a) $x_0 = -1$, b) $x_0 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

Ćwiczenie 8. Rozwiąż równanie:

a) $2(x-1)^2 - (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = x^2 + 4$, b) $\sqrt{5}x - 3 = 2x - 2\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 9. Spośród równań, oznaczonych cyframi od **1** do **4**, wybierz pary równań równoważnych.

1 $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1$, **2** $4x - 5 = 1 + 3x$, **3** $-x + 3 = 2(x+1) + 1$, **4** $\frac{x}{4} + 1 = 1$.

Za pomocą równań możemy opisać wiele różnorodnych problemów i je rozwiązać. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 5. Rowerzysta jechał z Torunia do Inowrocławia ze średnią prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a z powrotem (z Inowrocławia do Torunia) z prędkością $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jazda w obie strony zajęła mu 5,4 godziny. Oblicz odległość pomiędzy Toruniem a Inowrocławiem oraz czasy przejazdu w jedną i w drugą stronę.

Rozwiązanie

I sposób

Trasa	Droga (s)	Prędkość (v)	Czas (t)
Toruń – Inowrocław	s	15	$\frac{s}{15}$
Inowrocław – Toruń	s	12	$\frac{s}{12}$
		Razem	5,4



$$s = v \cdot t,$$

$$t = \frac{s}{v}, \quad v = \frac{s}{t},$$

s – droga, v – prędkość,
 t – czas.

Warunek „czas jazdy w obie strony wyniósł 5,4 godziny” zapisujemy w postaci równania

$$\frac{s}{15} + \frac{s}{12} = 5,4 \quad \text{i rozwiązujemy je:}$$

$$\frac{60 \cdot s}{15} + \frac{60 \cdot s}{12} = 60 \cdot 5,4$$

$$4s + 5s = 324$$

$$s = 36, \text{ więc } \frac{s}{15} = 2,4 \text{ i } \frac{s}{12} = 3.$$

Mnożymy obie strony równania przez
wspólny mianownik,
czyli przez $\text{NWW}(15, 12) = 60$.

II sposób

Trasa	Czas (t)	Prędkość (v)	Droga (s)
Toruń – Inowrocław	t	15	$15t$
Inowrocław – Toruń	$5,4 - t$	12	$12 \cdot (5,4 - t)$

Warunek „droga tam i z powrotem jest taka sama” zapisujemy w postaci równania

$$15t = 12(5,4 - t), \text{ skąd } t = 2,4$$

$$s = 15t = 36 \text{ oraz } 5,4 - t = 3.$$

Odp.: Odległość między Toruniem a Inowrocławiem jest równa 36 km. Rowerzysta jechał do Inowrocławia przez 2,4 godziny, a z powrotem przez 3 godziny.

Ćwiczenie 10. Rowerzysta przejechał trasę z Gdańska do Wejherowa i z powrotem. Wracając do Gdańska, jechał ze średnią prędkością o $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą, niż gdy jechał z Gdańska do Wejherowa. Jazda do Wejherowa trwała 2,5 godziny, a z powrotem 3,5 godziny. Oblicz odległość między Gdańskiem a Wejherowem.

Ćwiczenie 11. Pomyśl i napisz dowolną liczbę. Pomnóż ją przez 2. Do otrzymanego iloczynu dodaj 9, następnie liczbę pomyślaną. Otrzymaną sumę podziel przez 3 i do ilorazu dodaj 2. Na koniec odejmij liczbę pomyślaną. Otrzymałeś wynik równy 5. Uzasadnij, że wynik taki otrzymasz niezależnie od tego, jaką liczbę pomyślisz.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) 4, b) -2, 4, c) 4, d) -2, 0, 2, 4, e) żadna z podanych liczb. 3. a) -1, 0, 1, b) -1, c) 0, d) -1, 0.
 4. a) Oznaczone, $x_0 = 3$, b) tożsamościowe, c) sprzeczne, d) oznaczone, $x_0 = 7, 5$.
 5. a) Nie, b) tak. Wskazówka. a) Równania mają różne dziedziny. 6. Np. $a = 5$ i $b = 3$, $a = -10$ i $b = -6$.
 7. a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = 12$. 8. a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = -4 - \sqrt{5}$. 9. 1 i 2, 3 i 4. 10. 35 km. 11. Wskazówka. $\frac{2x+9+x}{3} + 2 - x = 5$.

Zadania utrwalające

6.1. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Liczba -2 spełnia równanie:

A. $-2x(x+2)(x-4) = 0$, B. $x^3 - 8 = 0$.

Liczba 2 nie spełnia równania:

C. $x^2 - 4 = 0$, D. $|x+2| = 3$.

6.2. Sprawdź, które spośród liczb: -1, 0, 2, 4 są pierwiastkami równania:

a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} = 0$, b) $\sqrt{x} = 2$, c) $x^3 + 1 = 0$, d) $x(x+1)(x-2)(x-4) = 0$.

6.3. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Równoważne są równania $\frac{x-5}{2} = \frac{x}{4}$ i $\frac{x}{2} = \frac{x+3}{3}$.	P	F
Jeżeli do obu stron równania $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ dodamy wyrażenie $\frac{1}{x-2}$, to otrzymamy równanie równoważne.	P	F

6.4. Sprawdź, które z liczb całkowitych niedodatnich większych od -8 są pierwiastkami równania $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} = 0$.

6.5. Sprawdź, które z liczb całkowitych niedodatnich większych od -6 są pierwiastkami równania:

a) $x^2 + 8x + 15 = 0$,

b) $\frac{1}{4}x^3 + 2 = 0$,

c) $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$.

6.6. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wstaw taką liczbę, aby liczby 1 i -2 były pierwiastkami równania:

a) $(x-1)(x+2) = \blacksquare$,

b) $(x+2)(x-1) = \blacksquare$,

c) $2(x-1)(x+\blacksquare) = 0$,

d) $(2x-2)(x+\blacksquare) = 0$,

e) $-\frac{1}{2}(x-\blacksquare)(x+2) = 0$,

f) $(2x+\blacksquare)(x-1) = 0$.

6.7. Rozwiąż równanie:

a) $(x+3)^2 - 1 = x^2$,

b) $x(x-1) - 4 = (x-2)(x+2) - x$,

c) $4x^2 - (1-2x)^2 + 2x = 11$,

d) $0 = 4(10-5x) - 3(-3x-5)$,

e) $\frac{x-4}{2} + \frac{x+3}{5} = \frac{2(x+3)}{3}$,

f) $2x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{3}(4+5x) - \frac{7}{30}$.

6.8. Sprawdź, czy równoważne są równania:

a) $\frac{2}{5}y - 3 = y$ i $\frac{2y+1}{3} + y = -3 + y$, b) $x - 1 - \frac{4x-14}{7} = 3x - 53$ i $12x + 1 = 3x + 3$.

6.9. Oblicz „sprytnie” wartość wyrażenia podanego obok (kolor niebieski):

a) $3(x-5) + 19 = -2$, $x-5$,

b) $2(y+8) - 9 = 5$, $2y+16$,

c) $-3 = 4(y+7) - 15$, $3y+21$,

d) $9 - \frac{4}{5}(a-3) = 1$, $4(a-3)$.

6.10. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli $y + 5 = 13$, to różnica $y - 5$ jest równa:

A. 2,

B. 3,

C. 8,

D. 15.

6.11. Spośród równań oznaczonych cyframi od **1** do **5**:

1 $0 \cdot x = 0$,

2 $0 \cdot x = 1$,

3 $1 \cdot x = 1$,

4 $1 \cdot x = 0$,

5 $1 \cdot x + 0 = 1 \cdot x$

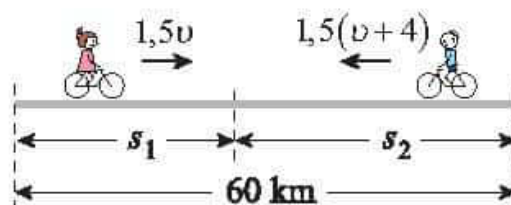
wskaż te, które:

a) mają tylko jeden pierwiastek,

b) nie mają pierwiastków.

6.12. Z lotniska A na lotnisko B mały samolot leciał ze stałą prędkością $660 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Tę samą trasę helikopter lecący z prędkością $360 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokonał w czasie dłuższym o 20 minut. Oblicz odległość między lotniskami A i B.

6.13. Z dwóch różnych miejscowości, oddległych od siebie o 60 km, o tej samej godzinie wyjechali rowerami naprzeciw siebie Kasia i Jurek. Spotkali się po upływie 1,5 godziny.



Wiedząc, że Jurek jechał ze stałą prędkością o 4 kilometry na godzinę większą niż Kasia, oblicz drogę, jaką przejechał każdy z nich do chwili spotkania.

Nierówność liniowa z jedną niewiadomą

Nierówność tym różni się od równania, że wyrażenia algebraiczne po obu jej stronach są połączone jednym ze znaków: **<, ≤, >, ≥**.

Przykłady nierówności liniowych z jedną niewiadomą:

$$-2x + 7 < 0, \quad 5x + 4 \geq 0, \quad -0,3x + 7 \leq 0, \quad 4x > 0, \quad x(x-1) \geq x^2 - 3.$$

Definicja

Nierówność z niewiadomą x postaci $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, gdzie $b \in \mathbb{R}$, nazywamy:

- **nierównością stopnia pierwszego**, gdy $a \neq 0$,
- **nierównością liniową**, gdy $a \in \mathbb{R}$.

Dziedziną nierówności liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie 12. Spośród nierówności: **1** $3x - 5 > 0$, **2** $x^2 - x \leq 0$, **3** $4 - x \geq 0$, **4** $6x - x^2 < 0$, **5** $-3x > 0$, **6** $0,5x - 5 \leq 3$

wyberz te, które są nierównościami pierwszego stopnia.

Uwaga

Rozwiązaniem nierówności z jedną niewiadomą jest każda liczba rzeczywista spełniająca tę nierówność, tzn. każda liczba, która, wstawiona w miejsce niewiadomej, zmienia nierówność w prawdziwe porównanie liczb.

Sprawdzając, czy liczba spełnia nierówność, możesz otrzymać porównanie liczb:

- fałszywe: $0 > 0$, $-2 \geq 2$, $5 < 5$ itp.,
- prawdziwe: $0 \leq 0$, $2 \geq 2$, $8 > -3$ itp.

Przykład 6. Sprawdź, która z liczb -6 i 0 spełnia nierówność $-3(x+1) < 6$.

Rozwiązanie Sprawdzamy, czy liczby -6 oraz 0 spełniają nierówność:

$x = -6$, wtedy	$x = 0$, wtedy
$-3(-6+1) < 6$	$-3(0+1) < 6$
$15 < 6$ <i>nierówność fałszywa</i>	$-3 < 6$ <i>nierówność prawdziwa</i>
Liczba -6 nie spełnia nierówności.	Liczba 0 spełnia nierówność.

Ćwiczenie 13. Sprawdź, która z liczb: -2 , 3 , 11 spełnia nierówność $3x+2 > 2x+5$.

Ćwiczenie 14. Podaj wszystkie liczby naturalne, które spełniają nierówność $x \leq 5$.

Przykład 7. Liczby stojące po lewej i prawej stronie nierówności $-5 < 9$ pomnóż przez liczbę -1 i porównaj otrzymane liczby.

Rozwiązanie $-5 \cdot (-1) = 5$ i $9 \cdot (-1) = -9$, więc $5 > -9$,

zatem $-5 < 9 \quad / \cdot (-1)$
 $5 > -9$.

Uwaga

- Jeśli mnożymy lub dzielimy obie strony nierówności przez liczbę ujemną, to **zmieniamy zwrot nierówności** na przeciwny.
- Rozwiązując nierówność liniową z jedną niewiadomą, postępujemy podobnie jak przy rozwiązywaniu równań, tzn. niewiadome grupujemy po jednej stronie nierówności, a liczby po drugiej i przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 8. Rozwiąż nierówność i podaj dwa przykłady liczb, które ją spełniają:

a) $\frac{2}{3}x \geq -12$, b) $-2x < 8$, c) $-x > -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

a) $\frac{2}{3}x \geq -12 \quad / : \frac{2}{3}$	b) $-2x < 8 \quad / : (-2)$	c) $-x > -\frac{1}{2} \quad / \cdot (-1)$
$x \geq -18$	$x > -4$	$x < \frac{1}{2}$

Odp.: a) $x \geq -18$, np. -18 ; 10^{10} , b) $x > -4$, np. $-3,9$; -1 , c) $x < \frac{1}{2}$, np. $\frac{1}{3}$, -1000 .

Ćwiczenie 15. Rozwiąż nierówność i podaj dwa przykłady liczb, które ją spełniają:

a) $1\frac{1}{2}x < -3$, b) $-\frac{4}{5}x \leq 10$, c) $-2\frac{1}{3}x > -14$, d) $-2 < 2x$.

Przykład 9. Przedstaw na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału liczbowego zbiór rozwiązań nierówności: a) $2x+1 \leq 13$, b) $2x-9 \geq 3(x-5)$.

Rozwiązanie

a) $2x+1 \leq 13$

$$2x \leq 13-1$$

$$2x \leq 12 \quad / :2$$

$$x \leq 6$$

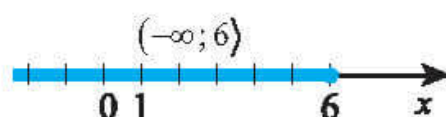


b) $2x-9 \geq 3(x-5)$

$$2x-9 \geq 3x-15$$

$$-x \geq -6 \quad / \cdot (-1)$$

$$x \leq 6$$



Odp.: Obie nierówności spełnia każda liczba x należąca do przedziału $(-\infty; 6]$, czyli nierówności są równoważne. Przedział $(-\infty; 6]$ jest zbiorem rozwiązań nierówności.

Ćwiczenie 16. Wykaż, że podane nierówności są równoważne.

a) $2x \geq 4$ i $-3x \leq -6$, b) $-100x > -300$ i $50x < 150$.

Przykład 10. Rozwiąż nierówność $x > \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot x$ i podaj największą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

Rozwiązanie $x > \sqrt{2} + \sqrt{2}x$

$$x - \sqrt{2}x > \sqrt{2}$$

Grupujemy niewiadome po jednej stronie nierówności.

$$x(1 - \sqrt{2}) > \sqrt{2}$$

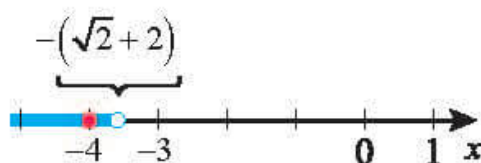
Wylączamy wspólny czynnik x poza nawias.

$$x(1 - \sqrt{2}) > \sqrt{2} \quad / : (1 - \sqrt{2})$$

Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę stojącą przy niewiadomej.

$$x < \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

Zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny, bo $1 - \sqrt{2} < 0$.



Zaznaczamy zbiór rozwiązań nierówności na osi.

$$\frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -(\sqrt{2} + 2), \quad -(\sqrt{2} + 2) \approx -3,4$$

Odp.: $x < -(\sqrt{2} + 2)$ i -4 jest największą liczbą całkowitą spełniającą tę nierówność.

Ćwiczenie 17. Rozwiąż nierówność i podaj największą (jeśli istnieje) albo najmniejszą (jeśli istnieje) liczbę całkowitą, która ją spełnia:

a) $\sqrt{3}x > x - 1$, b) $\sqrt{2}x - 1 > 2x + 3$.

Uwaga

- Nierówności liniowe, które mają ten sam zbiór rozwiązań, nazywamy **równoważnymi**.
- **Rozwiązaniem nierówności** jest każda liczba, która spełnia tę nierówność.
- **Zbiorem rozwiązań nierówności** jest zbiór wszystkich liczb spełniających tę nierówność.

Przykład 11. Rozwiąż nierówność $\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(x+1)(x-1)}{3} \geq \frac{1}{6}(x+2)^2$.

Rozwiązanie

$$\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(x+1)(x-1)}{3} \geq \frac{1}{6}(x+2)^2 \quad / \cdot 6$$

Mnożymy obie strony nierówności przez wspólny mianownik 6.

$$3(x-2)^2 - 2(x+1)(x-1) \geq (x+2)^2$$

Wykonujemy działania, stosując wzory skróconego mnożenia.

$$3(x^2 - 4x + 4) - 2(x^2 - 1) \geq x^2 + 4x + 4$$

$$3x^2 - 12x + 12 - 2x^2 + 2 \geq x^2 + 4x + 4$$

$$\underbrace{3x^2}_{\text{niebieski}} - \underbrace{12x}_{\text{niebieski}} - \underbrace{2x^2}_{\text{niebieski}} - \underbrace{x^2}_{\text{niebieski}} - \underbrace{4x}_{\text{niebieski}} \geq \underbrace{4}_{\text{niebieski}} - \underbrace{12}_{\text{niebieski}} - \underbrace{2}_{\text{niebieski}}$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$-16x \geq -10 \quad / : (-16)$$

$$x \leq \frac{5}{8}$$

Odp.: $x \leq \frac{5}{8}$, czyli $x \in \left(-\infty; \frac{5}{8}\right]$.

Ćwiczenie 18. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-3)(x+3) + 24x > (x+2)^2$,

b) $2(x-2)^2 > (x-3)(x+3) - x + x^2 + 1$,

c) $(x-2)^2 + 1 \leq \frac{x-8}{3} + (x-1)(x+1)$,

d) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - (x+2)(x-2) + \frac{8}{9} \geq (x+5)^2 - \frac{1}{3}x(3x+2)$.

Przykład 12. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-4)(x+4) < 2(3+0,5x^2)$

b) $\frac{1-x}{4} - \frac{3-2x}{8} > 1$

Rozwiązanie

a) $(x-4)(x+4) < 2(3+0,5x^2)$

$$x^2 - 16 < 6 + x^2$$

$$0 < 22 \quad \text{— nierówność prawdziwa}$$

Odp.: Każda liczba rzeczywista

$(x \in \mathbb{R})$ spełnia tę nierówność

— nierówność tożsamościowa.

b) $\frac{1-x}{4} - \frac{3-2x}{8} > 1 \quad / \cdot 8$

$$2(1-x) - (3-2x) > 8$$

$$2 - 2x - 3 + 2x > 8$$

$$-2x + 2x > 8 - 2 + 3$$

$$0 > 9 \quad \text{— nierówność fałszywa}$$

Odp.: Nie istnieje liczba, która spełnia tę nierówność — nierówność sprzeczna.

Ćwiczenie 19. Rozwiąż nierówność:

a) $(2x-3)(2x+3) - 24x > 4(x-3)^2$, b) $\frac{5x}{12} + \frac{x+2}{3} \geq \frac{3x-1}{4}$

Uwaga Nierówności liniowe z jedną niewiadomą dzielimy na nierówności:

- **oznaczone** — nierówności, które mają zbiór rozwiązań, ale nie jest nim zbiór $\mathbb{R}$,
- **tożsamościowe** — nierówności, których zbiorem rozwiązań jest zbiór $\mathbb{R}$,
- **sprzeczne** — nierówności, które nie mają rozwiązania.

Nierówność może występować w postaci nierówności podwójnej, którą można zastąpić układem dwóch nierówności, czyli dwiema nierównościami połączonymi klamrą $\{$ (klamra zastępuje spójnik i).

Pokażemy to na przykładzie.

$$\begin{aligned} &a < b < c, \\ &\text{czyli} \\ &a < b \text{ i } b < c, \\ &\text{co zapisujemy} \\ &\left\{ \begin{array}{l} a < b \\ b < c \end{array} \right. \end{aligned}$$

Przykład 13. Rozwiąż nierówność podwójną $6x+3 < 2x+3 < -4x$ i zapisz zbiór jej rozwiązań w postaci przedziału liczbowego.

Rozwiązanie Zapisujemy nierówność podwójną w postaci układu nierówności:

$$\begin{cases} 6x+3 < 2x+3 \\ 2x+3 < -4x \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ czyli } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right).$$

Odp.: Zbiorem rozwiązań nierówności są liczby x należące do przedziału $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Ćwiczenie 20. Rozwiąż nierówność podwójną:

a) $5x - 1 < 3(x + 2) \leq 2x - 5$, b) $-(x + 2) \leq \frac{1}{2}x < 7x - 4$, c) $3(2 + x) < 1 - 2x < x$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

12. **1, 3, 5, 6.** 13. 11. 14. 0, 1, 2, 3, 4, 5.

15. a) $x < -2$, np. $-3, -15$, b) $x \geq -12,5$, np. $-12,5, 0$, c) $x < 6$, np. $5, 1$, d) $x > -1$, np. $0, 6$.

16. Zbiorem rozwiązań obu nierówności jest przedział: a) $(2; +\infty)$, b) $(-\infty; 3)$.

17. a) $x > \frac{1}{1-\sqrt{3}}$, najmniejsza liczba całkowita ją spełniająca to -1 , b) $x < \frac{4}{\sqrt{2}-2}$, największa liczba całkowita ją spełniająca to -7 . *Wskazówka.* a) $\frac{1}{1-\sqrt{3}} \approx -1,4$, b) $\frac{4}{\sqrt{2}-2} \approx -6,7$.

18. a) $x > \frac{13}{20}$, b) $x < \frac{16}{7}$, c) $x \geq 2$, d) $x \leq -2$. 19. a) Nie ma rozwiązania, b) każda liczba x spełnia nierówność.

20. a) $x < -11$, b) $x > \frac{8}{13}$, c) nierówność nie ma rozwiązania.

Zadania utrwalające

6.14. Sprawdź, które z liczb: $-2, 0, 1, \frac{5}{2}$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $2x > x + \frac{1}{2}$.

6.15. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności:

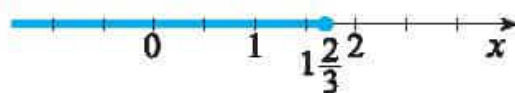
a) $-x \geq -5$, b) $x > \frac{2}{3} + 2x$, c) $\frac{1}{2}x + 2 \leq x - 1$, d) $3x > 10x - 7$.

6.16. Rozwiąż nierówność:

a) $2(x-1) + 3 \leq 4(x+3) - 1$, b) $1 + \frac{y}{4} - y < -3$, c) $2z - 1 < \frac{1}{2}z + 1$,
d) $1 - \sqrt{2}x > 3$, e) $\sqrt{3} + x < \sqrt{3}x$, f) $2x - 3 \leq \sqrt{5}x - 1$.

6.17. Na osi liczbowej przedstawiono zbiór liczb.

Podaj przykład nierówności, dla której jest on zbiorem rozwiązań.



6.18. Sprawdź, które z liczb: $4,5, -\sqrt{2}, -3, \pi, \sqrt{2} - 5$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $(x-1)(x+1) + x > x^2 - 2,5$.

6.19. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Liczb naturalnych spełniających nierówność $x + 10 > \frac{5}{2}x + 1$ jest:

A. 2,

B. 4,

C. 5,

D. 6.

6.20. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $4x + 43 \leq 23x + 5$.

6.21. Rozwiąż nierówność i zbiór rozwiązań zaznacz na osi liczbowej.

a) $(x+2)(x-2) - 2x > x^2 + 8$,

b) $3x^2 - 3(1-x)^2 - 6 < -3x$,

c) $(x+3)^2 > x(x+6)$,

d) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq y\left(y + \frac{3}{4}\right)$,

e) $\frac{4y-3}{6} + 3 \leq \frac{3y}{2} + \frac{5}{8}$,

f) $(x-3)(x+3) > \frac{x+2}{2} + 1 + x^2$.

6.22. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.*

Liczba -1 jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\sqrt{5}x < 3x + 1$.

P

F

Liczba -8 jest największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $x - 2 > \sqrt{2}x + 1$.

P

F

6.23. Uzasadnij, że najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność:

D a) $x^2 - 1 < (x+1)^2 + 2 < (x+2)^2$ jest liczba 0,

b) $2x \cdot \log 2 > 3 - x(1 + 2 \log 5)$ z niewiadomą x jest liczba 2.

Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania nierówności liniowych

Za pomocą nierówności liniowych możemy rozwiązywać wiele problemów matematycznych, a także praktycznych. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 14. Określ, dla jakich wartości x wyrażenie $\frac{3}{4}x - 6$ przyjmuje wartości:

a) ujemne, b) dodatnie, c) nieujemne, d) niedodatnie.

Rozwiązanie Aby odpowiedzieć na pytanie postawione w zadaniu, należy rozwiązać nierówność:

a) $\frac{3}{4}x - 6 < 0$

$$\frac{3}{4}x < 6 \quad / : \frac{3}{4}$$

$$x < 8$$

b) $\frac{3}{4}x - 6 > 0$

$$x > 8$$

c) $\frac{3}{4}x - 6 \geq 0$

$$x \geq 8$$

d) $\frac{3}{4}x - 6 \leq 0$

$$x \leq 8$$

Odp.: a) $x < 8$, b) $x > 8$, c) $x \geq 8$, d) $x \leq 8$.

Ćwiczenie 21. Określ, dla jakich wartości x wyrażenie:

- a) $-x+1$ przyjmuje wartości ujemne,
- b) $5-6x$ przyjmuje wartości dodatnie,
- c) $2-\frac{1}{2}x$ przyjmuje wartości niedodatnie,
- d) $1-\sqrt{2}x$ przyjmuje wartości nieujemne.

Przykład 15. Dwie wypożyczalnie sprzętu wodnego stosują różne metody opłat za wypożyczenie roweru wodnego.

Wypożyczalnia I
za każdą rozpoczętą godzinę
5 zł

Wypożyczalnia II

pierwsza godzina 9 zł
druga godzina 7 zł
trzecia godzina i każda rozpoczęta
następna 3 zł

Zapisz zależność i oblicz, na co najmniej ile godzin należy wypożyczyć rower wodny, aby bardziej opłacało się skorzystać z usług wypożyczalni II niż wypożyczalni I.

Rozwiązanie Oznaczamy:

x – liczba godzin wypożyczenia roweru, gdzie $x \in \mathbb{N}^+$,

$5x$ – opłata za wypożyczenie roweru na x godzin z wypożyczalni I,

$9+7+3(x-2)$ – opłata za wypożyczenie roweru na co najmniej 3 godziny z wypożyczalni II.

$$5x > 9+7+3(x-2)$$

$$5x - 3x > 16 - 6$$

$$2x > 10, \text{ skąd } x > 5.$$

Koszt wypożyczenia roweru wodnego z wypożyczalni I jest większy niż z wypożyczalni II.

Odp.: Wypożyczenie roweru wodnego z wypożyczalni II jest bardziej opłacalne, jeżeli jego użytkowanie będzie trwało dłużej niż 5 godzin, tj. 6, 7, 8 lub 9 godzin itd.

Ćwiczenie 22. Z dwóch miejscowości odległych od siebie o 29 km wyruszyło jednocześnie dwóch turystów idących naprzeciw siebie ze stałą prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ aż do chwili spotkania. Po jakim czasie odległość między turystami będzie mniejsza niż 7 km?

Przykład 16. Określ, dla jakich wartości x sens liczbowy ma wyrażenie:

- a) $\frac{3x}{x-1}$, b) $\sqrt{x-2}$.

Rozwiązanie

a) Dzielenie przez zero jest niewykonalne, więc wyrażenie $x-1$ nie może być równe zero. Zatem wyrażenie $\frac{3x}{x-1}$ ma sens liczbowy, gdy $x-1 \neq 0$, czyli gdy $x \neq 1$.

b) Pierwiastki kwadratowe istnieją tylko z liczb nieujemnych, więc wyrażenie $\sqrt{x-2}$ ma sens liczbowy, gdy $x-2 \geq 0$, czyli gdy $x \geq 2$.

Odp.: a) $x \neq 1$, czyli $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, b) $x \geq 2$, czyli $x \in \langle 2; +\infty \rangle$.

Ćwiczenie 23. Określ, dla jakich wartości x ma sens liczbowy wyrażenie:

a) $\frac{x}{2x+4}$, b) $\sqrt{2-x}$, c) $\frac{1}{\sqrt{x+5}}$, d) $\frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

21. a) $x > 1$, b) $x < \frac{5}{6}$, c) $x \geq 4$, d) $x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

22. Po upływie 2 godzin i 45 minut. *Wskazówka.* $29 - 2 \cdot 4 \cdot x < 7$, gdzie x to czas marszu turystów.

23. a) $x \neq -2$, b) $x \leq 2$, c) $x > -5$, d) $x \neq 0$.

Zadania utrwalające

6.24. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jeżeli $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, to dodatnie wartości przyjmuje wyrażenie:

A. $12x - 6$,

B. $6 - 12x$.

Ujemne wartości przyjmuje wyrażenie $6 - 3x$, gdy:

C. $x < 2$,

D. $x > 2$.

6.25. Określ, dla jakich wartości x wyrażenie przyjmuje wartości niedodatnie:

a) $4x - \sqrt{5}x$,

b) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) - x^2$,

c) $3x - \pi x$.

6.26. Określ, dla jakich wartości x ma sens liczbowy wyrażenie:

a) $\frac{-2+x}{x+5}$,

b) $\sqrt{3x-6}$,

c) $\frac{x}{\sqrt{4-x}}$,

d) $\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1}$.

- 6.27. Ułóż odpowiednią nierówność opisującą sytuację przedstawioną na rysunku. Podaj, co oznaczyłeś/oznaczyłaś jako niewiadomą.



- 6.28. Uczeń oszczędza po 40 zł miesięcznie i zaoszczędził już 160 zł.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

W dwunastym miesiącu oszczędności ucznia przekroczą kwotę 640 zł.	P	F
Po dwóch latach oszczędności ucznia nie przekroczą 2000 zł.	P	F

- 6.29. Koszt produkcji pewnego przedmiotu jest równy 120 zł. Producent sprzedaje go za 150 zł. Ile sztuk musi sprzedać, aby osiągnąć co najmniej 1000 zł zysku?
- 6.30. Pewnego dnia stan wody w rzece był o 5 cm wyższy od stanu ostrzegawczego. W ciągu kilku następnych dni poziom wody podnosił się o 6 cm na dobę. Po ilu następnych dniach stan wody będzie wyższy od stanu ostrzegawczego o więcej niż 23 cm?
- 6.31. Uczestnicy szkolnej sztafety 4×100 m zamierzają osiągnąć podczas biegu czas poniżej 45,6 s. Jaki czas powinien uzyskać czwarty zawodnik, jeżeli trzej pierwsi sprinterzy uzyskali na swoich zmianach czas odpowiednio równy: 11,42 s, 11,35 s, 11,50 s?
- 6.32. Różnica kwadratu liczby naturalnej parzystej i kwadratu następnej po niej liczby parzystej jest nie mniejsza niż -20 . Wyznacz wszystkie pary takich liczb.
- 6.33. Suma S kątów wewnętrznych wielokąta o n bokach określona jest wzorem $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$. Podaj wszystkie wielokąty, których suma kątów wewnętrznych nie przekracza 1500° .
- 6.34. O godzinie 12:00 wyruszyły z dwóch stacji A i B , oddległych od siebie o 100 km, dwa pojazdy szynowe. Jeden jedzie ze stałą prędkością $13 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugi – $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O której godzinie odległość między pojazdami będzie mniejsza niż 30 km?

- 6.35. Rozwiąż nierówność $1 - 1000x < 1,999 \cdot 10^6$. Uzasadnij, że najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą tę nierówność jest liczba -1998 .

Własności wartości bezwzględnej

W szkole podstawowej obliczaliście wartość bezwzględną dowolnej liczby,

np. $|4| = 4$, $|0| = 0$, $|-3| = -(-3) = 3$, $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$, bo $\sqrt{2} - 1 > 0$,
 $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2})$, bo $1 - \sqrt{2} < 0$.

Definicja

Wartością bezwzględną (modułem) liczby:

- nieujemnej x jest liczba x ,
- ujemnej x jest liczba $-x$.

Wartość bezwzględna z dowolnej liczby rzeczywistej jest zawsze liczbą nieujemną, czyli $|x| \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

- $|x| = x$, gdy $x \geq 0$
- $|x| = -x$, gdy $x < 0$

co zapisujemy

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Ćwiczenie 24. Oblicz: a) $|\sqrt{3} - 5|$, b) $|\pi - \sqrt{10}|$, c) $|-2|$, d) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$,
 e) $|3\sqrt{5} + 2\sqrt{6}| - |\sqrt{5} - 2\sqrt{6}|$, f) $|2\sqrt{3} - 5 + 3\sqrt{5}| - |5 - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}|$.

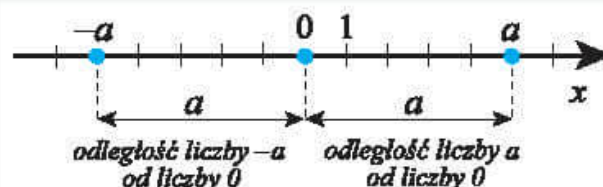
Ćwiczenie 25. Skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej i określ, dla jakich x prawdziwa jest równość:

- a) $|x| = x$, b) $|x| = -x$, c) $|-x| = x$, d) $|-x| = -x$.

Wartość bezwzględna liczby ma interpretację geometryczną na osi liczbowej.

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby a jest równa odległości na osi liczbowej liczby a od liczby 0 (zero).



Ćwiczenie 26. Przepisz zdania do zeszytu i w miejsce wpisz słowo „mniejsza” albo „większa”.

- a) Z dwóch liczb dodatnich ta jest mniejsza, której odległość od liczby 0 jest .
- b) Z dwóch liczb ujemnych ta jest mniejsza, której odległość od liczby 0 jest .

Uwaga

Z dwóch liczb ujemnych ta jest większa, której bezwzględna wartość jest mniejsza, np. $-3,5 > -4,1$, bo $|-3,5| < |-4,1|$.

Przykład 17. Oblicz odległość między liczbami:

a) -4 i 3 , b) -1 i -5 .

Rozwiązanie Obliczyć odległość na osi liczbowej między dwoma liczbami można na dwa sposoby.

I sposób: Od liczby większej odejmujemy liczbę mniejszą.

a) $3 > -4$, więc $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$,

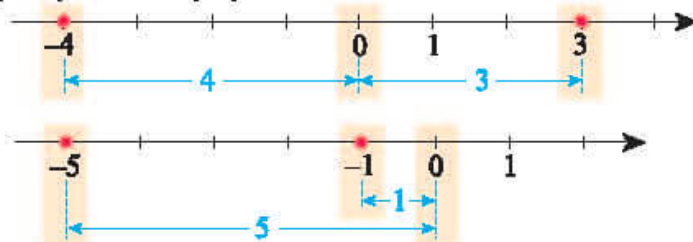
b) $-1 < -5$, więc $-1 - (-5) = -1 + 5 = 4$.

II sposób: Obliczamy wartość bezwzględną z różnicy tych liczb.

a) $|-4 - 3| = |-7| = 7$,

b) $|-1 - (-5)| = |-1 + 5| = 4$.

Odp.: a) 7, b) 4.



Ćwiczenie 27. Oblicz i zaznacz na osi liczbowej odległość między liczbami:

a) $-3,1$ i 2 , b) $-3,1$ i -5 , c) $-\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{3}$.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwe są zależności:

- $|x| = |-x|$,

- $|x - y| = |y - x|$,

- $\sqrt{x^2} = |x|$,

- $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$,

- $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$, gdzie $y \neq 0$,

$$|-3| = |3|,$$

$$|2 - x| = |x - 2|,$$

$$\sqrt{(-4)^2} = |-4|, \quad \sqrt{4^2} = 4,$$

$$|(1 - \sqrt{2}) \cdot (-3)| = |1 - \sqrt{2}| \cdot |-3|,$$

$$\frac{|\sqrt{2} - 1|}{|\sqrt{2} + 1|} = \left| \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right|.$$

Ćwiczenie 28. Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{7}| \cdot |2 + \sqrt{7}|$, b) $\sqrt{(6 - 4\sqrt{3})^2}$, c) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$, d) $\sqrt{2\sqrt{5} - 6}$.

Przykład 18. Wykaż, że liczba $\sqrt{33-20\sqrt{2}} + \sqrt{33+20\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie Zauważamy, że

$$\sqrt{33-20\sqrt{2}} = \sqrt{(5-2\sqrt{2})^2} = |5-2\sqrt{2}| = 5-2\sqrt{2} \quad 33-25+8-5^2+(2\sqrt{2})^2$$

$$\sqrt{33+20\sqrt{2}} = \sqrt{(5+2\sqrt{2})^2} = |5+2\sqrt{2}| = 5+2\sqrt{2}, \quad 20\sqrt{2} = 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{33-20\sqrt{2}} + \sqrt{33+20\sqrt{2}} = 5-2\sqrt{2} + 5+2\sqrt{2} = 10, \quad 10 \in \mathbb{Q}. \quad \text{c.n.w.}$$

Ćwiczenie 29. Zbadaj, jaką liczbą, wymierną czy niewymierną, jest liczba $\sqrt{12+2\sqrt{11}} - \sqrt{12-2\sqrt{11}}$.

Przykład 19. Zapisz wyrażenie $|4-2x|$ bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

Rozwiązanie

$$|4-2x| = \begin{cases} 4-2x, & \text{gdy } 4-2x \geq 0 \\ -(4-2x), & \text{gdy } 4-2x < 0 \end{cases}$$

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{gdy } a \geq 0 \\ -a, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}, \quad \text{gdzie } a = 4-2x$$

$$\text{Zatem } |4-2x| = \begin{cases} 4-2x, & \text{gdy } x \leq 2 \\ -(4-2x), & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$$

Ćwiczenie 30. Zapisz bez użycia symbolu wartości bezwzględnej wyrażenie:

a) $|x-5|$, b) $|3x+1|$, c) $\sqrt{x^2-6x+9}$.

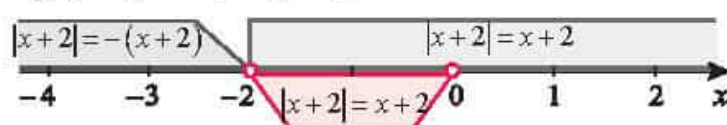
Ćwiczenie 31. Skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej i określ, dla jakich x prawdziwa jest równość:

a) $|x+1| = x+1$, b) $|x-2| = 2-x$, c) $|x+3| = -(x+3)$.

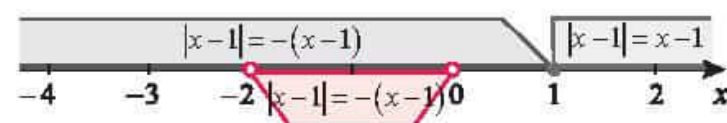
Przykład 20. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie $|x+2| + |x-1| - |x|$, gdy $x \in (-2; 0)$.

Rozwiązanie Z definicji wartości bezwzględnej otrzymujemy:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{gdy } x \geq -2 \\ -(x+2), & \text{gdy } x < -2 \end{cases}$$



$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{gdy } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{gdy } x < 1 \end{cases}$$



$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$



Zatem, gdy $x \in (-2; 0)$, to $|x+2| = x+2$, $|x-1| = -(x-1)$, $|x| = -x$,
 więc $|x+2| + |x-1| - |x| = x+2 - (x-1) - (-x) = x+3$.

Ćwiczenie 32. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie:

a) $|x+1| - \frac{x}{|x|}$, gdy $x \in (-1; 0)$, b) $|5-x| - |x+4| - |2-x|$, gdy $x \in (2; 5)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

24. d) $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$, e) $4\sqrt{5}$, f) 0. 25. a) $x \geq 0$, b) $x < 0$, c) $x > 0$, d) $x \leq 0$.

Wskazówka. c), d) $|-x| = \begin{cases} -x, & \text{gdy } -x \geq 0 \\ -(-x), & \text{gdy } -x < 0 \end{cases}$, czyli $|-x| = \begin{cases} -x, & \text{gdy } x \leq 0 \\ x, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$.

26. a) Mniejsza, b) większa. 27. a) 5,1, b) 1,9, c) 1.

28. a) 3, b) $4\sqrt{3} - 6$, c) $2 - \sqrt{3}$, d) $\sqrt{5} - 1$. 29. Liczbą wymierną równą 2.

30. a) $|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{gdy } x \geq 5 \\ 5-x, & \text{gdy } x < 5 \end{cases}$, b) $|3x+1| = \begin{cases} 3x+1, & \text{gdy } x \geq -\frac{1}{3} \\ -3x-1, & \text{gdy } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$, c) $|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{gdy } x \geq 3 \\ 3-x, & \text{gdy } x < 3 \end{cases}$.

31. a) $x \geq -1$, b) $x < 2$, c) $x < -3$. 32. a) $x+2$, b) $3-3x$.

Zadania utrwalające

6.36. Oblicz:

a) $|1 - |2 - |-3|||$, b) $|-|\sqrt{5}-5| - |\sqrt{3}-8| - 2|$, c) $\frac{|3\sqrt{5}-5| - |5-3\sqrt{5}|}{|3\sqrt{5}+\sqrt{2}| - |\sqrt{5}-3|}$,
 d) $\frac{|1-\sqrt{11}|-3}{\sqrt{11}-4}$, e) $\left| \frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} \right|$, f) $|1-\sqrt{3}| - 3|2-2\sqrt{3}| + 5|\sqrt{3}-2|$.

6.37. Zapisz w prostszej postaci:

a) $\sqrt{(5-\sqrt{7})^2}$, b) $\sqrt{(4-2\sqrt{6})^2}$, c) $\sqrt{(5-2\pi)^2}$.

6.38. Liczbę $\sqrt{15-2\sqrt{26}}$ przedstaw jako różnicę dwóch pierwiastków z liczb naturalnych.

6.39. Zbadaj, jaką liczbą, wymierną czy niewymierną, jest wartość wyrażenia:

a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$, b) $\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$, c) $\sqrt{16-6\sqrt{7}} - \sqrt{16+6\sqrt{7}}$.

6.40. Uprość wyrażenie:

a) $\sqrt{(8-2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3}+8)^2}$, b) $\sqrt{(6\sqrt{2}+9)^2} + \sqrt{(6\sqrt{2}-9)^2}$,

c) $\sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{18-8\sqrt{2}}$, d) $\sqrt{28+10\sqrt{3}} - \sqrt{28-10\sqrt{3}}$.

6.41. Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{33+20\sqrt{2}} + \sqrt{33-20\sqrt{2}} = 10$, b) $\sqrt{34-24\sqrt{2}} - \sqrt{34+24\sqrt{2}} = -8$,

c) $\sqrt{69+16\sqrt{5}} + \sqrt{69-16\sqrt{5}} = 16$, d) $\sqrt{36+16\sqrt{5}} - \sqrt{36-16\sqrt{5}} = 8$.

6.42. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $|x+2| + |2x-2| - |3x-4|$, gdy $x > 2$, b) $\left|\frac{1}{2}x-5\right| - |x-7| + |6-2x|$, gdy $x < 1$,

c) $|x+3| + 3|x-1|$, gdy $x \in (1; +\infty)$, d) $|5-x| + 2|x+2|$, gdy $x \in (-2; 5)$,

e) $4|1-x| + 5|x+3|$, gdy $x \in (-\infty; -3)$, f) $2|x-4| - 3|1-x|$, gdy $x \in (4; +\infty)$.

6.43. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie:

a) $|x-4| - |x-3| - |x-2|$, gdy $x \in (3; 4)$, b) $\frac{|x^2-2x+1|}{|x-1|}$, gdy $x \in (-\infty; 1)$,

c) $\sqrt{x^2-6x+9} + |1-x|$, gdy $1 < x < 3$, d) $||x-2|+3| + |2-x|$, gdy $2 < x < 5$.

6.44. Określ, dla jakich x spełniona jest równość:

a) $5|x| = |5x|$, b) $\frac{x+2}{|x+2|} = 1$, c) $|2x-3| = 3-2x$, d) $||x|+1| = |x|+1$.

6.45. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Wartość wyrażenia $\sqrt{(x-1)^2} + 2\sqrt{(1-x)^2} + \sqrt{(x-1)^2}$, gdy $x = 4$, jest równa:

A. 12, B. $6+2\sqrt{3}$, C. $5\sqrt{3}$, D. $4\sqrt{3}$.

6.46. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Wyrażenie $|x-4| - |x-3|$, gdy $x \in (3; 4)$, zapisane bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, jest równe wyrażeniu:

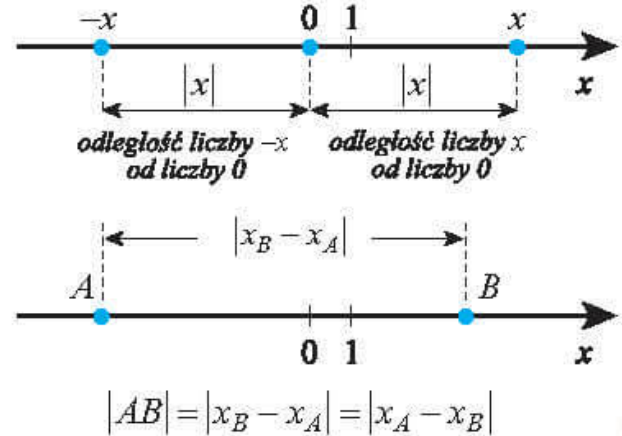
A. $x-4-(x-3)$, B. $-(x-4)+x-3$, C. $-(x-4)-(x-3)$, D. $2x+7$.

Równania z wartością bezwzględną

Przy rozwiązywaniu równań z wartością bezwzględną będziemy korzystać z definicji wartości bezwzględnej i jej interpretacji na osi liczbowej.

Przypomnijmy

- Wartość bezwzględna liczby x jest równa odległości na osi liczbowej liczby x od liczby 0 (zero).
- Wartość bezwzględna z różnicy współrzędnych dwóch punktów (z różnicy dwóch liczb) jest odległością między tymi punktami (między tymi liczbami) na osi liczbowej.



Najprostszym równaniem z wartością bezwzględną jest równanie $|x| = a$, gdy $a \in \mathbb{R}$. Pokażemy na przykładach, w jaki sposób liczba rozwiązań tego równania zależy od a .

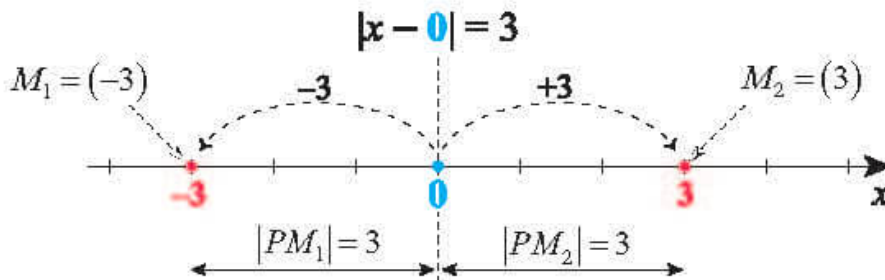
Przykład 21. Rozwiąż równanie $|x| = 3$.

Rozwiązanie

I sposób Korzystamy z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

Zauważamy, że równanie $|x| = 3$ jest równoważne równaniu $|x - 0| = 3$.

Rozwiązać równanie $|x| = 3$ można przez wyznaczenie współrzędnych takich punktów M_1 i M_2 na osi, których odległość od punktu O jest równa 3.



Zatem $x_1 = -3$ i $x_2 = 3$.

II sposób Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej.

$$|x| = 3$$

$$x = 3 \text{ lub } x = -3.$$

$$|3| = | -3| = 3$$

Odp.: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Ćwiczenie 33. Rozwiąż równanie: a) $|x| = 5$, b) $|x| = 2\frac{1}{2}$, c) $|x| = 0$, d) $|x| = -1$.

Uwaga Równanie $|x| = a$:

- ma dwa pierwiastki $x_1 = -a$ i $x_2 = a$, gdy $a > 0$,
- ma jeden pierwiastek $x_0 = 0$, gdy $a = 0$,
- nie ma pierwiastków, gdy $a < 0$.

Równania typu $|b \cdot x| = a$ możemy rozwiązywać, korzystając z definicji wartości bezwzględnej. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 22. Rozwiąż równanie:

a) $|5x| = 3$, b) $|(1 - \sqrt{2})x| = 1$.

Rozwiązanie

a) $|5x| = 3$
 $5x = -3$ lub $5x = 3$
 $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = \frac{3}{5}$.

b) $|(1 - \sqrt{2})x| = 1$
 $(1 - \sqrt{2})x = -1$ lub $(1 - \sqrt{2})x = 1$
 $x = -\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ lub $x = \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$
 $x = \frac{-1}{1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ lub $x = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$
 $x = 1 + \sqrt{2}$ lub $x = -1 - \sqrt{2}$.

Odp.: a) $x_1 = -\frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$, b) $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 34. Rozwiąż równanie:

a) $|\frac{1}{2}x| = 4$, b) $|(\sqrt{2} - 2)x| = \sqrt{2}$.

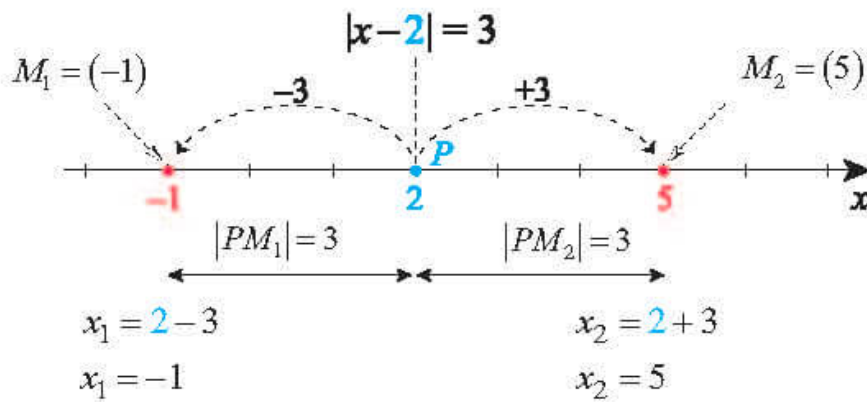
Przykład 23. Rozwiąż równanie $|x - 2| = 3$.

Rozwiązanie

I sposób

Korzystamy z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

Aby rozwiązać równanie $|x - 2| = 3$, wystarczy znaleźć współrzędną takiego punktu $M = (x)$, którego odległość od punktu P , gdy $P = (2)$, jest równa 3.



II sposób Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej.

$$|x-2|=3$$

$$x-2=-3 \quad \text{lub} \quad x-2=3$$

$$x=-1 \quad \text{lub} \quad x=5.$$

$a > 0$, to $|x|=a$
wtedy i tylko wtedy,
gdy $x = -a$ lub $x = a$

Odp.: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

Ćwiczenie 35. Rozwiąż równanie:

a) $|x-6|=4$, b) $|x+3|=2$, c) $2|x-1|=6$.

Nie wszystkie równania, w których niewiadoma występuje pod znakiem wartości bezwzględnej, można rozwiązać, korzystając tylko z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej lub jej definicji.

Wykorzystujemy również jej własności, np. $\sqrt{x^2} = |x|$ lub $|x-a| = |a-x|$.

Przykład 24. Rozwiąż równanie $\sqrt{x^2-10x+25} + |x-5| = 8$.

Rozwiązanie

$$\sqrt{x^2-10x+25} + |x-5| = 8$$

$$|x-5| + |x-5| = 8$$

$$2|x-5| = 8 \quad :/2$$

$$|x-5| = 4$$

$$x-5 = -4 \quad \text{lub} \quad x-5 = 4$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad x = 9.$$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$|a| = 4$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $a = -4$ lub $a = 4$

Odp.: $x_1 = 1$, $x_2 = 9$.

Ćwiczenie 36. Rozwiąż równanie:

a) $|x-2| + |2-x| = 6$, b) $2|x-1| + 5 = 3\sqrt{x^2-2x+1}$.

Przykład 25. Rozwiąż równanie $||x+1|-2|=3$.

Rozwiązanie Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej.

$$\begin{array}{ccc}
 |x+1|-2=3 & & |a|=3, \text{ gdzie } a=|x+1|-2 \\
 \swarrow \quad \searrow & & \\
 |x+1|-2=-3 & \text{lub} & |x+1|-2=3 \\
 |x+1|=-1 & \text{lub} & |x+1|=5 \\
 \text{Niemożliwe, by } |x+1|=-1, & & x+1=-5 \quad \text{lub} \quad x+1=5 \\
 \text{bo } |x+1|\geq 0. & & x=-6 \quad \text{lub} \quad x=4.
 \end{array}$$

Odp.: $x_1=-6$, $x_2=4$.

Ćwiczenie 37. Rozwiąż równanie:

a) $||x-3|+1|=2$, b) $||x+5|-3|=1$.

Przykład 26. Rozwiąż równanie:

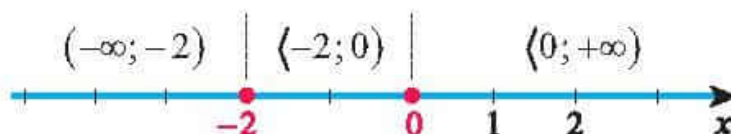
a) $|x+2|+|x|=6$, b) $|x-3|-|x-6|=3$.

Rozwiązanie

a) Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, otrzymujemy:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{gdy } x \geq -2 \\ -x-2, & \text{gdy } x < -2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Liczby -2 i 0 dzielą zbiór liczb rzeczywistych na trzy przedziały, jak na rysunku.



1 Jeśli $x \in (-\infty; -2)$, to $ x+2 = -x-2$ i $ x = -x$.	2 Jeśli $x \in [-2; 0]$, to $ x+2 = x+2$ i $ x = -x$.	3 Jeśli $x \in (0; +\infty)$, to $ x+2 = x+2$ i $ x = x$.
--	---	---

Równanie $|x+2|+|x|=6$ przyjmuje postać:

$(-x-2)+(-x)=6$, skąd $x=-4$. $-4 \in (-\infty; -2)$, więc $x_1=-4$.	$(x+2)+(-x)=6$, skąd $2=6$ — równość fałszywa (Jeśli $x \in [-2; 0]$, to równanie nie ma rozwią- zania.)	$(x+2)+x=6$, skąd $x=2$. $2 \in (0; +\infty)$, więc $x_2=2$.
---	---	---

R

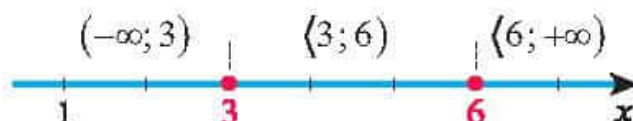
Warunki **1**, **2**, **3** można zastąpić alternatywą^{*)} układów:

$$\mathbf{1} \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \\ (-x-2)+(-x)=6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \mathbf{2} \begin{cases} x \in \langle -2; 0 \rangle \\ (x+2)+(-x)=6 \end{cases}, \quad \text{lub} \quad \mathbf{3} \begin{cases} x \in \langle 0; +\infty \rangle \\ (x+2)+x=6 \end{cases}$$

b) $|x-3|-|x-6|=3$.

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{gdy } x \geq 3 \\ -x+3, & \text{gdy } x < 3 \end{cases}, \quad |x-6| = \begin{cases} x-6, & \text{gdy } x \geq 6 \\ -x+6, & \text{gdy } x < 6 \end{cases}$$

Liczby 3 i 6 dzielą zbiór $\mathbb{R}$ na przedziały, jak na rysunku.



Równanie $|x-3|-|x-6|=3$ jest równoważne alternatywie^{*)} układów:

$\begin{cases} x \in (-\infty; 3) \\ -x+3-(-x+6)=3 \end{cases}$	lub	$\begin{cases} x \in \langle 3; 6 \rangle \\ x-3-(-x+6)=3 \end{cases}$	lub	$\begin{cases} x \in \langle 6; +\infty \rangle \\ x-3-(x-6)=3 \end{cases}$
$\begin{cases} x \in (-\infty; 3) \\ -3=3 \end{cases}$ <i>-równość fałszywa</i>	lub	$\begin{cases} x \in \langle 3; 6 \rangle \\ x=6 \end{cases}$ $6 \notin \langle 3; 6 \rangle$,	lub	$\begin{cases} x \in \langle 6; +\infty \rangle \\ 3=3 \end{cases}$ <i>-równość prawdziwa</i>
układ nie ma rozwiązań		układ nie ma rozwiązań		$x \in \langle 6; +\infty \rangle$

Odp.: a) $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, b) $x \in \langle 6; +\infty \rangle$.

Ćwiczenie 38. Rozwiąż równanie:

a) $|x+1|+2|x-1|=5$, b) $|4x-2|-|3-x|=2$.

R

Odpowiedzi do ćwiczeń

33. a) -5 i 5 , b) $-2\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{2}$, c) 0 , d) brak pierwiastków. 34. a) $x_1 = -8$, $x_2 = 8$, b) $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

35. a) $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, b) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. 36. a) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, b) $x_1 = -4$, $x_2 = 6$.

37. a) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, b) $x_1 = -9$, $x_2 = -7$, $x_3 = -3$, $x_4 = -1$. 38. a) $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 2$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{7}{5}$.

^{*)} Alternatywa – zdanie złożone ze zdań pojedynczych połączonych spójnikiem „lub”.

Zadania utrwalające

6.47. Rozwiąż równanie:

a) $-|y| = -4$, b) $|x| = -0,1$, c) $\frac{1}{2}|x| = 0$, d) $|-x| = 20$.

6.48. Rozwiąż równanie:

a) $|-2| - \frac{2 \cdot |x|}{3} = 1$, b) $-(|a| - 5) = 12$, c) $(\sqrt{2} + 1) \cdot |x| = 0$, d) $|2x| = 1 - \sqrt{2}$.

6.49. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*Liczba -3 nie spełnia równania:

A. $|-3x| = 9$, B. $|3x| = -9$.

Liczba -2 jest pierwiastkiem równania:

C. $|\sqrt{2}x| = 2\sqrt{2}$, D. $|\sqrt{3}x| = 3\sqrt{3}$.

6.50. Rozwiąż równanie:

a) $|x - 4| = 1$, b) $|5 - x| = 2$, c) $2|x + 3| = 10$, d) $-3|x - 2| = -12$.

6.51. Nie rozwiązując równania, podaj liczbę jego pierwiastków.

a) $2|x| = 0$, b) $|1 - x| = 0$, c) $4 \cdot |x + 2| = 1$,
d) $|x| = 2 - \sqrt{5}$, e) $|x + 3| = \sqrt{3} - 1$, f) $|4 - x| = 3 - \sqrt{8}$.

6.52. Rozwiąż równanie:

a) $\sqrt{(x+2)^2} = 1$, b) $\sqrt{(x-3)^2} = 0$, c) $\sqrt{(3-x)^2} = 4$,
d) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2$, e) $\sqrt{x^2 + 14x + 49} = 5$, f) $\sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2} = 0$.

6.53. Używając symbolu wartości bezwzględnej, zapisz równanie, którego zbiorem rozwiązań jest zbiór punktów leżących na osi, których:

a) odległość od liczby 1 jest równa 4, b) odległość od liczby -3 jest równa 3.

6.54. Uzasadnij, że równoważne są równania:

D a) $|(1 - \sqrt{3})x| = 1$ i $|(\sqrt{3} - 1)x| = 1$, b) $|1 - x| = 3$ i $|x - 1| = 3$.

6.55. Uzasadnij, że rozwiązaniem równania $|x| = |-x|$ jest każda liczba rzeczywista x .

D

R

6.56. Rozwiąż równanie:

a) $||x+3|-2|=4$,

b) $|1-|1-x||=1$,

c) $||2x-3|+1|=3$,

d) $|3|1-x|-2|=4$,

e) $2 \cdot ||3x+2|+1|=10$,

f) $||x-1|-1|-1|=1$.

6.57. Rozwiąż równanie:

a) $|x-1|+|x|=2$,

b) $|x+4|-|x|=4$,

c) $|3-x|+|4+2x|=5$,

d) $|4-2x|+|6-x|=5$,

e) $|x|-|2x-4|=0$,

f) $|x-4|-2|2-x|=2$.

6.58. Wykaż, że gdy $a \in (2; 3)$, to $\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a} + \frac{\sqrt{a^2-4a+4}}{a-2} = 2$.

D

6.59. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Liczbą całkowitą spełniającą równanie $|x-2|+2|x+2|=4$ jest liczba:

-1.	P	F
-2.	P	F
należąca do przedziału $\langle -2; 2 \rangle$.	P	F

6.60. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pierwiastki równania $||x-1|+x|=3$ to:

A. liczby -1 i 2,

B. liczby -1 i 1,

C. liczba 2.

6.61. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $|-x|+|x|=1$:

A. ma dwa rozwiązania x_1 i x_2 takie, że $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$,

B. ma jedno rozwiązanie x_0 takie, że $x_0 = \frac{1}{2}$,

C. nie ma rozwiązania.

6.62. Uzasadnij, że:

D

a) równanie $|2x|+3x-5=|x-1|$ ma jeden pierwiastek,

b) równanie $2|x|+|x-1|+|x+1|=4$ ma dwa pierwiastki,

c) liczbą całkowitą spełniającą równanie $|x-2|+2|x+2|=4$ jest liczba należąca do przedziału $\langle -2; 2 \rangle$.

R

6.63. Uzasadnij, że jedyną liczbą całkowitą spełniającą równanie $|x-3|+2|x+1|=4$ jest liczba -1.

D

Nierówności z wartością bezwzględną

Przy rozwiązywaniu nierówności z wartością bezwzględną posługujemy się jej interpretacją na osi liczbowej oraz odległością na osi między dwiema liczbami.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 27. Użyj symbolu wartości bezwzględnej i zapisz za pomocą nierówności zbiór tych punktów x , dla których:

- a) suma odległości od punktów -2 i 3 jest nie większa niż 5 ,
- b) różnica odległości od punktów -4 i 2 jest większa od 1 .

Rozwiązanie Używając symbolu wartości bezwzględnej, zapisujemy podany warunek w postaci nierówności:

a) $|x+2| + |x-3| \leq 5$,

odległość od punktu -2 odległość od punktu 3

b) $|x+4| - |x-2| > 1$.

odległość od punktu -4 odległość od punktu 2

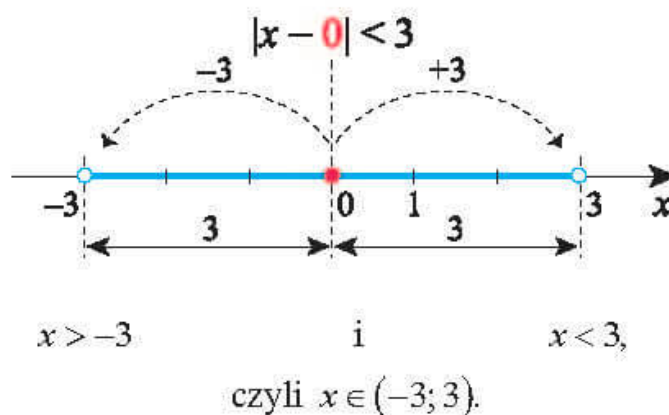
Ćwiczenie 39. Użyj symbolu wartości bezwzględnej i zapisz za pomocą równania lub nierówności zbiór tych punktów x , dla których:

- a) suma odległości od punktów 3 i 5 jest równa 2 ,
- b) różnica odległości od punktów -4 i 7 jest mniejsza od 3 ,
- c) suma odległości od punktów -1 i 1 jest nie większa niż $\frac{1}{2}$.

Przykład 28. Rozwiąż nierówność: a) $|x| < 3$, b) $|x| \geq 3$.

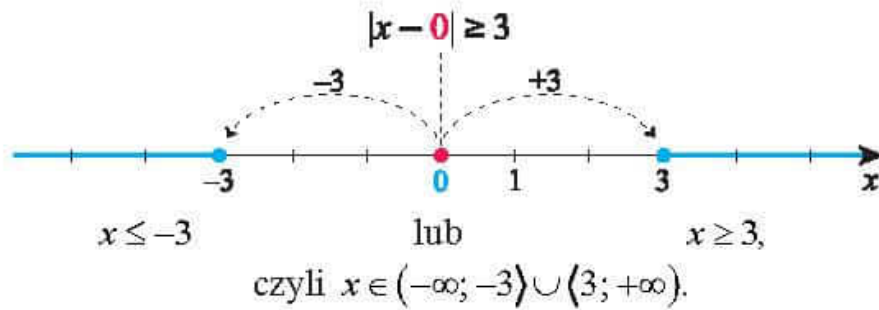
Rozwiązanie

- a) Rozwiązać nierówność $|x| < 3$, to znaczy znaleźć na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od liczby 0 jest mniejsza od liczby 3 , co zapisujemy $|x-0| < 3$.



Nierówność $|x| < 3$ możemy zastąpić nierównością podwójną $-3 < x < 3$.

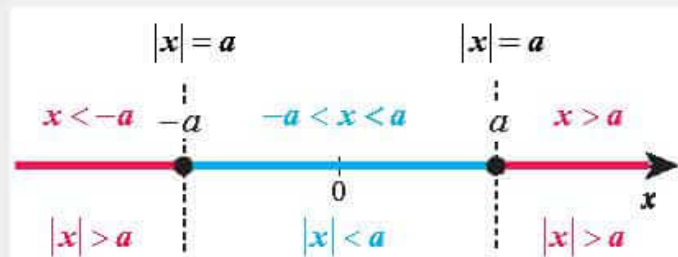
- b) Rozwiązać nierówność $|x| \geq 3$, to znaczy znaleźć na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od liczby 0 jest nie mniejsza niż 3, co zapisujemy $|x-0| \geq 3$.



Nierówność $|x| \geq 3$ możemy zastąpić alternatywą nierówności $x \leq -3$ lub $x \geq 3$.

Uwaga Jeżeli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$, to:

- $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = -a$ lub $x = a$,
- $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a < x < a$,
- $|x| > a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < -a$ lub $x > a$.

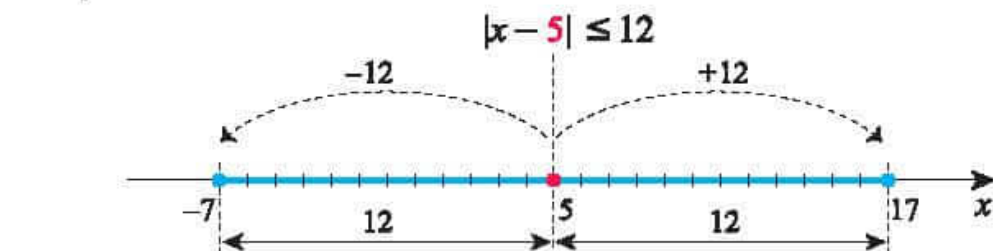


Ćwiczenie 40. Rozwiąż nierówność: a) $|x| < 6$, b) $|x| > \sqrt{2}$, c) $|x| \leq 8$.

Przykład 29. Rozwiąż nierówność: a) $|x-5| \leq 12$, b) $|x+1| > 3$.

Rozwiązanie

- a) Warunek $|x-5| \leq 12$ spełniają współrzędne x punktów, których odległość od liczby 5 jest mniejsza lub równa 12.



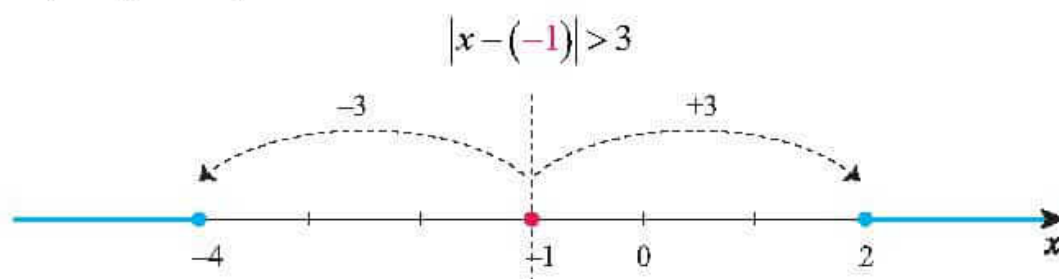
Zatem $|x-5| \leq 12$, gdy $-12 \leq x-5 \leq 12$
 $-12+5 \leq x \leq 12+5$
 $-7 \leq x \leq 17$.

$|x| \leq a$ wtedy i tylko
 wtedy, gdy $-a \leq x \leq a$.

Odp.: a) $x \in [-7; 17]$.

b) Nierówność $|x+1| > 3$ zapisujemy w postaci $|x - (-1)| > 3$.

Warunek $|x - (-1)| > 3$ spełniają współrzędne x punktów, których odległość od liczby -1 jest większa od 3.



Zatem

$$\begin{aligned} &|x - (-1)| > 3, \text{ gdy} \\ &x + 1 < -3 \quad \text{lub} \quad x + 1 > 3 \\ &x < -4 \quad \text{lub} \quad x > 2, \\ &x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty). \end{aligned}$$

$|x| > a$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $x < -a$ lub $x > a$

Odp.: b) $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

Ćwiczenie 41. Rozwiąż nierówność:

a) $|x+4| < 7$, b) $|x-5| \leq 9$, c) $|x-2| > 4$, d) $|x+3| \geq 2$.

Przykład 30. Rozwiąż nierówność:

a) $||x+4|+2| < 6$, b) $||2x+3|-1| > 4$.

Rozwiązanie Korzystamy z własności wartości bezwzględnej.

a)
$$\overbrace{||x+4|+2|}^a < 6$$

$$-6 < |x+4|+2 < 6, \text{ czyli}$$

$$|x+4|+2 > -6 \quad \text{i} \quad |x+4|+2 < 6$$

$$|x+4| > -8 \quad \text{i} \quad |x+4| < 4$$

$$x \in \mathbf{R} \quad \text{i} \quad -4 < x+4 < 4$$

$$-8 < x < 0.$$

$|x+4| \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathbf{R}$, więc tym bardziej $|x+4| > -8$

$|a| < 6$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-6 < a < 6$

$|x+4| < 4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-4 < x+4 < 4$

Zatem $x \in \mathbf{R}$ i $x \in (-8; 0)$.

Odp.: a) $x \in (-8; 0)$.

R

b)
$$\overbrace{||2x+3|-1|}^a > 4$$

$|2x+3|-1 < -4$ lub $|2x+3|-1 > 4$

$|2x+3| < -3$ lub $\overbrace{|2x+3|}^a > 5$

Nieemożliwe, by $|2x+3| < -3$,
bo $|2x+3| \geq 0$.

$2x+3 < -5$ lub $2x+3 > 5$

$2x < -8$ lub $2x > 2$

$x < -4$ lub $x > 1$,

czyli $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

$|a| > 4$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $a < -4$ lub $a > 4$

$|a| > 5$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $a < -5$ lub $a > 5$

Odp.: b) $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

Ćwiczenie 42. Rozwiąż nierówność lub równanie:

a) $||x+2|+2| \geq 4$, b) $||2-x|-1| < 3$, c) $||x-2|-2|-2| = 2$.

Przykład 31. Rozwiąż nierówność $|x-5| < x+7$.

Rozwiązanie Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, otrzymujemy:

$$|x-5| = \begin{cases} -x+5, & \text{gdy } x < 5 \\ x-5, & \text{gdy } x \geq 5 \end{cases}$$

Liczba 5 dzieli zbiór liczb rzeczywistych na dwa przedziały: $(-\infty; 5)$ i $\langle 5; +\infty)$.

1 $x \in (-\infty; 5)$

lub

2 $x \in \langle 5; +\infty)$

$$-x+5 < x+7$$

$$x-5 < x+7$$

$$-2x < 2 \quad /: (-2)$$

$$0 < 12 \quad \text{nierówność prawdziwa}$$

$$x > -1$$

$$x \in \langle 5; +\infty) \text{ i } x \in \mathbb{R},$$

$$x \in (-\infty; 5) \text{ i } x > -1,$$

$$\text{czyli } x \geq 5.$$

$$\text{czyli } -1 < x < 5.$$

Z warunków **1** i **2** otrzymujemy $-1 < x < 5$ lub $x \geq 5$,

$$\text{czyli } x \in (-1; 5) \cup \langle 5; +\infty),$$

więc $x > -1$.

$$\text{Odp.: } x \in (-1; +\infty).$$



Ćwiczenie 43. Rozwiąż nierówność:

a) $|6+x| \geq 2x+6$, b) $|x+3| > 2x-2$, c) $2|x-1| \leq 3x+4$.

R

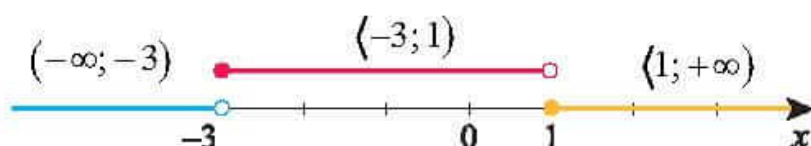
Przykład 32. Rozwiąż nierówność $|x-1|-|x+3| \leq 6$.

Rozwiązanie Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, otrzymujemy:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{gdy } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{gdy } x < 1 \end{cases}, \quad |x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{gdy } x \geq -3 \\ -x-3, & \text{gdy } x < -3 \end{cases}.$$

Liczby -3 i 1 dzielą zbiór liczb rzeczywistych na trzy przedziały:

$$(-\infty; -3), \quad \langle -3; 1), \quad \langle 1; +\infty).$$



$$\begin{cases} x \in (-\infty; -3) \\ 1-x - (-x-3) \leq 6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \in \langle -3; 1) \\ 1-x - (x+3) \leq 6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \in \langle 1; +\infty) \\ x-1 - (x+3) \leq 6 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -3) \\ 4 \leq 6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \in \langle -3; 1) \\ x \geq -4 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \in \langle 1; +\infty) \\ -4 \leq 6 \end{cases}.$$

*nierówność prawdziwa,
gdy $x \in (-\infty; -3)$*

czyli $x \in \langle -3; 1)$

*nierówność prawdziwa,
gdy $x \in \langle 1; +\infty)$*

Zatem $x \in (-\infty; -3)$ lub $x \in \langle -3; 1)$, lub $x \in \langle 1; +\infty)$,

więc $x \in (-\infty; -3) \cup \langle -3; 1) \cup \langle 1; +\infty)$, czyli $x \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 44. Rozwiąż nierówność: a) $|1-x|-|x+3| \geq 6$, b) $|x-1| > |x+3|$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

39. a) $|x-3|+|x-5|=2$, b) $|x+4|-|x-7|<3$, c) $|x+1|+|x-1|\leq 0,5$.

40. a) $x \in (-6; 6)$, b) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$, c) $x \in \langle -8; 8)$.

41. a) $x \in (-11; 3)$, b) $x \in \langle -4; 14)$, c) $x \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$, d) $x \in (-\infty; -5) \cup \langle -1; +\infty)$.

42. a) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle 0; +\infty)$, b) $x \in (-2; 6)$, c) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$.

43. a) $x \leq 0$, b) $x < 5$, c) $x \geq -0,4$. 44. a) Brak rozwiązania, b) $x < -1$.

Zadania utrwalające

6.64. Rozwiąż nierówność:

a) $|x| > 0$,

b) $|x| \geq 0$,

c) $|x| < 0$,

d) $|x| \leq 0$,

e) $|x| > -1$,

f) $|x| < -2$,

g) $|x| \geq 5$,

h) $\frac{1}{3}|x| > 2$.

6.65. Rozwiąż nierówność:

a) $|x-3| < 4$,

b) $|x+1| < 3$,

c) $|x+2| > 2$,

d) $|x-4| \geq 3$,

e) $|x+1| > 1$,

f) $|x+1| \leq \sqrt{2}$.

6.66. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby x spełniające warunek:

a) $|x| < 5$,

b) $|x| \geq 2$,

c) $|x+1| < 3$,

d) $|x+1| > 4$,

e) $|x-3| \leq 3$,

f) $|x-5| \geq 1$.

6.67. Zapisz za pomocą wartości bezwzględnej warunek:

a) $x \in \langle -2; 2 \rangle$,

b) $x > -3$ i $x < 3$,

c) $x < -4$ lub $x > 4$,

d) $x \in (0; 4)$,

e) $x \in \langle -4; 0 \rangle$,

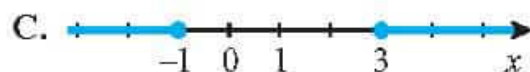
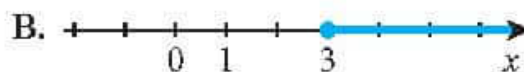
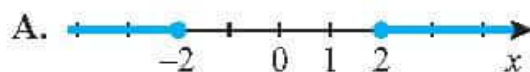
f) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

6.68. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.*

Zbiorem rozwiązań nierówności $ x-3 \leq 2$ jest przedział $\langle -5; 5 \rangle$.	P	F
Liczba 1 nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $ 2x > 1$.	P	F
Liczba 1 nie spełnia nierówności $ x-\sqrt{2} > 1$.	P	F

6.69. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Zbiór rozwiązań nierówności $|x-1| \geq 2$ zaznaczono na rysunku:



6.70. Rozwiąż nierówność:

a) $||x-2|+1| < 4$,

b) $||x+1|-3| > 2$,

c) $||x+4|-1| \leq 3$,

d) $||x-1|+2| \geq 2$,

e) $||x-3|+5| < 1$,

f) $|4-2|x+1|| > 8$.

6.71. Rozwiąż nierówność:

a) $|2x+1|-|x| < 0$,

b) $9-|2x-5| > |x-1|$,

c) $\sqrt{9x^2+36x+36} \leq 15-|2x+4|$,

d) $4 \cdot \left| \frac{2}{3}x-2 \right| \geq \left| \frac{2}{3}x-2 \right| + 6$,

e) $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9} \leq 0$,

f) $|2x-3|+|4-x| > 0$.

6.72. Uzasadnij, że największą liczbą ujemną spełniającą nierówność $|x+2|+|x-3| \geq 9$ jest liczba -4 .

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $-2x + 4 > 0$ jest liczba:

- A. 0, B. 2, C. 1, D. -2.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do zbioru rozwiązań nierówności $4 - 1,5x \geq 7 - (2x - 1)$ nie należy liczba:

- A. 7, B. 8, C. 9, D. 10.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Każda liczba rzeczywista spełnia nierówność:

- A. $3(4x + 1) < 12x + 2$, B. $3(4x + 1) < 12x$,
C. $3(4x + 1) > 12x + 2$, D. $3(4x - 1) > 12x$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{6-2x}}$ ma sens liczbowy, gdy:

- A. $x > 3$, B. $x \geq 3$, C. $x < 3$, D. $x \leq 3$.

5. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.*

Jeżeli w równaniu $3(1-x) = \blacksquare - 3x$ w kratkę $\blacksquare$ wpiszemy:

liczbę 3, to otrzymamy równanie sprzeczne.	P	F
liczbę 5, to otrzymamy równanie tożsamościowe.	P	F
wyrażenie $2x$, to otrzymamy równanie oznaczone.	P	F

6. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Nierówność $\|x| - 1| \leq 2$ spełniają liczby x należące do przedziału:

- A. $\langle -3; 3 \rangle$, B. $\langle -1; 1 \rangle$.

Równanie $|x - 1| = 1$:

- C. ma rozwiązanie, D. nie ma rozwiązania.

7. Uzasadnij, że równanie $|x - 5| + |x + 6| = 0$ nie ma rozwiązania.

D

8. Uzasadnij, że równanie $|5 - 2|x + 3|| = 1$ ma cztery pierwiastki.

D

9. Uzasadnij, że nierówność $|1 - |x|| \leq 3$ spełnia dziewięć liczb całkowitych.

D

7. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi

Rozwiązywanie niektórych problemów sprowadza się do ułożenia równania postaci $ax + by = c$ z niewiadomymi x i y , które nazywa się równaniem liniowym.

Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 1. Jacek narysował w zeszycie kilka trójkątów i kilka sześciokątów (figury były rozłączne) i policzył wierzchołki tych figur. Okazało się, że jest ich razem 24. Ułóż równanie opisujące daną sytuację i rozwiąż je.

Rozwiązanie Nie znamy liczby trójkątów ani liczby sześciokątów. Oznaczmy:

x – liczba trójkątów, $x \in N^+$,

y – liczba sześciokątów, $y \in N^+$,

więc $3x$ – liczba wierzchołków wszystkich trójkątów,

$6y$ – liczba wierzchołków wszystkich sześciokątów.

Z warunków zadania otrzymujemy równanie liniowe:

$$3x + 6y = 24,$$

liczba wszystkich wierzchołków wielokątów

$$x + 2y = 8.$$

$$3x + 6y = 24 \quad / :3$$

Rozwiązaniami równania $x + 2y = 8$ są wszystkie pary liczb (x, y) spełniające warunek $x + 2y = 8$, gdzie $x \in N^+$ i $y \in N^+$ (założenia wynikają z warunków zadania).

Zauważamy, że interpretacją geometryczną rozwiązań równania jest zbiór tych punktów leżących na prostej o równaniu $x + 2y = 8$, których współrzędne są dodatnimi liczbami naturalnymi.

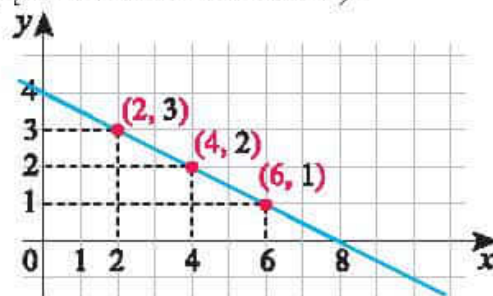
Wyznaczamy y z równania $x + 2y = 8$:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Zauważamy, że wartość x powinna być liczbą naturalną parzystą, gdyż $y \in N^+$.

Odp.: Warunki zadania spełniają pary liczb:

$(2, 3)$, $(4, 2)$, $(6, 1)$. Jacek mógł narysować 2 trójkąty i 3 sześciokąty lub 4 trójkąty i 2 sześciokąty lub 6 trójkątów i 1 sześciokąt.



x	2	4	6	8	10
$y = -\frac{1}{2}x + 4$	3	2	1	0	-1

Definicja

Równanie, które można przedstawić w postaci $ax + by = c$ z niewiadomymi x i y , nazywamy:

- **równaniem stopnia pierwszego**, gdy $a \cdot b \neq 0$ (liczby a i b nie są zerami),
- **równaniem liniowym**, gdy $a^2 + b^2 > 0$ (tylko jedna z liczb a i b może być równa 0).

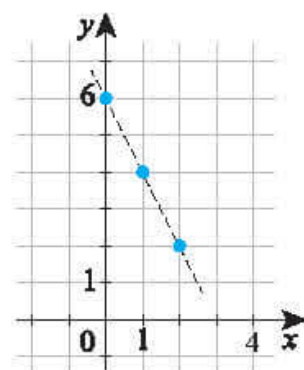
Rozwiązaniem równania liniowego $ax + by = c$ jest każda para liczb (x, y) , która spełnia to równanie.

Przykład 2. Podaj trzy pary liczb x i y , które spełniają równanie $2x + y - 6 = 0$, i zaznacz w układzie współrzędnych punkty odpowiadające tym parom liczb.

Rozwiązanie Równanie $2x + y - 6 = 0$ zapisujemy w postaci $y = -2x + 6$.

- Jeśli $x = 0$, to $y = -2 \cdot 0 + 6 = 6$,
- jeśli $x = 1$, to $y = -2 \cdot 1 + 6 = 4$,
- jeśli $x = 2$, to $y = -2 \cdot 2 + 6 = 2$.

Odp.: Równanie $2x + y - 6 = 0$ spełniają pary:
 $(0, 6)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$.



Zauważamy, że wszystkie zaznaczone w układzie współrzędnych punkty leżą na jednej prostej. Współrzędne tych punktów spełniają równanie $2x + y - 6 = 0$, czyli równanie $y = -2x + 6$. O każdym z tych równań mówimy, że jest równaniem tej prostej.

Ćwiczenie 1. Podaj trzy pary liczb spełniających równanie:

- a) $3x + y = 5$, b) $x - 2y = -3$, c) $x = y$.

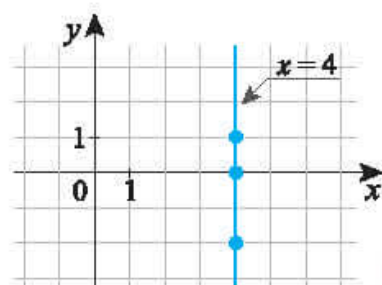
Uwaga Jeżeli utożsamiamy pary liczb rzeczywistych (x, y) z punktami płaszczyzny, to równanie $ax + by + c = 0$ opisuje prostą, gdy $a^2 + b^2 > 0$.

Przykład 3. Podaj co najmniej dwie pary liczb spełniające równanie $x - 4 = 0$. Przedstaw w układzie współrzędnych obraz graficzny zbioru rozwiązań tego równania.

Rozwiązanie $x - 4 = 0$ wtedy, gdy $x = 4$.

Rozwiązaniami równania $x = 4$ są pary liczb $(4, y)$, gdzie $y \in \mathbb{R}$, np. $(4, -2)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ itd.

Obrazem graficznym zbioru rozwiązań równania $x - 4 = 0$ jest prosta o równaniu $x = 4$, równoległa do osi y .



Ćwiczenie 2. Podaj co najmniej dwie pary liczb będących rozwiązaniami równania $y = 3$. Zaznacz na płaszczyźnie obraz graficzny zbioru rozwiązań danego równania.

Ćwiczenie 3. Dane jest równanie $x - y + 6 = 0$.

- Podaj trzy pary liczb spełniających równanie.
- Czy zbiór wszystkich par liczb spełniających dane równanie jest zbiorem skończonym?
- Nazwij figurę, która jest obrazem graficznym zbioru rozwiązań tego równania.

Ćwiczenie 4. Podaj trzy pary liczb spełniających równanie:

- $3x + y = 5$,
- $x - 2y = -3$,
- $x = y$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

- Np.: a) $(-1, 8)$, $(0, 5)$, $(1, 2)$, b) $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(-3, 0)$, c) $(-2, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.
- Np.: $(0, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$. 3. a) Np.: $(0, 6)$, $(2, 8)$, $(-3, 3)$, b) nie, c) prosta.
- Np.: a) $(0, 5)$, $(\frac{5}{3}, 0)$, $(1, 2)$, b) $(-3, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$, c) $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(2, 2)$.

Zadania utrwalające

- Sprawdź, które pary liczb: $(1, 1)$, $(12, 2)$, $(0, \frac{2}{5})$, $(-1, \sqrt{3})$ należą do zbioru rozwiązań równania $x - 5y = 2$.
- Przedstaw w układzie współrzędnych obraz graficzny zbioru rozwiązań równania:
 - $x - 5 = 0$,
 - $2x - y - 1 = 0$,
 - $y + 7 = 0$.
- Równanie liniowe ma postać $-x + 2y - 1 = 0$.
 - Podaj dwie pary liczb, które spełniają to równanie.
 - Podaj parę liczb, która nie spełnia tego równania.
 - Nazwij figurę, która jest obrazem graficznym zbioru rozwiązań danego równania.

Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Uwaga

- Jeśli dwa równania liniowe z dwiema niewiadomymi połączone są spójnikiem **i**, np. $2x - y + 4 = 0$ **i** $5x + 4y = 12$,
to możemy je zapisać w postaci układu równań
$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$$
- Rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi jest każda para liczb (x, y) , która spełnia jednocześnie oba równania.

Ćwiczenie 5. Sprawdź, czy para liczb $(3, -1)$ spełnia każde równanie układu:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x - y = 7 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x = 3 \\ 5x = 3 - 12y \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 7 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Wskazówka. Wstaw do równań układu za x liczbę 3 i za y liczbę -1 , wykonaj obliczenia i stwierz, czy obie otrzymane równości są prawdziwe.

Układy równań liniowych możemy rozwiązywać **metodą podstawiania** lub **metodą przeciwnych współczynników**.

Metoda podstawiania polega na tym, że z jednego z równań wyznaczamy jedną niewiadomą i podstawiamy otrzymane wyrażenie za tę niewiadomą w drugim równaniu.

W ten sposób to drugie równanie staje się równaniem z jedną niewiadomą.

Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 5. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 6x - 2y = 16 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązanie

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 6x - 2y = 16 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy y .

$$\begin{cases} y = 7 - 2x \\ 6x - 2 \cdot (7 - 2x) = 16 \end{cases}$$

Podstawiamy do drugiego równania za y wyrażenie $7 - 2x$.

$$\begin{aligned} \text{Rozwiązujemy drugie równanie: } 6x - 2(7 - 2x) &= 16 \\ 6x - 14 + 4x &= 16 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 7 - 2x \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 - 2 \cdot 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Wynik $x = 3$ podstawiamy do pierwszego równania.

$$\text{Odp.: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(3, 1)$.

Ćwiczenie 6. Rozwiąż metodą podstawiania układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x + y = 11 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 3y = 20 \end{cases}.$$

Metoda przeciwnych współczynników polega na przekształceniu obu równań układu tak, by przy jednej z niewiadomych były liczby przeciwe. Tak otrzymane równania układu dodajemy stronami. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 6. Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 6x - 2y = 16 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 7 & / \cdot 2 \\ 6x - 2y = 16 \end{cases}$$

Obie strony pierwszego równania mnożymy przez 2, aby w równaniach przy zmiennej y były przeciwe liczby: 2 i -2 .

$$+ \begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 6x - 2y = 16 \end{cases}$$

Równania dodajemy stronami.

$$10x + 0y = 30$$

$$10x = 30$$

$$x = 3$$

Otrzymujemy równanie $10x = 30$ z niewiadomą x i rozwiązujemy je.

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Wartość $x = 3$ podstawiamy do dowolnego równania układu i obliczamy y .

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2 \cdot 3 + y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

b) Metodą przeciwnych współczynników możemy obliczyć obie niewiadome x i y .

Obliczamy niewiadomą x :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = 5 & / \cdot 3 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases}$$

$$11x = 19$$

$$x = \frac{19}{11}$$

$$\text{Odp.: a) } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x = \frac{19}{11} \\ y = \frac{2}{11} \end{cases}.$$

Obliczamy niewiadomą y :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 & / \cdot (-3) \\ 3x - y = 5 & / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 9y = -12 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}$$

$$-11y = -2$$

$$y = \frac{2}{11}$$

Uwaga

- Rozwiązywanie układu równań polega na zastępowaniu tego układu kolejnymi układami jemu równoważnymi, eliminując niewiadomą przez:
 - podstawianie (metoda podstawiania),
 - dodawanie równań stronami (metoda przeciwnych współczynników).
- Dwa układy równań są równoważne, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Ćwiczenie 7. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 5x - 4y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 8. Doprowadź każde równanie układu do postaci $ax + by = c$:

$$\text{a) } \begin{cases} 2(x+y) - 2 = 3(x+2) \\ 2(y+2) + 3(x-y) = 2x - 1 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} (x-1)^2 - (y-3)^2 = (x-y)(x+y) \\ \frac{x+4}{2} - \frac{y+4}{3} = 1 \end{cases}.$$

Przykład 7. Określ, czy układ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny, gdy:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Do wszystkich układów zastosujemy metodę przeciwnych współczynników.

$\text{a) } \begin{array}{r} + \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \\ \hline 2x = 6 \\ x = 3 \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}$	$\text{b) } \begin{array}{r} \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases} \quad / \cdot (-2) \\ \hline + \begin{cases} -2x + 2y = -10 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases} \\ \hline 0x + 0y = 0 \\ 0 = 0 \\ \text{równość prawdziwa} \end{array}$	$\text{c) } \begin{array}{r} \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \quad / \cdot (-2) \\ \hline + \begin{cases} -2x + 2y = -6 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \\ \hline 0x + 0y = -2 \\ 0 = -2 \\ \text{równość fałszywa} \end{array}$
Układ oznaczony	Układ nieoznaczony	Układ sprzeczny
Rozwiązaniem układu jest jedna para liczb $(3, -1)$.	Rozwiązaniem układu są pary liczb (x, y) , gdzie	Układ nie ma rozwiązania.
	$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = x - 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y \in \mathbf{R} \\ x = y + 5 \end{cases}$	

Definicja

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy:

- **układem oznaczonym** (lub układem równań niezależnych), gdy ma jedno rozwiązanie, którym jest para liczb,
- **układem nieoznaczonym** (lub układem równań zależnych), gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań, czyli nieskończenie wiele par liczb spełnia równania układu,
- **układem sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązania.

Ćwiczenie 9. Określ, czy układ jest oznaczony, nieoznaczony czy spreczny, gdy:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2x - 3y = -2 \end{cases}, & \text{b)} \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}, & \text{c)} \begin{cases} 4x - y = 3 \\ 2x - 0,5y = 6 \end{cases}, \\ \\ \text{d)} \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}, & \text{e)} \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}, & \text{f)} \begin{cases} 3x + y = 8 \\ 3x - y = -2 \end{cases}. \end{array}$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

5. a) Tak, b) tak, c) nie.

6. a) (3, 2), b) (7, -2).

7. a) (-1, 1), b) $\left(\frac{4}{11}, -\frac{1}{22}\right)$.

8. a) $\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ x - y = -5 \end{cases}$, b) $\begin{cases} -2x + 6y = 8 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$.

9. Układ jest: a) oznaczony, b) nieoznaczony, c) spreczny, d) spreczny, e) nieoznaczony, f) oznaczony.

Zadania utrwalające

7.4. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}, & \text{b)} \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + 5y = -17 \end{cases}, & \text{c)} \begin{cases} 3m + n = 9 \\ 2m - 5n = -11 \end{cases}, \\ \\ \text{d)} \begin{cases} 4a - 2 = b \\ 3a + 7b = 1,5 \end{cases}, & \text{e)} \begin{cases} 5x = 4 - 2y \\ 4x + y = 3 \end{cases}, & \text{f)} \begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ x + 5y = -9,5 \end{cases}. \end{array}$$

7.5. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}, & \text{b)} \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -3x + y = 10 \end{cases}, & \text{c)} \begin{cases} x + 4y = 11 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}, \\ \\ \text{d)} \begin{cases} 4x + 5y = -4 \\ 6x + 7y = -6 \end{cases}, & \text{e)} \begin{cases} -2x + 5y = -10 \\ 7x - 4y = 8 \end{cases}, & \text{f)} \begin{cases} 9x + 8y = 1 \\ 5x - 6y = 11 \end{cases}. \end{array}$$

7.6. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x = y \\ 5x - y = 4 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 4x + y = 13 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 5y - x = 3 \\ x = 3 - y \end{cases}$,

d) $\begin{cases} 3x = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$,

e) $\begin{cases} 5y = 2 \\ x + y = 2\frac{2}{5} \end{cases}$,

f) $\begin{cases} 4y - x = 6 \\ 17y = 0 \end{cases}$,

g) $\begin{cases} a = b \\ 2a + b = 9 \end{cases}$,

h) $\begin{cases} u = v \\ 5u - v = 10 \end{cases}$,

i) $\begin{cases} 3r = s \\ 3r + s = 24 \end{cases}$,

j) $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -y = 2x \end{cases}$,

k) $\begin{cases} t - 3z = 4 \\ t - 8 = z \end{cases}$,

l) $\begin{cases} 1 = y \\ 1 = \sqrt{2}x - y \end{cases}$.

7.7. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{2} \\ x - \sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$,

d) $\begin{cases} 3x - 7y - 4 = 0 \\ 3x - 3y = 4 \end{cases}$,

e) $\begin{cases} 2x = 4y + 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$,

f) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 5 \\ 3x - 2y = 30 \end{cases}$,

g) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = -3 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$,

h) $\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ 2x + 2y + 3z = 8 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$,

i) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = -3 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$.

7.8. D Uczeń rozwiązując układ równań $\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$, otrzymał rozwiązanie

$x = -2$ i $y = -1$. Czy uczeń poprawnie rozwiązał ten układ równań?

Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród A, B i C.

T	Tak,	ponieważ	A.	para liczb $(-2, -1)$ spełnia tylko równanie $x + y = -3$.
			B.	para liczb $(-2, -1)$ spełnia tylko równanie $3x - 2y = 4$.
N	Nie,		C.	para liczb $(-2, -1)$ spełnia oba równania układu.

7.9. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 10(y+2)+x-5=x-5 \\ 25(y+2)+3(x-5)=-9 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{x+2y}{4}-\left(x-\frac{1}{3}y\right)=1+y \\ \frac{y+3}{6}+\frac{2-x}{8}=\frac{3}{2} \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} (x-1)^2-(y-3)^2=(x-y)(x+y) \\ \frac{x+4}{2}-\frac{y+4}{3}=1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} (x-2)^2-(y-1)^2=(x-y)(x+y)+5 \\ 2(x-y)+y^2=(y-2\sqrt{2})(y+2\sqrt{2}) \end{cases} \end{array}$$

7.10. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} \sqrt{2}x+y=3 \\ x-y=\sqrt{2}-1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x+3y=5\sqrt{2} \\ x-y=0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x+y-2\sqrt{2}=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+y=\sqrt{2}+1 \\ (\sqrt{2}+1)x-y=\sqrt{2}-1 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} \sqrt{2}x-y=-\sqrt{2}-1 \\ x+\sqrt{3}y=\sqrt{3}-1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} -3x+\sqrt{2}y=-4 \\ 2x-\sqrt{6}y=4-2\sqrt{3} \end{cases} \end{array}$$

7.11. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x+y=16 \\ x-y=14 \end{cases}$ jest para liczb i są to:

- A. dwie liczby dodatnie, B. dwie liczby ujemne,
C. liczba dodatnia i zero, D. liczba dodatnia i liczba ujemna.

7.12. Rozwiąż układ równań i określ, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny, gdy:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 6x+9y=15 \\ 2x+3y=3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{1}{2}x-y=1 \\ x-2y=2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 1,5x+0,5y=2 \\ 0,3x+0,1y=\frac{2}{3} \end{cases} \\ \text{d)} \begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y=2 \\ x+0,6y=6 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x-y=-1 \\ y=2x \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x+y=13 \\ x-\frac{1}{2}y=2 \end{cases} \end{array}$$

7.13. Podaj, jakie liczby można wpisać w miejsce $\square$ i $\bigcirc$, aby układ



równań $\begin{cases} \square x+2y=3 \\ 3x+\bigcirc y=9 \end{cases}$ był:

- a) nieoznaczony, b) oznaczony, c) sprzeczny.

Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania układów równań liniowych

Za pomocą równań liniowych i ich układów można rozwiązać wiele problemów z różnych dziedzin nauki i z życia. Wystarczy w tym celu:

- ustalić poszukiwane niewiadome i oznaczyć je dwiema dowolnymi literami – najczęściej używamy liter x i y ,
- zaobserwowane związki między poszukiwanymi wielkościami wyrazić symbolicznie z użyciem liczb, liter i znaków działań – ułożyć dwa równania liniowe z dwiema niewiadomymi,
- rozwiązać otrzymany układ równań.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 8. Wprowadź niewiadome x oraz y i zapisz za pomocą układu równań informacje przedstawione w zadaniu.

Na parkingu stało 120 pojazdów, w tym samochody osobowe i motocykle.

Ile było pojazdów każdego rodzaju, jeżeli wiadomo, że wszystkie pojazdy łącznie stały na 366 kołach?

Rozwiązanie Przyjmujemy oznaczenia:

x – liczba samochodów, więc $4x$ – liczba kół samochodów,

y – liczba motocykli, więc $2y$ – liczba kół motocyklowych.

Układamy równania i zapisujemy je w postaci układu równań:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 4x + 2y = 366 \end{cases}$$

*Na parkingu stało 120 pojazdów,
pojazdy miały łącznie 366 kół.*

Ćwiczenie 10. Wprowadź niewiadome x i y . Zapisz informacje przedstawione w zadaniu za pomocą układu równań.

a) Do salonu samochodowego sprowadzono 48 samochodów dwóch marek: Kia i Suzuki. Samochodów marki Kia było dwa razy więcej niż samochodów marki Suzuki.

b) W klasie liczącej 27 uczniów dziewcząt jest dwa razy mniej niż chłopców.

W zależności od informacji zawartych w zadaniu obieramy strategię jego rozwiązania. Pokażemy na przykładzie, że ten sam problem (zadanie) można rozwiązać za pomocą jednego równania lub za pomocą dwóch równań, czyli ich układu.

Przykład 9. Kasia narysowała kilka trójkątów i kilka czworokątów, a następnie policzyła ich wierzchołki. Było ich 70. Ile trójkątów, a ile czworokątów narysowała Kasia, jeżeli trójkątów było dwukrotnie więcej niż czworokątów?

Rozwiązanie Rozwiązujemy problem za pomocą:

jednego równania

x – liczba czworokątów,

$4x$ – liczba wierzchołków czworokątów,

$2x$ – liczba trójkątów,

$3 \cdot 2x$ – liczba wierzchołków trójkątów,

$$4x + 3 \cdot 2x = 70,$$

$$x = 7,$$

$$2x = 2 \cdot 7 = 14.$$

układu równań

x – liczba czworokątów,

y – liczba trójkątów.

$2x$ – liczba trójkątów,

$$\begin{cases} 2x = y \\ 4x + 3y = 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 14 \end{cases}$$

Odp.: Kasia narysowała 7 czworokątów i 14 trójkątów.

Ćwiczenie 11. Tata kupił dwa rodzaje puszek z karmą dla psów. Karma „Smaczek” kosztuje 2,80 zł za puszkę, a karma „Łasuch” 3,40 zł za puszkę. Tata kupił o 3 puszki mniej karmy „Łasuch” niż karmy „Smaczek” i zapłacił 33,20 zł. Ile puszek każdego rodzaju kupił tata?

Przykład 10. Oblicz długości boków trapezu równoramiennego $ABCD$ przedstawionego na rysunku.

Rozwiązanie

Układamy układ równań.

$$\begin{cases} 2x + y = 3x - 1 \\ 3y + (4x - 3y) = 3y + 2y + 3y \end{cases}$$

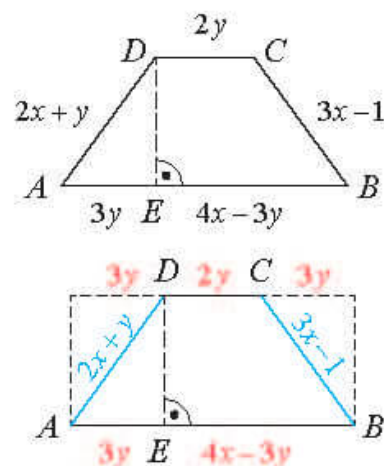
$$|AD| = |BC|$$

$$|AB| = 3y + 4x - 3y$$

$$\text{i } |AB| = 3y + 2y + 3y$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 4x = 8y \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

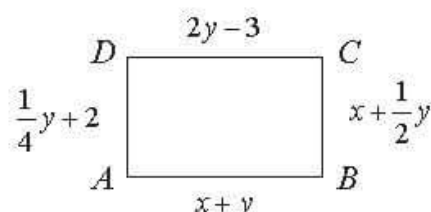
$$\begin{cases} |AB| = 8y \\ |DC| = 2y \\ |AD| = 3x - 1 \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} |AB| = 8 \cdot 1 = 8 \\ |DC| = 2 \cdot 1 = 2 \\ |AD| = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \end{cases}$$



Zapis $|AB|$ czytamy długość odcinka AB .

Odp.: Podstawy trapezu mają długości 8 i 2, a ramię 5.

Ćwiczenie 12. Oblicz długości boków prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.



Przykład 11. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych x i y spełniających równanie $xy - 3y = 3$.

Rozwiązanie Wszystkie pary liczb naturalnych x i y spełniających równanie $xy - 3y = 3$ można wyznaczyć następującą metodą:

- przekształcamy równanie do postaci $\underbrace{y(x-3)}_L = \underbrace{3}_P$, gdzie $y \in N$ i $(x-3) \in N$,
- liczbę 3 po prawej (P) stronie równania możemy przedstawić w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych tylko na dwa sposoby: $3 \cdot 1$ lub $1 \cdot 3$,
- rozpatrujemy dwa przypadki: $\begin{cases} y=3 \\ x-3=1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} y=1 \\ x-3=3 \end{cases}$ i wyznaczamy wszystkie pary liczb naturalnych spełniających te warunki.

Odp.: Równanie spełniają pary liczb naturalnych $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$.

Ćwiczenie 13. Wyznacz wszystkie pary x i y liczb:

- a) naturalnych spełniających równanie $xy - 4y = 7$,
 b) całkowitych spełniających równanie $x^2 - y^2 = 5$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

10. a) $\begin{cases} x+y=48 \\ x=2y \end{cases}$, gdzie x – liczba samochodów Kia, y – liczba samochodów Suzuki, **b)** $\begin{cases} x+y=27 \\ 2x=y \end{cases}$, gdzie x – liczba dziewcząt, y – liczba chłopców. **11.** Tato kupił 7 puszek karmy „Smaczek” i 4 puszki karmy „Łasuch”. **12.** 5 i 3.

13. a) $\begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=11 \\ y=1 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$. *Wskazówka.* **b)** $(x-y)(x+y)=5$, więc rozpatrujemy cztery przypadki, czyli $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-5 \end{cases}$, lub $\begin{cases} x-y=-5 \\ x+y=-1 \end{cases}$, lub $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$.

Zadania utrwalające

7.14. Zapisz informację w postaci układu równań i rozwiąż go.

- a) Liczba p jest o 3 większa od połowy liczby r , a suma liczb p i r jest równa 18.
 b) Liczba m stanowi 30% liczby n , a suma liczb m i n jest równa 65.



- 7.15. Suma liczb x i y jest trzykrotnie większa niż ich różnica, a pierwsza liczba jest o 4,3 większa od drugiej.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Powyższą sytuację można opisać równaniem:

A. $x + x - 4,3 = 3 \cdot [x - (x - 4,3)]$, B. $x + x - 4,3 = 3 \cdot [x + (x - 4,3)]$.

Powyższą sytuację można opisać układem równań:

C. $\begin{cases} x = y + 4,3 \\ x + y = 3 \cdot (x - y) \end{cases}$, D. $\begin{cases} y = x + 4,3 \\ x + y = 3 \cdot (x - y) \end{cases}$.

- 7.16. Na zebraniu poddano głosowaniu pewien wniosek. Głosowało 360 osób. Głosów za przyjęciem wniosku było o 104 więcej niż głosów za jego odrzuceniem. Ile osób głosowało za wnioskiem, a ile za jego odrzuceniem, jeżeli nikt nie wstrzymał się od głosu?

- 7.17. Piekarz ma obecnie pięć razy więcej lat praktyki niż jego uczeń. Za 4 lata piekarz będzie miał trzy razy więcej lat praktyki niż jego uczeń. Ile lat pracuje piekarz w swoim zawodzie?

- 7.18. Z przystani Radość odległej o 6 km od przystani Miłość wypłynęła motorówka. Z prądem rzeki płynęła 20 minut, a powrót trwał pół godziny. Oblicz średnią prędkość własną motorówki i prędkość nurtu rzeki.

- 7.19. Gdyby Aleksander Wielki umarł o 5 lat wcześniej, to panowałby przez $\frac{1}{4}$ swego życia. Gdyby żył o 9 lat dłużej, to panowałby przez połowę swego życia. Ile lat żył i ile lat panował Aleksander Wielki?

- 7.20. Kierowca prowadzi samochód, który zużywając 1 litr benzyny, może przejechać 12 km autostradą lub 9 km ulicami miasta. Podczas ostatniego weekendu przejechał 348 km i zużył 35 litrów benzyny. Ile litrów benzyny zużył na jazdę w mieście?

- 7.21. Dwa czerwone lizaki kosztują tyle samo co jeden lizak żółty i jeden lizak zielony. Dwa **D** lizaki żółte kosztują tyle samo co jeden lizak czerwony i dwa lizaki zielone. Uzasadnij, że najdroższy jest lizak żółty.

- 7.22. Łączna cena stołu i 6 krzeseł była równa 4800 zł. Cenę stołu obniżono o 10%, a cenę krzesła o 20%. Teraz za zestaw trzeba zapłacić 4050 zł. Oblicz, ile kosztował stół, a ile krzesło przed obniżką.

7.23. Wyznacz wszystkie pary x i y liczb:

- a) naturalnych spełniających równanie $xy - 4x = 3$,
- b) całkowitych spełniających warunek $xy - 2y = 7$.

7.24. Dzieląc pewną liczbę przez 17, otrzymujemy iloraz q i resztę 16. Dzieląc tę samą liczbę przez 18, otrzymujemy iloraz równy poprzedniej reszcie oraz resztę równą poprzedniemu ilorazowi q . Wyznacz tę liczbę.

Równania, nierówności i układy równań liniowych z parametrem

Uwaga

Parametrami nazywamy litery, które we wzorach i równaniach oznaczają wielkości dane.

Parametr w **równaniach liniowych** pozwala nam odpowiadać na pytania dotyczące liczby rozwiązań równania oraz warunków, jakie wtedy spełniają parametry lub rozwiązania tego równania. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 12. Rozwiąż równanie $2(x - k) + 3k = 3(x + k) - 1$, w którym:

- a) niewiadomą jest x , b) niewiadomą jest k .

Rozwiązanie $2(x - k) + 3k = 3(x + k) - 1$

$$2x - 2k + 3k = 3x + 3k - 1, \text{ skąd } -x = 2k - 1.$$

- a) Wyznaczamy x , gdy k jest parametrem. b) Wyznaczamy k , gdy x jest parametrem.

$$-x = 2k - 1 \quad / \cdot (-1)$$

$$x = 1 - 2k.$$

$$-x = 2k - 1$$

$$2k = -x + 1$$

$$k = \frac{1 - x}{2}.$$

Odp.: a) Równanie z niewiadomą x , niezależnie od parametru k , ma jedno rozwiązanie $x_0 = 1 - 2k$, np. gdy $k = 0$, to $x_0 = 1$; gdy $k = -2$, to $x_0 = 5$.

- b) Równanie z niewiadomą k , niezależnie od parametru x , ma jedno rozwiązanie

$$k_0 = \frac{1 - x}{2}, \text{ np. gdy } x = 1, \text{ to } k_0 = 0; \text{ gdy } x = -3, \text{ to } k_0 = 2.$$

Ćwiczenie 14. Rozwiąż równanie $\frac{1}{3}(x + 2k) - x = 2(x - k) + 2$, w którym:

- a) niewiadomą jest x , b) niewiadomą jest k .

R

Przykład 13. Oblicz, dla jakich wartości parametru m równanie $2mx + 3 = 4m - x$ ma jedno rozwiązanie. Podaj to rozwiązanie.

Rozwiązanie $2mx + 3 = 4m - x$

$$2mx + x = 4m - 3$$

$$x(2m+1) = 4m-3 \quad /:(2m+1), \text{ gdy } 2m+1 \neq 0,$$

$$2m+1 \neq 0, \text{ czyli } m \neq -\frac{1}{2},$$

$$x = \frac{4m-3}{2m+1}, \text{ gdy } m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

Odp.: Równanie ma jedno rozwiązanie $x_0 = \frac{4m-3}{2m+1}$, gdy $m \neq -\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 15. Oblicz, dla jakich wartości parametru k równanie $(k+1)x - k = 2$ ma jedno rozwiązanie? Podaj to rozwiązanie.

Przykład 14. Rozwiąż równanie $3mx + 2 = 4(x + m)$ z niewiadomą x .

Rozwiązanie Przekształcamy równanie do postaci $ax + b = 0$.

$$3mx + 2 = 4(x + m), \text{ skąd } 3mx - 4x + 2 - 4m = 0$$

$$\underbrace{(3m-4)}_a x + \underbrace{(2-4m)}_b = 0.$$

$$\begin{array}{l} a = 3m - 4 \\ b = 2 - 4m \end{array}$$

Równanie liniowe ma:

1° jedno rozwiązanie,

gdy $a \neq 0$.

$$3m - 4 \neq 0$$

$$m \neq \frac{4}{3}.$$

Równanie ma rozwiązanie i jest nim liczba

$$x_0 = \frac{-(2-4m)}{3m-4}, \text{ gdy}$$

$$m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

2° nieskończenie wiele rozwiązań, gdy

$$a = 0 \text{ i } b = 0.$$

$$\begin{cases} 3m - 4 = 0 \\ 2 - 4m = 0 \end{cases},$$

$$m = \frac{4}{3} \text{ i } m = \frac{1}{2}.$$

niemożliwe

Nie ma takiej liczby m , dla której dane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

3° zero rozwiązań

(równanie nie ma rozwiązania), gdy

$$a = 0 \text{ i } b \neq 0.$$

$$\begin{cases} 3m - 4 = 0 \\ 2 - 4m \neq 0 \end{cases},$$

$$m = \frac{4}{3} \text{ i } m \neq \frac{1}{2},$$

$$m = \frac{4}{3}.$$

Odp.: Równanie ma jedno rozwiązanie równe $\frac{4m-2}{3m-4}$, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$, a nie ma rozwiązania, gdy $m = \frac{4}{3}$.

R

Ćwiczenie 16. Określ, w zależności od parametru m , liczbę pierwiastków równania:

a) $mx + m = 2$, b) $mx - 4x = m + 2$.

Użycie parametru w **nierównościach liniowych** pozwala nam, podobnie jak w równaniach, wyznaczać ich rozwiązania w zależności od tego parametru oraz określać w zależności od niego zbiory rozwiązań nierówności. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 15. Dla jakich wartości parametru m pierwiastek równania

$$3x - m = 2(m + 1) + x \text{ jest większy od } 3?$$

Rozwiązanie Obliczamy: **1** pierwiastek x równania, a następnie **2** rozwiązujemy nierówność $x > 3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad & 3x - m = 2(m + 1) + x \\ & 3x - x = 2m + m + 2 \\ & 2x = 3m + 2 \quad / : 2 \\ & x = \frac{3m + 2}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad & \frac{3m + 2}{2} > 3 \quad / \cdot 2 \\ & 3m + 2 > 6 \\ & m > \frac{4}{3}, \text{ czyli } m \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right). \end{aligned}$$

Odp.: $m \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Ćwiczenie 17. Dla jakich wartości parametru k pierwiastek równania $\frac{2x-1}{3} = \frac{x-k}{6}$ jest mniejszy od 2?

Przykład 16. Rozwiąż nierówność $2x - k > 3(k - 1) + 4x - 5$, w której:

a) niewiadomą jest x , b) niewiadomą jest k .

Rozwiązanie $2x - k > 3(k - 1) + 4x - 5$

$$2x - k > 3k - 3 + 4x - 5$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a) \quad} & -2x > 4k - 8 \quad / : (-2) \\ & x < -2k + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b) \quad} & -4k > 2x - 8 \quad / : (-4) \\ & k < -\frac{1}{2}x + 2. \end{aligned}$$

Odp.: a) $x < -2k + 4$, czyli rozwiązaniem nierówności jest każda liczba x należąca do przedziału $(-\infty; -2k + 4)$, gdy $k \in \mathbf{R}$, b) $k < -\frac{1}{2}x + 2$, czyli rozwiązaniem nierówności jest każda k należąca do przedziału $(-\infty; -\frac{1}{2}x + 2)$, gdy $x \in \mathbf{R}$.

Ćwiczenie 18. Rozwiąż nierówność $3x - m < 2(m + 2) - x$, w której:

a) niewiadomą jest x , b) niewiadomą jest m .

Przykład 17. Rozwiąż nierówność, w której niewiadomą jest x .

a) $mx + 1 > 0$, b) $(m + 1)x \leq 0$.

Rozwiązanie

a) $mx + 1 > 0$, więc $mx > -1$.

Aby rozwiązać nierówność z niewiadomą x $mx > -1$, gdy dzielenie przez m jest:

- niemożliwe ($m = 0$), należy sprawdzić, czy gdy za m podstawimy 0, to otrzymamy nierówność **prawdziwą** czy **falszywą**,
- możliwe ($m \neq 0$), należy podzielić obie jej strony przez m .

Rozpatrujemy przypadki:

$$\begin{aligned} & \text{m} = 0 \\ & 0 \cdot x > -1 \\ & 0 > -1. \text{ nierówność} \\ & \text{prawdziwa} \\ & \text{Zatem } x \in (-\infty; +\infty), \\ & \text{czyli } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} \text{m} \neq 0 & \\ \hline \text{m} < 0 & \text{m} > 0 \\ \hline mx > -1 \quad / : m & mx > -1 \quad / : m \\ \hline x < -\frac{1}{m} & x > -\frac{1}{m} \\ \hline \text{Zatem } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{m}\right) & \text{Zatem } x \in \left(-\frac{1}{m}; +\infty\right). \end{array}$$

b) $(m + 1)x \leq 0$.

Rozpatrujemy przypadki:

$$\begin{aligned} & m + 1 = 0, \text{ czyli } m = -1 \\ & (-1 + 1)x \leq 0 \\ & 0 \leq 0. \text{ nierówność} \\ & \text{prawdziwa} \\ & \text{Zatem } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} m + 1 \neq 0, \text{ czyli } m \neq -1 & \\ \hline m + 1 < 0, \text{ czyli } m < -1, & m + 1 > 0, \text{ czyli } m > -1, \\ \hline (m + 1)x \leq 0 \quad / : (m + 1) & (m + 1)x \leq 0 \quad / : (m + 1) \\ \hline x \geq \frac{0}{m + 1} & x \leq \frac{0}{m + 1} \\ \hline \text{Zatem } x \geq 0. & \text{Zatem } x \leq 0. \end{array}$$

Odp.: a) $x \in \mathbb{R}$, gdy $m = 0$;

$$x < -\frac{1}{m}, \text{ gdy } m < 0;$$

$$x > -\frac{1}{m}, \text{ gdy } m > 0.$$

b) $x \in \mathbb{R}$, gdy $m = -1$;

$$x \geq 0, \text{ gdy } m < -1;$$

$$x \leq 0, \text{ gdy } m > -1.$$

Ćwiczenie 19. Rozwiąż nierówność z niewiadomą x .

a) $mx + 2 < 0$, b) $mx - 2 < 0$, c) $(m - 1)x > 0$.

Parametr w **układach równań liniowych** pozwala określać warunki, kiedy układ ma, a kiedy nie ma rozwiązania lub kiedy te rozwiązania mają żadaną własność.

Przykład 18. Określ, dla jakich wartości parametru k rozwiązaniem

$$\text{układu równań } \begin{cases} x - y = k - 1 \\ 2x - y = -3 - k \end{cases} :$$

- a) jest para liczb ujemnych,
- b) jest para liczb dodatnich,
- c) jest para liczb o przeciwnych znakach.

Rozwiązanie Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x - y = k - 1 & / \cdot (-2) \\ 2x - y = -3 - k \end{cases} \\ + \begin{cases} -2x + 2y = -2k + 2 \\ 2x - y = -3 - k \end{cases} \\ \hline y = -3k - 1 \end{array}$$

$$\text{Zatem } \begin{cases} x = -2(k+1) \\ y = -3k - 1 \end{cases}, \text{ gdy } k \in \mathbb{R}.$$

a) $x < 0$ i $y < 0$, $\begin{cases} -2(k+1) < 0 \\ -3k - 1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k > -1 \\ k > -\frac{1}{3} \end{cases}$ $k > -\frac{1}{3}.$	b) $x > 0$ i $y > 0$, $\begin{cases} -2(k+1) > 0 \\ -3k - 1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k < -1 \\ k < -\frac{1}{3} \end{cases}$ $k < -1.$	c) $(x > 0 \text{ i } y < 0)$ lub $(x < 0 \text{ i } y > 0)$, $\begin{cases} -2(k+1) > 0 \\ -3k - 1 < 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} -2(k+1) < 0 \\ -3k - 1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k < -1 \\ k > -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} k > -1 \\ k < -\frac{1}{3} \end{cases},$ Nie istnieje liczba k spełniająca obie nierówności. $k \in \left(-1; -\frac{1}{3}\right).$
---	---	---

Odp.: **a)** $k > -\frac{1}{3}$, **b)** $k < -1$, **c)** $k \in \left(-1; -\frac{1}{3}\right)$.

Ćwiczenie 20. Oblicz, dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 2x + y = 5m + 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \text{ jest para liczb } x \text{ i } y \text{ spełniająca warunek:}$$

a) $x < 0$ i $y > 0$, **b)** $|x| \leq 1$ i $|y| \leq \frac{1}{2}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

14. a) $x = k - \frac{3}{4}$, b) $k = x + \frac{3}{4}$. 15. $x = \frac{k+2}{k+1}$, gdy $k \neq -1$. 16. a) Jedno rozwiązanie $x_0 = \frac{2-m}{m}$, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; nie ma rozwiązania, gdy $m = 0$, b) jedno rozwiązanie $x_0 = \frac{m+2}{m-4}$, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$; nie ma rozwiązania, gdy $m = 4$.
17. $k > -4$. 18. a) $x < \frac{3m+4}{4}$, b) $m > \frac{4x-4}{3}$. 19. a) Nie ma rozwiązania, gdy $m = 0$; $x > -\frac{2}{m}$, gdy $m < 0$; $x < -\frac{2}{m}$, gdy $m > 0$, b) $x \in \mathbb{R}$, gdy $m = 0$; $x > \frac{2}{m}$, gdy $m < 0$; $x < \frac{2}{m}$, gdy $m > 0$, c) nie ma rozwiązania, gdy $m = 1$; $x > 0$, gdy $m > 1$; $x < 0$, gdy $m < 1$.
20. a) $m \in (-1; 0)$, b) $m = -\frac{1}{2}$.

Zadania utrwalające

7.25. Rozwiąż równanie z niewiadomą **1** x , **2** m , gdy:

- a) $-3(x-m) - 2x = 4(2x+m) + 1$, b) $\frac{1}{2}(2x+m) - 3m = \frac{1}{3}(m-1)$,
 c) $5(x-2m) + 2 = 2(x+1)$, d) $(x-m)^2 = (m-x)^2$.

7.26. Określ, w zależności od wartości parametru m , liczbę pierwiastków równania:

- a) $2x - m = 3$, b) $mx - 3 = x + m$, c) $mx + 1 = x + m^2$.

7.27. Rozwiąż równanie z niewiadomą x :

- a) $mx - 2x + 1 = 4x - 2$, b) $ax + x = a + 1$,
 c) $a(2-x) = a$, d) $ax - a^2 = 2x - 4$.

7.28. Rozwiąż równanie z niewiadomą x :

- a) $mx - m^2 = 4m + 4 - 2x$, b) $mx - 1 = m^2 - x$,
 c) $m^2x - m^2 - 1 = 2mx - x$, d) $m^2x + 4mx + m^2 + 4(1+x) = 0$.

7.29. Dla jakich wartości parametru m pierwiastek równania $4(m-3) + x = m - 5x$ jest mniejszy od 3?

7.30. Dla jakich wartości parametru m pierwiastek równania $2x + m + 4 = -4(x + 3m)$ jest większy od -5?

7.31. Dla jakich wartości parametru k pierwiastek równania $\frac{3x-2}{4} = \frac{x+k}{2}$ należy do przedziału $\langle -4; 2 \rangle$?

7.32. Rozwiąż nierówność z niewiadomą x :

a) $ax - a > 0$,

b) $mx + 3 \leq m$,

c) $2x - m \geq 5$,

d) $ax + 3 < 3a$,

e) $mx - 3 < 7mx$,

f) $ax + 2a \geq 3ax$.

7.33. Określ, dla jakich wartości parametru m zbiorem rozwiązań nierówności $mx > m - 1$ jest przedział:

a) $(-\infty; +\infty)$,

b) $(-\infty; 2)$.

7.34. Określ, dla jakich wartości parametru m jedno rozwiązanie ma układ równań:

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + my = 2m \end{cases}$,

b) $\begin{cases} (m-1)x - my = 1 \\ mx - (m+1)y = 0 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} mx - 2y = 4 \\ (m-1)x + 3y = 3 \end{cases}$.

7.35. Określ, dla jakich wartości parametru a sprzeczny jest układ równań:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + ay = 2a \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ ax - y = 2 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 3x + ay = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$.

7.36. Określ, dla jakich wartości parametru t rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 2t \\ x - 2y = 3 - t \end{cases}$ jest para liczb:

a) dodatnich,

b) ujemnych,

c) różnych znaków.

7.37. Określ, dla jakich wartości parametru p rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x + y = p + 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ spełnia warunek:

a) $x \geq 2$ i $y \geq -1$,

b) $|x| + |y| \leq 1$.

7.38. Określ, dla jakich wartości parametru m rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - y = 3m \\ x + y = m + 4 \end{cases}$ jest para liczb dodatnich.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Rozwiązaniem układu $\begin{cases} 2x + 7y = 16 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$ jest para liczb:

A. $(2, 1)$,

B. $(1, 2)$,

C. $(1, -2)$,

D. $(-1, -2)$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeśli $x + 5 = 2y$ i $y = 2x - 14$, to:

- A. $x = -11$, B. $x = -\frac{33}{5}$, C. $x = 8$, D. $x = 11$.

3. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Układ równań $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + my = m \end{cases}$ nie ma rozwiązania, gdy:

- A. $m = 2$, B. $m = 5$.

Układ równań $\begin{cases} 3x - (m-1)y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ ma rozwiązanie, gdy:

- C. $m = 3$, D. $m = 30$.

4. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Równanie $(m-1)x = 1$ nie ma rozwiązania, gdy:

- A. $m = 0$, B. $m = 1$.

Równanie $(m-2)x = 2 - m$ ma jedno rozwiązanie, gdy:

- C. $m = 2$, D. $m = 0$.

5. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Liczba 20 jest największą liczbą spełniającą nierówność $2x - k \leq 10$, gdy:

- A. $k = 20$, B. $k = 30$.

Jeżeli pierwiastkiem równania $-\frac{1}{2}x + m - 1 = 0$ z niewiadomą x jest liczba większa od 2, to:

- C. $m < 2$, D. $m > 2$.

6. *Uzasadnij, że jeśli rozwiązaniem równania $\frac{x+p}{3} = \frac{1+x}{4} - \frac{1}{6}$ jest liczba niedodatnia,*

D *to $p \geq \frac{1}{4}$.*

8. Funkcja i jej własności

Pojęcie funkcji

Ludzie, komunikując się między sobą, z reguły używają zdań. Zdania mogą określać przyporządkowanie między dwoma zbiorami. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 1. Marek na spotkaniu z rówieśnikami powiedział: „W mojej grupie nie ma ocen niedostatecznych na półrocze z matematyki”.

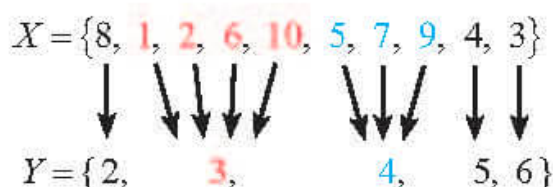
Oceny półroczne dziesięcioosobowej grupy uczniów, którzy w dzienniku lekcyjnym są zapisani pod numerami od 1 do 10, przedstawiono w tabeli.

Numer z dziennika pod którym uczeń jest zapisany $[x]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ocena $[y]$	3	3	6	5	4	3	4	2	4	3

Zmienna x przyjmuje wartości ze zbioru kolejnych liczb naturalnych od 1 do 10.

Zmienna y przyjmuje wartości ze zbioru pięcioelementowego: 2, 3, 4, 5, 6.

Zobrazujemy to strzałkami poprowadzonymi od liczb odpowiadających uczniom do liczb oznaczających stopnie.



Zauważamy, że każdemu uczniowi z Marka grupy przyporządkowana została w sposób **jednoznaczny** ocena semestralna.

Zbiór X nazywamy dziedziną tego przyporządkowania, a zbiór Y nazywamy zbiorem jego wartości.



Ćwiczenie 1. Na rysunku przedstawiono dwa zbiory: X – zbiór państw, Y – zbiór stolic. Przerysuj zbiory do zeszytu i połącz strzałkami każde państwo z jego stolicą.

X

- Polska
- Czechy
- Austria
- Włochy
- Niemcy
- Francja

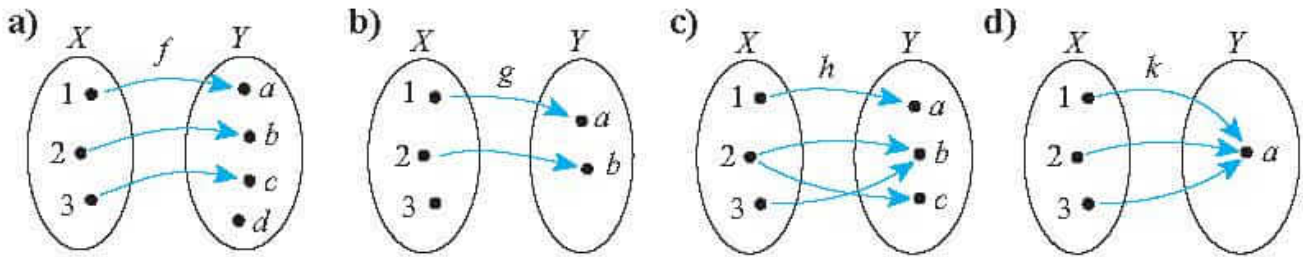
Y

- Praga
- Berlin
- Warszawa
- Paryż
- Rzym
- Wiedeń

Przykład 2. Określ, czy graf przedstawiony na rysunku spełnia warunek:

„każdemu elementowi ze zbioru X odpowiada dokładnie jeden element ze zbioru Y ”.

Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązanie

a) Tak, bo $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, czyli przyporządkowanie f jest jednoznaczne.

b) Nie, bo $g(3)$ nie ma wartości.

c) Nie, bo $h(2) = b$ i $h(2) = c$, czyli argumentowi 2 przyporządkowane są aż dwie wartości.

d) Tak, bo $k(1) = a$, $k(2) = a$, $k(3) = a$, czyli przyporządkowanie k jest jednoznaczne.

Odp.: a) Tak, b) nie, c) nie, d) tak.

Definicja

Funkcją nazywamy jednoznaczne przyporządkowanie, według którego każdemu elementowi x ze zbioru X odpowiada dokładnie jeden element y ze zbioru Y .

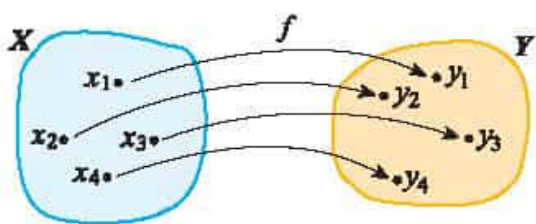
Zapis $y = f(x)$ czytamy zmienna y jest funkcją zmiennej x .

x – zmienna niezależna

y – zmienna zależna

x – argument funkcji f

y i $f(x)$ – wartość funkcji f dla argumentu x



$$X = D_f = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \quad Y_f = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji f** lub **zbiorem argumentów funkcji** i oznaczamy symbolem X lub D_f .

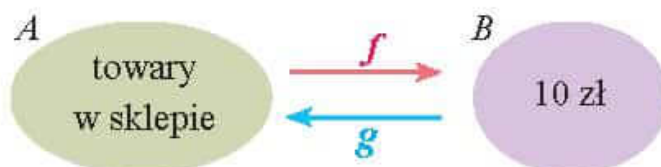
Zbiór złożony z tych elementów y zbioru Y , dla których istnieje element x ze zbioru X taki, że $y = f(x)$, nazywamy **zbiorem wartości funkcji f** i oznaczamy Y_f .

Funkcje w matematyce najczęściej oznaczamy:

- małymi literami alfabetu, np.: f , w , g , h , s , t , u ,
- słowami albo ich skrótami, np.: tg (*tangens*), sgn (*signum* – łac. *znak*).

Ćwiczenie 2. Określ, czy jeżeli elementom ze zbioru Y przyporządkujemy elementy zbioru X z przykładu 2. a), b), c), d), to przyporządkowanie będzie funkcją. Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 3. W witrynie sklepu „Ciucholand” widnieje napis reklamowy: „Dziś wszystko po 10 zł!”. Określ, czy przyporządkowanie f i g jest funkcją, gdy A to zbiór towarów w „Ciucholandzie”, a B to zbiór cen.

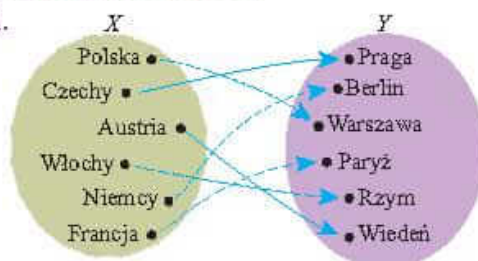


Ćwiczenie 4. a) Uzasadnij, że nie jest funkcją przyporządkowanie, które do każdego dnia tygodnia przyporządkowuje człowieka, który się w tym dniu urodził.

b) Czy przyporządkowanie, które każdemu człowiekowi przyporządkowuje dzień tygodnia, w którym się urodził, jest funkcją? Jeśli tak, to określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1.



2. a) Nie, bo elementowi d nie jest przyporządkowana żadna wartość, b) tak, c) nie, bo elementowi b przyporządkowane są dwie wartości, d) nie, bo elementowi a przyporządkowane są trzy wartości.

3. Przyporządkowanie f jest funkcją, bo każda sztuka towaru ma stałą wartość 10 zł. Przyporządkowanie g nie jest funkcją, bo elementowi 10 zł odpowiada wiele towarów.

4. a) *Wskazówka.* Zauważ, że np. środa może być dniem urodzin wielu ludzi.

Zadania utrwalające

8.1. Określ, czy funkcją jest przyporządkowanie, które:

- człowiekowi przyporządkowuje jego wagę,
- matce przyporządkowuje jej dziecko,
- dziecku przyporządkowuje jego ojca biologicznego,
- drzewu przyporządkowuje jego liść,
- jabłku przyporządkowuje jabłoń.
- piosence przyporządkowuje jej wykonawcę.

8.2. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jednoznaczne jest przyporządkowanie, które:

- dniowi tygodnia przyporządkowuje datę,
- dacie przyporządkowuje dzień tygodnia,

Nie jest funkcją przyporządkowanie, które:

- C. miastu przyporządkowuje liczbę jego mieszkańców,
- D. liczbie mieszkańców przyporządkowuje miasto.

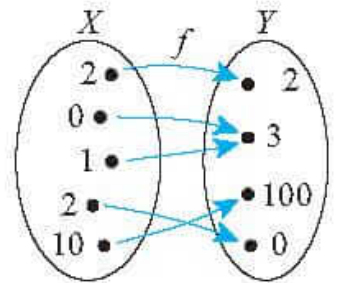
8.3. Określ, czy funkcją jest przyporządkowanie, które:

- a) liczbie boków wielokąta przyporządkowuje liczbę jego przekątnych,
- b) długości boku kwadratu przyporządkowuje jego pole,
- c) liczbie boków wielokąta przyporządkowuje sumę miar jego kątów wewnętrznych,
- d) każdej liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną.

8.4. Pewną funkcję f przedstawiono w postaci grafu.

Popraw tabelę tak, aby funkcja f była zgodna z przedstawieniem jej w postaci grafu.

x	-2	0	1	2	10
y	-2	3	0	100	100

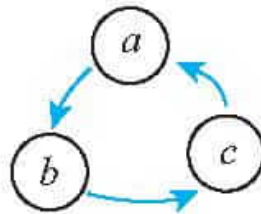


8.5. Określ, które z przyporządkowań jest funkcją, gdy:

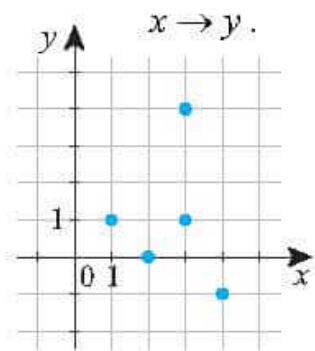
a) $x \rightarrow y$,

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

b)

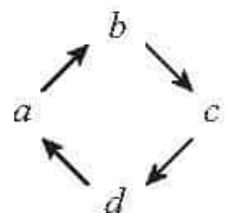


c)



8.6. Elementom zbioru $A = \{a, b, c, d\}$ przyporządkowano elementy zbioru A w sposób pokazany na grafie. Przyporządkowanie to nazywano p . Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce wpisz odpowiedni element zbioru A .

$p(a) = \text{■}$, $p(b) = \text{■}$, $p(c) = \text{■}$, $p(d) = \text{■}$.



8.7. Między elementami podanych zbiorów określona jest funkcja. Zapisz symbolicznie to przyporządkowanie, gdy:

- a) A – zbiór liczb stron, B – zbiór książek,
- b) C – zbiór samochodów, D – zbiór numerów podwozi samochodów,
- c) E – zbiór numerów butów, F – zbiór ludzi,
- d) G – zbiór pierwszych imion ludzi, H – zbiór ludzi.

Sposoby określania funkcji

Przykład 3. Funkcję f określono następująco: każdej liczbie ze zbioru X , gdzie $X = \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$, przyporządkowujemy liczbę będącą jej kwadratem.

- a) Wyznacz zbiór Y_f wartości funkcji f .
 b) Funkcję f określ za pomocą: tabeli, wzoru, grafu i wykresu.

Rozwiązanie

a) $f(-2) = (-2)^2 = 4$, $f(-1) = (-1)^2 = 1$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $f(0) = 0^2 = 0$,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$, więc $Y_f = \left\{0, \frac{1}{4}, 1, 4\right\}$.

- b) Określenie funkcji za pomocą:

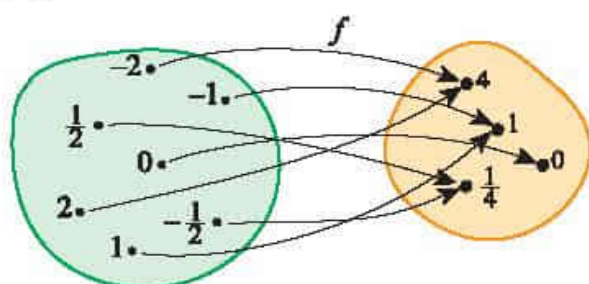
1) tabeli

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

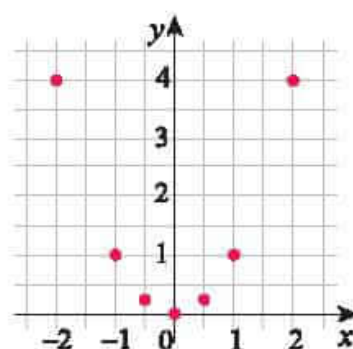
2) wzoru

$y = x^2$ lub $f(x) = x^2$, gdzie
 $x \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

3) grafu



4) wykresu



Ćwiczenie 5. Funkcja f określona jest następująco: każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowano jej trzecią potęgę. Przedstaw funkcję f za pomocą wzoru, tabeli, grafu i wykresu, gdy $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Uwaga

- Funkcję można określić za pomocą:
 - przepisu słownego
 - tabeli
 - grafu
 - wzoru
 - wykresu
- Wzór tej samej funkcji można zapisać na kilka sposobów, np. $f(x) = 2x$ lub $f: x \rightarrow 2x$, lub $y = 2x$.

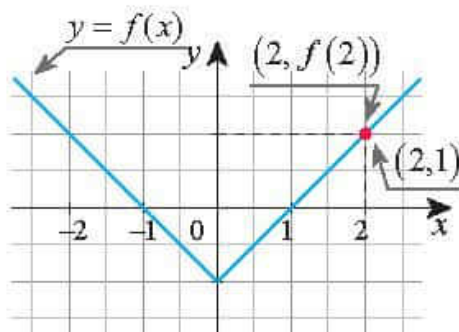
Ćwiczenie 6. Każdej z liczb x : $-3, -2, 0, 1, 2, 3$ przyporządkuj liczbę y , która jest od niej o 2 większa.

- Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą wzoru oraz tabeli.
- Sporządź wykres tego przyporządkowania.

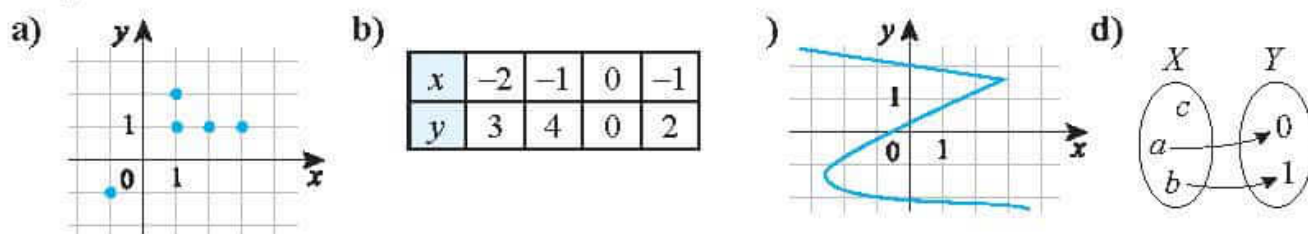
Definicja

Wykresem funkcji f na płaszczyźnie kartezjańskiej nazywamy zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne x i y spełniają warunek $y = f(x)$.

Każdy punkt (x, y) należący do wykresu funkcji f ma współrzędne $(x, f(x))$, gdzie x jest argumentem funkcji f , a y wartością funkcji f dla argumentu x .



Przykład 4. Uzasadnij, że nie jest funkcją przyporządkowanie przedstawione na rysunku.

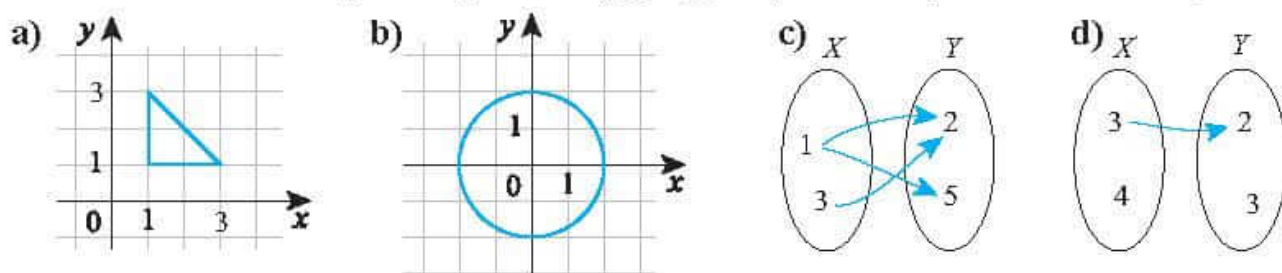


Rozwiązanie Zauważamy, że przyporządkowanie nie jest funkcją, bo:

- argumentowi $x = 1$ przyporządkowane są dwie wartości: $y = 1$ i $y = 2$,
- argumentowi $x = -1$ przyporządkowane są dwie wartości: $y = 4$ i $y = 2$,
- istnieje wiele argumentów, np. $x = 0$, $x = 1$, $x = -2$, którym przyporządkowano więcej niż jedną wartość y ,
- argumentowi c nie przyporządkowano żadnej wartości.

Uwaga Aby stwierdzić, czy wykres przedstawiony na rysunku jest wykresem funkcji, wystarczy sprawdzić, że każda prosta prostopadła do osi x i przecinająca wykres ma z nim tylko jeden punkt wspólny.

Ćwiczenie 7. Uzasadnij, że nie jest funkcją przyporządkowanie przedstawione na rysunku:



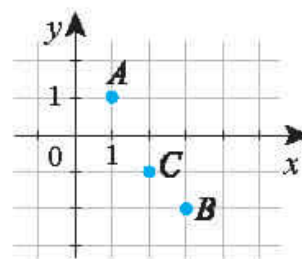
Przykład 5. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 2x - 1$. Określ, który z punktów A, B takich, że $A = (3, 5)$, $B = (-2, 0)$, należy do wykresu funkcji f .

Rozwiązanie Punkt należy do wykresu funkcji f , jeżeli jego współrzędne x i y spełniają warunek $y = 2x - 1$. Sprawdzamy kolejno:

- $A = (3, 5)$. Jeśli $x = 3$, to $y = f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $f(3) = 5$
więc punkt A należy do wykresu funkcji f .
- $B = (-2, 0)$. Jeśli $x = -2$, to $y = f(-2) = 2 \cdot (-2) - 1 = -5$, czyli $f(-2) \neq 0$,
więc punkt B nie należy do wykresu funkcji f . $f(-2) \neq 0$

Odp.: Na wykresie funkcji f leży punkt A .

Ćwiczenie 8. Określ, które z punktów A, B, C przedstawionych na rysunku należą do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = 3 - 2x$.



Jeżeli funkcja określona jest wzorem, to możemy obliczać, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje określone wartości. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 6. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 4 - 5x$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Oblicz, dla jakiego argumentu x funkcja f przyjmuje wartość równą:

a) -1 , b) 0 , c) 20 .

Rozwiązanie Zauważamy, że:

- a) $f(x) = -1$, więc $4 - 5x = -1$, skąd $x = 1$,
- b) $f(x) = 0$, więc $4 - 5x = 0$, skąd $x = \frac{4}{5}$,
- c) $f(x) = 20$, więc $4 - 5x = 20$, skąd $x = -3\frac{1}{5}$.

Odp.: a) 1 , b) $\frac{4}{5}$, c) $-3\frac{1}{5}$.

Sprawdzenie:

$$f(1) = 4 - 5 \cdot 1 = -1,$$

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = 4 - 5 \cdot \frac{4}{5} = 0,$$

$$f\left(-3\frac{1}{5}\right) = 4 - 5 \cdot \left(-\frac{16}{5}\right) = 20.$$

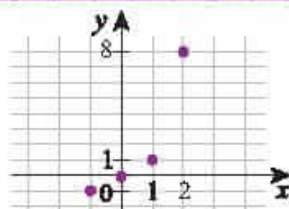
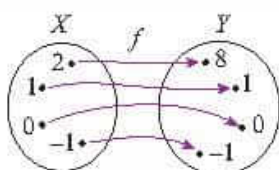
Ćwiczenie 9. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 8x - 15$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Oblicz, dla jakiego argumentu x funkcja f przyjmuje wartość równą:

a) 1 , b) -7 , c) 0 .

Odpowiedzi do ćwiczeń

5. $f(x) = x^3$

x	-1	0	1	2
$y = f(x)$	-1	0	1	8

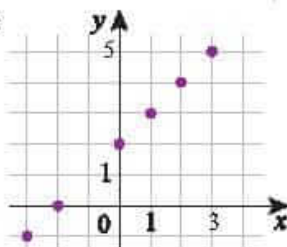


6. a) Wzór: $f(x) = x + 2$,

tabela

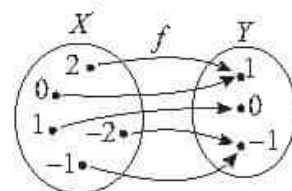
x	-3	-2	0	1	2	3
y	-1	0	2	3	4	5

b) wykres



7. Argumentowi $x=1$ przyporządkowane są np. liczby 1, 2, 2, 5, 3, b) argumentowi np. $x=0$ przyporządkowane są dwie wartości: -2 i 2, c) argumentowi $x=1$ przyporządkowane są dwie wartości: 2 i 5, d) argumentowi $x=4$ nie przyporządkowano żadnej wartości y . 8. A i C. 9. a) 2, b) 1, c) $\frac{15}{8}$.

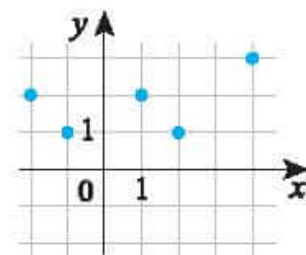
Zadania utrwalające

8.8. Funkcja f określona jest grafem. Sporządź:a) tabelę funkcji f , b) wykres funkcji f .

8.9. Przerysuj tabelę do zeszytu i dokonaj takich zmian, by przyporządkowanie g było funkcją.

x	-2	-1	0	-1
$y = g(x)$	3	4	0	2

8.10. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g . Przedstaw funkcję g za pomocą grafu oraz tabeli.

8.11. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*Funkcją **nie** jest przyporządkowanie przedstawione tabelą:

A.

x	-1	0	2	5
$y = f(x)$	-1	0	2	5

B.

x	-1	0	2	5
$y = f(x)$	0	0	0	0

C.

x	-1	0	2	-1
$y = f(x)$	5	2	0	-5

D.

x	-1	0	2	5
$y = f(x)$	-3	-4	-5	-6

8.12. Oblicz $f(0)$, $f(1)$ i $f(-1)$, gdy

a) $f(x) = 5 - 2x$, b) $f(x) = 4x + 2$, c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, d) $f(x) = x^2$.

8.13. Funkcja f określona jest tabelą.

a) Dla jakiego argumentu x funkcja f przyjmuje wartość 12?

b) Dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości większe od 3?

c) Dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości mniejsze lub równe 7?

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	4	5	10	11
$y = f(x)$	-2	1	3	7	12	15	17

8.14. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość funkcji f dla argumentu $x = 0$ jest równa 0, gdy funkcja f określona jest wzorem:

A. $f(x) = 5 - 2x$, B. $f(x) = 4x + 2$, C. $f(x) = \frac{1}{x+2}$, D. $f(x) = x^2$.

8.15. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 7x - 12$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Oblicz, dla jakiego argumentu x funkcja f przyjmuje wartość równą:

a) 2, b) -12, c) 0, d) 16, e) 100.

8.16. Napisz wzór przyporządkowania, które każdej liczbie rzeczywistej x różnej od 0 przyporządkowuje:

- a) liczbę do niej przeciwną, b) liczbę, która jest jej odwrotnością,
c) jej wartość bezwzględną.

8.17. Każdej z liczb x : -8, -4, 0, $\frac{1}{2}$, 5 przyporządkuj liczbę y , która jest od niej mniejsza o 3.

- a) Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą tabeli i opisz je wzorem.
b) Sporządź wykres tego przyporządkowania.

8.18. Uzasadnij, że punkt $A = (-1, 2)$ należy do wykresu funkcji f określonej wzorem:

D

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$,

b) $f(x) = 100x + 102$,

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$,

d) $f(x) = x^2 + 1$

Dziedzina i zbiór wartości funkcji

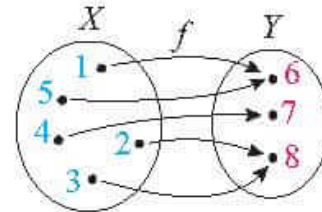
Jeżeli funkcja określona jest grafem lub tabelką, to jej dziedzinę i zbiór wartości odczytujemy bezpośrednio z grafu lub tabelki.

Przykład 7. Podaj dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f funkcji f określonej:

a) tabelką

x	-3	$-\frac{1}{2}$	0	4	7
y	0	0	1	2	2

b) grafem



Rozwiązanie

a) Odczytujemy z tabelki, że:

$$D_f = \left\{ -3, -\frac{1}{2}, 0, 4, 7 \right\},$$

$$Y_f = \{0, 1, 2\}.$$

b) Odczytujemy z grafu, że:

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

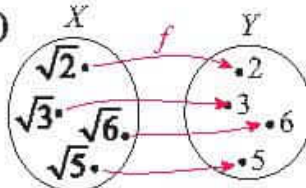
$$Y_f = \{6, 7, 8\}.$$

Ćwiczenie 10. Odczytaj z tabelki lub grafu dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f funkcji f .

a)

x	-3	-2	0	1
$y = f(x)$	0	0	0	0

b)



c)

x	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$
$y = f(x)$	-2	-1	1	1

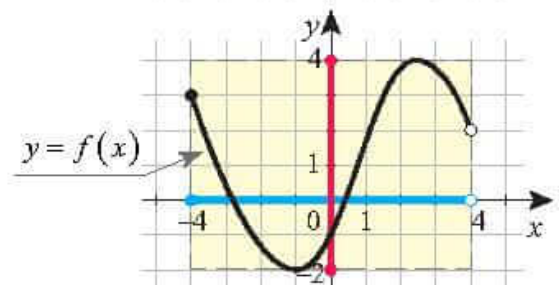
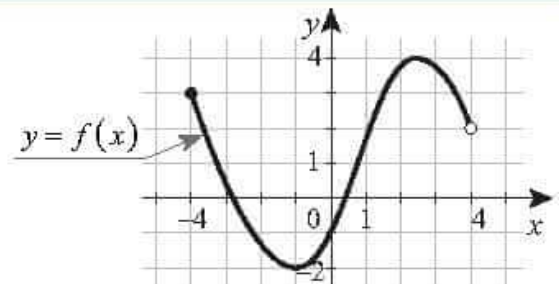
Jeżeli funkcja określona jest wykresem, to dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji odczytujemy z wykresu. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 8. Funkcja f określona jest wykresem. Odczytaj z wykresu dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f funkcji f .

Rozwiązanie

Dziedzina i zbiór wartości funkcji f , której wykres przedstawiono na rysunku, wyznaczają wymiary prostokąta (kolor żółty), w którym mieści się wykres funkcji.

Dziedzinę funkcji określa szerokość prostokąta zaznaczona na osi x (linia niebieska), a zbiór wartości funkcji określa wysokość prostokąta zaznaczona na osi y (linia czerwona).



Na osi x odczytujemy dziedzinę D_f , a na osi y zbiór wartości Y_f .

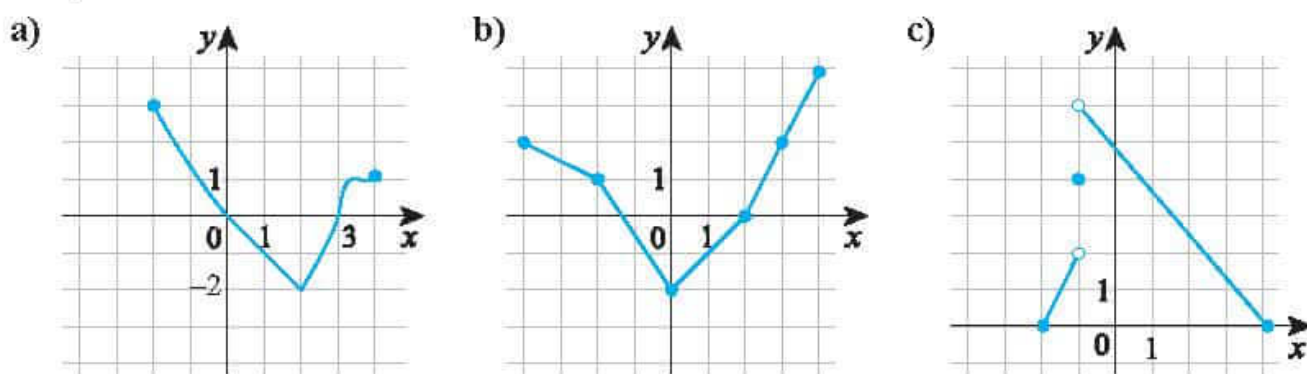
Zatem $D_f = \langle -4; 4 \rangle$,

$Y_f = \langle -2; 4 \rangle$.

Inne zapisy: $x \in \langle -4; 4 \rangle$ albo $-4 \leq x < 4$.

Inne zapisy: $y \in \langle -2; 4 \rangle$ albo $-2 \leq y \leq 4$.

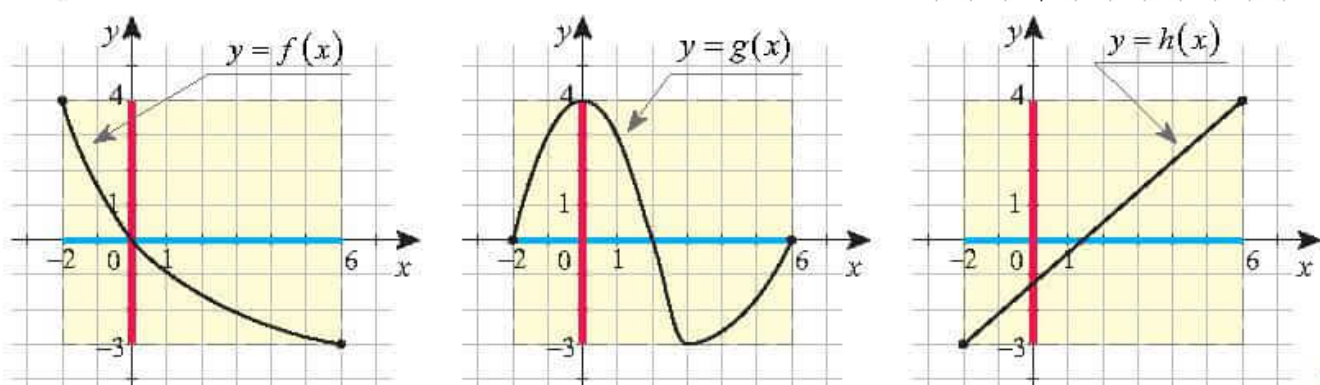
Ćwiczenie 11. Podaj dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f funkcji f przedstawionej na rysunku.



Przykład 9. Narysuj trzy przykładowe wykresy funkcji f , g i h , których dziedziną jest przedział $\langle -2; 6 \rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -3; 4 \rangle$.

Rozwiązanie Na osiach układu współrzędnych wyróżniamy kolorem niebieskim dziedzinę D funkcji, a kolorem czerwonym jej zbiór wartości Y .

Wykresów spełniających warunki zadania można narysować nieskończenie wiele.



Ćwiczenie 12. Narysuj trzy przykładowe wykresy funkcji f , g i h , których dziedziną D jest przedział $\langle 0; 4 \rangle$, a zbiorem wartości Y przedział $\langle 1; 5 \rangle$.

Jeżeli funkcja określona jest opisem słownym, to jej dziedzinę odczytujemy z tego opisu i na tej podstawie określamy zbiór wartości. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 10. Skorzystaj z informacji: „Liczbie dodatniej r przyporządkowano obwód L okręgu o promieniu r ” i wskaż zmienną niezależną oraz zmienną zależną, napisz wzór przyporządkowania, a następnie określ jego dziedzinę i zbiór wartości.

Rozwiązanie

Zauważamy, że obwód L zależy od promienia r , więc L jest funkcją r , czyli

$$L(r) = 2\pi r,$$

gdzie r – zmienna niezależna i $r > 0$, L – zmienna zależna i $L > 0$ oraz $\pi \approx 3,14$.

Odp.: $D_L = \mathbf{R}^+$, $Y_L = \mathbf{R}^+$.

Ćwiczenie 13. Skorzystaj z podanej informacji i wskaż zmienną niezależną oraz zmienną zależną, napisz wzór przyporządkowania oraz określ jego dziedzinę i zbiór wartości.

- Dodatniej liczbie a przyporządkowano objętość V sześcianu.
- Liczbie naturalnej dodatniej x przyporządkowano liczbę y większą od liczby x o 10%.
- Czasowi t przyporządkowano drogę s , jaką można pokonać, idąc pieszo przez 6 godzin ze stałą prędkością równą $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Przykład 11. Wyznacz dziedzinę D_f funkcji f określonej wzorem:

$$\text{a) } f(x) = x + 3, \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{x+3}, \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{1-x}, \quad \text{d) } f(x) = \frac{3}{\sqrt{4+x}}.$$

Rozwiązanie

a) $f(x) = x + 3$, więc $D_f = \mathbf{R}$.

Do każdej liczby rzeczywistej x można dodać 3.

b) $f(x) = \frac{1}{x+3}$, więc $x+3 \neq 0$, czyli $x \neq -3$.

Dzielenie przez 0 to działanie niewykonalne.

$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, inny zapis: $D_f : x \neq -3$ lub $D_f = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

c) $f(x) = \sqrt{1-x}$, więc $1-x \geq 0$, czyli $x \leq 1$.

Pierwiastek parzystego stopnia istnieje tylko z liczb nieujemnych.

$D_f = (-\infty; 1]$ inny zapis: $D_f : x \leq 1$.

d) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4+x}}$, więc $4+x > 0$, czyli $x > -4$.

Dzielenie przez 0 jest działaniem niewykonalnym i pierwiastek parzystego stopnia istnieje tylko z liczb nieujemnych.

$D_f = (-4; +\infty)$ inny zapis: $D_f : x > -4$.

Uwaga

- Jeżeli nie jest podana dziedzina funkcji określonej wzorem $y = f(x)$, to wyznaczamy ją, przyjmując, że dziedziną tej funkcji jest zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wzór ma sens liczbowy (można obliczyć wartość funkcji f).
- Jeżeli wyznaczamy dziedzinę funkcji określonej wzorem, to należy pamiętać, że:
 - wyrażenie występujące w mianowniku może przyjmować tylko wartości różne od zera,
 - wyrażenie występujące pod znakiem pierwiastka kwadratowego może przyjmować tylko wartości nieujemne.

Ćwiczenie 14. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = x^2 - 2$, b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, c) $f(x) = \sqrt{x+5}$, d) $f(x) = \frac{8}{\sqrt{2-x}}$.

Jeżeli znamy wzór funkcji $y = f(x)$, to za argument x możemy do wzoru funkcji f podstawić liczby oraz wyrażenia algebraiczne. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 12. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 2x + 1$. Napisz wzór funkcji g , gdy:

a) $g(x) = f(-x)$, b) $g(x) = f(x+1)$, c) $g(x) = f(x^2 - 3x)$, d) $g(x) = f(f(x))$.

Rozwiązanie

Zapis $g(x)$ rozumiemy tak, że we wzorze funkcji f w miejsce x wstawiamy:

- a) $-x$, więc $g(x) = f(-x) = 2 \cdot (-x) + 1 = -2x + 1$,
 b) $x+1$, więc $g(x) = f(x+1) = 2 \cdot (x+1) + 1 = 2x + 2 + 1 = 2x + 3$,
 c) $x^2 - 3x$, więc $g(x) = f(x^2 - 3x) = 2 \cdot (x^2 - 3x) + 1 = 2x^2 - 6x + 1$,
 d) $f(x)$, więc $g(x) = f(f(x)) = f(2x+1) = 2 \cdot (2x+1) + 1 = 4x + 3$.

Odp.: a) $g(x) = -2x + 1$, b) $g(x) = 2x + 3$, c) $g(x) = 2x^2 - 6x + 1$, d) $g(x) = 4x + 3$.

Ćwiczenie 15. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 4 - 3x$. Oblicz wartość funkcji f dla argumentu x :

a) $-\frac{1}{3}$, b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, c) $1\frac{1}{3}$, d) $1 - \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 16. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 4x^2 - x$. Napisz wzór funkcji g , gdy:

a) $g(x) = f(-x)$, b) $g(x) = f(x-1)$, c) $g(x) = f(2-x)$, d) $g(x) = f(2x)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

10. a) $D_f = \{-3, -2, 0, 1\}$, $Y_f = \{0\}$, b) $D_f = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\}$, $Y_f = \{2, 3, 5, 6\}$, c) $D_f = \{-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\frac{1}{2}\}$, $Y_f = \{-2, -1, 1\}$.
 11. a) $D_f = \{-2; 4\}$, $Y_f = \{-2; 3\}$, b) $D_f = \{-4; 4\}$, $Y_f = \{-2; 4\}$, c) $D_f = \{-2; 4\}$, $Y_f = \{0; 6\}$.
 13. a) $V(a) = a^3$, $a > 0$ i $V > 0$, a – zmienna niezależna, V – zmienna zależna,
 b) $y = 1,1x$, gdzie $x \in \mathbb{N}^+$ i y jest liczbą wymierną taką, że $y \geq 1,1$, x – zmienna niezależna, y – zmienna zależna,
 c) $s(t) = 5t$, gdzie $0 < t \leq 6$ i $0 < s \leq 30$, t – zmienna niezależna, s – zmienna zależna.
 14. a) $x \in \mathbb{R}$, b) $x \neq 1$, c) $x \geq -5$, d) $x < 2$. 15. a) 5; b) $4 - 2\sqrt{3}$; c) 0; d) $1 + 3\sqrt{2}$.
 16. a) $g(x) = 4x^2 + x$, b) $g(x) = 4x^2 - 9x + 5$, c) $g(x) = 4x^2 - 15x + 14$, d) $g(x) = 16x^2 - 2x$.

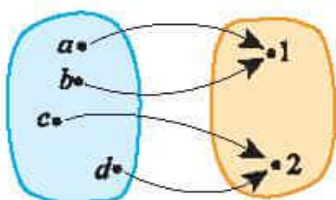
Zadania utrwalające

8.19. Na rysunkach 1, 2, 3 i 4 funkcje f określono różnymi sposobami. Określ dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f każdej z nich.

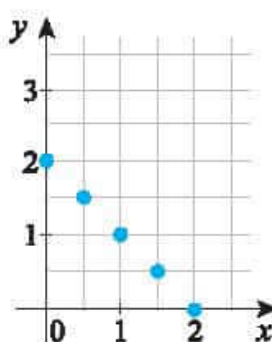
1

x	y
-2	7
-4	3
0	1
5	0

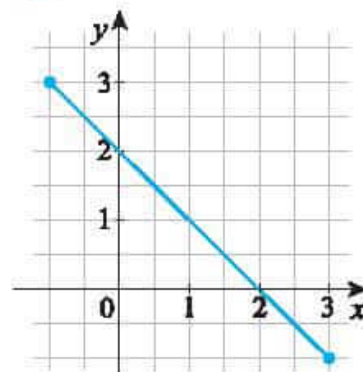
2



3

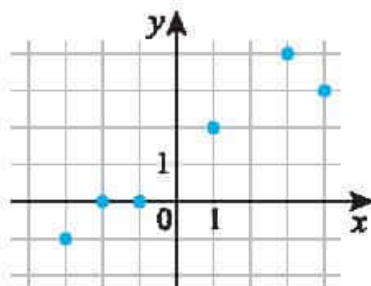


4

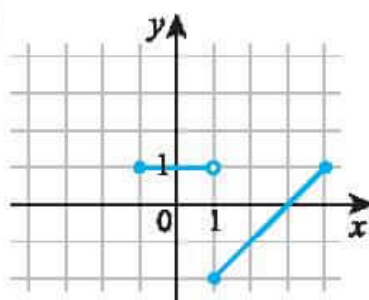


8.20. Funkcja f określona jest wykresem. Podaj dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f funkcji f .

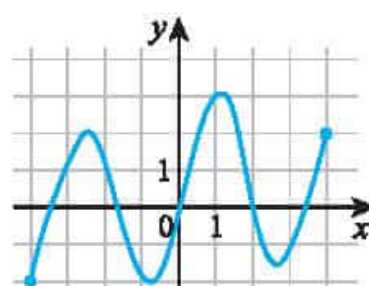
a)



b)



c)



8.21. Wykres funkcji f jest zbiorem punktów A, B, C, D, E, F, G takich, że $A = (-2, 3)$, $B = (-1, 5)$, $C = (0, -5)$, $D = (2, 3)$, $E = (3, 3)$, $F = (4, 5)$, $G = (5, 5)$.

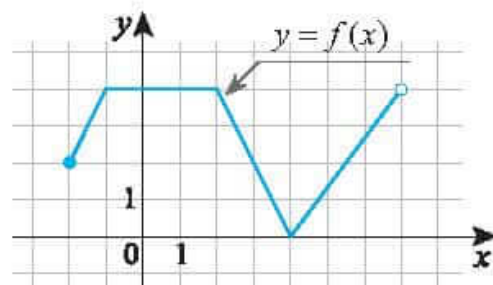
Podaj dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f funkcji f .

8.22. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział:

- A. $\langle -2; 7 \rangle$, B. $(0; 4)$,
C. $\langle 0; 4 \rangle$, D. $\langle 0; 4 \rangle$.



8.23. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \sqrt{1-x}$.

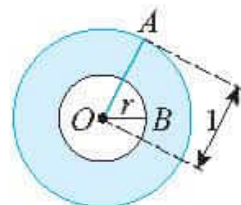
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedziną funkcji f jest przedział:

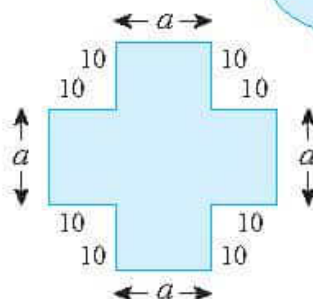
- A. $(-\infty; 1]$, B. $(-\infty; 1)$, C. $(1; +\infty)$, D. $[1; +\infty)$.

8.24. Skorzystaj z podanej informacji i wskaż zmienną niezależną oraz zmienną zależną, napisz wzór przyporządkowania oraz określ jego dziedzinę.

a) Promieniowi r koła, przedstawionemu na rysunku, przyporządkowano pole P pierścienia wyróżnionego kolorem niebieskim, gdzie $|OA| = 1$, $|OB| = r$.



b) Krawędzi a pudełka mającego kształt graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego siatka przedstawiona jest na rysunku, przyporządkowano jego objętość V .



8.25. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

- a) $f(x) = 8 - x^3$, b) $f(x) = \frac{2x}{4x-3}$, c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+x}}$.

8.26. Przepisz przykład do zeszytu i określ zbiór wartości Y_f funkcji f , gdy:

- a) $f(x) = 3x^2 - 1$
i $x \in \{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$,

b)

x	-4	-2	-1	1	2
$f(x) = \frac{4}{x^2}$					

8.27. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^2$. Napisz wzór funkcji g , gdy:

- a) $g(x) = -f(x)$, b) $g(x) = f(-x)$, c) $g(x) = f(x-3)$,
d) $g(x) = f(x)-3$, e) $g(x) = f(3x)$, f) $g(x) = f(f(x))$.

8.28. Uzasadnij, że jeżeli $f(x) = 4x$, to $f(a+b) = f(a) + f(b)$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

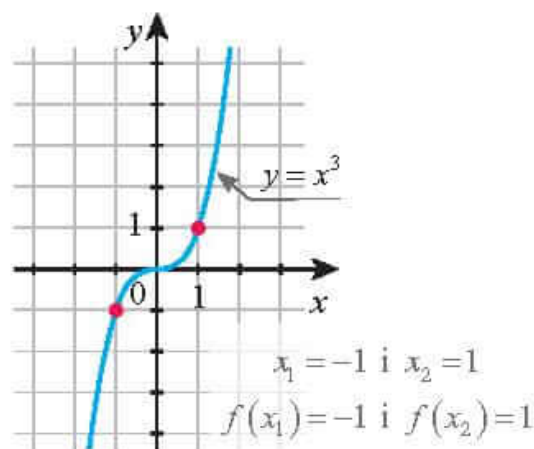
D

Funkcje różnowartościowe

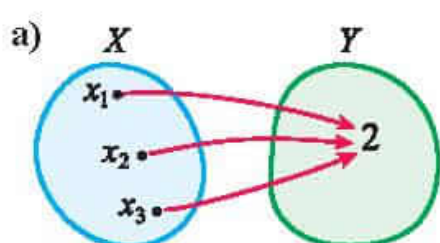
Definicja

Funkcję f nazywamy **różnowartościową**, jeżeli jej różnym argumentom przyporządkowane są różne wartości.

- Jeżeli $x_1 \in D_f$, $x_2 \in D_f$ i $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Jeżeli funkcja jest różnowartościowa, to każdy element zbioru jej wartości przyjmowany jest tylko jeden raz.

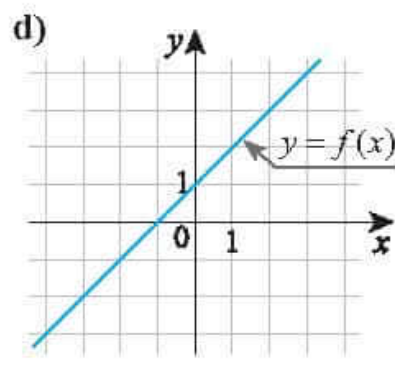
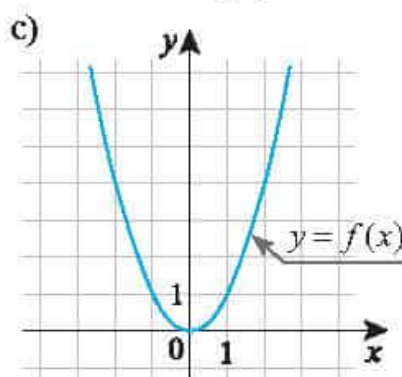


Ćwiczenie 17. Określ, czy przedstawiona funkcja jest różnowartościowa.



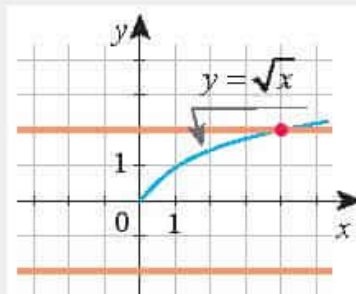
b)

x	-2	-1	0	1	5
y	5	2	3	2	-2

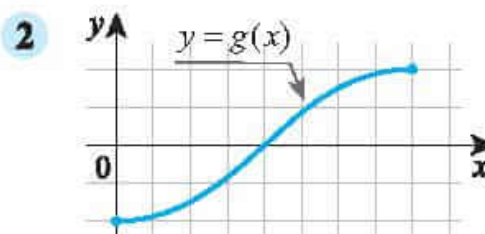
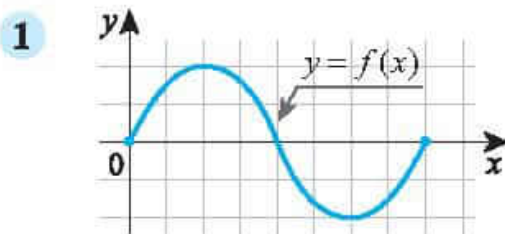


Uwaga

Jeżeli funkcja f jest różnowartościowa, to każda prosta równoległa do osi x ma co najwyżej jeden punkt wspólny z jej wykresem, czyli prosta równoległa do osi x przecina wykres funkcji f jeden raz lub wcale.

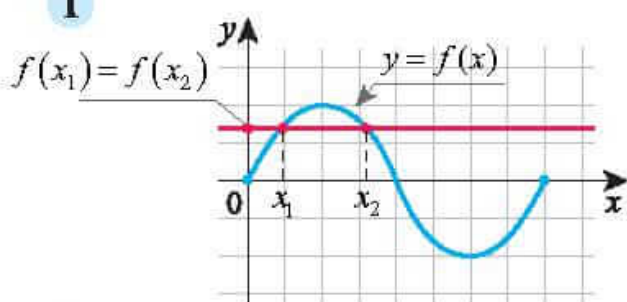


Przykład 13. Funkcje f i g określone są wykresami **1** i **2**. Który z wykresów jest wykresem funkcji różnowartościowej?



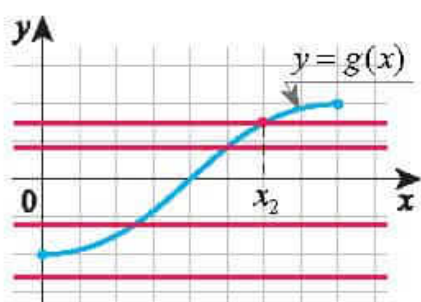
Rozwiązanie

1



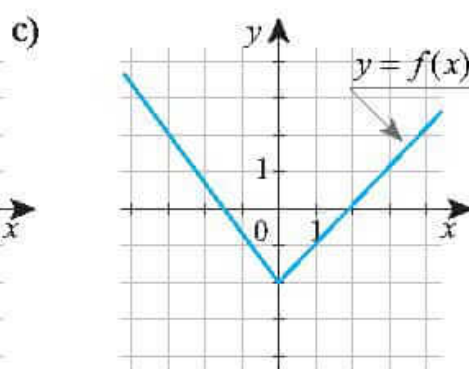
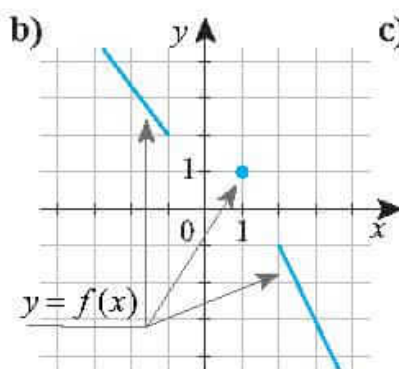
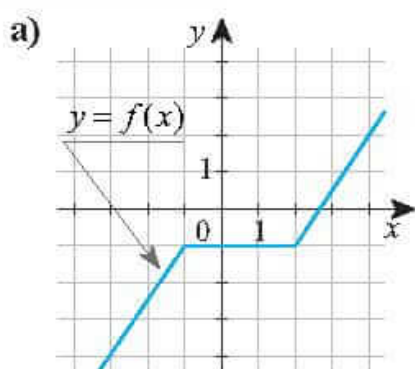
Istnieje prosta równoległa do osi x , która z wykresem funkcji f ma dwa punkty wspólne, więc funkcja f nie jest różnowartościowa.

2



Każda prosta równoległa do osi x ma co najwyżej jeden punkt wspólny z wykresem funkcji g , więc funkcja g jest różnowartościowa.

Ćwiczenie 18. Określ, czy funkcja f przedstawiona wykresem jest różnowartościowa.



Przykład 14. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = 5x + 3$ jest różnowartościowa.

Rozwiązanie

Z (założenie): $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ i $x_1 \neq x_2$,
czyli $x_1 - x_2 \neq 0$.

T (teza): $f(x_1) \neq f(x_2)$,
czyli $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$.

Dowód:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \underbrace{5x_1 + 3}_{f(x_1)} - \underbrace{(5x_2 + 3)}_{f(x_2)} = \\ &= 5 \cdot (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Z założenia $x_1 - x_2 \neq 0$, więc $5 \cdot (x_1 - x_2) \neq 0$, zatem $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$.

c.n.w.

R

Uwaga

Aby wykazać, że funkcja f jest różnowartościowa, wystarczy sprawdzić, czy $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$, przy założeniu, że $x_1 - x_2 \neq 0$.

Ćwiczenie 19. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = -3x + 2$ jest różnowartościowa.

Odpowiedzi do ćwiczeń

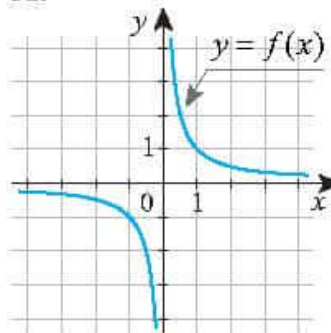
17. a) Nie, b) tak, c) nie, d) tak. 18. a) Nie, b) tak, c) nie.

Zadania utrwalające

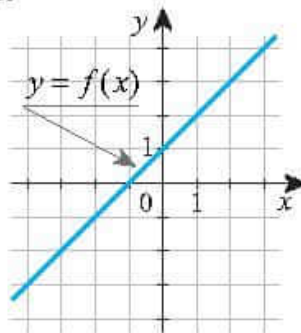
8.29. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Funkcję, która **nie** jest różnowartościowa, przedstawiono na rysunku:

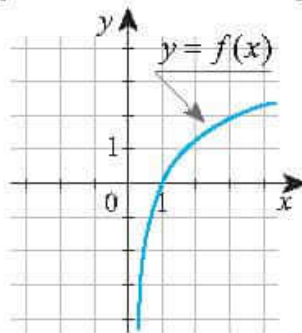
A.



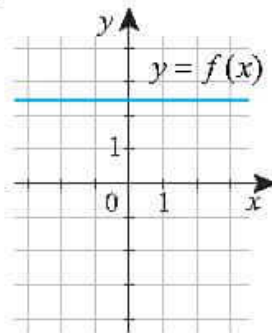
B.



C.



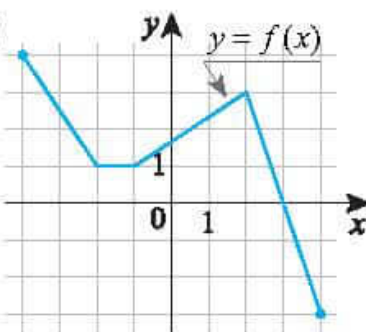
D.



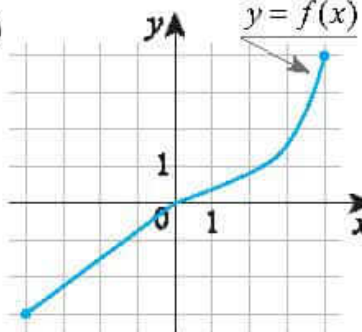
8.30. Przeanalizuj wykres funk-

D cji f przedstawiony na rysunku i określ, czy jest to wykres funkcji różnowartościowej. Odpowiedź uzasadnij.

a)



b)



8.31. Naskicuj dwa przykłady wykresów funkcji, które:

a) są różnowartościowe,

b) nie są różnowartościowe.

8.32. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = -7x + 3$ jest różnowartościowa.

D

R

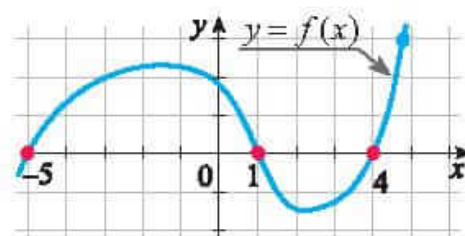
8.33. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2$ nie jest różnowartościowa.

D

Miejsce zerowe i znak funkcji w przedziale

Przykład 15. Przeanalizuj wykres funkcji f przedstawionej na rysunku i podaj wartości funkcji dla argumentów x_1, x_2, x_3 , gdy:

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 4.$$



Rozwiązanie

Zauważamy, że wartości funkcji f , gdy $x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 4$, są równe zero, czyli $f(-5) = 0, f(1) = 0, f(4) = 0$.

Wykres funkcji f przecina oś x w punktach o współrzędnych $(-5, 0), (1, 0), (4, 0)$.

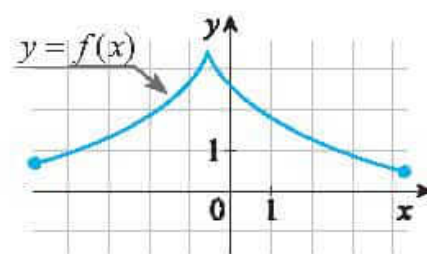
Definicja

Miejszem zerowym funkcji nazywamy każdy argument, dla którego funkcja ma wartość równą zero.

- Liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji f , gdy $f(x_0) = 0$.
- **Miejsce zerowe** funkcji f jest równe **odciętej punktu**, w którym wykres funkcji przecina oś x .

Np. funkcja f określona wzorem $f(x) = -2x + 4$ ma miejsce zerowe równe 2, bo $f(2) = 0$.

Funkcja, której wykres przedstawiono na rysunku, nie ma miejsc zerowych, ponieważ jej wykres nie przecina osi x .

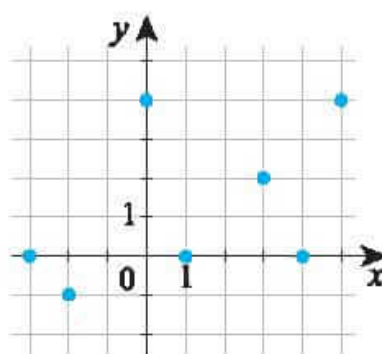


Ćwiczenie 20. Podaj miejsca zerowe funkcji przedstawionej:

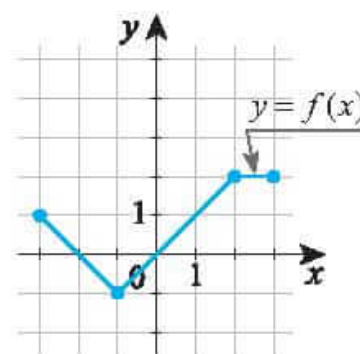
a) tabelką

x	$y = f(x)$
-3	-1
-1	0
0	3
3	1
4	0
5	2

b) wykresem

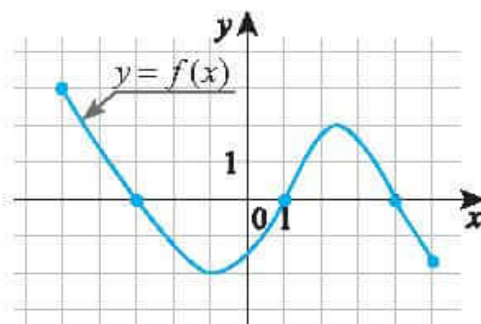


c) wykresem



Przykład 16. Przeanalizuj wykres funkcji f i podaj:

- miejsca zerowe,
- przedziały liczbowe, w których wartości funkcji są dodatnie,
- przedziały liczbowe, w których wartości funkcji są ujemne,
- dla jakich argumentów x wartości funkcji f są niedodatnie, czyli $f(x) \leq 0$.



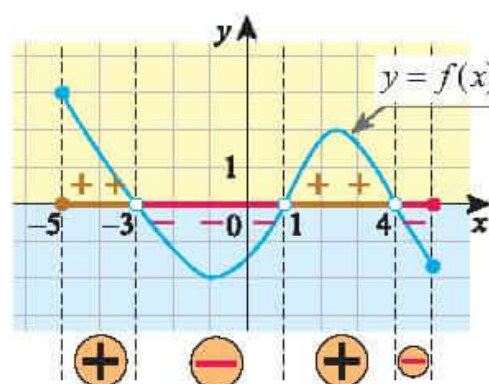
Rozwiązanie

- a) Miejscami zerowymi funkcji f są liczby:

-3 , bo $f(-3) = 0$,

1 , bo $f(1) = 0$,

4 , bo $f(4) = 0$.



- b) $x \in \langle -5; -3 \rangle$ lub $x \in (1; 4)$, czyli
 $x \in \langle -5; -3 \rangle \cup (1; 4)$.

Wartości funkcji f są dodatnie ($f(x) > 0$) dla tych argumentów x , dla których wykres funkcji leży nad osią x (żółte tło).

- c) $x \in (-3; 1)$ lub $x \in (4; 5)$, czyli
 $x \in (-3; 1) \cup (4; 5)$.

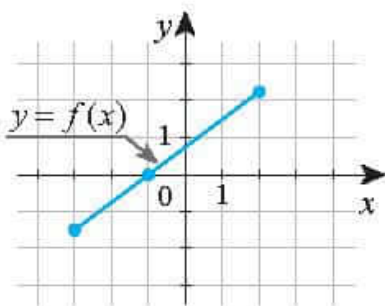
Wartości funkcji f są ujemne ($f(x) < 0$) dla tych argumentów x , dla których wykres funkcji leży pod osią x (niebieskie tło).

- d) $x \in \langle -3; 1 \rangle$ lub $x \in \langle 4; 5 \rangle$, czyli
 $x \in \langle -3; 1 \rangle \cup \langle 4; 5 \rangle$.

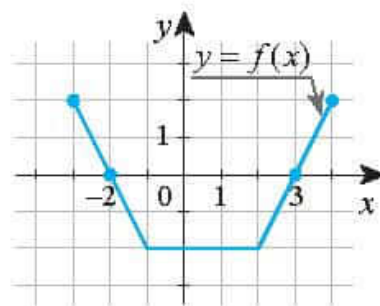
Argumenty, dla których $f(x) \leq 0$, tzn. te argumenty x , dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne lub wartość 0, czyli przyjmuje wartości niedodatnie.

Ćwiczenie 21. Odczytaj z wykresu te wartości argumentów x , dla których funkcja f przyjmuje wartości:

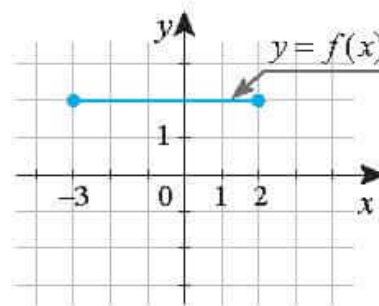
- a) dodatnie



- b) ujemne



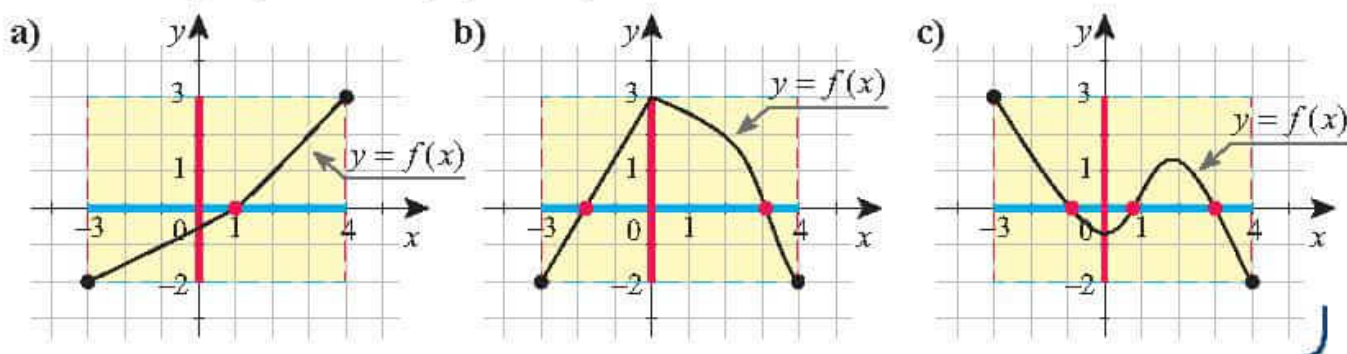
- c) dodatnie



Przykład 17. Narysuj przykładowy wykres funkcji f , której dziedziną jest przedział $\langle -3; 4 \rangle$, zbiorem wartości przedział $\langle -2; 3 \rangle$ i która ma:

a) jedno miejsce zerowe, b) dwa miejsca zerowe, c) trzy miejsca zerowe.

Rozwiązanie Na płaszczyźnie kartezjańskiej rysujemy prostokąt (kolor żółty), w którym umieszczamy wykres funkcji, jak na rysunku.



Ćwiczenie 22. Narysuj przykładowy wykres funkcji f , która spełnia warunki:

a) $D_f = \langle -5; 5 \rangle$, $Y_f = \langle -4; 4 \rangle$, $f(-3) = 0$ i $f(3) = 0$,

b) $D_f = \langle -6; 1 \rangle$, $Y_f = \langle -3; 1 \rangle$ i $f(x) = 0$, gdy $x_1 = -4$ i $x_2 = -1$,

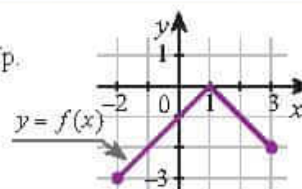
c) $D_f = \langle -2; 3 \rangle$, $Y_f = \langle -3; 0 \rangle$ i $f(1) = 0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

20. a) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, b) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

21. a) $x \in (-1; 2)$, b) $x \in (-2; 3)$, c) $x \in \langle -3; 2 \rangle$.

22. c) Np.



Zadania utrwalające

8.34. Podaj miejsca zerowe funkcji określonej za pomocą tabeli.

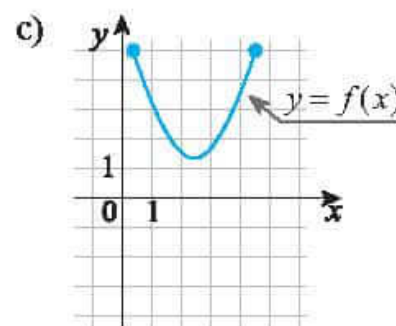
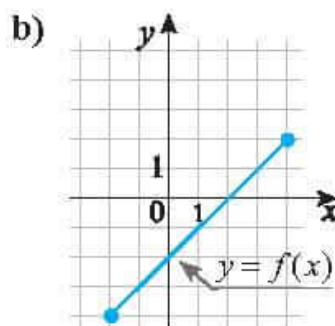
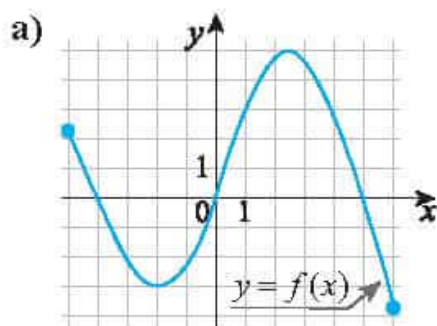
a)

x	-3	-2	-1	0	1
$y = f(x)$	-1	0	1	2	0

b)

x	-1	0	2	3	4
$y = f(x)$	0	1	0	1	0

8.35. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f .



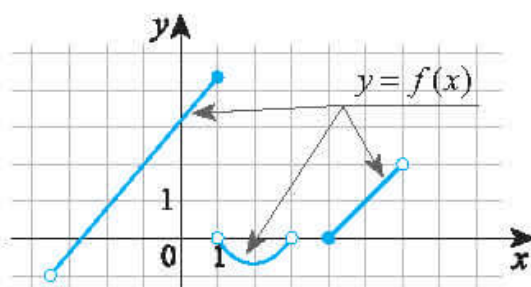


8.36. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

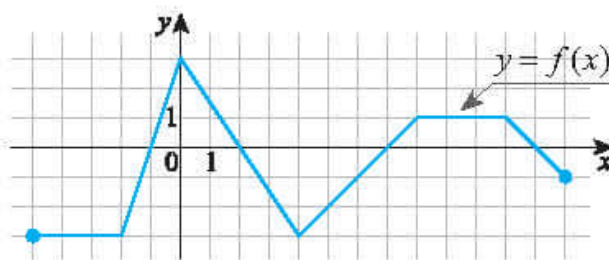
Funkcja f miejsc zerowych ma:

- A. jedno, B. dwa,
C. trzy, D. cztery.



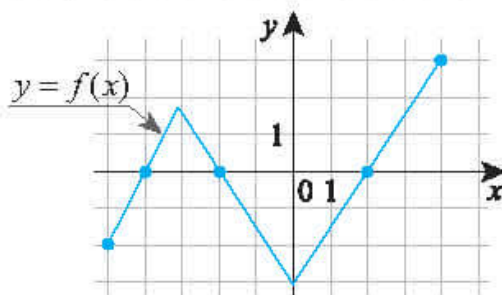
8.37. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Odczytaj z wykresu i podaj:

- a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f ,
b) miejsca zerowe tej funkcji,
c) te argumenty x , dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



8.38. Funkcja f określona jest wykresem.

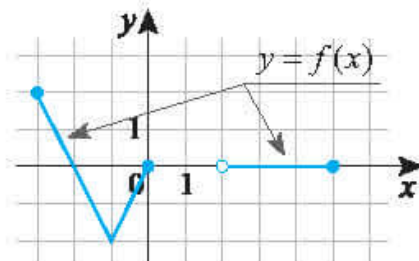
- a) Odczytaj i podaj miejsca zerowe funkcji f .
b) Podaj przedziały, dla których $f(x) > 0$.
c) Podaj przedziały, dla których $f(x) < 0$.



8.39. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Funkcja f ma wartości dodatnie, gdy $x \in \langle -3; -2 \rangle$.	P	F
Funkcja f ma wartości niedodatnie, gdy $x \in \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$.	P	F
Funkcja f ma trzy miejsca zerowe.	P	F

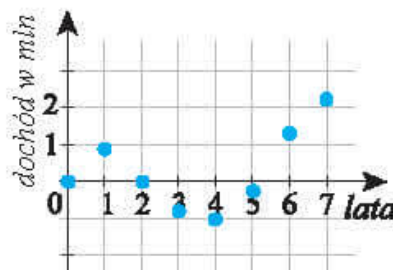


8.40. Narysuj przykładowy wykres funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -4; 4 \rangle$ i która:

- a) nie ma miejsc zerowych, b) ma trzy miejsca zerowe,
c) ma pięć miejsc zerowych, d) przyjmuje tylko wartości ujemne.

8.41. Pewien przedsiębiorca przeanalizował dochód swojej firmy w ciągu siedmiu lat i przedstawił to na wykresie. Odczytaj z wykresu okresy, w których przedsiębiorstwo:

- a) miało straty (dochód był ujemny),
b) osiągnęło zyski (dochód był dodatni).



Monotoniczność funkcji

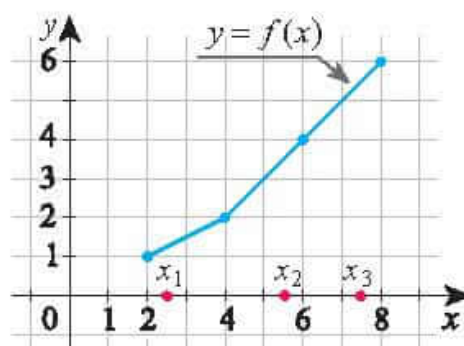
Określić monotoniczność funkcji, to znaczy wskazać maksymalne przedziały tych argumentów, dla których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała.



Ćwiczenie 23. Przepisz ćwiczenie do zeszytu.

Przeanalizuj wykres funkcji f i wstaw w miejsce ■ znak „ $<$ ” lub „ $>$ ”.

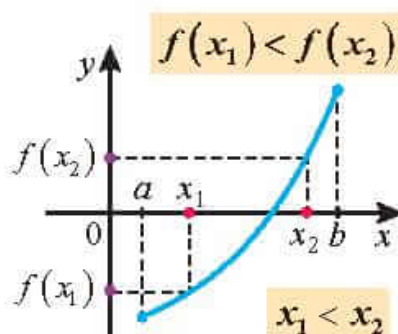
- a) 2 ■ 8 , $f(2)$ ■ $f(8)$,
- b) 2 ■ 6 , $f(2)$ ■ $f(6)$,
- c) x_1 ■ x_2 , $f(x_1)$ ■ $f(x_2)$,
- d) x_2 ■ x_3 , $f(x_2)$ ■ $f(x_3)$.



Definicja

Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, jeśli $x_1 \in \langle a, b \rangle$ i $x_2 \in \langle a, b \rangle$ oraz $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

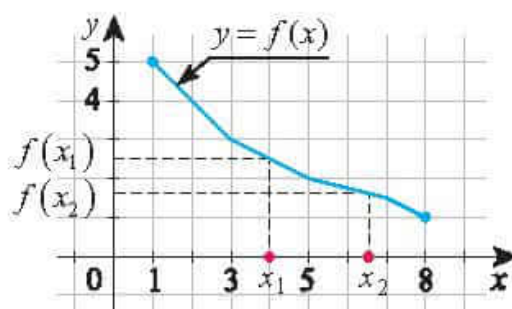
Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, gdy w przedziale tym wraz ze wzrostem argumentów funkcji rosną jej wartości.



Ćwiczenie 24. Przepisz ćwiczenie do zeszytu.

Przeanalizuj wykres funkcji f i wstaw w miejsce ■ znak „ $<$ ” lub „ $>$ ”.

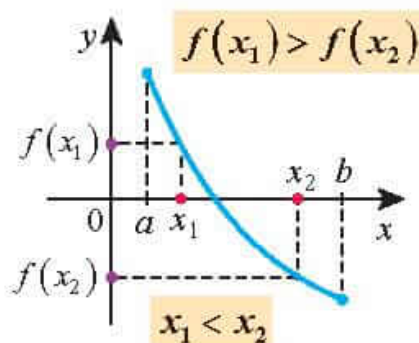
- a) 1 ■ 3 , $f(1)$ ■ $f(3)$,
- b) x_1 ■ 7 , $f(x_1)$ ■ $f(7)$,
- c) x_1 ■ x_2 , $f(x_1)$ ■ $f(x_2)$,
- d) x_2 ■ 8 , $f(x_2)$ ■ $f(8)$.



Definicja

Funkcja jest malejąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, jeśli $x_1 \in \langle a, b \rangle$ i $x_2 \in \langle a, b \rangle$ oraz $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcja jest malejąca w przedziale $\langle a, b \rangle$, gdy w przedziale tym wraz ze wzrostem argumentów funkcji maleją jej wartości.



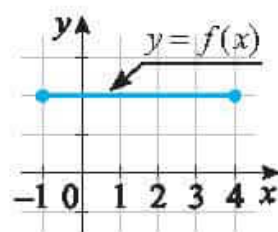
Uwaga

Funkcja rosnąca (malejąca) w zbiorze jest różnowartościowa.



Ćwiczenie 25. Funkcja f określona jest wykresem. Przepisz tabelę do zeszytu oraz w miejsce wpisz wartości funkcji dla wybranych argumentów i zapisz wnioski.

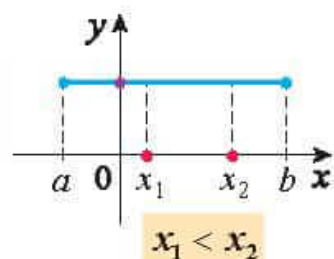
x	-1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	 	 	 	 	 	



Definicja

Funkcja jest stała w przedziale $\langle a, b \rangle$, jeśli $x_1 \in \langle a, b \rangle$ i $x_2 \in \langle a, b \rangle$ oraz $x_1 < x_2$, to $f(x_1) = f(x_2)$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$



Funkcja jest stała w przedziale $\langle a, b \rangle$, gdy w przedziale tym wraz ze wzrostem argumentów funkcji jej wartości nie zmieniają się, czyli są stałe.

Przykład 18. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -8; 9 \rangle$. Odczytaj z wykresu maksymalne przedziały, w których funkcja:

a) maleje, b) rośnie.

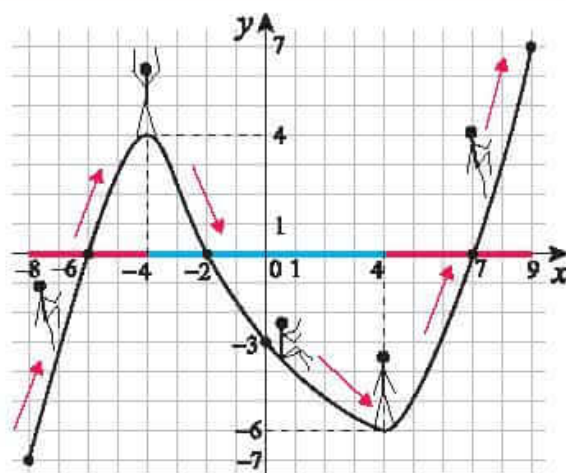
Rozwiązanie

Analizując wykres funkcji, zauważamy, że:

a) funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -4; 4 \rangle$ (ludzik idzie w dół),

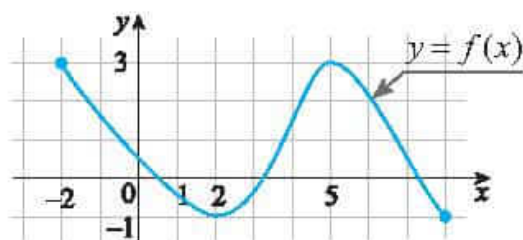
b) funkcja jest rosnąca w przedziałach $\langle -8; -4 \rangle$, $\langle 4; 9 \rangle$ (ludzik idzie w górę).

Rozpatrywana funkcja jest rosnąca również i w innych przedziałach, np. w przedziałach: $\langle -6; -4 \rangle$, $\langle 5; 8 \rangle$, $\langle 4; 9 \rangle$ itp., ale przedziały $\langle -8; -4 \rangle$ i $\langle 4; 9 \rangle$ są maksymalnymi przedziałami, w których funkcja jest rosnąca.



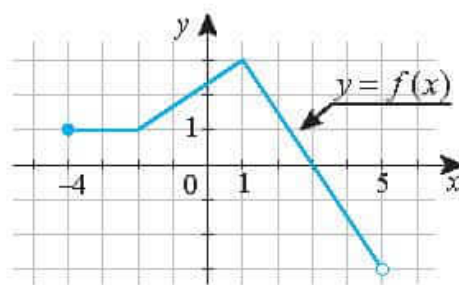
Ćwiczenie 26. Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f przedstawiona na wykresie jest:

a) rosnąca, b) malejąca.



Ćwiczenie 27. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -4; 5 \rangle$. Odczytaj z wykresu maksymalny przedział, w którym funkcja jest:

a) stała, b) rosnąca, c) malejąca.



Przykład 19. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = -2x + 4$ jest malejąca w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie

$$\begin{array}{l|l} Z \text{ (założenie): } x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \text{ i } x_1 < x_2, & T \text{ (teza): } f(x_1) > f(x_2). \\ f(x) = -2x + 4. & \end{array}$$

Dowód:

Zauważamy, że $x_1 < x_2$, czyli $x_2 - x_1 > 0$,

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ czyli } f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

Badamy znak różnicy $f(x_2) - f(x_1)$:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \underbrace{-2x_2 + 4}_{f(x_2)} - \underbrace{(-2x_1 + 4)}_{f(x_1)} = \\ &= -2x_2 + 2x_1 = -2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Z założenia $x_2 - x_1 > 0$, więc $-2 \cdot (x_2 - x_1) < 0$, zatem $f(x_2) - f(x_1) < 0$, czyli funkcja f jest malejąca. **c.n.w.**

Ćwiczenie 28. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = 3x - 7$ jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Uwaga

Jeśli $x_2 - x_1 > 0$ oraz:

- $f(x_2) - f(x_1) > 0$, to funkcja f jest rosnąca,
- $f(x_2) - f(x_1) < 0$, to funkcja f jest malejąca,
- $f(x_2) - f(x_1) = 0$, to funkcja f jest stała.

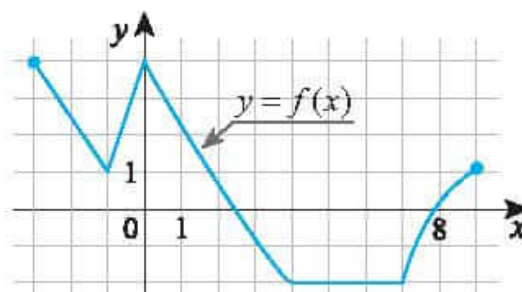
Odpowiedzi do ćwiczeń

25. Wniosek: funkcja jest stała. 26. a) $\langle 2; 5 \rangle$, b) $\langle -2; 2 \rangle$, $\langle 5; 8 \rangle$. 27. a) $\langle -4; -2 \rangle$, b) $\langle -2; 1 \rangle$, c) $\langle 1; 5 \rangle$.

Zadania utrwalające

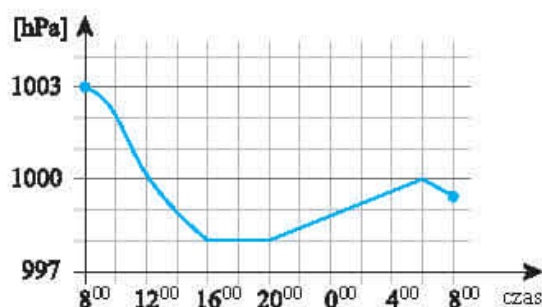
8.42. Funkcja f określona jest wykresem. Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja jest:

- a) rosnąca, b) malejąca, c) stała.



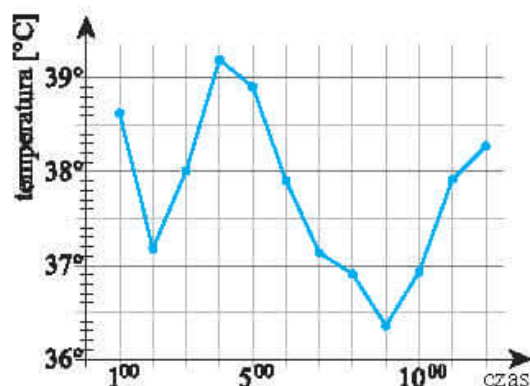
8.43. Na rysunku przedstawiono zmiany ciśnienia atmosferycznego w ciągu jednej doby. Odczytaj z wykresu, w jakich przedziałach czasu ciśnienie to:

- a) rosło, b) malało, c) było stałe.



8.44. Pacjent został przyjęty do szpitala o godzinie 1⁰⁰*. Temperaturę mierzono mu co godzinę i zapisywano w karcie choroby. Odczytaj z wykresu, w jakich przedziałach czasu temperatura ciała chorego:

- a) rosła, b) malała.



8.45. Funkcja f przedstawiona jest tabelką. Określ, czy funkcja f jest funkcją: malejącą, rosnącą, stałą, gdy:

a)

x	-3	$\frac{1}{2}$	2	5	13	58
$y = f(x)$	-2	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$

b)

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
$y = f(x)$	$\sqrt{2} + 1$	$\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$	$\frac{-1}{1 - \sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{8} + 2}{2}$

c)

x	0	1	-1	2	-2	4
$y = f(x)$	1	2	-2	4	-3	5

d)

x	-0,5	-0,3	0	0,1	0,11	$\sqrt{2}$
$y = f(x)$	4	0	-0,5	-0,7	-2	-3,1

8.46. Naskicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji:

a) rosnącej w przedziale $\langle 0; 4 \rangle$,

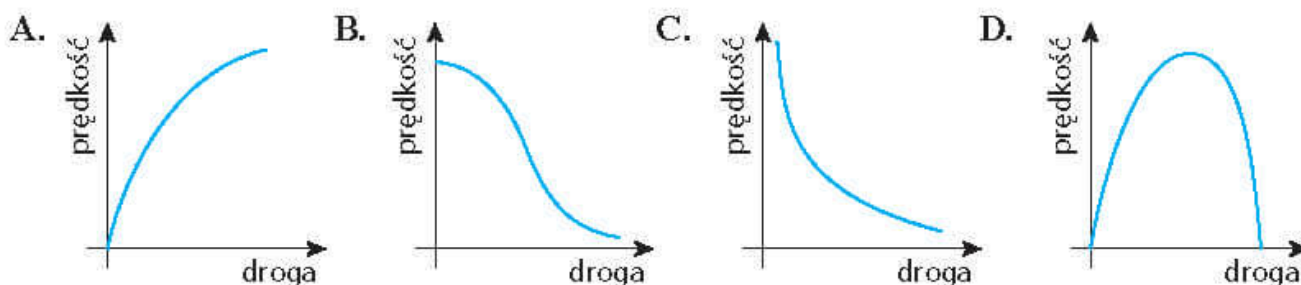
b) malejącej w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$,

c) stałej w przedziale $\langle -2; 4 \rangle$.

8.47. Dzieci zjeżdżają z górki na sankach.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zmianę prędkości jazdy dzieci zjeżdżających z górki na sankach opisuje wykres:



* Zapis godziny 1⁰⁰ jest równoważny zapisowi 1:00.

8.48. Narysuj przykładowy wykres funkcji, która w przedziale $(-6; -2)$ jest malejąca, w przedziale $(-2; 3)$ jest stała, a w przedziale $(3; 7)$ jest rosnąca oraz:

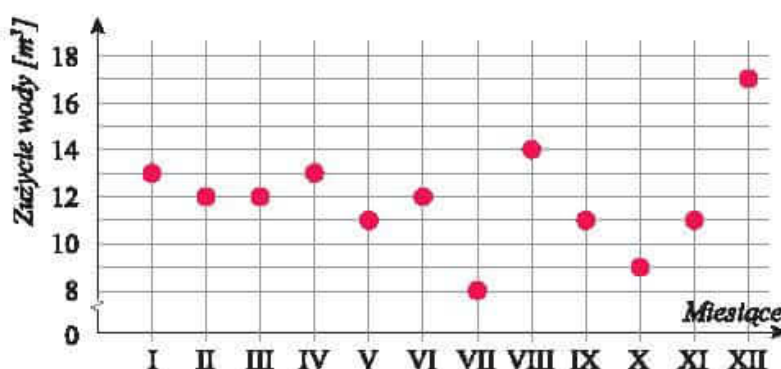
- a) nie ma miejsc zerowych, b) ma miejsca zerowe.

8.49. Wykaż, że funkcja f jest:

- D** a) rosnąca, gdy $f(x) = 4x - 12$ b) malejąca, gdy $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$,
c) malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, gdy $f(x) = x^2 - 4$.

Wartość najmniejsza i największa funkcji w przedziale domkniętym

Ćwiczenie 29. Skrupulatny pan Kowalski zaznaczał liczbę metrów sześciennych wody zużytej przez jego rodzinę w kolejnych miesiącach jednego roku. W którym miesiącu roku rodzina Kowalskich zużyła najwięcej wody, a w którym najmniej?



Uwaga Symbolicznie oznaczamy:

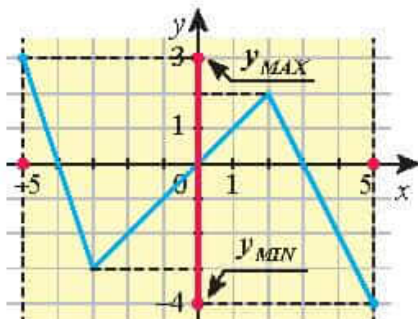
- y_{MIN} – najmniejsza wartość funkcji,
- y_{MAX} – największa wartość funkcji.

Przykład 20. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $(-5; 5)$. Odczytaj z wykresu najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale:

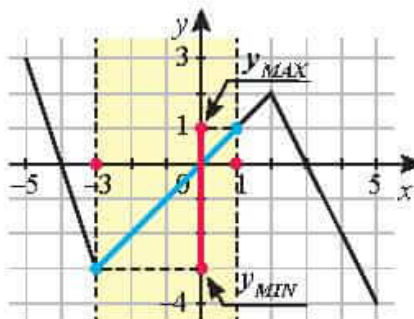
- a) $(-5; 5)$, b) $(-3; 1)$, c) $(1; 4)$.

Rozwiązanie

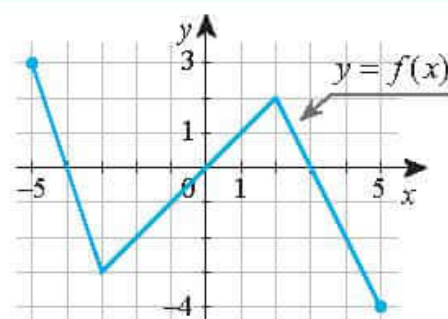
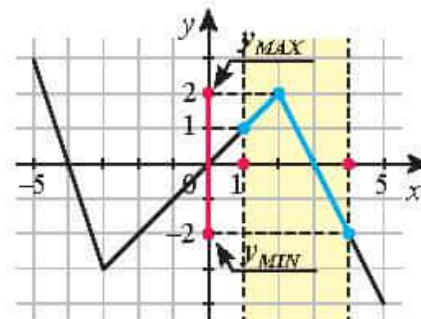
- a) $x \in (-5; 5)$



- b) $x \in (-3; 1)$



- c) $x \in (1; 4)$



Z wykresu odczytujemy, że funkcja f ma:

- | | | |
|---|---|--|
| <p>a) w przedziale $\langle -5; 5 \rangle$
zbiorem wartości
funkcji f jest
przedział $\langle -4; 3 \rangle$,
więc
$y_{MIN} = -4$ i $y_{MAX} = 3$.</p> | <p>b) w przedziale $\langle -3; 1 \rangle$
zbiorem wartości
funkcji f jest
przedział $\langle -3; 1 \rangle$,
więc
$y_{MIN} = -3$ i $y_{MAX} = 1$.</p> | <p>c) w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$
zbiorem wartości
funkcji f jest
przedział $\langle -2; 2 \rangle$,
więc
$y_{MIN} = -2$ i $y_{MAX} = 2$.</p> |
|---|---|--|

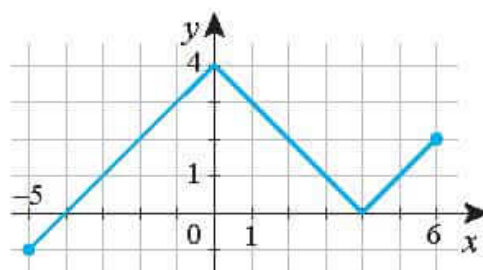
Odp.: a) $y_{MIN} = f(5) = -4$, $y_{MAX} = f(-5) = 3$,

b) $y_{MIN} = f(-3) = -3$, $y_{MAX} = f(1) = 1$,

c) $y_{MIN} = f(4) = -2$, $y_{MAX} = f(2) = 2$.

Ćwiczenie 30. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -5; 6 \rangle$. Odczytaj z wykresu najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale:

- a) $\langle -5; 6 \rangle$, b) $\langle -2; 3 \rangle$, c) $\langle -3; -1 \rangle$.



Odpowiedzi do ćwiczeń

29. Najwięcej w grudniu, najmniej w lipcu.

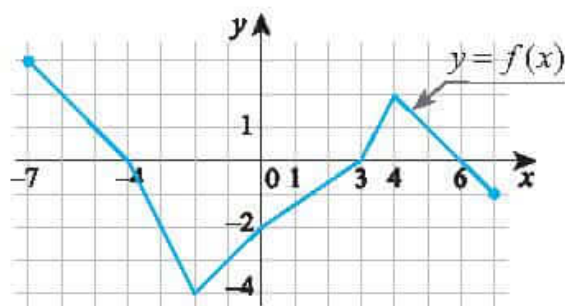
30. a) $y_{MIN} = -1$, $y_{MAX} = 4$, b) $y_{MIN} = 1$, $y_{MAX} = 4$, c) $y_{MIN} = 1$, $y_{MAX} = 3$.

Zadania utrwalające

8.50. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

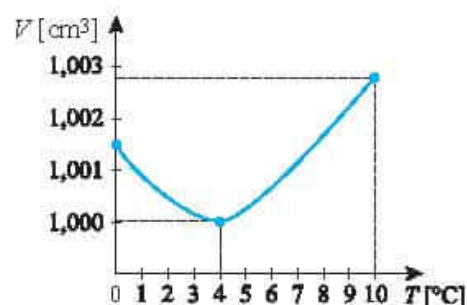
Odczytaj z wykresu najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale:

- a) $\langle -7; 6 \rangle$, b) $\langle 0; 6 \rangle$, c) $\langle -4; 4 \rangle$.



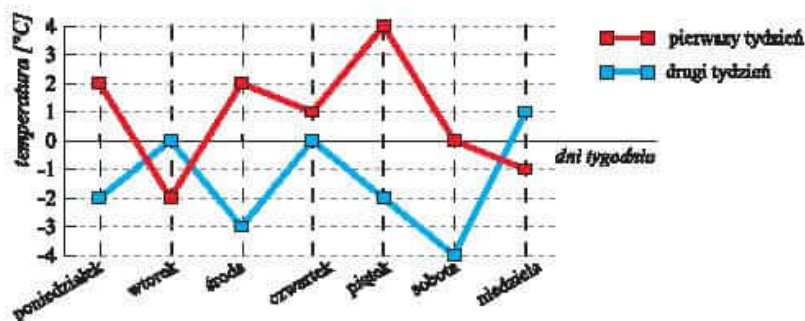
8.51. Na wykresie przedstawiono anomalny charakter rozszerzalności cieplnej jednego grama wody. Odczytaj z wykresu:

- a) dla jakich temperatur T objętość wody maleje,
b) dla jakich temperatur T objętość wody rośnie,
c) dla jakiej temperatury T objętość wody jest najmniejsza.



8.52. Każdego dnia dwutygodniowych ferii zimowych Małgosia o godzinie 12⁰⁰ odczytywała temperaturę powietrza. Wynik zaznaczała na wykresie.

Skorzystaj z wykresu Małgosi i odpowiedz na pytania:



- W którym dniu ferii temperatura była najniższa, a w którym najwyższa?
- Przez ile dni ferii temperatura była ujemna?
- Ile było dni, w których Małgosia odczytała temperaturę 0°C?
- Jaka była różnica między najwyższą a najniższą temperaturą w czasie ferii?

8.53. Funkcja f przedstawiona jest grafem.

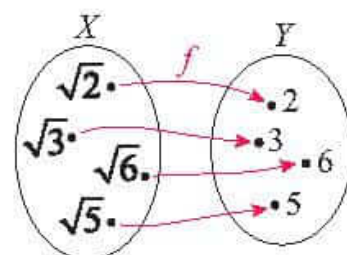
Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Najmniejszą wartością funkcji f jest liczba:

- A. $\sqrt{2}$, B. 2.

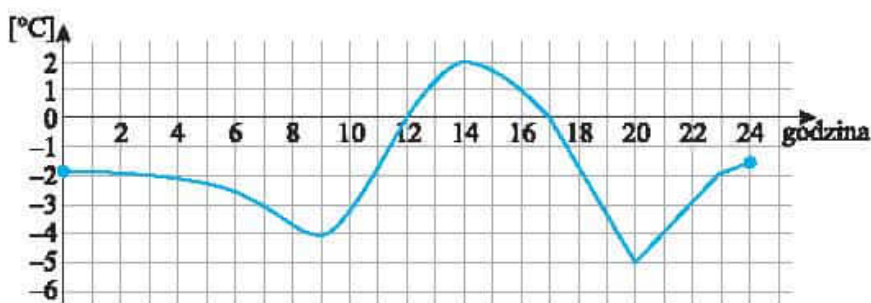
Największą wartością funkcji f jest liczba:

- C. 6, D. $\sqrt{6}$.



8.54. Termograf zarejestrował zmiany temperatury powietrza w ciągu jednej doby. Odczytaj z wykresu:

- godzinę, o której temperatura była najwyższa i podaj jej wartość,



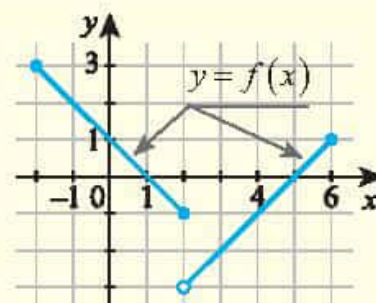
- godzinę, o której temperatura była najniższa i podaj jej wartość.

Zestaw powtórkowy

1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .

D Czy prawdą jest, że $f(2) = -3$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.



T	Tak,	ponieważ	A.	$f(2) = -1$.
N	Nie,		B.	liczba 2 nie należy do dziedziny funkcji.

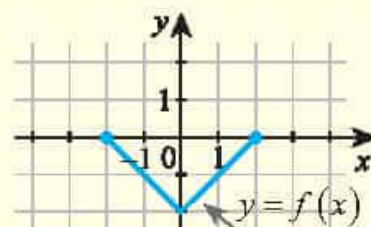
2. Wykres funkcji f tworzą punkty A, B, C, D takie, że $A = (-2, 2)$, $B = (2, 0)$, $C = (5, 3)$ i $D = (7, -2)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Do dziedziny funkcji f należy liczba 0.	P	F
Do zbioru wartości funkcji f należy liczba 0.	P	F
Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 0.	P	F
Najmniejszą wartość funkcja f przyjmuje dla największego argumentu.	P	F
Funkcja f jest różnowartościowa.	P	F

3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Czy prawdziwa jest, że funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.



T	Tak,	ponieważ	A.	funkcja f nie ma miejsc zerowych.
N	Nie,		B.	funkcja f ma miejsca zerowe.

4. Z hodowli roślin zbożowych pobierano w ciągu dnia po kilka roślin i mierzono stężenie glukozy w liściach. Wyniki pomiarów w procentach podano w tabeli.

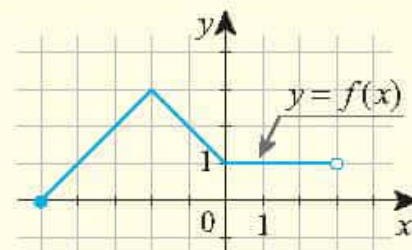
Godzina	Stężenie glukozy w % suchej masy liści
4:00	0,45
8:00	0,60
12:00	1,75
16:00	2,0
20:00	1,4
24:00	0,5
4:00	0,45

- a) Podaj największą wartość stężenia glukozy.
b) Podaj przedział czasowy, w którym następował wzrost stężenia glukozy, oraz przedział czasowy, w którym stężenie glukozy malało.
c) Podaj, o której godzinie stężenie glukozy osiągnęło 0,45% suchej masy liści.
d) Podaj, jakie było stężenie glukozy o północy.

5. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .

Czy $f(x) = 2$, gdy $x = -3$ lub $x = -1$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.



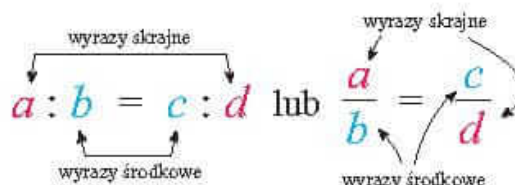
T	Tak,	ponieważ	A.	$f(-3) \neq f(-1)$.
N	Nie,		B.	$f(-3) = f(-1) = 2$.

9. Figury podobne i twierdzenie Talesa

Proporcja i przekształcanie wzorów

Przypomnijmy

Proporcją nazywamy równość dwóch stosunków (równość dwóch ilorazów), co zapisujemy:



- W proporcji iloczyn wyrazów **skrajnych** jest równy iloczynowi wyrazów **środkowych**:

$$a:b=c:d, \text{ więc } a \cdot d = b \cdot c \quad \text{lub} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ więc } a \cdot d = b \cdot c.$$

- W proporcji można zamieniać „miejscami” wyrazy **skrajne** lub wyrazy **środkowe**.

Zamiana wyrazów skrajnych:

$$\text{jeżeli } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ to } \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

Zamiana wyrazów środkowych:

$$\text{jeżeli } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ to } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Niektóre równania pierwszego stopnia są zapisane w postaci proporcji, np.:

- $x:3=4:5$ lub $\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$, skąd $5x=12$,
- $\frac{9}{5} = \frac{x+3}{9}$ lub $9:5=(x+3):9$, skąd $5 \cdot (x+3)=81$,
- $\frac{2}{x-1} = \frac{3}{x}$ lub $2:(x-1)=3:x$, skąd $3 \cdot (x-1)=2x$.

Przykład 1. Łódź motorowa, płynąc ze stałą prędkością przez 40 minut, zużywa 1,8 litra benzyny. Ile litrów benzyny zużyje łódź, jeśli będzie płynąć 2 godziny i 30 minut?

Rozwiązanie Płynąc:

40 minut łódź zużywa 1,8 litra benzyny,

150 minut łódź zużywa x litrów benzyny.

Zużycie benzyny jest wprost proporcjonalne do czasu płynięcia łodzi, więc iloraz tych wielkości jest stały.

$$\frac{40}{150} = \frac{1,8}{x}, \text{ skąd } x = \frac{150 \cdot 1,8}{40}, \text{ czyli } x = 6,75 \text{ litra.}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ to } d = \frac{b \cdot c}{a}$$

Odp.: Łódź motorowa zużyje 6,75 litra benzyny.

Ćwiczenie 1. Głos przenosi się w powietrzu na odległość 825 m w czasie 2,5 sekundy.

- Po ilu sekundach od wystrzału usłyszymy odgłos działa odległego o 1650 m?
- Od błyskawicy do grzmotu upłynęło 7 sekund. Jak daleko od nas uderzył piorun?

Ćwiczenie 2. W objętości $1,25 \text{ m}^3$ powietrza jest $262,5 \text{ dm}^3$ tlenu.

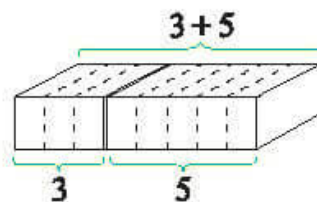
- Ile decymetrów sześciennych tlenu zawiera $5,4 \text{ m}^3$ powietrza?
- W ilu metrach sześciennych powietrza zawiera się 315 dm^3 tlenu?

Przykład 2. Sztabę cyny o masie 40 kg rozdzielono na dwie części, których stosunek mas był równy $3 : 5$. Ile ważyła każda z tych części?

Rozwiązanie I sposób. Sztabę rozdzielono na:

$$\text{część I o masie: } \frac{3}{8} \cdot 40 \text{ kg} = 15 \text{ kg},$$

$$\text{część II o masie: } \frac{5}{8} \cdot 40 \text{ kg} = 25 \text{ kg}.$$



II sposób. Oznaczamy: $3x$ – masa pierwszej części sztaby,

$5x$ – masa drugiej części sztaby.

Wtedy masa całej sztaby jest równa $(3+5)x = 8x$. Zatem $8x = 40$, skąd $x = 5$.

Odp.: Części ważyły 15 kg i 25 kg.

Ćwiczenie 3. Tłuszcz składa się z węgla, wodoru i tlenu w następującym stosunku wagowym: $19 : 3 : 3$. Ile kilogramów węgla, wodoru i tlenu zawartych jest w 10 kilogramach tłuszczu?

Przykład 3. Z równości $\frac{a-x}{b} = \frac{1}{c}$, gdzie $b \neq 0$ i $c \neq 0$, wyznacz zmienne:

- c , b) x , c) a .

Rozwiązanie Korzystając z własności proporcji, otrzymujemy:

a) $\frac{a-x}{b} = \frac{1}{c}$ $(a-x)c = b \quad : (a-x),$ gdzie $a-x \neq 0$, $c = \frac{b}{a-x},$	b) $\frac{a-x}{b} = \frac{1}{c}$ $(a-x)c = b \quad : c$ $a-x = \frac{b}{c}$ $x = a - \frac{b}{c},$	c) $\frac{a-x}{b} = \frac{1}{c}$ $(a-x)c = b \quad : c$ $a-x = \frac{b}{c}$ $a = \frac{b}{c} + x.$
--	---	---

Ćwiczenie 4. Z równości $\frac{a+x}{b} = y$, gdzie $y \neq 0$ i $b \neq 0$, wyznacz: a) b , b) x .

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) 5 s, b) 2310 m. 2. a) 1134 dm³, b) 1,5 m³. 3. 7,6 kg węgla, 1,2 kg wodoru, 1,2 kg tlenu.

4. a) $b = \frac{a+x}{y}$, b) $x = by - a$.

Zadania utrwalające

9.1. Oblicz x z proporcji:

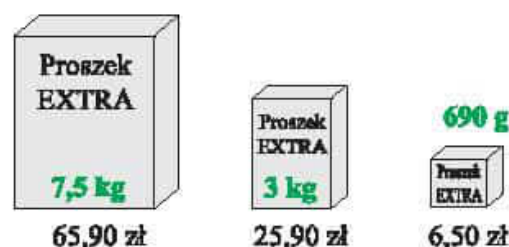
a) $\frac{x}{4} = \frac{3}{5}$,

b) $\frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{2}$,

c) $\frac{2x}{x+1} = \frac{2}{3}$,

d) $\frac{x-4}{3x} = \frac{1}{9}$.

9.2. W supermarkecie proszek do prania sprzedawany jest w trzech różnych opakowaniach i w różnych cenach, przedstawionych na rysunku. Które z opakowań stanowi najbardziej korzystną ofertę dla kupujących?



9.3. Wartość energetyczna produktów spożywczych podawana jest w kaloriach. Wiedząc, że 250 g miodu ma średnio 750 kilokalorii, oblicz, ile kilokalorii ma 100 g miodu.

9.4. W czasie 0,4 s głos w wodzie przebywa odległość 384 m.

a) W jakim czasie głos w wodzie pokonuje odległość 1,44 km?

b) Ile metrów głos pokonuje w czasie 0,6 s?

9.5. Podziel 1705 zł między dwie osoby w stosunku 4 : 7.

9.6. Do produkcji 300 kg kielbasy krakowskiej wzięto mięsa wieprzowego, wołowego i słoniny w stosunku 13 : 5 : 2. Ile kilogramów każdego z tych surowców zużyto?

9.7. Zakładając, że wszystkie zmienne mają wartości dodatnie, wyznacz x z wzoru:

a) $y = \frac{a-x}{b}$,

b) $y = \frac{ax}{b}$,

c) $y = \frac{a}{x} + b$,

d) $y = \frac{a}{x} - b$,

e) $y = (a+x)b$,

f) $y = ax + b$.

9.8. Wiedząc, że $\frac{9x-8y}{2} = \frac{7x-6y}{3}$, uzasadnij, że $\frac{x}{y} = \frac{12}{13}$.

9.9. Oblicz iloraz $\frac{x}{y}$, wiedząc że:

a) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{2}$,

b) $\frac{4}{5} = \frac{x-y}{x+y}$,

c) $\frac{3x+2y}{5} = \frac{4x-7y}{6}$,

d) $\frac{9x+3y}{4} = \frac{3x+9y}{5}$.

9.10. Jaki to ułamek, który po skróceniu jest równy $\frac{3}{7}$ i którego licznik jest o 20 mniejszy od mianownika?

Wielokąty podobne i ich własności

Z figurami podobnymi spotykamy się w życiu codziennym. Są przedmioty, które mają takie same kształty, chociaż ich rozmiary są różne, np. sfotografowany obiekt na odbitkach różnej wielkości, podłoga pomieszczenia i jej plan w skali itp.

Nim poznamy własności figur podobnych, określimy pojęcie odcinków proporcjonalnych.

Definicja

Stosunkiem odcinków AB i CD nazywamy liczbę, która jest ilorazem długości tych odcinków mierzonych tą samą jednostką długości, co zapisujemy $\frac{|AB|}{|CD|}$.

Definicja

Odcinki A_1B_1 i C_1D_1 **nazywamy proporcjonalnymi** do odcinków AB i CD wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|C_1D_1|}{|CD|}$.

Na przykład: Odcinki o długościach

$$|A_1B_1| = 12,8 \quad \text{i} \quad |C_1D_1| = 48,4$$

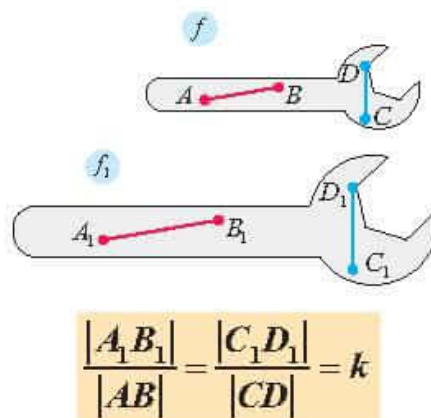
są proporcjonalne do odcinków o długościach

$$|AB| = 32 \quad \text{i} \quad |CD| = 121, \quad \text{ponieważ}$$

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{12,8}{32} = \frac{2}{5} \quad \text{i} \quad \frac{|C_1D_1|}{|CD|} = \frac{48,4}{121} = \frac{2}{5}. \quad \text{Zatem} \quad \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|C_1D_1|}{|CD|}.$$

Uwaga

- **Figury** f i f_1 **są podobne**, jeśli powiększając lub zmniejszając w pewnej skali jedną z figur, otrzymamy figurę przystającą do drugiej.
- W figurach podobnych stosunek dwóch dowolnie wybranych odcinków jednej figury równa się stosunkowi odpowiednich im odcinków drugiej figury, a odpowiednie kąty mają równe miary.
 k – skala podobieństwa figur f i f_1 .

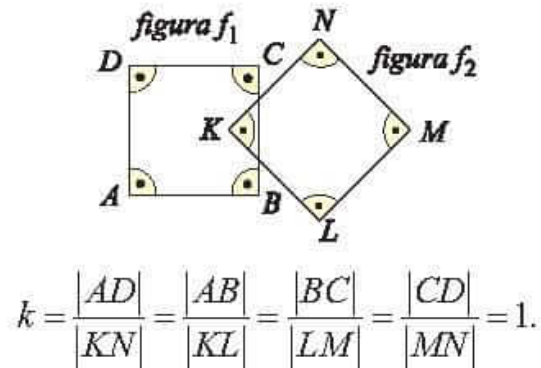
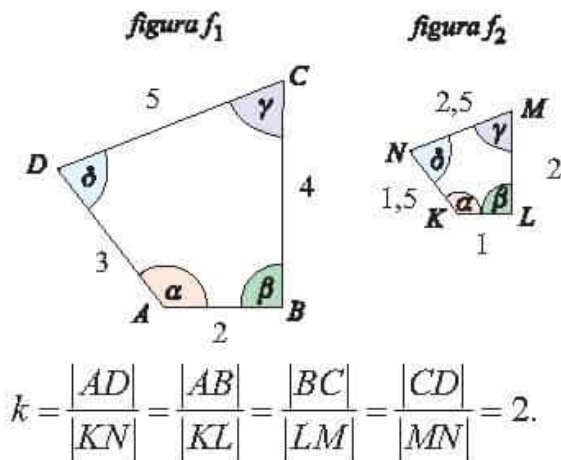


Definicja

Dwa wielokąty są:

podobne w skali k (gdzie $k > 0$), gdy mają odpowiednie kąty równe i odpowiednie boki proporcjonalne.

przystające (podobne w skali $k = 1$), gdy mają odpowiednie kąty i boki równe.



$f_1 \equiv f_2$ czytamy: **figura f_1 jest przystająca do figury f_2**

Ćwiczenie 5. Narysuj figurę podobną do:

- odcinka o długości 2,5 cm w skali 2,
- kwadratu o boku mającym długość 6 cm w skali $\frac{1}{3}$,
- prostokąta o wymiarach 1 cm $\times$ 2 cm w skali 2,
- koła o promieniu 1 cm w skali 4.

Przy obliczaniu długości odcinków w figurach podobnych zwykle korzystamy z własności proporcji.

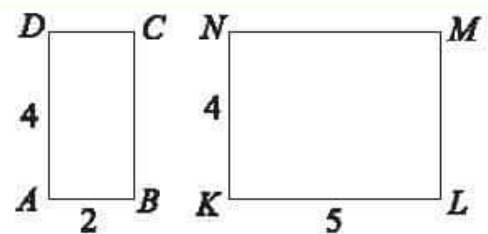
Przykład 4. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i sprawdź, czy prostokąty $ABCD$ i $KLMN$ są podobne.

Rozwiązanie Pierwszy warunek podobieństwa figur jest spełniony, ponieważ wszystkie kąty prostokątów są proste, a więc i równe.

Zauważamy, że krótszemu bokowi prostokąta $ABCD$ odpowiada krótszy bok prostokąta

$KLMN$, zatem $\frac{|AB|}{|KN|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, a bokowi AD odpowiada bok KL . Zatem $\frac{|AD|}{|KL|} = \frac{4}{5}$.

$\frac{1}{2} \neq \frac{4}{5}$, czyli $\frac{|AB|}{|KN|} \neq \frac{|AD|}{|KL|}$, więc prostokąty $ABCD$ i $KLMN$ nie są podobne.

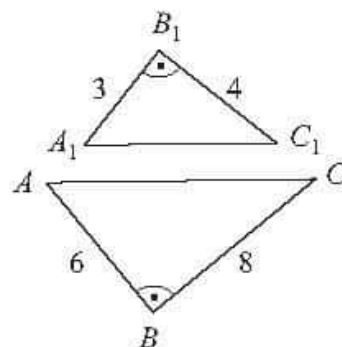


Ćwiczenie 6. Sprawdź, czy podobne są prostokąty o wymiarach:

- a) $5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ i $6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$,
 b) $0,8 \text{ cm} \times 0,2 \text{ cm}$ i $40 \text{ cm} \times 160 \text{ cm}$.

Jeśli prostokąty są podobne, to oblicz skalę ich podobieństwa.

Ćwiczenie 7. Wykonaj odpowiednie obliczenia i sprawdź, czy stosunki długości odpowiednich boków trójkąta ABC i $A_1B_1C_1$ są równe. Czy trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są podobne?



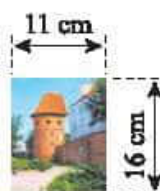
Uwaga

Jeżeli figura f jest podobna do figury f_1 w skali k , to figura f_1 jest podobna do figury f w skali $\frac{1}{k}$.

Przykład 5. Fotografie F , o wymiarach podanych na rysunku, powiększono do wymiarów plakatu P . Oblicz:

- a) skalę podobieństwa plakatu P do fotografii F ,
 b) brakujący wymiar x plakatu P ,
 c) obwód L_F i L_P oraz powierzchnie P_F i P_P fotografii oraz plakatu,
 d) stosunek obwodu plakatu do obwodu fotografii,
 e) stosunek powierzchni plakatu do powierzchni fotografii.

Fotografia F



Plakat P



Rozwiązanie

- a) Oznaczamy k – skalę podobieństwa plakatu do fotografii.

$$k = \frac{80}{16}, \text{ czyli } k = 5,$$

- b) $\frac{x}{11} = k$, czyli $\frac{x}{11} = 5$, skąd $x = 55 \text{ cm}$,

- c) $L_F = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 11$, czyli $L_F = 54 \text{ cm}$, $P_F = 16 \cdot 11$, czyli $P_F = 176 \text{ cm}^2$,

$$L_P = 2 \cdot 80 + 2 \cdot 55, \text{ czyli } L_P = 270 \text{ cm}, \quad P_P = 80 \cdot 55, \text{ czyli } P_P = 4400 \text{ cm}^2,$$

- d) $\frac{L_P}{L_F} = \frac{270}{54} = 5$,

e) $\frac{P_P}{P_F} = \frac{4400}{176} = 25.$

Stosunek obwodów plakatu P i fotografii F jest równy skali podobieństwa k równej 5, natomiast stosunek powierzchni tych figur jest równy k^2 , czyli 25.

Uwaga

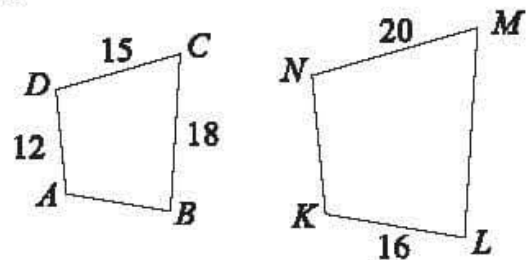
Jeżeli figury są podobne w skali k , to:

- stosunek ich obwodów jest równy skali podobieństwa k ,
- stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa, czyli k^2 .

Ćwiczenie 8. Czworokąty $ABCD$ i $KLMN$ są podobne.

Przyjmij wymiary jak na rysunku i oblicz:

- skalę k podobieństwa czworokąta $ABCD$ do czworokąta $KLMN$,
- stosunek obwodów czworokątów,
- stosunek pól czworokątów,
- długości boków, których wymiarów nie podano na rysunku.

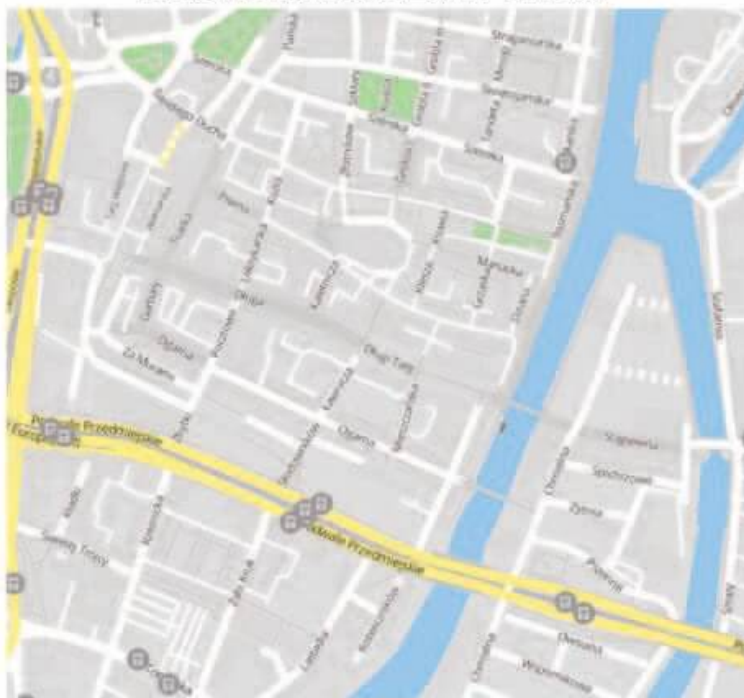


Skalę podobieństwa figur wykorzystujemy w praktyce. Rysunek odwzorujący mały obszar z zachowaniem kształtu i zawierający kształty jego elementów nazywamy **planem**.

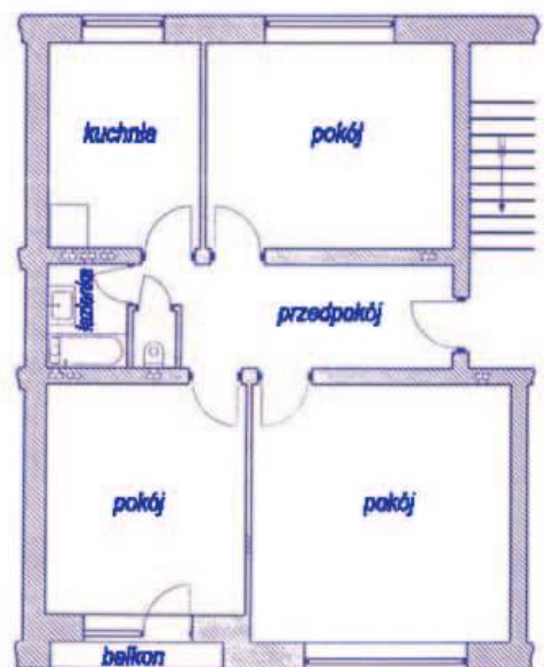
Wiele obiektów przedstawiamy w postaci planu, np. plan mieszkania, domu, miasta, portu, lotniska.

Nie można ich rysować na kartce papieru bez zmniejszenia, zatem plany rysowane są w skali.

Fragment planu miasta Gdańsk



Plan mieszkania

**Definicja**

Stosunek długości odcinka na planie do długości odcinka w rzeczywistości nazywamy skalą planu i oznaczamy literą k .

Na przykład liczbową skalę planu 1 : 15 000 oznacza, że długości na planie są 15 000 razy mniejsze niż odpowiednie odległości w rzeczywistości. Zatem 1 cm na planie odpowiada w rzeczywistości 15 000 cm, czyli 150 m.

Przykład 6. Odległość między dwoma miastami jest równa 18 km.

- a) Narysuj tę odległość w skali 1 : 500 000.
b) Ilu kilometrom odpowiada 1 cm na Twoim rysunku?

Rozwiązanie $18 \text{ km} = 18\,000 \text{ m} = 1\,800\,000 \text{ cm}$.

- a) Na rysunku odległość jest 500 000 razy mniejsza.

$$1\,800\,000 : 500\,000 = 3,6 \text{ cm}$$

3,6 cm

- b) Ze skali 1 : 500 000 wynika, że 1 cm na rysunku odpowiada w rzeczywistości 500 000 cm.

Odp.: Jeden centymetr na rysunku to 5 km w rzeczywistości.

Ćwiczenie 9. Odległość między Gdańskiem a Warszawą to około 350 km. Oblicz, w jakiej odległości będą te miasta zaznaczone na mapie sporządzonej w skali:

- a) 1 : 100 000 000, b) 1 : 10 000 000, c) 1 : 1 000 000.

Przykład 7. Na planie zagospodarowania przestrzennego pewnej miejscowości, sporządzonym w skali 1 : 2000, teren przeznaczony pod budowę szpitala zajmuje 35 cm^2 . Ile hektarów zajmuje ten teren w rzeczywistości?

Rozwiązanie Figura na planie i figura w terenie to figury podobne w skali $k = \frac{1}{2000}$.

Stosunek pól tych figur jest równy k^2 , czyli $\left(\frac{1}{2000}\right)^2 = \frac{1}{4\,000\,000}$.

Powierzchnia terenu w rzeczywistości jest większa 4 000 000 razy od pola na planie, czyli jest równa $4\,000\,000 \cdot 35 \text{ cm}^2 = 140\,000\,000 \text{ cm}^2 = 14\,000 \text{ m}^2 = 1,4 \text{ ha}$.

Odp.: Teren przeznaczony pod zabudowę ma powierzchnię 1,4 ha.

Ćwiczenie 10. Puszcza Kampinoska zajmuje na mapie wykonanej w skali 1 : 1 000 000 powierzchnię równą $5,6 \text{ cm}^2$. Oblicz rzeczywistą powierzchnię tej puszczy i wynik podaj w kilometrach kwadratowych.

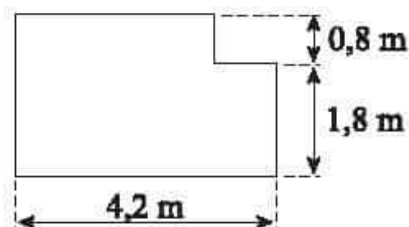
Odpowiedzi do ćwiczeń

5. Narysuj: a) odcinek o długości 5 cm, b) kwadrat o boku 2 cm, c) prostokąt o wymiarach 2 cm $\times$ 4 cm, d) koło o promieniu 4 cm.
6. Prostokąty: a) są podobne w skali $\frac{5}{6}$ lub $\frac{6}{5}$, b) są podobne w skali $\frac{1}{200}$ lub 200.
7. Trójkąty są podobne w skali 2.
8. a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{3}{4}$ lub $\frac{4}{3}$, c) $\frac{9}{16}$ lub $\frac{16}{9}$, d) $|AB|=12$, $|KN|=16$, $|LM|=24$.
9. a) 0,35 cm, b) 3,5 cm, c) 35 cm.
10. 560 km².

Zadania utrwalające

- 9.11. Czy prawdą jest, że:
- każde dwa romby, których kąty ostre mają tę samą miarę, są podobne,
 - każde dwa równoległoboki, których kąty ostre mają tę samą miarę, są podobne,
 - każde dwa trapezy równoramienne są podobne,
 - każde dwa kwadraty są podobne?
- 9.12. Jeden z boków prostokąta ma długość 20 cm. Jaka powinna być długość drugiego boku tego prostokąta, by był on podobny do prostokąta o wymiarach 8 cm $\times$ 20 cm?
- 9.13. Plan wykonano w skali 1:400. Jakiej długości odcinek na planie odpowiada 12 metrom w rzeczywistości?
- 9.14. Dwa plany mają jednakowe wymiary. Jeden plan sporządzono w skali 1:6000, a drugi – w skali 1:8000. Na którym planie pokazano większy obszar?
- 9.15. Odległość z Gdańska do Kartuz (w linii prostej) jest równa 32 km. Ile centymetrów ma odcinek na mapie w skali 1:250 000, któremu odpowiada ta odległość w terenie?
- 9.16. Bok jednego kwadratu jest o 20% krótszy od boku drugiego kwadratu. Oblicz skalę podobieństwa tych kwadratów.
- 9.17. Stosunek wysokości dwóch podobnych rombów jest równy 3 : 5. Oblicz stosunek pól tych rombów.
- 9.18. Dwa wielokąty są podobne w skali 1 : 5. Pole jednego z nich jest równe 17 cm². Oblicz pole drugiego wielokąta.
- 9.19. Łąka na planie ma kształt trapezu, którego podstawy mają długości 32 mm i 26 mm, a wysokość 32 mm. Rolnik zmierzył na łące długość odpowiadającą krótszej podstawie trapezu i otrzymał 65 m. Oblicz:
- skalę planu,
 - pole powierzchni łąki.

- 9.20.** Kupiono prostokątną działkę. Na planie w skali 1 : 1000 boki tej działki mają długości 6,2 cm i 4,8 cm. Ile zapłacono za tę działkę, jeżeli jeden metr kwadratowy gruntu kosztował 21 zł?
- 9.21.** Puszcza Kampinoska na mapie wykonanej w skali 1 : 1 000 000 zajmuje powierzchnię równą 5,6 cm². Oblicz rzeczywistą powierzchnię tej puszczy i wynik podaj w kilometrach kwadratowych.
- 9.22.** Janek chce sporządzić plan swojego pokoju. Naszkicował kształt pokoju i zanotował kilka wymiarów. W jakiej skali może narysować plan, aby zmieścił się na prostokątnej kartce o wymiarach 20 cm × 30 cm i był możliwie największy?



Cechy podobieństwa trójkątów

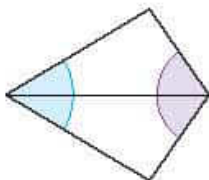
Aby stwierdzić, że trójkąty są przystające, wystarczy sprawdzić, że są spełnione założenia jednego z trzech twierdzeń zwanych **cechami przystawania trójkątów**.

Przypomnijmy

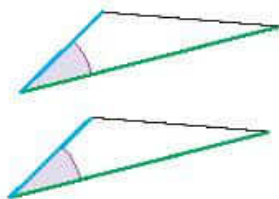
Cechy przystawania trójkątów:		
cecha bok – bok – bok, w skrócie bbb	cecha bok – kąt – bok, w skrócie bkb	cecha kąt – bok – kąt, w skrócie kbk
Jeśli $a = a_1$, $b = b_1$ i $c = c_1$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.	Jeśli $c = c_1$, $b = b_1$ i $\alpha = \alpha_1$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.	Jeśli $b = b_1$, $\alpha = \alpha_1$ i $\gamma = \gamma_1$, to $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Ćwiczenie 11. Na rysunku odcinki mające tę samą długość i kąty mające tę samą miarę są wyróżnione jednakowym kolorem innym niż czarny. Nazwij cechę z której wynika, że trójkąty są przystające.

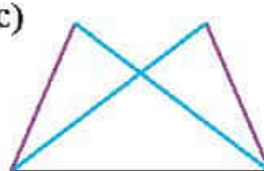
a)



b)

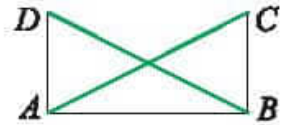


c)



Ćwiczenie 12. Uzasadnij, że przekątna kwadratu dzieli go na dwa trójkąty przystające.

Ćwiczenie 13. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, gdzie $|AD| = |BC|$, $AD \perp AB$ i $BC \perp AB$, i uzasadnij, że $|AC| = |BD|$.



Aby stwierdzić, czy dwa trójkąty są przystające, korzystamy z ich cech przystawania, natomiast aby stwierdzić, czy są podobne, korzystamy z twierdzeń zwanych **cechami podobieństwa trójkątów**.

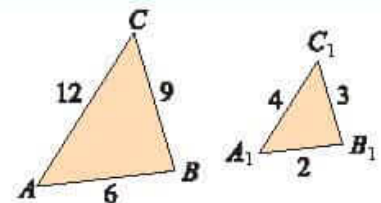
Dwa trójkąty są podobne, gdy spełniają założenia jednego z trzech twierdzeń.

Cechy podobieństwa trójkątów:

cecha bok-bok-bok (bbb)	cecha bok-kąt-bok (bkb)	cecha kąt-kąt-kąt (kkk)
Twierdzenie Jeżeli długości trzech boków jednego trójkąta są odpowiednio proporcjonalne do długości trzech boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne. Jeżeli $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, to $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	Twierdzenie Jeżeli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami mają równe miary, to te trójkąty są podobne. Jeżeli $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ i $\alpha = \alpha_1$, to $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.	Twierdzenie Jeżeli miary kątów jednego trójkąta są równe odpowiednim miarom kątów drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne. Jeżeli $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ i $\gamma = \gamma_1$, to $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Przykład 8. Sprawdź, czy trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$, o wymiarach podanych na rysunku, są podobne.

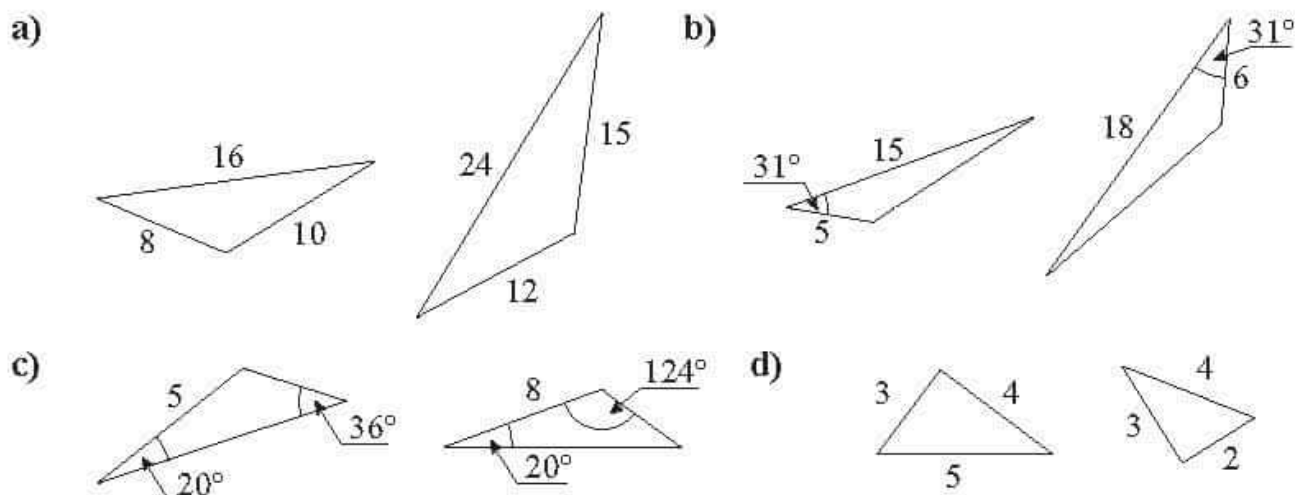
Rozwiązanie



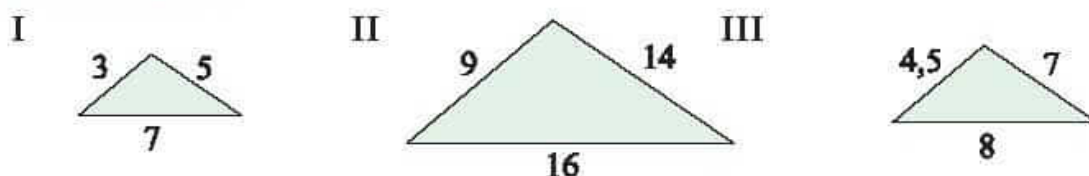
$$\frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{12}{4} = 3, \quad \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{6}{2} = 3, \quad \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{9}{3} = 3, \quad \text{więc } k = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = 3.$$

Odp.: Trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są podobne na podstawie cechy bbb.

Ćwiczenie 14. Rozstrzygnij, czy trójkąty są podobne. W przypadku podobieństwa wskaż cechę, z której ono wynika.



Ćwiczenie 15. Spośród trójkątów I, II, III wskaż parę trójkątów podobnych.

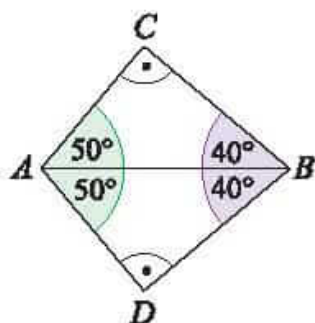


Ćwiczenie 16. Sformułuj cechy podobieństwa trójkątów:

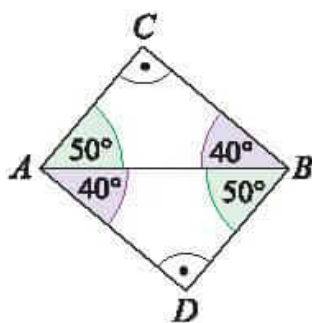
a) równobocznych, b) prostokątnych.

Ćwiczenie 17. Uzasadnij, że trójkąty ABC i ABD :

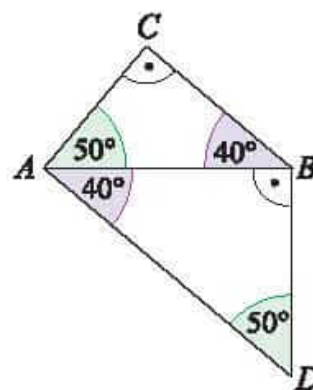
a) są przystające,



b) są przystające,



c) nie są przystające, ale są podobne.

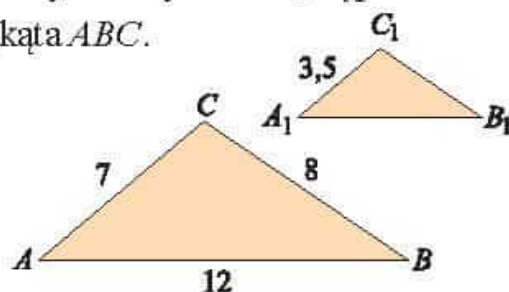


Ćwiczenie 18. Trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$, o wymiarach podanych na rysunkach, są podobne.

a) Oblicz skalę podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC .

b) Oblicz obwód trójkąta $A_1B_1C_1$.

c) Podaj stosunek obwodów i stosunek pól trójkątów ABC i $A_1B_1C_1$.

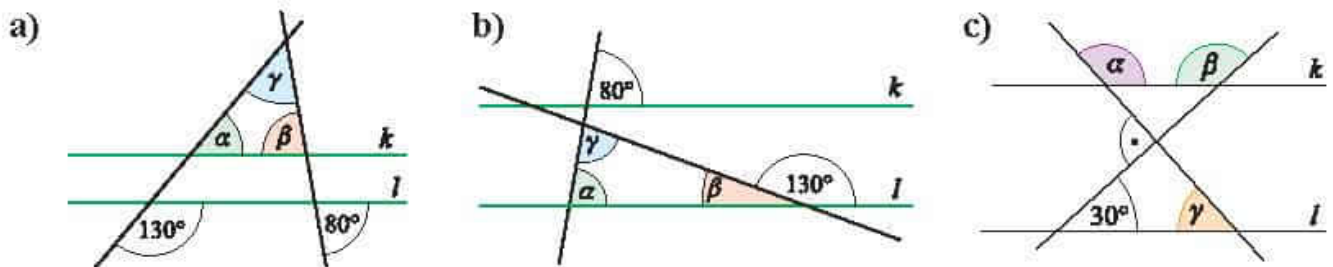


W celu uzasadnienia podobieństwa trójkątów często korzysta się z równości kątów wyznaczonych przez dwie proste równoległe przecięte trzecią prostą.

Przypomnijmy

Jeżeli proste równoległe a i b przetniemy prostą c , to:				
kąty naprzemianległe mają równe miary				
kąty odpowiadające mają równe miary				

Ćwiczenie 19. Na rysunku proste k i l są równoległe. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miary kątów α , β , γ .



Twierdzenie

Odcinek, łączący środki dwóch boków trójkąta jest równy połowie trzeciego boku i do niego równoległy.

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, gdzie odcinek KN łączy środki boków AC i BC .

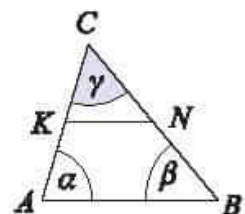
Z (założenie):

K – środek boku AC ,

N – środek boku BC ,

T (teza):

$$|KN| = \frac{1}{2}|AB|, \quad KN \parallel AB.$$



Dowód:

1° Trójkąty ABC i KNC są podobne, bo $\frac{|CK|}{|CA|} = \frac{1}{2}$ i $\frac{|CN|}{|CB|} = \frac{1}{2}$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle KCN = \gamma$.

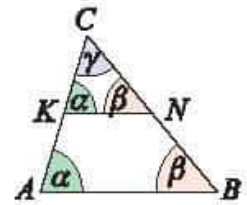
2° Z 1° wnioskujemy, że

$$\frac{|KN|}{|AB|} = \frac{|CK|}{|CA|} = \frac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{|KN|}{|AB|} = \frac{1}{2}, \quad \text{więc} \quad |KN| = \frac{1}{2}|AB|.$$

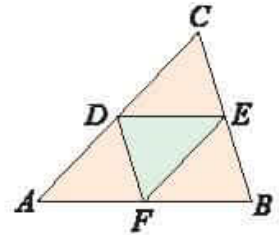
3° Z 1° wnioskujemy, że

$$|\sphericalangle CKN| = |\sphericalangle CAB| = \alpha \text{ i } |\sphericalangle CNK| = |\sphericalangle CBA| = \beta.$$

Zatem prosta KN jest równoległa do prostej AB ,
czyli odcinek KN jest równoległy do boku AB . *c.n.u.*



Ćwiczenie 20. Końcami odcinków DE , FD i FE są środki boków trójkąta ABC . Uzasadnij, że trójkąty: AFD , FDE , FEB , DEC są przystające.

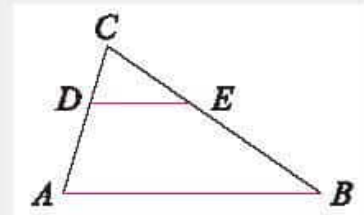


Uwaga

Jeżeli w trójkącie ABC poprowadzimy odcinek DE równoległy do boku AB , to:

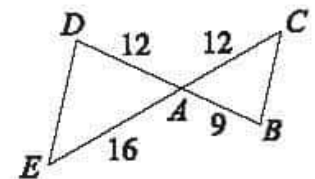
- $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ i $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|EC|} = k$
- $|DE| = \frac{1}{k} \cdot |AB|$.

Jeżeli w trójkącie ABC punkty D i E dzielą boki AC i BC w tym samym stosunku, to $DE \parallel AB$.



Ćwiczenie 21. Przyjmij dane jak na rysunku i wykaż, że:

- trójkąty EAD i BAC są podobne,
- boki ED i BC są równoległe.



Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) kkb, b) kkb, c) bbb. 14. a) tak, bbb, b) tak, kkb, c) tak, kkk, d) nie. 15. II i III.

16. a) Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne, b) Dwa trójkąty prostokątne są podobne, gdy w każdym z trójkątów jeden z kątów ostrych ma taką samą miarę lub dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta. 18. a) $\frac{1}{2}$, b) 13,5, c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.

19. a) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, b) $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, c) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

21. Wskazówka: a) $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (kkb).

Zadania utrwalające



9.23. Na rysunku trójkąty ABC i EFG są przystające. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce wpisz odpowiedni kąt albo odcinek.

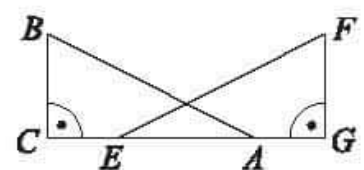
a) $|BC| = \text{[]}$,

b) $|\sphericalangle BAC| = \text{[]}$,

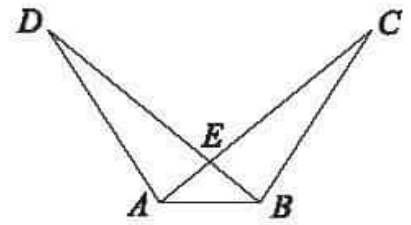
c) $|AB| = \text{[]}$,

d) $|\sphericalangle CBA| = \text{[]}$,

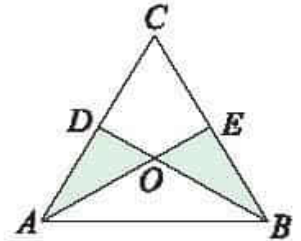
e) $|AC| = \text{[]}$.



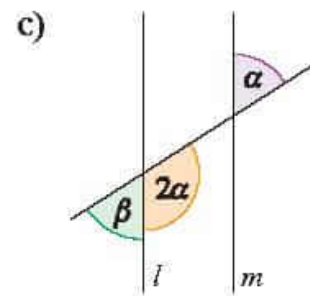
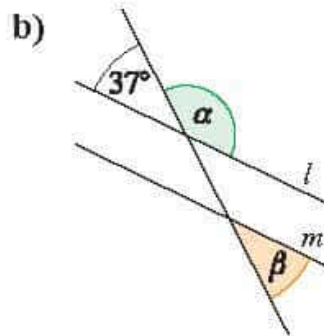
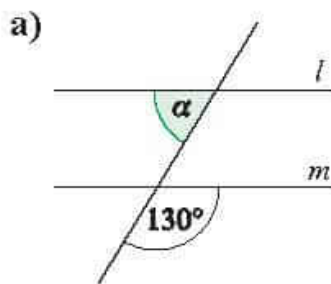
- 9.24.** Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, gdzie
D $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$ oraz $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BAC|$,
 i uzasadnij, że $\triangle AED \equiv \triangle BEC$.



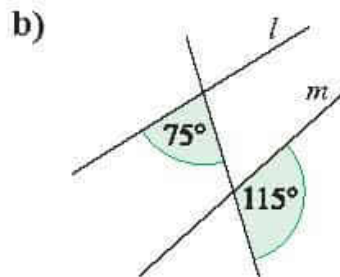
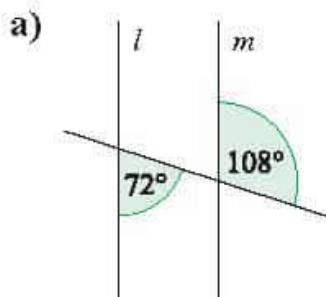
- 9.25.** Na rysunku trójkąt ABC jest równoramienny, a odcinki AE i BD zawierają się w dwusiecznych kątów leżących przy jego podstawie AB . Uzasadnij, że:
D
 a) trójkąty ABE i ABD są przystające,
 b) trójkąty AOD i BOE są przystające.



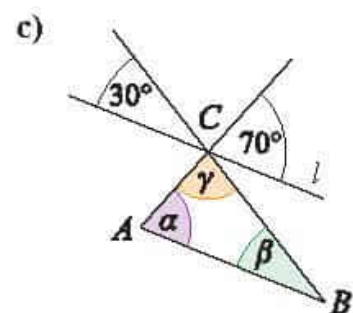
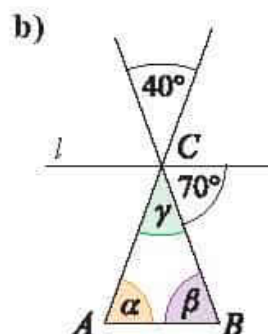
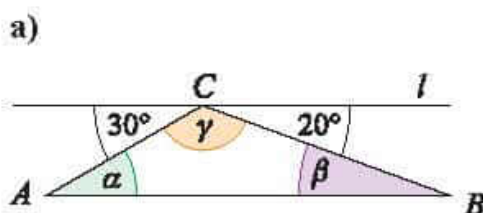
- 9.26.** Wiedząc, że proste l i m są równoległe, oblicz miary kątów zaznaczonych na rysunku kolorem.



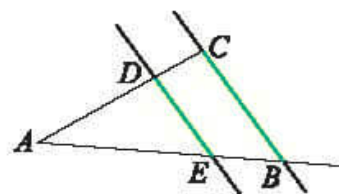
- 9.27.** Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i sprawdź, czy proste l oraz m są równoległe. Odpowiedź uzasadnij.
D



- 9.28.** Na rysunku odcinek AB jest równoległy do prostej l . Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miary kątów trójkąta ABC .

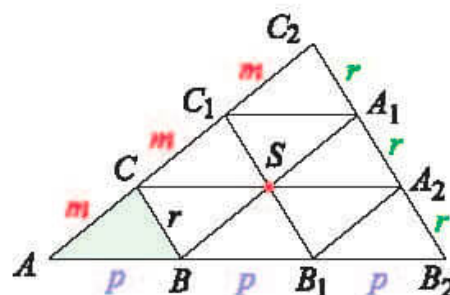


- 9.29. Sprawdź, czy proste, w których zawierają się odcinki DE i CB przedstawione na rysunku, są równoległe, gdy: $|AC| = 7,5$ cm, $|AD| = 4,5$ cm, $|AB| = 5$ cm, $|EB| = 2$ cm.



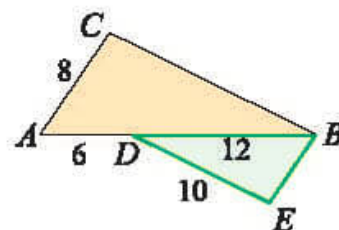
- 9.30. Wskaż przykład trójkątów podobnych w skali k , gdy:

- a) $k = 1$, b) $k = 2$,
c) $k = 3$, d) $k = \frac{2}{3}$.



- 9.31. Dwa równoramienne trójkąty prostokątne są podobne w skali $3 : 4$. Wiedząc, że różnica długości przyprostokątnych tych trójkątów jest równa 5 cm, oblicz:

- a) długości przyprostokątnych obu trójkątów,
b) obwody obu trójkątów,
c) pola obu trójkątów.



- 9.32. Trójkąty ABC i BDE są podobne. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długości boków BE i BC .

Podobieństwo trójkątów w zadaniach

Przykład 9. Trójkąty ABC i PKM są podobne. Obwód trójkąta ABC jest równy 15, a jego pole 5. Oblicz obwód trójkąta PKM , wiedząc, że jego pole jest równe 20.

Rozwiązanie

Dane: $\triangle ABC \sim \triangle PKM$,

$$L_{\triangle ABC} = 15, P_{\triangle ABC} = 5,$$

$$P_{\triangle PKM} = 20.$$

Obliczyć: $L_{\triangle PKM}$.

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle PKM}} = k^2, \text{ czyli } \frac{5}{20} = k^2, \text{ skąd } k = \frac{1}{2}.$$

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Zatem

$$\frac{L_{\triangle ABC}}{L_{\triangle PKM}} = \frac{1}{2}, \text{ czyli } \frac{15}{L_{\triangle PKM}} = \frac{1}{2}, \text{ skąd } L_{\triangle PKM} = 30.$$

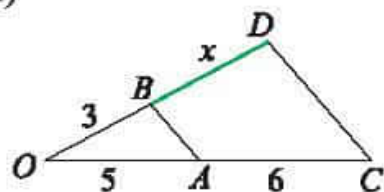
Stosunek obwodów figur podobnych jest równy skali podobieństwa.

Odp.: 30.

Ćwiczenie 22. Trójkąty ABC i DEF są podobne. W trójkącie ABC długości boków są równe 7, 8 i 12, a obwód trójkąta DEF jest równy 108. Oblicz długości boków trójkąta DEF .

Przykład 10. Przyjmij dane przedstawione na rysunku, gdzie trójkąty OAB i OCD są podobne, i oblicz długość odcinka x .

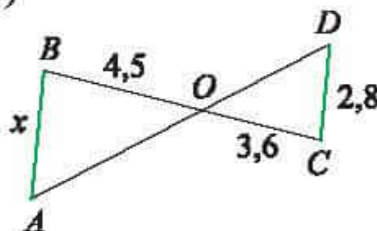
a)



Rozwiązanie

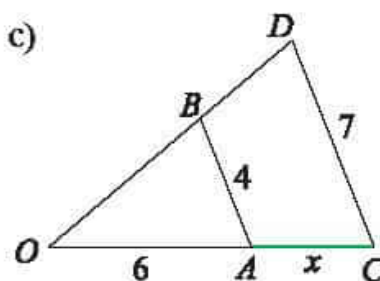
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{|OA|}{|OC|} &= \frac{|OB|}{|OD|} \\ \frac{5}{5+6} &= \frac{3}{3+x} \\ \frac{5}{11} &= \frac{3}{3+x} \\ 3+x &= \frac{11 \cdot 3}{5} \\ x &= 3,6 \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{|OC|}{|OB|} &= \frac{|CD|}{|AB|} \\ \frac{3,6}{4,5} &= \frac{2,8}{x} \\ x &= \frac{4,5 \cdot 2,8}{3,6} \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

c)

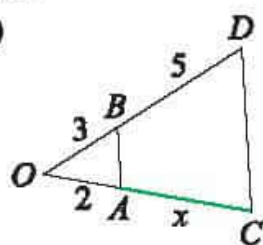


$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \frac{|OA|}{|OC|} &= \frac{|AB|}{|CD|} \\ \frac{6}{6+x} &= \frac{4}{7} \\ 6+x &= \frac{6 \cdot 7}{4} \\ x &= 4,5 \end{aligned}$$

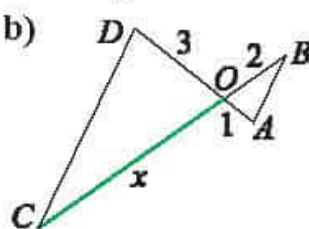
Odp.: a) $x = 3,6$, b) $x = 3,5$, c) $x = 4,5$.

Ćwiczenie 23. Przyjmij dane przedstawione na rysunku, gdzie odcinek AB jest równoległy do odcinka CD , i oblicz długość odcinka x .

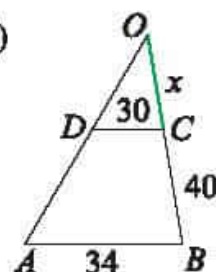
a)



b)



c)



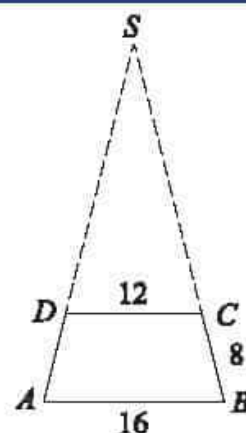
Przykład 11. Ramiona trapezu równoramiennego $ABCD$ przedłużono do przecięcia się w punkcie S . Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz obwód trójkąta ABS .

Rozwiązanie Zauważamy, że:

1° $\triangle ABS \sim \triangle DCS$, bo $|\angle SAB| = |\angle SDC|$, $|\angle SBA| = |\angle SCD|$

i kąt ASB jest wspólny dla obu trójkątów.

cecha kkk



2° $|SD| = |SC|$, więc trójkąt DCS jest równoramienny.

Wprowadzamy oznaczenie $x = |SD| = |SC|$.

$$\frac{|SC|}{|SB|} = \frac{|DC|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{x}{x+8} = \frac{12}{16}$$

$$\frac{x}{x+8} = \frac{3}{4}$$

$$3(x+8) = 4x, \text{ skąd } x = 24.$$

$$|AS| = |BS| = 8 + 24 = 32, \text{ więc } L = 2 \cdot 32 + 16 = 80.$$

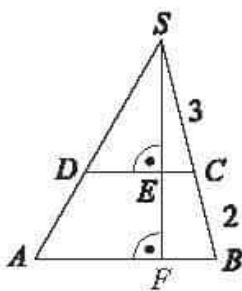
Odp.: 80.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ więc } ad = bc.$$

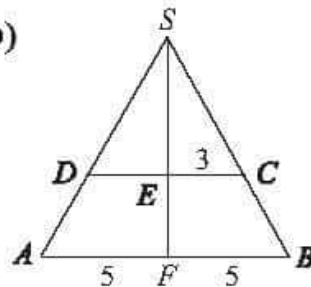
Ćwiczenie 24. Ramiona trapezu $ABCD$ przedłużono do przecięcia się w punkcie S .

Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz stosunek $\frac{|SE|}{|SF|}$.

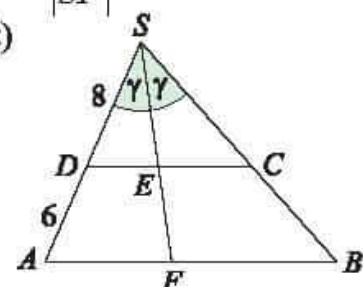
a)



b)



c)



Uwaga Jeżeli dwa trójkąty są podobne w skali k , to:

- stosunek ich odpowiednich wysokości jest równy k ,
- stosunek ich odpowiednich środkowych jest równy k ,
- stosunek odpowiednich odcinków dwusiecznych kątów wewnętrznych zawartych w tych trójkątach jest równy k .

Przykład 12. Udowodnij twierdzenie.

Twierdzenie o wysokości w trójkącie prostokątnym

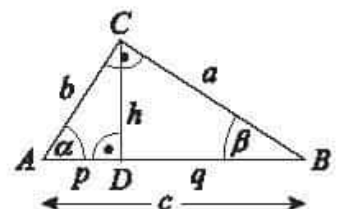
W trójkącie prostokątnym kwadrat długości wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego jest równy iloczynowi długości odcinków, na które dzieli ona przeciwprostokątną.

Rozwiązanie Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Z (założenie): $\angle ACB = 90^\circ$,

h – wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego,

$|AD| = p$, $|DB| = q$.



T (teza): $h^2 = p \cdot q$, czyli $h = \sqrt{p \cdot q}$.

Dowód:

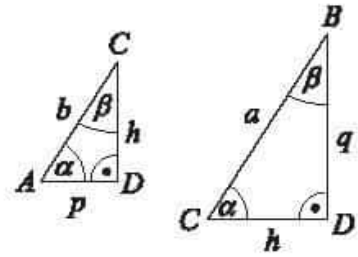
$\triangle ADC \sim \triangle CDB$, więc

cecha kkk

$$\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AD|}{|CD|}, \text{ czyli } \frac{h}{q} = \frac{p}{h},$$

skąd $h^2 = p \cdot q$, czyli $h = \sqrt{p \cdot q}$.

c.n.u.



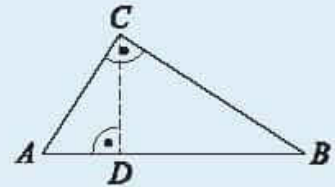
Ćwiczenie 25. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym, podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach 4 i 9. Oblicz obwód tego trójkąta.

Ćwiczenie 26. Udowodnij twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli odcinek CD jest wysokością trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym ACB , to:

$$\bullet |AC|^2 = |AB| \cdot |AD|, \quad \bullet |BC|^2 = |AB| \cdot |BD|.$$

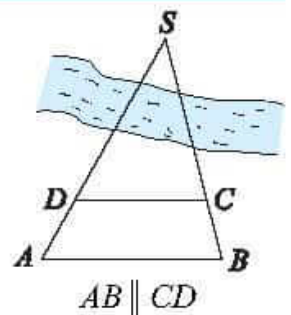


Korzystając z podobieństwa trójkątów, można obliczyć odległość od niedostępnego obiektu, zmierzyć szerokość rzeki, odpowiedzieć na pytanie, za ile godzin zajdzie słońce itp.

Przykład 13. Znajdujemy się w punkcie A i chcemy zmierzyć naszą odległość od niedostępnego punktu S . Wybieramy w terenie punkty A, B, C i D i wbijamy w nie kijki tak, by odcinki AB i CD były równoległe.

a) Które odcinki wystarczy zmierzyć, aby obliczyć tę odległość?

b) Oblicz $|AS|$, jeśli $|AB| = 100$ m, $|CD| = 60$ m, $|AD| = 48$ m.



Rozwiązanie

a) Zauważamy, że trójkąty ABS i CDS są podobne (cecha kkk), więc wystarczy zmierzyć trzy z czterech boków trapezu $ABCD$.

$$\text{b) } \frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|AB|}{|CD|} \text{ i } |DS| = |AS| - |AD|, \text{ więc } \frac{|AS|}{|AS| - |AD|} = \frac{|AB|}{|CD|}, \text{ czyli } \frac{|AS|}{|AS| - 48} = \frac{100}{60},$$

skąd $3 \cdot |AS| = 5(|AS| - 48)$. Zatem $|AS| = 120$.

Odp. b): $|AS| = 120$ m.

Ćwiczenie 27. (Do domu.) Odszukaj w internecie informacje o praktycznych sposobach pomiarów: a) wysokości drzew przez leśników, b) wysokości drzew przez harcerzy, c) odległości w terenie.

Odpowiedzi do ćwiczeń

22. 28, 32, 48. 23. a) $\frac{10}{3}$, b) 6, c) 300. 24. a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{3}{5}$, c) $\frac{4}{7}$. 25. $13+5\sqrt{13}$.

26. Wskazówka. Zauważ, że trójkąty ABC , ADC i DBC są podobne.

Zadania utrwalające

9.33. Czy prawdą jest, że dwa trójkąty są podobne, gdy długości ich boków odpowiednio są równe:

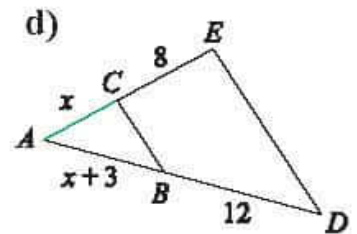
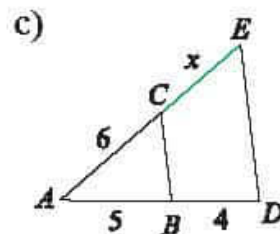
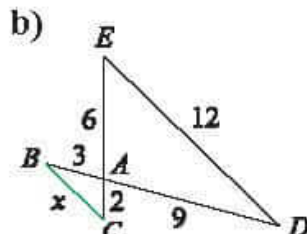
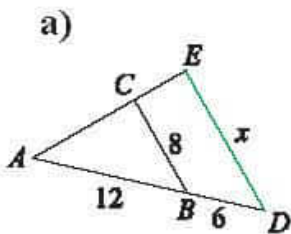
a) 2, 7, 8 oraz 3, $10\frac{1}{2}$, 12.

b) 6, 8, 10 oraz 3, 4, 6?

9.34. Trójkąty ABC i DEF są podobne. Stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta DEF jest równy 6,25. Obwód trójkąta ABC jest równy 60. Oblicz obwód trójkąta DEF .

9.35. Trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są podobne, przy czym $|AB|=14$, $|BC|=2$, $|AC|=12$. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest równy 56. Oblicz długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$.

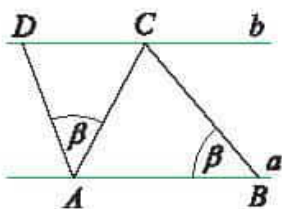
9.36. Wiedząc, że trójkąty ABC i ADE są podobne, oblicz długość odcinka x .



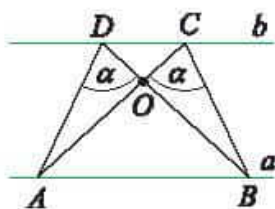
9.37. Proste a i b na rysunku są równoległe. Uzasadnij, że:

D

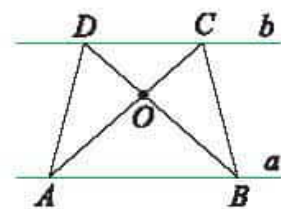
a) $\triangle ACD \sim \triangle BCA$



b) $\triangle ADB \sim \triangle BCA$



c) $\triangle AOB \sim \triangle COD$



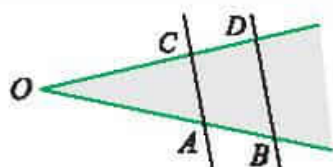
9.38. Drzewo rzuca cień o długości 12 m. W tym samym czasie wbity obok drzewa dwumetrowy słup rzuca cień długości 3 m. Oblicz wysokość drzewa.

9.39. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD poprowadzona z wierzchołka C kąta prostego, podzieliła przeciwprostokątną w stosunku $1 : 3$. Oblicz długość przeciwprostokątnej AB , gdy długość AC jest równa 12.

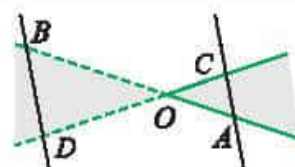
Twierdzenie Talesa

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) przecięte są dwiema prostymi równoległymi, to stosunek długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym z ramion (lub jego przedłużeniu) jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta (lub jego przedłużeniu).



Jeżeli $AC \parallel BD$, to $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$.



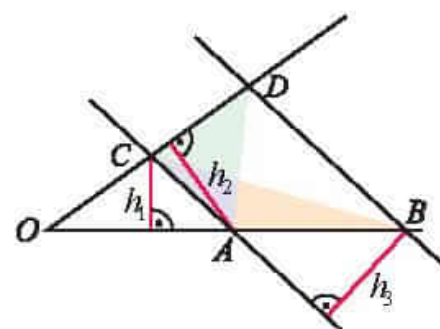
Uwaga Wnioski z twierdzenia Talesa.

Jeżeli $AC \parallel BD$, to $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$ i $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$ i $\frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|BD|}$.

Udowodnimy wniosek: Jeżeli $AC \parallel BD$, to $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$.

Założenie: $AC \parallel BD$. **Teza:** $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$.

Dowód. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. Zauważamy, że:



1° $P_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot h_1$ i $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_1$, więc

$$\frac{P_{\triangle OAC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{|OA|}{|AB|}.$$

2° $P_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \cdot |OC| \cdot h_2$ i $P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot h_2$, więc $\frac{P_{\triangle OAC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|OC|}{|CD|}$.

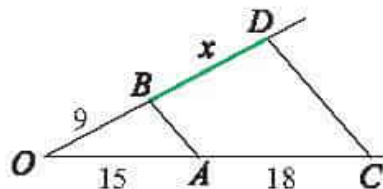
3° $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_3$ i $P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h_3$, więc $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADC}$.

Zatem $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{P_{\triangle OAC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{P_{\triangle OAC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|OC|}{|CD|}$, stąd $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$.

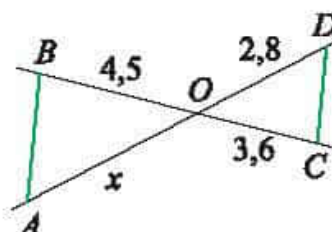
c.n.u.

Przykład 14. Wiedząc, że proste AB i CD są równoległe, oblicz długość odcinka x zaznaczonego na rysunku.

a)



b)



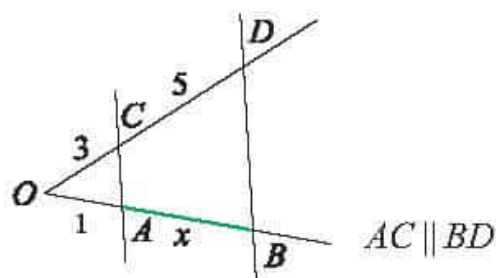
Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{|OA|}{|AC|} &= \frac{|OB|}{|BD|} \\ \frac{15}{18} &= \frac{9}{x} \\ x &= \frac{18 \cdot 9}{15} \\ x &= 10,8. \end{aligned}$$

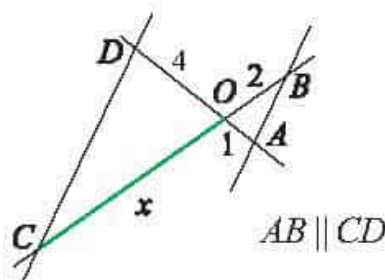
$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{|OB|}{|OC|} &= \frac{|OA|}{|OD|} \\ \frac{4,5}{3,6} &= \frac{x}{2,8} \\ 3,6x &= 4,5 \cdot 2,8 \\ x &= 3,5. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 28. Oblicz długość odcinka x zaznaczonego na rysunku.

a)



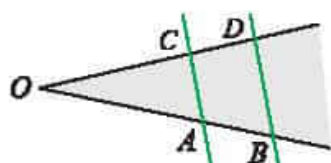
b)



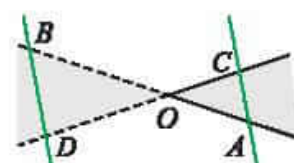
Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) przecięte są dwiema prostymi i stosunek długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym z ramion kąta (lub jego przedłużeniu) jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta (lub jego przedłużeniu), to te dwie proste są równoległe.

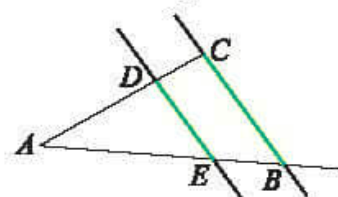


Jeżeli $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$, to $AC \parallel BD$.



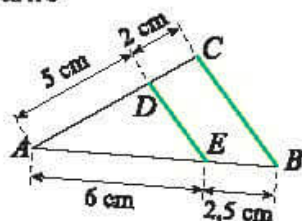
Przykład 15. Sprawdź, czy proste, w których zawierają się odcinki DE i CB przedstawione na rysunku, są równoległe, gdy:

- a) $|AD| = 5 \text{ cm}$, $|DC| = 2 \text{ cm}$, $|AE| = 6 \text{ cm}$, $|EB| = 2,5 \text{ cm}$.
 b) $|AC| = 7,5 \text{ cm}$, $|AD| = 4,5 \text{ cm}$, $|AB| = 5 \text{ cm}$, $|EB| = 2 \text{ cm}$.



Rozwiązanie

a)



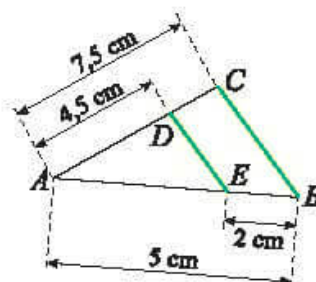
Sprawdzamy, czy $\frac{|AD|}{|DC|} \stackrel{?}{=} \frac{|AE|}{|EB|}$.

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{5}{2} = 2,5, \quad \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{6}{2,5} = 2,4,$$

$$\frac{|AD|}{|DC|} \neq \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Odp.: Proste DE i CB nie są równoległe.

b)



Sprawdzamy, czy $\frac{|AD|}{|AC|} \stackrel{?}{=} \frac{|AE|}{|AB|}$.

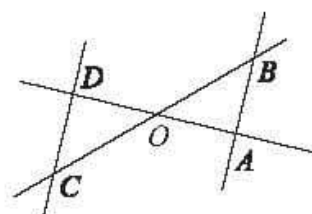
$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{3}{5}, \quad \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{5-2}{5} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AB|}.$$

Odp.: Proste DE i BC są równoległe.

Ćwiczenie 29. Sprawdź, czy proste, w których zawierają się odcinki AB i CD są równoległe, gdy:

- a) $|OC| = 9$, $|OB| = 5$, $|OA| = 2$ i $|OD| = 3,6$,
 b) $|OC| = 4$, $|OB| = 6,4$, $|OA| = 10,8$, $|OD| = 6$.

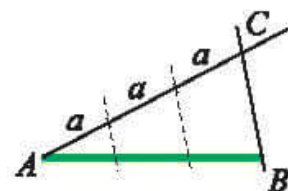


Przykład 16. Skorzystaj z twierdzenia Talesa i odcinek AB podziel na trzy równe części.



Rozwiązanie

- 1° Rysujemy półprostą o początku w punkcie A , nie przechodzącą przez punkt B .
- 2° Na półprostej odkładamy kolejno trzy odcinki równe dowolnej długości a i otrzymujemy punkt C .
- 3° Kreślimy prostą przechodzącą przez punkty B i C .
- 4° Przez końce pozostałych odcinków o długości a kreślimy proste równoległe do prostej BC .

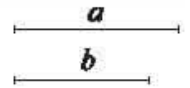


Na mocy twierdzenia Talesa poprowadzone proste równoległe dzielą odcinek AB na trzy równe części.

Ćwiczenie 30. Odcinek MN podziel w stosunku $1 : 2$.



Przykład 17. Na rysunku przedstawione są odcinki a, b .



Skorzystaj z twierdzenia Talesa i zbuduj odcinek x taki, że $x = \frac{b^2}{a}$.

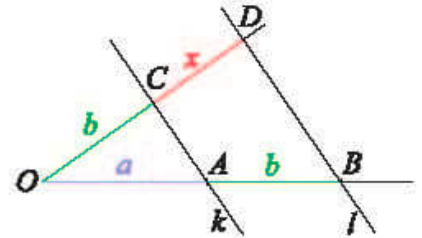
Rozwiązanie Równość $x = \frac{b^2}{a}$ zapisujemy w postaci proporcji $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.

Opis konstrukcji.

1° Rysujemy dowolny kąt o mierze od 0° do 180° o wierzchołku O .

2° Na jednym z ramion kąta odkładamy kolejno:

- odcinek a tak, że jeden jego koniec pokrywa się z punktem O , a drugi koniec wyznacza punkt A ,
- odcinek b tak, że jeden jego koniec pokrywa się z punktem A , a drugi koniec wyznacza punkt B .



3° Na drugim ramieniu kąta odkładamy odcinek b tak, że jeden jego koniec pokrywa się z punktem O , a drugi koniec wyznacza punkt C .

4° Przez punkty A i C kreślimy prostą k .

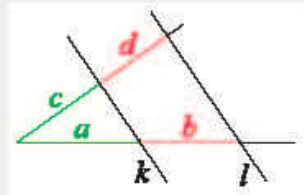
5° Przez punkt B kreślimy prostą l , równoległą do prostej k i otrzymujemy na ramieniu OC punkt D .

Na mocy twierdzenia Talesa $x = |CD|$, bo $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$, czyli $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.

Uwaga Proporcję $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ możemy przekształcać zgodnie

z prawami działań do postaci:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{lub} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \text{lub} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}, \quad \text{lub} \quad ad = bc.$$



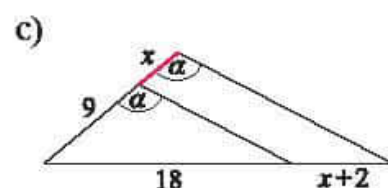
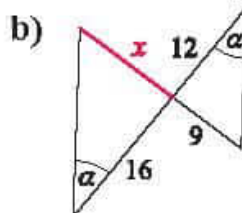
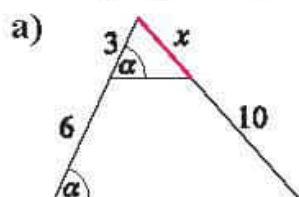
Ćwiczenie 31. Narysuj jakiegolwiek odcinki a, b, c . Stosując twierdzenie Talesa, zbuduj odcinek x taki, że: a) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$, b) $x = \frac{a^2}{b}$, c) $x = \frac{(a+b)b}{c}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

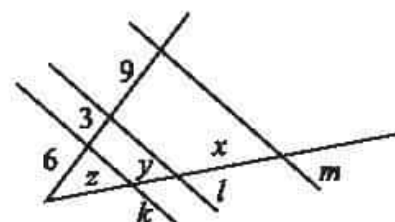
28. a) $\frac{5}{3}$, b) 8. 29. a) Tak, b) nie. 31. Wskazówka. b) $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$, c) $\frac{x}{b} = \frac{a+b}{c}$.

Zadania utrwalające

9.40. Przyjmij dane jak na rysunku i oblicz długość odcinka x .



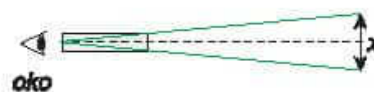
9.41. Proste k , l , m są równoległe. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie $x + y = 16$, i oblicz długości odcinków x , y , z .



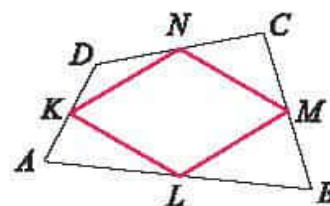
9.42. Narysuj jakikolwiek odcinek AB i podziel go konstrukcyjnie w stosunku 2 : 3.

9.43. Narysuj jakikolwiek odcinek AB i podziel go konstrukcyjnie w stosunku 5 : 3.

9.44. Zwiń kartkę papieru w rurkę. Jakiej wysokości przedmioty można obejrzeć przez tę rurkę z odległości 100 metrów od oka, jeżeli rurka ma długość 20 cm, a średnicę 2 cm?



9.45. Wykaż, że w każdym czworokącie środki kolejnych jego boków są wierzchołkami równoległoboku.

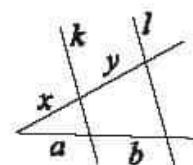


W zadaniach od 9.46. do 9.48. wskaż te odpowiedzi, które są prawidłowe.

9.46. Na rysunku proste k i l są równoległe, a odcinki a i b są równe.

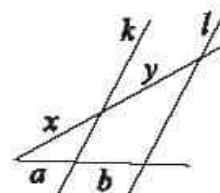
Wynika stąd, że:

- A. odcinek, który jest sumą odcinków x i y , jest dwa razy dłuższy niż odcinek x ,
- B. odcinek, który jest sumą odcinków x i y , jest dwa razy dłuższy niż odcinek y ,
- C. odcinki x i y są równe.



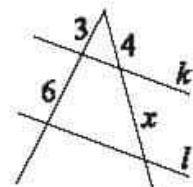
9.47. Na rysunku proste k i l są równoległe, a odcinek x jest dwa razy dłuższy niż odcinek a . Wynika stąd, że:

- A. $x = y$, B. $a = b$, C. $y = 2b$.



9.48. Na rysunku proste k i l są równoległe. Wynika stąd, że:

- A. $x = 4$, B. $x = 8$, C. $x = 12$.



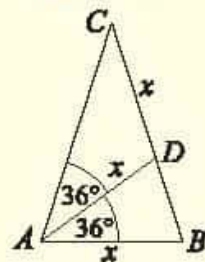
Zestaw powtórkowy

W zadaniach 1–4 dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

1. Na rysunku wszystkie odcinki równe oznaczono literą x .

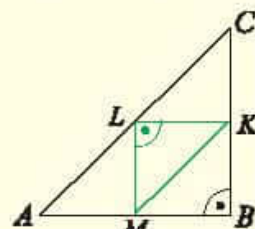
Wynika stąd, że:

- A. $\triangle ABD \sim \triangle ABC$, B. $\triangle ADC \sim \triangle ABC$,
C. $\triangle ADC \sim \triangle ADB$, D. $\triangle ABD \equiv \triangle ABC$.



2. W trójkąt prostokątny ABC wpisano trójkąt KLM , podobny do trójkąta ABC tak, że odpowiednie boki tych trójkątów są równoległe. Skala podobieństwa trójkąta KLM do trójkąta ABC jest równa:

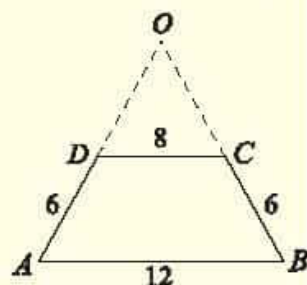
- A. $\frac{1}{4}$, B. $\frac{1}{2}$, C. $\frac{1}{3}$, D. 2.



3. Na rysunku trapez $ABCD$ jest równoramienny i przedłużenia jego ramion przecinają się w punkcie O .

Długość odcinka AO jest równa:

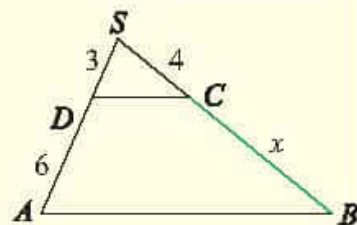
- A. 10, B. 12,
C. 18, D. 20.



4. Na rysunku odcinki AB i DC są równoległe.

Wynika stąd, że:

- A. $x = 4$, B. $x = 8$,
C. $x = 10$, D. $x = 12$.



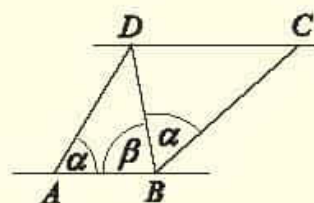
5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe. Wpisz odpowiedź do zeszytu i ją uzasadnij.

Każde dwa kwadraty są podobne.	P	F
Każde dwa prostokąty są podobne.	P	F
Każde dwa romby są podobne.	P	F
Każde dwa trójkąty prostokątne są podobne.	P	F

6. Na rysunku proste AB i DC są równoległe.

D Czy trójkąty ABD i BCD są podobne?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród oznaczonych literami A i B.



T	Tak,	ponieważ	A.	$ \angle ADB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ i $ \angle BCD = 180^\circ - (\alpha + \beta)$,
N	Nie,		B.	$ \angle ADB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ i $ \angle BCD = \beta$.

10. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Słowo „trygonometria” jest zaczerpnięte z języka greckiego i oznacza mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów. Znajomość tych związków wykorzystują geodeci, architekci, a także specjaliści innych dziedzin (np. fizyki, geografii, astronomii itp.).

Przyporządkowania kątom ostrym w trójkącie prostokątnym stosunków długości odpowiednich jego boków są jednoznaczne, dlatego zyskały one nazwy funkcji trygonometrycznych.

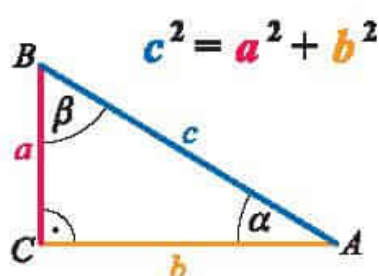
Przypomnijmy

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



Pitagoras
(ok. 572–497 p.n.e.)



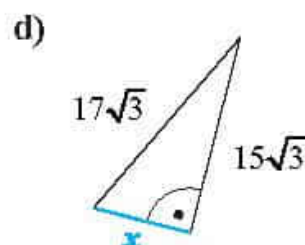
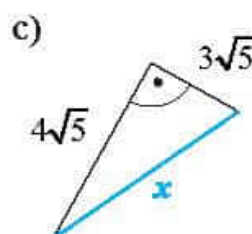
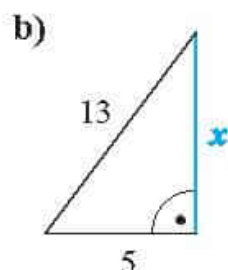
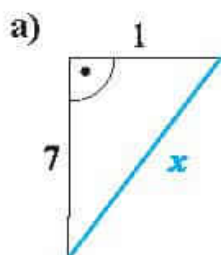
α, β – miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym, gdzie $\alpha + \beta = 90^\circ$,

c – długość przeciwprostokątnej,

a – długość przyprostokątnej przeciwległej kątowi α (przyprostokątna przyległa do kąta β),

b – długość przyprostokątnej przyległej do kąta α (przyprostokątna przeciwległa do kąta β).

Ćwiczenie 1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość boku oznaczonego literą x .



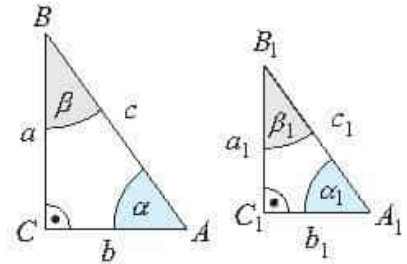
Ćwiczenie 2. Sprawdź, czy suma kwadratów dwóch pierwszych liczb jest równa kwadratowi trzeciej liczby: a) 2, 3, 4, b) 3, 4, 5, c) $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, d) 6, 8, 10, e) 12, 13, 14, f) 300, 400, 500.

Przypomnijmy

Dwa trójkąty prostokątne są podobne, gdy:

- jeden z kątów ostrych w obu trójkątach ma tę samą miarę, np. $\alpha = \alpha_1$ albo $\beta = \beta_1$,
- stosunek długości dwóch boków jednego trójkąta jest równy stosunkowi długości odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta,

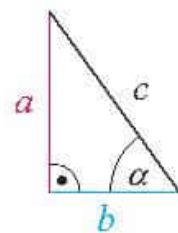
$$\text{tzn. } \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \quad \text{lub} \quad \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}, \quad \text{lub} \quad \frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}.$$



W trójkątach prostokątnych podobnych o kącie ostrym α , stosunki długości odpowiednich boków są równe. Stosunki te są wartościami pewnych funkcji, które nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α** .

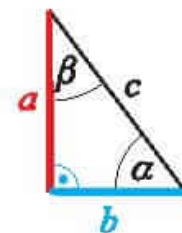
Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Jeśli w trójkącie prostokątnym przyporządkowujemy kątowi ostremu α liczbę, która jest stosunkiem długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do drugiej przyprostokątnej, to takie jednoznaczne przyporządkowanie jest funkcją trygonometryczną kąta ostrego, którą nazywamy **tangensem kąta α** (w skrócie **tg α**).



Definicja

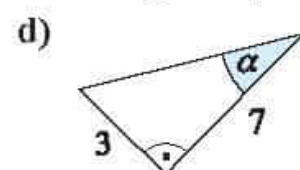
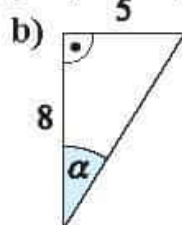
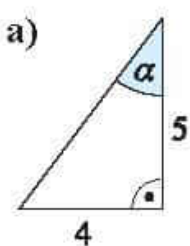
Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do długości drugiej przyprostokątnej.



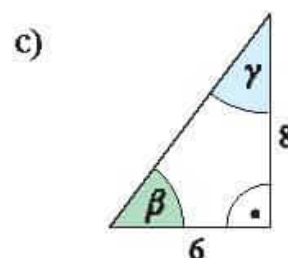
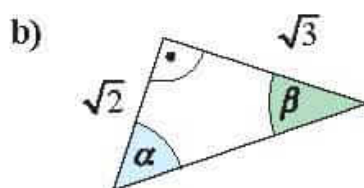
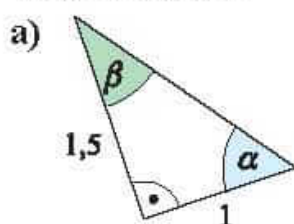
$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{a}$$

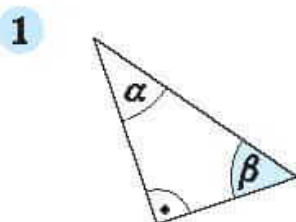
Ćwiczenie 3. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz tangens kąta α .



Ćwiczenie 4. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i oblicz tangens każdego z kątów ostrych trójkąta.

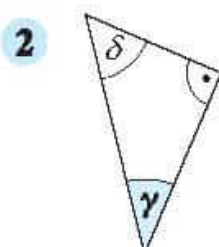


Ćwiczenie 5. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego wierzchołki oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem trójkąta była prawdziwa oraz w miejsce ■ wpisz odpowiedni iloraz długości boków.



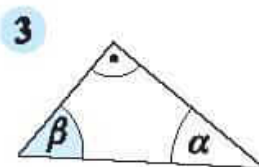
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|AC|}{|BC|},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \blacksquare,$$



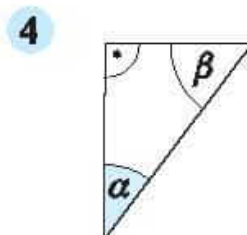
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{|KL|}{|KM|},$$

$$\operatorname{tg} \delta = \blacksquare,$$



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|HP|}{|GP|},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \blacksquare,$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AC|}{|AB|},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \blacksquare.$$

Przykład 1. Zbuduj trójkąt prostokątny o kącie ostrym α takim, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$.

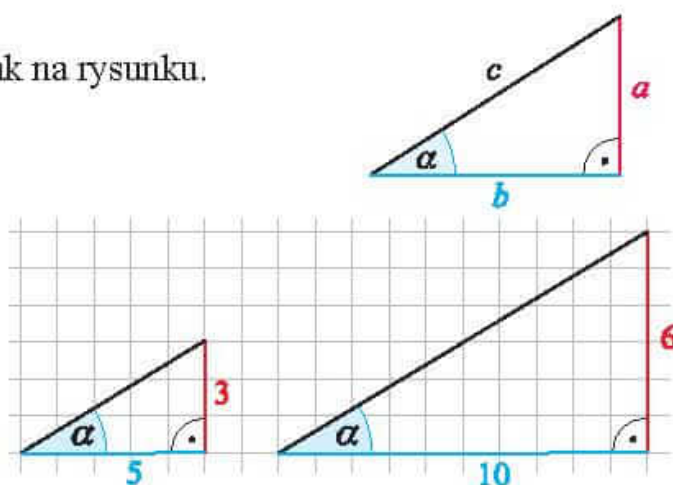
Ile jest takich trójkątów?

Rozwiązanie Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Z definicji $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$, więc $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

Z własności proporcji przy ustalonej jednostce możemy przyjąć np.:

$$\begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a=6 \\ b=10 \end{cases} \text{ lub } \dots$$



Konstruujemy kąt prosty i zgodnie z oznaczeniami na rysunku odkładamy na jego ramionach odcinki długości a oraz b , wykorzystując dowolną spośród wyżej podanych par liczb a i b .

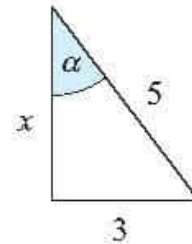
Trójkątów spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele.

Ćwiczenie 6. Zbuduj trójkąt prostokątny o kącie ostrym α takim, że:

- a) $\operatorname{tg} \alpha = 1,2$, b) $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

W trójkącie prostokątnym nie zawsze podane są długości przyprostokątnych. Często należy obliczyć ich długości, stosując twierdzenie Pitagorasa.

Ćwiczenie 7. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz $\operatorname{tg} \alpha$.



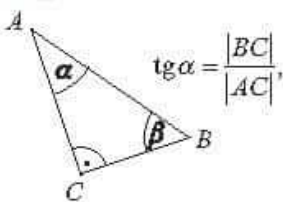
Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, b) $x = 12$, c) $x = 5\sqrt{5}$, d) $x = 8\sqrt{3}$.

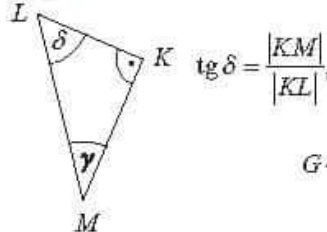
2. Tak: b), d), f), nie: a), c), e)

3. a) $\frac{4}{5}$, b) $\frac{5}{8}$, c) 2, d) $\frac{3}{7}$. 4. a) $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$, c) $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{4}$.

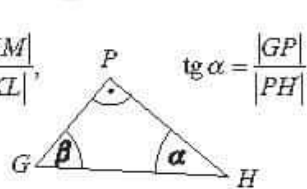
5. 1



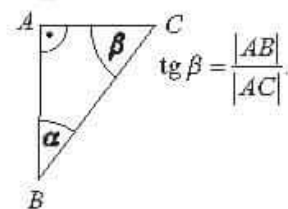
2



3



4



7. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, gdzie $x = \sqrt{5^2 - 3^2}$.

Zadania utrwalające

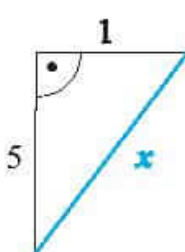
10.1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Trójkątem prostokątnym jest trójkąt o bokach mających długości:

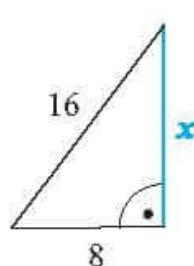
- A. 2, 4, 6, B. $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, C. 10, 24, 26, D. 10, 15, 20.

10.2. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość boku oznaczonego literą x .

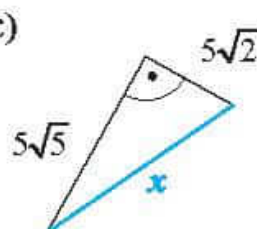
a)



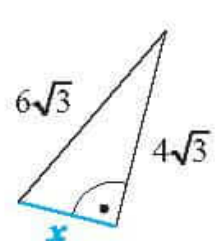
b)



c)



d)

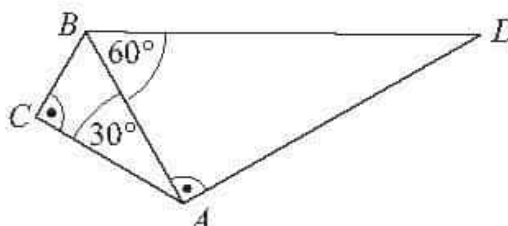


10.3. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe. Wpisz odpowiedź do zeszytu i ją uzasadnij.

Każde dwa trójkąty przystające są podobne.	P	F
Trójkąt prostokątny o kącie ostrym 17° nie jest podobny do trójkąta prostokątnego o kącie ostrym 73° .	P	F

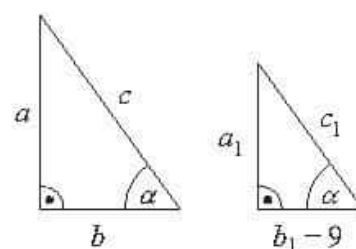
10.4. Uzasadnij, że trójkąty ABC i ABD

D przedstawione na rysunku są podobne.

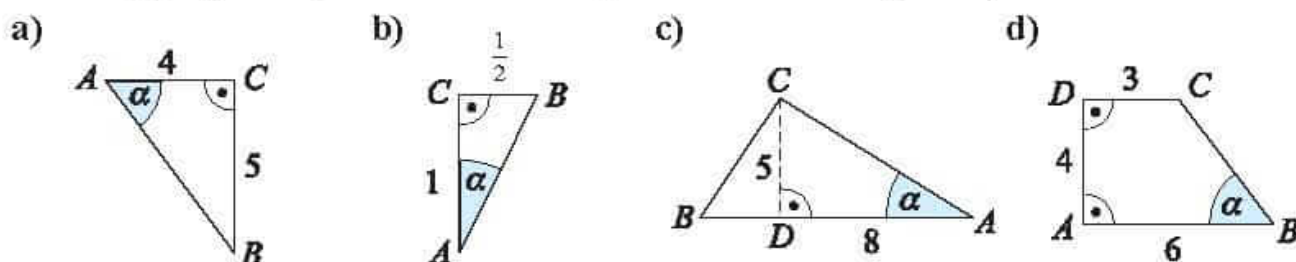


10.5. Na rysunku przedstawiono dwa trójkąty podobne.

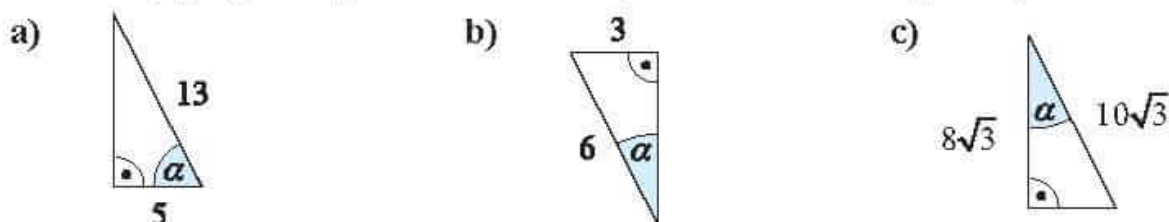
Oblicz długości boków a_1 i c_1 , wiedząc, że $\frac{a}{b} = 3$.



10.6. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz tangens kąta α .



10.7. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz tangens kąta α .



10.8. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

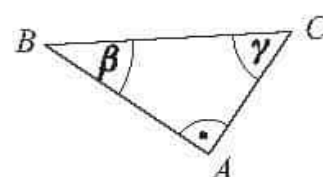
Prawidłowo zdefiniowany jest tangens:

A. $\operatorname{tg} \gamma = \frac{|AC|}{|BC|}$,

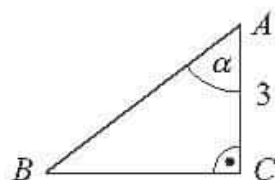
B. $\operatorname{tg} \gamma = \frac{|AB|}{|CB|}$,

C. $\operatorname{tg} \beta = \frac{|AB|}{|BC|}$,

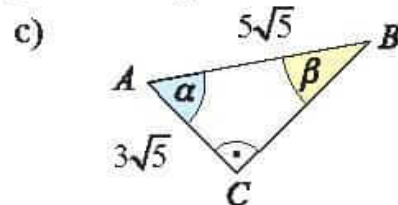
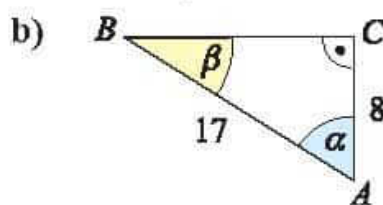
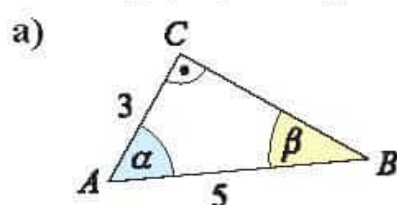
D. $\operatorname{tg} \beta = \frac{|AC|}{|AB|}$.



10.9. W trójkącie prostokątnym ABC , przedstawionym na rysunku, $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Oblicz długości boków BC i AB .



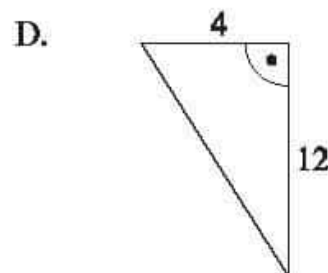
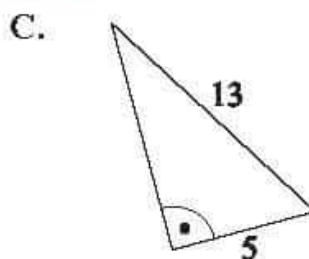
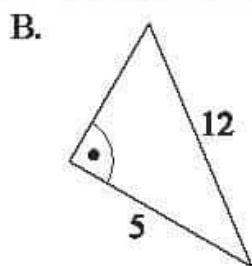
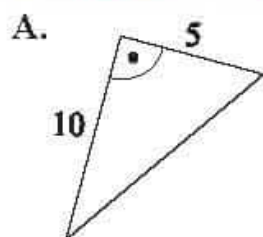
10.10. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz $\operatorname{tg} \alpha$ oraz $\operatorname{tg} \beta$.



10.11. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i wskaż trójkąt, w którym tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{5}{12}$.



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



10.12. Zbuduj trójkąt prostokątny o kącie ostrym α takim, że:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$,

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$,

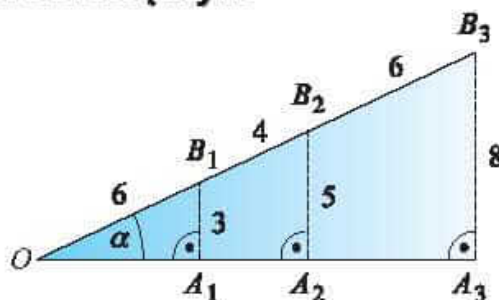
c) $\operatorname{tg} \alpha = 10$.

10.13. Uzasadnij, że jeżeli w trójkącie prostokątnym kąt α jest kątem ostrym, to $\alpha > 0^\circ$ i $\alpha < 90^\circ$ oraz $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

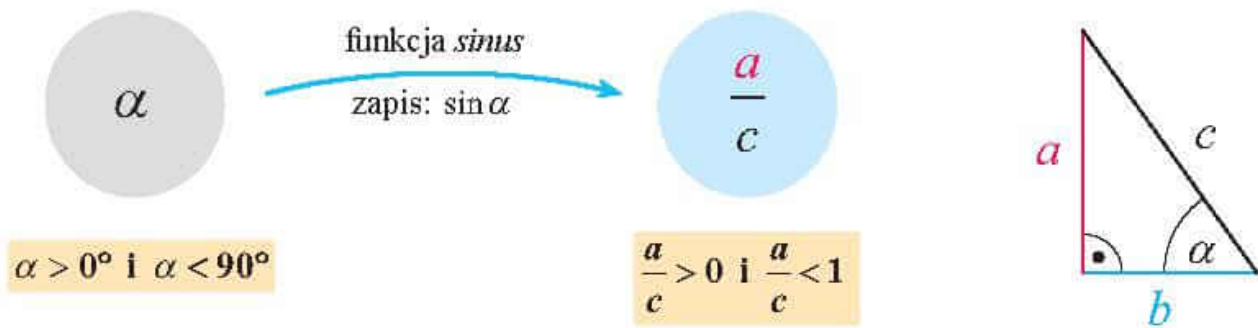
Sinus i cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Ćwiczenie 8. Wypisz trójkąty podobne przedstawione na rysunku. Oblicz stosunki długości:

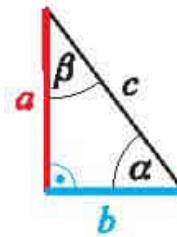
$$\frac{|A_1B_1|}{|OB_1|}, \frac{|A_2B_2|}{|OB_2|}, \frac{|A_3B_3|}{|OB_3|}.$$



Zauważamy, że w trójkątach prostokątnych podobnych OA_1B_1 , OA_2B_2 i OA_3B_3 stosunki długości przyprostokątnych leżących naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnych są równe. Stosunki te nazywamy **sinusem** kąta α (w skrócie **$\sin \alpha$**).

**Definicja**

Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do długości przeciwprostokątnej.

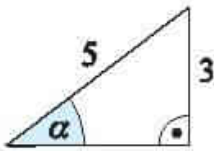


$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

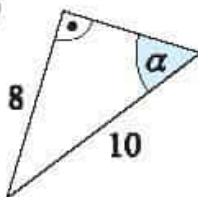
$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

Ćwiczenie 9. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz sinus kąta α .

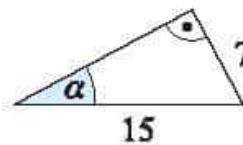
a)



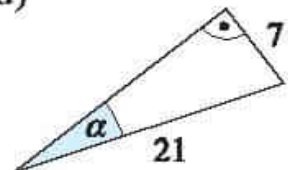
b)



c)

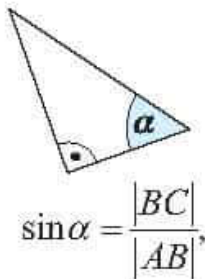


d)

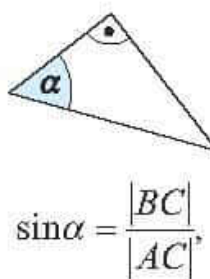


Ćwiczenie 10. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego wierzchołki oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem była prawdziwa.

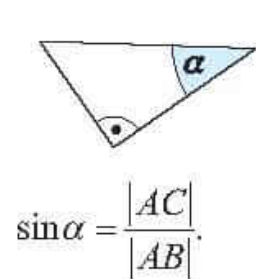
a)



b)



c)



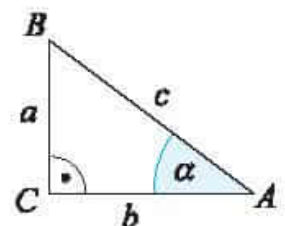
Przykład 2. Zbuduj kąt ostry α , wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Rozwiązanie Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Z definicji sinusa dla trójkąta prostokątnego ABC

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \text{ więc } \frac{a}{c} = \frac{2}{3}, \text{ czyli możemy przyjąć, że}$$

$$\text{np. } \begin{cases} a=2 \\ c=3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a=4 \\ c=6 \end{cases} \text{ lub } \dots$$

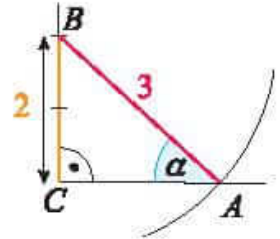


Opis konstrukcji.

- 1° Konstruujemy kąt prosty o wierzchołku C .
- 2° Na jednym z ramion odkładamy odcinek o długości dwóch jednostek i otrzymujemy punkt B .
- 3° Z punktu B , jako środka okręgu, kreślimy okrąg o promieniu równym trzem jednostkom.
- 4° Otrzymujemy punkt A z przecięcia się okręgu z drugim ramieniem kąta prostego, zatem $\alpha = |\sphericalangle CAB|^{(*)}$.

Dowód poprawności konstrukcji:

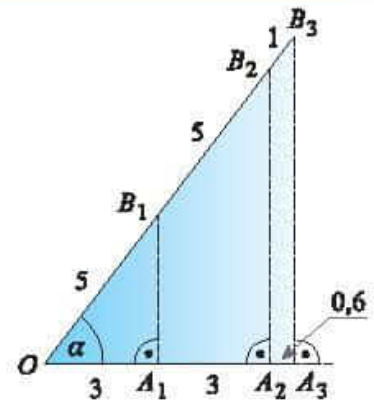
ponieważ $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{2}{3}$ i $\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$, więc $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.



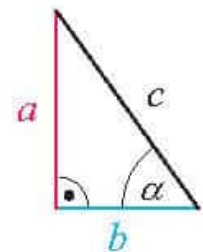
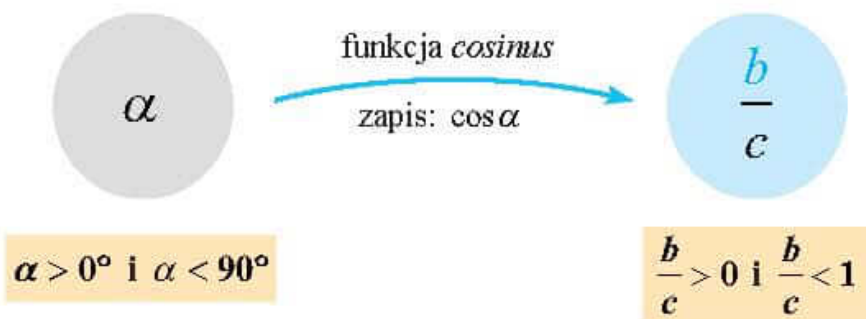
Ćwiczenie 11. Zbuduj kąt ostry α , wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 12. Uwzględnij dane przedstawione

na rysunku i sprawdź, czy $\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OB_2|} = \frac{|OA_3|}{|OB_3|}$.

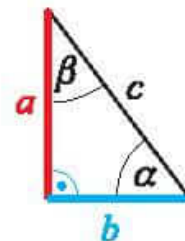


Zauważamy, że w trójkątach prostokątnych podobnych OA_1B_1 , OA_2B_2 i OA_3B_3 stosunki długości przyprostokątnych leżących przy kącie α do długości przeciwprostokątnych są równe. Stosunki te nazywamy **cosinusem** kąta α (w skrócie **cos α**).



Definicja

Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.



$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

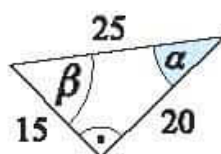
^{*)} Zapis $|\sphericalangle CAB|$ czytamy miara kąta CAB .

Ćwiczenie 13. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz cosinus kąta α oraz cosinus kąta β .

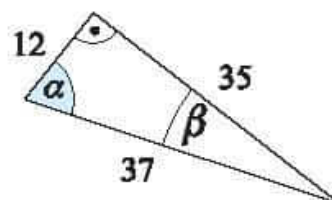
a)



b)



c)

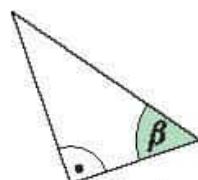


Ćwiczenie 14. Zbuduj kąt ostry α , wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.



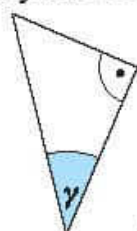
Ćwiczenie 15. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego wierzchołki oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem była prawdziwa.

a)



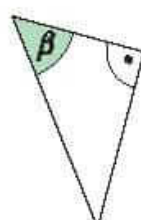
$$\sin \beta = \frac{|AC|}{|BC|}$$

b)



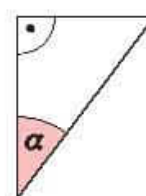
$$\cos \gamma = \frac{|KL|}{|KM|}$$

c)



$$\sin \beta = \frac{|HP|}{|GP|}$$

d)



$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Uwaga Wartości funkcji sinus i cosinus kąta ostrego α są liczbami mniejszymi od 1.

Ćwiczenie 16. Wyjaśnij, korzystając z definicji funkcji sinus, że $\sin \alpha < 1$ i $\sin \alpha > 0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

8. $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OA_2B_2 \sim \triangle OA_3B_3$, $\frac{|A_1B_1|}{|OB_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|OB_2|} = \frac{|A_3B_3|}{|OB_3|} = \frac{1}{2}$ 9. a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{4}{5}$, c) $\frac{7}{15}$, d) $\frac{1}{3}$

12. $\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OB_2|} = \frac{|OA_3|}{|OB_3|} = \frac{3}{5}$ 13. a) $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \beta = \frac{15}{17}$, b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$, c) $\cos \alpha = \frac{12}{37}$, $\cos \beta = \frac{35}{37}$

16. Zauważ, że sinus kąta ostrego jest stosunkiem przyprostokątnej do przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, więc licznik tego ułamka jest mniejszy od mianownika.

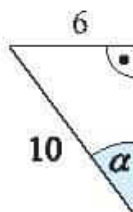
Zadania utrwalające

10.14. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz sinus oraz cosinus kąta α .

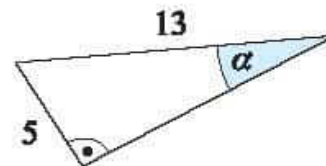
a)



b)



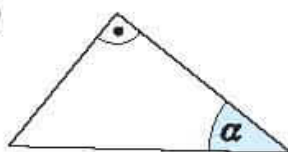
c)



10.15. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego wierzchołki oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem była prawdziwa.

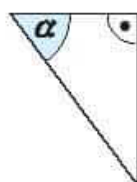


a)



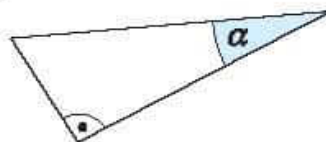
$$\sin \alpha = \frac{|AC|}{|BC|},$$

b)



$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|BC|},$$

c)



$$\sin \alpha = \frac{|MN|}{|KM|}.$$

10.16. Zbuduj kąt ostry α , gdy:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{4},$

b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}.$

10.17. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego długości boków oznacz takimi literami, aby równości zapisane pod rysunkiem były prawdziwe.

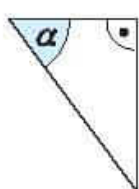


a)



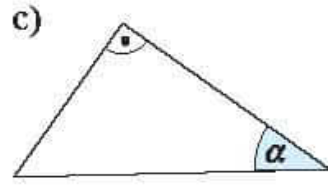
$$\sin \alpha = \frac{m}{l} \text{ i } \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{k},$$

b)



$$\cos \alpha = \frac{a}{b} \text{ i } \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{a},$$

c)

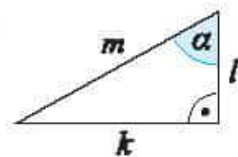


$$\sin \alpha = \frac{l}{p} \text{ i } \cos \alpha = \frac{m}{p}.$$

10.18. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Spośród zapisów: **1** $\sin \alpha = \frac{k}{m},$ **2** $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{l},$ **3** $\cos \alpha = \frac{k}{m},$



dla trójkąta prostokątnego przedstawionego na rysunku poprawnymi są:

A. **1**, **2**, **3**, B. tylko **1** i **2**, C. tylko **2** i **3**, D. tylko **1** i **3**.

10.19. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości 12 i 5. Cosinus najmniejszego kąta w tym trójkącie jest równy:

A. $\frac{5}{12},$

B. $\frac{5}{13},$

C. $\frac{12}{13},$

D. $\frac{13}{12}.$

10.20. Uzasadnij, korzystając z definicji funkcji cosinus, że $\cos \alpha > 0$ i $\cos \alpha < 1$.

D

10.21. Podaj przykładowe wymiary przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o kącie ostrym α , gdy:

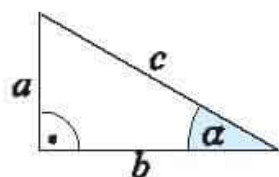
a) $\operatorname{tg} \alpha = 20,$

b) $\operatorname{tg} \alpha = 10\,000,$

c) $\sin \alpha = \frac{1}{5},$

d) $\cos \alpha = \frac{8}{17}.$

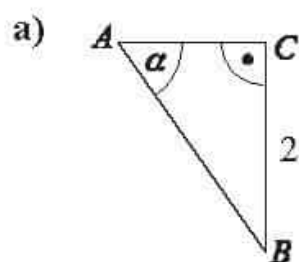
10.22. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.



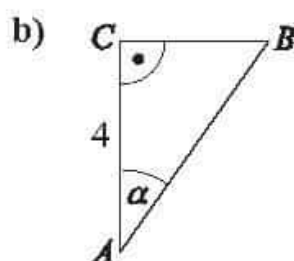
Przerysuj tabelę do zeszytu i w miejscach ■ wpisz odpowiednią liczbę.

a	b	c	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
6	8	10	■	■	■
4	$4\sqrt{3}$	■	$\frac{1}{2}$	■	■
4	■	$2\sqrt{13}$	■	■	$\frac{2}{3}$
3	■	5	■	$\frac{4}{5}$	■

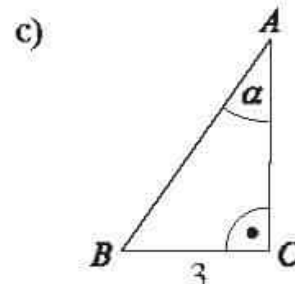
10.23. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku oraz podaną wartość funkcji trygonometrycznej i oblicz pozostałe długości boków trójkąta ABC .



$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$



$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60°

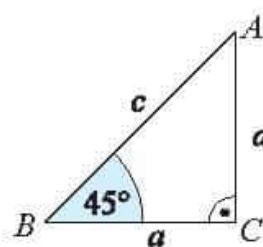
Przykład 3. Oblicz wartości funkcji sinus i tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym równoramiennym.

Rozwiązanie Ponieważ trójkąt jest równoramienny, więc kąty ostre tego trójkąta mają miary 45° . Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. W trójkącie ABC :

$$c^2 = a^2 + a^2, \text{ czyli } c^2 = 2a^2, \text{ skąd } c = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Zatem } \sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

$$\text{Odp.: } \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$



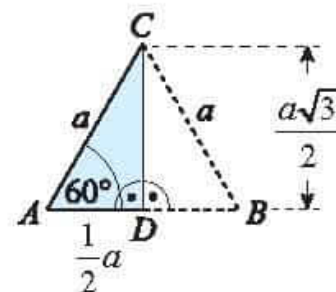
Ćwiczenie 17. Oblicz $\cos 45^\circ$.

Przykład 4. W trójkącie prostokątnym ADC jeden z kątów ostrych ma miarę 60° .

Oblicz: a) $\sin 60^\circ$, b) $\operatorname{tg} 60^\circ$.

Rozwiązanie Zauważmy, że trójkąt prostokątny ADC , którego jeden kąt ostry ma miarę 60° , jest połową trójkąta równobocznego ABC o boku a i wysokości $|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Wówczas $|AD| = \frac{1}{2}a$.



$$\text{a) } \sin 60^\circ = \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{b) } \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}.$$

Odp.: a) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 18. Oblicz: a) $\cos 60^\circ$, b) $\sin 30^\circ$, c) $\cos 30^\circ$, d) $\operatorname{tg} 30^\circ$.



Ćwiczenie 19. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce $\blacksquare$ wpisz odpowiednią miarę kąta: a) $\sin 30^\circ = \cos \blacksquare$, b) $\cos 30^\circ = \sin \blacksquare$, c) $\cos 45^\circ = \sin \blacksquare$.

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów:			
funkcja trygonometryczna \ α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Uwaga Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych są dodatnie, bo są równe ilorazowi długości odpowiednich boków w trójkącie prostokątnym.

Ćwiczenie 20. Oblicz: a) $2\sin 45^\circ - \operatorname{tg}^2 60^\circ$, b) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ$.

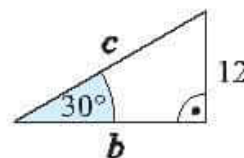
Przyjmujemy, że: $(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$, $(\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$, $(\operatorname{tg} \alpha)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Przykład 5. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 12 cm, a kąt leżący naprzeciw niej ma miarę 30° . Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Rozwiązanie *Dane:* $a = 12\text{cm}$, $\alpha = 30^\circ$, *obliczyć:* b , c .

$$\sin 30^\circ = \frac{12}{c}, \text{ więc } \frac{1}{2} = \frac{12}{c}, \text{ skąd } c = 24,$$

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{24}, \text{ więc } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{24}, \text{ skąd } b = 12\sqrt{3}.$$



Odp.: $12\sqrt{3}\text{cm}$ i 24 cm .

Ćwiczenie 21. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8 cm, a kąt przyległy do niej ma miarę 60° . Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Przykład 6. Kolejka górska pokonując trasę 1000 m wznosi się pod kątem 45° do poziomu. Na jakiej wysokości znajduje się stacja końcowa tej kolejki, jeżeli jej stacja początkowa leży na wysokości 1600 m (n.p.m.)? Wynik zaokrąglij do 1 metra.

Rozwiązanie Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $\alpha = 45^\circ$, $h_1 = 1600\text{m}$ (n.p.m.), $s = 1000\text{m}$,

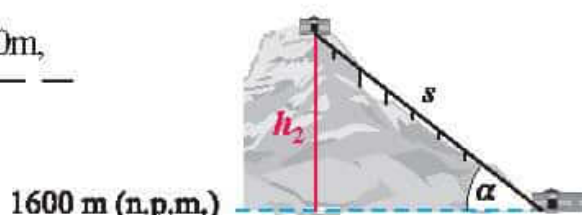
obliczyć: h_2 – różnica wysokości
pomiędzy położeniem stacji końcowej
i początkowej,

$H = h_1 + h_2$ – wysokość stacji końcowej.

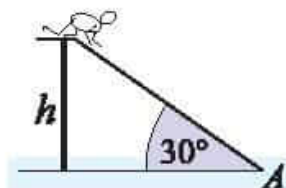
$$\text{Ponieważ } \sin \alpha = \frac{h_2}{s}, \text{ czyli } \sin 45^\circ = \frac{h_2}{1000}, \text{ więc } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h_2}{1000}, \text{ skąd } h_2 = 500\sqrt{2}.$$

$$H = 1600 + 500\sqrt{2}, \text{ więc } H \approx 2307 \text{ m.}$$

Odp.: Kolejka wjeżdża na wysokość około 2307 m (n.p.m.).



Ćwiczenie 22. W aquaparku stoi zjeżdżalnia. Tor zjazdu jest nachylony do poziomu pod kątem 30° . Oblicz długość toru zjeżdżalni, gdy jej wysokość h jest równa 2 m.



Odpowiedzi do ćwiczeń

18. a) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, b) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, c) $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. a) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$,

b) $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$, c) $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$.

20. a) $\sqrt{2} - 3$, b) 1.

21. $8\sqrt{3}$ cm, 16 cm.

22. 4 m.

Zadania utrwalające

10.24. Oblicz wartość wyrażenia:

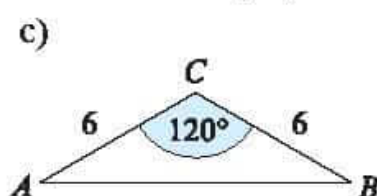
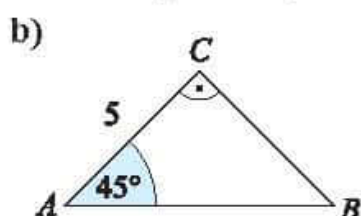
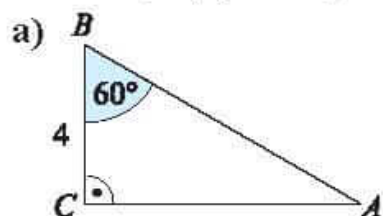
a) $5 \cdot \sin 30^\circ + 4 \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$,

b) $3 \sin 60^\circ - 5 \operatorname{tg} 45^\circ + 3 \operatorname{tg} 30^\circ$,

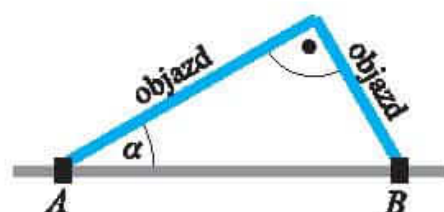
c) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 45^\circ$,

d) $\frac{2 - \operatorname{tg}^2 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}$.

10.25. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz obwód trójkąta ABC .

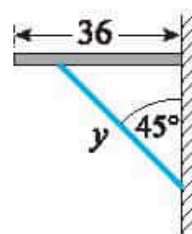


10.26. Ze względu na naprawę drogi pomiędzy miejscowościami A i B wytyczono objazd, tak jak na rysunku. Oblicz, o ile kilometrów trasa objazdu jest dłuższa od odległości między tymi miejscowościami, gdy $|AB| = 8 \text{ km}$ i $\alpha = 30^\circ$.

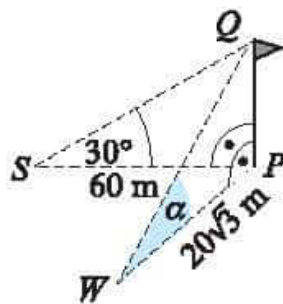


10.27. Samolot po oderwaniu się od pasa startowego wznosił się, lecąc wzdłuż linii prostej nachylonej do płyty lotniska pod kątem 30° i pokonał drogę 3 km. Oblicz, na jaką wysokość wznosił się samolot.

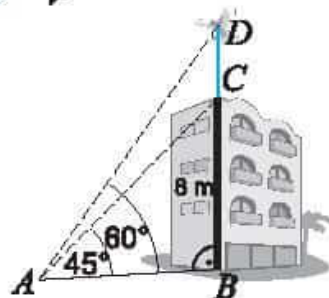
10.28. Oblicz długość y listewki potrzebnej do zrobienia podpórki pod półkę. Półka ma szerokość 36 cm, a listewka ma być zamocowana w odległości od ściany równej $\frac{2}{3}$ szerokości tej półki. Wynik zaokrąglaj do 1 cm.



10.29. Maszt PQ widziany jest z miejsca S , odległego o 60 m od jego podstawy, pod kątem 30° . Pod jakim kątem α widać ten maszt z punktu W , oddalonego o $20\sqrt{3}$ m od jego podstawy?



10.30. Na antenie umieszczonej na dachu budynku siedzi gołąb. Uwzględniając dane przedstawione na rysunku, oblicz odległość gołębia od dachu. Wynik zaokrąglaj do 0,01 metra.



Odczytywanie wartości funkcji trygonometrycznych z tablic

Aby podać wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych, korzystamy z tablic wartości tych funkcji, których fragmenty zamieszczamy poniżej.

$\alpha [^\circ]$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83

$\alpha [^\circ]$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37

Można z nich odczytać wartości funkcji sinus, cosinus i tangens,

np. $\sin 5^\circ = 0,0872 = \cos 85^\circ$, $\operatorname{tg} 5^\circ = 0,0875$.

Ćwiczenie 23. Odczytaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

$\sin 4^\circ$, $\operatorname{tg} 40^\circ$, $\sin 89^\circ$, $\cos 1^\circ$, $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Ćwiczenie 24. Oblicz za pomocą kalkulatora przybliżoną wartość funkcji:

a) $\sin 45^\circ$, b) $\cos 30^\circ$, c) $\operatorname{tg} 60^\circ$ i porównaj ją z wartością podaną w tablicach.

Przykład 7. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, odczytaj przybliżoną miarę kąta α , dla której spełniona jest równość:

a) $\cos \alpha = 0,5878$, b) $\sin \alpha = 0,6608$.

Rozwiązanie

a) $\cos \alpha = 0,5878$. Znajdujemy w kolumnie oznaczonej $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$ liczbę 0,5878.

Miarę kąta, gdy dana jest wartość jego cosinusa, odczytujemy w kolumnie oznaczonej $\beta [^\circ]$.

Zatem $\alpha = 54^\circ$.

$\alpha [^\circ]$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
$\vdots$			$\vdots$
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54

- b) $\sin \alpha = 0,6608$. Ponieważ liczby 0,6608 nie ma w kolumnie oznaczonej $\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$, więc najpierw znajdujemy w tej kolumnie dwie liczby, pomiędzy którymi się ona znajduje, a następnie wybieramy z nich tę, która różni się od niej o mniej (obliczenia pod tabelą).

$$0,6561 < 0,6608 < 0,6691.$$

Zatem $\alpha \approx 41^\circ$.

$\alpha [^\circ]$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47

$$\begin{array}{r} 0,6608 \\ -0,6561 \\ \hline 0,0047 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0,6691 \\ -0,6608 \\ \hline 0,0083 \end{array}$$

Ćwiczenie 25. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (trzecia strona okładki), odczytaj przybliżoną miarę kąta α , dla której spełniona jest równość:

- a) $\sin \alpha = 0,9740$, b) $\cos \alpha = 0,8140$, c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,9626$.

Prezentowany kalkulator umożliwia obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, np. 42° .

- 1° Naciskamy klawisze:



- 2° Naciskamy klawisz funkcji sinus



- 3° Odczytujemy: $\sin 42^\circ = 0,6691306064\dots$, zatem $\sin 42^\circ \approx 0,6691$.



Przykład 8. Oblicz miarę kąta ostrego α , gdy $\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 4$. Miarę kąta podaj z dokładnością do 1° .

Rozwiązanie $\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 4 \quad / : \sqrt{2}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx 2,8284.$$

$$\begin{array}{r} 2,8284 \\ -2,7475 \\ \hline 0,0809 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2,9042 \\ -2,8284 \\ \hline 0,0758 \end{array}$$

Ponieważ $0,0758 < 0,0809$, więc $\alpha \approx 71^\circ$.

Odp.: $\alpha \approx 71^\circ$.

$\alpha [^\circ]$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
$\vdots$			$\vdots$
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18

Ćwiczenie 26. Oblicz miarę kąta ostrego α , gdy:

- a) $3\sin \alpha = 2$, b) $2\tg \alpha = \sqrt{5}$, c) $\cos \alpha = 0,1$.

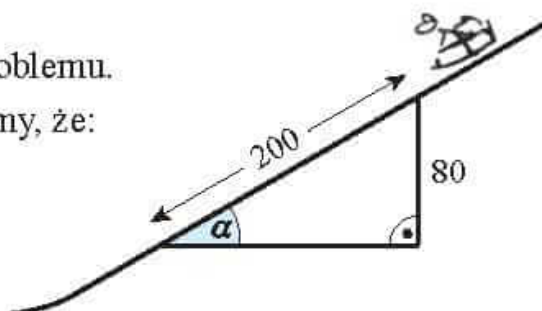
Przykład 9. Różnica poziomów części toru saneczkowego przedstawionego na rysunku jest równa 80 m. Długość tej części jest równa 200 m. Oblicz miarę kąta nachylenia tej części toru do poziomu ziemi.

Rozwiązanie Budujemy model matematyczny problemu.

Tym modelem jest trójkąt prostokątny. Zauważamy, że:

$$\sin \alpha = \frac{80}{200}, \text{ czyli } \sin \alpha = 0,4,$$

$$\text{skąd } \alpha \approx 24^\circ.$$



Odp.: Kąt nachylenia toru saneczkowego ma miarę 24° .

Ćwiczenie 27. Drabinę o długości 5 m oparto o mur tak, że podstawa drabiny znajduje się w odległości 3 m od muru. Oblicz miarę kąta, jaki tworzy drabina z poziomem ziemi.

Przykład 10. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 44° , a jego ramię ma długość 100 cm. Oblicz wysokość trapezu. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych milimetrów.

Rozwiązanie

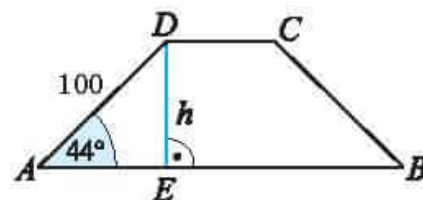
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

W trójkącie AED mamy:

$$\frac{h}{100} = \sin 44^\circ, \text{ czyli}$$

$$\frac{h}{100} \approx 0,6947 \text{ skąd}$$

$$h \approx 69,47 \text{ cm.}$$



Odp.: Wysokość trapezu jest równa około 695 mm.

Ćwiczenie 28. W trapezie prostokątnym dłuższe ramię ma długość 15 cm i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 54° . Oblicz długość krótszego ramienia trapezu. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

Odpowiedzi do ćwiczeń

25. a) $\alpha \approx 77^\circ$, b) $\alpha \approx 36^\circ$, c) $\alpha = 63^\circ$. 26. a) $\alpha \approx 42^\circ$, b) $\alpha \approx 48^\circ$, c) $\alpha \approx 84^\circ$. 27. 53° . 28. 12 cm.

Zadania utrwalające

10.31. Odczytaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

- a) $\sin 8^\circ$, b) $\cos 8^\circ$, c) $\operatorname{tg} 32^\circ$, d) $\sin 73^\circ$, e) $\cos 86^\circ$.

10.32. Skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych i odczytaj przybliżoną miarę kąta α , dla której spełniona jest równość:

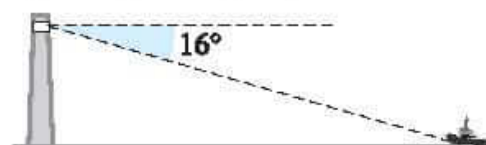
- a) $\sin \alpha = 0,3090$, b) $\cos \alpha = 0,4040$, c) $\operatorname{tg} \alpha = 3,0777$,
d) $\sin \alpha = 0,5005$, e) $\cos \alpha = 0,7200$, f) $\operatorname{tg} \alpha = 1,6$.

10.33. Oblicz miarę kąta ostrego α , gdy:

- a) $6 \cos \alpha = 1$, b) $5 \operatorname{tg} \alpha = 24$, c) $8 \sin \alpha = 5$.

10.34. Obserwator zauważył z okna latarni morskiej kuter pod kątem depresji 16° .

Jak daleko od brzegu znajduje się kuter, jeżeli latarnia stoi tuż nad brzegiem i miejsce obserwacji znajduje się 70 m nad poziomem morza? Wynik podaj, zaokrąglając do 1 m.



Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Rozwiązać trójkąt, to znaczy obliczyć długości wszystkich jego boków i miary wszystkich kątów.

Przykład 11. W trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α mającym miarę 40° przyprostokątna przeciwległa kątowi α ma długość 6 cm. Rozwiąż ten trójkąt. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 cm.

Rozwiązanie

Dane: $\alpha = 40^\circ$, $a = 6 \text{ cm}$, | **obliczyć:** b , c , β .

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

Z definicji funkcji sinus:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \text{ więc } c = \frac{a}{\sin \alpha},$$

$$c = \frac{6}{0,6428} \quad \sin 40^\circ \approx 0,6428$$

$$c \approx 9,33 \text{ cm.}$$

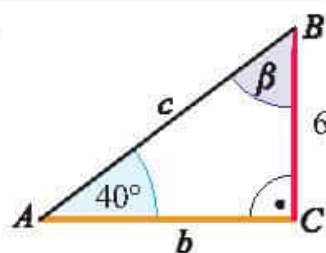
Z definicji funkcji cosinus:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}, \text{ więc } b = c \cdot \cos \alpha,$$

$$b \approx 9,33 \cdot 0,7660 \quad \cos 40^\circ \approx 0,7660$$

$$b \approx 7,15 \text{ cm.}$$

Odp.: $b \approx 7,15 \text{ cm}$, $c \approx 9,33 \text{ cm}$, $\beta = 50^\circ$.



Ćwiczenie 29. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna ma długość 8 cm, a kąt ostry ma miarę 37° . Oblicz długości pozostałych boków trójkąta. Rozważ dwa przypadki.

Przykład 12. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna a ma długość 7 cm, a przeciwprostokątna c ma długość 12 cm. Rozwiąż ten trójkąt.

Rozwiązanie

Dane: $a = 7$ cm, $c = 12$ cm, $\quad \quad \quad$ **obliczyć:** α, β i b .

Z definicji funkcji sinus:

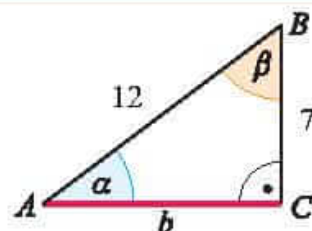
$$\sin \alpha = \frac{7}{12}, \text{ więc } \sin \alpha \approx 0,5833, \text{ skąd } \alpha \approx 36^\circ.$$

Odczytujemy z kalkulatora lub tablic matematycznych.

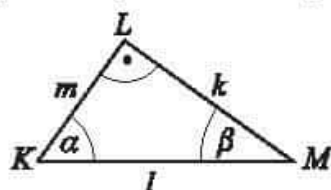
Obliczamy miarę kąta β : $\beta \approx 90^\circ - 36^\circ$, więc $\beta \approx 54^\circ$.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy b , gdzie $b = \sqrt{12^2 - 7^2} = \sqrt{95}$.

Odp.: Kąty ostre trójkąta prostokątnego mają miary 36° i 54° , a druga przyprostokątna ma długość $\sqrt{95}$ cm.



Ćwiczenie 30. Przerysuj tabelę do zeszytu, przyjmij oznaczenia boków oraz kątów w trójkącie MLK jak na rysunku i uzupełnij tabelę.



k	m	l	α	β
1			30°	
		100		10°
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$			
$\sqrt{3}$		$2\sqrt{3}$		

Odpowiedzi do ćwiczeń

29. Przypadek 1. – około 10,6 cm i 13,3 cm; przypadek 2. – około 6 cm i 10 cm.

30. Kolejno: $\sqrt{3}$, 2, 60° ; 17,4, 98,5, 80° ; $\sqrt{10}$, 27° , 63° ; 3, 30° , 60° .

Zadania utrwalające

10.35. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i rozwiąż trójkąt prostokątny ABC , w którym:

a) $a = 18$ cm i $b = 23$ cm,

b) $a = 11$ cm i $c = 21$ cm,

c) $a = 34$ cm i $\alpha = 42^\circ$,

d) $a = 4,5$ dm i $\beta = 52^\circ$,

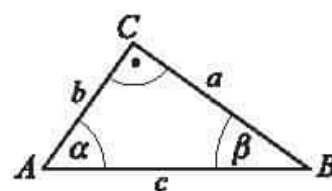
e) $a = 8$ cm i $P_{\Delta ABC} = 48$ cm²,

f) $b = 16$ cm i $P_{\Delta ABC} = 56$ cm²,

g) $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ i $b = 3$ cm,

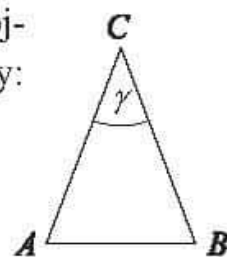
h) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ i $a = 6$ cm,

i) $\cos \beta = \frac{3}{5}$ i $c = 10$ cm.



10.36. W trójkącie równoramiennym ABC kąt zawarty między ramionami trójkąta ma miarę γ . Oblicz długości boków i miary kątów trójkąta ABC , gdy:

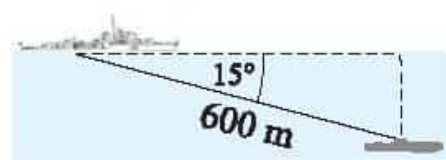
- a) $|AC| = 10$, $\gamma = 42^\circ$, b) $|AB| = 25$, $\gamma = 70^\circ$,
c) $|AB| = 5$, $|AC| = 4$.



10.37. Oblicz długości boków i miary kątów trójkąta prostokątnego ABC , w którym kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym, gdy:

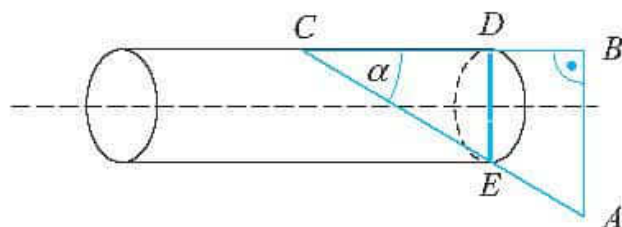
- a) $|BC| = 30$, $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$, b) $|AB| = 28$, $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$,
c) $|AC| = 0,24$, $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$, d) $|AB| = 2$, $|AC| = \sqrt{3}$.

10.38. Na niszczycielu operator sonaru wykrył łódź podwodną w odległości 600 metrów pod kątem depresji 15° . Na jakiej głębokości znajduje się łódź podwodna? Wynik podaj, zaokrąglając go do 1 m.

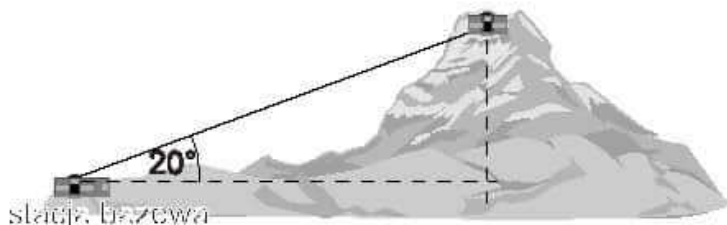


10.39. Pomiarów średnicy rurki można dokonać za pomocą przyrządu w kształcie trójkąta prostokątnego ACB , którego jeden z kątów ostrych ma miarę α .

Chcąc zmierzyć średnicę rurki, wsuwamy trójkąt ABC w sposób pokazany na rysunku i mierzymy długość odcinka CD . Oblicz średnicę rurki, jeżeli $\alpha = 15^\circ$ i $|CD| = 3,7$ cm.



10.40. Kolejka linowa wznosi się pod kątem 20° . Obserwatorium na szczycie góry jest położone o 1800 m wyżej niż stacja bazowa. Oblicz długość trasy w linii prostej, jaką pokonuje kolejka, wjeżdżając na szczyt, i podaj wynik, zaokrąglając go do 0,001 km.



10.41. Kąt między skrajnymi położeniami wahadła zegara ma miarę 20° . Odległość między skrajnymi położeniami ciężarka znajdującego się na końcu wahadła mierzona na prostej jest równa 25 cm. Jaka jest długość wahadła?

10.42. Statek płynący z prędkością $9 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przecina linię równika pod kątem o mierze 14° i nie zmienia kierunku. Jaka będzie odległość statku od równika po dwóch dobach podróży?

Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

W trygonometrii przy rozwiązywaniu różnych problemów matematycznych często potrzebujemy wyrazić jedną funkcję trygonometryczną za pomocą innej funkcji. Tymi zależnościami zajmiemy się poniżej.

Przykład 13. Dla trójkąta prostokątnego o kącie ostrym α i przeciwprostokątnej mającej długość 1:

- 1) oblicz długości przyprostokątnych a i b , 2) wykaż, że $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Rozwiązanie Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

- 1) W trójkącie prostokątnym ABC :

$$\sin \alpha = \frac{a}{1}, \text{ więc } a = \sin \alpha,$$

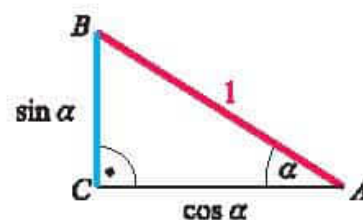
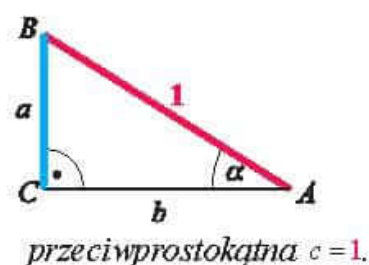
$$\cos \alpha = \frac{b}{1}, \text{ więc } b = \cos \alpha.$$

$$\text{Odp.: } a = \sin \alpha, \quad b = \cos \alpha.$$

- 2) Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC :

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ czyli } (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1^2,$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad \text{c.n.w.}$$



Uwaga

- Dla każdego kąta ostrego α prawdziwy jest wzór $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
Zależność tę nazywamy **jedynką trygonometryczną**.
- Jeżeli $p^2 + r^2 = 1$, gdy $p > 0$ i $r > 0$, to istnieje taki kąt ostry α ,
że $p = \sin \alpha$ i $r = \cos \alpha$.

Przykład 14. Zbadaj, czy liczby $\frac{3}{4}$ i $\frac{\sqrt{7}}{4}$ mogą być wartościami funkcji sinus i cosinus tego samego kąta ostrego α .

Rozwiązanie $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{7}{16} = \frac{16}{16} = 1.$

Sprawdzamy, czy
 $\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 1$

Odp.: Tak, istnieje taki kąt α , że $\frac{3}{4} = \sin \alpha$ i $\frac{\sqrt{7}}{4} = \cos \alpha$ lub $\frac{3}{4} = \cos \alpha$ i $\frac{\sqrt{7}}{4} = \sin \alpha$.

Ćwiczenie 31. Zbadaj, czy wartościami funkcji sinus i cosinus tego samego kąta

ostrego α mogą być liczby: a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{\sqrt{5}}{3}$, b) $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$.

Przykład 15. Wykaż, że jeżeli kąty ostre α i β są kątami tego samego trójkąta prostokątnego, to $\sin \alpha = \cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha)$.

Rozwiązanie

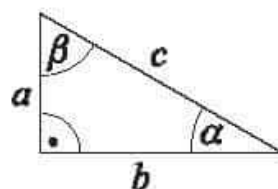
Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Z (założenie):

α, β – miary kątów ostrych
w trójkącie prostokątnym.

T (teza):

$\sin \alpha = \cos \beta$,
 $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$.



Dowód: Z definicji funkcji sinus i cosinus w trójkącie prostokątnym mamy:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ i } \cos \beta = \frac{a}{c}, \text{ więc } \sin \alpha = \cos \beta.$$

Ponieważ w trójkącie prostokątnym $\alpha + \beta = 90^\circ$, więc $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Zatem $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$. **c.n.w.**

Ćwiczenie 32. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α prawdziwy jest związek: a) $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$.

Ćwiczenie 33. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce $\blacksquare$ wpisz odpowiednią miarę kąta.

a) $\sin 15^\circ = \cos \blacksquare$, b) $\cos 29^\circ = \sin \blacksquare$, c) $\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} \blacksquare}$, d) $\frac{1}{\operatorname{tg} 50^\circ} = \operatorname{tg} \blacksquare$.

Przykład 16. Oblicz: a) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ$, b) $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$.

Rozwiązanie

a) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1$.

$$\sin 89^\circ = \cos(90^\circ - 89^\circ) = \cos 1^\circ$$

b) $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = 1$.

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - 75^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ}$$

Odp.: a) 1, b) 1.

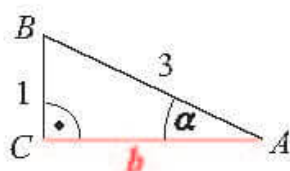
Ćwiczenie 34. Oblicz: a) $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ$, b) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ$.

Ćwiczenie 35. Uzasadnij, że gdy α jest kątem ostrym, to $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

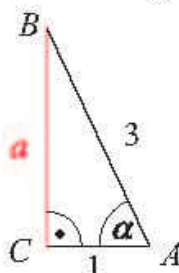
Przykład 17. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , gdy: a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie Rozpatrujemy trójkąt prostokątny, w którym:

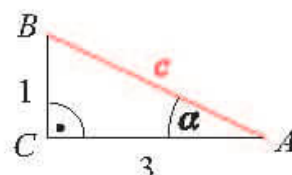
a) $a = 1$ i $c = 3$,



b) $b = 1$ i $c = 3$,



c) $a = 1$ i $b = 3$.



Z twierdzenia Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$:

$$1 + b^2 = 3^2$$

$$b^2 = 9 - 1$$

$$b = 2\sqrt{2}, \text{ więc}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$a^2 + 1^2 = 3^2$$

$$a^2 = 9 - 1$$

$$a = 2\sqrt{2}, \text{ więc}$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}.$$

$$1^2 + 3^2 = c^2$$

$$1 + 9 = c^2$$

$$c = \sqrt{10}, \text{ więc}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Ćwiczenie 36. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , gdy: a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, b) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.

Przykład 18. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α taki, że $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ i $\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie Obliczamy $\cos \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = 1\frac{1}{3}, \text{ więc } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}, \text{ skąd } \cos \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha.$$

$$\text{Ponieważ } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ więc } \cos \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}.$$

Sprawdzamy, czy $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1.$$

Odp.: Tak, istnieje.

Ćwiczenie 37. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α taki, że:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ i $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ i $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

Ciekawostka

Oprócz funkcji sinus, cosinus i tangens istnieją jeszcze trzy inne funkcje trygonometryczne. Są to secans (skrót **sec**), cosecans (skrót **cosec**) i cotangens (skrót **ctg**).

Funkcje secans i cosecans są rzadko używane, natomiast znajomość funkcji cotangens pozwala uprościć niektóre obliczenia.

Każda z tych funkcji jest odwrotnością innej funkcji, i tak:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Definicja

Cotangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej.



$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$$

Ćwiczenie 38. Oblicz wartość: a) $\operatorname{ctg} 30^\circ$, b) $\operatorname{ctg} 45^\circ$, c) $\operatorname{ctg} 60^\circ$.

Ćwiczenie 39. Uzasadnij, że: a) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, b) $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Ćwiczenie 40. Oblicz wartość: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, gdy $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

31. a) Tak, b) nie. 33. a) $\cos 75^\circ$, b) $\sin 61^\circ$, c) $\operatorname{tg} 65^\circ$, d) $\operatorname{tg} 40^\circ$. 34. a) 1, b) 1.

36. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, c) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

37. a) Tak, b) nie. *Wskazówka.* a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. 38. $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

40. a) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, b) $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, c) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$.

Zadania utrwalające

10.43. Oblicz, bez użycia tablic matematycznych, wartość wyrażenia:

a) $\sin^2 13^\circ + \cos^2 13^\circ + \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 77^\circ$, b) $\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 55^\circ$,

c) $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ} + \frac{\cos 65^\circ}{\sin 25^\circ}$,

d) $\sin 18^\circ \cdot \cos 72^\circ + \cos 18^\circ \cdot \sin 72^\circ$,

$$\text{e)} \frac{\cos 83^\circ}{\sin 7^\circ} - \frac{\sin 7^\circ}{\cos 83^\circ},$$

$$\text{f)} \sin 39^\circ \cdot \cos 51^\circ + \cos 39^\circ \cdot \sin 51^\circ.$$

10.44. Oblicz, bez użycia tablic matematycznych, wartość wyrażenia:

$$\text{a)} \frac{\sin 5^\circ}{\cos 85^\circ} + \frac{\sin 10^\circ}{\cos 80^\circ} + \frac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ}, \quad \text{b)} \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ + \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{tg} 87^\circ,$$

$$\text{c)} \sin 17^\circ \cdot \cos 73^\circ + \cos 17^\circ \cdot \sin 73^\circ + \sin 37^\circ \cdot \cos 53^\circ + \cos 37^\circ \cdot \sin 53^\circ,$$

$$\text{d)} \operatorname{tg} 19^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 71^\circ,$$

$$\text{e)} \sqrt{3} \cdot \sin^2 23^\circ + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 23^\circ \cdot \operatorname{tg} 67^\circ + \sqrt{3} \cdot \sin^2 67^\circ,$$

$$\text{f)} \cos^2 15^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 75^\circ.$$

10.45. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α taki, że:

$$\text{a)} \sin \alpha = \frac{12}{13} \quad \text{i} \quad \cos \alpha = \frac{5}{13},$$

$$\text{b)} \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15} \quad \text{i} \quad \cos \alpha = \frac{8}{17},$$

$$\text{c)} \sin \alpha = \frac{9}{41} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{40},$$

$$\text{d)} \cos \alpha = \frac{1}{5} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{6}.$$

10.46. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Wartość wyrażenia $1 + \sin^2 41^\circ + \cos^2 41^\circ$ jest równa:

A. 1,

B. 2,

C. 3,

D. 4.

10.47. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Wartość wyrażenia $\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ + \sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 75^\circ$ jest równa:

A. 0,

B. 1,

C. 2,

D. 3.

10.48. Uzasadnij, że:

D

$$\text{a)} \frac{\sin 39^\circ}{\cos 51^\circ} = 1,$$

$$\text{b)} \frac{\cos 20^\circ}{\cos 70^\circ} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 1.$$

10.49. Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, oblicz wartość wyrażenia:

$$\text{a)} 2\sin \alpha + \frac{1}{2}\cos \alpha - 4\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{b)} \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \right)^2 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha.$$

10.50. Wykaż, że:

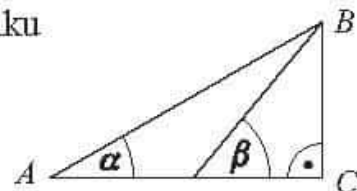
D a) $\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 55^\circ = 1$, b) $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 1$.

10.51. Uzasadnij, że dla każdego kąta ostrego α prawdziwa jest równość:

D a) $1 - 2 \cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1$, b) $(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$,
 c) $\cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1$, d) $\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 1 \right) \cdot \sin^2 \alpha = 1$.

10.52. Uwzględnij położenie kątów α i β przedstawione na rysunku i porównaj liczby:

- a) $\sin \alpha$ i $\sin \beta$, b) $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \beta$,
 c) $\cos \alpha$ i $\cos \beta$.



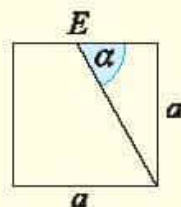
Zestaw powtórkowy

1. W kwadracie o boku długości a punkt E jest środkiem boku.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość tangens kąta α jest równa:

- A. 1, B. $\sqrt{3}$, C. 2, D. 3.



2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$ jest równa:

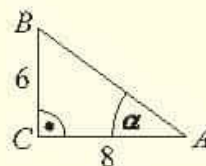
- A. 1, B. $1\frac{1}{4}$, C. $1\frac{1}{2}$, D. $1\frac{3}{4}$.

3. Kątem ostrym w trójkącie prostokątnym ABC jest α .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zatem wartością wyrażenia $\sin \alpha + \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha$ jest liczba:

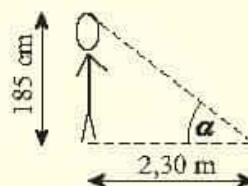
- A. 0,65, B. 0,55, C. 0,95, D. 2,15.



4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Człowiek mający 185 cm wzrostu rzuca cień o długości 2,30 m. Zatem promienie słoneczne w tym czasie padają na ziemię pod kątem:

- A. 39° , B. 40° , C. 60° , D. 61° .



5. Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.

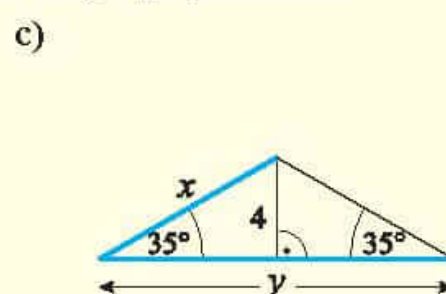
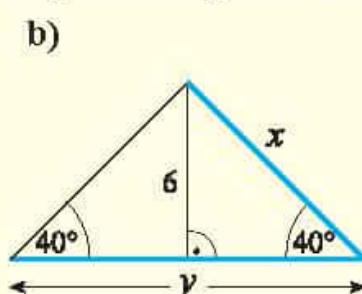
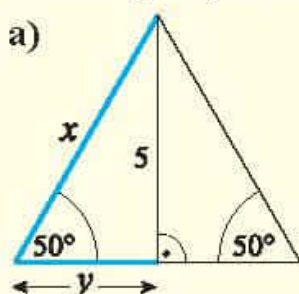
$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$.	P	F
Spośród liczb $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ$ największą liczbą jest $\operatorname{tg} 30^\circ$.	P	F

6. Czy prawdą jest, że
D jeżeli $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, to $\operatorname{tg} \alpha = 2$?

Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród oznaczonych literami A, B i C.

T	Tak,	ponieważ	A.	$\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$.
N	Nie,		B.	$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3}$.
			C.	$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3}$.

7. Uwzględnij dane przedstawione na rysunkach i oblicz długości odcinków x oraz y . Wartości potrzebnych funkcji trygonometrycznych odczytaj z kalkulatora lub z tablic matematycznych. Wynik podaj w zaokrągleniu do dwóch miejsc po przecinku.

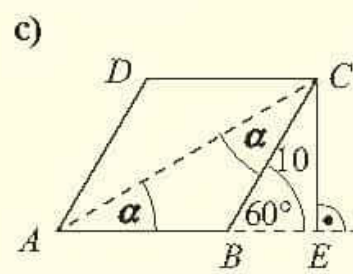
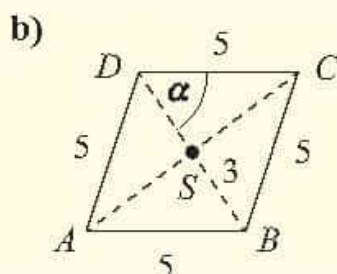
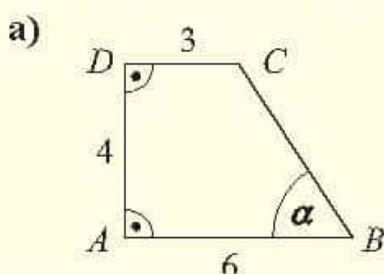


8. Wykaż, że równość $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1$ jest spełniona dla każdego kąta ostrego α .
D

9. Wiedząc, że jeśli α jest kątem ostrym i:

- a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$,
b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$.

10. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz tangens kąta α .



11. Funkcja liniowa i jej własności

Wzór i wykres funkcji liniowej

Definicja

Funkcję f zmiennej x określoną wzorem $f(x) = ax + b$, gdy $x \in \mathbb{R}$ oraz a i b są liczbami rzeczywistymi, nazywamy funkcją liniową.

a, b – współczynniki liczbowe funkcji liniowej

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta o równaniu $y = ax + b$.

Jeżeli:

- $f(x) = -3x + 4$, to $a = -3$ i $b = 4$,
- $f(x) = 12$, to $a = 0$ i $b = 12$,
- $f(x) = -x$, to $a = -1$ i $b = 0$,
- $f(x) = 0$, to $a = 0$ i $b = 0$.

Ćwiczenie 1. Spośród funkcji określonych wzorami:

$$f(x) = 5x + 3, \quad f(x) = \sqrt{2}x - 1, \quad f(x) = 7x^2, \quad f(x) = -x + 1, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = 2$$

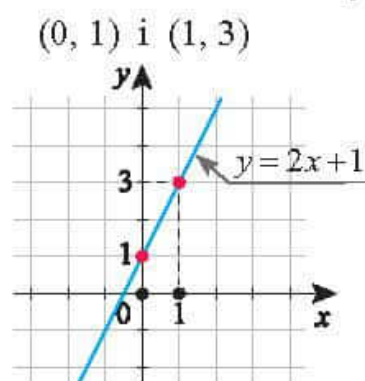
wybierz te, które są funkcjami liniowymi i podaj wartości ich współczynników liczbowych.

Przykład 1. Sporządź wykres funkcji liniowej f i odczytaj z wykresu jej zbiór wartości, gdy: a) $f(x) = 2x + 1$, b) $f(x) = -3x$, c) $f(x) = -2$.

Rozwiązanie Aby narysować wykres funkcji liniowej (prostą), wystarczy znać współrzędne dwóch różnych punktów, przez które ona przechodzi.

a)

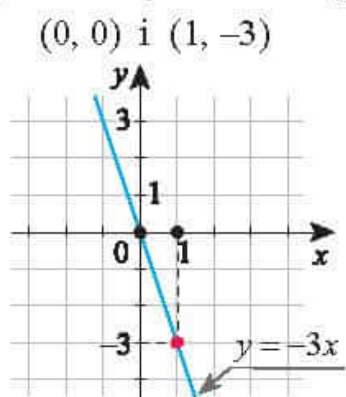
x	0	1
$y = 2x + 1$	1	3



zbiór $\mathbb{R}$,
czyli $Y_f = (-\infty; +\infty)$.

b)

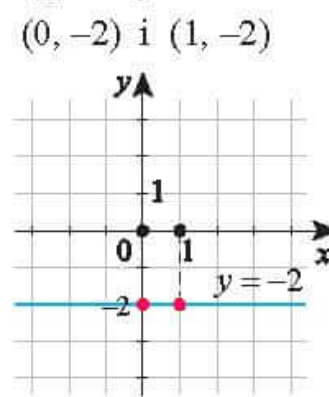
x	0	1
$y = -3x$	0	-3



zbiór $\mathbb{R}$,
czyli $Y_f = (-\infty; +\infty)$.

c)

x	0	1
$y = -2$	-2	-2



zbiór jednoelementowy,
czyli $Y_f = \{-2\}$.

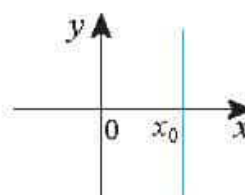
Zbiorem wartości funkcji f jest:

Uwaga

- Dziedziną każdej funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, czyli $D_f = \mathbf{R}$.
- Zbiorem wartości funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest:
 - zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, gdy $a \neq 0$, czyli $Y_f = \mathbf{R}$,
 - zbiór jednoelementowy, gdy $a = 0$, więc $Y_f = \{b\}$.

Ćwiczenie 2. Napisz wzór funkcji liniowej postaci $f(x) = ax + b$ i sporządź jej wykres, gdy: a) $a = -3$ i $b = 2$, b) $a = -\frac{1}{2}$ i $b = 0$, c) $a = 0$ i $b = 3$.

Ćwiczenie 3. Uzasadnij, że prosta prostopadła do osi x nie jest wykresem żadnej funkcji.



Ćwiczenie 4. Liczbie rzeczywistej x przyporządkowano liczbę y , która jest połową liczby x powiększoną o 2.

- Napisz wzór funkcji liniowej określającej to przyporządkowanie.
- Sporządź wykres tej funkcji.

Przykład 2. Sprawdź, czy do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = x + 2$ należy punkt o współrzędnych:

- $(0, 0)$, b) $(-1, 1)$, c) $(100, 102)$.

Rozwiązanie Punkt (x_0, y_0) należy do wykresu funkcji f , gdy $f(x_0) = y_0$.

a) $f(0) = 0 + 2 = 2$ i $f(0) \neq 0$,

$$x_0 = 0, y_0 = 0 \text{ i } f(x_0) \neq y_0$$

b) $f(-1) = -1 + 2 = 1$ i $f(-1) = 1$,

$$x_0 = -1, y_0 = 1 \text{ i } f(x_0) = y_0$$

c) $f(100) = 100 + 2 = 102$ i $f(100) = 102$.

$$x_0 = 100, y_0 = 102 \text{ i } f(x_0) = y_0$$

Odp.: Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych $(-1, 1)$ i $(100, 102)$.

Ćwiczenie 5. Sprawdź, które spośród punktów: $(-8, 45)$, $(-1, 8)$, $(307, 619)$, $(-3215, 6435)$ należą do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = -2x + 5$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. $f(x) = 5x + 3$, $f(x) = \sqrt{2}x - 1$, $f(x) = -x + 1$, $f(x) = 2$. 2. a) $f(x) = -3x + 2$, b) $f(x) = -\frac{1}{2}x$, c) $f(x) = 3$, prosta przechodzi przez punkty, np.: a) $(0, 2)$, $(1, -1)$, b) $(0, 0)$, $(-2, 1)$, c) $(0, 3)$, $(1, 3)$.

3. **Wskazówka.** Zauważ, że na prostej leżą punkty o tej samej odciętej i różnych rzędnych. Takie przyporządkowanie nie jest funkcją. 4. a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$. 5. Do wykresu funkcji f należy punkt $(-3215, 6435)$.

Zadania utrwalające

11.1. Sporządź wykres funkcji liniowej f określonej wzorem:

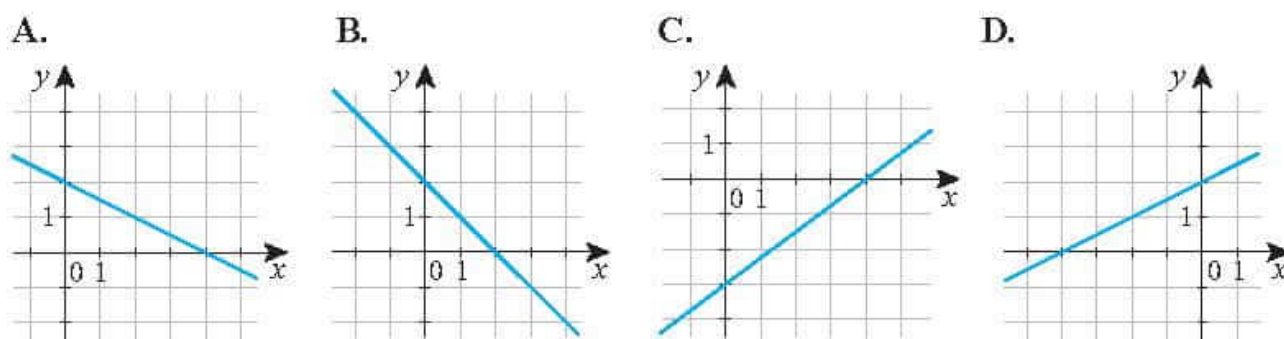
- a) $f(x) = -x + 3$, b) $f(x) = 3x - 1$, c) $f(x) = 4x + 2$,
 d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, e) $f(x) = -x$, f) $f(x) = 1$.

11.2. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku:



11.3. Sprawdź, czy do wykresu funkcji liniowej f należą punkty A i B , gdy:

- a) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 20$, $A = (80, 0)$, $B = (0, -80)$,
 b) $f(x) = \sqrt{2}x + 1$, $A = (-2\sqrt{2}, -3)$, $B = (\sqrt{18}, 7)$,
 c) $f(x) = 0,01x - 0,4$, $A = (100, 96)$, $B = (100, 0,6)$.

11.4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 50$ należy punkt:

- A. $(-100, 0)$, B. $(0, 100)$, C. $(100, 0)$, D. $(50, 200)$.

11.5. Uzasadnij, że do wykresu funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = x - m$, gdzie $m \neq 0$, należy punkt o współrzędnych $(m, 0)$ i $(2m, m)$.

11.6. Sporządź wykres funkcji $g(x) = f(f(x))$, gdy:

- a) $f(x) = x - 2$, b) $f(x) = -2x$, c) $f(x) = 2$.

11.7. Uzasadnij, że funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = ax + b$, gdy $a \neq 0$, jest funkcją różnowartościową.

11.8. Wśród pięciu wartości funkcji liniowej, podanych w tabeli, dwie są błędne. Wskaż je.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	-2	5	2	7

b)

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-2	-1	3	4

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	6	4	5	0	1

11.9. Do wykresu funkcji liniowej f należy początek układu współrzędnych oraz punkt M . Narysuj wykres funkcji f , gdy:

a) $M = (1, -1)$,

b) $M = (-3, 2)$,

c) $M = (k, k)$,

d) $M = (m, 2m)$,

e) $M = (m, -2m)$.

Interpretacja współczynników liczbowych we wzorze funkcji liniowej

Jeśli funkcja liniowa ma wzór $f(x) = ax + b$, to dla argumentu $x = 0$ mamy $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, czyli punkt o współrzędnych $(0, b)$ leży na prostej, która jest wykresem tej funkcji.

Przykład 3. W jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji f , gdy:

1 $f(x) = x + 2$, **2** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, **3** $f(x) = -2x + 2$, **4** $f(x) = 2$.

Napisz równania prostych, które są wykresami tych funkcji f .

Rozwiązanie Sporządzamy tabele wartości funkcji:

1

x	0	1
$y = x + 2$	2	3

2

x	0	1
$y = \frac{1}{2}x + 2$	2	$2\frac{1}{2}$

3

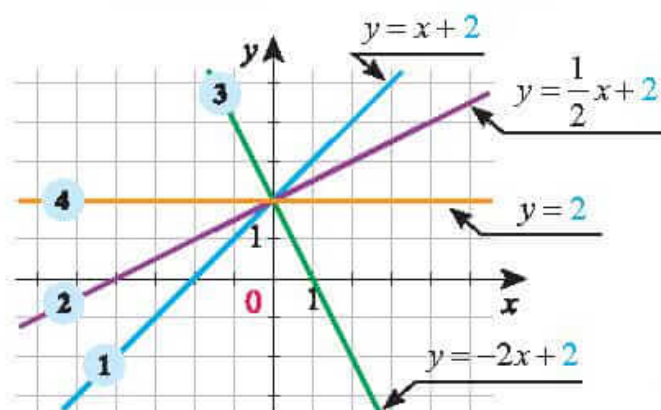
x	0	1
$y = -2x + 2$	2	0

4

x	0	1
$y = 2$	2	2

Zauważamy, że

- wykres każdej funkcji przechodzi przez punkt $(0, 2)$,
- wzory **1**, **2**, **3**, **4** różnią się wartością współczynnika a przy argumentie x .

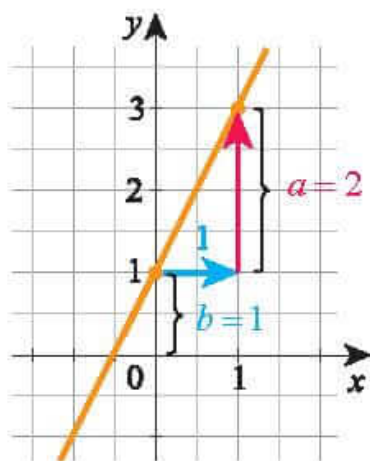


Uwaga

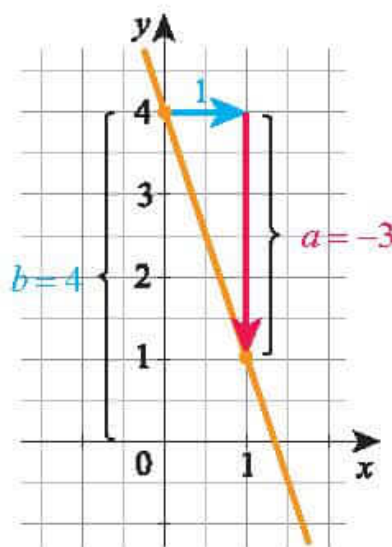
- Wykres funkcji liniowej, określonej wzorem $f(x) = ax + b$, przechodzi przez punkt $(0, b)$.
- Współczynnik b to **wartość funkcji dla argumentu zero**.
W praktyce może to odpowiadać kapitałowi początkowemu, temperaturze na poziomie 0 m n.p.m., zapłacie za pierwszy kilometr jazdy taksówką itp.
- Współczynnik a we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ określa **tempo zmiany** wartości tej funkcji. Dokładniej jest to **wielkość zmiany wartości funkcji odpowiadająca zwiększeniu argumentu x o jedną jednostkę**.

Na przykład, gdy:

$y = 2x + 1$, to $a = 2$ i $b = 1$, co oznacza, że jeżeli argument x zwiększymy o 1 (np. z 0 na 1), to wartość funkcji wzrośnie o 2 (z 1 na 3). Zatem funkcja jest rosnąca.



$y = -3x + 4$, to $a = -3$ i $b = 4$, co oznacza, że jeżeli argument x zwiększymy o 1 (np. z 0 na 1), to wartość funkcji zmaleje o 3 (z 4 na 1). Zatem funkcja jest malejąca.

**Uwaga**

- Jeżeli w funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ zwiększamy wartość argumentu x o jeden, to wartość funkcji zmienia się o wartość współczynnika a .
- Wykres każdej funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ przechodzi przez punkty $(0, b)$ i $(1, a + b)$.

Ćwiczenie 6. Dla funkcji $y = f(x)$ określonej wzorem postaci $f(x) = ax + b$ podaj współrzędne punktów $(0, b)$ i $(1, a + b)$:

- a) $f(x) = 4x - 2$, b) $f(x) = -2x - 3$, c) $f(x) = -x + 5$, d) $f(x) = 5x + 2$.

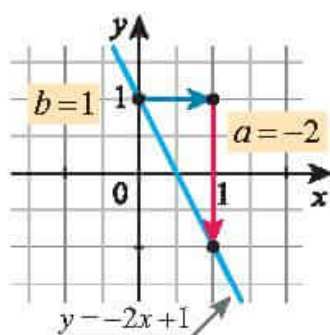
Przykład 4. Skorzystaj z wartości współczynników liczbowych i sporządź wykres funkcji liniowej f określonej wzorem:

a) $f(x) = -2x + 1$, b) $f(x) = 3x$, c) $f(x) = 2$.

Rozwiązanie Wzory funkcji podane są w postaci $f(x) = ax + b$.

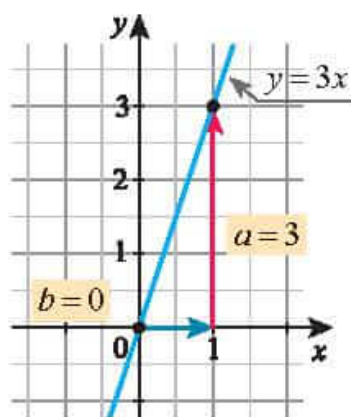
a) $f(x) = -2x + 1$, więc
 $a = -2$ i $b = 1$.

x	0	1
$y = -2x + 1$	$\underbrace{1}_b$	$\underbrace{-1}_{a+b}$



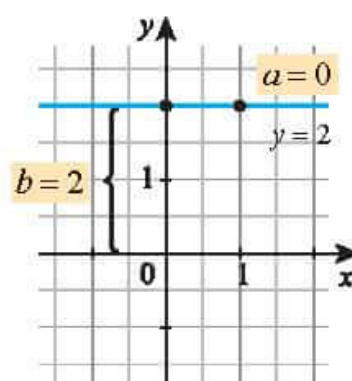
b) $f(x) = 3x$, więc
 $a = 3$ i $b = 0$.

x	0	1
$y = 3x$	$\underbrace{0}_b$	$\underbrace{3}_{a+b}$



c) $f(x) = 2$, więc
 $a = 0$ i $b = 2$.

x	0	1
$y = 2$	$\underbrace{2}_b$	$\underbrace{2}_{a+b}$



Ćwiczenie 7. Skorzystaj z interpretacji współczynników liczbowych i sporządź wykres funkcji liniowej f określonej wzorem:

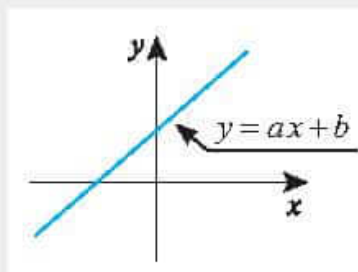
a) $f(x) = 2x + 3$, b) $f(x) = -3x + 2$, c) $f(x) = -1$, d) $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$.

Współczynnik a we wzorze $f(x) = ax + b$ funkcji liniowej decyduje o tym, czy funkcja ta jest rosnąca, malejąca czy stała.

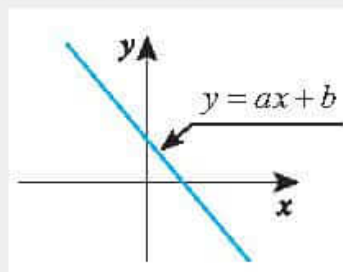
Uwaga

Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$ jest:

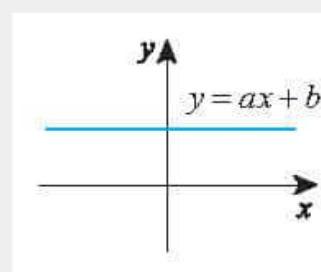
a) rosnąca, gdy $a > 0$,



b) malejąca, gdy $a < 0$,



c) stała, gdy $a = 0$.



Ćwiczenie 8. Określ, czy funkcja określona wzorem:

a) $f(x) = -x$, b) $f(x) = 2 - 3x$, c) $f(x) = 8x + 3$, d) $f(x) = 170$

jest rosnąca, malejąca czy stała.

Przykład 5. Dla jakich liczb rzeczywistych m funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (m+1)x - 2$ jest:

a) rosnąca, b) malejąca, c) stała?

Rozwiązanie $f(x) = (m+1)x - 2$, więc $a = m+1$.

a) $m+1 > 0$, skąd $m > -1$,

Funkcja liniowa jest rosnąca, gdy $a > 0$.

b) $m+1 < 0$, skąd $m < -1$,

Funkcja liniowa jest malejąca, gdy $a < 0$.

c) $m+1 = 0$, skąd $m = -1$.

Funkcja liniowa jest stała, gdy $a = 0$.

Odp.: Funkcja jest rosnąca, gdy $m > -1$, malejąca, gdy $m < -1$, stała, gdy $m = -1$.

Ćwiczenie 9. Dla jakich liczb rzeczywistych m funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = (2 - 4m)x + 7$ jest:

a) rosnąca, b) malejąca, c) stała?

Przykład 6. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej f . Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór funkcji f w postaci $f(x) = ax + b$.

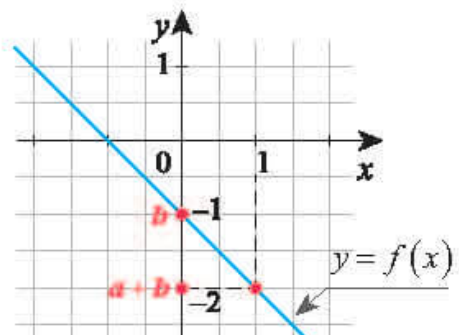
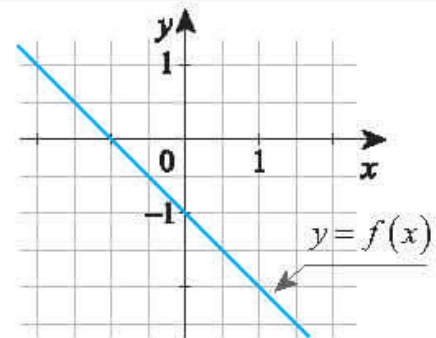
Rozwiązanie

Zauważamy, że

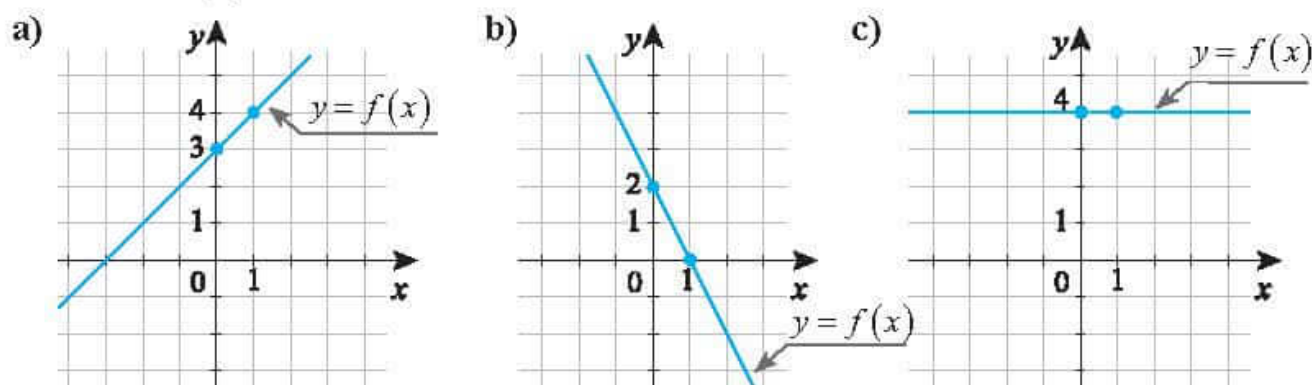
$$f(0) = -1 \text{ i } f(1) = -2, \text{ więc}$$

$$\begin{cases} b = -1 \\ a + b = -2 \end{cases}, \text{ skąd } a = -1.$$

Odp.: $f(x) = -x - 1$.



Ćwiczenie 10. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór funkcji liniowej f w postaci $f(x) = ax + b$.



Odpowiedzi do ćwiczeń

6. a) $(0, -2)$ i $(1, 2)$, b) $(0, -3)$ i $(1, -5)$, c) $(0, 5)$ i $(1, 4)$, d) $(0, 2)$ i $(1, 7)$.

8. Funkcja rosnąca: c), malejąca: a) i b), stała: d). 9. a) $m < \frac{1}{2}$, b) $m > \frac{1}{2}$, c) $m = \frac{1}{2}$.

10. a) $y = x + 3$, b) $y = -2x + 2$, c) $y = 4$.

Zadania utrwalające

11.10. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Jeżeli funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -3x - 1$, to do jej wykresu należy punkt $(-1, 0)$.

P

F

Gdy argument funkcji określonej wzorem $f(x) = 8x + 2$ wzrośnie o 1, to wartość funkcji wzrośnie o 8.

P

F

11.11. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem:

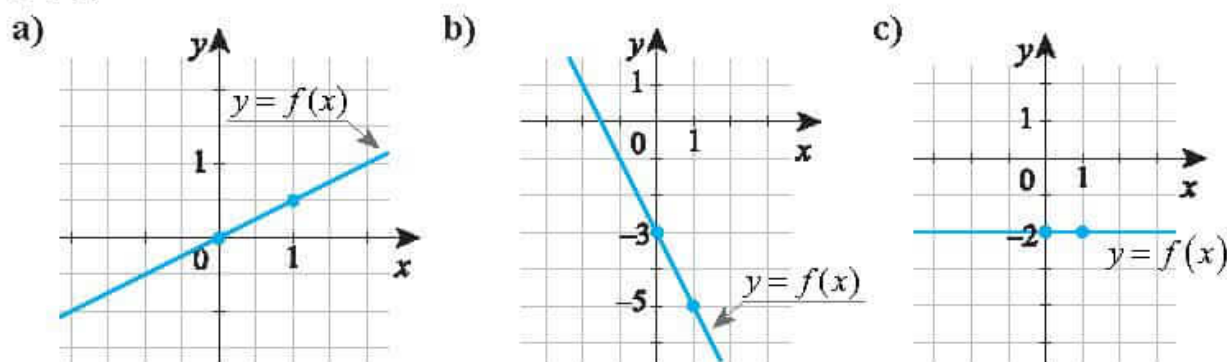
a) $f(x) = -3x + 6$, b) $f(x) = -2x - 2$, c) $f(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$, d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$.

11.12. Określ, czy funkcja f jest rosnąca, malejąca czy stała, gdy:

a) $f(x) = 3x - 1$, b) $f(x) = 5 - 2x$, c) $f(x) = x - 20$, d) $f(x) = -\sqrt{2}$.

11.13. Podaj trzy przykłady wzorów funkcji liniowych, których wykresy przecinają się w punkcie $(0, -2)$ i naskicuj te wykresy.

11.14. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór funkcji liniowej f w postaci $f(x) = ax + b$.



11.15. Spośród wzorów funkcji liniowych, ponumerowanych od **1** do **6**, wybierz te, których wykresy przecinają się w tym samym punkcie leżącym na osi y i podaj jego współrzędne.

1 $f(x) = -x + 3$,

2 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$,

3 $f(x) = 2x + 3$,

4 $f(x) = 3$,

5 $f(x) = -1$,

6 $f(x) = -\frac{1}{2}x$.

11.16. Uzasadnij, że jeśli w funkcji liniowej f , określonej wzorem $f(x) = ax + b$, zwiększymy argument x o jeden, to wartość funkcji zmienia się o wielkość współczynnika a .

11.17. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 0,2x + 2m + 2$.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D .

Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 4)$, gdy za m podstawimy liczbę:

A. 4,

B. 1.

Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie leżącym poniżej osi x , gdy za m podstawimy liczbę:

C. -1,

D. -2.

11.18. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Na wykresie funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$ leżą punkty A i B , gdzie $A = (a, 4)$ i $B = (6, b)$. Wynika z tego, że:

A. $a = 0$ i $b = 4$,

B. $a = 0$ i $b = -4$,

C. $a = 0$ i $b = 2$,

D. $a = 0$ i $b = -2$.

11.19. Ustal, dla jakich wartości współczynnika a wykres funkcji liniowej f , określonej wzorem $f(x) = ax + 2$, przechodzi przez ćwiartki układu współrzędnych:

a) I, II i III,

b) I, II i IV,

c) I i II.

11.20. Ustal, dla jakich wartości współczynnika b wykres funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = 2x + b$ przechodzi przez:

- a) początek układu współrzędnych, b) I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych,
c) I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych, d) punkt $A = (3, 5)$.

11.21. Oblicz, dla jakich wartości parametru m , gdzie $m \in \mathbb{R}$, funkcja liniowa f jest:

1 rosnąca, **2** malejąca, **3** stała, gdy:

- a) $f(x) = (4 - 2m)x + 5$, b) $f(x) = |m + 2|x + m$,
c) $f(x) = (|m| - 1)x - 1$, d) $f(x) = (|m| + 3)x + 4m$.

Miejsce zerowe i znak funkcji liniowej

Przypomnijmy

Miejszem zerowym funkcji $y = f(x)$ nazywamy taki argument x_0 , dla którego wartość funkcji f jest równa zero, czyli $f(x_0) = 0$.

Aby obliczyć miejsca zerowe funkcji $y = f(x)$, należy rozwiązać równanie $f(x) = 0$.

Przykład 7. Oblicz miejsce zerowe i narysuj wykres funkcji f określonej wzorem:

- a) $f(x) = 2x - 4$, b) $f(x) = -1$, c) $f(x) = 0$.

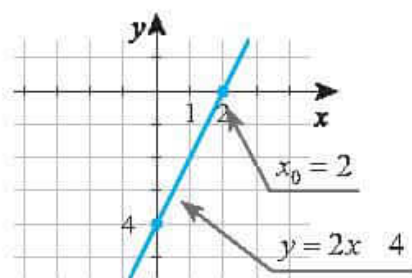
Rozwiązanie

Rozwiązujemy równanie $f(x) = 0$.

- a) $f(x) = 2x - 4$ i $f(x) = 0$, więc

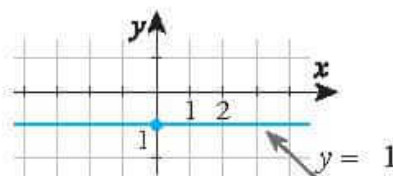
$$2x - 4 = 0,$$

$$x = 2$$



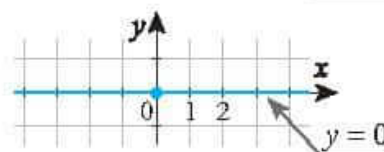
- b) $f(x) = -1$ i $f(x) = 0$, więc

$$-1 = 0 \quad - \text{równanie sprzeczne}$$



- c) $f(x) = 0$ i $f(x) = 0$, więc

$$0 = 0 \quad - \text{równanie tożsamościowe}$$



Odp.: a) $x_0 = 2$, b) funkcja f nie ma miejsc zerowych,

c) funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Ćwiczenie 11. Oblicz miejsce zerowe i narysuj wykres funkcji f określonej wzorem:

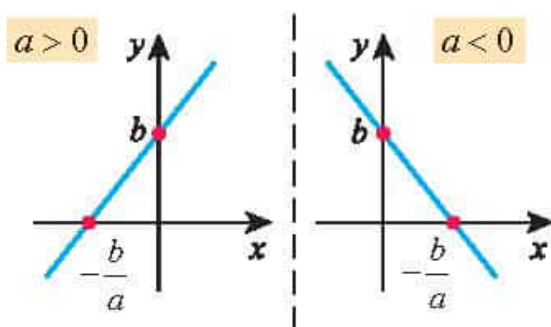
a) $f(x) = -3x - 6$, b) $f(x) = 4$, c) $f(x) = 0$.

Przykład 8. Oblicz miejsce zerowe funkcji określonej wzorem $f(x) = ax + b$.

Rozwiązanie Obliczamy takie x , dla którego $f(x) = 0$. Zatem $ax + b = 0$, skąd $ax = -b$. Aby obliczyć x , należałoby obie strony równania $ax = -b$ podzielić przez a . Ponieważ dzielenie przez 0 jest działaniem niewykonalnym, rozpatrujemy dwa przypadki.

1 $a \neq 0$

$$ax = -b, \text{ skąd } x = -\frac{b}{a}$$



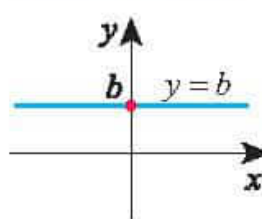
Liczba $-\frac{b}{a}$ jest miejscem zerowym funkcji liniowej (wykres ma z osią x jeden punkt wspólny).

2 $a = 0$

$$y = 0 \cdot x + b, \text{ skąd } y = b$$

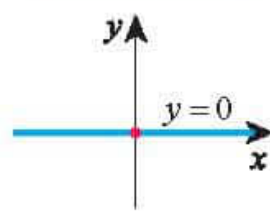
Możliwe są dwie sytuacje:

$a = 0$ i $b \neq 0$



Funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych (wykres nie ma z osią x punktów wspólnych).

$a = 0$ i $b = 0$



Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym funkcji liniowej (wykres pokrywa się z osią x).

Uwaga

Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$:

- ma jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{a}$, gdy $a \neq 0$,
- nie ma miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$,
- ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b = 0$.

Ćwiczenie 12. Oblicz miejsce zerowe funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = 0,25x + 3$,

b) $f(x) = -x + 2$,

c) $f(x) = -2$,

d) $f(x) = 4x$,

e) $f(x) = 1 - 4x$,

f) $f(x) = (\sqrt{3} - 1)x + 2$.



Ćwiczenie 13. Spośród podanych wzorów funkcji liniowych oznaczonych cyframi od **1** do **5**:

1 $f(x) = 2x - 1$, **2** $f(x) = -1$, **3** $f(x) = 0$, **4** $f(x) = 8 - 5x$, **5** $f(x) = \frac{3}{4} - 2x$

wskaż te, które:

- a) mają jedno miejsce zerowe, b) nie mają miejsc zerowych,
c) mają nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Określić znak funkcji f , to znaczy odpowiedzieć na pytanie, dla jakich argumentów x wartości funkcji są dodatnie ($f(x) > 0$), a dla jakich ujemne ($f(x) < 0$)?

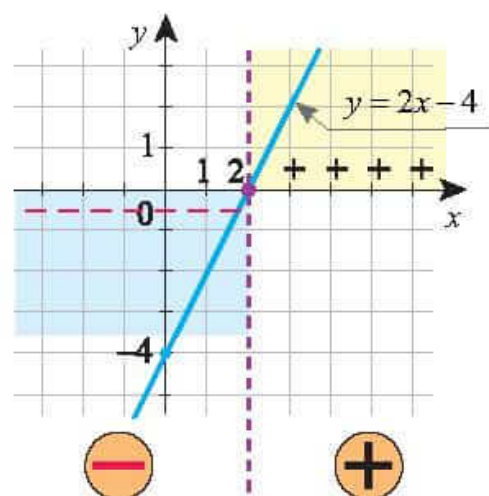
Przykład 9. Oblicz, dla jakich argumentów x wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x - 4$ są: a) dodatnie, b) ujemne, c) równe zero.

Rozwiązanie

a) $f(x) > 0$, gdy $2x - 4 > 0$
 $2x > 4$
 $x > 2$,

b) $f(x) < 0$, gdy $2x - 4 < 0$
 $2x < 4$
 $x < 2$,

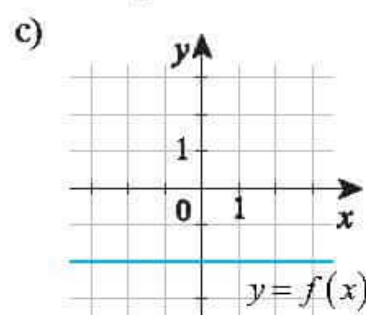
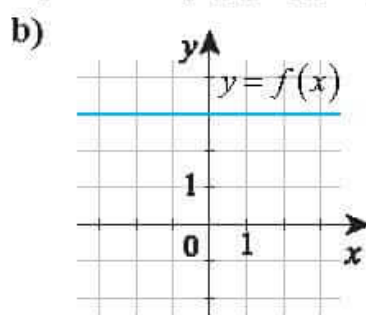
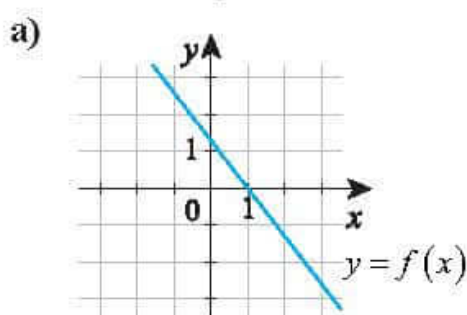
c) $f(x) = 0$, gdy $2x - 4 = 0$
 $2x = 4$
 $x = 2$.



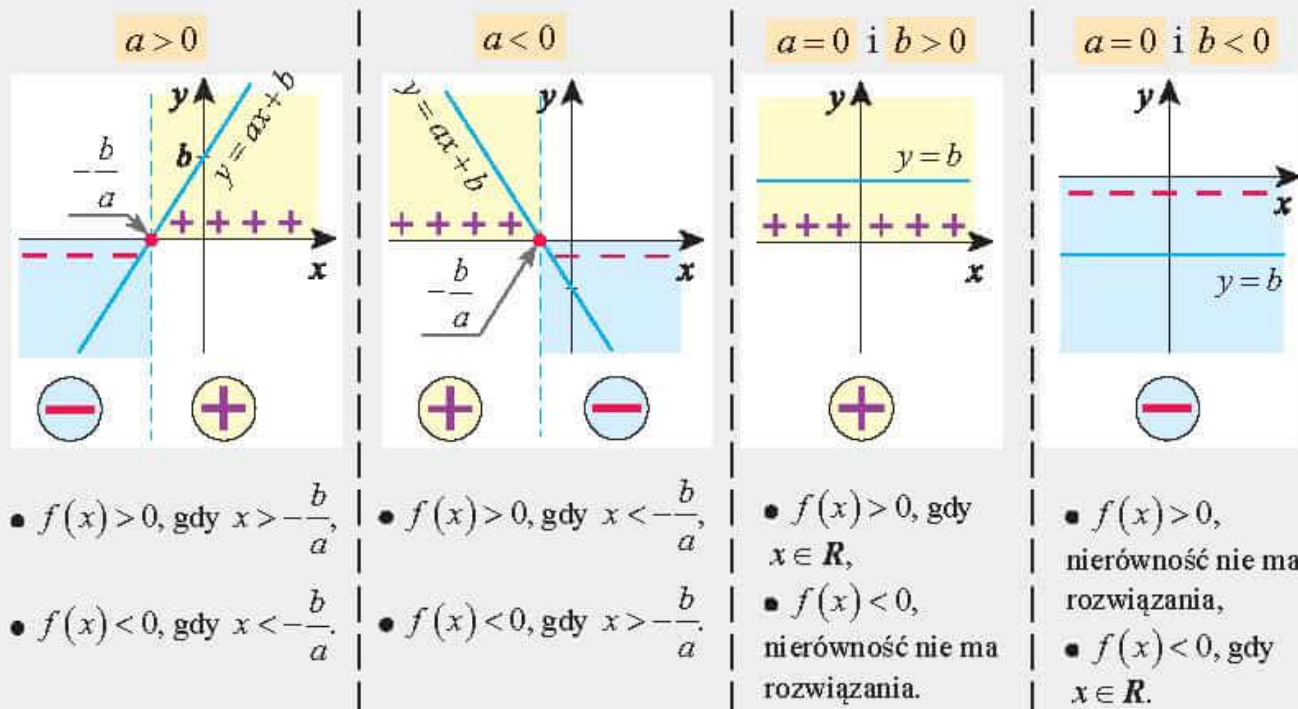
Odp.: a) $x \in (2; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; 2)$, c) $x = 2$.

Ćwiczenie 14. Oblicz, dla jakich argumentów x wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = -x + 2$ są: a) dodatnie, b) ujemne, c) równe zero.

Ćwiczenie 15. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej f . Odczytaj z wykresu te wartości argumentów x , dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.



Uwaga. Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = ax + b$.



Przykład 10. W tabeli podano wartości funkcji liniowej f dla dwóch argumentów. Nie sporządzając wykresu funkcji f , określ, dla jakich wartości argumentów x funkcja f przyjmuje wartości: a) ujemne, b) dodatnie.

x	0	2
$y - f(x)$	7	0

Rozwiązanie Z tabeli odczytujemy, że miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2 i że funkcja f jest malejąca (argument x rośnie, a wartość y funkcji maleje). Zatem:

a) $f(x) < 0$, gdy $x > 2$,

b) $f(x) > 0$, gdy $x < 2$.

Ćwiczenie 16. W tabeli podano wartości funkcji liniowej f dla dwóch argumentów. Nie sporządzając wykresu funkcji f , określ, dla jakich wartości argumentów x funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

a)

x	0	3
$y - f(x)$	3	0

b)

x	0	2
$y - f(x)$	-1	0

c)

x	0	2
$y - f(x)$	-4	-4

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) -2, b) brak, c) nieskończenie wiele. 12. a) -12, b) 2, c) brak, d) 0, e) $\frac{1}{4}$, f) $-\sqrt{3}-1$.

13. a) 1, 4 i 5, b) 2, c) 3. 14. a) $x < 2$, b) $x > 2$, c) $x = 2$.

15. a) $x > 1$, b) nie ma takich x , c) $x \in \mathbb{R}$. 16. a) $x < 3$, b) $x > 2$, c) nie ma takiego x .

Zadania utrwalające

11.22. Oblicz miejsca zerowe funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = 4 - x,$

b) $f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{2},$

c) $f(x) = 0,01x + 100,$

d) $f(x) = \pi x - \pi,$

e) $f(x) = x \cdot \log_2 5 - \log_2 125,$

f) $f(x) = (\log_2 5 \cdot \log_5 2)x + 5.$

11.23. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji f z osią x , gdy:

a) $f(x) = -x - \frac{1}{2},$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1,$

c) $f(x) = 2^{10}x - 2^{13},$

d) $f(x) = \sqrt{28}x - \sqrt{7},$

e) $f(x) = \sqrt[3]{81}x + \sqrt[3]{3},$

f) $f(x) = 0,00032x - 10^{-5}.$

11.24. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Nie ma miejsca zerowego funkcja f określona wzorem:

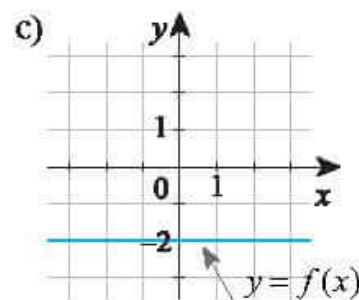
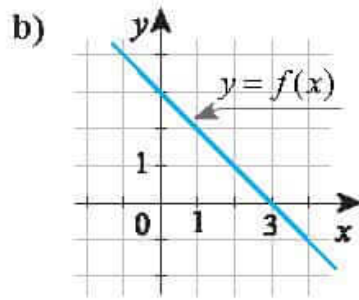
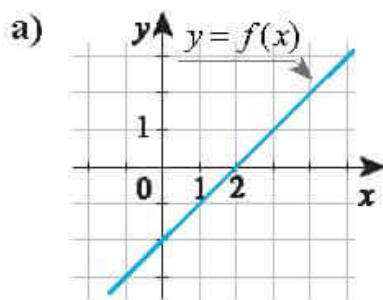
A. $f(x) = 5x - \sqrt{2},$

B. $f(x) = \sqrt{10}x,$

C. $f(x) = x,$

D. $f(x) = -10^2.$

11.25. Odczytaj z wykresu funkcji liniowej f , dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości ujemne.



11.26. Oblicz, dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, gdy:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1,$

b) $f(x) = 3x - 4,$

c) $f(x) = 5x - \frac{1}{2},$

d) $f(x) = 2.$

11.27. Oblicz, dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości ujemne, gdy:

a) $f(x) = 0,2x,$

b) $f(x) = -2\frac{1}{2}x + 1,$

c) $f(x) = 4x - 4,$

d) $f(x) = 5.$

11.28. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{2 - \sqrt{2}x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}.$

D

Uzasadnij, że $f(x) > 0$, gdy $x < 2\sqrt{2}.$

11.29. W tabeli podano wartości funkcji liniowej dla dwóch argumentów. Nie sporządzając wykresu funkcji f , określ, dla jakich wartości argumentów x funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

a)

x	0	2
$y - f(x)$	2	0

b)

x	0	4
$y - f(x)$	-1	0

c)

x	-2	0
$y - f(x)$	0	-3

11.30. Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$.

 *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Wykres funkcji f przecina oś x w punkcie P , gdy:

A. $P = (0, 4)$, B. $P = (8, 0)$.

Funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie dla argumentu x z przedziału:

C. $[8; +\infty)$, D. $(-\infty; 8]$.

11.31. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

 Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przechodzi przez I, II i IV ćwiartkę układu współrzędnych, gdy:

A. $a > 0$ i $b > 0$, B. $a > 0$ i $b < 0$,
C. $a < 0$ i $b > 0$, D. $a < 0$ i $b < 0$.

11.32. Oblicz te wartości parametru k , gdzie $k \in \mathbb{R}$, dla których miejscem zerowym funkcji $f(x) = -3x + k$ jest liczba większa od 2.

11.33. Funkcja liniowa f określona wzorem postaci $f(x) = ax + b$ jest malejąca i jej miejscem zerowym jest liczba ujemna. Uzasadnij, że $a + b < 0$.

11.34. Określ, dla jakich wartości parametru m funkcja liniowa f przyjmuje wartości nieujemne, gdy:

a) $f(x) = 3x - 2m - 1$, b) $f(x) = -x + |m - 2|$,
c) $f(x) = -2x - 4|m + 2| + 8$, d) $f(x) = \sqrt{2}x + 2|m - \sqrt{2}|$.

11.35. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = mx + 3$. Wykres funkcji f przecina oś rzędnych w takim punkcie A i oś odciętych w takim punkcie B , że $|BO| = 3|OA|$, gdzie O oznacza początek układu współrzędnych. Oblicz m .

Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej

Aby napisać wzór funkcji liniowej w postaci $f(x) = ax + b$, wystarczy znać współczynniki a i b . Jeżeli jeden ze współczynników jest znany, to potrzebna jest informacja, która pozwoli obliczyć drugi współczynnik.

Przykład 11. Miejscem zerowym funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = 2x + b$ jest liczba 6. Oblicz b i napisz wzór tej funkcji.

Rozwiązanie $f(x) = 2x + b$, więc $a = 2$. Obliczamy współczynnik b .

I sposób

Korzystamy z definicji miejsca zerowego.

$$x_0 = 6, \text{ więc } f(6) = 0,$$

$$2 \cdot 6 + b = 0, \text{ skąd } b = -12.$$

$$\text{Odp.: } f(x) = 2x - 12.$$

II sposób

Korzystamy z wzoru na miejsce zerowe.

$$x_0 = 6 \text{ i } x_0 = -\frac{b}{a}, \text{ więc}$$

$$-\frac{b}{2} = 6, \text{ skąd } b = -12.$$

Ćwiczenie 17. Miejscem zerowym funkcji liniowej f jest liczba x_0 . Napisz jej wzór, gdy:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + b$ i $x_0 = 4$, b) $f(x) = -x + b$ i $x_0 = -1$.

Przykład 12. Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = ax - 3$. Oblicz współczynnik a i podaj wzór funkcji f , jeśli jej wykres przechodzi przez punkt $P = (-2, 5)$.

Rozwiązanie $f(x) = ax - 3$, więc $b = -3$. Obliczamy współczynnik a .

Punkt $P = (-2, 5)$ leży na wykresie funkcji f , więc $f(-2) = 5$,

$$\text{czyli } 5 = a \cdot (-2) - 3, \text{ skąd } a = -4.$$

$$\text{Odp.: } f(x) = -4x - 3.$$

Ćwiczenie 18. Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = ax + 7$. Oblicz współczynnik a i podaj wzór funkcji f , jeśli jej wykres przechodzi przez punkt $A = (-3, 10)$.

Jeśli we wzorze $f(x) = ax + b$ funkcji liniowej oba współczynniki a i b nie są dane, to potrzebne są dwie informacje, które pozwolą je obliczyć. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 13. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x) = ax + b$, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkty $A = (3, 0)$ i $B = (-1, 8)$.

Rozwiązanie Punkty $A = (3, 0)$ i $B = (-1, 8)$ leżą na wykresie funkcji f ,

$$\text{więc } \begin{cases} 0 = 3a + b \\ 8 = -1 \cdot a + b \end{cases}, \quad \text{skąd } \begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \end{cases}. \quad \begin{cases} f(3) = 0 \\ f(-1) = 8 \end{cases}$$

Odp.: $f(x) = -2x + 6$.

Ćwiczenie 19. Napisz wzór funkcji liniowej, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty A i B takie, że:

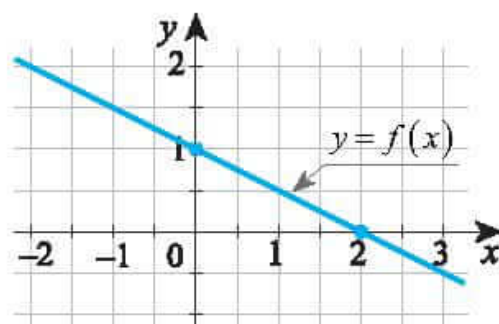
a) $A = (1, -1)$ i $B = (4, 2)$, b) $A = (-2, 8)$ i $B = (1, 2)$, c) $A = (2, 0)$ i $B = (0, -2)$.

Ćwiczenie 20. Na rysunku podany jest wykres funkcji liniowej.

a) Odczytaj z wykresu współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji z osią odciętych i osią rzędnych.

b) Napisz wzór tej funkcji.

c) Podaj argument x , dla którego wartość funkcji f jest równa -1 .



Przykład 14. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x) = ax + b$, wiedząc, że przyjmuje ona wartości ujemne tylko, gdy $x > -3$, i jej wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, -9)$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że:

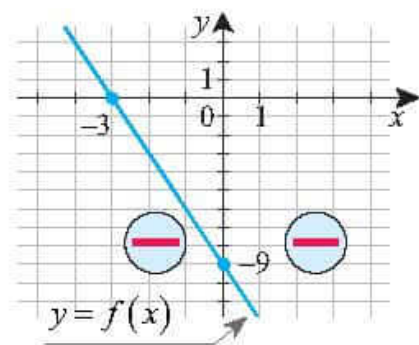
- miejscem zerowym x_0 funkcji f jest liczba -3 (bo $f(x) < 0$ tylko, gdy $x > -3$),
- $b = -9$ (bo wykres przechodzi przez punkt $(0, -9)$).

Zatem $-\frac{b}{a} = -3$ i $b = -9$, więc

$$x_0 = \frac{b}{a}$$

$$-\frac{-9}{a} = -3, \quad \text{skąd } a = -3.$$

Odp.: $f(x) = -3x - 9$.



Ćwiczenie 21. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x) = ax + b$, wiedząc, że:

- a) przyjmuje ona wartości dodatnie tylko, gdy $x > -1$ oraz jej wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 4)$,
 b) przyjmuje ona tylko wartości dodatnie i do jej wykresu należy punkt $(-45, 100)$.

Przykład 15. Napisz wzór funkcji liniowej f w postaci $f(x) = ax + b$,
 gdy $f(2x-1) = 4x+1$.

Rozwiązanie

Jeśli $f(x) = ax + b$, to $f(2x-1) = a(2x-1) + b$ i $f(2x-1) = 4x+1$, więc

$$\begin{cases} f(2x-1) = a \cdot 2x + b - a \\ f(2x-1) = 4x + 1 \end{cases}, \text{ skąd}$$

Funkcje $f(2x-1) = a(2x-1) + b$ i $f(2x-1) = 4x+1$ są równe, więc mają równe współczynniki.

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ b - a = 1 \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Zatem $f(x) = 2x + 3$.

Ćwiczenie 22. Napisz wzór funkcji liniowej f w postaci $f(x) = ax + b$,
 gdy $f(4x-3) = 20x-13$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

17. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, b) $f(x) = -x - 1$. 18. $f(x) = -x + 7$. 19. a) $f(x) = x - 2$, b) $f(x) = -2x + 4$, c) $f(x) = x - 2$.
 20. a) $(2, 0)$ i $(0, 1)$, b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$, c) 4. 21. a) $f(x) = 4x + 4$, b) $f(x) = 100$. 22. $f(x) = 5x + 2$.

Zadania utrwalające

11.36. Miejscem zerowym funkcji liniowej f jest liczba x_0 . Oblicz współczynnik b , gdy:

- a) $f(x) = -3x + b$ i $x_0 = -1$, b) $f(x) = 5x + b$ i $x_0 = 0$,
 c) $f(x) = \sqrt{2}x + b$ i $x_0 = 2\sqrt{2}$, d) $f(x) = 2^{10} \cdot x + b$ i $x_0 = \frac{1}{32}$.

11.37. Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = ax + 3$ przechodzi przez punkt $A = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

- a) Oblicz współczynnik a .
 b) Oblicz współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji f z osią x oraz z osią y .
 c) Podaj, dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

11.38. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.*

Wykres funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x) = ax - 5$ przechodzi przez punkt $(-20, 35)$, gdy $a = -2$.

P

F

Miejszem zerowym funkcji liniowej $f(x) = -4x + b$ jest liczba -2 , gdy $b = 8$.

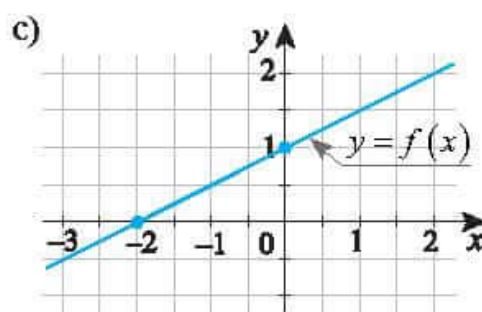
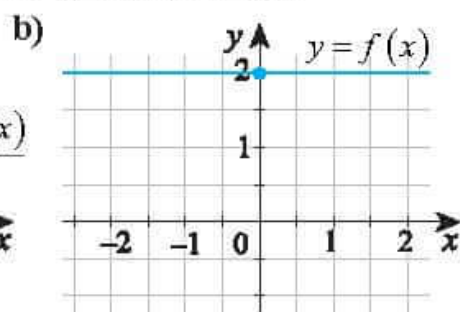
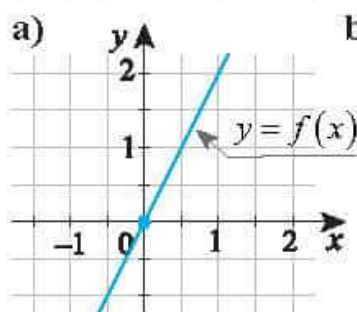
P

F

11.39. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x) = ax + b$, wiedząc, że jej miejscem zerowym jest x_0 i jej wykres przecina oś rzędnych w punkcie o współrzędnych $(0, b)$, gdy:

- a) $x_0 = 2, b = -1$, b) $x_0 = -3, b = 2$, c) $x_0 = \frac{1}{2}, b = -3$.

11.40. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej f . Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.



11.41. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty P i M , gdy:

- a) $P = (4, 2)$ i $M = (3, 0)$, b) $P = (1, -1)$ i $M = (0, -4)$,
c) $P = (-3, -7)$ i $M = (2, 2)$, d) $P = (-4, 0)$ i $B = (0, 4)$.

11.42. W tabeli podano wartości funkcji liniowej f dla dwóch argumentów. Napisz jej wzór.

a)

x	0	1
$y = f(x)$	0	-3

b)

x	0	2
$y = f(x)$	4	0

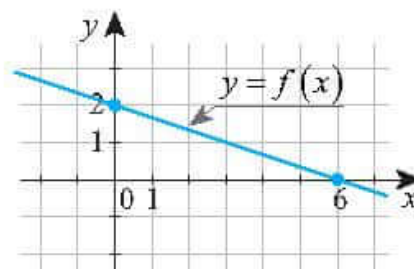
c)

x	-1	1
$y = f(x)$	-188	12

11.43. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej f . *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Funkcja f określona jest wzorem:

- A. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$, B. $f(x) = -3x + 2$,
C. $f(x) = 6x + 2$, D. $f(x) = -6x + 2$.





11.44. Na wykresie funkcji liniowej f , określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$, leżą punkty o współrzędnych $(k, 4)$ i $(6, m)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika z tego, że:

A. $k = 0$ i $m = 4$, B. $k = 0$ i $m = -4$, C. $k = 0$ i $m = 2$, D. $k = 0$ i $m = -2$.

11.45. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x) = ax + b$, wiedząc, że:

- przyjmuje ona wartości dodatnie tylko, gdy $x > 2$ i jej wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, -6)$,
- przyjmuje ona tylko wartości ujemne i do jej wykresu należy punkt $(-2, -5)$.

11.46. Napisz wzór funkcji liniowej f w postaci $f(x) = ax + b$, gdy $f(1) = 2$

i $f(x+1) = f(x-1) + 1$.

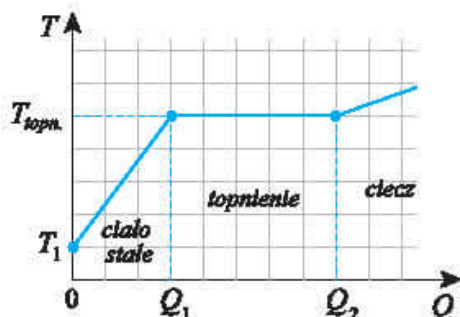
Przykłady funkcji liniowych określonych w różnych przedziałach różnymi wzorami

Dziedziną funkcji liniowej, określonej wzorem $f(x) = ax + b$, jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej wykresem jest prosta.

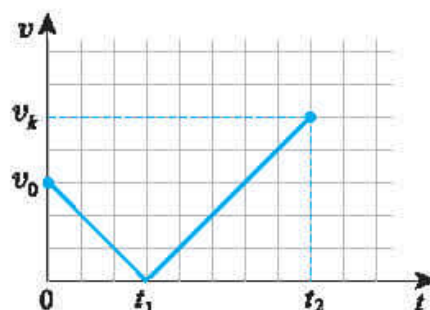
Funkcje opisujące zjawiska z życia codziennego są często w różnych przedziałach określone różnymi wzorami funkcji liniowej, więc ich wykresy mogą składać się z odcinków lub półprostych.

Na przykład:

- Wykres zmiany temperatury T ciała stałego, które pod wpływem dostarczonego ciepła Q ulega topnieniu (przy stałym ciśnieniu).



- Wykres zmiany prędkości v ciała rzuconego pionowo do góry z prędkością początkową v_0 .



W matematyce często posługujemy się funkcjami, które są określone więcej niż jednym wzorem. Wzór takiej funkcji zapisujemy przy użyciu klamry. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 16. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < 0 \\ x, & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$.

Rozwiązanie W jednym układzie współrzędnych rysujemy fragmenty wykresów dwóch funkcji liniowych **1** i **2**.

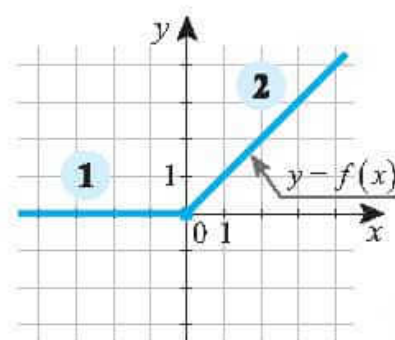
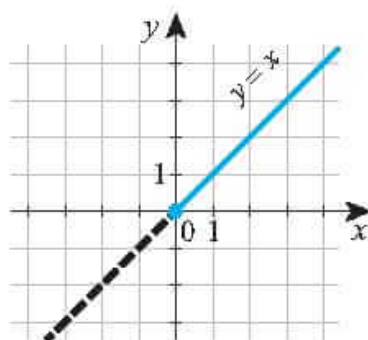
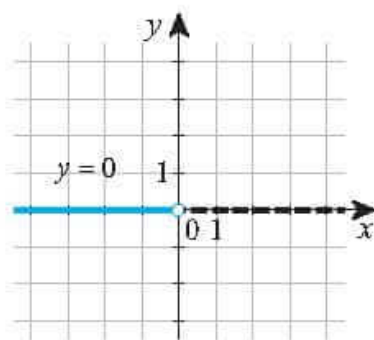
1 $f_1(x) = 0$, gdy $x < 0$.

Wykresem jest półprosta bez początku (na rysunku kolor niebieski).

2 $f_2(x) = x$, gdy $x \geq 0$.

Wykresem jest półprosta (na rysunku kolor niebieski).

Wykres funkcji f jest złączeniem (sumą) wykresów **1** i **2**.



Ćwiczenie 23. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x|$, czyli funkcji $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{gdy } x < 0 \\ x, & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$.

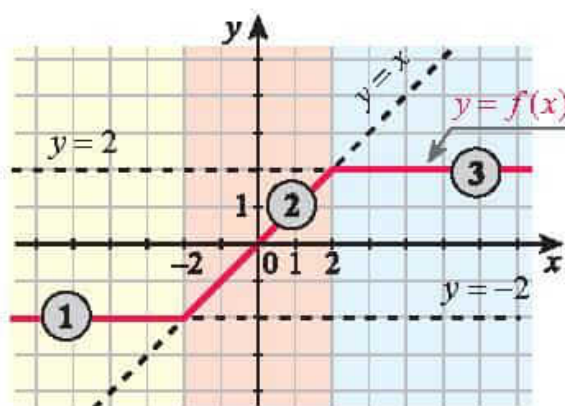
Przykład 17. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{gdy } x \leq -2 \\ x, & \text{gdy } -2 < x \leq 2 \\ 2, & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$$

1
2
3

Rozwiązanie Rysujemy w jednym układzie współrzędnych fragmenty wykresów trzech funkcji liniowych:

- $y = -2$, gdy $x \leq -2$, czyli półprostą **1**,
- $y = x$, gdy $-2 < x \leq 2$, czyli odcinek **2** bez lewego końca,
- $y = 2$, gdy $x > 2$, czyli półprostą **3** bez początku.



Ćwiczenie 24. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{gdy } -5 \leq x \leq 0 \\ 2, & \text{gdy } 0 < x \leq 4 \end{cases}.$$

Przykład 18. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & \text{gdy } x \leq -1 \\ -x, & \text{gdy } -1 < x < 2 \end{cases}$.

Określ: a) dziedzinę D_f funkcji f , b) zbiór wartości Y_f funkcji f .

Rozwiązanie

a) Dziedzinę D_f określamy z wzoru funkcji f . Warunki

$$x \leq -1 \text{ i } -1 < x < 2$$

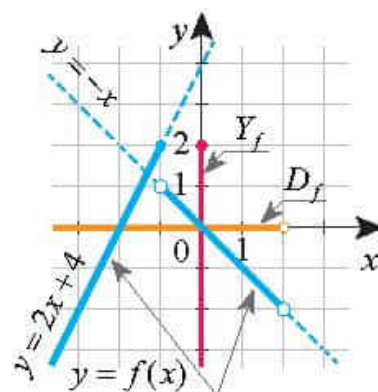
opisują przedziały, których suma jest dziedziną funkcji f .

Zatem $D_f = (-\infty; -1] \cup (-1; 2)$, czyli $D_f = (-\infty; 2)$.

b) Zbiór wartości Y_f funkcji f najlepiej odczytać z jej

wykresu. Zatem $Y_f = (-\infty; 2)$.

Odp.: a) $D_f = (-\infty; 2)$, b) $Y_f = (-\infty; 2)$.



Ćwiczenie 25. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{gdy } -3 < x \leq 0 \\ x+2, & \text{gdy } 0 < x \leq 3 \end{cases}$.

Określ: a) dziedzinę D_f funkcji f , b) zbiór wartości Y_f funkcji f .

Przykład 19. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x-2|$.

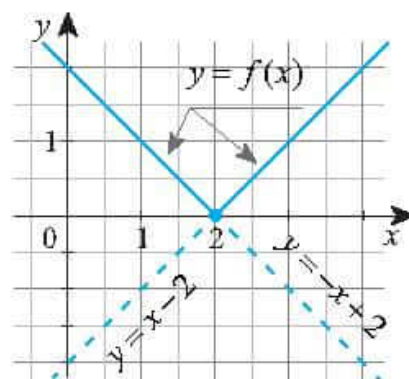
Rozwiązanie

$f(x) = |x-2|$, więc

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{gdy } x < 2 \\ x-2, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}.$$

Sporządzamy w układzie współrzędnych fragmenty wykresów dwóch funkcji liniowych:

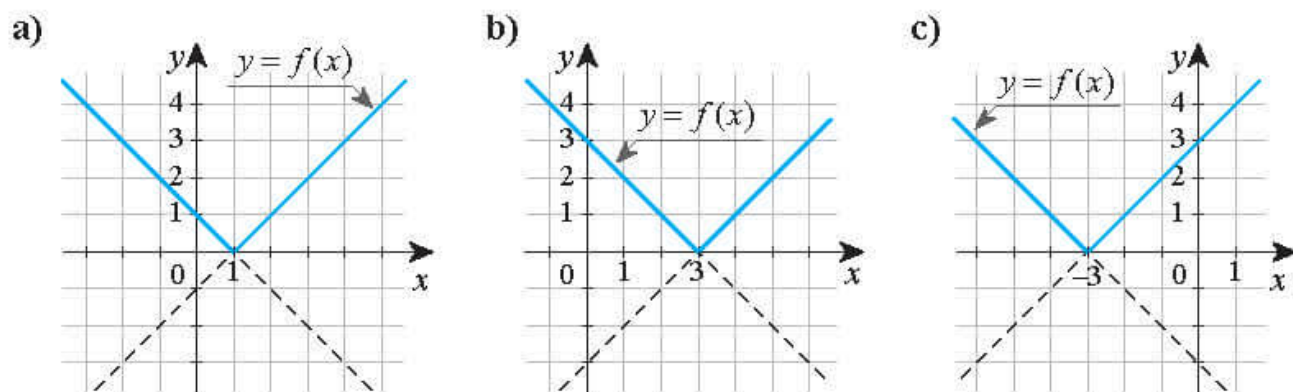
$y = -x+2$, gdy $x < 2$ i $y = x-2$, gdy $x \geq 2$.



Ćwiczenie 26. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = |x+2|$, b) $f(x) = |x-3|$, c) $f(x) = |x+1|$.

Ćwiczenie 27. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f . Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór funkcji f z użyciem klamry $\{$.



R

Przykład 20. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |2x + 4| - |x - 2|$ i podaj jej zbiór wartości Y_f .

Rozwiązanie Z definicji wartości bezwzględnej otrzymujemy:

$$|2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4, & \text{gdy } x \geq -2 \\ -2x - 4, & \text{gdy } x < -2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{gdy } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{gdy } x < 2 \end{cases}.$$

Liczby -2 i 2 dzielą zbiór $\mathbb{R}$ na przedziały: $(-\infty; -2)$, $[-2; 2)$, $[2; +\infty)$.

Wzór funkcji f możemy zapisać w postaci

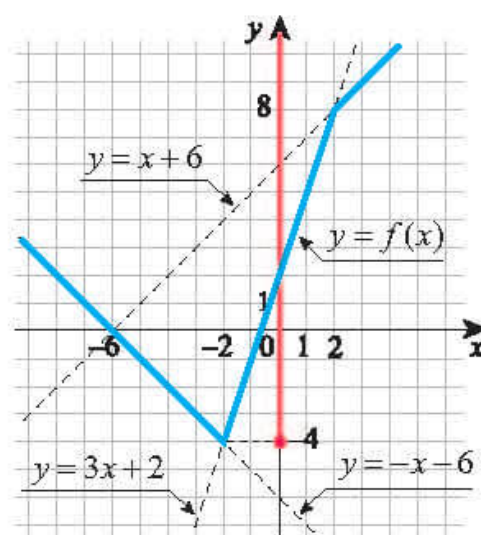
$$f(x) = \begin{cases} -(2x + 4) + (x - 2), & \text{gdy } x < -2 \\ 2x + 4 + (x - 2), & \text{gdy } -2 \leq x < 2, \\ 2x + 4 - (x - 2), & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$$

skąd

$$f(x) = \begin{cases} -x - 6, & \text{gdy } x < -2 \\ 3x + 2, & \text{gdy } -2 \leq x < 2, \\ x + 6, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}.$$

Z wykresu odczytujemy zbiór wartości funkcji f (linia czerwona).

Odp.: $Y_f = [-4; +\infty)$.



R

Ćwiczenie 28. Sporządź wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości Y_f , gdy:

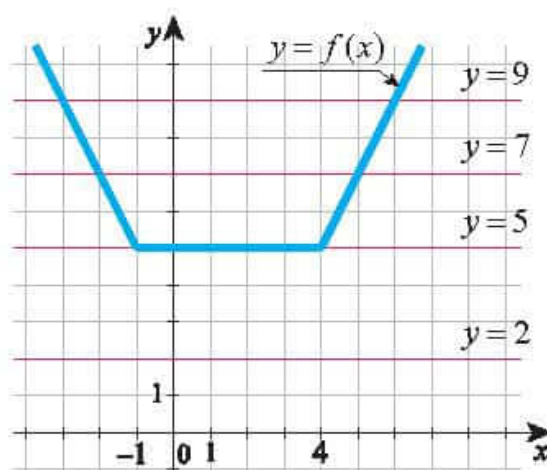
a) $f(x) = |x| - |x - 1|$, b) $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$.

Przykład 21. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x-4| + |x+1|$, a następnie określ liczbę rozwiązań równania $|x-4| + |x+1| = m$ w zależności od wartości parametru m .

Rozwiązanie Sporządzamy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x-4| + |x+1|$.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-4) - (x+1), & \text{gdy } x < -1 \\ -(x-4) + x+1, & \text{gdy } -1 \leq x < 4 \\ x-4 + x+1, & \text{gdy } x \geq 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3, & \text{gdy } x < -1 \\ 5, & \text{gdy } -1 \leq x < 4 \\ 2x-3, & \text{gdy } x \geq 4 \end{cases}$$



Każda prosta o równaniu $y = m$, gdy $m \in \mathbb{R}$, jest równoległa do osi x . Liczba rozwiązań równania $f(x) = m$ jest równa liczbie punktów przecięcia się wykresu funkcji f i prostej $y = m$.

Odp.: Równanie ma: • zero rozwiązań, gdy $m \in (-\infty; 5)$,

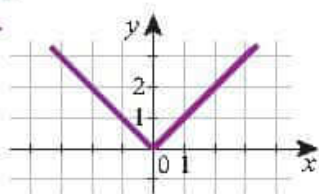
• dwa rozwiązania, gdy $m \in (5; +\infty)$, • nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m = 5$.

Ćwiczenie 29. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m , gdy:

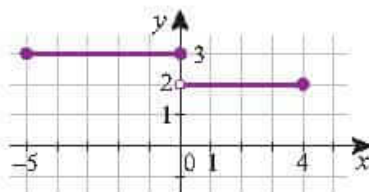
$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{gdy } x < 2 \\ -1, & \text{gdy } 2 \leq x < 4 \\ x-5, & \text{gdy } x \geq 4 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{gdy } x < 0 \\ -x+2, & \text{gdy } 0 \leq x < 2 \\ x-2, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

23.



24.



26. Wskazówka.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{gdy } x \geq -2 \\ -x-2, & \text{gdy } x < -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{gdy } x \geq 3 \\ -x+3, & \text{gdy } x < 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{gdy } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{gdy } x < -1 \end{cases}$$

25. a) $D_f = (-3; 3)$, b) $Y_f = \{0; 5\}$.

27. a) $f(x) = |x-1|$, b) $f(x) = |x-3|$, c) $f(x) = |x+3|$

28. Wskazówka. a) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x < 0 \\ 2x-1, & \text{gdy } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}$, $Y_f = \{-1; 1\}$, b) $f(x) = \begin{cases} -4, & \text{gdy } x < -2 \\ 2x, & \text{gdy } -2 \leq x < 2 \\ 4, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$, $Y_f = \{-4; 4\}$.

29. a) Zero, gdy $m < -1$; nieskończenie wiele, gdy $m = -1$; dwa, gdy $m > -1$,

b) jeden, gdy $m < 0$ lub $m > 2$; dwa, gdy $m = 0$ lub $m = 2$; trzy, gdy $0 < m < 2$.

Zadania utrwalające

11.47. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -3, & \text{gdy } x < -3 \\ -x, & \text{gdy } -3 \leq x \leq 3, \\ 3, & \text{gdy } x > 3 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{gdy } x < 0 \\ 2, & \text{gdy } 0 \leq x \leq 2. \\ 2x, & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$$

11.48. Sporządź wykres funkcji f . Określ jej dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f , gdy:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{gdy } x < 1 \\ 2x+1, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}, \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{gdy } x \in \langle 0; 2 \rangle \\ 4, & \text{gdy } x \in (2; 5) \\ -x+9, & \text{gdy } x \in \langle 5; +\infty \rangle \end{cases}.$$

11.49. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \in (-\infty; -1) \\ 2x-3, & \text{gdy } x \in \langle -1; 3 \rangle \\ -x+6, & \text{gdy } x \in \langle 3; +\infty \rangle \end{cases}$.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby:

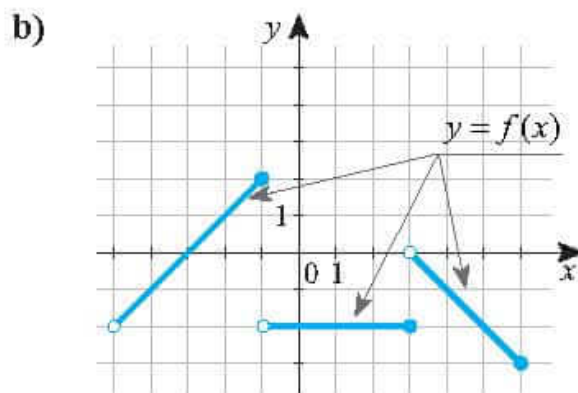
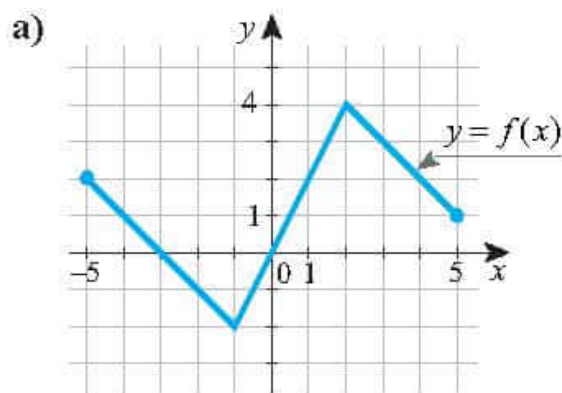
- A. $\frac{3}{2}$ i 0, B. $\frac{3}{2}$ i 6, C. 6 i 0, D. -6 i 0.

11.50. Narysuj wykres funkcji f , wiedząc, że jest on linią łamaną, a funkcja f spełnia jednocześnie wszystkie podane niżej warunki:

- $D_f = \langle -7; 5 \rangle$, • $f(5) = 4$ i $f(1) = -2$,
- gdy $x \in \langle -7; -5 \rangle$, to funkcja f jest stała i jej wartość w tym przedziale jest równa 3,
- gdy $x \in (-5; 1)$, to funkcja f jest malejąca,
- gdy $x \in (1; 5)$, to funkcja f jest rosnąca.

Określ zbiór wartości funkcji f .

11.51. Określ dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f oraz napisz wzór funkcji f , której wykres przedstawiono na rysunku.



11.52. Napisz wzór funkcji f z użyciem klamry, gdy:

a) $f(x) = |x+7|$, b) $f(x) = |x+1| + |x-1|$, c) $f(x) = |x-2| - |x+3|$.

11.53. Sporządź wykres funkcji f , gdy:

a) $f(x) = |x-5|$, b) $f(x) = |x-5| + x$, c) $f(x) = |x| - x$,
 d) $f(x) = |x| + x$, e) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x+1|}$, f) $f(x) = \frac{x^2-4}{|x-2|} + |x|$.

11.54. Sporządź wykres i określ zbiór wartości Y_f funkcji f , gdy:

a) $f(x) = |x+3| - 2x$, b) $f(x) = 2|x-1| + 3$,
 c) $f(x) = |x-2| + |x+5|$, d) $f(x) = |x-1| - |x+2|$.

11.55. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od parametru m , gdy:

a) $f(x) = x - |5-x|$, b) $f(x) = |x+1| + \sqrt{x^2}$.

11.56. Narysuj na płaszczyźnie kartezjańskiej figurę określoną równaniem

$$\sqrt{x^2} - y = 2(\sqrt{-x})^2 - 3.$$

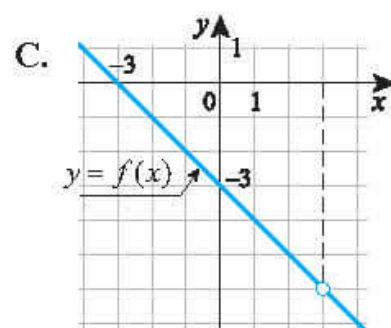
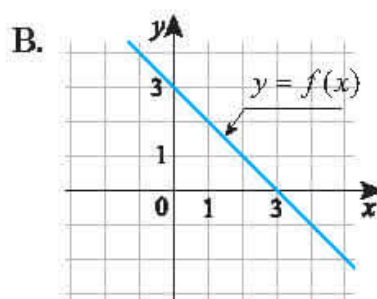
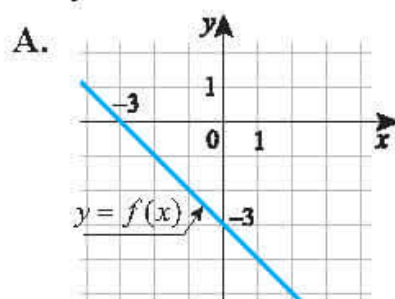
11.57. Określ, dla jakiej wartości parametru a funkcja f określona wzorem

$$f(x) = ||x-2|-1| - a \text{ ma trzy miejsca zerowe.}$$

11.58. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{9-x^2}{x-3}$ jest figura przedstawiona na rysunku:



11.59. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*



Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = |x-1| - 1$.

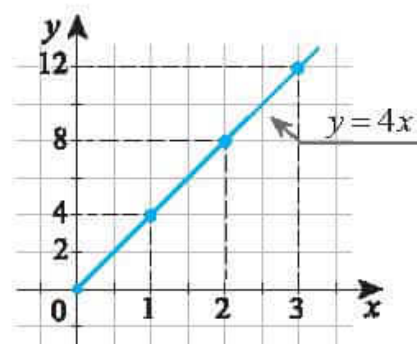
Miejscami zerowymi funkcji f są liczby 0 i 2.	P	F
$f(x) \geq 0$, gdy $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; +\infty \rangle$.	P	F
Największa wartość funkcji f jest równa 2.	P	F

Funkcja liniowa w zastosowaniach

Zależności występujące w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym często opisujemy za pomocą funkcji. Funkcją liniową możemy opisywać takie procesy zmian z udziałem wielkości x i y , w wyniku których obie te wielkości zmieniają się równomiernie, czyli proporcjonalnie.

Na przykład, jeśli kupimy x kg jabłek po 4 zł za 1 kg, to koszt y zakupu można zapisać zależnością $y = 4x$, gdzie $x \geq 0$.

O wielkościach x i y mówimy, że są **wprost proporcjonalne**, a liczbę 4 nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności**.



Uwaga

Dwie wielkości x i y zmieniają się wprost proporcjonalnie, jeżeli wzrost jednej z nich pociąga za sobą odpowiednią zmianę drugiej w ten sposób, że w procesie zmian iloraz $\frac{y}{x}$ jest stały i równy a , gdzie a to współczynnik proporcjonalności.



Ćwiczenie 30. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę, wiedząc, że wielkości x i y są wprost proporcjonalne.

a)

x	2	■
y	4	6

b)

x	$\frac{1}{3}$	3
y	■	3

c)

x	10	2
y	5	■

d)

x	■	2
y	1	14

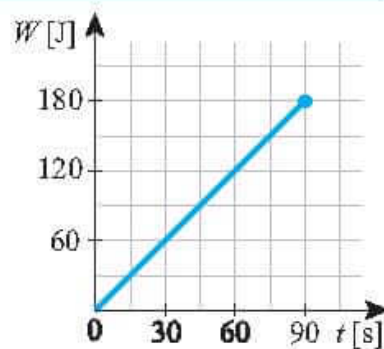
Przykład 22. Na wykresie przedstawiono zależność pomiędzy pracą W wykonaną przez silniczek zabawki a czasem t tej pracy. Oblicz moc P tego silniczka.

Rozwiązanie Zauważamy, że czas t i praca W zmieniają się wprost proporcjonalnie. W dwukrotnie dłuższym czasie zostanie wykonana dwukrotnie większa praca.

Moc P obliczamy z zależności $P = \frac{W}{t}$.

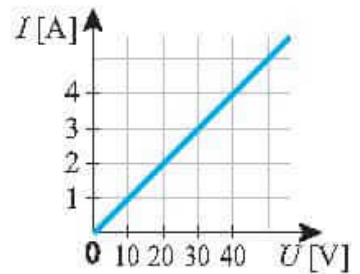
Niezbędne dane odczytujemy z wykresu, np. $W = 60$ J, gdy $t = 30$ s, albo $W = 180$ J, gdy $t = 90$ s. Dla każdej pary odczytanych wielkości otrzymamy $P = 2$.

Odp.: $P = 2$ W [waty].



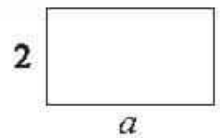
Ćwiczenie 31. Na wykresie przedstawiono zależność natężenia prądu I płynącego w przewodniku od wartości napięcia U na jego końcach. Oblicz opór R tego przewodnika.

Wskazówka. $U = R \cdot I$.



Ćwiczenie 32. Pociąg porusza się ze stałą prędkością równą $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaka jest zależność między drogą, którą przebywa pociąg, oraz czasem, w którym ją pokonuje? Napisz wzór wyrażający tę zależność. Czy droga s i czas t są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

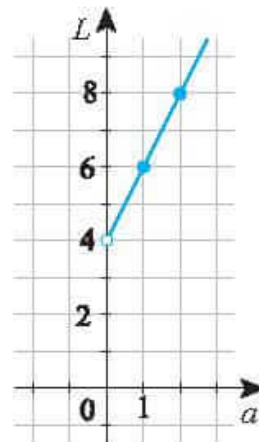
Przykład 23. Boki prostokąta mają długości równe 2 i a . Napisz wzór opisujący zależność pomiędzy obwodem L tego prostokąta a długościami jego boków. Sporządź wykres otrzymanej zależności.



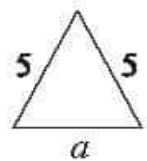
Rozwiązanie $L(a) = 2 \cdot a + 2 \cdot 2$.

Zatem $L(a) = 2a + 4$, gdzie $a > 0$.

a	1	2
$L(a) = 2a + 4$	6	8



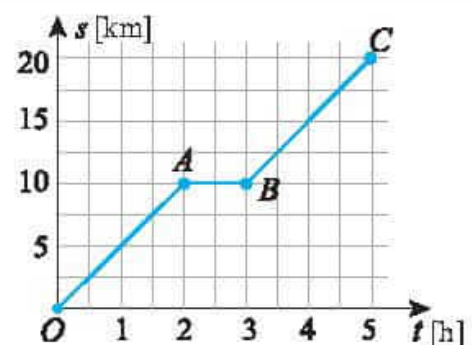
Ćwiczenie 33. Napisz wzór opisujący zależność pomiędzy obwodem L a długościami boków trójkąta. Sporządź wykres otrzymanej zależności.



Przykład 24. Beata w czasie pięciu godzin pieszej wycieczki przebyła 20 km. Na rysunku przedstawiony jest wykres określający zależność przebytej przez Beatę drogi s od czasu t trwania wycieczki.

a) Opisz drogę Beaty za pomocą wzoru $s(t)$.

b) Narysuj wykres prędkości v , z jaką poruszała się Beata, w zależności od czasu t trwania wycieczki.



Rozwiązanie

a) Cały dystans Beata pokonała w trzech etapach, którym na wykresie odpowiadają odcinki OA , AB i BC takie, że $O = (0, 0)$, $A = (2, 10)$, $B = (3, 10)$ i $C = (5, 20)$. Każdy z tych odcinków jest częścią wykresu pewnej funkcji liniowej $s(t) = at + b$ przechodzącej przez punkty:

- O i A , więc prosta OA ma równanie $s = 5t$,
- A i B , więc prosta AB ma równanie $s = 10$,
- B i C , więc prosta BC ma równanie $s = 5t - 5$.

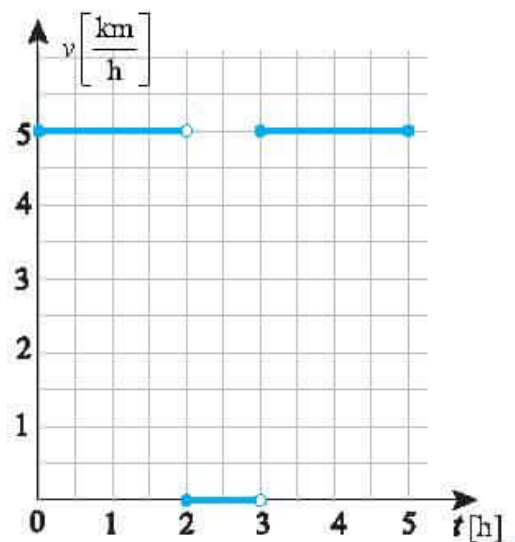
Podsumowując rozważania, zapisujemy $s(t) = \begin{cases} 5t, & \text{gdy } t \in \langle 0; 2 \rangle \\ 10, & \text{gdy } t \in \langle 2; 3 \rangle \\ 5t - 5, & \text{gdy } t \in \langle 3; 5 \rangle \end{cases}$.

b) Prędkość poruszania się Beaty na etapie:

- OA jest równa v_1 , gdzie $v_1 = \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = 5$,
- AB jest równa v_2 , gdzie $v_2 = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = 0$,
- BC jest równa v_3 , gdzie $v_3 = \frac{s(5) - s(3)}{5 - 3} = 5$,

co zapisujemy wzorem

$$v(t) = \begin{cases} 5, & \text{gdy } t \in \langle 0; 2 \rangle \\ 0, & \text{gdy } t \in \langle 2; 3 \rangle \\ 5, & \text{gdy } t \in \langle 3; 5 \rangle \end{cases}$$

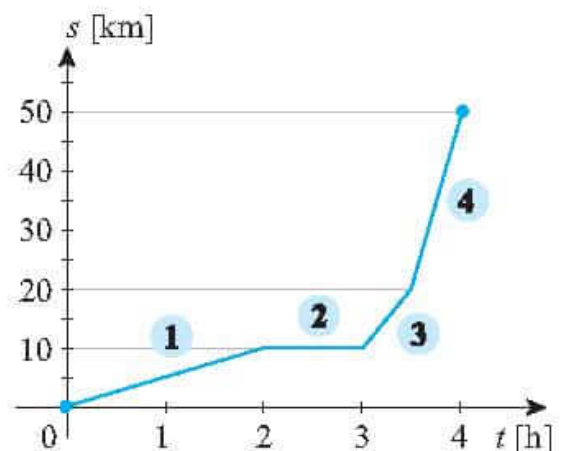


Ćwiczenie 34. Marta w ciągu czterech godzin przebyła 50 km. Najpierw szła pieszo, potem odpoczywała. Ewa podwiozła ją rowerem do przystanku autobusowego. Resztę drogi przebyła autobusem. Wykres obrazuje drogę s Marty w zależności od czasu t .

a) Ile czasu trwały poszczególne etapy od **1** do **4** podróży Marty?

b) Z jaką prędkością Marta poruszała się podczas tych etapów?

c) Przyjmij odpowiednią jednostkę na osi rzędnych i sporządź wykres prędkości poruszania się Marty w etapach od **1** do **4**.



Odpowiedzi do ćwiczeń

30. a) 3, b) $\frac{1}{3}$, c) 1, d) $\frac{1}{7}$. 31. 10 omów. 32. $s(t) = 40 \cdot t$, tak.

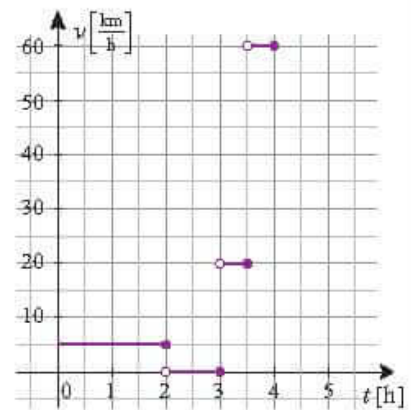
33. $L(a) = a + 10$, gdzie $0 < a < 10$. Wskazówka. Wykresem funkcji L jest odcinek bez końców w punktach o współrzędnych $(0, 10)$ i $(10, 20)$.

34. a) Marta w czasie 4 godzin: 1 szła pieszo 2 godziny,

2 odpoczywała 1 godzinę, 3 jechała rowerem $\frac{1}{2}$ godziny,

4 jechała autobusem $\frac{1}{2}$ godziny z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) 1 $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 2 $0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 3 $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 4 $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, c) wykres obok.



Zadania utrwalające

11.60. Na podstawie badań ustalono, że ciśnienie pod powierzchnią wody rośnie wraz z głębokością w przybliżeniu o 1000 hPa na każdy metr słupa wody.

a) Zapisz wzorem zależność ciśnienia słupa wody od głębokości.

b) Czy głębokość pod powierzchnią wody i ciśnienie tam panujące są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

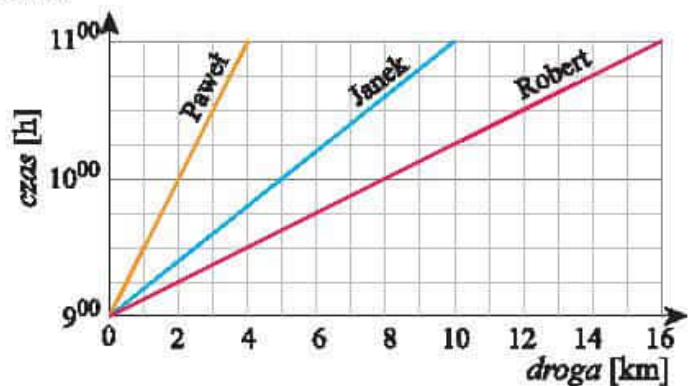
11.61. Trzej bracia: Paweł, Janek i Robert trenują chodzenie na czas. Ich wyniki na szkolnych zawodach przedstawiono na wykresie.

a) Który z braci przeszedł 8 km do godziny 10^{00} ?

b) O ile kilometrów więcej przeszedł Robert niż Paweł do godziny 10^{30} ?

c) Ile czasu zajęło Robertowi pokonanie 12 km drogi?

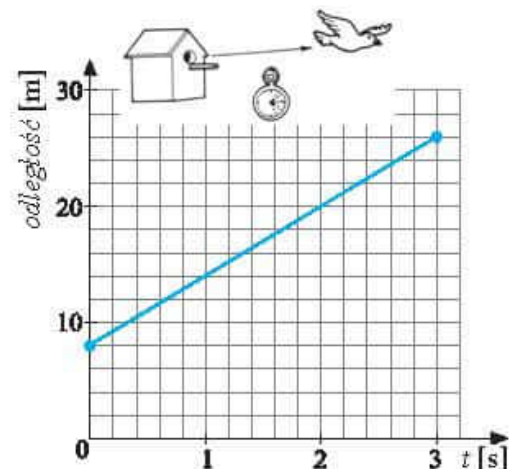
d) Oblicz średnią prędkość chodu każdego z nich.



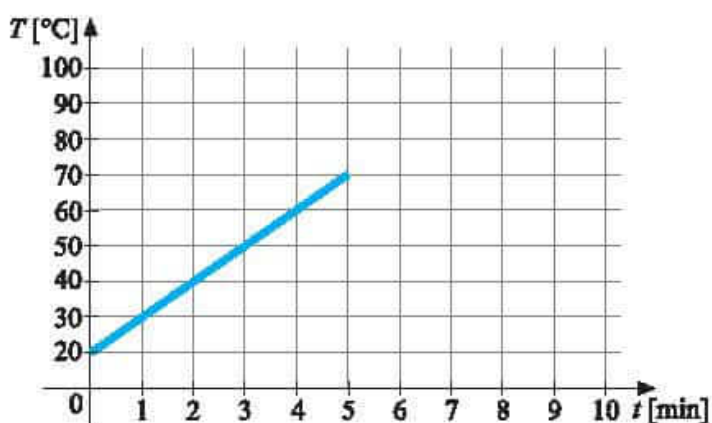
11.62. Janek obserwuje ptaka wylatującego z budki. Włącza swój stoper i szacunkowo ocenia, jak daleko znajduje się ptak od budki wraz z upływem czasu. Dane z obserwacji Janek przedstawił na wykresie.

a) Odczytaj z wykresu, jak daleko był ptak od budki, kiedy Janek włączył stoper.

b) Oblicz, z jaką prędkością (v) leciał ptak.



11.63. Przez 5 minut ogrzewano wodę, mierząc jej temperaturę co minutę. Dane z pomiarów przedstawiono na wykresie.



a) Odczytaj z wykresu, o ile stopni wzrasta temperatura wody w kolejnych minutach.

b) Przerysuj wykres do zeszytu i uzupełnij go o część przedstawiającą dalsze ogrzewanie wody przez kolejne 5 minut, pamiętając o temperaturze wrzenia wody w warunkach normalnych.

c) Po uzupełnieniu wykresu napisz wzór zależności temperatury (T) wody od czasu (t) jej ogrzewania.

11.64. Wsiadając do taksówki, pasażer płaci wstępną kwotę 6 zł. Po przejechaniu każdego kilometra dopłaca 2 zł. Napisz wzór opisujący zależność kosztu przejazdu taksówką od liczby przejechanych kilometrów. Oblicz koszt przejazdu taksówką, gdy pasażer przejechał:

a) 1 km,

b) 5 km,

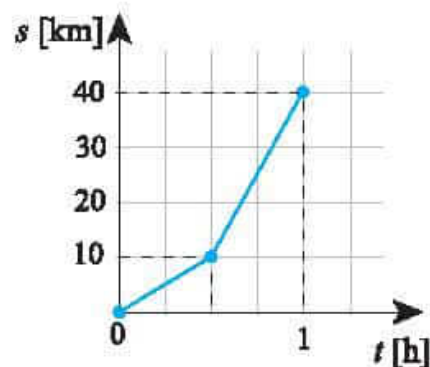
c) 10 km.

11.65. W układzie SI jednostką temperatury jest kelwin (K). Zależność między stopniami Celsjusza (T_{C}) a kelwinami (T_{K}) opisuje wzór $T_{\text{K}} = T_{\text{C}} + 273,15$. Wyraż temperaturę 100°C w kelwinach oraz 100 K w stopniach Celsjusza.

11.66. Na rysunku przedstawiony jest wykres drogi Pawła do szkoły, którą pokonał rowerem i pociągiem.

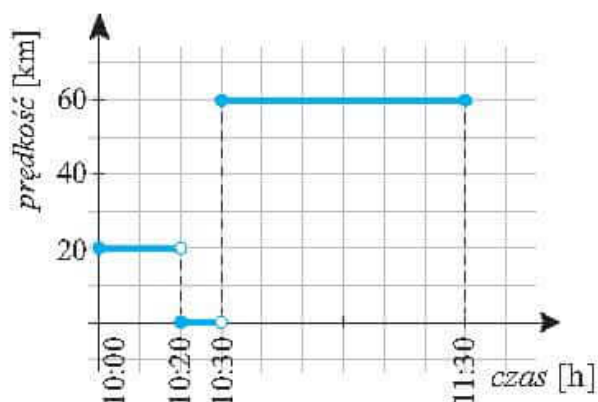
a) Opisz drogę Pawła za pomocą wzoru $s(t)$.

b) Narysuj wykres prędkości, z jaką poruszał się Paweł w drodze do szkoły.



11.67. Wojtek wybrał się w odwiedzin do babci, która mieszka w innej miejscowości. Najpierw dojechał do stacji kolejowej rowerem, potem czekał przez jakiś czas na pociąg, wreszcie jechał pociągiem. Odczytaj z wykresu:

a) Ile czasu i z jaką prędkością jechał rowerem?



- b) Ile czasu trwało oczekiwanie na pociąg?
- c) Ile czasu i z jaką prędkością jechał pociągiem?
- d) Ile czasu trwała jego podróż do babci?
- e) Ile kilometrów przebył Wojtek w czasie tej podróży?

11.68. Trasę rajdu samochodowego równą 850 km pewien zawodnik pokonał ze średnią prędkością $150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- a) Opisz za pomocą wzoru drogę s zawodnika do mety w zależności od czasu t przejazdu.
- b) Przedstaw wykres tej zależności.
- c) Ile kilometrów do mety miał do przejechania zawodnik po 135 minutach jazdy?

11.69. Pewna rodzina na koniec roku miała na koncie w banku 5000 zł i postanowiła oszczędzać dalej, wpłacając przez rok na konto każdego pierwszego dnia miesiąca kwotę 300 zł. Napisz wzór wyrażający zależność stanu oszczędności od czasu oszczędzania (w miesiącach), zakładając, że w tym okresie nie dopisano odsetek.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ przecina osie układu współrzędnych w punktach:

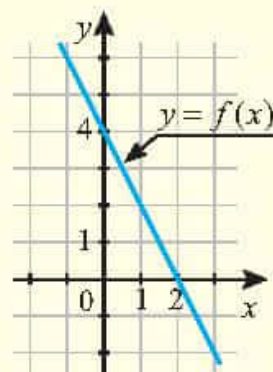
- A. $(4, 0)$, $(0, 2)$, B. $(-\frac{3}{4}, 0)$, $(0, 2)$, C. $(-\frac{8}{3}, 0)$, $(0, 2)$, D. $(\frac{8}{3}, 0)$, $(0, 2)$.

2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej f .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f określona jest wzorem:

- A. $f(x) = 2x + 4$, B. $f(x) = -4x + 2$,
C. $f(x) = 4x - 2$, D. $f(x) = -2x + 4$.



3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = ax + b$ przyjmuje tylko wartości ujemne, gdy:

- A. $a > 0$ i $b < 0$, B. $a = 0$ i $b < 0$, C. $a < 0$ i $b < 0$, D. $a < 0$ i $b = 0$.

4. Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = ax + b$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.

Jeżeli $a = 0$ i $b = -3$, to funkcja f nie ma miejsc zerowych.	P	F
Funkcja f jest rosnąca, gdy $b > 0$ i a jest dowolną liczbą rzeczywistą.	P	F
Jeżeli $a = 6$ i $b = -12$, to funkcja f przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(2; +\infty)$.	P	F
Jeżeli $a = 0$ i $b = 100\sqrt{2}$, to funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie.	P	F

5. Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = ax + b$. Czy prawdą jest, że jeżeli $a + b = 0$ i $a \neq 0$, to miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1 ?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A	$x_0 = -\frac{b}{a}$ i $a = -b$, więc $x_0 = -1$.
N	Nie,		B	$x_0 = -\frac{b}{a}$ i $a = -b$, więc $x_0 = 1$.

6. Funkcja L jest zależnością obwodu trójkąta równoramiennego o podstawie długości 10 od ramion tego trójkąta długości x .
- Napisz wzór funkcji L i określ jej dziedzinę.
 - Naszkicuj wykres funkcji L .
 - Określ, czy funkcja L może przyjąć wartość 1000.
 - Podaj zbiór wartości funkcji L .

R

7. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = |x - 2| - 2\sqrt{x^2}$.

8. Zapisz wzór funkcji liniowej f w postaci $f(x) = ax + b$, gdy:

$$\text{a) } \begin{cases} f(3) - f(2) = 4 \\ f(0) = 3 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} f(5) - f(3) = 6 \\ f(0) = -4 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} f(11) - f(8) = 15 \\ f(0) = 2 \end{cases}.$$

9. Uzasadnij, że jeżeli funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x) = ax + b$, to $f(x+n) - f(x) = n \cdot a$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

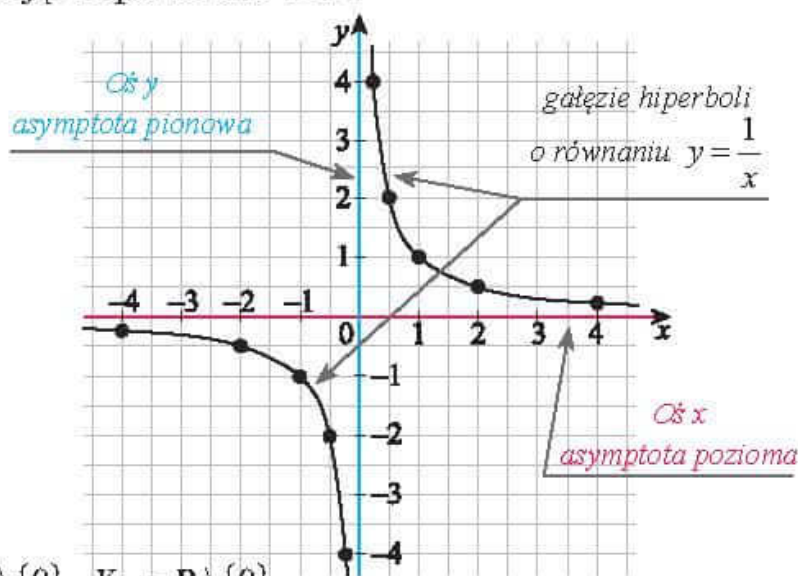
12. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ i wielkości odwrotnie proporcjonalne

Wykres i własności funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$

Przykład 1. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$, i z wykresu odczytaj dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f .

Rozwiązanie Zauważamy, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest funkcją określoną wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a = 1$.

Sporządzamy tabelę wartości funkcji i szkicujemy jej wykres, zakrzywiając odpowiednio linie.



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, Y_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

x	$y = f(x)$
-4	$-\frac{1}{4}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{4}$	-4
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$

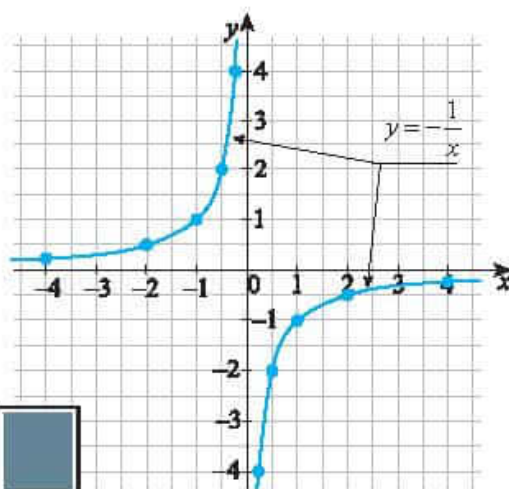
Uwaga

- Wykresem funkcji f określonej wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$ i $a \neq 0$, jest krzywa zwana **hiperbolą**, która składa się z dwóch części. Każdą z tych części nazywamy **gałęzią hiperboli**. O wzorze $y = \frac{a}{x}$ mówimy, że jest równaniem hiperboli.
- Hiperbola o równaniu $y = \frac{a}{x}$ nie ma punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych, czyli z prostymi o równaniach $x = 0$ i $y = 0$. Proste te nazywamy **asymptotami** tej hiperboli.
- Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ jest zbiór D_f taki, że $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Ćwiczenie 1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{x}$, gdzie $x \neq 0$.

- a) Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę.
- b) Określ, czy funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.



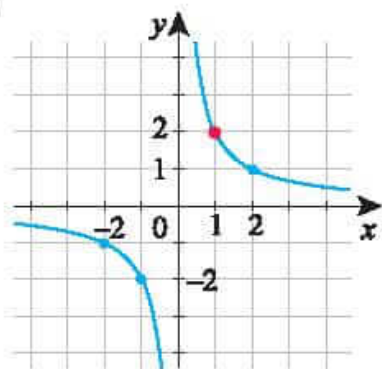
x	-4	-3	■	-1	$-\frac{1}{2}$	■	1	■	3	■
$y = -\frac{1}{x}$	■	■	$\frac{1}{2}$	■	■	-2	■	$-\frac{1}{2}$	■	$-\frac{1}{4}$

Uwaga

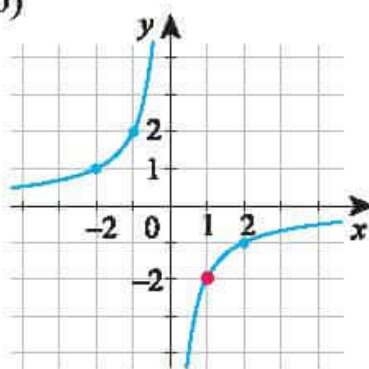
Hiperbola o równaniu $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$ i $a \neq 0$, przechodzi przez punkt o współrzędnych $(1, a)$ i jest wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$.

Ćwiczenie 2. Na rysunku przedstawiony jest szkic wykresu funkcji określonej wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$ i $a \neq 0$. Odczytaj z wykresu wartość współczynnika a .

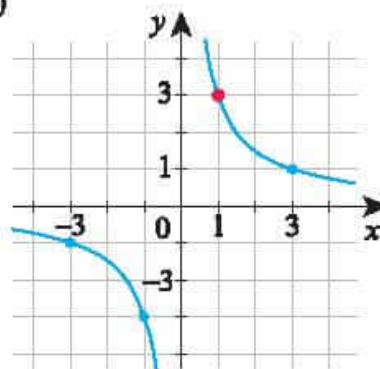
a)



b)



c)

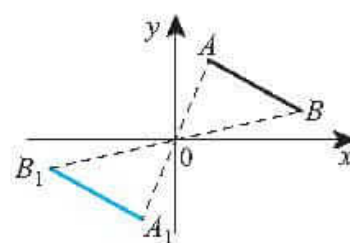


Ćwiczenie 3. Przepisz zdanie do zeszytu i w miejsce ■ wpisz numery ćwiartek układu współrzędnych tak, aby zdanie było prawdziwe.

- a) Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$ i $a > 0$, jest hiperbolą o równaniu $y = \frac{a}{x}$, której gałęzie położone są w ■ i ■ ćwiartce układu współrzędnych.
- b) Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$ i $a < 0$, jest hiperbolą o równaniu $y = \frac{a}{x}$, której gałęzie położone są w ■ i ■ ćwiartce układu współrzędnych.

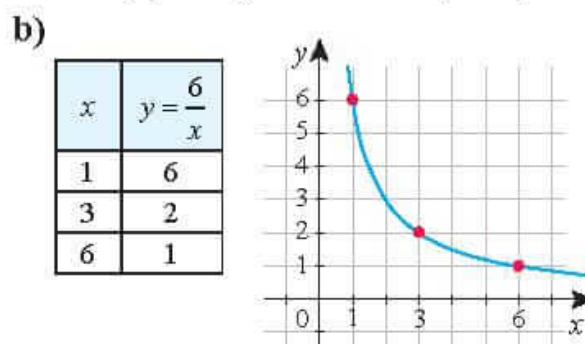
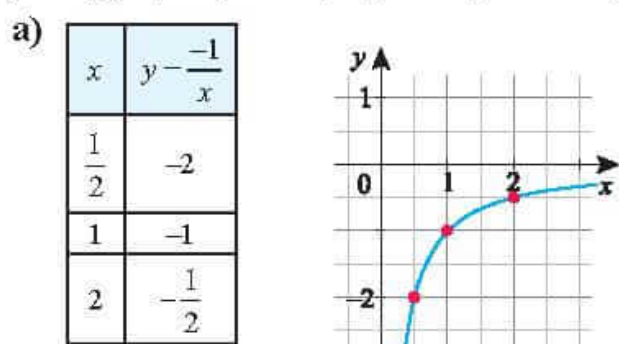
Przypomnijmy

- Punkt względem którego figura sama do siebie jest symetryczna nazywamy **środkiem symetrii tej figury**.
- Na rysunku odcinek A_1B_1 jest symetryczny do odcinka AB w symetrii środkowej względem punktu $O = (0, 0)$.
- Figura złożona z odcinków AB i A_1B_1 jest środkowosymetryczna. Punkt O jest środkiem symetrii tej figury.

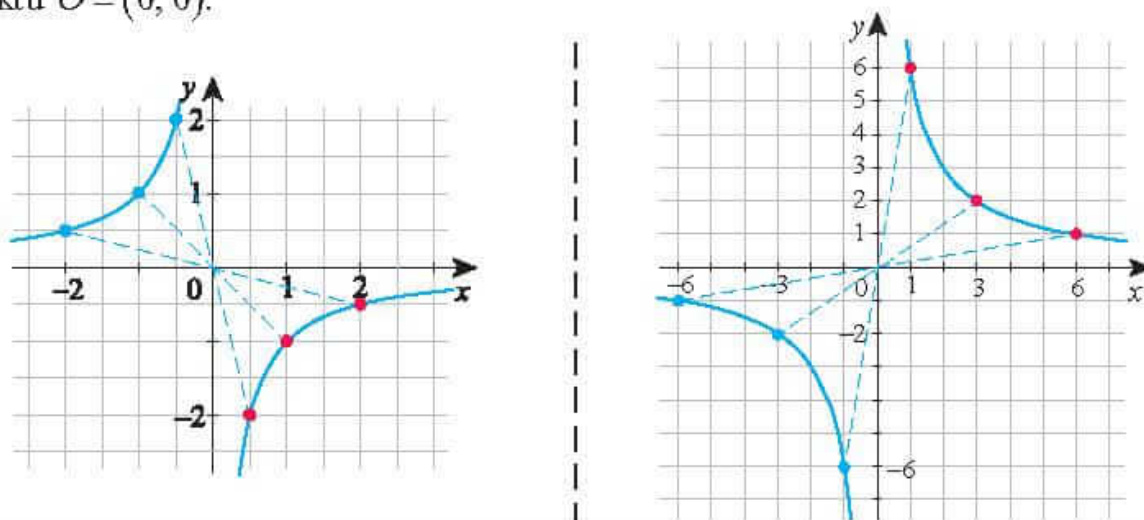


Przykład 2. Naszkicuj „sprytnie” wykres funkcji określonej wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$, jeżeli: a) $a = -1$, b) $a = 6$.

Rozwiązanie Wykresem funkcji określonej wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$, jest hiperbola składająca się z dwóch gałęzi. Zauważamy, że środkiem symetrii tej figury (hiperboli) jest początek układu współrzędnych, czyli punkt $O = (0, 0)$. Aby naszkicować jedną gałąź hiperboli, wystarczy zaznaczyć dwa lub trzy punkty, które na niej leżą.



Aby naszkicować drugą gałąź hiperboli, rysujemy ją symetrycznie względem punktu $O = (0, 0)$.



Ćwiczenie 4. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$, jeżeli: a) $a = -3$, b) $a = 4$, c) $a = -5$.

Uwaga Jeżeli punkt $P = (x, y)$ leży na hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$ i $a \neq 0$, to $x \cdot y = a$.

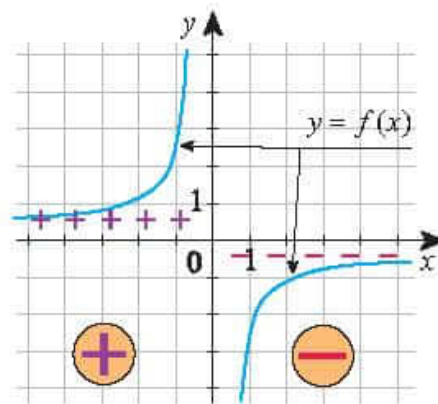
Ćwiczenie 5. Punkt P leży na wykresie funkcji f określonej wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$. Oblicz wartość współczynnika a , gdy:

- a) $P = (1, 6)$, b) $P = (-3, 5)$, c) $P = (2, -7)$, d) $P = (-4, -2)$.

Przykład 3. Hiperbola przedstawiona na rysunku jest wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$ i $a < 0$.

Odczytaj z wykresu:

- a) miejsca zerowe funkcji f ,
b) przedziały, w których funkcja f jest rosnąca,
c) przedział, w którym funkcja f przyjmuje wartości ujemne.



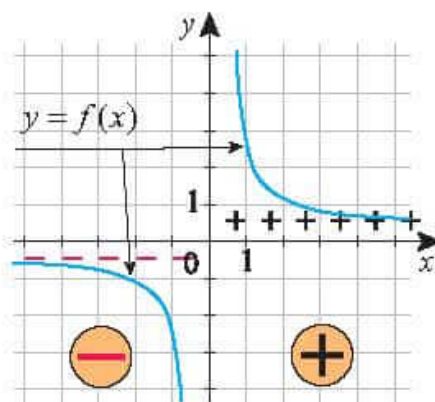
Rozwiązanie

- a) Funkcja f nie ma miejsc zerowych, bo jej wykres nie przecina osi x .
b) Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.
c) $f(x) < 0$, gdy $x > 0$, czyli $f(x) < 0$, gdy $x \in (0; +\infty)$.

Ćwiczenie 6. Hiperbola przedstawiona na rysunku jest wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$ i $a > 0$.

Odczytaj z wykresu i określ:

- a) przedziały, w których funkcja f jest malejąca,
b) przedział, w którym funkcja f przyjmuje wartości ujemne.



Uwaga

Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$ jest w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$:

- rosnąca, gdy $a < 0$,
- malejąca, gdy $a > 0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. b) Tak. 2. a) 2, b) -2, c) 3. 3. a) I i III, b) II i IV. 5. a) 6, b) -15, c) -14, d) 8.

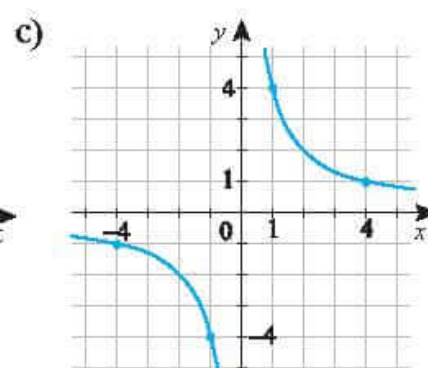
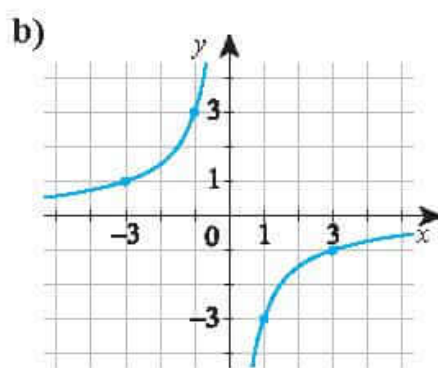
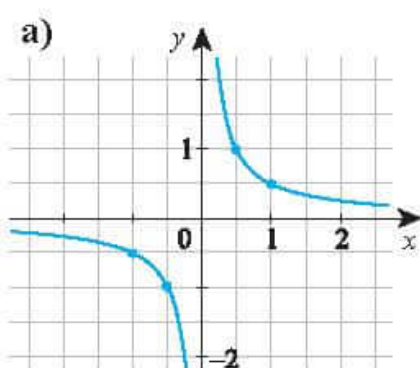
6. a) Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$, b) $f(x) < 0$, gdy $x < 0$, czyli $x \in (-\infty; 0)$.

Zadania utrwalające

- 12.1. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejscu wpisz odpowiednią liczbę. Sporządź wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{-6}{x}$.

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y = \frac{-6}{x}$	 	 	 	 	 	 	 	

- 12.2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji określonej wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$. Odczytaj z wykresu wartość współczynnika a .



- 12.3. Spośród punktów:

$$A = (-3, 0), B = (-2, -3), C = (3, 2), D = \left(9, \frac{2}{3}\right), E = \left(5, \frac{6}{5}\right), F = \left(30, \frac{1}{5}\right), G = (3, 6)$$

wybierz te, które nie należą do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{6}{x}$.

- 12.4. Sporządź wykres funkcji f , gdy:

a) $f(x) = \frac{-4}{x}$,

b) $f(x) = \frac{3}{x}$,

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$.

- 12.5. Przepisz zdanie do zeszytu i w miejscu wpisz słowo „dodatnie” lub „ujemne”.

Funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$, jest rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$, gdy a jest oraz malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, gdy a jest .

- 12.6. Uzasadnij, że punkty A, B, C leżą na tej samej hiperboli, gdy:

D

a) $A = (-5, 1), B = \left(-\frac{1}{125}, 625\right), C = \left(3000, -\frac{1}{600}\right)$,

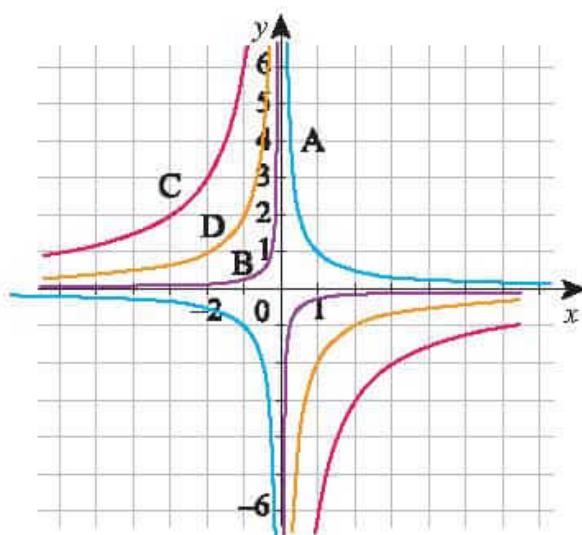
b) $A = (1, \sqrt{2}), B = \left(\sqrt{8}, \frac{1}{2}\right), C = (\sqrt{0,2}, \sqrt{10})$.

12.7. Adam narysował w jednym układzie współrzędnych hiperbole A, B, C i D określone równaniami:

1 $y = \frac{-2}{x}$, 2 $y = \frac{1}{x}$,

3 $y = \frac{1}{4x}$, 4 $y = -\frac{6}{x}$.

Przyporządkuj wzór hiperboli do jej wykresu.



Wielkości odwrotnie proporcjonalne

Definicja

Dwie wielkości nazywamy odwrotnie proporcjonalnymi, jeżeli wzrost jednej z nich kilka razy pociąga za sobą zmniejszenie drugiej tyle samo razy.

Dwie wielkości są odwrotnie proporcjonalne, gdy ich iloczyn ma stałą wartość.

Przykłady wielkości odwrotnie proporcjonalnych:

- Czas t oraz prędkość v w ruchu na ustalonej drodze s .

Na przykład, gdy $s = 120$ km, wtedy $t \cdot v = 120$.

Gdańsk $s = 120$ km Chojnice



$$4 \text{ h} \cdot 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 120 \text{ km}$$



$$6 \text{ h} \cdot 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 120 \text{ km}$$



$$1,5 \text{ h} \cdot 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 120 \text{ km}$$

- Długości a i b boków prostokąta o stałym polu P .

Na przykład, gdy $P = 20$, to $a \cdot b = 20$.

2

$P = 20$

10

2,5

$P = 20$

8

4

$P = 20$

5

5

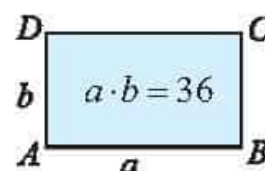
$P = 20$

4



Ćwiczenie 7. Pole prostokąta jest równe 36. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę.

a	1	■	3	■	6	■	9	■
b	■	2	■	4	■	8	■	12



Uwaga

Dwie wielkości zmienne x i y są:

- wprost proporcjonalne, gdy obie jednocześnie rosną albo maleją tyle samo razy, to znaczy, gdy iloraz $\frac{y}{x}$ jest stały, czyli gdy $\frac{y}{x} = a$, gdzie $a \neq 0$,
- odwrotnie proporcjonalne, gdy ze wzrostem jednej druga maleje tyle samo razy, to znaczy, gdy iloczyn $y \cdot x$ jest stały, czyli gdy $y \cdot x = a_1$, gdzie $a_1 \neq 0$.

Liczby a i a_1 nazywamy współczynnikami proporcjonalności.



Ćwiczenie 8. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę, wiedząc, że wielkości zmienne x i y są odwrotnie proporcjonalne.

x	2	■	5	1	■	8
y	■	4	20	■	50	■



Ćwiczenie 9. Przerysuj do zeszytu tabele **1**, **2** i w miejsce ■ wpisz odpowiednie liczby, by wielkości x i y były:

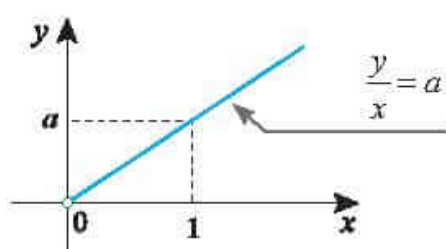
- 1** wprost proporcjonalne oraz $\frac{y}{x} = 24$ | **2** odwrotnie proporcjonalne oraz $x \cdot y = 24$

x	1	2	3	4
y	■	■	■	■

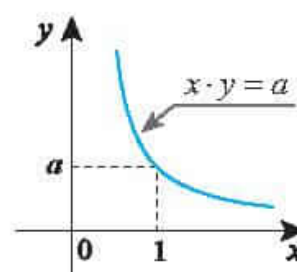
x	1	2	3	4
y	■	■	■	■

W zagadnieniach praktycznych, mówiąc o wielkościach wprost lub odwrotnie proporcjonalnych, mówimy o wielkościach przyjmujących wartości **dodatnie**. Wykresy tych zależności przedstawione są na rysunkach.

x, y – wielkości wprost proporcjonalne



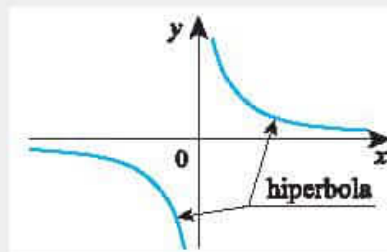
x, y – wielkości odwrotnie proporcjonalne



Uwaga

Dwie wielkości odwrotnie proporcjonalne mogą również przyjmować wartości ujemne.

Wykresem proporcjonalności odwrotnej wielkości x i y , gdy $x \neq 0$, jest hiperbola o równaniu $y = \frac{a}{x}$.

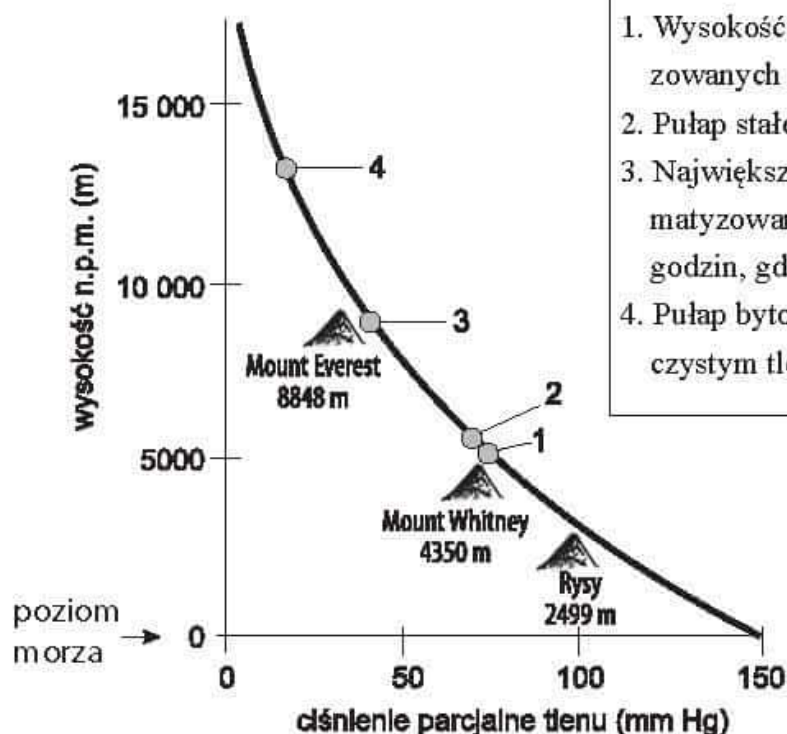


Obserwując zjawiska zachodzące w przyrodzie, staramy się ustalić zależności między wielkościami mającymi wpływ na przebieg tych zjawisk. Okazuje się, że niektóre z nich są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Pokażemy to na przykładach.

Ćwiczenie 10. Ustal, czy wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi są wielkości określające:

- odległości na mapie i odpowiadające im odległości w terenie,
- cenę bułki i liczbę bułek, które można kupić za 10 zł.

Ćwiczenie 11. Na rysunku przedstawiona jest zależność między wysokością nad poziomem morza a ciśnieniem parcjale tlenem.



1. Wysokość, na której większość niezaaklimatyzowanych ludzi traci przytomność.
2. Pułap stałego bytowania ludzi.
3. Największa wysokość umożliwiająca zaaklimatyzowanym osobom przetrwanie kilku godzin, gdy oddychają powietrzem.
4. Pułap bytowania człowieka, gdy oddycha czystym tlenem.

Ciśnienie parcjale (cząstkowe) tlenu – ciśnienie, jakie wywierałby tlen, gdyby sam zajmował całą objętość powietrza.
(1 mm Hg $\approx$ 133,3 Pa).

Jak myślisz, z jakiej najwyższej wysokości można bezpiecznie skoczyć ze spadochronem: a) bez butli z tlenem, b) z butlą z tlenem?

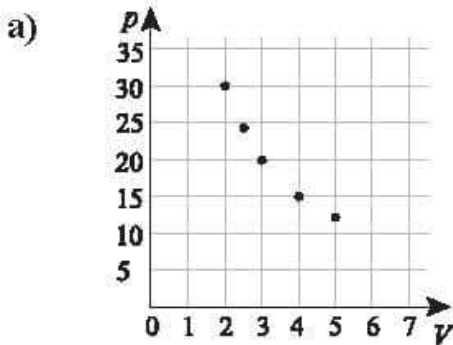
Swoje odpowiedzi porównaj z informacjami podanymi w internecie.

Przykład 4. W pewnym doświadczeniu badano, w jaki sposób ciśnienie p gazu o stałej temperaturze wypełniającego balon zmienia się w zależności od jego objętości V . Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli.

V	2	2,5	3	4	5
p	30	24	20	15	12

- Zaznacz otrzymane wyniki w układzie współrzędnych.
- Wyznacz wzór funkcji, która może określać zależność między ciśnieniem p a objętością V gazu w balonie.

Rozwiązanie

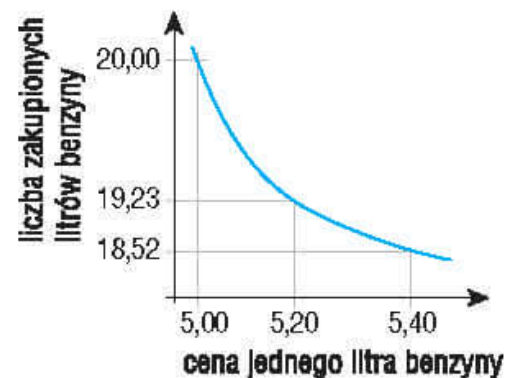


- b) Analizując tabelę, zauważamy, że iloczyn wielkości V i p jest stały.

$$V \cdot p = 60, \text{ skąd } p = \frac{60}{V}, \text{ gdzie } V > 0.$$

$$\text{Odp.: } p = \frac{60}{V}, \text{ gdzie } 2 \leq V \leq 5.$$

Ćwiczenie 12. Pewien kierowca ma zwyczaj tankowania benzyny za stałą kwotę. Na wykresie pokazano zależność między ceną benzyny a liczbą zatankowanych litrów paliwa. Określ, jaką kwotę przeznacza ten kierowca na jedno tankowanie.



Przykład 5. Czternastu robotników pracując z tą samą wydajnością, wykonuje pewną pracę w czasie 15 dni. W ciągu ilu dni wykona tę samą pracę trzech robotników?

Rozwiązanie Pracodawca oszacował, że jeśli praca ma być wykonana przez 14 robotników w czasie 15 dni, to znaczy, że na jej wykonanie potrzeba $15 \cdot 14$ roboczodni. Zatem trzech robotników będzie na wykonanie tej pracy potrzebowało również $15 \cdot 14$ roboczodni, czyli

$$3 \cdot x = 15 \cdot 14, \text{ skąd } x = \frac{15 \cdot 14}{3} = 5 \cdot 14 = 70.$$

Liczba dni i liczba robotników są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Odp.: Trzech robotników będzie wykonywało tę pracę przez 70 dni.

Ćwiczenie 13. Zapas ziemniaków w stołówce szkolnej wystarczy na 21 dni, jeżeli dziennie będzie się wydawać 240 obiadów. Na ile dni wystarczy ten zapas, jeśli dziennie będą wydawane 252 obiady i na każdy z obiadów stołówka zużywa tyle samo ziemniaków?

Odpowiedzi do ćwiczeń

8.

x	2	25	5	1	2	8
y	50	4	20	100	50	12,5

9. 1°

x	1	2	3	4
y	24	48	72	96

2°

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

10. a) Nie, b) tak. 12. 100 zł 13. 20 dni

Zadania utrwalające

12.8. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce  wpisz liczbę tak, by wielkości x i y były:

a) wprost proporcjonalne,

x	2	5		11
y		7,5	6	

b) odwrotnie proporcjonalne.

x	1,5		6	0,6
y	30	9		

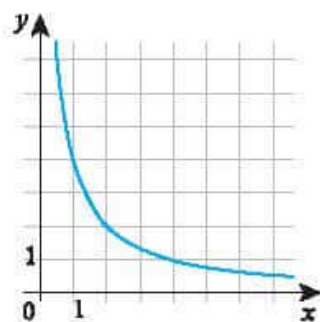
12.9. Kupiono działkę budowlaną w kształcie prostokąta o polu 1600 m^2 . Zapisz wzór wyrażający zależność między wymiarami tej działki a jej polem.

12.10. Na rysunku przedstawiony jest wykres pewnej proporcjonalności.

a) Napisz wzór tej proporcjonalności.

b) Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce  wpisz odpowiednią liczbę.

x	$\sqrt{2}$	
y		1



12.11. W tabeli podane są przybliżone wartości średnic erytrocytów oraz ich liczby zawarte w milimetrze sześciennym krwi u różnych kręgowców.

Badane zwierzę	Liczba erytrocytów (tys./mm ³ krwi)	Średnica erytrocytów w przybliżeniu (μm)
żaba	400	22
jaszczurka	1600	17
karp	2000	14
pies	6200	7
koza	18 000	3

a) Przedstaw w formie wykresu dane zamieszczone w tabeli.

b) Podaj, jaka zależność występuje u kręgowców pomiędzy liczbą erytrocytów a ich średnicą.

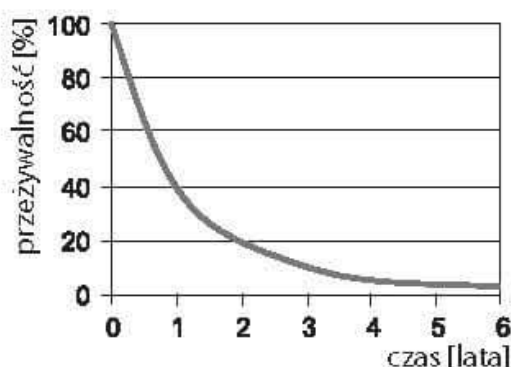


Erytrocyty (krwinki czerwone) mają kształt krążka obustronnie wklęsłego.

Erytrocyty u człowieka mają średnicę 7–8 mikrometrów.



- 12.12. Na wykresie przedstawiona jest krzywa przeżywalności populacji pewnego gatunku ryb.



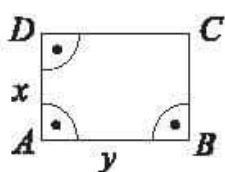
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Śmiertelność w populacji ryb jest stała i nie zależy od wieku osobników.	P	F
Największa śmiertelność w populacji ryb występuje do dwóch lat życia.	P	F
W populacji ryb występuje wysoka przeżywalność osobników młodych.	P	F

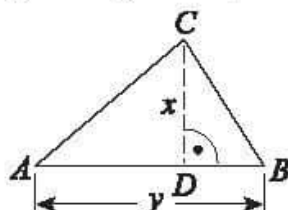
- 12.13. Ciężarówka, jadąca ze średnią prędkością równą $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, przebywa odległość z Warszawy do Gdańska w czasie 5 godzin i 30 minut. W jakim czasie przebędzie tę samą drogę samochód jadący ze średnią prędkością równą $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- 12.14. Sześciu pracowników, pracując z tą samą wydajnością, wykonuje pewną pracę w czasie 4 godzin. Ile osób powinno pracować z taką samą wydajnością, aby praca ta została wykonana w czasie 3 godzin?
- 12.15. Radio A nadaje na falach o długości 250 m na częstotliwości 1200 kHz. Radio B nadaje na częstotliwości 300 kHz. Na jakiej długości fal nadaje radio B?
Wskazówka. Iloczyn długości fali radiowej i jej częstotliwości jest wielkością stałą.
- 12.16. Z prawa Ohma wynika zależność $I = \frac{U}{R}$, gdzie I to natężenie prądu, U to napięcie, a R to opór obwodu prądu.
- Gdy stały jest opór R , to natężenie I i napięcie U są wielkościami wprost czy odwrotnie proporcjonalnymi?
 - Gdy stałe jest napięcie U prądu, to natężenie I i opór R są wielkościami wprost czy odwrotnie proporcjonalnymi?

- 12.17. Pole wielokąta przedstawionego na rysunku jest równe 100.

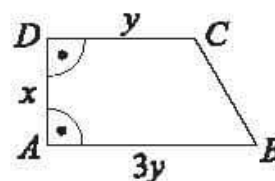
a)



b)



c)



Napisz wzór wyrażający zależność między długością odcinka y a długością odcinka x .

12.18. Wojtek ocenił, że wartość k (w złotych) samochodu jest odwrotnie proporcjonalna do jego wieku x (w latach). Zapisz tę zależność, gdy po dwóch latach samochód ma wartość 30 000 zł.

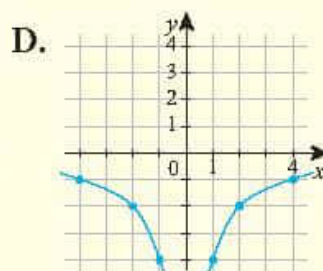
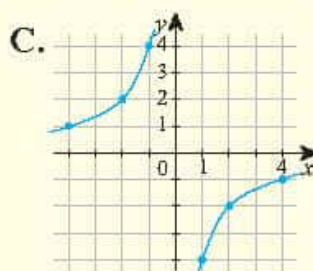
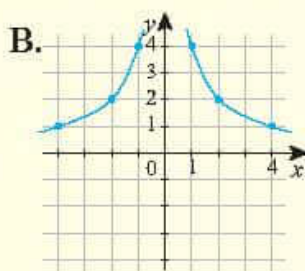
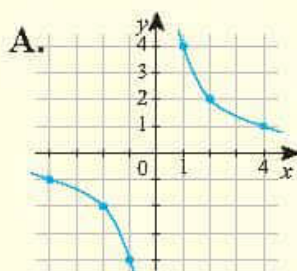
- Oblicz cenę samochodu po sześciu latach.
- Ile lat ma samochód, jeżeli kosztuje 3000 zł?



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = -\frac{4}{x}$ przedstawiony jest na rysunku:



2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej

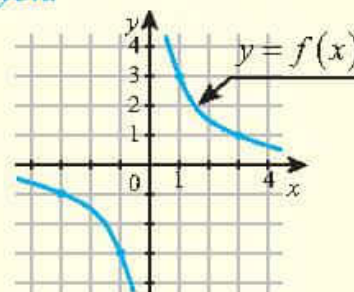
wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, więc:

A. $f(x) = -\frac{3}{x}$,

B. $f(x) = \frac{2}{x}$,

C. $f(x) = \frac{3}{x}$,

D. $f(x) = \frac{6}{x}$.



3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = -\frac{1}{x}$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu:

A. $y = -x$,

B. $y = x$,

C. $y = 2$,

D. $y = -4$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

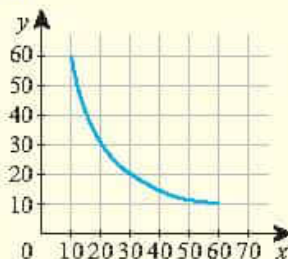
Współczynnik proporcjonalności wielkości x i y , których zależność przedstawiona jest na wykresie, jest równy:

A. 6,

B. 10,

C. 60,

D. 600.



5. W tabeli podane są po dwie wartości wielkości zmiennych x i y , które są odwrotnie proporcjonalne.

x	2	1
y	$k-1$	$k+1$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wzór tej proporcjonalności ma postać:

- A. $x \cdot y = 1$, B. $x \cdot y = 2$, C. $x \cdot y = 3$, D. $x \cdot y = 4$.

6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Pewną pracę może wykonać 10 robotników w ciągu 15 dni. Tę samą pracę 3 robotników będzie wykonywało w ciągu 50 dni.	P	F
Dla 24 żołnierzy na 7-dniowy pobyt na poligonie przygotowuje się 126 kg chleba, a dla 36 żołnierzy na 9-dniowy pobyt 147 kg chleba.	P	F
W czasie 0,4 sekundy głos w wodzie przebywa odległość równą 574 m, a w czasie 1,5 sekundy przebywa 2012 m.	P	F

7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi są wielkości x i y określone zależnością:

- A. $\frac{3}{x} = \frac{4}{y}$, B. $\frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{x}{y}$, C. $\frac{2x}{7} = \frac{3y}{2}$, D. $\frac{7}{x} = \frac{y}{5}$.

8. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wielkościami wprost proporcjonalnymi są wielkości x i y określone zależnością:

- A. $\frac{x}{2} = \frac{8}{y}$, B. $\frac{4x}{15} = \frac{3}{8y}$, C. $\frac{7}{y} = \frac{2}{x}$, D. $\frac{5}{x} = \frac{y}{15}$.

9. Pojemność dętki samochodowej jest równa $0,08 \text{ m}^3$, a pojemność roboczej części pompki $0,001 \text{ m}^3$. W dętce ciśnienie powietrza jest równe 10^5 Pa . Oblicz, ile ruchów należy wykonać pompką, by ciśnienie w dętce wzrosło do wartości $3,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. W obliczeniach przyjmij, że temperatura powietrza w dętce jest równa temperaturze otaczającego powietrza.

10. Narysuj wykres funkcji f , określ jej dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f , gdy:

- a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x < -1 \\ x+1, & \text{gdy } x \geq -1 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{gdy } x < -1 \text{ lub } x > 1 \end{cases}$,
- c) $f(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x}, & \text{gdy } x < -2 \\ |x|, & \text{gdy } x \geq -2 \end{cases}$, d) $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & \text{gdy } x \leq 2 \\ \frac{2}{x}, & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$.

13. Równania kwadratowe

Stopień uporządkowanego równania z jedną niewiadomą rozpoznajemy po wykładniku potęgi, w której podstawą jest ta niewiadoma.

Stopniem uporządkowanego równania jest najwyższy z tych wykładników.

Np.: $x^4 + 5x^2 - 1 = 0$ – równanie stopnia czwartego z niewiadomą x ,

$2y^3 + 2y^2 - 3y = 0$ – równanie stopnia trzeciego z niewiadomą y ,

$2x \cdot (x+1) = x$ – równanie stopnia drugiego z niewiadomą x .

Ćwiczenie 1. Określ stopień równania:

a) $x^2 - 16 = 0$, b) $2x - 3 = 0$, c) $x^2 = 27$, d) $2x^2 + 5x = 0$,

e) $x^2(3x - x^2) = 10$, f) $x^5 - 1 = 0$, g) $x^2 - 6x + 5 = 0$, h) $x(x - 2) = 5$.

Obecnie poznamy równania stopnia drugiego zwane **równaniami kwadratowymi**.

Definicja

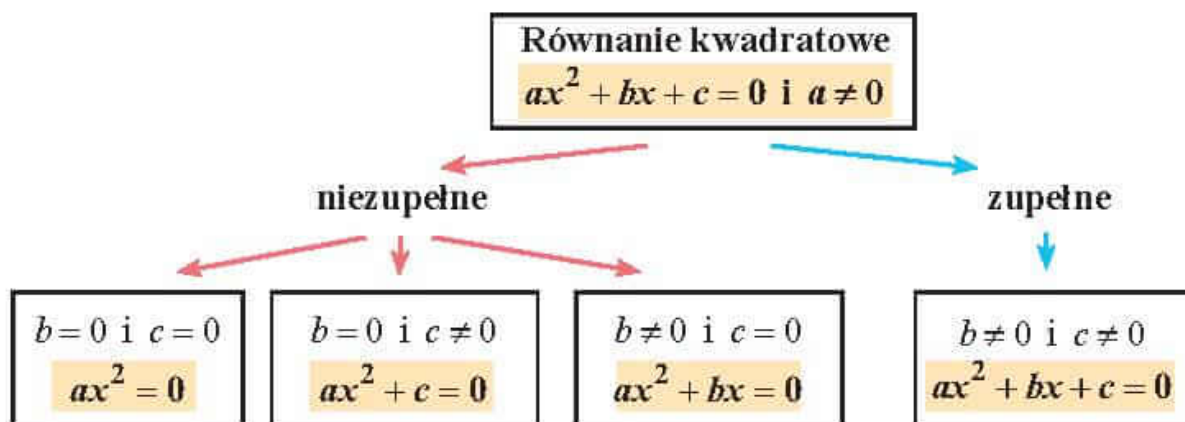
Równanie, które da się przedstawić w postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ oraz a, b, c są liczbami rzeczywistymi, nazywamy **równaniem kwadratowym** (**równaniem stopnia drugiego**) z niewiadomą x .

Liczby a, b, c nazywamy współczynnikami liczbowymi równania kwadratowego.

Ćwiczenie 2. Podaj współczynniki liczbowe równania kwadratowego:

a) $2x^2 - 6x + 3 = 0$, b) $-3x^2 + 8x = 0$, c) $-x^2 + 9 = 0$, d) $6x^2 = 0$, e) $2x - x^2 = 1$.

Wśród równań kwadratowych wyróżniamy równania kwadratowe zupełne i niezupełne.



Przypomnijmy

Pierwiastkiem (rozwiązaniem) równania nazywamy każdą liczbę, która spełnia równanie, tzn. liczbę, po wstawieniu której w miejsce niewiadomej lewa L strona równania jest równa stronie prawej P .

Ćwiczenie 3. Sprawdź, która z liczb: -4 , -3 , 0 , π jest pierwiastkiem równania:

a) $x^2 - \pi^2 = 0$, b) $x^2 + x - 12 = 0$, c) $x(x+3) = 0$, d) $(x+3)(x+4) = 0$.

Równania kwadratowe niezupełne

Rozwiązując równanie kwadratowe niezupełne, korzystamy z jednej z dwóch podanych niżej własności działań na liczbach:

1° kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną,

Jeżeli $a \in \mathbf{R}$, to $a^2 \geq 0$.

2° iloczyn dwóch liczb jest równy 0, gdy co najmniej jedna z nich jest równa 0.

Jeżeli $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ i $a \cdot b = 0$,
to $a = 0$ lub $b = 0$.

Sposoby rozwiązywania takich równań pokażemy na przykładach.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $7x^2 = 0$.

Rozwiązanie

$$7x^2 = 0 \quad / : 7$$

$$x^2 = 0, \text{ więc } x = 0 \quad (\text{bo } 0^2 = 0).$$

Odp.: $x_0 = 0$.

Równanie $ax^2 = 0$, gdzie $a \neq 0$,
ma jedno rozwiązanie równe 0.

Ćwiczenie 4. Rozwiąż równanie: a) $-3x^2 = 0$, b) $\frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2$, c) $0 = 5x^2$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $4x^2 - 25 = 0$.

Rozwiązanie

I sposób:

$$4x^2 - 25 = 0$$

korzystamy z wzoru $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$(2x-5)(2x+5) = 0$$

$$2x-5=0 \quad \text{lub} \quad 2x+5=0$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{5}{2}$$

$a \cdot b = 0$ wtedy
i tylko wtedy,
gdy
 $a = 0$ lub $b = 0$

Odp.: $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

II sposób:

$$4x^2 - 25 = 0$$

$$4x^2 = 25 \quad / : 4$$

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$\frac{25}{4} > 0 \text{ i } x^2 > 0$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

pierwiastkujemy
obie strony
równania

$$|x| = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{5}{2}$$

Ćwiczenie 5. Rozwiąż równanie:

a) $16x^2 - 9 = 0$, b) $-3x^2 = -27$, c) $x(x-2) = 3x^2 - 2x - 8$.

Przykład 3. Uzasadnij, że równanie $x^2 + 4 = 0$ nie ma rozwiązania.

Rozwiązanie

I sposób:

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej x jest liczbą nieujemną, tzn. $x^2 \geq 0$, więc $x^2 + 4 > 0$.

II sposób:

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej x jest liczbą nieujemną, więc nie istnieje liczba, która podniesiona do kwadratu jest równa -4 .

Zatem równanie $x^2 + 4 = 0$ nie ma rozwiązania.

C.N.U.

Ćwiczenie 6. Uzasadnij, że równanie:

a) $2x^2 + 3 = 0$, b) $-x^2 - 2 = 0$

nie ma rozwiązania.

Uwaga

Jeżeli równanie kwadratowe ma postać $x^2 = k$, to gdy:

- $k > 0$, równanie ma dwa rozwiązania $x_1 = -\sqrt{k}$, $x_2 = \sqrt{k}$, bo $x = \pm\sqrt{k}$,
- $k = 0$, równanie ma jedno rozwiązanie $x_0 = 0$, bo $x = \sqrt{0}$,
- $k < 0$, równanie nie ma rozwiązania.

Ćwiczenie 7. Rozstrzygnij, ile rozwiązań ma równanie:

a) $\frac{1}{2}x^2 + 3 = 0$, b) $4 - x^2 = 0$, c) $3x^2 = 2(x-1)^2 + 4x - 2$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie $3x^2 + 4x = 0$.

Rozwiązanie $3x^2 + 4x = 0$

$$x \cdot (3x + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad 3x + 4 = 0$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Odp.: $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 0$.

Wylączamy wspólny czynnik x poza nawias.

$m \cdot n = 0$ wtedy i tylko wtedy,
gdy $m = 0$ lub $n = 0$

Ćwiczenie 8. Rozwiąż równanie:

a) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$, b) $3x^2 - 5x = x^2 - x$, c) $(x-2)^2 = 4$, d) $\frac{1}{2}x^2 + x = \frac{1}{2}x + x^2$.

Uwaga

Równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $b \neq 0$,

ma dwa pierwiastki: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. Stopień równania: a) 2, b) 1, c) 2, d) 2, e) 4, f) 5, g) 2, h) 2. 3. a) π , b) -4 , c) $0, -3$, d) $-3, -4$.
 5. a) $x_1 = -\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, b) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.
 7. a) 0, b) 2, c) 1. 8. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, c) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, d) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Zadania utrwalające

 **13.1.** Spośród równań oznaczonych cyframi od **1** do **9** wybierz te, które są równaniami kwadratowymi, i zapisz je w postaci $ax^2 + bx + c = 0$ oraz określ, czy równanie jest równaniem kwadratowym niezupełnym.

- 1** $(3-x)(3+x) = 0$, **2** $x^2 - 17 = 130 - 2x^2$, **3** $5x^2 - 4x = 5(x^2 - 2)$,
4 $15x(x-3) = 4x(3-x)$, **5** $(x+4)^2 - (x-1)^2 = 17$, **6** $(3y-2)^2 = 8(y+1)^2 - 100$,
7 $\frac{y^2}{6} + 2y = \frac{6+y}{7}$, **8** $\frac{z(z+1)}{3} = \frac{(z-1)z}{4}$, **9** $(4x+6)(4x-6) = 28$.

13.2. Sprawdź, która z liczb -2 , 2 , 0 jest pierwiastkiem równania:

a) $x^2 - 4 = 0$, b) $x^2 - 2 = 0$, c) $x^2 - x - 6 = 0$, d) $3x(x+2) = 0$.

13.3. Napisz równanie kwadratowe w postaci $ax^2 + bx + c = 0$ i określ, czy jest ono niezupełne, gdy:

a) $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = 0$, b) $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, c) $a = -4$, $b = 0$, $c = \sqrt{3}$.

13.4. Pierwiastkami równania kwadratowego $3x^2 + bx + c = 0$ są liczby 0 i 2 .

 *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wynika z tego, że:

A. $b = 0$ i $c = 0$, B. $b = -6$ i $c = 0$, C. $b = -6$ i $c \neq 0$, D. $b \neq -6$ i $c \neq 0$.

13.5. Rozwiąż równanie:

a) $3x^2 = 0$,

b) $x^2 - 9 = 0$,

c) $x^2 = 121$,

d) $-2x^2 - 8 = 0$,

e) $x^2 - 3 = 0$,

f) $x^2 - \frac{4}{25} = 0$,

g) $5x^2 = 99 - 6x^2$,

h) $(x+5)(x-5) = 24$,

i) $x^2 + 169 = 0$,

j) $x^2 - 12x = 2(x-3)^2$,

k) $(x-4)^2 = 9 - 8x$,

l) $(y+3)^2 = 3(2y+6)$.

13.6. Rozwiąż równanie:

a) $x^2 + 4x = 0$,

b) $x^2 + 8x = 0$,

c) $2x^2 - 10x = 0$,

d) $x^2 - 5x = 0$,

e) $x^2 = -\frac{1}{2}x$,

f) $3x^2 - \frac{9}{4}x = 0$,

g) $y^2 + 0,75y = 0,25y$,

h) $\frac{3}{4}y^2 + 9 = \frac{y}{2} + (y-3)^2$,

i) $\frac{4}{3}y^2 = \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}y^2$.

13.7. Rozwiąż równanie:

a) $m^2 - 18 = 0$,

b) $\frac{1}{4}t^2 = \frac{3}{16}t$,

c) $\frac{1}{3}r^2 - 5\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$,

d) $0,49p^2 = 49$,

e) $14y^2 = 196y$,

f) $\frac{1}{4}v^2 + 16 = 0$.

13.8. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Liczba $\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem równania:

A. $x^2 - 3 = 0$,

B. $x^2 + \sqrt{3}x = 0$,

C. $x^2 - \sqrt{3} = 0$,

D. $6x^2 - 6\sqrt{3} = 0$.

Równanie kwadratowe zupełne a wzory skróconego mnożenia

Przypomnijmy

Przedstaw w postaci różnicy kwadratów wyrażenie $x^2 + 5x$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} x^2 + 5x &= x^2 + 2 \cdot \overbrace{\frac{5}{2}}^5 \cdot x + \overbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^2}^0 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Stosujemy wzór $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$,
gdzie $a = x$ i $b = \frac{5}{2}$.

Ćwiczenie 9. Przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń sumę (różnicę):

a) $x^2 + 7x$, b) $x^2 - 8x$, c) $x^2 + \frac{1}{2}x$.

W rozwiązywaniu równań kwadratowych zupełnych postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $c \neq 0$, bardzo przydatne są wzory skróconego mnożenia: kwadrat sumy i różnicy dwóch wyrażeń oraz różnica kwadratów.

Przykład 5. Stosując wzór skróconego mnożenia, rozwiąż równanie:

a) $x^2 - 2x - 8 = 0$, b) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = 0$.

Rozwiązanie

a)
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ x^2 - 2x &= 8 \end{aligned}$$

Przedstawiamy różnicę $x^2 - 2x$ w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń.

$$x^2 - \overbrace{2 \cdot 1}^2 \cdot x + \overbrace{1^2 - 1^2}^0 = 8$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$(x - 1)^2 - 1^2 = 8$$

$$(x - 1)^2 = 9$$

$$x - 1 = \pm \sqrt{9}$$

$$x - 1 = 3 \quad \text{lub} \quad x - 1 = -3$$

$$x = 4 \quad \text{lub} \quad x = -2.$$

b)
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = 0 \quad / \cdot 2$$

Mnożymy obie strony równania przez 2, by otrzymać przy x^2 współczynnik 1.

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 6 = 0$$

$$4x = 2 \cdot 2x \quad \text{i} \quad 2^2 - 2^2 = 0$$

$$(x - 2)^2 = -2.$$

Równość fałszywa, bo $(x - 2)^2 \geq 0$.

Odp.: a) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, b) równanie nie ma rozwiązania.

Ćwiczenie 10. Stosując wzór skróconego mnożenia, rozwiąż równanie:

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$, b) $x^2 + 8x + 12 = 0$, c) $x^2 - 14x - 51 = 0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

9. a) $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$, b) $(x - 4)^2 - 16$, c) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$ 10. a) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, b) $x_1 = -6$, $x_2 = -2$,

c) $x_1 = -3$, $x_2 = 17$. Wskazówka. a) $(x + 3)^2 = 4$, b) $(x + 4)^2 = 4$, c) $(x - 7)^2 = 100$.

Zadania utrwalające

13.9. Przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń sumę (różnicę):

a) $x^2 + 2x$, b) $x^2 + \frac{3}{4}x$, c) $x^2 - 10x$, d) $x^2 + 0,25x$.

13.10. Rozwiąż równanie:

a) $(x-7)^2 = 0$, b) $(x-3)^2 = 32$, c) $5(x+2)^2 = \frac{4}{5}$,
d) $\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{1}{9} = 0$, e) $5(x-8)^2 = 25$, f) $(x+2)^2 = 12$.

13.11. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeden pierwiastek ma równanie:

A. $(x-3)^2 = -2$, B. $2(x-3)^2 = 0$, C. $(x-3)^2 = 2$, D. $(x-3)^2 + 2 = 0$.

13.12. Rozwiąż równanie:

a) $x^2 + 16x + 64 = 0$, b) $x^2 - 14x + 49 = 0$, c) $x^2 - 20x + 100 = 0$,
d) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$, e) $x^2 + x + 0,25 = 0$, f) $x^2 - \sqrt{2}x + 0,5 = 0$.

13.13. Stosując wzory skróconego mnożenia, rozwiąż równanie:

a) $x^2 - 4x = 16$, b) $x^2 + 8x = 20$, c) $x^2 + 6x = -3$,
d) $x^2 + x = 2$, e) $x^2 - 5x = \frac{3}{4}$, f) $x^2 - 7x = 3\frac{3}{4}$,
g) $x^2 + 3x = 4$, h) $x^2 + 9x = \frac{19}{4}$, i) $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}$.

13.14. Rozwiąż równanie:

a) $x^2 - 2x - 35 = 0$, b) $x^2 + 18x - 144 = 0$, c) $x^2 - 6x - 16 = 0$,
d) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 6 = 0$, e) $x^2 - 4\sqrt{2}x - 1 = 0$, f) $x^2 - \sqrt{7}x - \frac{1}{2} = 0$.

13.15. Rozwiąż równanie:

a) $3x^2 + 5x = 2$, b) $5x^2 + 9x = 2$, c) $4x^2 - 12x = 7$,
d) $4x^2 + 2x = \frac{15}{4}$, e) $3x^2 - 1,8x = 2,73$, f) $5x^2 - 20x = 8,8$.

Wyróżnik równania kwadratowego i liczba jego pierwiastków

Przykład 6. Wykaż, że równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, można przedstawić w postaci $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Rozwiązanie

$$Z \text{ (założenie): } ax^2 + bx + c = 0 \text{ i } a \neq 0, \quad \Bigg| \quad T \text{ (teza): } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Dowód: $ax^2 + bx + c = 0 \quad / : a$ $a \neq 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \text{ skąd } x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \overbrace{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}x}^0 + \overbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}^0 = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Wyrażenie $x^2 + \frac{b}{a}x$ rozszerzamy do postaci $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

$$\frac{4a}{4a} = 1$$

c.n.w.

Uwaga

- Każde równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ można przedstawić

w postaci $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

- Liczbę $b^2 - 4ac$ nazywamy wyróżnikiem równania kwadratowego i oznaczamy Δ (czytaj: delta), czyli $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ćwiczenie 11. Oblicz wyróżnik Δ równania kwadratowego:

a) $2x^2 - x - 1 = 0$, b) $-x^2 - 10x + 11 = 0$, c) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 6 = 0$, d) $25x^2 + 1 = 0$.

Liczba pierwiastków równania kwadratowego zależy od tego, czy wyróżnik delta (Δ) jest liczbą dodatnią, ujemną czy też równą zero. Jak myślisz, dlaczego?

Ćwiczenie 12. Uzasadnij, że liczba pierwiastków równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ zależy od znaku wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$.

Twierdzenie

Jeżeli w równaniu $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$:

- 1 $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków,
- 2 $\Delta = 0$, to liczba $x_0 = -\frac{b}{2a}$ jest pierwiastkiem równania,
- 3 $\Delta > 0$, to liczby $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ są pierwiastkami równania.

Dowód:

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ zapisujemy w postaci $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$,

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$ oraz $4a^2 > 0$, gdy $a \neq 0$.

- 1 $\Delta < 0$, wtedy $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$, więc równanie kwadratowe **nie ma rozwiązania**,

- 2 $\Delta = 0$, wtedy $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{0}{4a^2}$, czyli $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$,

$$x + \frac{b}{2a} = 0, \text{ więc } x_0 = -\frac{b}{2a},$$

- 3 $\Delta > 0$, wtedy $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

$$\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \cdot |a|} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ więc}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad \text{c.n.d.}$$

Postać równania	$ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $\Delta = b^2 - 4ac$		
Znak (wartość) wyróżnika Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Pierwiastki równania	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	nie ma rozwiązania
	dwa pierwiastki x_1 i x_2	jeden pierwiastek x_0	zero pierwiastków

Przykład 7. Oblicz wyróżnik Δ i rozwiąż równanie:

a) $3x^2 - x - 4 = 0$, b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$, c) $2x^2 + x + 8 = 0$.

Rozwiązanie

a) $3x^2 - x - 4 = 0$

($a = 3$, $b = -1$, $c = -4$)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 49$$

$$\Delta > 0, \text{ więc } \sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - 7}{2 \cdot 3} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + 7}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

($a = 4$, $b = -4$, $c = 1$)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$x_0 = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

c) $2x^2 + x + 8 = 0$, ($a = 2$, $b = 1$, $c = 8$)

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 1 - 64 = -63.$$

$$\Delta < 0$$

Odp.: a) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{3}$, b) $x_0 = \frac{1}{2}$, c) równanie nie ma pierwiastków, bo $\Delta < 0$.

Ćwiczenie 13. Oblicz wyróżnik Δ i rozwiąż równanie:

a) $2x^2 - 20x = 22$, b) $3x^2 - x + 1 = 0$, c) $\frac{1}{8}x^2 - 2x + 8 = 0$.

Ćwiczenie 14. Rozwiąż równanie:

a) $(x-5)(x-3) = 0$, b) $x(x-5) = 2x-10$, c) $(x-3)^2 = 8-4x$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $\Delta = 9$, b) $\Delta = 144$, c) $\Delta = -3$, d) $\Delta = -100$.

12. *Wskazówka.* Zauważ, że w ułamku $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ mianownik $4a^2$ jest zawsze liczbą dodatnią, więc znak tego ułamka zależy tylko od znaku licznika, czyli wyróżnika $b^2 - 4ac$.

13. a) $x_1 = -1$, $x_2 = 11$, b) nie ma rozwiązania, c) $x_0 = 8$. 14. a) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, b) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, c) $x_0 = 1$.

Zadania utrwalające

13.16. Oblicz wyróżnik Δ równania kwadratowego i określ, czy to równanie ma rozwiązanie.

- a) $x^2 - x - 1 = 0$, b) $3x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, c) $x^2 + \sqrt{8}x + 2 = 0$,
 d) $6x^2 - 13x + 6 = 0$, e) $x^2 - 3x - 10 = 0$, f) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

13.17. Określ liczbę pierwiastków równania:

- a) $x^2 - \pi x + 2 = 0$, b) $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$, c) $2^{98} \cdot x^2 + 2^{50} \cdot x + 1 = 0$,
 d) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{6}x + \sqrt{2} = 0$, e) $(\log_2 5) \cdot x^2 - x + \log_2 1 = 0$, f) $\sqrt[3]{9}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt[3]{3} = 0$.

13.18. Rozwiąż równanie:

- a) $x^2 = x$, b) $14x - x^2 = 0$, c) $x^2 - 2x = -1$,
 d) $x^2 - 6x = -10$, e) $16 = 10x - x^2$, f) $0,4x^2 + 1,2x = 4$.

13.19. Rozwiąż równanie:

- a) $y^2 - 2y + 1 = \frac{1}{4}$, b) $y^2 - 0,2y + 0,03 = 0,02$, c) $5x^2 - 4 = 2(x^2 - 2)$,
 d) $15x(x - 3) = 4x(3 - x)$, e) $\frac{x(x+4)}{2} = \frac{x(x-8)}{4} + 8x$,
 f) $(x+4)^2 + (x-1)^2 = 17$, g) $(2x-1)^2 + (4x+1)(4x-1) = 4x(1-2x)$,
 h) $2x(x-3) - (x+1)(x+2) = (2x-3)^2$, i) $6 - (1-x)^2 = (2x-3)^2 - (3x+2)^2$.

13.20. Określ, czy równanie kwadratowe jest zupełne, czy niezupełne, i je rozwiąż.

- a) $5x^2 = 10x$, b) $(x-2)^2 = 4$, c) $(y+7)^2 = 1\frac{7}{9}$,
 d) $x^2 + 2x = 8$, e) $5x(x+2) = 0$,
 f) $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}\left(y - \frac{1}{3}\right)$, g) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 = 1$,
 h) $\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2 + 2x^2 = 2$, i) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x - \sqrt{5}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}x - \sqrt{5} + 2$.

13.21. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Wyróżnik Δ równania $\sqrt[3]{2} \cdot x^2 - \sqrt[6]{6} \cdot x + \sqrt[3]{3} = 0$ jest równy:

- A. $\sqrt[4]{6} - 4\sqrt[3]{6}$, B. $\sqrt[12]{6} - 4\sqrt[3]{6}$, C. $\sqrt[3]{6} - 24$, D. $-3\sqrt[3]{6}$.

Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania równań kwadratowych

Przykład 8. Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest równa 3281.

Jakie to liczby?

Rozwiązanie Oznaczamy: $n, n+1$ – dwie kolejne liczby naturalne.

Wtedy: n^2 – kwadrat liczby naturalnej n ,

$(n+1)^2$ – kwadrat liczby naturalnej $n+1$,

$n^2 + (n+1)^2$ – suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych.

$$n^2 + (n+1)^2 = 3281, \text{ więc}$$

$$n^2 + n - 1640 = 0, \text{ skąd}$$

$$\Delta = 6561, \quad n_1 = -42, \quad n_2 = 40.$$

*Liczba -42 nie spełnia warunków zadania,
bo nie jest liczbą naturalną.*

Jeżeli $n = 40$, to $n+1 = 41$.

Odp.: Liczby naturalne spełniające warunki zadania to 40 i 41.

Ćwiczenie 15. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 509.

Jakie to liczby?

Ćwiczenie 16. Suma połowy liczby x i jej kwadratu jest równa zero. Wyznacz tę liczbę.

Przykład 9. Ciało swobodnie spadające z wysokości h przebywa drogę, której wartość obliczamy z wzoru $h = \frac{1}{2}gt^2$, gdzie t oznacza czas spadania w sekundach i $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Nie uwzględniając oporu powietrza, oblicz czas spadania kamienia z wysokości 180 m.

Rozwiązanie Dane: $h = 180 \text{ m}$, $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, | obliczyć: t , gdzie $t > 0$.

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \text{ więc} \quad 180 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$$

$$180 = 5t^2 \quad / :5$$

$$36 = t^2$$

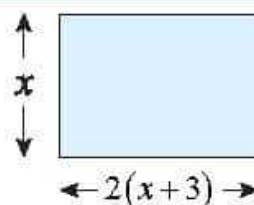
$$t = 6 \text{ lub } t = -6.$$

Z założenia $t > 0$, więc $t = 6$.

Odp.: Czas spadania kamienia jest równy 6 sekund.

Ćwiczenie 17. Samochód o masie (m) równej 800 kg ruszył ze skrzyżowania. Oblicz, jaką prędkość uzyskał samochód w chwili, gdy jego energia kinetyczna (E_k) była równa 80 000 J. *Wskazówka.* $E_k = \frac{mv^2}{2}$.

Przykład 10. Pole prostokąta jest równe 176 cm^2 . Długości boków prostokąta zapisano w postaci wyrażeń algebraicznych. Oblicz długości boków prostokąta.



Rozwiązanie

Dane: $P = 176 \text{ cm}^2$, **obliczyć:** x – długość boku prostokąta ($x > 0$),
 $2(x+3)$ – długość drugiego boku prostokąta.

$P = x \cdot 2(x+3)$ i $P = 176$, więc

$$x \cdot 2(x+3) = 176$$

$$2x^2 + 6x = 176 \quad / : 2$$

$$x^2 + 3x = 88$$

$$x_1 = -11, \quad x_2 = 8.$$

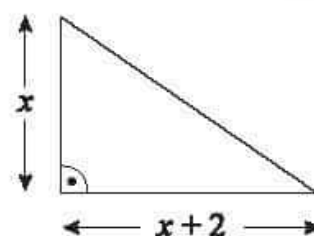
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{361}{4}$$

$$11 < 0$$

Z założenia $x > 0$, więc $x = 8$ i $2(8+3) = 22$.

Odp.: Długości boków prostokąta to 8 cm i 22 cm.

Ćwiczenie 18. Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2 . Długości przyprostokątnych zapisano w postaci wyrażeń algebraicznych, jak na rysunku. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta.



Przykład 11. Rozwiąż równanie: a) $|x^2 - 2x| = 1$, b) $x^2 - 9|x+4| = 0$.

Rozwiązanie

a) $|x^2 - 2x| = 1$, więc

$$x^2 - 2x = -1 \quad \text{lub} \quad x^2 - 2x = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \text{lub} \quad x = 1 - \sqrt{2} \quad \text{lub} \quad x = 1 + \sqrt{2}.$$

$$x - 1 = 0$$

Odp.: $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + \sqrt{2}$.

Jeśli $a \geq 0$ i $|x| = a$,
to $x = a$ lub $x = -a$.

$$\Delta = 8, \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{b) } x^2 - 9|x+4| = 0 \text{ i } |x+4| = \begin{cases} x+4, & \text{gdy } x \geq -4 \\ -(x+4), & \text{gdy } x < -4 \end{cases}$$

Równanie $x^2 - 9|x+4| = 0$ przyjmuje postać

$$x^2 - 9x - 36 = 0, \text{ gdy } x \geq -4 \quad \text{lub} \quad x^2 + 9x + 36 = 0, \text{ gdy } x < -4$$

$$\Delta = 225, \sqrt{\Delta} = 15$$

$$\Delta = -63$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 12$$

równanie nie ma rozwiązania.

$$-3 > -4 \text{ i } 12 > -4, \text{ więc } x_1 = -3 \text{ lub } x_2 = 12.$$

$$\text{Odp.: } x_1 = -3, x_2 = 12.$$

Ćwiczenie 19. Rozwiąż równanie: a) $|x^2 - 4| = 4$, b) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. 12, 13, 14. Wskazówka. Oznacz $n-1, n, n+1$ – trzy kolejne liczby naturalne.

16. $-\frac{1}{2}$ lub 0. 17. $v = 10\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, czyli $v \approx 14,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. 18. 10 cm i 12 cm. Wskazówka. $\frac{x \cdot (x+2)}{2} = 60$.

19. a) $x_1 = -2\sqrt{2}, x_2 = 0, x_3 = 2\sqrt{2}$, b) $x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = 3, x_4 = 4$.

Zadania utrwalające

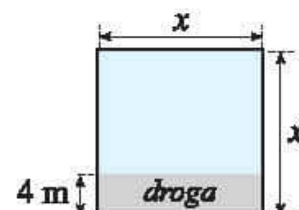
13.22. Iloczyn dwóch liczb jest równy 24. Wiedząc, że jedna z liczb jest o 2 większa od drugiej, znajdź te liczby.

13.23. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego, wiedząc, że są one kolejnymi:

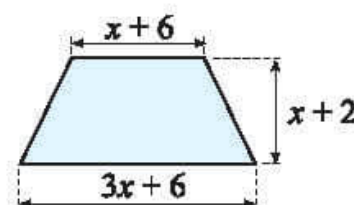
- liczbami naturalnymi,
- parzystymi liczbami naturalnymi.

13.24. Plac zabaw dla dzieci ma kształt prostokąta o polu 180 m^2 . Jeden z boków placu jest o 3 m krótszy od drugiego. Oblicz wymiary placu zabaw.

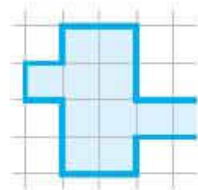
13.25. Z działki w kształcie kwadratu rolnik odsprzedał gminie pas ziemi na drogę. Jakie były pierwotnie wymiary działki, jeżeli po sprzedaży pozostało mu 96 arów ziemi?



13.26. Pole trapezu równoramiennego jest równe 220 cm^2 . Podstawy trapezu i jego wysokość opisano w postaci wyrażeń algebraicznych, jak na rysunku. Oblicz długości boków trapezu.



- 13.27.** Boki dwóch kwadratów różnią się o 2, a suma ich pól jest równa 10. Oblicz długości boków tych kwadratów.
- 13.28.** Pole rombu jest równe 600 cm^2 , a długości jego przekątnych różnią się o 10 cm. Oblicz długości przekątnych i obwód tego rombu.
- 13.29.** Pole wielokąta przedstawionego na rysunku jest równe 99. Oblicz jego obwód.
- 13.30.** Spadający kamień o masie 3 kg w chwili uderzenia o ziemię miał energię kinetyczną o wartości równej 24 J. Z jaką prędkością kamień uderzył o ziemię?
- 13.31.** Jeden prostokąt ma wymiary $5 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$. Drugi prostokąt ma boki odpowiednio dłuższe od boków pierwszego prostokąta o tę samą liczbę centymetrów. Wiedząc, że różnica pól tych prostokątów jest równa 30 cm^2 , oblicz wymiary drugiego prostokąta



13.32. Rozwiąż równanie:

a) $x^2 + 3|x-1| - 1 = 0$,

b) $x^2 + 2 = 3|x|$,

c) $(x-2) \cdot |x-3| = 0$,

d) $(x-1) \cdot |x+2| = 10$,

e) $|x| \cdot x - 4x = 0$,

f) $|x^2 - 6x - 8| = 8$,

g) $\frac{x^2+1}{x} = \frac{13}{6}$,

h) $\frac{x^2+6}{x} = 5$,

i) $\frac{x^2-10}{|x|} = 3$.

Suma i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego

Przykład 12. Czy istnieje para liczb całkowitych x_1 i x_2 spełniająca warunki:

$$x_1 \cdot x_2 = -15, \quad x_1 + x_2 = 2?$$

Rozwiązanie Liczbę -15 można zapisać w postaci iloczynu dwóch różnych liczb całkowitych x_1 i x_2 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_1 & x_2 & & x_1 & x_2 & & x_1 & x_2 \\
 x_1 \cdot x_2 & = & (-1) \cdot 15 & \text{lub} & 1 \cdot (-15) & \text{lub} & (-3) \cdot 5 & \text{lub} & 3 \cdot (-5) \\
 & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 x_1 + x_2 & = & 14 & & -14 & & 2 & & -2
 \end{array}$$

Odp.: Warunki zadania spełnia para liczb -3 i 5 , bo $-3 \cdot 5 = -15$ oraz $-3 + 5 = 2$.

Ćwiczenie 20. Oblicz w pamięci liczby x_1 i x_2 wiedząc, że:

a) $x_1 + x_2 = 3$ i $x_1 \cdot x_2 = 2$, b) $x_1 + x_2 = 7$ i $x_1 \cdot x_2 = 10$,

c) $x_1 + x_2 = 2$ i $x_1 \cdot x_2 = -8$, d) $x_1 + x_2 = -5$ i $x_1 \cdot x_2 = 4$.

Przykład 13. Sprawdź, czy równanie ma pierwiastki. Jeżeli tak, oblicz ich sumę i iloczyn.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$, b) $x^2 - x - 1 = 0$, c) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Rozwiązanie

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$, $\Delta = 25 - 24 = 1$, $\sqrt{\Delta} = 1$ $x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$, $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$ $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \cdot x_2 = 6$.	b) $x^2 - x - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 4 = 5$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$ $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{1-(\sqrt{5})^2}{4} = -1$.	c) $x^2 - 2x + 1 = 0$ $(x-1)^2 = 0$ $(x-1)(x-1) = 0$ $x-1 = 0$ lub $x-1 = 0$ $x_1 = 1$ lub $x_2 = 1$ $x_1 + x_2 = 1+1 = 2$ $x_1 \cdot x_2 = x_1^2 = 1$.
---	---	---

Ćwiczenie 21. Sprawdź, czy równanie ma pierwiastki. Jeżeli tak, oblicz ich sumę i iloczyn.

a) $x^2 - 12x + 35 = 0$, b) $2x^2 + x + 7 = 0$, c) $\sqrt{2}x^2 + x = 0$.

Twierdzenie

Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ wtedy

i tylko wtedy, gdy: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Powyższe związki nazywamy **wzorami Viète'a**.

Udowodnimy twierdzenie proste: „Jeżeli liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwa-

dratowego $ax^2 + bx + c = 0$, to $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ”.

Z (założenie): $a \neq 0$ i $\Delta \geq 0$,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

T (teza): $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Dowód: $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \quad \text{c.n.u.}$$

Udowodnimy twierdzenie odwrotne: „Jeżeli liczby x_1 i x_2 spełniają warunki

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, gdy $a \neq 0$, to liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, czyli że $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ oraz $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ ”.

Dowód:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ skąd} & x_2 = -x_1 - \frac{b}{a} \quad \text{i} \quad x_1 = -x_2 - \frac{b}{a} \\
 x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \text{ więc} & x_1 \cdot \left(-x_1 - \frac{b}{a}\right) = \frac{c}{a} \quad \left| \begin{array}{l} \left(-x_2 - \frac{b}{a}\right) \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ -x_2^2 - \frac{b}{a} \cdot x_2 - \frac{c}{a} = 0 \quad / \cdot (-a) \end{array} \right. \\
 & -x_1^2 - \frac{b}{a} \cdot x_1 - \frac{c}{a} = 0 \quad / \cdot (-a) \quad \left| \begin{array}{l} -x_2^2 - \frac{b}{a} \cdot x_2 - \frac{c}{a} = 0 \quad / \cdot (-a) \\ ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \end{array} \right. \quad \text{i} \quad ax_2^2 + bx_2 + c = 0. \quad \text{c.k.d.}
 \end{array}$$

Ćwiczenie 22. Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków (o ile istnieją) równania:

a) $x^2 - 2x - 8\sqrt{3} = 0$, b) $x^2 - x + 1 = 0$, c) $\sqrt{2}y^2 - 7y + 3 = 0$.

Jeżeli równanie kwadratowe ma postać $x^2 + bx + c = 0$ i ma pierwiastki całkowite, możemy te pierwiastki szybko obliczyć, korzystając z wzorów Viète'a.

Na przykład: $x^2 + 15x + 44 = 0$, gdzie $b = 15$ i $c = 44$, czyli $x_1 \cdot x_2 = 44$ i $x_1 + x_2 = -15$.

Pierwszy krok	Drugi krok	Trzeci krok																												
	odgadujemy czynniki iloczynu 44 tak, by ich suma lub różnica była równa $ -15 $	określamy znaki pierwiastków tak, by zgadzała się ich suma																												
<table><tr><td>$x_1 \cdot x_2$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$x_1 + x_2$</td></tr><tr><td>44</td><td></td><td></td><td>-15</td></tr></table>	$x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	44			-15	<table><tr><td>$x_1 \cdot x_2$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$x_1 + x_2$</td></tr><tr><td>44</td><td>4</td><td>11</td><td>-15</td></tr><tr><td>44</td><td>-4</td><td>-11</td><td>-15</td></tr></table>	$x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	44	4	11	-15	44	-4	-11	-15	<table><tr><td>$x_1 \cdot x_2$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$x_1 + x_2$</td></tr><tr><td>44</td><td>-4</td><td>-11</td><td>-15</td></tr></table>	$x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	44	-4	-11	-15
$x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$																											
44			-15																											
$x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$																											
44	4	11	-15																											
44	-4	-11	-15																											
$x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$																											
44	-4	-11	-15																											

Ćwiczenie 23. Skorzystaj z wzorów Viète'a i oblicz w pamięci pierwiastki równania kwadratowego: a) $x^2 - 12x + 35 = 0$, b) $x^2 + 4x - 12 = 0$, c) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Przykład 14. Sprawdź, czy równanie $x^2 + \sqrt{2}x - 3 = 0$ ma pierwiastki x_1 i x_2 . Jeśli tak, to oblicz:

a) $x_1 + x_2$, b) $x_1 \cdot x_2$, c) $x_1^2 + x_2^2$, d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, gdy $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$.

Rozwiązanie

$$x^2 + \sqrt{2}x - 3 = 0, \quad \Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 14.$$

$\Delta > 0$, więc równanie ma dwa pierwiastki

Stosując wzory Viète'a, obliczamy:

a) $x_1 + x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2},$

$$\text{b) } x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{1} = -3,$$

$$\text{c) } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-\sqrt{2})^2 - 2(-3) = 8, \quad a^2 + b^2 - (a+b)^2 - 2ab$$

$$\text{d) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 \cdot x_2} + \frac{x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\sqrt{2}}{-3} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad \frac{1}{x_1} = \frac{x_2}{x_1 x_2} \text{ i } \frac{1}{x_2} = \frac{x_1}{x_1 x_2}$$

$$\text{Odp.: a) } x_1 + x_2 = -\sqrt{2}, \text{ b) } x_1 \cdot x_2 = -3, \text{ c) } x_1^2 + x_2^2 = 8, \text{ d) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ćwiczenie 24. Liczby $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$ są pierwiastkami równania:

$$\text{a) } x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0, \quad \text{b) } x^2 - 2x - \sqrt{2} = 0, \quad \text{c) } x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} - 1 = 0.$$

$$\text{Oblicz: } \textbf{1} \quad x_1^2 + x_2^2, \quad \textbf{2} \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}.$$

Przykład 15. Nie obliczając pierwiastków równania kwadratowego, określ ich znaki.

$$\text{a) } 2x^2 - 5x - 4 = 0, \quad \text{b) } -2x^2 + 8x - 3 = 0.$$

Rozwiązanie Niech x_1 i x_2 będą pierwiastkami równania.

$$\text{a) } 2x^2 - 5x - 4 = 0, \quad \Delta = 57.$$

Określamy znak iloczynu $x_1 \cdot x_2$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{2} = -2, \text{ więc } x_1 \cdot x_2 < 0.$$

$x_1 \cdot x_2 < 0$ wtedy i tylko wtedy,

$$\text{gdy } \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$$

Zatem liczby x_1 i x_2 mają różne znaki (jedna z liczb jest dodatnia, a druga ujemna).

$$\text{b) } -2x^2 + 8x - 3 = 0, \quad \Delta = 40.$$

Określamy znak iloczynu pierwiastków

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \text{ więc } x_1 \cdot x_2 > 0.$$

$x_1 \cdot x_2 > 0$ wtedy i tylko wtedy,

$$\text{gdy } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$$

Zatem liczby x_1 i x_2 mają ten sam znak (obie są dodatnie lub obie są ujemne).

$$\text{Określamy znak sumy } x_1 + x_2: \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-8}{-2} = 4, \text{ więc } x_1 + x_2 > 0.$$

Ponieważ $x_1 x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$, to $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$.

Odp.: Pierwiastki równania są liczbami: a) o różnych znakach, b) dodatnimi.

Ćwiczenie 25. Nie obliczając pierwiastków równania kwadratowego, określ ich znaki.

$$\text{a) } x^2 - 17x + 2 = 0, \quad \text{b) } -3x^2 + x + 2\sqrt{7} = 0.$$

R

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, w którym $a \neq 0$ i $\Delta > 0$,
ma dwa pierwiastki x_1 i x_2 :

różnych znaków, gdy:	jednakowych znaków, gdy:	dodatnie, gdy:	ujemne, gdy:
$x_1 \cdot x_2 < 0$	$x_1 \cdot x_2 > 0$	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

Odpowiedzi do ćwiczeń

20. a) 1 i 2, b) 2 i 5, c) 4 i -2, d) -1 i -4. 21. a) Tak, 12 i 35, b) nie, c) tak, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i 0.

22. a) $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 \cdot x_2 = -8\sqrt{3}$, b) równanie nie ma pierwiastków, c) $x_1 + x_2 = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

23. a) 7 i 5, b) -6 i 2, c) -5 i 3. 24. a) **1** 5, **2** $-\sqrt{3}$, b) **1** $4 + 2\sqrt{2}$, **2** $-\sqrt{2}$, c) **1** 5, **2** $3 - 2\sqrt{2}$.

25. Pierwiastki równania są liczbami: a) dodatnimi, b) o różnych znakach.

Zadania utrwalające

13.33. Skorzystaj z wzorów Viéte'a i oblicz w pamięci pierwiastki równania kwadratowego:

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$, b) $x^2 - 13x - 14 = 0$, c) $x^2 - 7x + 12 = 0$.

13.34. Sprawdź, czy równanie ma pierwiastki.

a) $x^2 - x - 6 = 0$, b) $x^2 + 2x - 35 = 0$, c) $x^2 + 7x - 78 = 0$,
d) $x^2 - 6x - 27 = 0$, e) $x^2 + 12x + 35 = 0$, f) $-x^2 + 15x + 100 = 0$.

Jeśli tak, to zastosuj wzory Viéte'a i oblicz wartości wyrażeń:

1 $x_1 + x_2$, **2** $x_1 \cdot x_2$, **3** $2x_1x_2 - (x_1 + x_2)$, **4** $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$, **5** $x_1^2 + x_2^2$.

13.35. Nie obliczając pierwiastków równania, określ ich znaki.

a) $3x^2 + 13x - 10 = 0$, b) $-2x^2 + x - \sqrt{7} = 0$, c) $6x^2 - 12x + \pi = 0$.

13.36. Pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczby x_1 i x_2 . Oblicz współczynniki b i c ,
gdy:

a) $x_1 = 3$ i $x_1 + x_2 = 3$, b) $x_1 = 2$ i $x_1 \cdot x_2 = -6$,
c) $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_1 + x_2 = -1,5$, d) $x_1 = 0,8$ i $x_1 \cdot x_2 = 4$,
e) $x_2 = -5$ i $x_1 + x_2 = -3$, f) $x_2 = 9$ i $x_1 \cdot x_2 = -63$.

R

13.37. Pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczby x_1 i x_2 . Wyraż za pomocą współczynników b i c wartość wyrażenia:

a) $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$, b) $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2$, c) $(x_1 - x_2)^2$, d) $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2}$.

13.38. Ułóż równanie kwadratowe postaci $x^2 + bx + c = 0$, którego pierwiastkami są liczby x_1 i x_2 , gdy:

a) $x_1 = 2\sqrt{5}$ i $x_2 = 3\sqrt{5}$, b) $x_1 = \sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{18}$,
 c) $x_1 = -3 - \sqrt{5}$ i $x_2 = -3 + \sqrt{5}$, d) $x_1 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$ i $x_2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$,
 e) $x_1 = 9 \cdot 10^{20}$ i $x_2 = 10^{20}$, f) $x_1 = \log 4$ i $x_2 = \log 0,25$.

13.39. Uzasadnij, że jeśli równanie $x^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki x_1 i x_2 takie, że:

D a) $x_1 = 0$ i $x_2 < 0$, to $c = 0$ i $b > 0$, b) $x_1 = 0$ i $x_2 > 0$, to $c = 0$ i $b < 0$.

13.40. Uzasadnij, że jeśli pierwiastkami równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczby x_1 i x_2 ,

D to $x_1^4 + x_2^4 = b^4 - 4b^2c + 2c^2$.

Równania kwadratowe z parametrem

Przykład 16. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 2mx + 5m^2 - 12m = 0$ ma jeden pierwiastek?

Rozwiązanie Równanie $x^2 - 2mx + 5m^2 - 12m = 0$ ma postać równania $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a = 1$, $b = -2m$, $c = 5m^2 - 12m$.

Równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek, gdy $\Delta = 0$.

$$(-2m)^2 - 4 \cdot (5m^2 - 12m) = 0 \quad \Delta = 0$$

$$4m^2 - 4 \cdot (5m^2 - 12m) = 0 \quad / : 4$$

$$m^2 - 5m^2 + 12m = 0$$

$$m^2 - 3m = 0$$

$$m(m - 3) = 0,$$

$$m = 0 \text{ lub } m = 3.$$

$$a \cdot b = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a = 0 \text{ lub } b = 0$$

Odp.: Równanie $x^2 - 2mx + 5m^2 - 12m = 0$ ma jeden pierwiastek, gdy $m = 0$ lub $m = 3$.

Ćwiczenie 26. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m + 3 = 0$ ma jeden pierwiastek?

R

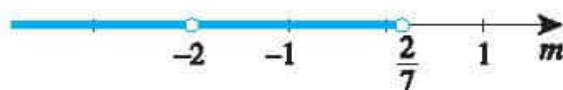
Przykład 17. Oblicz wartości parametru m , dla których równanie kwadratowe $(m+2)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste.

Rozwiązanie Równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste, jeśli spełniony jest układ warunków $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$. $a \neq 0$, bo równanie jest równaniem kwadratowym,
 $\Delta > 0$, bo równanie ma dwa pierwiastki

Równanie $(m+2)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0$ ma postać równania $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a = m+2$, $b = -4m$, $c = 4m - 1$ i spełnia warunki zadania, gdy:

$$\begin{cases} m+2 \neq 0 \\ (-4m)^2 - 4(m+2)(4m-1) > 0 \end{cases}, \text{ skąd}$$

$$\begin{cases} m \neq -2 \\ -28m + 8 > 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} m \neq -2 \\ m < \frac{2}{7} \end{cases}.$$



odpowiedź odczytujemy z rysunku

Odp.: $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; \frac{2}{7}\right)$.

Ćwiczenie 27. Dla jakich wartości parametru m równanie kwadratowe

$m^2x^2 + (m-3)x + \frac{1}{4} = 0$ nie ma rozwiązania?

Przykład 18. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + 3x + 2m - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki ujemne?

Rozwiązanie Równanie kwadratowe $x^2 + 3x + 2m - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki ujemne,

jeśli spełniony jest układ warunków: $\begin{cases} 1 \Delta > 0 \\ 2 x_1 \cdot x_2 > 0 \\ 3 x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$. $\Delta > 0$, bo równanie ma dwa pierwiastki
 $x_1x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 < 0$, bo pierwiastki równania są ujemne

1 $\Delta > 0$, gdy

$$\begin{aligned} 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1) &> 0 \\ 9 - 8m + 4 &> 0 \\ m &< \frac{13}{8} \end{aligned}$$

2 $x_1 \cdot x_2 > 0$, gdy

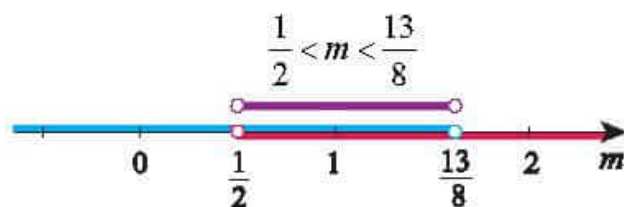
$$\begin{aligned} 2m - 1 &> 0 \\ m &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3 $x_1 + x_2 < 0$, gdy $-3 < 0$.

Nierówność $-3 < 0$ jest spełniona, gdy $m \in \mathbb{R}$.

1 $m < \frac{13}{8}$ i **2** $m > \frac{1}{2}$ i **3** $m \in \mathbb{R}$.

Zbiory **1**, **2** i **3** zaznaczamy na osi liczbowej i odczytujemy wynik: $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{13}{8}\right)$.



R

Ćwiczenie 28. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 4x + 1 - 3m = 0$ ma dwa pierwiastki dodatnie?

Przykład 19. Określ liczbę pierwiastków równania $(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ w zależności od wartości parametru m .

Rozwiązanie

Równanie $\otimes (m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ ma postać $ax^2 + bx + c = 0$,
gdzie $a = m-1$, $b = -2m$, $c = m$.

Rozpatrujemy dwa przypadki: **1** $a = 0$ oraz **2** $a \neq 0$.

1 Jeśli $a = 0$, to $m = 1$. Równanie $\otimes$ jest wtedy równaniem liniowym $-2x + 1 = 0$ i ma jedno rozwiązanie $x_0 = \frac{1}{2}$.

2 Jeśli $a \neq 0$, to $m \neq 1$. Równanie $\otimes$ jest wtedy równaniem kwadratowym o wyróżniku $\Delta = (-2m)^2 - 4(m-1)m$, czyli $\Delta = 4m$.

Równanie kwadratowe:

- ma zero pierwiastków, gdy $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$, gdy $\begin{cases} m \neq 1 \\ 4m < 0 \end{cases}$, czyli $m < 0$;
- ma jeden pierwiastek, gdy $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$, gdy $\begin{cases} m \neq 1 \\ 4m = 0 \end{cases}$, czyli $m = 0$;
- ma dwa pierwiastki, gdy $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$, gdy $\begin{cases} m \neq 1 \\ 4m > 0 \end{cases}$, czyli $m \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Podsumowujemy nasze rozważania i podajemy odpowiedź.

Odp.: Równanie $(m-1)x^2 - 2mx + m = 0$ ma: 0 pierwiastków, gdy $m < 0$;
1 pierwiastek, gdy $m = 1$ lub $m = 0$; 2 pierwiastki, gdy $m \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ćwiczenie 29. Określ liczbę pierwiastków równania $mx^2 - (2m+1)x + m = 0$ w zależności od wartości parametru m .

Odpowiedzi do ćwiczeń

26. $m_1 = -2$, $m_2 = 6$. 27. $m > \frac{3}{2}$ 28. $m \in \left(-1; \frac{1}{3}\right)$

29. 0 pierwiastków, gdy $m < -\frac{1}{4}$; 1 pierwiastek, gdy $m = -\frac{1}{4}$ lub $m = 0$; 2 pierwiastki, gdy $m \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$



Zadania utrwalające

13.41. Dla jakich wartości parametru m równanie kwadratowe:

- a) $2x^2 - 5x + (m-1) = 0$, b) $x^2 - 4(m+2)x + 4m^2 = 0$, c) $mx^2 - 4x + 2 = 0$
ma jeden pierwiastek?

13.42. Oblicz wartości parametru m , dla których równanie kwadratowe

$$4mx^2 - (2m-1)x + 0,25m = 0 \text{ nie ma rozwiązania.}$$

13.43. Oblicz wartości parametru m , dla których równanie kwadratowe $(m-2)x^2 + x - 4 = 0$ ma dwa pierwiastki.

13.44. Oblicz wartości parametru m , dla których równanie ma dwa pierwiastki o różnych znakach.

- a) $x^2 - 4x + 5 - 2m = 0$, b) $x^2 - 3x + m + 1 = 0$.

13.45. Oblicz wartości parametru m , dla których równanie:

- a) $x^2 - 8x - m = 0$ ma dwa pierwiastki dodatnie,
b) $2x^2 + x + 4 - 6m = 0$ ma dwa pierwiastki ujemne.

13.46. W równaniu $x^2 + mx + m - 1 = 0$ z niewiadomą x , m jest parametrem takim, że $m \in \mathbb{Z}$.

- a) Rozwiąż równanie.
b) Określ, dla jakich wartości parametru m pierwiastki równania są liczbami całkowitymi.

13.47. W zależności od wartości parametru m określ liczbę pierwiastków równania:

- a) $2mx^2 + (2m+1)x + \frac{1}{2}m = 0$, b) $\frac{1}{4}mx^2 - (m-2)x + m = 0$,
c) $(m+1)x^2 + (2m+1)x + m - 2 = 0$, d) $(m-3)x^2 - (2m-3)x + m + 3 = 0$,
e) $mx^2 + mx + \frac{1}{4}m - 2 = 0$, f) $\frac{1}{4}(m-2)x^2 - (m-2)x + m - 2 = 0$.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba 2 jest pierwiastkiem równania:

- A. $x^2 - 2 = 0$, B. $4x^2 - 4x + 1 = 0$, C. $x^2 - 4x + 4 = 0$, D. $x^2 + 4 = 0$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Równaniem kwadratowym zupełnym jest równanie:

- A. $(x-3)(x+3)=0$, B. $2x(x-1)=x(x-1)$,
 C. $2(x^2+1)=-3(x^2+1)$, D. $(x-3)^2=0$.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Tylko jeden pierwiastek ma równanie:

- A. $2x^2+32=0$, B. $x^2=4$, C. $x^2-10x+25=0$, D. $x^2-25=0$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*Wyróżnik Δ równania $x^2-2\cdot 10^4x+10^8=0$ jest równy:

- A. $4\cdot 10^4-4\cdot 10^8$, B. $-2\cdot 10^8$, C. $2\cdot 10^4-4\cdot 10^8$, D. 0.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*Tylko jedno rozwiązanie ma równanie $x^2-x+c=0$, gdy:

- A. $c=0$, B. $c=\frac{1}{4}$, C. $c=\frac{1}{2}$, D. $c=1$.

6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Jeżeli $x^2=9$, to $(x+1)^2$ może się równać 4.	P	F
Jeżeli $(x+1)^2-4=0$, to $x^2-4=-3$ lub $x^2-4=5$.	P	F

7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*Równanie $ax^2+2x+3=0$ ma dwa pierwiastki, gdy:

- A. $a=\frac{6}{12}$, B. $a=\frac{5}{12}$, C. $a=\frac{4}{12}$, D. $a=\frac{3}{12}$.

8. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 1636. Czy podaną zależność opisuje równanie $(2n-2)^2+(2n-1)^2+(2n)^2=1636$?*Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.*

T	Tak,	ponieważ	A.	kolejne liczby parzyste to: $2n-2$, $2n-1$, $2n$.
N	Nie,		B.	kolejne liczby parzyste to: $2n-4$, $2n-2$, $2n$.

9. Rozwiąż równanie:

- a) $|x^2-5x+6|=0$, b) $x^2-4x+|x-3|+3=0$, c) $x\cdot|4-x|=3$.

14. Funkcja kwadratowa

Definicja

Funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**.

- Wzór $f(x) = ax^2 + bx + c$ nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.
- Wykresem funkcji kwadratowej jest krzywa zwana **parabolą** o równaniu $y = ax^2 + bx + c$.
- Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych, czyli $D_f = \mathbb{R}$.

Przykłady funkcji kwadratowych:

- 1 $f(x) = 2x^2$, więc $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$,
- 2 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$, więc $a = \frac{1}{3}$, $b = -2$, $c = 4$.



Ćwiczenie 1. Spośród wzorów funkcji oznaczonych cyframi od **1** do **8** wybierz te, które są funkcjami kwadratowymi, a następnie określ ich współczynniki liczbowe.

- 1 $f(x) = 2$,
- 2 $f(x) = -3x^2$,
- 3 $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$,
- 4 $f(x) = (x - 2)^2$,
- 5 $f(x) = x(x - 1)$,
- 6 $f(x) = x^2 - x^3$,
- 7 $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$,
- 8 $f(x) = x(1 - x)$.

Ćwiczenie 2. Podaj przykład wzoru funkcji kwadratowej postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdy: a) $b = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, b) $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, c) $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$.

Wykres i własności funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2$

Badanie własności funkcji kwadratowej i szkicowanie jej wykresu rozpoczynamy od przykładów najprostszych.

Przykład 1. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem:

- 1 $f(x) = x^2$,
- 2 $f(x) = -x^2$.

- a) Podaj wartość współczynnika a i sporządź tabelę wartości funkcji dla kilku argumentów.
- b) Naszkicuj wykres funkcji.

Rozwiązanie

1 a) $f(x) = x^2$, więc $a = 1$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

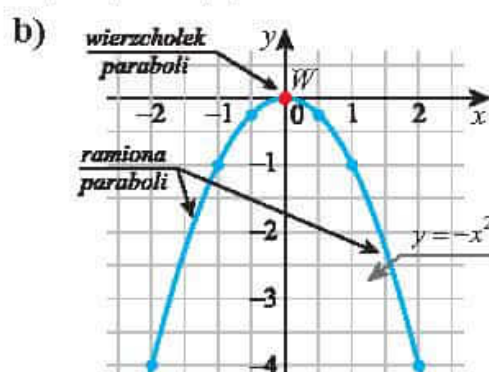
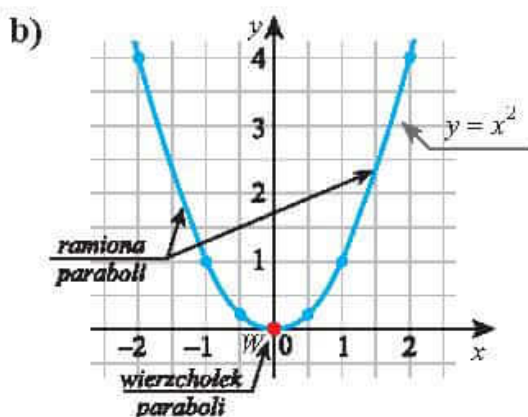


2 a) $f(x) = -x^2$, więc $a = -1$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4



Zauważamy, że $f(-2) = f(2)$, $f(-1) = f(1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$.



Każda z parabol o równaniach $y = x^2$ i $y = -x^2$ ma oś symetrii pokrywającą się z osią rzędnych, czyli prostą o równaniu $x = 0$.

Punkt $W = (0, 0)$ jest wierzchołkiem każdej z nich.

Wierzchołek W dzieli parabolę na dwie przystające części, które nazywamy ramionami paraboli.

Uwaga

- Prosta $x = 0$ jest osią symetrii każdej z parabol o równaniu $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$.
- Punkt, w którym oś symetrii przecina parabolę, nazywamy wierzchołkiem paraboli.
- Aby naszkicować wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, zwykle zaznaczamy w układzie współrzędnych trzy punkty:

$$W = (0, 0), \quad A = (1, a), \quad B = (-1, a)$$

i prowadzimy przez nie odpowiednią parabolę.

Ćwiczenie 3. Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f określonej wzorem: a) $f(x) = 2x^2$, b) $f(x) = -2x^2$.

Przykład 2. Na jednym rysunku sporządź wykresy funkcji określonych wzorem postaci $f(x) = ax^2$, gdy:

- a) $a = 1$, b) $a = 2$, c) $a = \frac{1}{2}$, d) $a = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie Rysujemy parabole o równaniach: $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$.

a)

x	$y = x^2$
-1	1
0	0
1	1

b)

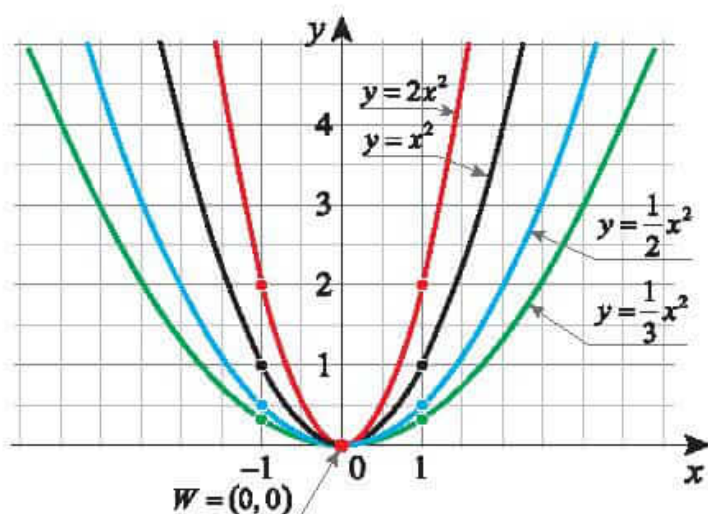
x	$y = 2x^2$
-1	2
0	0
1	2

c)

x	$y = \frac{1}{2}x^2$
-1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$

d)

x	$y = \frac{1}{3}x^2$
-1	$\frac{1}{3}$
0	0
1	$\frac{1}{3}$



Jeśli $a > 0$, to im wartość współczynnika a jest większa, tym ramiona parabol o równaniu $y = ax^2$ są położone „bliżej” osi y .

Prosta o równaniu $x = 0$ (oś y) jest osią symetrii każdej z parabol.

Ćwiczenie 4. W jednym układzie współrzędnych narysuj parabole o równaniach:

$$y = -3x^2, \quad y = -2x^2, \quad y = -x^2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2.$$

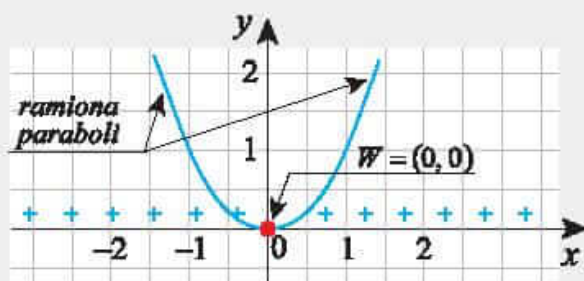
Przepisz zdanie do zeszytu i uzupełnij je tak, by było prawdziwe.

- a) Gdy $a < 0$, to im wartość współczynnika a jest większa, tym ramiona parabol o równaniu $y = ax^2$ są położone osi y .
- b) Ramiona parabol skierowane są ku „dołowi”, gdy a 0.
- c) Wierzchołkiem każdej parabol o równaniu $y = ax^2$, gdy $a < 0$, jest punkt W o współrzędnych (,).

Uwaga

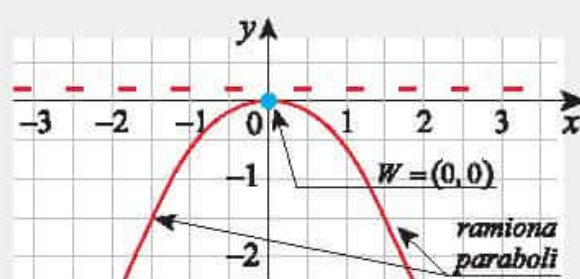
- Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2$ jest parabola o wierzchołku W , gdzie $W = (0, 0)$.
- Wierzchołek W dzieli parabolę na dwie części zwane ramionami paraboli.
- Ramiona paraboli o równaniu $y = ax^2$ skierowane są „ku górze”, gdy $a > 0$, skierowane „ku dołowi”, gdy $a < 0$.

$$y = ax^2, \text{ gdy } a > 0$$



- Wierzchołek W jest „najniżej” położonym punktem paraboli. Zatem $y_{\min} = f(0) = 0$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $[0; +\infty)$.
- Parabole o równaniach $y = ax^2$ i $y = -ax^2$ są figurami przystającymi i symetrycznymi względem osi x .

$$y = ax^2, \text{ gdy } a < 0$$



- Wierzchołek W jest „najwyżej” położonym punktem paraboli. Zatem $y_{\max} = f(0) = 0$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty; 0]$.



Ćwiczenie 5. Mirka sporządziła wykresy funkcji kwadratowych i zapomniała opisać je wzorami.

a) Wykonaj to za nią, przyporządkowując odpowiednie równania parabol (oznaczone cyframi od **1** do **8**) parabolom oznaczonym literami od **(A)** do **(H)**.

1 $y = \frac{1}{4}x^2$,

2 $y = -\frac{1}{3}x^2$

3 $y = 2x^2$,

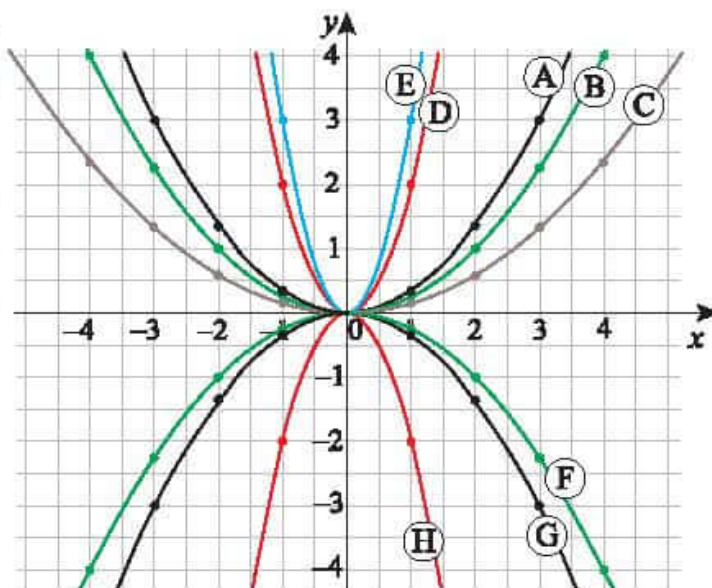
4 $y = -2x^2$,

5 $y = 3x^2$,

6 $y = \frac{1}{3}x^2$,

7 $y = -\frac{1}{4}x^2$,

8 $y = \frac{1}{7}x^2$.



b) Wypisz pary równań tych parabol, które są symetryczne względem osi x .

Ćwiczenie 6. Przyjmij za jednostkę 1 cm i narysuj na papierze milimetrowym (lub za pomocą programu „Funkcje i wykresy”) parabole o równaniach:

$$\bullet y = x^2, \quad \bullet y = 2x^2, \quad \bullet y = 3x^2, \quad \bullet y = 4x^2, \quad \bullet y = \frac{1}{2}x^2, \quad \bullet y = \frac{1}{3}x^2, \quad \bullet y = \frac{1}{4}x^2.$$

Zaznacz oś symetrii każdego wykresu. Naklej kartkę z wykresami na sztywny karton i wytnij **szablony** tych parabol.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. **2** $a = -3, b = c = 0$, **4** $a = -1, b = -4, c = 4$, **5** $a = -1, b = -1, c = 0$, **8** $a = -1, b = 1, c = 0$.

2. Na przykład: a) $f(x) = 2x^2 - 4$, b) $f(x) = -3x^2 + 4x$, c) $f(x) = -x^2$. **4** a) Dalej, b) „<”, c) $(0, 0)$.

5. a) 1 - B, 2 - G, 3 - D, 4 - H, 5 - E, 6 - A, 7 - F, 8 - C, b) **1 i 7**, **3 i 4**, **2 i 6**.

Zadania utrwalające

14.1. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdy:

a) $a = 3, b = -1, c = 14$,

b) $a = 0,2, b = 0, c = 1$,

c) $a = -12, b = 11, c = 0$,

d) $a = 6, b = 0, c = 0$.

14.2. Liczby 2 i -1 są odpowiednio równe współczynnikom liczbowym b i c funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Podaj dwa przykłady funkcji kwadratowej spełniającej podane warunki.

14.3. Sprawdź, czy punkty A, B i C takie, że $A = (-1, 3)$, $B = (2, 2)$, $C = (\sqrt{2}, 6)$, należą do wykresu funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = 3x^2$, b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, c) $f(x) = 2x^2 - x$, d) $f(x) = x^2 + 4$.

14.4. Wśród funkcji, określonych wzorami od **1** do **8**, wskaż pary funkcji, których wykresy są położone symetrycznie względem osi x .

1 $f_1(x) = \frac{3}{4}x^2$, **2** $f_2(x) = 0,25x^2$, **3** $f_3(x) = -\frac{3}{4}x^2$, **4** $f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2$,

5 $f_5(x) = \sqrt{2}x^2$, **6** $f_6(x) = 0,5x^2$, **7** $f_7(x) = -\sqrt{2}x^2$, **8** $f_8(x) = -\frac{1}{4}x^2$.

14.5. Punkt A należy do wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2$. Oblicz współczynnik a , gdy:

a) $A = (2, 8)$,

b) $A = (3, -9)$,

c) $A = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

14.6. Punkt $M = \left(\frac{3}{4}, 3\right)$ należy do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = ax^2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik a jest równy:

A. $3\frac{1}{4}$,

B. $\frac{15}{4}$,

C. $\frac{14}{3}$,

D. $5\frac{1}{3}$.

14.7. Na paraboli o równaniu $y = -2x^2$ leży punkt $A = (4, -32)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkt symetrycznie położony do punktu A względem osi y ma współrzędne:

A. $(-4, -32)$,

B. $(4, 32)$,

C. $(-4, 32)$,

D. $(-4, -16)$.

14.8. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = ax^2$.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Współczynnik a funkcji f jest równy:

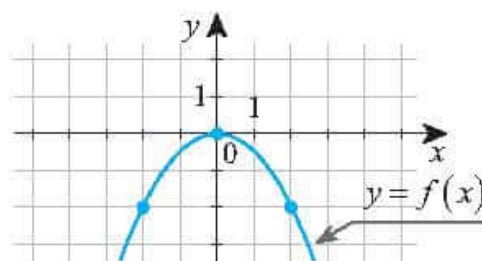
A. -2 ,

B. $-\frac{1}{2}$.

Wzór funkcji f określa wzór:

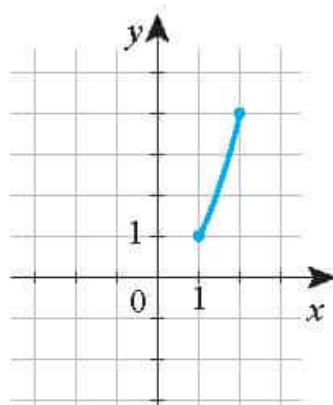
C. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$,

D. $f(x) = -2x^2$.

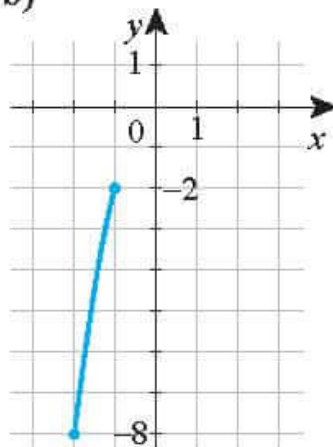


14.9. Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2$. Przerysuj ten fragment do zeszytu i uzupełnij wykres oraz podaj wartość współczynnika a .

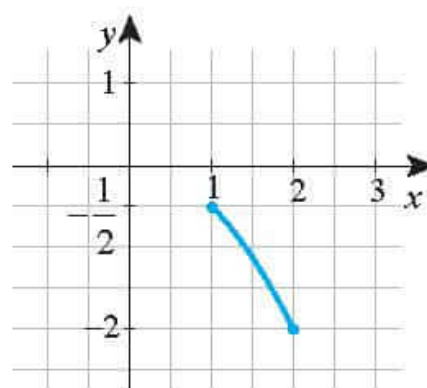
a)



b)



c)



Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Definicja

Wzór określający funkcję kwadratową zapisany w postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$ nazywamy postacią **kanoniczną funkcji kwadratowej**.

Przykład 3. Funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = 2(x-1)^2 + 5$ zapisz w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$ i podaj jej współczynniki liczbowe a , b i c .

Rozwiązanie

$f(x) = 2(x-1)^2 + 5$, skąd $f(x) = 2(x^2 - 2x + 1) + 5$, więc $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$.

Zatem $a = 2$, $b = -4$, $c = 7$.

Odp.: $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$, $a = 2$, $b = -4$, $c = 7$.

Ćwiczenie 7. Funkcję kwadratową zapisz w postaci ogólnej i podaj jej współczynniki liczbowe, gdy: a) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2$, b) $f(x) = 2(x+1)^2 + 2$.

Uwaga

Każdą funkcję kwadratową postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$ można zapisać w postaci ogólnej, tj. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Przykład 4. Wzór funkcji kwadratowej f podany jest w postaci kanonicznej

$f(x) = a(x-p)^2 + q$. Podaj wartości a , p i q , gdy:

a) $f(x) = 3(x-1)^2 - 2$, b) $f(x) = -(x+1)^2 + 3$, c) $f(x) = 4x^2 + 1$,

d) $f(x) = -2x^2$, e) $f(x) = (x+2)^2$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = 3 \cdot (x-1)^2 - 2$, więc $a = 3$, $p = 1$ i $q = -2$,

b) $f(x) = -(x+1)^2 + 3$, więc $a = -1$, $p = -1$ i $q = 3$,

c) $f(x) = 4x^2 + 1$, więc $a = 4$, $p = 0$ i $q = 1$,

d) $f(x) = -2x^2$, więc $a = -2$, $p = 0$ i $q = 0$,

e) $f(x) = (x+2)^2$, więc $a = 1$, $p = -2$ i $q = 0$.

Ćwiczenie 8. Wzór funkcji kwadratowej f podany jest w postaci kanonicznej

$f(x) = a(x-p)^2 + q$. Podaj wartości a , p i q , gdy:

a) $f(x) = 2(x+3)^2 - 4$, b) $f(x) = -(x-1)^2$, c) $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 9. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdy:

a) $a = -1$, $p = -1$ i $q = 2$, b) $a = 3$, $p = 0$ i $q = -1$, c) $a = \frac{1}{2}$, $p = 4$ i $q = 0$.

Przykład 5. Uzasadnij, że jeśli funkcja kwadratowa określona jest wzorem

$f(x) = a(x-p)^2 + q$, to punkt W taki, że $W = (p, q)$, leży na wykresie funkcji f .

Rozwiązanie Wystarczy wykazać, że $f(p) = q$.

$$f(p) = a \cdot (p-p)^2 + q = a \cdot 0^2 + q = 0 + q = q,$$

zatem $f(p) = q$.

c.n.u.

Ćwiczenie 10. Z wzoru funkcji kwadratowej f odczytaj współrzędne wierzchołka paraboli, która jest jej wykresem.

a) $f(x) = -3(x+4)^2 - 1$, b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, c) $f(x) = -3(x+2)^2$,
d) $f(x) = 5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 2$, e) $f(x) = -\sqrt{2}(x - \sqrt{3})^2 + \sqrt{2}$, f) $f(x) = 3x^2 + 1$.

Przykład 6. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem

$f(x) = a(x-p)^2 + q$. Uzupełnij tabelę dla funkcji f i na-

szkicuj jej wykres. Podaj współrzędne wierzchołka W i równanie osi symetrii wykresu funkcji f , gdy:

a) $f(x) = (x-2)^2 + 1$, b) $f(x) = -(x+2)^2 - 1$.

Rozwiązanie

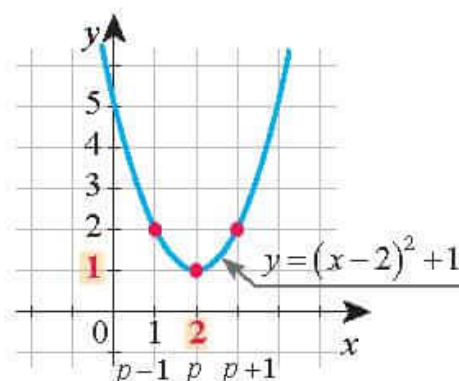
a) $f(x) = (x-2)^2 + 1$, więc $a = 1$, $p = 2$ i $q = 1$

x	$p-1$	p	$p+1$
$y = (x-2)^2 + 1$	2	1	2

$$f(1) = (1-2)^2 + 1 = 2, \quad f(3) = (3-2)^2 + 1 = 2.$$

Odp.: $W = (2, 1)$, $x = 2$.

x	$p-1$	p	$p+1$
$y = f(x)$		q	

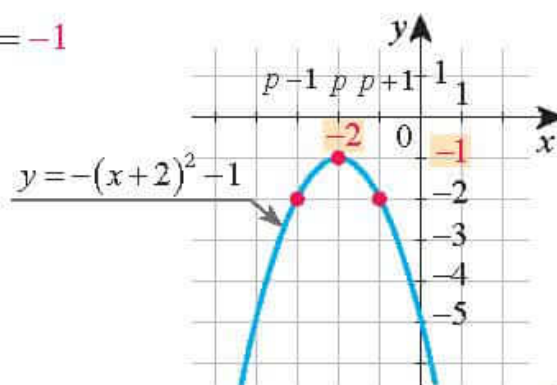


b) $f(x) = -(x+2)^2 - 1$, więc $a = -1$, $p = -2$ i $q = -1$

	$p-1$	p	$p+1$
x	-3	-2	-1
$y = -(x+2)^2 - 1$	-2	-1	-2

$$f(-3) = -(-3+2)^2 - 1 = -1 - 1 = -2,$$

$$f(-1) = -(-1+2)^2 - 1 = -1 - 1 = -2. \quad \text{Odp.: } W = (-2, -1), \quad x = -2.$$



Ćwiczenie 11. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = a(x-p)^2 + q$. Przerysuj tabelę do zeszytu, uzupełnij ją i naskicuj wykres funkcji f , gdy:

x	$p-1$	p	$p+1$
$y = f(x)$		q	

a) $f(x) = -2(x+1)^2 - 3$, b) $f(x) = -(x-3)^2$, c) $f(x) = 2x^2 - 1$.

Przykład 7. Uzasadnij, że jeśli funkcja kwadratowa f określona jest wzorem

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \text{ to } f(p-1) = f(p+1) = a + q.$$

Rozwiązanie

Obliczamy wartości funkcji f , gdy $x = p-1$ oraz gdy $x = p+1$, i porównujemy je.

$$\begin{aligned} \text{Jeśli } x = p-1, \text{ to } f(p-1) &= a \cdot (p-1-p)^2 + q = \\ &= a \cdot (-1)^2 + q = a + q, \\ f(p-1) &= a + q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jeśli } x = p+1, \text{ to } f(p+1) &= a \cdot (p+1-p)^2 + q = \\ &= a \cdot 1^2 + q = a + q, \\ f(p+1) &= a + q. \end{aligned}$$

$$\text{Zatem } f(p-1) = f(p+1) = a + q.$$

C.N.U.

Uwaga

Do paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem

$$f(x) = a(x-p)^2 + q \text{ należą punkty}$$

o współrzędnych $(p-1, a+q)$, (p, q) , $(p+1, a+q)$.

x	$p-1$	p	$p+1$
$f(x) = a \cdot (x-p)^2 + q$	$a+q$	q	$a+q$

- Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = a \cdot (x-p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku W , gdzie $W = (p, q)$, która jest przystająca do paraboli $y = ax^2$.

Przykład 8. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f , której wzór podany jest w postaci kanonicznej, gdy:

a) $f(x) = -(x+1)^2 - 2$, b) $f(x) = 4(x-3)^2 - 5$.

Odczytaj z wykresu maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca oraz podaj jej najmniejszą albo największą wartość (o ile istnieje).

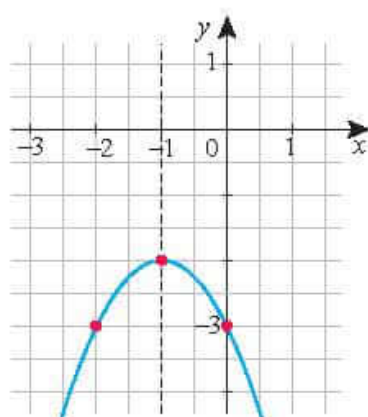
Rozwiązanie

a) $f(x) = -(x+1)^2 - 2$, więc:

$$a = -1, \quad p = -1 \text{ i } q = -2,$$

$$W = (-1, -2).$$

	$\overbrace{p-1}^{p-1}$	$\overbrace{p}^p$	$\overbrace{p+1}^{p+1}$
x	-2	-1	0
$y = -(x+1)^2 - 2$	-3	-2	-3
	$\overbrace{a+q}^{a+q}$	$\overbrace{q}^q$	$\overbrace{a+q}^{a+q}$



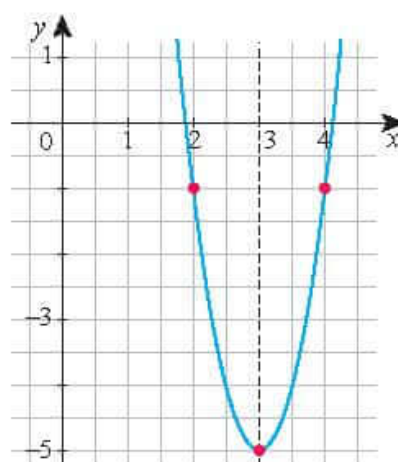
Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -1]$, więc $y_{MAX} = f(-1) = -2$.

b) $f(x) = 4(x-3)^2 - 5$, więc:

$$a = 4, \quad p = 3 \text{ i } q = -5,$$

$$W = (3, -5).$$

	$\overbrace{p-1}^{p-1}$	$\overbrace{p}^p$	$\overbrace{p+1}^{p+1}$
x	2	3	4
$y = 4(x-3)^2 - 5$	-1	-5	-1
	$\overbrace{a+q}^{a+q}$	$\overbrace{q}^q$	$\overbrace{a+q}^{a+q}$



Funkcja f jest rosnąca w przedziale $[3; +\infty)$, więc $y_{MIN} = f(3) = -5$.

Ćwiczenie 12. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem:

a) $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$, b) $f(x) = 3(x+3)^2 - 8$, c) $f(x) = -2(x-3)^2$.

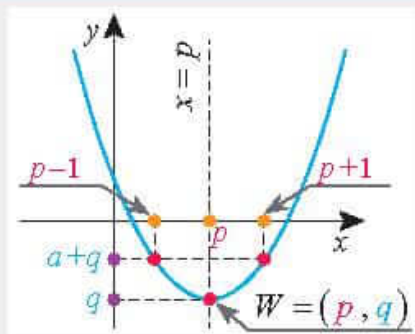
Ćwiczenie 13. Nie szkicując wykresu funkcji f , podaj jej zbiór wartości Y_f i maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca, gdy:

a) $f(x) = -2(x-3)^2 - 5$, b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$, c) $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 4$.

Uwaga

- Jeśli $W = (x_W, y_W)$, to $x_W = p$ i $y_W = q$.

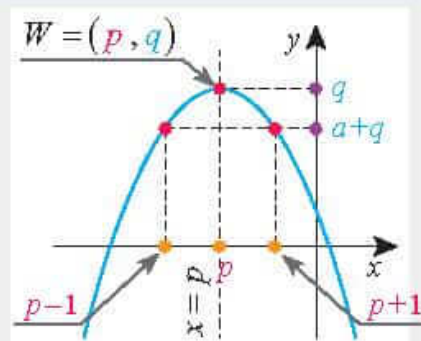
$$f(x) = a \cdot (x - p)^2 + q, \text{ gdy } a > 0$$



Gdy $x = p$, to $y_{MIN} = f(p) = q$.

- $Y_f = \langle q; +\infty \rangle$,
- funkcja f jest rosnąca, gdy $x \in \langle p; +\infty \rangle$, a malejąca, gdy $x \in (-\infty; p)$.
- Prosta o równaniu $x = p$ jest osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f .

$$f(x) = a \cdot (x - p)^2 + q, \text{ gdy } a < 0$$



Gdy $x = p$, to $y_{MAX} = f(p) = q$.

- $Y_f = (-\infty; q]$,
- funkcja f jest rosnąca, gdy $x \in (-\infty; p)$, a malejąca, gdy $x \in \langle p; +\infty \rangle$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

7. a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$, $b = -3$, $c = -\frac{9}{2}$, b) $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$, $a = 2$, $b = 4$, $c = 4$.

8. a) $a = 2$, $p = -3$, $q = -4$, b) $a = -1$, $p = 1$, $q = 0$, c) $a = -2$, $p = 0$, $q = -\frac{1}{2}$.

9. a) $f(x) = -(x+1)^2 + 2$, b) $f(x) = 3x^2 - 1$, c) $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$.

10. a) $(-4, -1)$, b) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, c) $(-2, 0)$, d) $(\frac{1}{5}, 2)$, e) $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$, f) $(0, 1)$.

11. a)

x	-2	-1	0
$y = f(x)$	-5	-3	-5

b)

x	2	3	4
$y = f(x)$	-1	0	-1

c)

x	-1	0	1
$y = f(x)$	1	-1	1

12. a)

x	2	3	4
$y = f(x)$	2	4	2

b)

x	-4	-3	-2
$y = f(x)$	-5	-8	-5

c)

x	2	3	4
$y = f(x)$	-2	0	-2

13. a) $Y_f = (-\infty; -5]$, $\langle 3; +\infty \rangle$, b) $Y_f = \langle 1; +\infty \rangle$, $(-\infty; -2]$, c) $Y_f = \langle -4; +\infty \rangle$, $(-\infty; 0]$.

Zadania utrwalające

14.10. Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej zapisz w postaci ogólnej i podaj wartości współczynników a , b i c .

a) $f(x) = 3(x-1)^2 - 5$, b) $f(x) = -9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$, c) $f(x) = (x-2)^2 - 4$,
 d) $f(x) = 2(x+1)^2 - 5$, e) $f(x) = 4(x-2)^2 + 1$, f) $f(x) = -2(x+4)^2 - 3$.

14.11. Wzór funkcji kwadratowej f podany jest w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$. Podaj wartości a , p i q , gdy:

a) $f(x) = -3(x-4)^2 - 2$, b) $f(x) = (x+2)^2 - 6$, c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$,
 d) $f(x) = -(x+1)^2$, e) $f(x) = 10x^2 + 30$, f) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$.

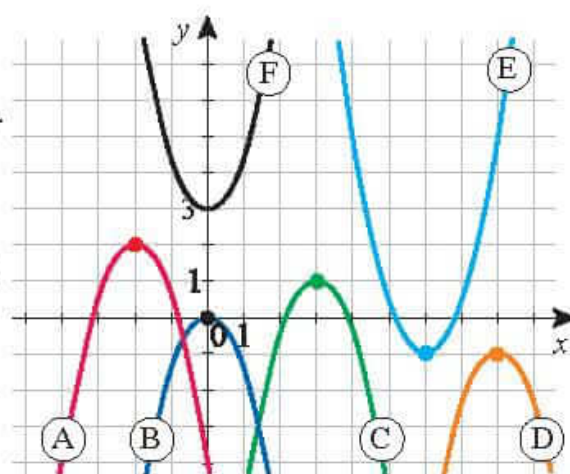
14.12. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdy:

a) $a = -\frac{1}{2}$, $p = -2$, $q = -4$, b) $a = 4$, $p = 0$, $q = 0$,
 c) $a = -\sqrt{2}$, $p = \frac{1}{5}$, $q = 0$, d) $a = 1$, $p = 0$, $q = -2$.

14.13. Parabole przedstawione na rysunku są przystające do paraboli określonej równaniem $y = \frac{3}{2}x^2$. Przyporządkuj odpowiednie

wzory oznaczone cyframi od **1** do **6** parabolom oznaczonym literami od (A) do (F).

1 $y = \frac{3}{2}x^2 + 3$, **2** $y = -\frac{3}{2}(x-3)^2 + 1$,
3 $y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 2$, **4** $y = -\frac{3}{2}(x-8)^2 - 1$,
5 $y = -\frac{3}{2}x^2$, **6** $y = \frac{3}{2}(x-6)^2 - 1$.



14.14. Ustal, czy wykres funkcji f określonej wzorem postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$ ma punkty wspólne z osią x , gdy:

a) $f(x) = x^2 - 4$, b) $f(x) = -2x^2 - 1$, c) $f(x) = (x-3)^2$,
 d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+5)^2 + 5$, e) $f(x) = -(x-2)^2 - 1$, f) $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$.

14.15. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem

$$f(x) = a(x-p)^2 + q.$$

Sporządź tabelę dla funkcji f według podanego wzoru i naskicuj jej wykres, gdy:

x	$p-1$	p	$p+1$
$y=f(x)$	$a+q$	q	$a+q$

- a) $f(x) = (x+1)^2 - 2$, b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$, c) $f(x) = -x^2$,
d) $f(x) = 1\frac{1}{2}(x-3)^2 + 3$, e) $f(x) = -2x^2 + 4$, f) $f(x) = 5(x+1)^2$.

14.16. Naskicuj wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem:

- a) $f(x) = -2(x+2)^2 - 2$, b) $f(x) = 2(x+4)^2 + 1$, c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$,
d) $f(x) = 3(x+5)^2$, e) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, f) $f(x) = -(x-2)^2 - 1$.

Odczytaj z wykresu:

- 1 maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca,
- 2 najmniejszą albo największą wartość funkcji (o ile istnieje),
- 3 równanie prostej będącej osią symetrii wykresu funkcji f .

14.17. Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = 3(x-3)^2 - 4$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Oś symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu $x = -3$.	P	F
Funkcja g ma dwa miejsca zerowe.	P	F
Prosta o równaniu $y = -4$ ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji g .	P	F

14.18. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = a(x-3)^2 + 5$.

Przepisz do zeszytu poniższe zdania i uzupełnij je tak, by były prawdziwe.

- a) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 3)$, gdy $a \blacksquare 0$.
b) Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; 3)$, gdy $a \blacksquare 0$.
c) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 3; +\infty \rangle$, gdy $a \blacksquare 0$.
d) Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 3; +\infty \rangle$, gdy $a \blacksquare 0$.
e) Funkcja f ma najmniejszą wartość równą 5, gdy $x = \blacksquare$ i $a \blacksquare 0$.
f) Funkcja f ma największą wartość równą $\blacksquare$, gdy $x = 3$ i $a \blacksquare 0$.

Postać kanoniczna a postać ogólna funkcji kwadratowej

Postać ogólna funkcji kwadratowej określona jest wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } x \in \mathbb{R}.$$

Aby wzór funkcji kwadratowej podany w postaci ogólnej zapisać w postaci kanonicznej, wykorzystujemy wzory skróconego mnożenia.

Przykład 9. Funkcję kwadratową f określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ przedstaw w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

Wyraź współrzędne wierzchołka $W = (p, q)$ w zależności od współczynników a, b i c .

Rozwiązanie

$$1 \quad f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Wylączamy współczynnik a przed nawias.

$$2 \quad f(x) = a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2}_0 + \frac{c}{a} \right]$$

Dodajemy i odejmujemy liczbę $\left(\frac{b}{2a} \right)^2$,
by pierwsze trzy wyrazy stanowiły
kwadrat sumy.

$$3 \quad f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$$

Uwalniamy się od nawiasu kwadratowego.

$$4 \quad f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\frac{b^2}{4a} + c = \left(\frac{b^2}{4a} + c \right) = \left(\frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \right)$$

$$5 \quad f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$6 \quad \Delta = b^2 - 4ac, \text{ więc } f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

$$p = -\frac{b}{2a} \text{ i } q = -\frac{\Delta}{4a}. \text{ Zatem } W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right).$$

Uwaga Każdą funkcję kwadratową f w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$ można zapisać w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a} \text{ i } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Ćwiczenie 14. Funkcję kwadratową f przedstaw w postaci kanonicznej, gdy:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$, b) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$.

Przykład 10. Oblicz współrzędne p i q wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f określonej wzorem ogólnym:

a) $f(x) = -x^2 - 4x + 3$, b) $f(x) = 2x^2 + 6x$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = -x^2 - 4x + 3$,
($a = -1$, $b = -4$, $c = 3$)

$$p = -\frac{b}{2a}, \text{ więc } p = -\frac{-4}{2 \cdot (-1)} = -2.$$

b) $f(x) = 2x^2 + 6x$,
($a = 2$, $b = 6$, $c = 0$)

$$p = -\frac{b}{2a}, \text{ więc } p = -\frac{6}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2}.$$

Wartość q możemy obliczyć na dwa sposoby.

I sposób:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \text{ więc}$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 28.$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a}, \text{ więc } q = \frac{-28}{4 \cdot (-1)} = 7.$$

II sposób:

$$q = f(p), \text{ więc } q = f(-2)$$

$$q = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 7.$$

Odp.: a) $p = -2$ i $q = 7$,

czyli $W = (-2, 7)$,

I sposób:

$$\Delta = b^2 - 4ac, \text{ więc}$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 36.$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a}, \text{ więc } q = \frac{-36}{4 \cdot 2} = -\frac{9}{2}.$$

II sposób:

$$q = f(p), \text{ więc } q = f\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$q = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}.$$

b) $p = -\frac{3}{2}$ i $q = -\frac{9}{2}$,

czyli $W = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$.

Ćwiczenie 15. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem:

a) $f(x) = -5x^2 + 3x - 1$, b) $f(x) = -8x^2 + 4x$, c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

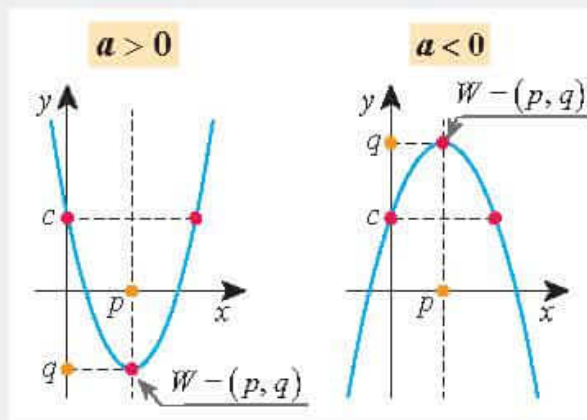
Uwaga Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem w postaci ogólnej

$f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parabola:

- która przecina oś y w punkcie $(0, c)$,
- której wierzchołkiem jest punkt

$$W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right),$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.



Ćwiczenie 16. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem:

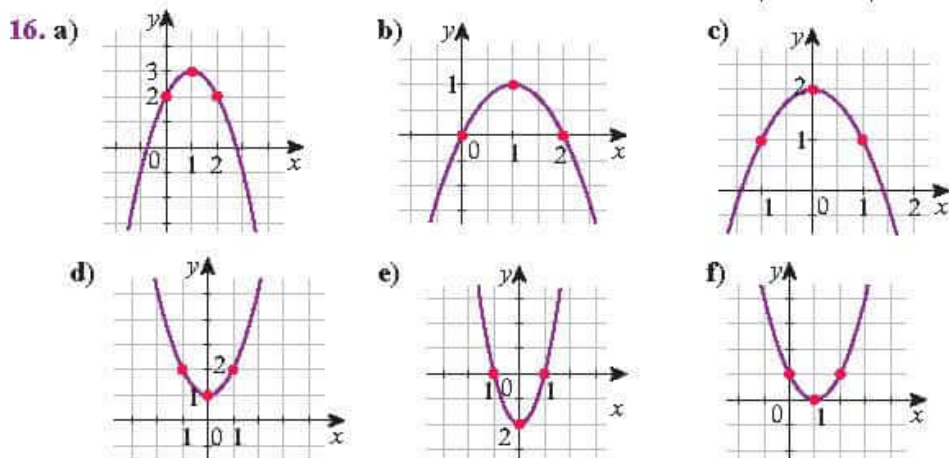
a) $f(x) = -x^2 + 2x + 2$, b) $f(x) = -x^2 + 2x$, c) $f(x) = -x^2 + 2$,

d) $f(x) = x^2 + 1$, e) $f(x) = 2x^2 - 2$, f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Ćwiczenie 17. Wykaż, że jeśli funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, to $f(0) = c$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

14. a) $f(x) = (x-2)^2 + 3$, b) $f(x) = -(x+1)^2 + 3$. 15. a) $W = \left(\frac{3}{10}, -\frac{11}{20} \right)$, b) $W = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$, c) $W = (0, -2)$.



Zadania utrwalające

14.19. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu:

a) $y = -x^2 + 4x - 4$, b) $y = 3x^2 + 12x$, c) $y = 2x^2 + 3$, d) $y = 4x^2 + 5x + 1$.

14.20. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = -x^2 - 4x$, b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, c) $f(x) = -x^2 - 1$.

14.21. Wyznacz zbiór wartości Y_f funkcji f określonej wzorem $f(x) = 3x^2 + x - 2$.

14.22. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem:

- a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, b) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, c) $f(x) = 3x^2 - 12x$,
 d) $f(x) = 2x^2 + 3$, e) $f(x) = -4x^2 + 16$, f) $f(x) = 4x^2 + 8x + 1$.

- 1) Podaj współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f .
- 2) Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.
- 3) Napisz równanie osi symetrii wykresu funkcji f .
- 4) Podaj zbiór wartości funkcji f .
- 5) Naskicuj wykres i określ liczbę miejsc zerowych funkcji f .

14.23. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.*

Prosta o równaniu $x = 2$ jest osią symetrii wykresu funkcji $y = 2x^2 - 8x + 6$.	P	F
Prosta o równaniu $x = 3$ jest osią symetrii wykresu funkcji $y = 2(x + 3)^2 + 1$.	P	F
Prosta o równaniu $x = 2$ jest osią symetrii wykresu funkcji $y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + 4\frac{1}{2}\right)$.	P	F

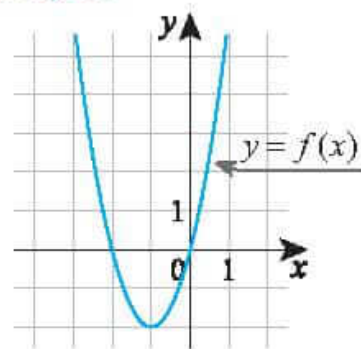
14.24. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f , gdy jej oś symetrii ma równanie:

- a) $x = 3$ i $f(x) = 2x^2 - (m + 2)x + 3m^2$, b) $x = -6$ i $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - (m^2 - 3)x + m$.

14.25. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem:

- A. $f(x) = 2x^2 - 2$, B. $f(x) = 2x^2 + 4x$,
 C. $f(x) = 2x^2 + 4$, D. $f(x) = 2x^2 + 8$.



14.26. Podaj przykład funkcji kwadratowej, o której wiadomo, że ma największą wartość równą 2, a osią symetrii jej wykresu jest prosta o równaniu $x = 1$. Napisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

14.27. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

 Zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 6x + c$ jest przedział $\langle 0; +\infty \rangle$, gdy współczynnik c jest równy:

- A. 0, B. 4, C. 6, D. 9.

14.28. Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

 Największą wartością funkcji f określonej wzorem $f(x) = -x^2 + 4x + 4$ jest liczba:

- A. 2, B. 8.

Maksymalny przedział, w którym funkcja f określona wzorem $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ jest rosnąca, to:

- C. $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$, D. $\left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

14.29. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

 Funkcja kwadratowa, która jest malejąca w przedziale $(-\infty; 2)$, określona jest wzorem:

- A. $f(x) = 2(x-3)^2$, B. $f(x) = 3(x-2)^2$,
C. $f(x) = 2(x+3)^2$, D. $f(x) = 3(x+2)^2$.

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej i jej postać iloczynowa

Aby obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej f podanej w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$, należy rozwiązać równanie kwadratowe $f(x) = 0$.

Miejscami zerowymi funkcji f są pierwiastki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$.

Przypomnijmy

Liczba rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ zależy od wartości wyróżnika Δ , gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$, więc i liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej również od niego zależy.

Wartość wyróżnika Δ $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Miejsca zerowe funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$	dwa miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{2a}$	brak miejsc zerowych

Przykład 11. Oblicz miejsca zerowe oraz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f i naskicuj jej wykres, gdy:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$, b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$, c) $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = 0$, gdy $x^2 + 4x + 3 = 0$

$a = 1, b = 4, c = 3, \Delta = 4, \sqrt{\Delta} = 2$

$$x_1 = \frac{-4-2}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1.$$

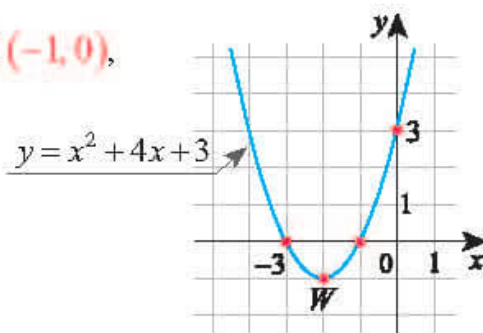
x_1, x_2 – miejsca zerowe funkcji f

Wykres funkcji f przecina oś x w punktach $(-3, 0)$ i $(-1, 0)$,

a oś y w punkcie $(0, 3)$, bo $f(0) = 3$.

$$p = \frac{-4}{2} = -2, \quad q = f(-2) = -1,$$

czyli $W = (-2, -1)$.



b) $f(x) = 0$, gdy $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$(x-2)^2 = 0$$

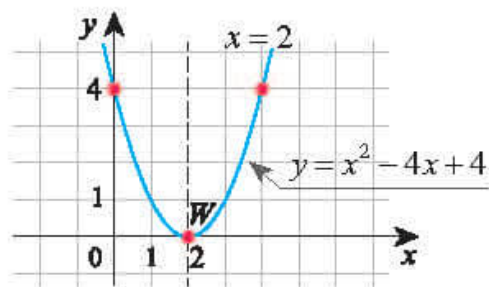
$$x_0 = 2.$$

Liczba 2 to odcięta wierzchołka W .

Jeśli $p = 2$, to $q = f(2) = 0$, czyli $W = (2, 0)$.

Do wykresu funkcji f należą punkty:

$W = (2, 0)$ oraz $(0, 4)$ i $(4, 4)$.



c) $f(x) = 0$, gdy $-2x^2 + 4x - 3 = 0$

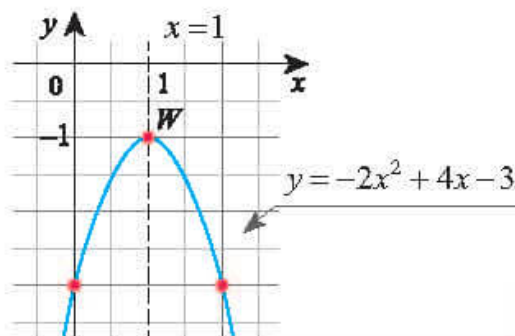
$a = -2, b = 4, c = -3$

$$\Delta = -8, \quad \Delta < 0 \text{ (funkcja nie ma miejsc zerowych).}$$

$$p = \frac{-4}{-4} = 1, \quad q = \frac{8}{-8} = -1,$$

czyli $W = (1, -1)$.

Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych $(1, -1)$, $(0, -3)$, $(2, -3)$.



Ćwiczenie 18. Oblicz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f . Wyznacz współrzędne wierzchołka W jej wykresu. Naskicuj wykres funkcji f , gdy:

a) $f(x) = 3x^2 + 6x$, b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, c) $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

Przykład 12. Oblicz miejsca zerowe funkcji f , g i h , gdy:

a) $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$, b) $g(x) = -2(x-1)(x+3)$, c) $h(x) = -2(x+1)^2 + 8$.

Rozwiązanie

a) $f(x) = 0$, gdy $-2x^2 - 4x + 6 = 0$
 $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $\Delta = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$
 $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

b) $g(x) = 0$, gdy $-2(x-1)(x+3) = 0$
 $(x-1)(x+3) = 0$
 $x-1=0$ lub $x+3=0$
 $x=1$ lub $x=-3$.

$a \cdot b = 0$ wtedy
i tylko wtedy,
gdy $a=0$ lub $b=0$

c) $h(x) = 0$, gdy $-2(x+1)^2 + 8 = 0 \quad / : (-2)$
 $(x+1)^2 - 4 = 0$
 $x+1 = -2$ lub $x+1 = 2$
 $x = -3$ lub $x = 1$.

Odp.: Funkcje f , g i h mają te same miejsca zerowe x_1 i x_2 , gdzie $x_1 = -3$ i $x_2 = 1$.

Zauważamy, że f , g i h z przykładu 12. spełniają warunek $f(x) = g(x) = h(x)$, bo:

$$g(x) = -2(x-1)(x+3) = -2(x^2 + 3x - x - 3) = -2x^2 - 4x + 6 = f(x),$$

$$h(x) = -2(x+1)^2 + 8 = -2(x^2 + 2x + 1) + 8 = -2x^2 - 4x + 6 = f(x).$$

Zatem $f(x) = \underbrace{-2(x-1)(x+3)}_{\text{postać iloczynowa wzoru funkcji } f} = \underbrace{-2(x+1)^2 + 8}_{\text{postać kanoniczna wzoru funkcji } f} = \underbrace{-2x^2 - 4x + 6}_{\text{postać ogólna wzoru funkcji } f}.$

postać iloczynowa postać kanoniczna postać ogólna
wzoru funkcji f wzoru funkcji f wzoru funkcji f

Uwaga

- Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci iloczynowej tylko wtedy, gdy ma ona miejsca zerowe, czyli gdy $\Delta \geq 0$.
- Postać iloczynowa funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ zależy od wartości wyróżnika Δ .

Wartość wyróżnika Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Postać iloczynowa funkcji kwadratowej	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$	$f(x) = a(x-x_0)^2$	Nie można funkcji kwadratowej przedstawić w postaci iloczynowej.

Ćwiczenie 19. Zapisz w postaci iloczynowej wzór funkcji f , gdy:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$, b) $f(x) = (x-3)^2 - 1$, c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$,

d) $f(x) = x^2 - 10x + 25$, e) $f(x) = -3x^2$, f) $f(x) = -x^2 + 4$.

Ćwiczenie 20. Uzasadnij, że wzoru funkcji f nie można przedstawić w postaci iloczynowej, gdy: a) $f(x) = x^2 + x + 6$, b) $f(x) = 2x^2 + 0,5$, c) $f(x) = x^2 + x + 30$.

Uwaga

Jeżeli miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby x_1 i x_2 , to współrzędne p i q wierzchołka $W = (p, q)$ paraboli, która jest wykresem tej funkcji, można obliczyć

z wzorów: $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $q = f(p)$, czyli $x_W = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_W = f(x_W)$.

Przykład 13. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = 2(x-1)(x+5)$, i naszkicuj jej wykres.

Rozwiązanie

I sposób: Obliczamy miejsca zerowe.

$$f(x) = 0, \text{ gdy}$$

$$2(x-1)(x+5) = 0$$

$$x-1=0 \text{ lub } x+5=0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -5$$

$$x_W = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$y_W = f(x_W) = f(-2) = -18$$

$$W = (-2, -18).$$

II sposób:

Funkcję f zapisujemy w postaci ogólnej

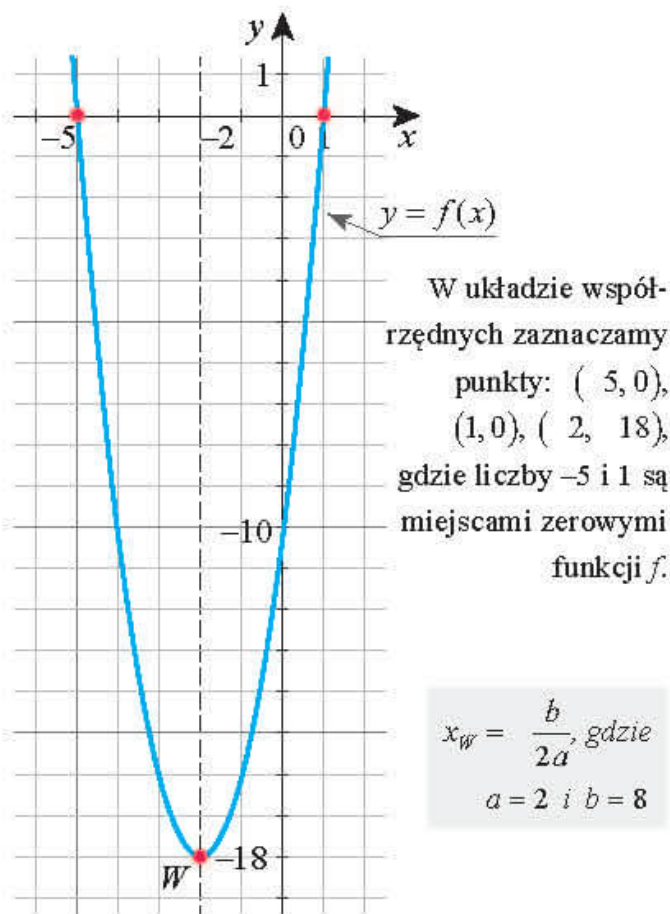
$$f(x) = 2x^2 + 8x - 10$$

$$x_W = \frac{-8}{4} = -2$$

$$y_W = f(x_W) = f(-2) = -18$$

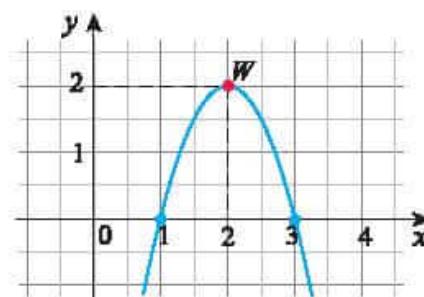
$$W = (-2, -18).$$

Odp.: $W = (-2, -18)$.



Ćwiczenie 21. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = -2(x+1)(x+3)$ i naskicuj jej wykres.

Ćwiczenie 22. Dorota naskicowała wykres funkcji określonej wzorem $y = -2x^2 + 8x - 6$. Sprawdź, czy narysowała właściwą parabolę.



Odpowiedzi do ćwiczeń

18. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $W = (-1, -3)$, b) $x_0 = 1$, $W = (1, 0)$ i np. punkty $(0, 1)$, $(2, 1)$, c) brak miejsc zerowych, $W = (-1, 1)$ i np. punkty $(0, 2)$, $(-2, 2)$.
 19. a) $f(x) = -\frac{1}{2}x(x+4)$, b) $f(x) = (x-4)(x-2)$,
 c) $f(x) = (x-1)(x+3)$, d) $f(x) = (x-5)^2$, e) $f(x) = -3x^2$, f) $f(x) = -(x-2)(x+2)$.
 20. Nie ma postaci iloczynowej, bo $\Delta < 0$. 21. $W = (-2, 2)$. 22. Tak.

Zadania utrwalające

14.30. Sprawdź, czy liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem:

- a) $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$, b) $f(x) = x^2 + 4x + 4$,
 c) $f(x) = 2x(x+6) + x(x+21) - 30$, d) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$.

14.31. Określ liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej f , gdy:

- a) $f(x) = -3x^2 + 4x - 5$, b) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$, c) $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$.

14.32. Oblicz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f i zapisz ją w postaci iloczynowej (o ile taka istnieje), gdy:

- a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$, b) $f(x) = -3x^2 + 9x$, c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$,
 d) $f(x) = x^2 - 16x + 74$, e) $f(x) = -2x^2 - 4x - 2$, f) $f(x) = -0,75x^2 + 2,25$.

14.33. Ustal, ile punktów wspólnych z osią odciętych x ma wykres funkcji f określonej wzorem:

- a) $f(x) = x^2 - 7x - 8$, b) $f(x) = 25x^2 + 30x + 9$,
 c) $f(x) = 100x^2 - 100x + 2500$, d) $f(x) = 3^{10} \cdot x^2 - 3^5 \cdot x - 2$.

14.34. Podaj miejsca zerowe funkcji f , oblicz współrzędne wierzchołka jej wykresu, gdy:

a) $f(x) = -2(x+3)(x-1)$,

b) $f(x) = 3x(x+5)$,

c) $f(x) = 8(x-4)(x-2)$,

d) $f(x) = 4(1-x)(x+3)$.

14.35. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = -\left(x+1\frac{1}{2}\right)\left(x-2\frac{1}{2}\right)$.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $1\frac{1}{2}$ i $-2\frac{1}{2}$.	P	F
Wierzchołek W wykresu funkcji f ma współrzędne $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.	P	F
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty; 4)$.	P	F

14.36. Naszkicuj wykres funkcji f , gdy:

a) $f(x) = -(x+3)(x-1)$,

b) $f(x) = 2(x-3)(x+1)$,

c) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+4)$,

d) $f(x) = -2x(x-1)$.

14.37. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f .



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

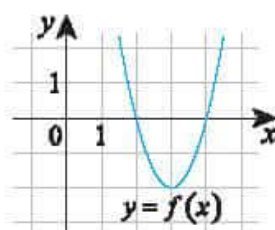
Funkcja f jest określona wzorem:

A. $f(x) = 2(x+2)(x+4)$,

B. $f(x) = -2(2-x)(x-4)$,

C. $f(x) = -2(x-2)(x-4)$,

D. $f(x) = 2(x+2)(x-4)$.



14.38. Oblicz współczynniki b i c funkcji kwadratowej określonej wzorem postaci

$f(x) = x^2 + bx + c$, znając jej miejsca zerowe x_1 i x_2 , gdy:

a) $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$,

b) $x_1 = 2$ i $x_2 = -9$,

c) $x_1 = 1 - \sqrt{3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{3}$,

d) $x_1 = x_2 = -3$,

e) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$,

f) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

14.39. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



Funkcji kwadratowej $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x+4)$ nie przedstawia wzór:

A. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{9}{2}$,

B. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$,

C. $f(x) = -\left[\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}\right]$,

D. $f(x) = -\left(\frac{1}{2}x^2 + x - 4\right)$.

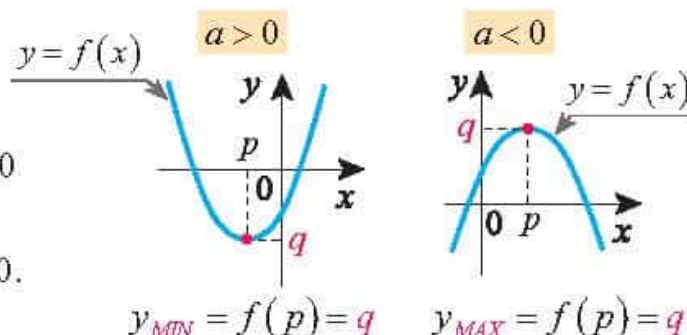
Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Przypomnijmy

Funkcja kwadratowa

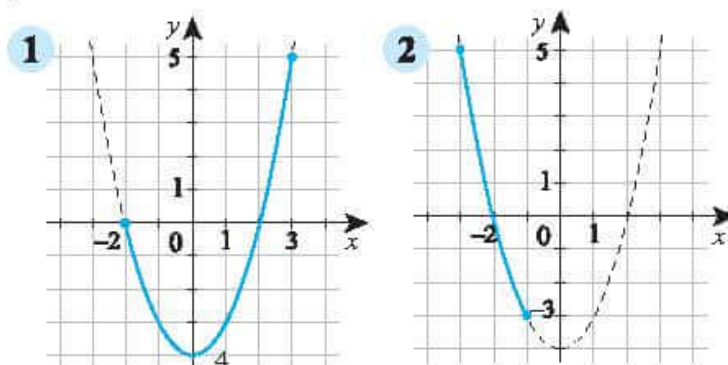
$$f(x) = a(x-p)^2 + q \text{ ma:}$$

- wartość najmniejszą y_{MIN} , gdy $a > 0$
albo
- wartość największą y_{MAX} , gdy $a < 0$.



Przykład 14. Na rysunkach **1** i **2** przedstawiono fragmenty wykresu funkcji kwadratowej f (linia niebieska). Odczytaj z wykresu:

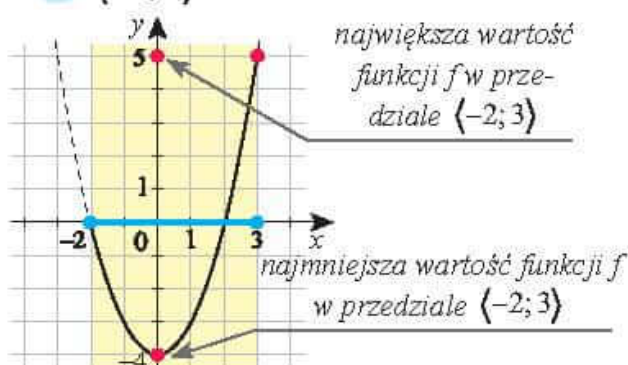
- przedział argumentów, do którego odnosi się ten fragment wykresu,
- najmniejszą wartość funkcji f w tym przedziale,
- największą wartość funkcji f w tym przedziale.



Rozwiązanie Odczytujemy z wykresu:

- maksymalny przedział argumentów, w którym fragment wykresu funkcji f jest sporządzony:

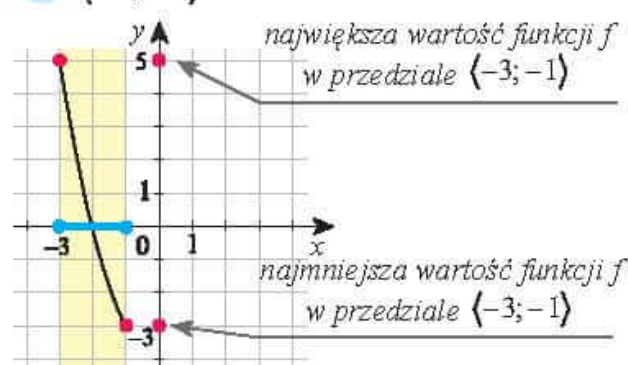
1 $\langle -2; 3 \rangle$



b) $y_{MIN} = f(0) = -4$,

c) $y_{MAX} = f(3) = 5$.

2 $\langle -3; -1 \rangle$

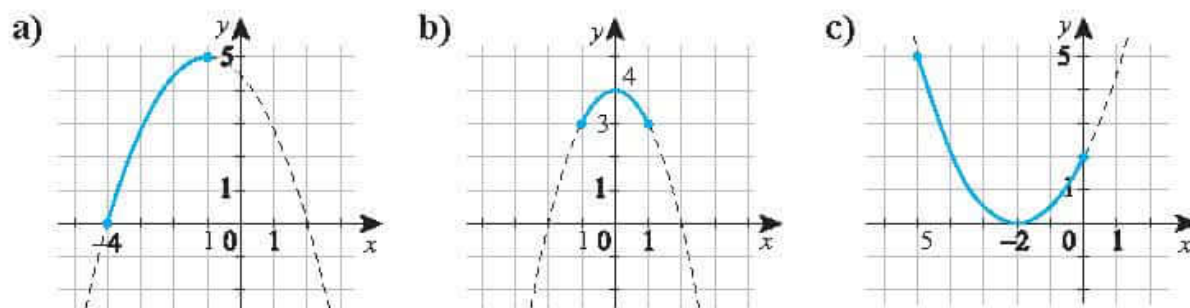


b) $y_{MIN} = f(-1) = -3$,

c) $y_{MAX} = f(-3) = 5$.

Odp.: **1** a) $\langle -2; 3 \rangle$, b) -4 , c) 5 , **2** a) $\langle -3; -1 \rangle$, b) -3 , c) 5 .

Ćwiczenie 23. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji kwadratowej. Odczytaj z wykresu przedział, w którym fragment ten jest określony oraz podaj wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w tym przedziale.



Przykład 15. Wykonaj odpowiednie obliczenia i podaj wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej f w podanym przedziale:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$, $\langle 0; 3 \rangle$, b) $f(x) = -(x+1)(x-5)$, $\langle -2; 1 \rangle$.

Rozwiązanie

a) Obliczamy $f(0)$, $f(3)$, x_W i sprawdzamy, czy x_W należy do przedziału $\langle 0; 3 \rangle$:

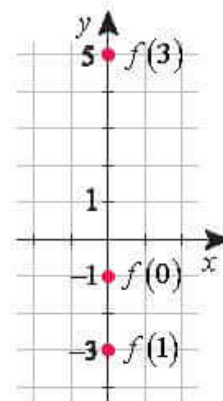
$$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 1 = -1, \quad f(3) = 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$x_W = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{i zauważamy, że } 1 \in \langle 0; 3 \rangle.$$

$$y_W = f(x_W) = f(1) = 2 \cdot 1 - 4 - 1 = -3.$$

Porównujemy liczby: -1 , 5 , -3 . Zatem $f(1) < f(0) < f(3)$.

Odp.: $y_{MIN} = f(1) = -3$, $y_{MAX} = f(3) = 5$.



b) Obliczamy $f(-2)$, $f(1)$:

$$f(-2) = -(-2+1)(-2-5) = -7, \quad f(1) = -(1+1)(1-5) = 8.$$

Obliczamy x_W . Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x_1 = -1$ i $x_2 = 5$,

$$\text{więc } x_W = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad \text{i zauważamy, że } x_W \notin \langle -2; 1 \rangle.$$

Porównujemy tylko dwie wartości: -7 i 8 . Zatem $f(-2) < f(1)$.

Odp.: $y_{MIN} = f(-2) = -7$, $y_{MAX} = f(1) = 8$.

Ćwiczenie 24. Oblicz wartość najmniejszą y_{MIN} i największą y_{MAX} funkcji kwadratowej f w podanym obok przedziale:

a) $f(x) = x^2 + 3x$, $\langle 1; 9 \rangle$, b) $f(x) = x^2 - 1$, $\langle 0; 4 \rangle$, c) $f(x) = -(x+3)(x-1)$, $\langle -1; 2 \rangle$.

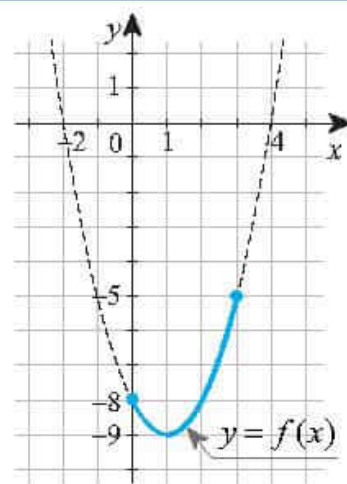
Uwaga Aby określić wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej f w przedziale $\langle m; n \rangle$, należy:

- obliczyć wartości funkcji f na końcach przedziału $\langle m; n \rangle$,
czyli $y_1 = f(m)$ i $y_2 = f(n)$,
- obliczyć odcięta p wierzchołka wykresu funkcji kwadratowej:
 - jeśli p należy do przedziału $\langle m; n \rangle$, to obliczyć $q = f(p)$ i porównać wartości $f(m)$, $f(n)$ i $f(p)$,
 - jeśli p nie należy do przedziału $\langle m; n \rangle$, to wystarczy porównać $f(m)$ i $f(n)$.

Przykład 16. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f (linia niebieska) określonej wzorem $f(x) = x^2 - 2x - 8$. Oblicz w przedziale $\langle 0; 3 \rangle$ najmniejszą i największą wartość:

a) funkcji f ,

b) funkcji g , gdy $g(x) = \frac{4}{x^2 - 2x - 8}$.



Rozwiązanie

a) Odczytujemy z wykresu funkcji f wartość najmniejszą $y_{MIN f}$ i największą $y_{MAX f}$.

Zauważamy, że jeśli $x \in \langle 0; 3 \rangle$, to $f(x) \in \langle -9; -5 \rangle$.

Zatem $y_{MIN f} = f(1) = -9$, $y_{MAX f} = f(3) = -5$.

b) Zauważamy, że wzór funkcji g można przedstawić w postaci $g(x) = \frac{4}{f(x)}$.

W przedziale $\langle 0; 3 \rangle$ funkcja f przyjmuje tylko wartości ujemne, a więc funkcja g w tym przedziale ma też tylko wartości ujemne. Aby określić najmniejszą $y_{MIN g}$ i największą $y_{MAX g}$ wartość funkcji g w przedziale $\langle 0; 3 \rangle$, wystarczy porównać ułamki:

$\frac{4}{y_{MIN f}}$ i $\frac{4}{y_{MAX f}}$, czyli ułamki $-\frac{4}{9}$ i $-\frac{4}{5}$.

Jeżeli $f(x) < 0$, to $\frac{4}{f(x)} < 0$

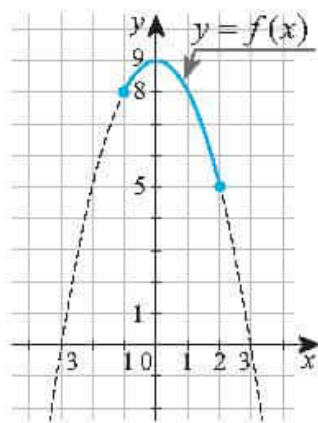
Zatem $y_{MIN g} = \frac{4}{y_{MAX f}} = -\frac{4}{5}$, $y_{MAX g} = \frac{4}{y_{MIN f}} = -\frac{4}{9}$.

$$-\frac{4}{9} > -\frac{4}{5}$$

Odp.: a) $y_{MIN f} = f(1) = -9$, $y_{MAX f} = f(3) = -5$,

b) $y_{MIN g} = \frac{4}{f(3)} = -\frac{4}{5}$, $y_{MAX g} = \frac{4}{f(1)} = -\frac{4}{9}$.

Ćwiczenie 25. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f (kolor niebieski) określonej wzorem $f(x) = 9 - x^2$. W przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ oblicz najmniejszą i największą wartość:



a) funkcji f , b) funkcji g , gdy $g(x) = \frac{3}{9 - x^2}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

23. a) $\langle -4; -1 \rangle$, $y_{\min} = f(-4) = 0$, $y_{\max} = f(-1) = 5$, b) $\langle -1; 1 \rangle$, $y_{\min} = f(-1) = f(1) = 3$, $y_{\max} = f(0) = 4$, c) $\langle -5; 0 \rangle$, $y_{\min} = f(-2) = 0$, $y_{\max} = f(-5) = 5$.

24. a) $y_{\min} = f(1) = 4$, $y_{\max} = f(9) = 108$, b) $y_{\min} = f(0) = -1$, $y_{\max} = f(4) = 15$,

c) $y_{\min} = f(2) = -5$, $y_{\max} = f(-1) = 4$.

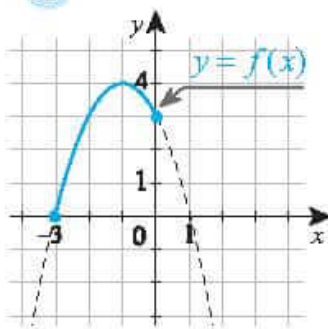
25. a) $y_{\min} = f(2) = -5$, $y_{\max} = f(0) = 9$, b) $y_{\min} g = \frac{3}{y_{\max} f} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $y_{\max} g = \frac{3}{y_{\min} f} = \frac{3}{-5}$.

Zadania utrwalające

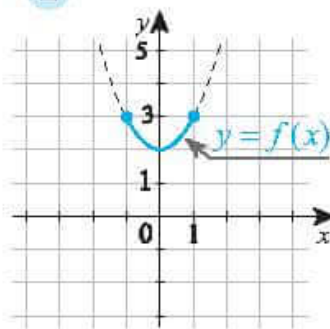
14.40. Na rysunkach **1**, **2** i **3** przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f (linia niebieska). Odczytaj z wykresu i podaj:

- a) przedział tych argumentów x , dla których ten fragment jest określony,
b) wartość najmniejszą i największą funkcji f w tym przedziale.

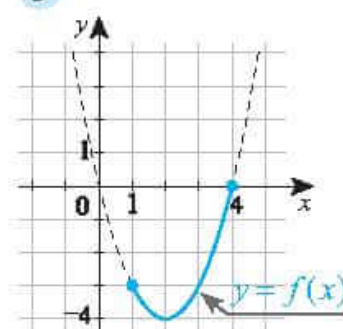
1



2



3



14.41. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Najmniejsza wartość funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 + 2x - 1$ w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$ jest równa:

A. -2 ,

B. -1 ,

C. 0 ,

D. 1 .

14.42. Oblicz najmniejszą y_{MIN} i największą y_{MAX} wartość funkcji kwadratowej f w podanym przedziale:

a) $f(x) = -x^2 + 5x$, $\langle -1; 1 \rangle$,

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, $\langle -1; 0 \rangle$,

c) $f(x) = 3(x+3)(x-1)$, $\langle -2; 0 \rangle$,

d) $f(x) = 5(x+3)(x+5)$, $\langle -2; -1 \rangle$,

e) $f(x) = 2(x-2)^2 + 4$, $\langle 0; 3 \rangle$,

f) $f(x) = (x+3)^2 - 3$, $\langle -2; 2 \rangle$.

14.43. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f .

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

W przedziale $\langle 2; 5 \rangle$ funkcja f ma najmniejszą wartość równą 1.

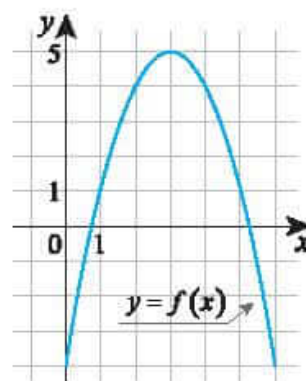
P

F

W przedziale $\langle 0; 4 \rangle$ funkcja f ma największą wartość równą 4.

P

F



14.44. Wartościami funkcji f określonej wzorem $f(n) = n^2 - n + 41$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, \dots, 40\}$, są liczby pierwsze.

a) Oblicz najmniejszą i największą liczbę pierwszą, którą można wyznaczyć za pomocą tego wzoru.

b) Sprawdź, czy liczba pierwsza 547 jest wartością tej funkcji.

14.45. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji f , gdy

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-3)^2 + (x-5)^2, \text{ gdy } x \in \langle 1; 5 \rangle.$$

14.46. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji f , gdy:

a) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ i $x \in \langle 1; 5 \rangle$,

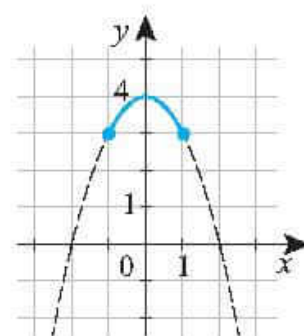
b) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$ i $x \in \langle -8; -6 \rangle$,

c) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$ i $x \in \langle 2; 7 \rangle$,

d) $f(x) = \frac{6}{(x+4)(2-x)}$ i $x \in \langle -8; -6 \rangle$.

14.47. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f (kolor niebieski), określonej wzorem $f(x) = 4 - x^2$.

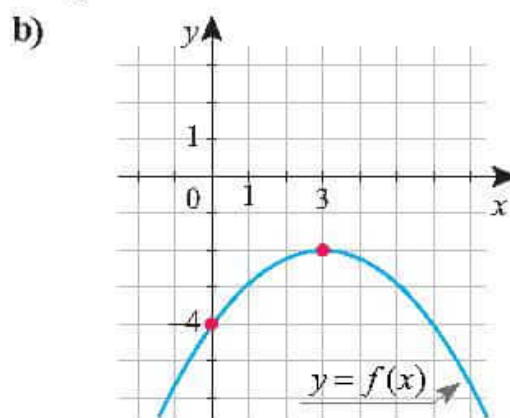
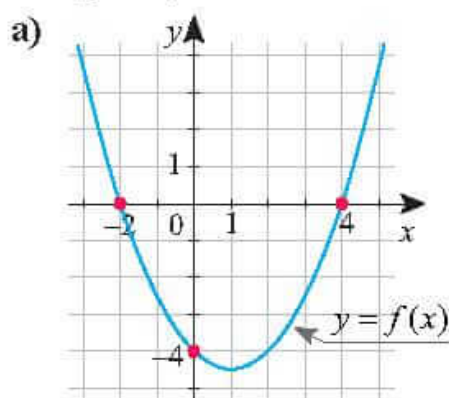
Uzasadnij, że funkcja $g(x) = \frac{4}{4 - x^2}$ ma w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$ najmniejszą wartość równą 1.



Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie informacji o niej

Jedną z informacji o funkcji kwadratowej jest jej wykres. Pokażemy na przykładzie, jak korzystając z danych umieszczonych na wykresie (odczytując współrzędne odpowiednich punktów), można napisać wzór funkcji.

Przykład 17. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f . Odczytaj z niego odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.



Rozwiązanie

Z wykresu funkcji f odczytujemy:

a) • miejsca zerowe funkcji f :

$$x_1 = -2, x_2 = 4.$$

Funkcję f zapisujemy w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x+2)(x-4).$$

• $(0, -4)$ – współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji f z osią y .

Zatem

$$f(0) = -4 \text{ i } f(x) = a(x+2)(x-4),$$

$$\text{więc } -4 = a(0+2)(0-4),$$

$$\text{skąd } a = \frac{1}{2},$$

$$\text{czyli } f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4).$$

$$\text{Odp.: a) } f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4),$$

b) • $(3, -2)$ – współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f .

Funkcję f zapisujemy w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x-3)^2 - 2.$$

• $(0, -4)$ – punkt przecięcia się wykresu funkcji f z osią y .

Zatem

$$f(0) = -4 \text{ i } f(x) = a(x-3)^2 - 2,$$

$$\text{więc } -4 = a(0-3)^2 - 2,$$

$$\text{skąd } a = -\frac{2}{9},$$

$$\text{czyli } f(x) = -\frac{2}{9}(x-3)^2 - 2.$$

$$\text{b) } f(x) = -\frac{2}{9}(x-3)^2 - 2.$$

Uwaga

Jeżeli wyznaczamy wzór funkcji kwadratowej f , a wśród informacji podane są:

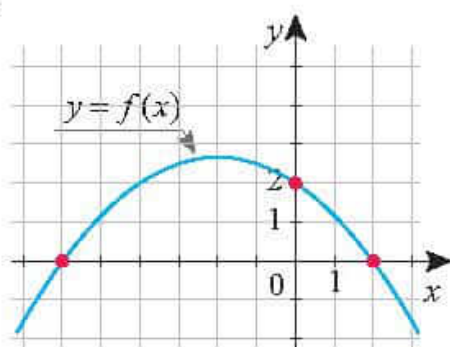
- **miejsca zerowe** – to korzystamy z postaci iloczynowej wzoru funkcji

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{lub} \quad f(x) = a(x - x_0)^2,$$

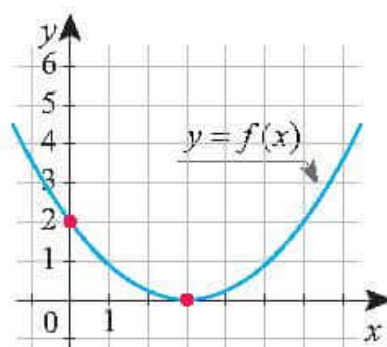
- **współrzędne p lub q wierzchołka W paraboli**, która jest jej wykresem – to korzystamy z postaci kanonicznej wzoru funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

Ćwiczenie 26. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f . Odczytaj odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.

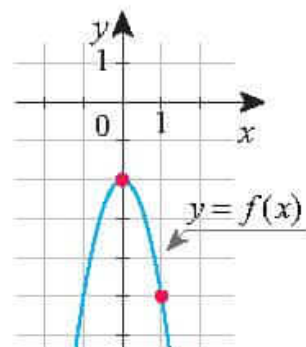
a)



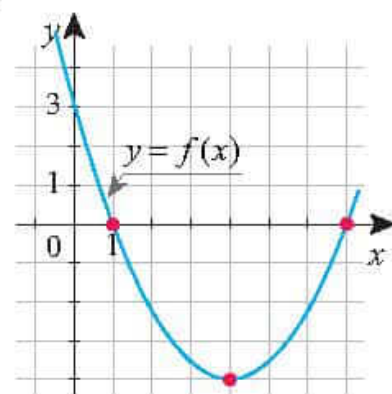
b)



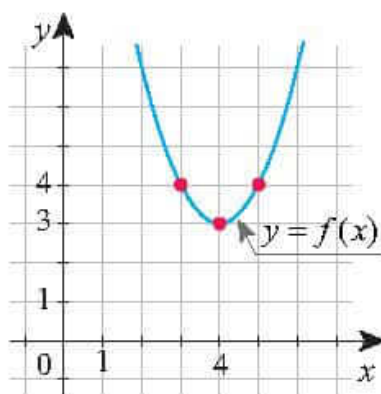
c)



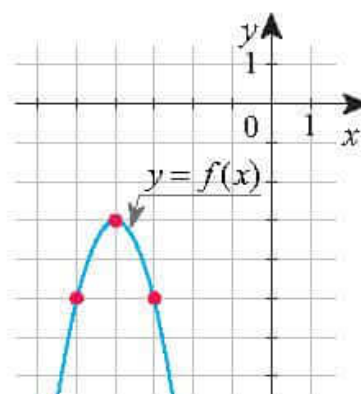
d)



e)



f)



Ćwiczenie 27. Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W = (p, q)$. Określ, o której współrzędnej, p czy q , jest poniższa informacja, a następnie podaj jej wartość.

- Najmniejszą wartość funkcja f ma, gdy $x = 3$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty; 2]$.
- Oś symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = 5$.
- Przedział $(-3; +\infty)$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest rosnąca.
- Prosta o równaniu $y = -2$ ma z wykresem funkcji f jeden punkt wspólny.

Przykład 18. Napisz wzór funkcji kwadratowej f , wiedząc, że do jej wykresu należą punkty o współrzędnych $(0, 4)$, $(1, 3)$ i $(-1, 9)$.

Rozwiązanie

W informacji o wykresie funkcji kwadratowej f nie są podane miejsca zerowe i współrzędne wierzchołka, więc korzystamy z wzoru ogólnego funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Punkt $(0, 4)$ leży na wykresie funkcji f , więc $f(0) = 4$, zatem $c = 4$.

Wzór funkcji f możemy zapisać $f(x) = ax^2 + bx + 4$.

Rozwiązując układ równań, obliczamy wartości współczynników a i b .

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(-1) = 9 \end{cases}$$

Punkt $(1, 3)$ leży na wykresie funkcji f ,
punkt $(-1, 9)$ leży na wykresie funkcji f .

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 4 = 3 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 4 = 9 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 5 \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}.$$

Odp.: $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

Ćwiczenie 28. Napisz wzór funkcji kwadratowej f , wiedząc, że do jej wykresu należą punkty o współrzędnych: a) $(1, -2)$, $(3, -6)$, $(0, -3)$, b) $(0, -5)$, $(1, 0)$, $(-5, 0)$.

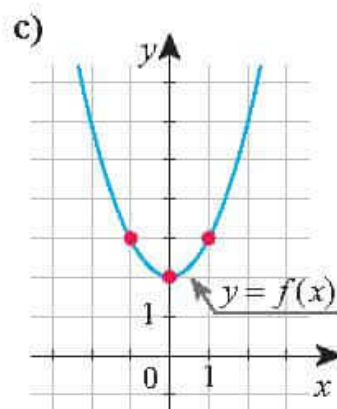
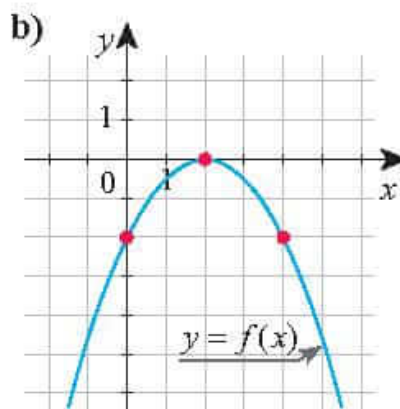
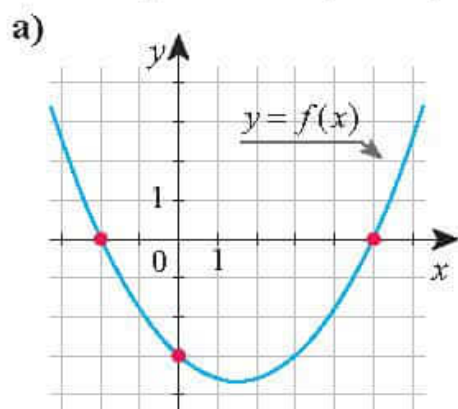
Odpowiedzi do ćwiczeń

26. a) $f(x) = -\frac{1}{6}(x+6)(x-2)$, b) $f(x) = \frac{2}{9}(x-3)^2$, c) $f(x) = -3x^2 - 2$, d) $f(x) = \frac{4}{9}(x-1)(x-7)$ lub $f(x) = \frac{4}{9}(x-4)^2 - 4$, e) $f(x) = (x-4)^2 + 3$, f) $f(x) = -2(x+4)^2 - 3$.

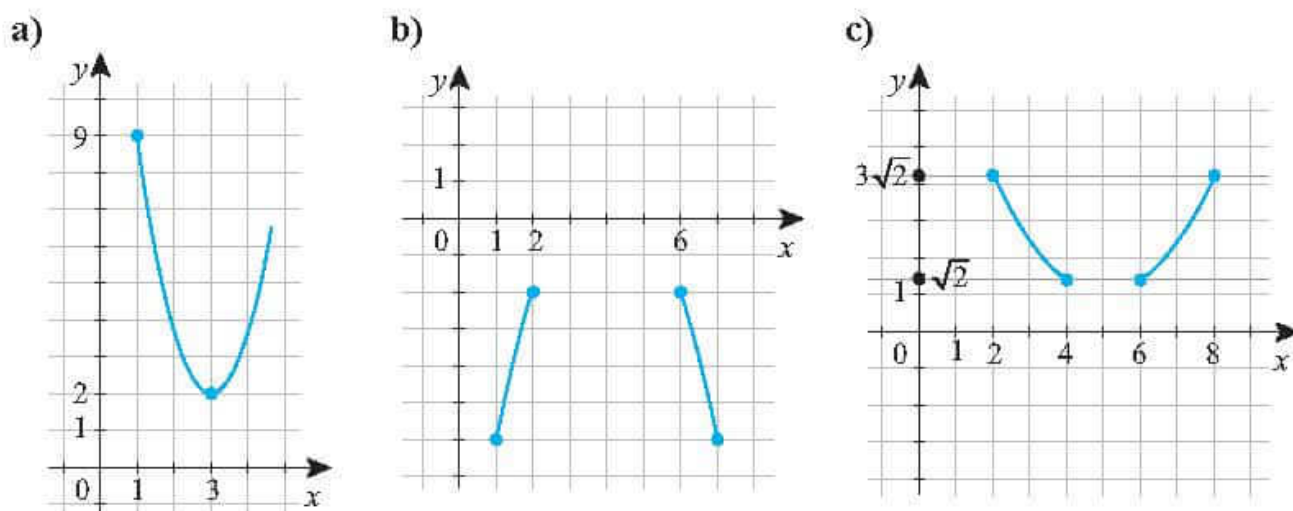
27. a) $p = 3$, b) $q = 2$, c) $p = 5$, d) $p = -3$, e) $q = -2$. 28. a) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$, b) $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

Zadania utrwalające

14.48. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f . Odczytaj odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.



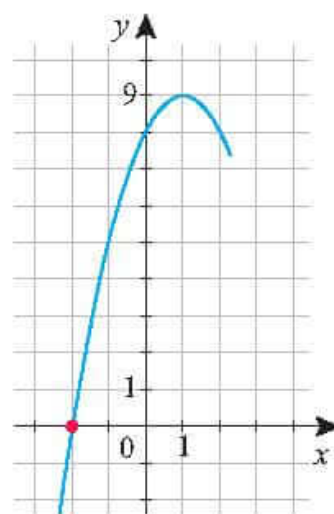
14.49. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f . Odczytaj odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.



14.50. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f .

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -2 i 4 .	P	F
Zbiorem wartości funkcji f są liczby należące do przedziału $(-\infty; 9)$.	P	F
Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-2; 4)$.	P	F



14.51. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby x_1 i x_2 , a jej wykres jest parabolą przystającą do paraboli o równaniu $y = ax^2$. Napisz wzór funkcji f w postaci ogólnej, gdy:

a) $x_1 = -2$, $x_2 = 5$ i $a = 3$, b) $x_1 = 8$, $x_2 = 20$ i $a = -1$, c) $x_1 = 0$, $x_2 = 7$ i $a = \frac{1}{3}$.

14.52. Wykres funkcji kwadratowej przecina oś x w punktach A i B oraz oś y w punkcie M . Napisz wzór tej funkcji oraz podaj współrzędne wierzchołka paraboli, która jest jej wykresem, gdy:

a) $A = (-1, 0)$, $B = (5, 0)$, $M = (0, 5)$, b) $A = (-4, 0)$, $B = (6, 0)$, $M = (0, -12)$,
c) $A = (-4, 0)$, $B = (1, 0)$, $M = (0, 8)$, d) $A = (-3, 0)$, $B = (1, 0)$, $M = (0, -300)$.

14.53. Napisz wzór funkcji kwadratowej f , której miejscami zerowymi są liczby -1 i 7 , a zbiorem jej wartości jest zbiór Y_f , gdy:

a) $Y_f = (-\infty; 4)$, b) $Y_f = (-1; +\infty)$.

14.54. Funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe 1 i -3 , a jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 6)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f **nie** jest określona wzorem:

A. $f(x) = 2(x-1)(x+3)$,

B. $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$,

C. $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$,

D. $f(x) = (x+3)(2-2x)$.

14.55. Napisz wzór funkcji kwadratowej f , o której wiadomo, że:

- ma najmniejszą wartość równą -10 dla argumentu równego 3 , a jej wykres przechodzi przez punkt $P = (2, -8)$,
- ma największą wartość równą 8 dla argumentu równego -1 , a jej wykres przechodzi przez punkt $P = (-3, -4)$.

14.56. Napisz wzór funkcji kwadratowej f , o której wiadomo, że:

- $f(5) = 0$ i przedział $\langle 2; +\infty \rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest malejąca, a przedział $(-\infty; 5]$ jest jej zbiorem wartości,
- $f(1) = 1$ i przedział $\langle 4; +\infty \rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest rosnąca, a przedział $\langle -8; +\infty \rangle$ jest jej zbiorem wartości,
- $f(0) = 0$ i przedział $(-\infty; -2]$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest malejąca, a jej wykres z prostą o równaniu $y = -4$ ma jeden punkt wspólny.

14.57. Napisz wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty o współrzędnych:

a) $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(-1, 9)$,

b) $(-1, 11)$, $(1, 1)$, $(0, 5)$,

c) $(0, 0)$, $(-2, -22)$, $(2, -2)$,

d) $(0, -4)$, $(1, -5)$, $(-2, -8)$.

14.58. Określ, dla jakich wartości współczynników a , b i c do wykresu funkcji kwadratowej f , gdzie $f(x) = ax^2 + bx + c$, należą punkty A i B , gdy:

a) $f(x) = ax^2 + bx + 2$, $A = (-1, -1)$ i $B = (-2, -2)$,

b) $f(x) = 2x^2 + bx + c$, $A = (-3, 22)$ i $B = (1, 2)$.

c) $f(x) = ax^2 + x + c$, $A = (-2, -3)$ i $B = (3, -3)$.

14.59. Określ, dla jakiej wartości m prosta o równaniu $y = m$ ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f , gdy:

a) $f(x) = 4(x+3)^2 - 2$,

b) $f(x) = -3(x-1)^2 + 4$,

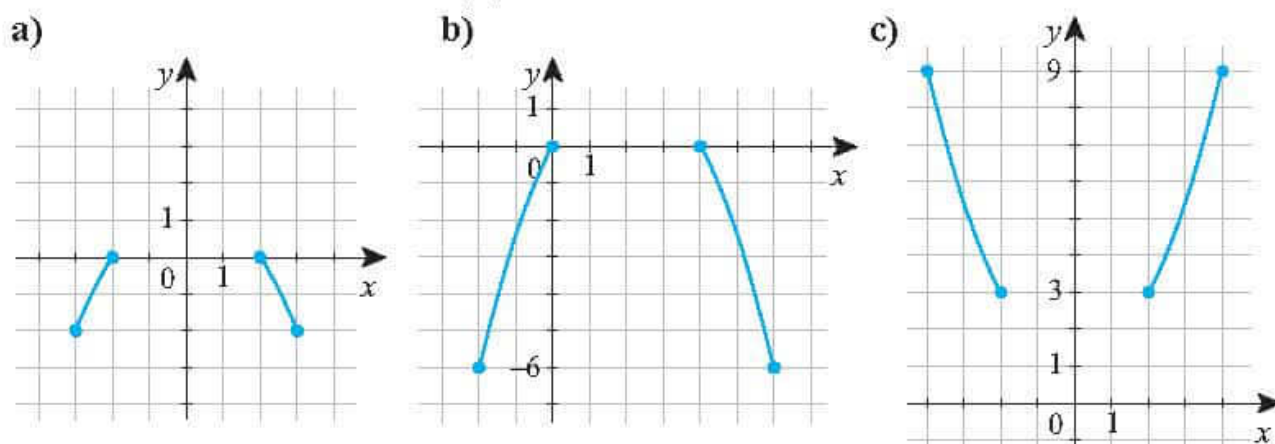
c) $f(x) = 4 - x^2$,

d) $f(x) = 1 - (x-4)^2$,

e) $f(x) = 7x^2$,

f) $f(x) = -2x(x-4)$.

14.60. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f . Określ liczbę rozwiązań równania $f(x) = 2$.



Funkcja kwadratowa w zastosowaniach

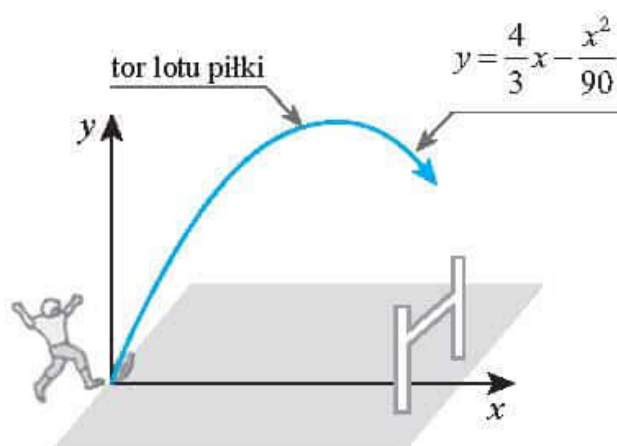
Funkcja kwadratowa ma szerokie zastosowanie przy interpretowaniu wielu zagadnień teoretycznych i praktycznych.

Przykłady zależności, które są opisane funkcją kwadratową:

- $P(a) = a^2$ – pole P kwadratu o boku a , gdzie $a > 0$,
- $P(r) = \pi r^2$ – pole P koła o promieniu r , gdzie $r > 0$,
- $s(t) = \frac{at^2}{2}$ – droga s przebyta w ruchu jednostajnie przyspieszonym w czasie t z przyspieszeniem a , gdzie $t \geq 0$,
- $E_k(v) = \frac{mv^2}{2}$ – energia kinetyczna E_k ciała o masie m , które osiągnęło w ruchu prędkość v , gdzie $v \geq 0$.

Jeżeli jakiś proces lub zjawisko można opisać za pomocą funkcji kwadratowej, to możliwe jest wtedy określanie warunków tak, by przyjmowała ona pożądane przez nas wartości.

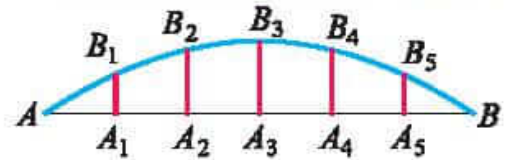
Za pomocą funkcji kwadratowej można opisać niektóre budowle. Pozwala to na wykonanie obliczeń potrzebnych do ich konstrukcji. Pokażemy to na przykładach.



Przykład 19. Przęsło mostu ma kształt paraboli

o równaniu $y = -\frac{1}{216}x^2 + \frac{1}{2}x$, gdzie x oznacza odległość od punktu A i jest liczbą z przedziału $\langle 0; 108 \rangle$.

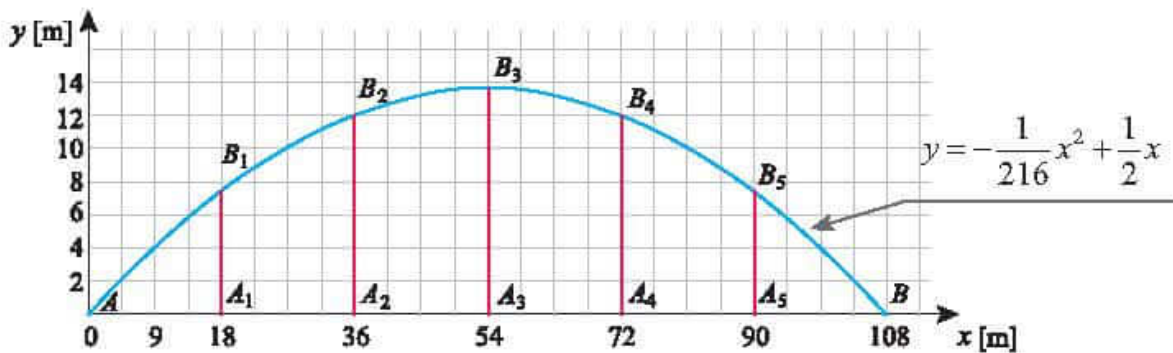
Pomost (jezdnia) AB ma długość 108 m i jest podtrzymywany przez pięć pionowych wieszaków: A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , A_4B_4 , A_5B_5 rozmieszczonych w równych odstępach. Oblicz ich długości.



Rozwiązanie Rysunek schematyczny mostu jest fragmentem wykresu funkcji

$f(x) = -\frac{1}{216}x^2 + \frac{1}{2}x$. Zauważamy, że ta funkcja ma dwa miejsca zerowe:

$x_1 = 0$ i $x_2 = 108$.



Z warunków zadania: $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = |A_4A_5| = |A_5B| = \frac{108}{6} = 18$.

Zatem: $A = (0, 0)$, $A_1 = (18, 0)$, $A_2 = (36, 0)$, $A_3 = (54, 0)$, $A_4 = (72, 0)$, $A_5 = (90, 0)$, $B = (108, 0)$.

Długości wieszaków to wartości funkcji kwadratowej określonej wzorem

$f(x) = -\frac{1}{216}x^2 + \frac{1}{2}x$ dla argumentów x równych kolejno: 18, 36, 54, 72, 90.

x	18	36	54	72	90
$y = -\frac{1}{216}x^2 + \frac{1}{2}x$	7,5	12	13,5	12	7,5

$$\begin{array}{ll}
 |A_1B_1| = 7,5 \text{ m}, & |A_4B_4| = 12 \text{ m}, \\
 |A_2B_2| = 12 \text{ m}, & |A_5B_5| = 7,5 \text{ m}, \\
 |A_3B_3| = 13,5 \text{ m}, &
 \end{array}$$

Odp.: Wieszaki podtrzymujące jezdnię mostu mają długości: dwa z nich po 7,5 m, dwa po 12 m i jeden (najdłuższy) 13,5 m.

Ćwiczenie 29. Dla pewnego pojazdu w określonych warunkach długość drogi hamowania s (w metrach) obliczamy z wzoru $s(x) = 0,01x^2 + 0,3x$, gdzie x jest prędkością w metrach na sekundę, z jaką poruszał się pojazd w chwili rozpoczęcia hamowania.

a) Oblicz długość drogi hamowania pojazdu, jeżeli w momencie rozpoczęcia hamowania jechał on z prędkością:

1 $90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}},$ **2** $72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}},$ **3** $54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

b) Podaj prędkość, z jaką jechał pojazd, jeżeli długość drogi hamowania była równa 18 m.

Przy tworzeniu wzoru funkcji kwadratowej od przyjętych oznaczeń i warunków, o których informuje problem, zależy dziedzina utworzonej funkcji.

Przykład 20. Wyraż pole P rombu przedstawionego na rysunku jako funkcję zmiennej x oraz określ jej dziedzinę.

Rozwiązanie

Pole rombu jest iloczynem długości boku a rombu i wysokości h , gdzie $a = 2x - 4$ i $h = x - 3$, więc

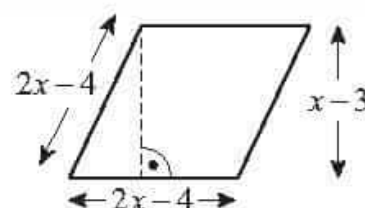
$$P(x) = (2x - 4)(x - 3).$$

$a > 0$ i $h > 0$, czyli $2x - 4 > 0$ i $x - 3 > 0$, więc

$x > 2$ i $x > 3$, skąd

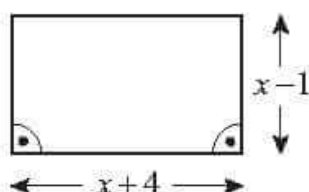
$$x > 3.$$

Odp.: $P(x) = (2x - 4)(x - 3)$, $D_P = (3; +\infty)$.

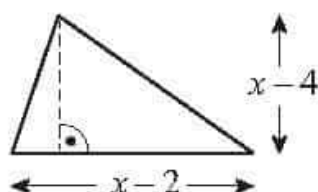


Ćwiczenie 30. Wyraż pole P figury przedstawionej na rysunku jako funkcję zmiennej x oraz określ jej dziedzinę.

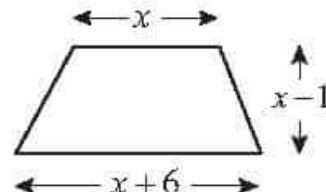
a) prostokąt



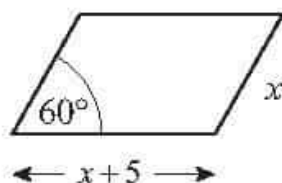
b) trójkąt



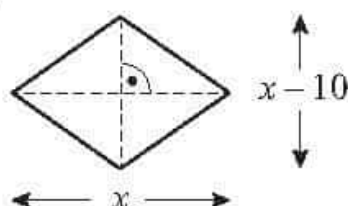
c) trapez



d) równoległobok



e) romb



Przykład 21. Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy dwóch składników nieujemnych tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

Rozwiązanie Oznaczamy: x – pierwszy składnik, gdzie $x \geq 0$ i $x \leq 100$,
 $100 - x$ – drugi składnik.

Tworzymy funkcję f zmiennej x , która jest sumą kwadratów tych składników.

$$f(x) = x^2 + (100 - x)^2, \text{ gdy } x \in \langle 0; 100 \rangle$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a = 2, b = -200, c = 10\,000$$

$$f(x) = 2x^2 - 200x + 10\,000, \text{ gdy } 0 \leq x \leq 100.$$

Wykresem funkcji f , gdy $x \in \mathbf{R}$, jest parabola, której ramiona skierowane są „ku górze”, więc funkcja f ma najmniejszą wartość.

Obliczamy odcięta x_W wierzchołka paraboli opisanej równaniem

$f(x) = 2x^2 - 200x + 10\,000$ i sprawdzamy, czy x_W jest liczbą z przedziału $\langle 0; 100 \rangle$.

$$x_W = \frac{-(-200)}{2 \cdot 2} = 50 \text{ i } 50 \in \langle 0; 100 \rangle.$$

$$W = (x_W, y_W)$$

$$x_W = -\frac{b}{2a}$$

Jeżeli $x = 50$, to $100 - x = 50$.

Odp.: $100 = 50 + 50$.

Ćwiczenie 31. Liczbę 40 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, aby ich iloczyn był największy.

Przykład 22. Skup jagód w sezonie letnim trwał 20 dni. Liczbę kilogramów kupionych owoców w poszczególnych dniach opisuje w przybliżeniu funkcja f określona wzorem $f(n) = -2n^2 + 44n$, gdy $n = 1, 2, \dots, 20$. W którym dniu kupiono najwięcej jagód? Ile kilogramów ważyły te jagody?

Rozwiązanie Wzór funkcji f zapisany jest w postaci

$$f(n) = an^2 + bn + c, \text{ gdzie } a = -2, b = 44, c = 0.$$

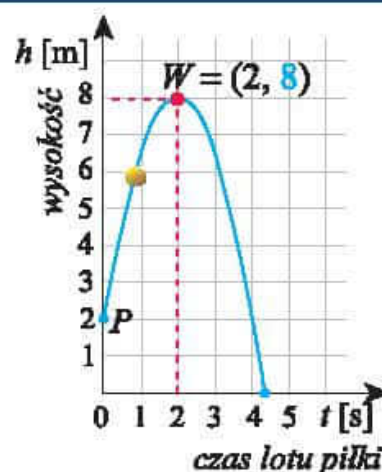
Zauważamy, że $a < 0$, zatem funkcja f osiąga wartość największą $y_{MAX} = f(p)$, gdy p jest liczbą naturalną z przedziału $\langle 1; 20 \rangle$.

Ponieważ $p = \frac{-b}{2a} = \frac{-44}{-4} = 11$, więc $y_{MAX} = f(11) = -2 \cdot 11^2 + 44 \cdot 11 = 242$.

Odp.: W jedenastym dniu kupiono najwięcej jagód, tj. 242 kilogramy.

Ćwiczenie 32. Zależność między kosztem całkowitym produkcji K a liczbą x wyprodukowanych detali określona jest wzorem $K(x) = 0,01x^2 - 4x + 500$, gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią. Ile detali należy produkować, aby koszt całkowity produkcji był najmniejszy?

Przykład 23. Na rysunku przedstawiono tor lotu piłki wyrzuconej w górę pod pewnym kątem z wysokości 2 m nad ziemią będący fragmentem wykresu funkcji określonej wzorem $h(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t + 2$, gdzie $t > 0$.



- Oblicz, po jakim czasie piłka spadła na ziemię. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 s.
- Odczytaj z wykresu, na jakiej maksymalnej wysokości znalazła się wyrzucona piłka.

Rozwiązanie

- a) Czas t ($t > 0$), po którym piłka spadła na ziemię, to jedno z miejsc zerowych funkcji h .

$$h(t) = 0, \text{ więc } -\frac{3}{2}t^2 + 6t + 2 = 0$$

$$t_1 = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{-3}, \quad t_2 = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{-3}$$

$$t_1 \approx 4,31, \quad t_2 \approx -0,31.$$

Zatem $t_1 \approx 4,31$.

$$\Delta = 48, \quad \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3}$$

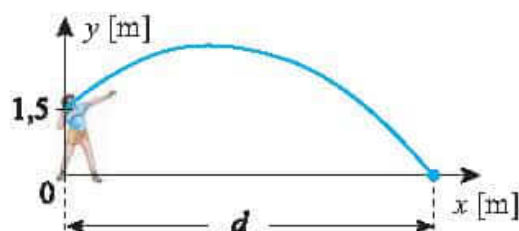
$t_2 < 0$ nie spełnia warunków zadania.

- b) $q = h_{MAX} = h(2) = 8$.

Największa wartość funkcji kwadratowej to wartość rzędnej wierzchołka paraboli.

Odp.: a) Czas lotu piłki $t \approx 4,31$ s. b) Maksymalna wysokość, na jakiej znalazła się piłka, wyniosła 8 m.

Ćwiczenie 33. Miotaczka pchnęła kulę z wysokości 1,5 m nad ziemią. Model matematyczny toru lotu kuli pchniętej przez zawodniczkę jest fragmentem wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = -0,1 \cdot (x-5)^2 + 4$.



- Oblicz, na jakiej wysokości nad ziemią znajdowała się kula w najwyższym punkcie swego lotu.
- W jakiej odległości d od zawodniczki upadła pchnięta kula?

Odpowiedzi do ćwiczeń

29. a) 1) 13,75 m, 2) 10 m, 3) 6,75 m, b) $108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, 30. a) $P(x) = (x+4)(x-1)$, $D: x > 1$,
 b) $P(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-4)$, $D: x > 4$, c) $P(x) = (x+3)(x-1)$, $D: x > 1$, d) $P(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x(x+5)$, $D: x > 0$,
 e) $P(x) = \frac{x(x-10)}{2}$, $D: x > 10$, 31. $40 = 20 + 20$, 32. 200 detali, 33. a) 4 m, b) $d \approx 11,3$ m.

Zadania utrwalające

14.61. Po wielu badaniach ustalono, że koszt K produkcji pewnego towaru zależy od liczby x wyprodukowanych sztuk określa się wzorem $K(x) = 0,1x^2 - 3x + 600$. Oblicz koszt produkcji:

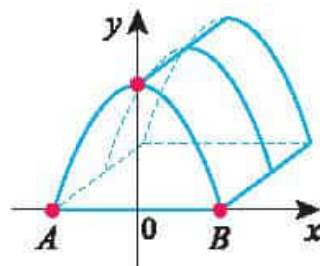
- a) 20 sztuk towaru, b) 200 sztuk towaru, c) 1000 sztuk towaru.

14.62. Ciało wyrzucone w górę osiąga po t sekundach wysokość h liczoną w metrach, równą wartości funkcji określonej wzorem $h(t) = -5t^2 + 15t$.

- a) W której sekundzie ciało spadnie na ziemię?
b) W której sekundzie lotu wysokość h ciała nad ziemią jest największa? Ile to jest metrów?

14.63. Tunele foliowe pod uprawę ogórków wsparte są na prętach w kształcie łuku paraboli o równaniu $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$.

- a) Sprawdź, czy pracownik o wzroście 1,85 m może przejść bez pochylania się wzdłuż ścieżki prowadzącej środkiem tunelu. Odpowiedź uzasadnij.
b) Oblicz szerokość tunelu przy gruncie.



14.64. Modele matematyczne torów kropli wody tryskającej z fontanny są fragmentami parabol o równaniach:

• $y = -\frac{2}{3}x^2 + 3x$, • $y = -\frac{3}{5}x^2 + 2x$, • $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$.

Wskaż równanie opisujące tor, po którym:

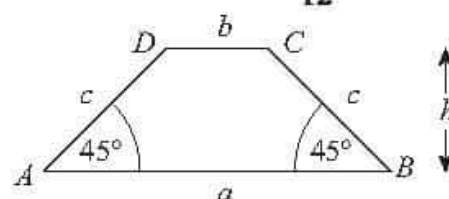
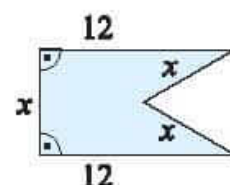
- a) krople spadają najdalej od środka fontanny,
b) krople wznoszą się najniżej.



14.65. Opisz podaną niżej informację za pomocą wzoru funkcji kwadratowej jednej zmiennej i określ jej dziedzinę.

- a) Suma kwadratów dwóch składników liczby 20.
b) Iloczyn dwóch liczb różniących się o 5.
c) Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych.
d) Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych.
e) Iloczyn dwóch kolejnych liczb nieparzystych.
f) Iloczyn czynników pierwszych liczby 247, z których każdy zwiększono o tę samą wartość.
g) Różnica sześcianów dwóch kolejnych liczb naturalnych.

- 14.66. W pewnej miejscowości liczbę przyjęć chorych do szpitala w czasie n dni trwania epidemii określa wzór $E(n) = -2n^2 + 24n$, gdzie n jest liczbą naturalną i $n \leq 10$.
- Oblicz, ilu chorych przyjęto do szpitala w pierwszym dniu trwania epidemii, a ilu w dziesiątym.
 - W którym dniu trwania epidemii przyjęto najwięcej pacjentów i ilu ich było?
 - Przez ile dni przyjmowano do szpitala chorych ze względu na panującą epidemię?
- 14.67. Opisz za pomocą wzoru funkcji kwadratowej zmiennej n liczbę przekątnych n -kąta i określ jej dziedzinę. Oblicz, ile boków ma wielokąt, w którym liczba przekątnych jest równa 405.
- 14.68. Część uczniów klasy liczącej 35 osób zachorowała na grypę i nie przyszła do szkoły. Każdy zdrowy uczeń wysłał do chorego kolegi esemesa z pozdrowieniami.
- Napisz wzór funkcji f , która liczbie x uczniów chorych na grypę przyporządkowuje liczbę $f(x)$ wysłanych esemesów, a następnie określ ich dziedzinę.
 - Wiedząc, że liczba wysłanych esemesów jest największa z możliwych, wyznacz zarówno liczbę uczniów chorych na grypę, jak i liczbę wysłanych esemesów.
- 14.69. Drogę s pewnego poruszającego się ciała w czasie t określa wzór $s(t) = t^2 + 6t + 10$. Oblicz średnią prędkość ciała w czasie $t \in \langle 4; 7 \rangle$.
- 14.70. Liczbę 36 rozłóż na sumę takich dwóch składników, których iloczyn jest największy.
- 14.71. Podaj wymiary prostokąta o obwodzie 24 cm, którego kwadrat długości przekątnej jest najmniejszy.
- 14.72. Na ogrodzenie parkingu w kształcie prostokąta przeznaczono 300 metrów bieżących siatki. Ozdobna metalowa brama wjazdowa ma mieć szerokość 12 m. Jakie wymiary powinien mieć ten parking, aby jego pole powierzchni było największe? Oblicz to pole.
- 14.73. Dla jakich wartości x pole zacieniowanej figury przedstawionej na rysunku jest największe? Oblicz to pole.



- 14.74. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 45° , a suma długości wysokości i dłuższej podstawy jest równa 12.
- Wyraż pole P trapezu jako funkcję zmiennej h i podaj jej dziedzinę.
 - Oblicz wymiary tego trapezu, którego pole jest największe.

14.75. Narysuj wykres funkcji f , gdy:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{gdy } x < 2 \\ \frac{1}{2}x + 2, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{gdy } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

14.76. Narysuj wykres funkcji f , gdy:

$$\text{a) } f(x) = (x+1) \cdot |x-2|$$

$$\text{b) } f(x) = (1-x) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

$$\text{c) } f(x) = x \cdot |x+1| - x$$

$$\text{d) } f(x) = x^2 + 4|1-x|$$

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Postacią kanoniczną funkcji f określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$ jest wzór:

$$\text{A. } f(x) = -2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$$

$$\text{B. } f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$$

$$\text{C. } f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

$$\text{D. } f(x) = -2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

2. Funkcja f określona wzorem $f(x) = -x^2 + bx + c$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$ i malejąca w przedziale $(2; +\infty)$, a jednym z jej miejsc zerowych jest liczba 1.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika z tego, że:

A. $b = 4$ i $c = -3$, B. $b = 2$ i $c = -1$, C. $b = 4$ i $c = 3$, D. $b = 2$ i $c = 1$

3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

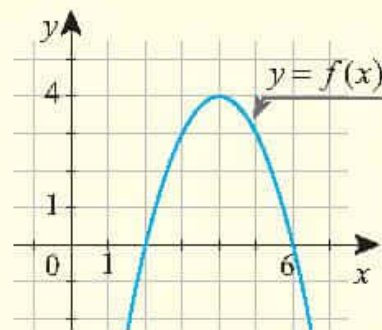
Funkcja f nie jest określona wzorem:

$$\text{A. } f(x) = -x^2 + 8x - 12$$

$$\text{B. } f(x) = -(x-4)^2 + 4$$

$$\text{C. } f(x) = (2-x)(x-6)$$

$$\text{D. } f(x) = -(2-x)(x-6)$$



4. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wyznacz wszystkie wartości współczynników a , b , c , wiedząc, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i rosnąca w przedziale $(1; +\infty)$. Jednym z jej miejsc zerowych jest liczba -1 , a w przedziale $(-3; 0)$ najmniejszą wartością tej funkcji jest liczba -6 .

5. Funkcja kwadratowa f ma najmniejszą wartość równą -3 dla argumentu 1 . Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 4 .

Czy funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2 - 3$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród oznaczonych literami A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$f(-3) = 1$ i $f(4) = 0$.
N	Nie,		B.	$f(1) = -3$ i $f(4) = 0$.

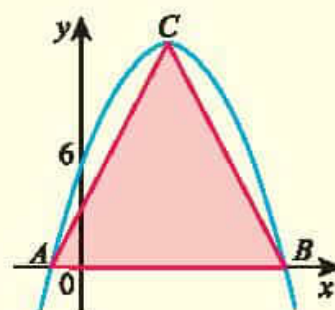
6. Czy wzór funkcji f , gdy $f(x) = -x^2 + 9$, można zapisać w postaci iloczynowej $f(x) = -(x-3)(x+3)$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród oznaczonych literami A i B.

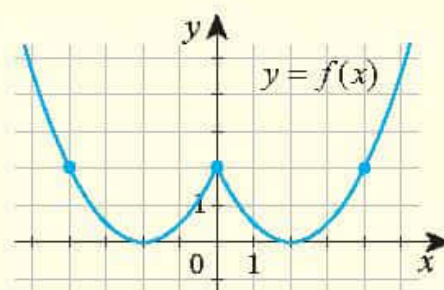
T	Tak,	ponieważ	A.	$-x^2 + 9 = -(x^2 + 9) = -(x+3)^2$.
N	Nie,		B.	$-x^2 + 9 = -(x^2 - 9) = (3-x)(3+x)$.

7. W parabolę o równaniu $y = a(x+2)(x-8)$ wpisano trójkąt równoramienny ABC w sposób przedstawiony na rysunku. Oblicz:

- współczynnik a równania paraboli,
- współrzędne wierzchołka C trójkąta ABC ,
- pole trójkąta ABC .



8. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f , który zbudowany jest z fragmentów dwóch parabol. Napisz wzór funkcji f .



9. Oblicz współczynniki a , b , c funkcji kwadratowej f określonej wzorem

$f(x) = ax^2 + bx + c$, wiedząc, że:

- wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(2, 1)$, a liczba 3 jest miejscem zerowym tej funkcji,
- funkcja ma dwa miejsca zerowe -2 i 4 oraz $f(0) = 16$,
- miejscami zerowymi są liczby 1 i -3 , a jej wykresem jest parabola, do której jest styczna prosta o równaniu $y = -4$.

Wskazówki i odpowiedzi

1. Język i symbole logiki matematycznej

1.1. a) Nie, b) tak, c) tak, d) tak, e) tak, f) tak, g) nie, h) nie.

1.2. Wartość logiczna zdania: a) 0, b) 1, c) 1, d) 0, e) 1, f) 1, g) 1, h) 0, i) 1.

1.3. a) $\exists_x x^3 = 27$, b) $\forall_x x^2 + 1 > 0$, c) $\exists_x x > 9^{20}$, d) $\forall_x x^2 \geq 0$.

1.5. 8. *Wskazówka.* $4 \cdot 2 = 8$, $7 + 2 = 9$.

	7	
4	2	8
	9	

2. Zbiory i działania na nich

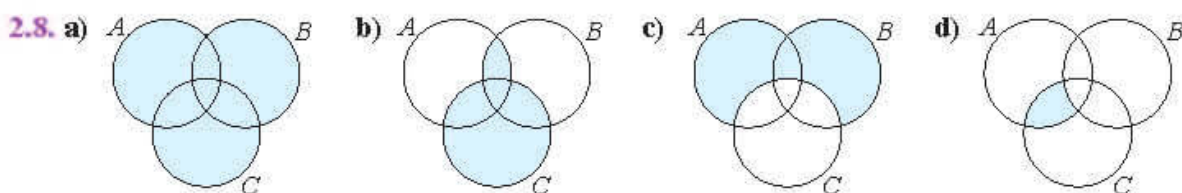
2.1. a) Zbiór nieskończony, b) zbiór skończony, c) zbiór nieskończony, d) zbiór nieskończony.

2.2. $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$, 7 podzbiorów. 2.3. Tak, 20. 2.4. 10.

2.5. a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, c) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

d) $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, e) $A \setminus B = \{-2, -1\}$, f) $B \setminus A = \{5, 6, 7\}$. 2.6. A i D.

2.7. a) Zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 2 lub przez 3, b) zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6, bo $B \cap C = C$, c) zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6, bo $X \cap C = C$, d) zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych nieparzystych, e) zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych, bo $X \cup C = X$.



2.9. a) $A \cap B \cap C$, b) $(B \cap C) \setminus A$, c) $(A \cup B) \setminus C$.

3. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

3.1. $108 = 2^2 \cdot 3^3$, $1944 = 2^3 \cdot 3^5$.

3.2. Np.: $18 = 3 + 4 + 5 + 6$, $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ lub $21 = 10 + 11$.

3.3. a) $2^3 \cdot 5^3 \cdot 3^2$ i $2^5 \cdot 5^4 \cdot 3^4$, b) 3 i 2400, c) 10^6 i 10^{12} .

3.4. P, P. 3.5. a) 12 cm, b) 20 kwadratów. *Wskazówka.* a) $\text{NWD}(48, 60)$.

3.6. 2 minuty. *Wskazówka.* $\text{NWW}(40, 60) = \frac{40 \cdot 60}{20}$.

3.7. Wskazówka. Zauważ, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $p+1$ jest sumą jej dzielników.

3.8. Wskazówka. Zauważ, że klasa liczy 23 uczniów, bo $\text{NWD}(69, 92) = 23$.

3.9. a) Tak, **b)** 4576, 7689, 1397, 6897. **Wskazówka.** Czterocyfrowa liczba naturalna k ma postać $1000a + 100b + 10c + d$, gdzie liczby a, b, c i d są liczbami naturalnymi i $a \neq 0$. Z założenia $a + c = b + d$, skąd $d = a + c - b$, więc $k = 1001a + 99b + 11c = 11(91a + 9b + c)$.

3.10. a) -8, **b)** -14, **c)** -59. **3.11. a)** 1, **b)** 1, **c)** -1, **d)** -1, **e)** 0, **f)** 0, **g)** 0, **h)** 32.

3.12. Wskazówka. **a)** $3n - 4 = 3n - 6 + 2 = 3(n - 2) + 2$. **3.13.** D.

3.14. Kolejno: **a)** 0, 3, 4, 8, **b)** 0, 4, 1, 10.

Wskazówka. **a)** $-12 = 3 \cdot (-4) + 2 = 5 \cdot (-3) + 3 = 8 \cdot (-2) + 4 = 10 \cdot (-2) + 8$.

3.15. Wskazówka. Wystarczy zauważyć, że: **a)** ostatnią cyfrą liczby $11^{10} - 1$ jest cyfra 0, **b)** suma cyfr

liczby $10^n + 2$ jest podzielna przez 3. **3.16. a)** $\frac{1}{9}, \frac{2}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{6}$, **b)** $\frac{1}{12}, \frac{2}{6}, \frac{3}{4}$.

3.17. a) $\frac{5}{18}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}$, **b)** $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{14}, \frac{3}{100}$, **c)** $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{7}{15}, -\frac{1}{15}$. **3.18.** Dwa punkty.

3.19. a) $\frac{13}{68}$, **b)** $\frac{80}{91}$, **c)** $\frac{505}{711}$. **Wskazówka.** **a)** $\frac{131313}{686868} = \frac{13 \cdot 10101}{68 \cdot 10101}$.

3.20. Wskazówka. Wykaż, że mianownik ułamka jest iloczynem tylko liczby 2 albo liczby 5 lub liczb 2 i 5.

3.21. Wskazówka. Wykaż, że w rozkładzie na czynniki pierwsze mianownika ułamka występuje co najmniej jedna liczba różna od 2 i 5. **3.22. a)** 0,34, **b)** 0,23, **c)** 0,12, **d)** 0,56.

3.23. a) $1\frac{5}{9}$, **b)** $\frac{5}{11}$, **c)** $\frac{27}{37}$, **d)** $\frac{3}{110}$. **Wskazówka.** **c)** Równanie $0,729729... = x$ pomnóż przez 1000,

d) równanie $x = 0,02727... = 0,02727... \cdot 10$, a następnie równanie $10x = 0,2727... = 0,2727... \cdot 100$. Otrzymasz

wtedy $1000x = 27 + 10x$. **3.25. a)** 2, **b)** 7, **c)** 3. **Wskazówka.** Zauważ, że liczba 192 dzieli się przez 2 i 3.

3.26. a) $\frac{1}{7} = 0,(142857)$, $\frac{2}{7} = 0,(285714)$, $\frac{3}{7} = 0,(428571)$, $\frac{4}{7} = 0,(571428)$, $\frac{5}{7} = 0,(714285)$,

$\frac{6}{7} = 0,(857142)$. **3.27. a)** $15\frac{4}{9}$, **b)** $3\frac{19}{24}$, **c)** $1\frac{2}{3}$. **3.28. a)** $\sqrt[3]{2,7}$, **b)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}$, **c)** $\frac{\sqrt[3]{0,01}}{\sqrt[3]{100}}$, $\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{10}}$.

3.29. a) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5} + 1$, π , **b)** $\sqrt[3]{125}$, $-\sqrt{0,04}$, $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{1} + \sqrt{9}$, **c)** $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{1} + \sqrt{9}$, **d)** $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{1} + \sqrt{9}$.

3.30. F, P. **3.32.** $-6\frac{1}{3}$, -2π , $-3,2$, $\sqrt{2}$, $2,8$, 4 . **3.33.** D. **3.34.** Przeprowadź dowód nie

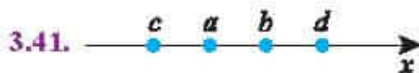
wprost analogicznie do przykładu 15. **3.35.** Np.: **a)** $\sqrt{10,5}$, **b)** $\sqrt[3]{-4,5}$, **c)** $\sqrt{1000,1}$, **d)** $\sqrt{2,5}$,

e) $\sqrt[3]{3,2}$, **f)** $\sqrt[3]{29}$. **3.36.** Np. $-\sqrt{9900}$. **3.37. a)** $\notin$, **b)** $\in$, **c)** $\in$, **d)** $\notin$, **e)** $\in$, **f)** $\in$.

3.38. a) $\cap$, b) $\cup$, c) $\cap$, d) $\cap$, e) $\cup$, f) $\cup$.

3.39. $A = \left(\frac{1}{3}\right)$, $B = \left(-3\frac{1}{4}\right)$, $C = (-1)$, $D = (4, (3))$, $E = (2, 8)$.

3.40. Np.: $m=1$ i $k=2$ lub $m=13$ i $k=27$.



3.42. a) $\sqrt{54}$, b) $-\sqrt{12}$, c) $\sqrt[3]{162}$, d) $\sqrt[3]{-24}$.

3.43. B i D.

3.44. Kolejno: P, P, F, P.

3.45. Suma liczb jest większa o $1\frac{13}{30}$.

3.46. Np. a) $-8,2+1$, b) $(-2)-5,2$.

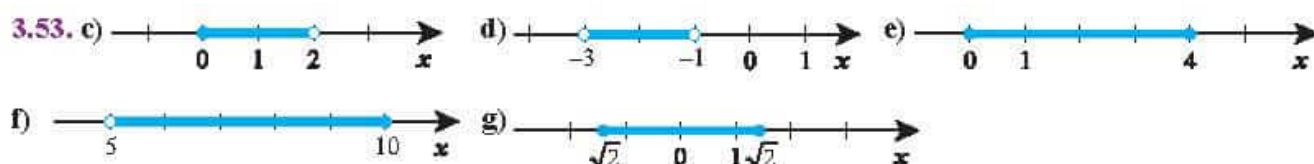
3.47. a) $-1\frac{1}{5}$ i $-2,5$; $1,25$ i $2\frac{2}{5}$; $2\frac{2}{5}$ i $-2,5$, b) $2\frac{2}{5}$ i $-1\frac{1}{5}$; $-2,5$ i $1,25$.

3.48. a) 2^{20} , b) 2^{16} , c) 4^{-5} , d) 2^{28} , e) 3^{36} .

3.49. C.

3.50. a) $m > -3,3$, b) $n \leq 0$, c) $k < 0$,

d) $s > 0$, e) $x \leq 0$, f) $y < 14$, g) $z \geq -5$, h) $t \geq 0$. 3.51. a) $x \geq -\frac{1}{2}$, b) $y \leq \frac{1}{4}$, c) $c \geq -2,5$, d) $z < 1\frac{1}{4}$.

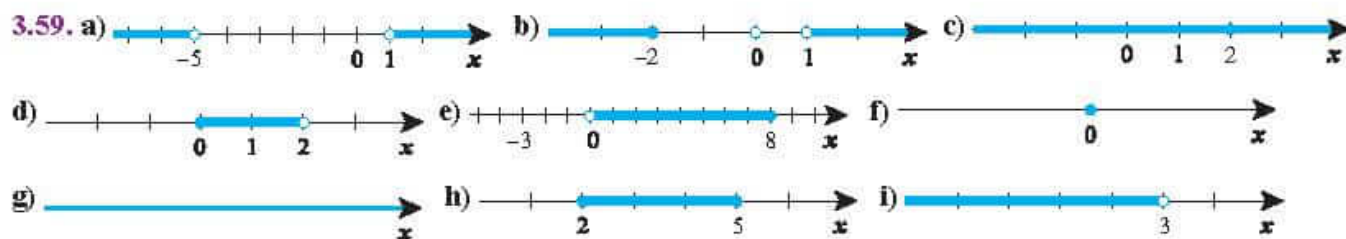
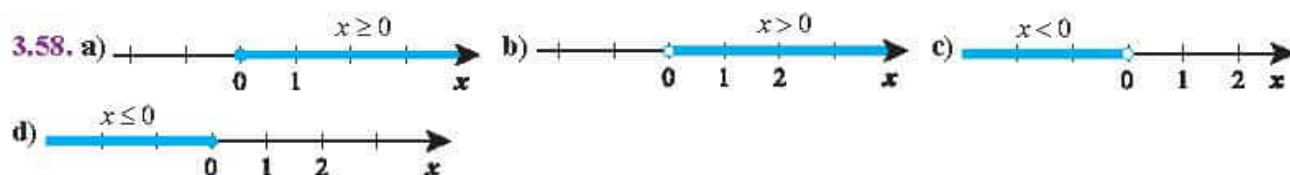


3.54. a) $x \leq 0$, b) $x \geq 4$, c) $x \geq -5$, d) $-2 < x < 0$, e) $1 \leq x \leq 3$, f) $-2 \leq x < 4$, g) $-3 < x \leq 5$,

h) $0 \leq x < 4$, i) $-2 \leq x \leq 2$, j) $-100 \leq x \leq 1$. 3.55. a) 0, b) $-1, 0, 1$, c) $1, 2$, d) $0, 1, 2$, e) $1, 2, 3$.

3.56. a) $0, 1, 2, 3, 4$, b) $0, 1$, c) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, d) $-2, -1, 0, 1, 2$.

3.57. a) $0, 1, 2, 3$, b) np.: $-2\sqrt{2}, -2\pi, \sqrt{2}$, c) np. $-9, 4, 100$, d) -8 , e) 3 , f) $0, 1, 2, 3$, g) $1, 2, 3$.



3.60. a) $A \cup B = (-3; 7)$, $A \cap B = \langle 1; 4 \rangle$, $A \setminus B = (-3; 1)$, $B \setminus A = \langle 4; 7 \rangle$,

b) $A \cup B = \mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$, $A \cap B = \langle -5; 1 \rangle$, $A \setminus B = (-\infty; -5)$, $B \setminus A = (1; +\infty)$,

c) $A \cup B = (-1; 0) \cup \langle 1; 5 \rangle$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

3.61. a) $(-\infty; -3)$, b) $\emptyset$, c) $\langle -4; 6 \rangle$, d) $(-\infty; 1)$, e) $(-3; -2)$, f) $(-4; 7) \setminus \langle 2; 3 \rangle$, g) $(-\infty; +\infty) = \mathbf{R}$,

h) $(-\infty; 8)$, i) $(-4; 11)$, j) $\mathbf{R} \setminus \langle 1; 5 \rangle$, k) $(-7; 4)$, l) $(-5; 1)$.

3.62. a) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, b) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$,

c) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. **3.63.** a) Nie, b) nie, c) tak, d) nie, e) tak, f) nie,

g) tak, h) tak. **3.64.** A i D. **3.65.** a) $\{-2, -1, 0, 1\}$, b) $\{6, 7, 8, 9\}$, c) $\emptyset$, d) $\langle -4; 0 \rangle$, e) $(-5; 5)$, f) $\emptyset$.

3.66. Wskazówka. Zaznacz na osi liczbowej liczby a i b , gdzie $a < b$.

Zestaw powtórkowy

1. B. 2. A. 3. D. 4. T – C. 5. Kolejno: P, F, P. 6. C. 7. A – 6, B – 3, C – 5, D – 1, E – 2, F – 4.

8. Kolejno: F, P. 9. a) $A = \langle -3; 4 \rangle$, $B = \langle 0; +\infty \rangle$, b) $A = \langle -2; 5 \rangle$, $B = \langle -\infty; -2 \rangle$.

4. Potęgowanie, pierwiastkowanie i logarytmowanie

4.1. a) -4 , b) -27 , c) $\frac{4}{25}$, d) 1 , e) $\frac{4}{5}$, f) $\frac{9}{4}$, g) $\frac{9}{25}$, h) $\frac{7}{8}$, i) 2 .

4.2. a) $6644, (4)$, b) $\frac{64}{343}$, c) $\frac{8}{343}$, d) około $10,41$. **4.3.** Kolejno: a) $2^6, 2^7, 2^8, 2^9$,

b) $5^{-1}, 5^{-3}, 5^0, 5^4$, c) $3^{-2}, 3^{-5}, 3^3, 3^6$, d) $(0,1)^2, (0,1)^3, (0,1)^{-1}, (0,1)^{-2}, (0,1)^{-8}$.

4.4. a) $\frac{5}{32}$, b) $12\frac{1}{16}$, c) 61 , d) $\frac{17}{8}$, e) 27 , f) 1 , g) $\frac{1}{64}$, h) $\frac{1}{64}$, i) -64 , j) $\frac{1}{3}$.

4.5. a) $\frac{9}{49}$, b) $\frac{9}{8}$, c) 3 , d) $3,5$, e) $\frac{7}{18}$, f) 1 . **4.6.** a) 150 , b) 336 , c) 243 , d) $\frac{4}{9}$, e) 2 .

4.7. a) 10^{-2} , b) $1,2 \cdot 10^{-2}$, c) $7,8 \cdot 10^{-4}$, d) $1,68 \cdot 10^3$, e) $2,31 \cdot 10^8$.

4.8. a) $n = -5$, b) $n = -15$. **4.9.** $3,15576 \cdot 10^7$ s.

4.10. Wskazówka. $2 \cdot 9^{100} - 9^{99} - 9^{98} = 9^{98} \cdot (2 \cdot 9^2 - 9 - 1) = 9^{98} \cdot 152 = 9^{98} \cdot 8 \cdot 19$.

4.11. a) $0,06, \frac{4}{9}, \frac{12}{13}, \frac{2}{3}, \frac{16}{17}, \frac{9}{7}, \frac{19}{20}, \frac{11}{21}$, b) $\frac{1}{2}, 0,2, 4, \frac{7}{5}, 0,9, 11, \frac{4}{3}$.

4.12. a) 52 , b) 20 , c) 8 , d) 50 , e) 4 , f) 3 , g) 3 , h) $0,3$. **4.13.** a) $5\sqrt{3}$, b) $5\sqrt{5}$, c) $2\sqrt[3]{2}$,

d) $3\sqrt[3]{3}$, e) $9\sqrt{2}$, f) $8\sqrt{2}$, g) $5\sqrt[3]{3}$, h) $3\sqrt[3]{5}$. **4.14.** a) $\sqrt{12}$, b) $\sqrt{18}$, c) $\sqrt{80}$, d) $\sqrt{150}$, e) $\sqrt{72}$.

4.15. a) $\sqrt[3]{-16}$, b) $\sqrt[3]{54}$, c) $\sqrt[3]{24}$, d) $\sqrt[3]{-192}$, e) $\sqrt[3]{135}$.

4.16. Wskazówka. b) Zastosuj wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. c) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{125 \cdot 2} - \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$.

4.17. T – A. **4.18.** a) 20 , b) $0,2$, c) -4 , d) 3 , e) 2 , f) 2 , g) -11 , h) 7 .

4.19. a) $6 = \sqrt[3]{216}$, b) $-2 = \sqrt[3]{-512}$, c) $4 = \sqrt[4]{4096}$, d) $7 = \sqrt[3]{343}$, e) $6 = \sqrt[4]{1296}$, f) $-5 = \sqrt[3]{-3125}$.

4.20. a) 2 , b) $\frac{1}{3}$, c) 2 , d) 2 .

4.21. a) $3\sqrt[4]{2}$, b) $2\sqrt[4]{7}$, c) $2\sqrt[5]{2}$, d) $3\sqrt[5]{2}$, e) $5\sqrt[5]{2}$, f) $-2\sqrt[7]{3}$, g) $4\sqrt[4]{5}$, h) $3\sqrt[6]{2}$, i) $-5\sqrt[5]{3}$, j) $-6\sqrt[3]{7}$.

4.22. a) $\sqrt[3]{486}$, b) $\sqrt[3]{250}$, c) $\sqrt[3]{4802}$, d) $\sqrt[3]{96}$, e) $\sqrt[3]{192}$, f) $\sqrt[3]{1458}$, g) $\sqrt[3]{1250}$, h) $\sqrt[3]{1080}$, i) $\sqrt[3]{-384}$, j) $\sqrt[3]{161\,051}$. 4.23. a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, c) $\frac{4\sqrt{5}}{15}$, d) $\frac{\sqrt{6}-2}{10}$, e) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$, f) $\frac{-2\sqrt[4]{125}}{5}$, g) $\frac{\sqrt[3]{16}}{2}$, h) $\frac{5\sqrt[4]{64}}{2}$.

4.24. a) $8\sqrt{2}$, b) $12\sqrt{5}$, c) $12\sqrt[3]{3}$, d) $-\sqrt[3]{2}$, e) $2\sqrt[4]{2}$, f) 0, g) 1, h) $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, i) -1, j) -2.

4.26. a) 15, b) 17, c) 81, d) 0, e) -4, f) 6, g) $23\sqrt[3]{2}$, h) -24, i) $6\sqrt[3]{3}$.

4.27. a) $m = -\frac{2}{3}$, b) $m = \frac{16}{9}$. 4.28. D. 4.29. a) 4, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{3}{2}$, d) $\frac{2}{5}$, e) 2, f) 125, g) 0,09,

h) 0,01, i) 18, j) $\frac{5}{2}$, k) $63\frac{2}{3}$. 4.30. a) $\frac{7}{4}$, b) 9, c) 4, d) 5, e) 13.

4.31. a) 8^2 , b) 8^0 , c) $8^{\frac{1}{3}}$, d) $8^{\frac{2}{3}}$, e) $8^{-\frac{5}{3}}$, f) $8^{\frac{5}{3}}$, g) $8^{-\frac{1}{3}}$, h) $8^{-\frac{8}{3}}$.

4.32. a) $3^{1,5}$, b) 3^3 , c) $3^{\frac{3}{4}}$, d) $3^{-\frac{13}{20}}$, e) $3^{\frac{9}{32}}$, f) $2^{-\frac{10}{3}}$, g) $5^{\frac{11}{2}}$, h) $5^{\frac{4}{9}}$.

4.33. a) $\sqrt[4]{8}$, b) $\sqrt{2}$, c) $\sqrt[5]{81}$, d) $\sqrt[5]{9}$, e) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$, f) $\frac{1}{\sqrt[5]{512}}$, g) $\sqrt[3]{128}$. 4.35. a) $-\frac{5}{2}$, b) -4, c) 2.

4.36. a) $\sqrt{2^{80}} = \sqrt[3]{4^{60}}$, b) $\sqrt[5]{25^{75}} = \sqrt[10]{125^{100}}$, c) $\sqrt[10]{11} > \sqrt[11]{10}$, d) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$.

4.37. Wskazówka. a) Nierówność $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$ zastąp nierównością $\frac{3^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{2}{6}}} > 1$ i ją uzasadnij, b) $3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^3$,

d) $a = 2^{45} = (2^9)^5 = 512^5$, $b = 3^{30} = (3^6)^5 = 729^5$, $c = 5^{20} = (5^4)^5 = 625^5$.

4.38. a) 0, 2, $\frac{1}{2}$, -3, b) -1, -2, $-\frac{1}{2}$, -4, c) 2, $\frac{1}{2}$, -2, $\frac{1}{3}$, d) 0, -1, $\frac{1}{2}$, 4.

4.39. a) 3, 2, 4, 1, 3, b) -3, -3, -3, -3, -3, c) $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, d) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, 5, $-\frac{3}{2}$, -2.

4.40. a) 8, 5, 3, 12, b) 49, 125, 100, 25, c) 4, d) 125, e) 63, f) $\frac{625}{27}$, g) $\frac{64}{27}$.

4.41. a) 49, 216, $\frac{1}{3}$, b) 3, 2, $\frac{1}{7}$. 4.42. a) $\log_6 216 = 3$, b) $\log_{11} 1331 = 3$, c) $\log 0,01 = -2$,

d) $\log_4 2 = 0,5$, e) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$. 4.43. a) 1, b) -4, c) $\frac{2}{3}$, d) -1, e) 1.

4.44. a) $\log 0,0001$, $\log_6 \frac{1}{36}$, $\log_4 \frac{1}{4}$, $\log_9 \frac{1}{27}$, b) $\ln e$, $\log_8 8$, c) $\log_3 \sqrt{3}$.

4.45.

b	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\log_2 b$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

a) $\log_2 0,1 < -3$, b) $\log_2 0,8 < 0,5$, c) $\log_2 100 < 7$.

4.46. a) $2 = \log_2 4$, b) $2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$, c) $2 = \log_3 9$, d) $2 = \log_4 16$, e) $2 = \log_5 25$, f) $2 = \log_{10} 100$.

4.47. a) 2, b) 3, c) 2, d) 4, e) $\frac{3}{2}$, f) -1, g) 0, h) $\frac{5}{2}$. **4.48.** a) 2, b) 3, c) 1, d) -2, e) 2, f) -2, g) 3.

4.49. Wskazówka. Zauważ, że: a) $2 + \log_5 2 = \log_5 25 + \log_5 2$,

c) $\log_4 6 + \log_4 8 = \log_4 (6 \cdot 8) = \log_4 (4^2 \cdot 3) = \log_4 4^2 + \log_4 3$.

4.50. a) $\log_3 12$, b) $\log_2 2,5$, c) $\log_{\frac{1}{2}} 12$, d) $\log_4 \frac{8}{3}$.

4.51. a) 1, b) $\sqrt{5}$, c) 15, d) -1, e) 800, f) $\frac{4}{3}$, g) 1, h) 2, i) $3\frac{1}{3}$.

4.52. a) $\sqrt{8} > 2^{\log_2 \sqrt{7}}$, b) $\sqrt{5} < 9^{\log_3 \sqrt{2,5}}$, c) $0 > \frac{2}{\log_{\frac{1}{2}} 4}$, d) $\sqrt{26} > 4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{9}}$.

Wskazówka. d) $4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{9}} = 4^{\log_2 3} \cdot 4^{\log_4 \frac{5}{9}}$.

4.53. a) 1,4771, b) -0,4771, c) -0,9542, d) 1,4313. **4.54. Wskazówka.** a) $\log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5$,

b) $\log_2 2,5 = \log_2 5 - \log_2 2$, c) $\log_2 100 = \log_2 4 + \log_2 25$.

4.55. a) $x = 25$, b) $x = 8$, c) $x = 24$, d) $x = 36$, e) $x = \frac{125}{3}$, f) $x = 2$.

4.56. a) 33 cyfry, b) 18 cyfr, c) 65 cyfr, d) 107 cyfr. **Wskazówka.** a) $12^{30} = (2^2 \cdot 3)^{30}$,

b) $15^{15} = \left(3 \cdot \frac{10}{2}\right)^{15}$, c) $40^{40} = (2^2 \cdot 10)^{40}$, d) $60^{60} = (2 \cdot 3 \cdot 10)^{60}$.

4.57. a) $A = 10^{0,7}$ cm, $A \approx 5$ cm, b) $A = 10^{5,5}$ cm, $A \approx 316\,000$ cm, c) $A = 10^5$ cm.

4.58. a) $\text{pH} \approx 2,9$, b) $10^{-6,6}$. **Wskazówka.** b) $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$, więc $\log [\text{H}^+] = -6,6$, skąd $[\text{H}^+] = 10^{-6,6} \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$.

4.59. a) 90 dB, b) 10^{12} razy (bilion razy). **Wskazówka.** a) $L = 10 \cdot \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^9$,

b) $L = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$, skąd $\log I = \frac{L-120}{10}$. **4.60.** a) 10^3 razy (1000 razy), b) 10^6 razy (milion razy).

4.61. a) 100°C , b) $66\frac{2}{3}^\circ\text{C}$, c) tak, bo garnek z zupą osiągnie temperaturę około 30°C (dokładnie $\frac{800}{27}^\circ\text{C}$).

Wskazówka. Oblicz T , gdy: a) $t = 0$, b) $t = 10$, c) $t = 30$.

4.62. a) $\frac{1}{4} \log_3 2$, b) $-2 \log_3 5$, c) $-2 \log_3 5$, d) $\log_3 2$.

4.63. a) $\log_7 5$, b) $\log_5 4$, c) $\log_2 3$, d) $\log_4 5$. **4.64.** a) $\log_2 15$ lub $\log_4 225$, b) $\log_2 \frac{11}{7}$ lub

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{7}{11}$, c) 0. **4.65.** a) 0, b) 0. **4.67.** a) $\frac{4}{a}$, b) $\frac{2}{a}$, c) $-\frac{2}{a}$, d) $\frac{12}{5a}$.

4.68. a) $a+1$, b) $a-1$, c) $\frac{4a}{1+a}$, d) $\frac{1}{a-1}$. **4.69.** a) $\frac{a-b}{3}$, b) $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$.

4.70. Wskazówka. a) $\log \operatorname{tg} 40^\circ + \log \operatorname{tg} 50^\circ = \log (\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ) = \log (\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ) = \log 1$,

b) $100^{\log \sin 40^\circ} + 100^{\log \sin 50^\circ} = 10^{\log (\sin 40^\circ)^2} + 10^{\log (\sin 50^\circ)^2} = \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ$,

c) skorzystaj z wzoru na sumę logarytmów, a następnie zastosuj wzór $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$,

d) zapisz wszystkie logarytmy np. o podstawie 2.

Zestaw powtórkowy

1. D. 2. D. 3. D. 4. B. 5. C. 6. D. 7. Kolejno: F, F, P. 8. T-A.

9. *Wskazówka.* Zauważ, że: a) $\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{3} \log 16 + \frac{1}{6} \log 128 = \log 2^{\frac{1}{2}} + \log (2^4)^{\frac{1}{3}} + \log (2^7)^{\frac{1}{6}} = \log 2^{\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{7}{6}}$,

b) $\log 0,1 = -1$, c) zapisz $3 = 10^{\log 3}$ i $2 = 10^{\log 2}$.

5. Wyrażenia algebraiczne i wzory skróconego mnożenia

5.1. a) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$, b) $x^2 + 28x + 196$, c) $4y^2 + 24y + 36$, d) $9x^4 + 6x^2 + 1$, e) $64x^2 + 16xy^3 + y^6$,

f) $4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4$, g) $4a^2b^2 + 2ab + \frac{1}{4}$, h) $\frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y^2$.

5.2. a) $(x+4)^2$, b) $(2x+1)^2$, c) $(2x+3)^2$, d) $(3x+2)^2$, e) $(5x+4)^2$, f) $\left(8x + \frac{1}{2}\right)^2$.

5.3. a) x^2 , b) $60x$, c) 4.

5.4. a) $4 - 4x + x^2$, b) $3 - 2\sqrt{3}x + x^2$, c) $25z^2 - 10z + 1$, d) $1 - 2xy + x^2y^2$, e) $9x^2 - 12xy + 4y^2$,

f) $16x^2y^2 - 24xy + 9$, g) $\frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{2}xy + 9y^2$, h) $4 + 4x + x^2$.

5.5. Wskazówka. Przyjmij, że $2n-1$ i $2n+1$ są dwiema kolejnymi liczbami nieparzystymi, wtedy

$$(2n-1)^2 + (2n+1)^2 = 8n^2 + 2.$$

5.6. a) $(x-1)^2$, b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, c) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$, d) $(1,1x-1)^2$, e) $(3x-1)^2$, f) $(\sqrt{2}x-2)^2$.

5.7. a) $16x^2$, b) $6x$, c) 100. **5.8.** a) $11+6\sqrt{2}$, b) $4-2\sqrt{3}$, c) $7+2\sqrt{10}$, d) $46-6\sqrt{5}$, e) $12-2\sqrt{35}$.

5.9. a) 1521, b) 10 609, c) 40 804, d) 249 001.

5.10. Wskazówka. d) $(5\sqrt{3} - \sqrt{6})^2 - (\sqrt{10} - 3\sqrt{5})^2 = 75 - 10\sqrt{18} + 6 - 10 + 6\sqrt{50} - 45 =$
 $= 26 - 10 \cdot 3\sqrt{2} + 6 \cdot 5\sqrt{2}.$

5.11. Wskazówka. Zauważ, że liczba $10^n + 2$ jest podzielna przez 3 (bo suma cyfr tej liczby dzieli się przez 3), więc liczba $(10^n + 2)^2$ jest podzielna przez 3^2 .

5.12. a) $a^2 - \frac{1}{16}$, b) $x^2 - 4y^2$, c) $4a^2 - 25$, d) $36a^2 - 4b^2$, e) $16 - 9x^2$, f) $1 - x^4$, g) 4, h) $4x^4 - 9y^2$, i) $9x^6 - 16y^4$.

5.13. a) $(3a-10)(3a+10)$, b) $(12-y)(12+y)$, c) $(1-3x)(1+3x)$, d) $(7x-3y)(7x+3y)$, e) $(8x-5y)(8x+5y)$, f) $(13x-15)(13x+15)$, g) $(x^2-4)(x^2+4)$, h) $(x^2-y)(x^2+y)$, i) $(x^2-2y)(x^2+2y)$, j) $(x^2-y^2)(x^2+y^2)$.

5.14. a) -1 i $-1 \in Q$, b) 15 i $15 \in Q$, c) -30 i $-30 \in Q$.

5.15. a) $2x^2 + 6x$, b) $1 - 3x$, c) $50 - 10x$, d) $30x^2 - 24x + 5$, e) $x^2 - 7y^2 + 6xy$, f) $-8xy$.

5.16. a) $-2x^2 + 34x - 71$; $34\sqrt{2} - 75$, b) -3 ; niezależnie od wartości zmiennej x , c) $-4xy$; $\frac{2}{5}$, d) $9x^2 - 25y^2$; $-\frac{8}{9}$. **5.17.** a) 39 999, b) 63,99, c) 8,9996, d) $9,6 \cdot 10^{12}$.

5.18. Wskazówka. c) $\sqrt{4-\sqrt{8}} = \sqrt{2(2-\sqrt{2})}$, d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3 \cdot (2-\sqrt{3})}$.

5.19. a) $(x-6)(x+14)$, b) $(2x+4)(2x-2)$, c) $(4x-1-\sqrt{2})(4x-1+\sqrt{2})$, d) $(3-x)(3x+1)$, e) $(x+1)(3x-1)$, f) $(5x-3)(3x+3)$. **5.20.** a) $(x-4)^2 - 16$, b) $(x+5)^2 - 25$, c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, d) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, e) $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$, f) $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$.

5.21. Wskazówka. a) $999^4 - 1 = (999^2)^2 - 1^2 = (999^2 - 1)(999^2 + 1) = (999 - 1)(999 + 1) \cdot (999^2 + 1)$, b) $5^{12} - 1 = (5^6)^2 - 1^2 = (5^6 - 1)(5^6 + 1) = (5^3 - 1)(5^3 + 1)(5^6 + 1) = 124 \cdot 126 \cdot (5^6 + 1) = 31 \cdot 4 \cdot 126 \cdot (5^6 + 1)$.

5.22. a) $(a+2b)^2$, b) $(3a-2y)^2$, c) $(3x-b)(3x+b)$, d) $(4b-3)(4b+3)$, e) $(2x-5)^2$, f) $(2n+3-2k)(2n+3+2k)$, g) $(5x-8)(5x+4)$, h) $24(3x-1)$, i) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$, j) $(1-x-y)(1+x+y)$, k) $(8z-a+b)(8z+a-b)$, l) $(\sqrt{3}x - \sqrt{2}y - 1)(\sqrt{3}x + \sqrt{2}y + 1)$.

Wskazówka. j) $1 - (x^2 + 2xy + y^2) = 1 - (x+y)^2$, k) $(8z)^2 - (a-b)^2$, l) $(\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{2}y + 1)^2$.

5.23. a) $-\sqrt{7} - \sqrt{5}$, b) $2 - \sqrt{3}$, c) $-4 - 3\sqrt{2}$, d) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 3\sqrt{3})$. **5.24.** B i C.

5.26. a) $14 + 6\sqrt{5}$, b) $14 - 6\sqrt{5}$, c) $12\sqrt{5}$, d) 20, e) 36. **5.27.** a) $(1 + \sqrt{6})^2$, b) $(\sqrt{3} - 1)^2$, c) $(4 - \sqrt{5})^2$, d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$. **5.28. Wskazówka.** a) $9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$, b) $8 + 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} + 1)^2$.

5.29. a) $a > b$, b) $a < b$, c) $a < b$, d) $a > b$. **5.30.** a) $10 + 6\sqrt{2}$, b) 100, c) 99.

5.31. Wskazówka. Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika i zauważ, że

$(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 = [(\sqrt{7} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})]^2$. **5.32. Wskazówka.** $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

5.33. Wskazówka. Każdą z nierówności przekształć do takiej postaci, by można było zastosować wzór skróconego mnożenia. **d)** $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$, więc $(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$.

5.34. Wskazówka. Podstaw w wyrażeniu $x = 2n + 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, bo $2n + 1$ jest ogólną postacią liczby naturalnej nieparzystej.

5.35. Wskazówka. Usuń niewymierność z mianownika. Pomnóż licznik i mianownik pierwszego ułamka przez $\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, a drugiego przez $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Zestaw powtórkowy

1. Kolejno: F, P. **3.** C.

5. Wskazówka. Zauważ, że $\sqrt{6 - \sqrt{11}} \cdot (6 + \sqrt{11}) \cdot (\sqrt{22} - \sqrt{2}) = \sqrt{6 - \sqrt{11}} \cdot \sqrt{(6 + \sqrt{11})^2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{11} - 1) =$
 $= \sqrt{(6 - \sqrt{11}) \cdot (6 + \sqrt{11}) \cdot (6 + \sqrt{11})} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{11} - 1) = \sqrt{(36 - 11)(6 + \sqrt{11})} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{11} - 1)^2} =$
 $= 5 \cdot \sqrt{6 + \sqrt{11}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{12 - 2\sqrt{11}}.$

6. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą

6.1. A i D. **6.2.** a) -1, b) 4, c) -1, d) -1, 0, 2, 4. **6.3.** F, P.

6.4. -4 i 0. **Wskazówka.** Sprawdź, czy pierwiastkami równania są liczby: -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0.

6.5. a) -5 i -3, b) -2, c) -4, -2, -1. **6.6.** a) 0, b) 0, c) 2, d) 2, e) 1, f) 4.

6.7. a) $x_0 = -\frac{4}{3}$, b) każda liczba rzeczywista (równanie tożsamościowe), c) $x_0 = 2$, d) $x_0 = 5$,

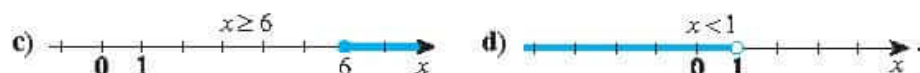
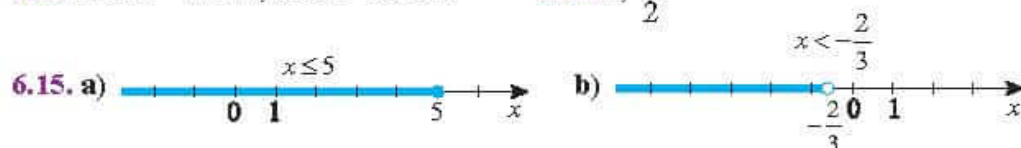
e) $x_0 = 102$, f) brak rozwiązania, równanie sprzeczne. **6.8.** a) Tak, b) nie.

6.9. a) $x - 5 = -7$, b) $2y + 16 = 14$, c) $3y + 21 = 9$, d) $4(a - 3) = 40$. **Wskazówka.** a) $x - 5 = \frac{-2 - 19}{3}$.

6.10. B. **6.11.** a) 3, 4, b) 2.

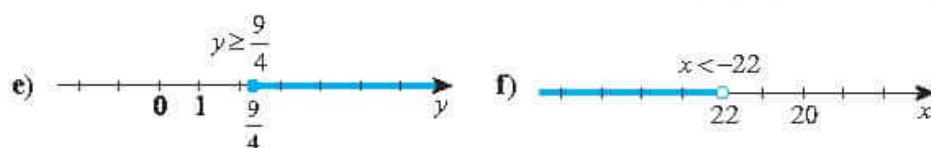
6.12. 264 km. **Wskazówka.** $660t = 360 \cdot \left(t + \frac{1}{3}\right)$, gdzie t to czas przelotu samolotu.

6.13. Kasia - 27 km, Jurek - 33 km. **6.14.** 1, $\frac{5}{2}$.



6.16. a) $x \geq -5$, b) $y > \frac{16}{3}$, c) $z < \frac{4}{3}$, d) $x < -\sqrt{2}$, e) $x > \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$, f) $x \geq -2\sqrt{5} - 4$.

6.17. Np.: $x-1 \leq \frac{2}{3}$. 6.18. $4\frac{1}{2}, -\sqrt{2}, \pi$. 6.19. D. 6.20. 2.



6.22. P, P. *Wskazówka.* a) $x > \frac{1}{\sqrt{5}-3}$, -1 to najmniejsza liczba całkowita spełniająca tę nierówność,

b) $x < \frac{3}{1-\sqrt{2}}$, -8 to największa liczba całkowita spełniająca tę nierówność.

6.23. *Wskazówka.* a) Zastąp nierówność podwójną układem nierówności $x^2 - 1 < (x+1)^2 + 2$

i $(x+1)^2 + 2 < (x+2)^2$. b) Daną nierówność zastąp nierównością $x(2\log 2 + 1 + 2\log 5) > 3$ i zastosuj prawa działań na logarytmach. 6.24. B i D. 6.25. a) $x \leq 0$, b) $x \in \mathbf{R}$, c) $x \geq 0$.

6.26. a) $x \neq -5$, b) $x \geq 2$, c) $x < 4$, d) $x > 1$.

6.27. $1, 1+x < 4, 3$, gdzie x oznacza wysokość nadwozia samochodu.

6.28. F, P. 6.29. Co najmniej 34 sztuki. 6.30. Po 3 dniach. 6.31. Poniżej 11,33 s.

6.32. 0 i 2, 2 i 4 oraz 4 i 6. *Wskazówka.* $(2n)^2 - (2n+2)^2 \geq -20$, skąd $2n \leq 4$.

6.33. Trójkąt, czworokąt, pięciokąt, sześciokąt, siedmiokąt, ośmiokąt, dziewięciokąt i dziesięciokąt.

6.34. Po godzinie 14:48. *Wskazówka.* W czasie t oba pojazdy przejadą $(12t+13t)$ km, czyli $(25 \cdot t)$ km. Odległość między nimi będzie równa $(100-25t)$ km. Zatem $100-25t < 30$, skąd $t > \frac{14}{5}$, $\frac{14}{5}$ h = 2 h 48 min.

6.36. a) 0, b) $15-\sqrt{5}-\sqrt{3}$, c) 0, d) -1, e) $\sqrt{5}$, f) $15-10\sqrt{3}$. 6.37. a) $5-\sqrt{7}$, b) $2\sqrt{6}-4$,

c) $2\pi-5$. 6.38. $\sqrt{13}-\sqrt{2}$. 6.39. a) Wymierną, b) wymierną, c) niewymierną.

6.40. a) $-4\sqrt{3}$, b) 18, c) 8, d) $2\sqrt{3}$. *Wskazówka.* c) $18-8\sqrt{2} = (4-\sqrt{2})^2$, d) $28-10\sqrt{3} = (5-\sqrt{3})^2$.

6.41. *Wskazówka.* a) $33-20\sqrt{2} = (5-2\sqrt{2})^2$, b) $34-24\sqrt{2} = (4-3\sqrt{2})^2$, c) $69-16\sqrt{5} = (8-\sqrt{5})^2$,

d) $36-16\sqrt{5} = (4-2\sqrt{5})^2$. 6.42. a) 4, b) $4-\frac{3}{2}x$, c) $4x$, d) $x+9$, e) $-9x-11$, f) $-x-5$.

6.43. a) $-3(x-3)$, b) $1-x$, c) 2, d) $2x-1$. 6.44. a) $x \in \mathbf{R}$, b) $x \in (-2; +\infty)$, c) $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$,

d) $x \in \mathbf{R}$. 6.45. A. 6.46. C.

6.47. a) $y_1 = -4$, $y_2 = 4$, b) brak rozwiązań, c) $x_0 = 0$, d) $x_1 = -20$, $x_2 = 20$.

6.48. a) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, b) brak rozwiązania, c) $x_0 = 0$, d) brak rozwiązania.

6.49. B i C. **6.50.** a) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, b) $x_1 = 3$, $x_2 = 7$, c) $x_1 = -8$, $x_2 = 2$, d) $x_1 = -2$, $x_2 = 6$.

6.51. a) 1, b) 1, c) 2, d) 0, e) 2, f) 2. *Wskazówka.* d) $2 - \sqrt{5} < 0$.

6.52. a) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, b) $x_0 = 3$, c) $x_1 = -1$, $x_2 = 7$, d) $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, e) $x_1 = -12$, $x_2 = -2$,

f) $x_0 = \sqrt{2}$. **6.53.** a) $|x-1| = 4$, b) $|x+3| = 3$.

6.54. *Wskazówka.* a) Zauważ, że liczby $(1-\sqrt{3})x$ i $(\sqrt{3}-1)x$ są przeciwne.

6.56. a) $x_1 = -9$, $x_2 = 3$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, c) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, d) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

e) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{2}{3}$, f) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

6.57. a) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, b) $x \in (0; +\infty)$, c) $x_0 = -2$, d) $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = 3$, e) $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 4$, f) $x_0 = 2$.

6.58. *Wskazówka.* $\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a} + \frac{\sqrt{a^2-4a+4}}{a-2} = \frac{|a-3|}{3-a} + \frac{|a-2|}{a-2}$. Jeśli $a \in (2; 3)$, to $|a-3| = 3-a$

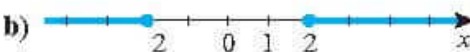
i $|a-2| = a-2$. **6.59.** Kolejno: F, P, P. **6.60.** C. **6.61.** A.

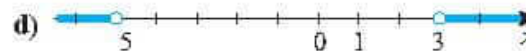
6.64. a) $x \neq 0$, b) $x \in \mathbb{R}$, c) brak rozwiązania, d) $x_0 = 0$, e) $x \in \mathbb{R}$, f) brak rozwiązania,

g) $x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$, h) $x \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

6.65. a) $x \in (-1; 7)$, b) $x \in (-4; 2)$, c) $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, d) $x \in (-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$,

e) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$, f) $x \in (-1-\sqrt{2}; \sqrt{2}-1)$.

6.66. a)  b) 

c)  d) 

e)  f) 

6.67. a) $|x| \leq 2$, b) $|x| < 3$, c) $|x| > 4$, d) $|x-2| < 2$, e) $|x+2| \leq 2$, f) $|x+1| > 2$.

6.68. Kolejno: F, F, P. **6.69.** C.

6.70. a) $x \in (-1; 5)$, b) $x \in (-\infty; -6) \cup (-2; 0) \cup (4; +\infty)$, c) $x \in \{-8; 0\}$, d) $x \in \mathbb{R}$, e) nierówność nie ma rozwiązania, f) $x \in (-\infty; -7) \cup (5; +\infty)$.

6.71. a) $x \in \left(-1; -\frac{1}{3}\right)$, b) $x \in (-1; 5)$, c) $x \in \{-5; 1\}$, d) $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$, e) nierówność nie ma rozwiązania, f) $x \in \mathbb{R}$.

6.72. Wskazówka. Rozwiązaniem nierówności $|x+2|+|x-3|\geq 9$ jest zbiór $x\in(-\infty;-4)\cup(5;+\infty)$.

Zestaw powtórkowy

1. C. 2. A. 3. C. 4. C. 5. F, F, P. 6. A i C. 7. Wskazówka. Wystarczy zauważyć, że $|x-5|\geq 0$ i $|x+6|\geq 0$ dla $x\in\mathbb{R}$, więc $|x-5|+|x+6|>0$. 8. Wskazówka. Rozwiąż równania: $5-2|x+3|=1$ lub $5-2|x+3|=-1$, skąd rozwiązaniem pierwszego z nich są liczby -5 i -1 , natomiast drugiego liczby -6 i 0 . 9. Wskazówka. Zauważ, że nierówność $|1-x|\leq 3$ jest równoważna nierówności $|x|\leq 4$.

7. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

7.1. Tylko para $(12, 2)$.

7.4. a) $\begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} x=0,5 \\ y=-2 \end{cases}$.

7.5. a) $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x=-5 \\ y=4 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.

7.6. a) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} x=-6 \\ y=0 \end{cases}$, **g)** $\begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$,

h) $\begin{cases} u=\frac{5}{2} \\ v=\frac{5}{2} \end{cases}$, **i)** $\begin{cases} r=4 \\ s=12 \end{cases}$, **j)** $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$, **k)** $\begin{cases} t=10 \\ z=2 \end{cases}$, **l)** $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$.

7.7. a) $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x=\frac{9}{11} \\ y=-\frac{12}{11} \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}-2}{3} \\ y=\frac{-\sqrt{2}-1}{3} \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=0 \end{cases}$, **e)** układ sprzeczny, **f)** $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=\frac{3}{2}x-15 \end{cases}$,

g) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$, **h)** $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=4 \end{cases}$, **i)** $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$.

7.8. N – A.

7.9. a) $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$.

7.10. a) $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x=\sqrt{2}-1 \\ y=\sqrt{2}+1 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$.

7.11. D.

7.12. a) Układ sprzeczny, nie ma rozwiązań, b) układ nieoznaczony, ma nieskończenie wiele rozwiązań

postaci $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$, c) układ sprzeczny, nie ma rozwiązań, d) układ nieoznaczony, ma nieskończeniewiele rozwiązań postaci $\begin{cases} x = 6 - 0,6y \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$, e) układ oznaczony, rozwiązaniem jest para liczb (1, 2),f) układ oznaczony, rozwiązaniem jest para liczb $\left(\frac{17}{4}, \frac{9}{2}\right)$. 7.13. a) 1 i 6, b) np. 1 i -2, c) np. 3 i 2.7.14. a) $\begin{cases} p = \frac{r}{2} + 3 \\ p + r = 18 \end{cases}$, $\begin{cases} p = 8 \\ r = 10 \end{cases}$, b) $\begin{cases} m = 0,3n \\ m + n = 65 \end{cases}$, $\begin{cases} m = 15 \\ n = 50 \end{cases}$. 7.15. A i C.7.16. Za wnioskiem głosowały 232 osoby, przeciw 128 osób. Wskazówka. $\begin{cases} x + y = 360 \\ x = y + 104 \end{cases}$, gdzie x – liczba osób głosujących za, y – liczba osób głosujących przeciw.7.17. Piekarz pracuje 20 lat. Wskazówka. $\begin{cases} x = 5y \\ x + 4 = 3 \cdot (y + 4) \end{cases}$, gdzie x – lata praktyki piekarza, y – latapraktyki ucznia. 7.18. Motorówka $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, nurt $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.7.19. Żył 33 lata, panował 12 lat. Wskazówka. $\begin{cases} \frac{1}{4}(x - 5) = y - 5 \\ \frac{1}{2}(x + 9) = y + 9 \end{cases}$, gdzie x to lata życia Aleksandra, a y to lata jego panowania. 7.20. 24 litry.7.21. Wskazówka. przyjmij oznaczenia: x – cena lizaka czerwonego, y – cena lizaka żółtego, z – cena lizaka zielonego. Zapisz układ równań $\begin{cases} 2x = y + z \\ 2y = x + 2z \end{cases}$ i uzależnij dwie niewiadome, np. y i z , od niewiadomej x .

$$\begin{cases} z = 2x - y \\ 2y = x + 2(2x - y) \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} z = 2x - y \\ y = \frac{5}{4}x \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} z = \frac{3}{4}x \\ y = \frac{5}{4}x \end{cases}.$$

Wniosek: lizak żółty jest najdroższy, bo $\frac{3}{4}x < x < \frac{5}{4}x$.

7.22. Krzesło kosztowało 450 zł, a stół 2100 zł.

7.23. a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$, lub $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$, lub $\begin{cases} x = 1 \\ y = -7 \end{cases}$.Wskazówka. a) $xy - 4x = 3$, więc $x(y - 4) = 3$, zatem $\begin{cases} x = 1 \\ y - 4 = 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y - 4 = 1 \end{cases}$.7.24. 305. Wskazówka. $\begin{cases} x = 17q + 16 \\ x = 18 \cdot 16 + q \end{cases}$, gdzie x to szukana liczba.

7.25. a) 1 $x = -\frac{m+1}{13}$, 2 $m = -13x-1$, b) 1 $x = \frac{17m-2}{6}$, 2 $m = \frac{6x+2}{17}$,

c) 1 $x = \frac{10}{3}m$, 2 $m = \frac{3}{10}x$, d) 1 $x \in \mathbb{R}$, 2 $m \in \mathbb{R}$.

7.26. a) $x = \frac{m+3}{2}$, gdy $m \in \mathbb{R}$, b) jedno rozwiązanie $x = \frac{m+3}{m-1}$, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; nie ma rozwiązania, gdy $m = 1$, c) jedno rozwiązanie $x = m+1$, gdy $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m = 1$.

7.27. a) $x = \frac{3}{6-m}$, gdy $m \neq 6$; nie ma rozwiązania, gdy $m = 6$, b) $x = 1$, gdy $a \neq -1$; $x \in \mathbb{R}$, gdy $a = -1$,

c) $x = 1$, gdy $a \neq 0$; $x \in \mathbb{R}$, gdy $a = 0$, d) $x = a+2$, gdy $a \neq 2$; $x \in \mathbb{R}$, gdy $a = 2$.

Wskazówka. d) $\frac{a^2-4}{a-2} = \frac{(a-2)(a+2)}{a-2} = a+2$.

7.28. a) $x = m+2$, gdy $m \neq -2$; $x \in \mathbb{R}$, gdy $m = -2$, b) $x = \frac{m^2+1}{m+1}$, gdy $m \neq -1$; nie ma rozwiązania, gdy $m = -1$, c) $x = \frac{m^2+1}{(m-1)^2}$, gdy $m \neq 1$; nie ma rozwiązania, gdy $m = 1$, d) $x = \frac{-m^2-4}{(m+2)^2}$, gdy $m \neq -2$; nie ma rozwiązania, gdy $m = -2$.

7.29. $m \in (-2; +\infty)$. 7.30. $m \in (-\infty; 2)$. 7.31. $m \in \{-3; 0\}$.

7.32. a) Nie ma rozwiązania, gdy $a = 0$; $x > 1$, gdy $a > 0$; $x < 1$, gdy $a < 0$,

b) nie ma rozwiązania, gdy $m = 0$; $x \leq \frac{m-3}{m}$, gdy $m > 0$; $x \geq \frac{m-3}{m}$, gdy $m < 0$, c) $x \geq \frac{m+5}{2}$, gdy $m \in \mathbb{R}$,

d) nie ma rozwiązania, gdy $a = 0$; $x < \frac{3a-3}{a}$, gdy $a > 0$; $x > \frac{3a-3}{a}$, gdy $a < 0$, e) $x \in \mathbb{R}$, gdy $m = 0$;

$x > \frac{-1}{2m}$, gdy $m > 0$; $x < \frac{-1}{2m}$, gdy $m < 0$, f) $x \in \mathbb{R}$, gdy $a = 0$; $x \leq 1$, gdy $a > 0$; $x \geq 1$, gdy $a < 0$.

7.33. a) $m = 0$, b) $m = -1$. Wskazówka. Gdy $m < 0$, to $x < \frac{m-1}{m}$, czyli $x \in \left(-\infty; \frac{m-1}{m}\right)$. Zatem $\frac{m-1}{m} = 2$.

7.34. a) $m \neq 4$, b) $m \in \mathbb{R}$, c) $m \neq \frac{2}{5}$.

7.35. a) $a = 6$, b) $a = \frac{4}{3}$, c) $a = 2$. 7.36. a) $t > 1$, b) $t < -1$, c) $t \in (-1; 1)$.

7.37. a) $p = 0$, b) $p \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Wskazówka. b) rozwiąż nierówność $|p-2| + |2p-1| \leq 1$.

7.38. $m \in (-1; 8)$.

Zestaw powtórkowy

1. B. 2. D. 3. A i D. 4. B i D. 5. B i D. 6. Wskazówka. $x = 1 - 4p$ i $x \leq 0$.

8. Funkcja i jej własności

8.1. a) Tak, b) nie, c) tak, d) nie, e) tak, f) nie.

8.2. B i D.

8.3. Tak: a), b), c), d).

8.4. $1 \rightarrow 3$ i $2 \rightarrow 0$.

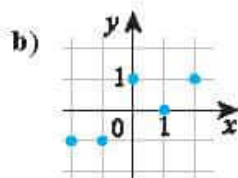
8.5. a) Tak, b) tak, c) nie.

8.6. $p(a)=b$, $p(b)=c$, $p(c)=d$, $p(d)=a$.

8.7. a) $B \rightarrow A$, b) $C \rightarrow D$, c) $F \rightarrow E$, d) $H \rightarrow G$.

8.8. a)

x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$	-1	-1	1	0	1



8.9. Z tabelki należy usunąć parę liczb $(-1, 4)$ albo $(-1, 2)$.

8.10.

x	-2	-1	1	2	4
$y=g(x)$	2	1	2	1	3

8.11. C.

8.12. a) $f(0)=5$, $f(1)=3$, $f(-1)=7$, b) $f(0)=2$, $f(1)=6$, $f(-1)=-2$,

c) $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(1)=\frac{1}{3}$, $f(-1)=1$, d) $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(-1)=1$.

8.13. a) 5, b) 4, 5, 10 i 11, c) -1, 0, $\frac{1}{2}$, 4.

8.14. D.

8.15. a) 2, b) 0, c) $1\frac{5}{7}$, d) 4, e) 16.

8.16. a) $f(x)=-x$, b) $f(x)=\frac{1}{x}$, c) $f(x)=|x|$.

8.17. a) $f(x)=x-3$

x	-8	-4	0	$\frac{1}{2}$	5
y	-11	-7	-3	$-2\frac{1}{2}$	2

8.18. Wskazówka. Sprawdź, czy $f(-1)=2$.

8.19. 1 $D_f=\{-2, -4, 0, 5\}$, $Y_f=\{0, 1, 3, 7\}$, 2 $D_f=\{a, b, c, d\}$, $Y_f=\{1, 2\}$,

3 $D_f=\left\{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2\right\}$, $Y_f=\left\{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2\right\}$, 4 $D_f=\{-1; 3\}$, $Y_f=\{-1; 3\}$.

8.20. a) $D_f=\{-3, -2, -1, 1, 3, 4\}$, $Y_f=\{-1, 0, 2, 3, 4\}$, b) $D_f=\{-1; 4\}$, $Y_f=\{-2; 1\}$, c) $D_f=\{-4; 4\}$,

$Y_f=\{-2; 3\}$. 8.21. $D_f=\{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$, $Y_f=\{-5, 3, 5\}$. 8.22. D. 8.23. A.

8.24. a) $P(r)=\pi(1-r^2)$, gdzie $r \in (0; 1)$, b) $V(a)=10a^2$, gdzie $a > 0$.

8.25. a) $x \in \mathbb{R}$, b) $x \neq \frac{3}{4}$, c) $x > -3$. 8.26. a) $Y_f=\{-1, 5, 8\}$, b) $Y_f=\left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}$.

8.27. a) $g(x)=-x^2$, b) $g(x)=x^2$, c) $g(x)=(x-3)^2$, d) $g(x)=x^2-3$, e) $g(x)=9x^2$, f) $g(x)=x^4$.

8.28. Wskazówka. $f(a)=4a$, $f(b)=4b$, $f(a+b)=4(a+b)$. 8.29. D.

8.30. a) Funkcja nie jest różnowartościowa, bo $f(-1)=f(-2)=1$, b) funkcja jest różnowartościowa, bo każda prosta równoległa do osi x ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f lub nie ma go wcale.

8.33. Wskazówka. Wystarczy wskazać dwa argumenty będące liczbami przeciwnymi, dla których wartość funkcji jest równa. 8.34. a) $x_1=-2$, $x_2=1$, b) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=4$.

8.35. a) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, b) $x_0 = 2$, c) brak miejsc zerowych. **8.36.** B.

8.37. a) $x \in \langle -5; 13 \rangle$, $y \in \langle -3; 3 \rangle$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 7$, $x_4 = 12$, c) $x \in (-1; 2)$ lub $x \in (7; 12)$.

8.38. a) $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, b) $f(x) > 0$, gdy $x \in (-4; -2)$ lub $x \in (2; 4)$,

c) $f(x) < 0$, gdy $x \in \langle -5; -4 \rangle$ lub $x \in (-2; 2)$.

8.39. Kolejno: P, F, F. **8.41.** W latach: a) 3 i 4, b) 1, 6 i 7.

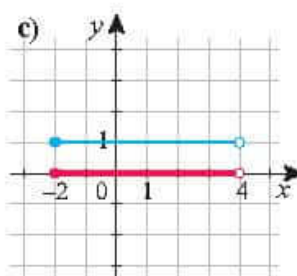
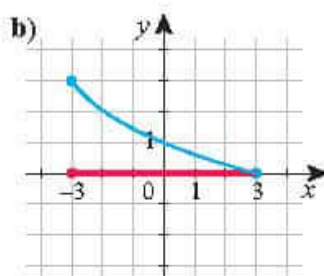
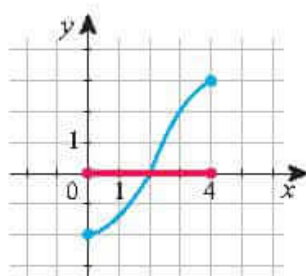
8.42. a) $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 7; 9 \rangle$, b) $\langle -3; -1 \rangle$, $\langle 0; 4 \rangle$, c) $\langle 4; 7 \rangle$.

8.43. a) $\langle 20^{00}; 6^{00} \rangle$, b) $\langle 8^{00}; 16^{00} \rangle$, $\langle 6^{00}; 8^{00} \rangle$, c) $\langle 16^{00}; 20^{00} \rangle$.

8.44. a) $\langle 2^{00}; 4^{00} \rangle$, $\langle 9^{00}; 12^{00} \rangle$, b) $\langle 1^{00}; 2^{00} \rangle$, $\langle 4^{00}; 9^{00} \rangle$.

8.45. Funkcja f jest: a) rosnąca, b) stała, c) rosnąca, d) malejąca.

8.46. Np.: a)



8.47. D.

8.49. Wskazówka. c) $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - 4 - (x_1^2 - 4) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2)$ i $x_2 - x_1 > 0$ oraz $x_1 + x_2 < 0$ (bo $x_1 < 0$ i $x_2 < 0$).

8.50. a) $y_{MIN} = f(-2) = -4$, $y_{MAX} = f(-7) = 3$,

b) $y_{MIN} = f(0) = -2$, $y_{MAX} = f(4) = 2$, c) $y_{MIN} = f(-2) = -4$, $y_{MAX} = f(4) = 2$.

8.51. a) Od 0°C do 4°C , b) od 4°C do 10°C , c) $T = 4^\circ\text{C}$.

8.52. a) W 13. dniu ferii temperatura była najniższa, a najwyższa w 5. dniu, b) 6 dni, c) 3 dni, d) 8°C .

8.53. B i C. **8.54.** a) 14^{00} , 2°C , b) 20^{00} , -5°C .

Zestaw powtórkowy

1. N – A. 2. F, P, F, P, P. 3. N – B. 4. a) 2,0%, b) od 4:00 do 16:00, c) o 4:00, d) 0,5% 5. T – B.

9. Figury podobne i twierdzenie Talesa

9.1. a) $x_0 = 2, 4$, b) $x_0 = 7$, c) $x_0 = \frac{1}{2}$, d) $x_0 = 6$. **9.2.** Opakowanie 3 kg.

9.3. 500 kalorii. **9.4.** a) 1,5 s, b) 576 m. **9.5.** 620 zł i 1085 zł.

9.6. 195 kg wieprzowiny, 75 kg wołowiny, 30 kg słoniny.

9.7. a) $x = a - by$, b) $x = \frac{by}{a}$, c) $x = \frac{a}{y-b}$, d) $x = \frac{a}{y+b}$, e) $x = \frac{y-ab}{b}$,

f) $x = \frac{y-b}{a}$. Wskazówka. c) $y = \frac{a}{x} + b$, skąd $y - b = \frac{a}{x}$, więc $\frac{y-b}{1} = \frac{a}{x}$. 9.17. 1, $\frac{5}{2}$.

9.8. Wskazówka. $\frac{9x-8y}{2} = \frac{7x-6y}{3}$ (korzystamy z własności proporcji)

$3 \cdot (9x-8y) = 2 \cdot (7x-6y)$ (grupujemy niewiadome x i y po różnych stronach znaku „=“)

$27x - 14x = 24y - 12y$

$13x = 12y \quad / : 13y$

$\frac{x}{y} = \frac{12}{13}$

9.9. a) $\frac{x}{y} = 5$, b) $\frac{x}{y} = 9$, c) $\frac{x}{y} = \frac{47}{2}$, d) $\frac{x}{y} = \frac{7}{11}$. Wskazówka. Patrz wskazówka do zadania 9.8.

9.10. $\frac{15}{35}$. Wskazówka. x – licznik szukanego ułamka, $x+20$ – mianownik szukanego ułamka,
 $\frac{x}{x+20}$ – szukany ułamek. Zatem $\frac{3}{7} = \frac{x}{x+20}$, czyli $3 \cdot (x+20) = 7x$, skąd $x = 15$, więc $x+20 = 35$.

9.11. a) Tak, b) nie, c) nie, d) tak. 9.12. 8 cm lub 50 cm. 9.13. 3 cm.

9.14. Na planie w skali 1 : 8 000. 9.15. 12,8 cm. 9.16. $\frac{4}{5}$ lub $\frac{5}{4}$.

9.17. $\frac{9}{25}$. 9.18. $P = 425 \text{ cm}^2$ lub $P = 0,68 \text{ cm}^2$. 9.19. a) 1:2500, b) $P = 5800 \text{ m}^2$.

9.20. 62 496 zł. 9.21. 560 km^2 . 9.22. 1:14.

9.23. a) FG , b) $\nexists FEG$, c) EF , d) $\nexists GFE$, e) EG .

9.24. Wskazówka. Zauważ, że $\triangle ABD = \triangle BAC$ i trójkąt ABE jest równoramienny.

9.26. a) $\alpha = 50^\circ$, b) $\alpha = 143^\circ$, $\beta = 37^\circ$, c) $\alpha = \beta = 60^\circ$. 9.27. a) Tak, b) nie, c) nie.

9.28. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 130^\circ$, b) $\alpha = \beta = 70^\circ$, $\gamma = 40^\circ$, c) $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 80^\circ$.

9.29. Tak. 9.30. a) Np. $\triangle ABC \sim \triangle B_1B_2A_2$, b) np. $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$, c) np. $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$,
d) np. $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2$.

9.31. a) 20 cm, 15 cm, b) $(40+20\sqrt{2})$ cm, $(30+15\sqrt{2})$ cm, c) 200 cm^2 , $112,5 \text{ cm}^2$.

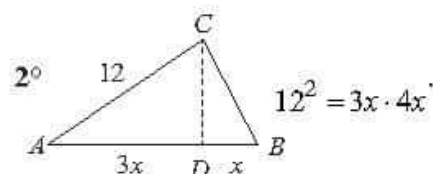
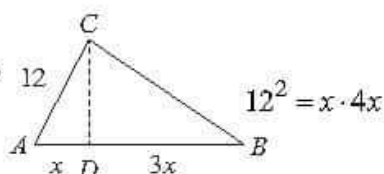
9.32. $|BE| = \frac{16}{3}$, $|BC| = 15$. 9.33. a) Tak, b) nie. 9.34. $L_{\triangle DEF} = 24$.

9.35. 28, 4, 24. 9.36. a) $x = 12$, b) $x = 4$, c) $x = 4,8$, d) $x = 6$.

9.38. 8 m.

9.39. $|AB| = 24$ lub $|AB| = 8\sqrt{3}$.

Wskazówka. Możliwe są 2 przypadki: 1°



9.40. a) $x = 5$, b) $x = 12$, c) $x = 2$.

9.41. $x = 12$, $y = 4$, $z = 8$.

9.42. Wskazówka. Podziel odcinek na 5 równych części.

9.43. Wskazówka. Podziel odcinek na 8 równych części.

9.44. 10 m.

9.45. Wskazówka. Poprowadź najpierw jedną przekątną czworokąta $ABCD$ i wyciągnij wnioski, a następnie drugą przekątną i wyciągnij wnioski.

9.46. A, B i C.

9.47. C.

9.48. B.

Zestaw powtórkowy

1. A. 2. B. 3. C. 4. B. 5. Kolejno: P, F, F, F. 6. T – A.

10. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

10.1. C. 10.2. a) $x = \sqrt{26}$, b) $x = 8\sqrt{3}$, c) $x = 5\sqrt{7}$, d) $x = 2\sqrt{15}$.

10.3. Kolejno: P, F.

10.4. Wskazówka. Trójkąt ABC jest prostokątny o kątach 90° , 30° , 60° i trójkąt ABD jest prostokątny o kątach 90° , 60° i 30° , więc $\triangle ABC \sim \triangle ABD$.

10.5. $a_1 = 27$, $c_1 = 9\sqrt{10}$.

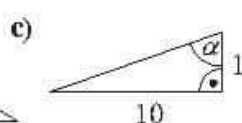
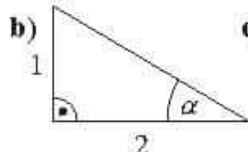
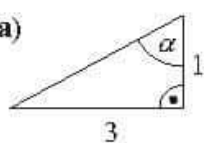
10.6. a) $\frac{5}{4}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{5}{8}$, d) $\frac{4}{3}$. 10.7. a) $\frac{12}{5}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, c) $\frac{3}{4}$. 10.8. D.

10.9. $|BC| = 6$, $|AB| = 3\sqrt{5}$. Wskazówka. $\frac{|BC|}{|AC|} = \tan \alpha$, skąd $\frac{|BC|}{3} = 2$ oraz $|AB| = \sqrt{|BC|^2 + |AC|^2}$.

10.10. a) $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$, b) $\tan \alpha = \frac{15}{8}$, $\tan \beta = \frac{8}{15}$, c) $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$.

10.11. C.

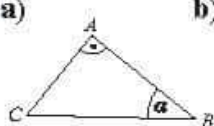
10.12. Np. a)



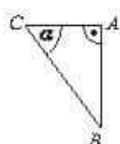
10.13. Wskazówka. Zauważ, że tangens kąta ostrego jest stosunkiem długości dwóch boków trójkąta.

10.14. a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, b) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, c) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

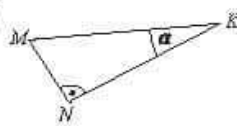
10.15. a)



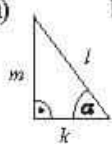
b)



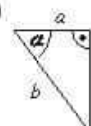
c)



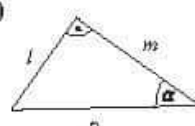
10.17. a)



b)



c)



10.18. B.

10.19. C.

10.20. Wskazówka. Zauważ, że cosinus kąta ostrego jest stosunkiem długości boków trójkąta i licznik jest mniejszy od mianownika.

10.21. Np.: a) 1 i 20, b) 1 i 10 000, c) 1 i $\sqrt{24}$, d) 8 i 15.

10.22.

a	b	c	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
6	8	10	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
4	$4\sqrt{3}$	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
4	6	$2\sqrt{13}$	$\frac{2\sqrt{13}}{13}$	$\frac{3\sqrt{13}}{13}$	$\frac{2}{3}$
3	4	5	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$

10.23. a) $|AC| = 2\sqrt{15}$, $|AB| = 8$, b) $|AB| = 12$,
 $|CB| = 8\sqrt{2}$, c) $|AC| = 4$, $|AB| = 5$.

10.24. a) 5,5, b) $\frac{5\sqrt{3}}{2} - 5$, c) 2, d) -4.

10.25. a) $12 + 4\sqrt{3}$, b) $10 + 5\sqrt{2}$, c) $12 + 6\sqrt{3}$.

Wskazówka. c) Poprowadź wysokość z wierzchołka C.

10.26. $(4\sqrt{3} - 4)$ km $\approx 2,9$ km. **10.27.** 1,5 km. **10.28.** $24\sqrt{2}$ cm ≈ 34 cm **10.29.** $\alpha = 45^\circ$.

10.30. $(8\sqrt{3} - 8)$ m $\approx 5,86$ m. **10.31.** a) 0,1392, b) 0,9903, c) 0,6249, d) 0,9563, e) 0,0698.

10.32. a) 18° , b) 66° , c) 72° , d) 30° , e) 44° , f) 58° . **10.33.** a) 80° , b) 78° , c) 39° .

10.34. Około 244 m.

10.35. a) $c \approx 29,2$ cm, $\alpha \approx 38^\circ$, $\beta \approx 52^\circ$, b) $b \approx 17,9$ cm, $\alpha \approx 32^\circ$, $\beta \approx 58^\circ$,

c) $a \approx 22,8$ cm, $b \approx 25,3$ cm, $\beta \approx 48^\circ$, d) $b \approx 5,8$ dm, $c \approx 7,3$ dm, $\alpha \approx 38^\circ$,

e) $b = 12$ cm, $c \approx 14,4$ cm, $\alpha \approx 34^\circ$, $\beta \approx 56^\circ$, f) $a = 7$ cm, $c \approx 17,5$ cm, $\alpha \approx 24^\circ$, $\beta \approx 66^\circ$,

g) $a = 0,6$ cm, $c \approx 3,06$ cm, $\alpha \approx 11^\circ$, $\beta \approx 79^\circ$, h) $b = 2\sqrt{7}$ cm, $c = 8$ cm, $\alpha \approx 49^\circ$, $\beta = 41^\circ$,

i) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c \approx 3,06$ cm, $\alpha \approx 37^\circ$, $\beta \approx 53^\circ$. *Wskazówka.* e) i f) Skorzystaj z wzoru $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab$.

10.36. $\alpha \approx 69^\circ$, $\beta \approx 69^\circ$, $|AB| \approx 7,17$, $|BC| = 10$, b) $\alpha \approx 55^\circ$, $\beta \approx 55^\circ$, $|AC| \approx 21,8$ i $|AC| = |BC|$,

c) $|BC| = 4$, $\alpha \approx 51^\circ$, $\beta \approx 51^\circ$, $\gamma \approx 78^\circ$.

10.37. a) $|AC| = 30\sqrt{3}$, $|AB| = 60$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$, b) $|BC| = 14$, $|AC| = 14\sqrt{3}$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$,

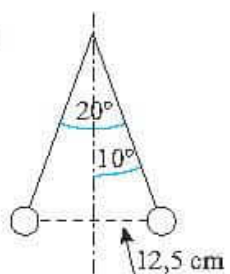
c) $|BC| = 0,24\sqrt{3}$, $|AB| = 0,48$, $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$, d) $|BC| = 1$, $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$.

10.38. Około 155 m.

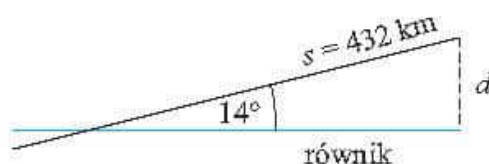
10.39. Około 1 cm.

10.40. Około 5,263 km.

10.41. 72 cm. *Wskazówka.*



10.42. Około 104,5 km. *Wskazówka.* $s = 9 \cdot 48 = 432$.



10.43. a) 2, b) 1, c) 2, d) 1, e) 0, f) 1.

10.44. a) 4, b) 3, c) 2, d) 1, e) $2\sqrt{3}$, f) $2\frac{3}{4}$. *Wskazówka.* d) $\operatorname{tg} 19^\circ \cdot \operatorname{tg} 71^\circ = 1$, e) Wyłącz $\sqrt{3}$ poza nawias, f) $\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ = 1$.

10.45. a) Tak, b) nie, c) tak, d) tak. 10.46. B. 10.47. C.

10.48. Wskazówka. Zauważ, że: a) $\sin 51^\circ = \cos 39^\circ$, b) $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$ i $\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 70^\circ}$.

10.49. a) $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$, b) $1 - \frac{\sqrt{2}}{12}$.

10.50. Wskazówka. Zauważ, że: a) $\operatorname{tg} 55^\circ = \operatorname{ctg} 35^\circ$ i $\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ = 1$.

10.51. Wskazówka. Zauważ, że: a) $2\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha = 2$, b) $(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha$,

c) $\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sin^2 \alpha$,

d) $\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + 1\right) \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$.

10.52. a) $\sin \alpha < \sin \beta$, b) $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$, c) $\cos \alpha > \cos \beta$.

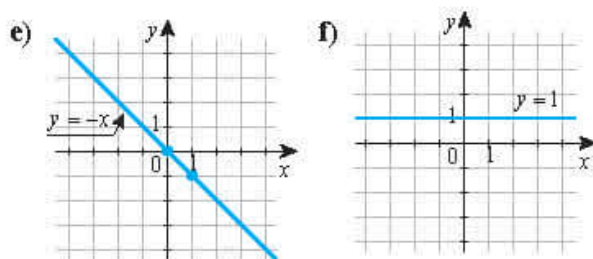
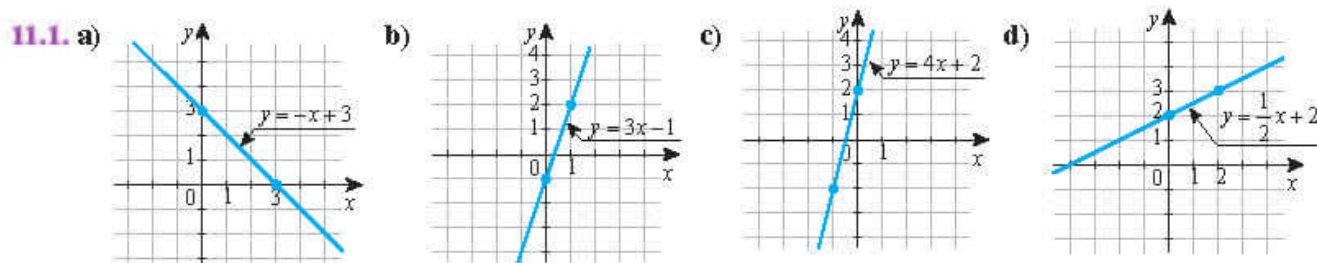
Zestaw powtórkowy

1. C. 2. D. 3. A. 4. A. 5. P, F. 6. N - C. 7. a) $x \approx 6,53$, $y \approx 4,20$, b) $x \approx 9,33$, $y \approx 14,30$,

c) $x \approx 6,97$, $y \approx 11,43$. 9. a) $\frac{2\sqrt{3}-9}{6}$, b) $\frac{4}{3} \cdot (2\sqrt{3}-3)$. Wskazówka. a) $\alpha = 30^\circ$, b) $\alpha = 30^\circ$.

10. a) $\frac{4}{3}$, b) $\frac{4}{3}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Funkcja liniowa i jej własności



11.2. A.

11.3. Do wykresu funkcji f należą punkty:

a) A, b) A i B, c) B. 11.4. C.

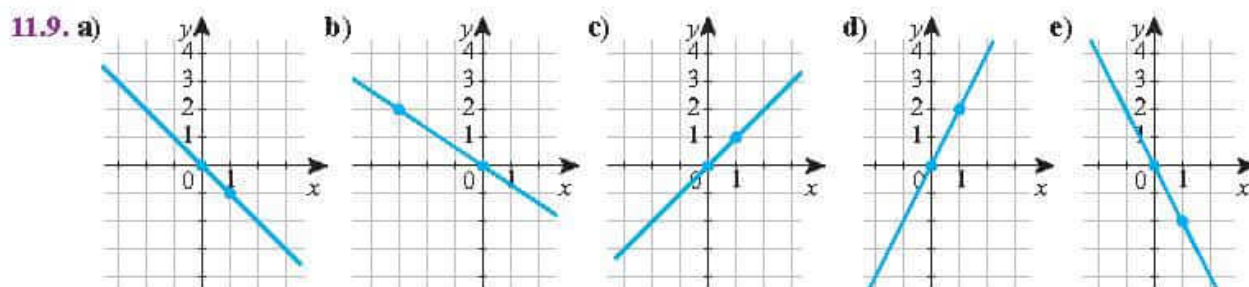
11.5. Wskazówka. Wystarczy obliczyć $f(m)$ i $f(2m)$.

11.6. Funkcja g określona jest wzorem: a) $g(x) = x - 4$, b) $g(x) = 4x$, c) $g(x) = 2$.

Wskazówka. a) $g(x) = f(x - 2)$, b) $g(x) = f(-2x)$, c) $g(x) = f(2)$.

11.7. Wskazówka. $f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2) \neq 0$, bo $a \neq 0$ i $x_1 - x_2 \neq 0$ z założenia.

11.8. a) $(2, -2)$ i $(4, 2)$, b) $(1, 3)$ i $(2, 4)$, c) $(0, 5)$ i $(2, 1)$.



Wskazówka. c) Jeśli $M = (k, k)$, to np. $M = (1, 1)$, d) jeśli $M = (m, 2m)$, to np. $M = (1, 2)$,

e) jeśli $M = (m, -2m)$, to np. $(1, -2)$.

11.10. Kolejno: F, P.

11.11. Wskazówka. Wykres funkcji przechodzi przez punkty: a) $(0, 6)$ i $(1, 3)$, b) $(0, -2)$ i $(1, -4)$,

c) $(0, -\sqrt{3})$ i $(1, 0)$, d) $(0, 1\frac{1}{2})$ i $(1, 2)$.

11.12. Funkcja f jest: a) rosnąca, b) malejąca, c) rosnąca, d) stała.

11.13. Np. $f(x) = -2$, $f(x) = -3x - 2$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

11.14. a) $f(x) = \frac{1}{2}x$, b) $f(x) = -2x - 3$, c) $f(x) = -2$.

11.15. Proste **1**, **3** i **4** przecinają się w punkcie $(0, 3)$; **2**, **5** przecinają się w punkcie $(0, -1)$.

11.16. Wskazówka. Założenie: $f(x) = ax + b$, teza: $f(x+1) = f(x) + a$.

Dowód: $f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b = (ax + b) + a = f(x) + a$ c.n.u.

11.17. B i D. **11.18. C. Wskazówka.** $-\frac{1}{3}a + 4 = 4$ i $-\frac{1}{3} \cdot 6 + 4 = b$.

11.19. a) $a > 0$, b) $a < 0$, c) $a = 0$. **11.20.** a) $b = 0$, b) $b < 0$, c) $b > 0$, d) $b = -1$.

11.21. a) **1** $m < 2$, **2** $m > 2$, **3** $m = 2$, b) **1** $m \neq -2$, **2** nie ma takiego m , **3** $m = -2$,

c) **1** $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, **2** $m \in (-1; 1)$, **3** $m \in \{-1, 1\}$, d) **1** $m \in \mathbb{R}$, **2** i **3** nie ma takiego m .

11.22. a) 4, b) -1, c) -10 000, d) 1, e) 3, f) -5.

11.23. a) $(-\frac{1}{2}, 0)$, b) $(-\sqrt{2}, 0)$, c) $(8, 0)$, d) $(\frac{1}{2}, 0)$, e) $(-\frac{1}{3}, 0)$, f) $(\frac{1}{32}, 0)$. **11.24.** D.

11.25. a) $x < 2$, b) $x > 3$, c) $x \in \mathbb{R}$. **11.26.** a) $x < 2$, b) $x > \frac{4}{3}$, c) $x > \frac{1}{10}$, d) $x \in \mathbb{R}$.

11.27. a) $x < 0$, b) $x > \frac{2}{5}$, c) $x < 1$, d) funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych.

11.28. Wskazówka. Zauważ, że $f(x) = -x + 2\sqrt{2}$. **11.29.** a) $x < 2$, b) $x > 4$, c) $x < -2$.

11.30. B i C. **11.31.** C. **11.32.** $k > 6$.

11.33. Wskazówka. $a < 0$ i $-\frac{b}{a} < 0$, więc $-\frac{b}{a} \cdot a > 0$, czyli $-b > 0$.

11.34. a) $m \geq -\frac{1}{2}$, b) $m = 2$, c) $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, d) $m = \sqrt{2}$.

Wskazówka. Oblicz miejsce zerowe x_0 funkcji f , a następnie w zależności od jej monotoniczności rozwiąż nierówność: a) $x_0 \geq 0$, b) $x_0 \leq 0$, c) $x_0 \leq 0$, d) $x_0 \geq 0$.

11.35. $m = -\frac{1}{3}$ lub $m = \frac{1}{3}$. Wskazówka. Z warunku $|BO| = 3|OA|$ wynika, że $B_1 = (-9, 0)$ lub $B_2 = (9, 0)$.

11.36. a) $b = -3$, b) $b = 0$, c) $b = -4$, d) $b = -2^5$.

11.37. a) $a = 4$, b) $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$, $(0, 3)$, c) $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$. **11.38.** P, F.

11.39. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, b) $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$, c) $f(x) = 6x - 3$. Wskazówka. $x_0 = -\frac{b}{a}$, więc $a = -\frac{b}{x_0}$.

11.40. a) $f(x) = 2x$, b) $f(x) = 2$, c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

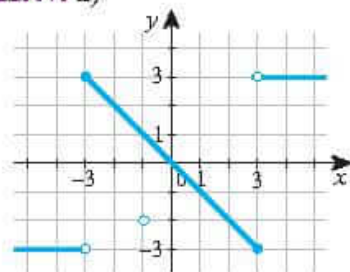
11.41. a) $f(x) = 2x - 6$, b) $f(x) = 3x - 4$, c) $f(x) = \frac{9}{5}x - \frac{8}{5}$, d) $f(x) = x + 4$.

11.42. a) $f(x) = -3x$, b) $f(x) = -2x + 4$, c) $f(x) = 100x - 88$. **11.43.** A. **11.44.** C.

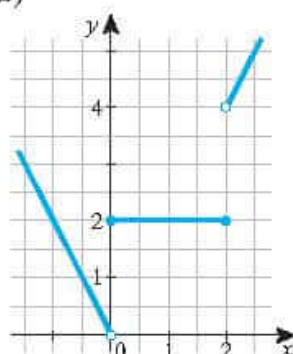
11.45. a) $f(x) = 3x - 6$, b) $f(x) = -5$. Wskazówka. a) $x_0 = 2$ i $b = -6$.

11.46. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Wskazówka. $f(x+1) = a(x+1) + b$ i $f(x-1) = a(x-1) + b$.

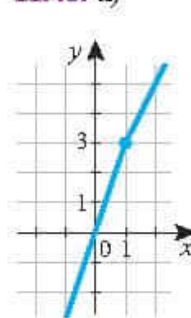
11.47. a)



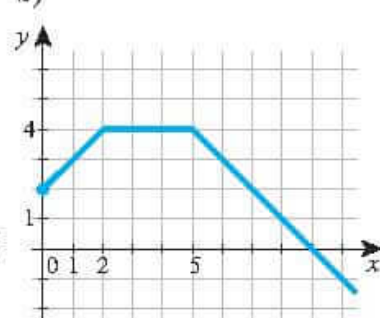
b)



11.48. a)



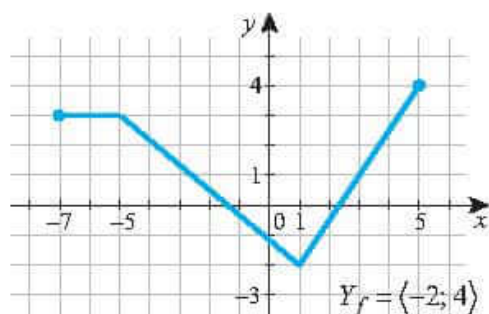
b)



$D_f = \mathbb{R}$, $Y_f = \mathbb{R}$ $D_f = (0; +\infty)$, $Y_f = (-\infty; 4)$.

11.49. B.

11.50.



11.51. a) $D_f = \langle -5; 5 \rangle$, $Y_f = \langle -2; 4 \rangle$,

$$f(x) = \begin{cases} -x-3, & \text{gdy } x \in \langle -5; -1 \rangle \\ 2x, & \text{gdy } x \in \langle -1; 2 \rangle \\ -x+6, & \text{gdy } x \in \langle 2; 5 \rangle \end{cases},$$

b) $D_f = (-5; 6)$, $Y_f = \langle -3; 2 \rangle$,

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{gdy } x \in (-5; -1) \\ -2, & \text{gdy } x \in (-1; 3) \\ -x+3, & \text{gdy } x \in (3; 6) \end{cases}.$$

11.52. a) $f(x) = \begin{cases} x+7, & \text{gdy } x \geq -7 \\ -x-7, & \text{gdy } x < -7 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{gdy } x < -1 \\ 2, & \text{gdy } -1 \leq x < 1 \\ 2x, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}$.

11.53. Wskazówka. a) $f(x) = \begin{cases} x-5, & \text{gdy } x \geq 5 \\ -x+5, & \text{gdy } x < 5 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{gdy } x < 5 \\ 2x-5, & \text{gdy } x \geq 5 \end{cases}$,

c) $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{gdy } x < 0 \\ 0, & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$, d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < 0 \\ 2x, & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$,

e) $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{gdy } x > -1 \\ -x+1, & \text{gdy } x < -1 \end{cases}$, gdzie $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

f) $f(x) = \begin{cases} -2x-2, & \text{gdy } x < 0 \\ -2, & \text{gdy } 0 \leq x < 2 \\ 2x+2, & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$, gdzie $D_f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

11.54. Wskazówka. a) $f(x) = \begin{cases} -3x-3, & \text{gdy } x < -3 \\ -x+3, & \text{gdy } x \geq -3 \end{cases}$, $Y_f = \mathbf{R}$,

b) $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & \text{gdy } x < 1 \\ 2x+1, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}$, $Y_f = \langle 3; +\infty \rangle$, c) $f(x) = \begin{cases} -2x-3, & \text{gdy } x < -5 \\ 7, & \text{gdy } -5 \leq x < 2 \\ 2x+3, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$, $Y_f = \langle 7; +\infty \rangle$,

d) $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{gdy } x < -2 \\ -2x-1, & \text{gdy } -2 \leq x < 1 \\ -3, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}$, $Y_f = \langle -3; 3 \rangle$.

11.55. a) Zero rozwiązań, gdy $m \in (5; +\infty)$, jedno rozwiązanie, gdy $m \in (-\infty; 5)$, nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m = 5$, b) zero rozwiązań, gdy $m \in (-\infty; 1)$, dwa rozwiązania, gdy $m \in (1; +\infty)$, nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $m = 1$. 11.56. Półprosta określona równaniem $y = x+3$, gdy $x \leq 0$.

11.57. $a = 1$. Wskazówka. Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \|x-2|-1$ i określ, dla jakiej wartości a ma on trzy punkty wspólne z prostą o równaniu $y = a$.

11.58. C. 11.59. Kolejno: P, P, F.

11.60. a) $y = 1000x$, gdzie x to głębokość, a y to ciśnienie panujące na głębokości x , b) tak, bo $\frac{y}{x} = 1000$.

11.61. a) Robert, b) 9 km, c) 1,5 h, d) Paweł – $2\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Jurek – $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Robert – $8\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

11.62. a) 8 m, b) $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **11.63.** a) 10°C , c) $T = 10t + 20$, gdy $t \leq 8$ i $T = 100$, gdy $t \geq 8$.

11.64. $y = 2x + 6$, gdzie x to liczba przejechanych kilometrów, a y to koszt przejazdu taksówką. a) 8 zł, b) 16 zł, c) 26 zł. **11.65.** $100^\circ\text{C} = 373,15\text{K}$, $100\text{K} = -173,15^\circ\text{C}$.

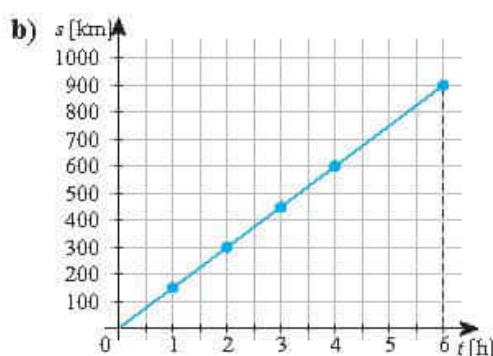
11.66. a) $s(t) = \begin{cases} 20t, & \text{gdy } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 60t - 20, & \text{gdy } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$.

11.67. a) 20 minut z prędkością $20\frac{\text{km}}{\text{h}}$, b) 10 minut, c) jedna godzina z prędkością $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, d) 1,5 godziny, e) $66\frac{2}{3}$ kilometrów.

11.68. a) $s = 150t$, gdzie droga s wyrażona jest w kilometrach i czas t w godzinach, c) 512,5 km

Wskazówka. c) $\left(850 - 150 \cdot 2\frac{1}{4}\right)\text{km}$, 135 minut = $2\frac{1}{4}\text{h}$.

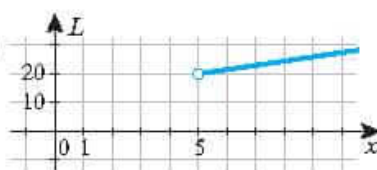
11.69. a) $y = 300x + 5000$, gdzie x to liczba miesięcy oszczędzania, a y to stan konta.



Zestaw powtórkowy

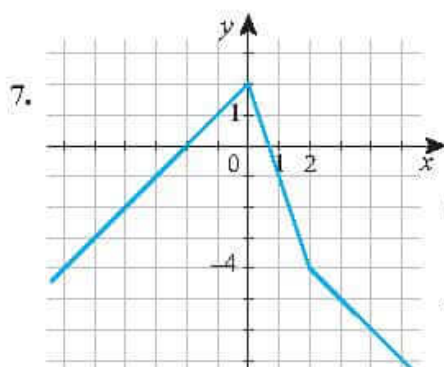
1. D. 2. D. 3. B. 4. Kolejno: P, F, P, P. 5. N – B.

6. a) $L(x) = 2x + 10$, $D_L = (5; +\infty)$, b)



c) tak, bo $L(495) = 1000$,

d) $Y_L = (20; +\infty)$.



Wskazówka.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{gdy } x < 0 \\ -3x+2, & \text{gdy } 0 \leq x < 2 \\ -x-2, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$$

8. a) $f(x) = 4x + 3$,

b) $f(x) = 3x - 4$,

c) $f(x) = 5x + 2$.

Wskazówka. a) $f(x+1) - f(x) = a$,

b) $f(x+2) - f(x) = 2a$,

c) $f(x+3) - f(x) = 3a$.

12. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ i wielkości odwrotnie proporcjonalne

12.1.

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y = -\frac{6}{x}$	1	2	3	6	-6	-3	-2	-1

12.2. a) $a = \frac{1}{2}$, b) $a = -3$, c) $a = 4$.

12.3. A i G.

12.5. Ujemne, dodatnie.

12.6. Wskazówka. Zauważ, że: a) $-5 \cdot 1 = -\frac{1}{125} \cdot 625 = 3000 \cdot \left(-\frac{1}{600}\right) = -5$.

12.7. A - 2, B - 3, C - 4, D - 1.

12.8. a)

x	2	5	4	11
y	3	7,5	6	16,5

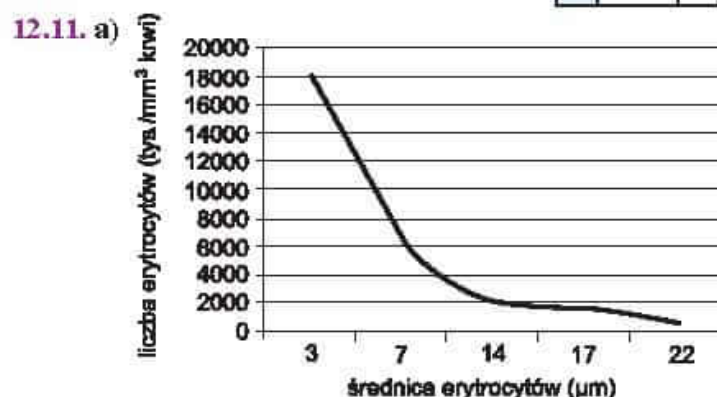
b)

x	1,5	5	6	0,6
y	30	9	7,5	75

12.9. $xy = 1600$.

12.10. a) $y = \frac{4}{x}$, b)

x	$\sqrt{2}$	4
y	$2\sqrt{2}$	1



b) Zależność odwrotnie proporcjonalna: im mniejsze rozmiary erytrocytów, tym większa ich liczba w 1 mm³ krwi.

12.12. Kolejno: F, P, F. Wskazówka. Zauważ, że pierwsze dwa lata przeżywa tylko 20% ryb.

12.13. 4 h i 24 minuty. Wskazówka. $75 \cdot t = 60 \cdot 5,5$.

12.14. 8 osób.

12.15. 1000 m.

12.16. a) Wprost proporcjonalne, b) odwrotnie proporcjonalne.

12.17. a) $y = \frac{100}{x}$, b) $y = \frac{200}{x}$, c) $y = \frac{50}{x}$.

12.18. $k(x) = \frac{60\,000}{x}$. a) 10 000 zł, b) 20 lat. Wskazówka. $kx = a$, gdzie a to cena zakupu samochodu, czyli $2 \cdot 30\,000 = a$.

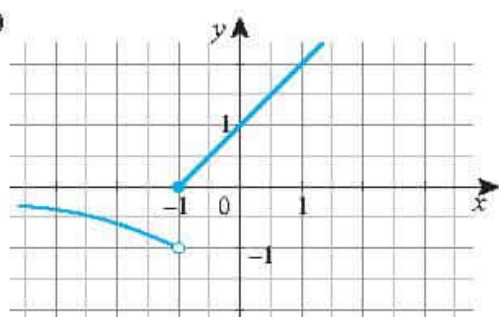
Zestaw powtórkowy

1. C. 2. C. 3. B. 4. D. 5. D. 6. Kolejno: P, F, F. 7. D. 8. C.

9. 200 ruchów pompki. Wskazówka. Prawo Boyle'a i Mariotte'a: $p_1 V_1 = p_2 V_2$, gdzie $p_1 = 10^5$ Pa,

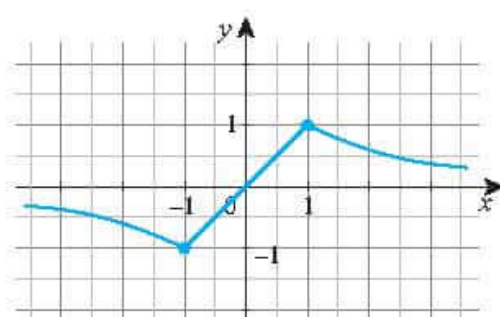
$V_1 = x \cdot 0,001$ m³, x – liczba ruchów pompką, $p_2 = (3,5 \cdot 10^5 - 10^5)$ Pa = $2,5 \cdot 10^5$ Pa, $V_2 = 0,08$ m³.

10. a)



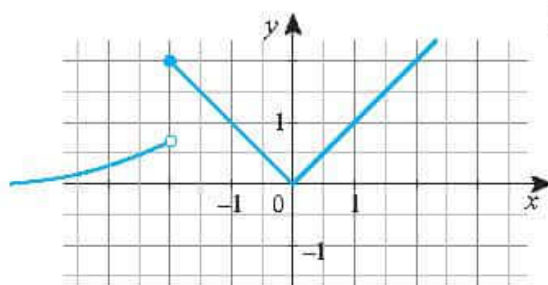
$$D_f = \mathbb{R}, Y_f = (-1; +\infty)$$

b)



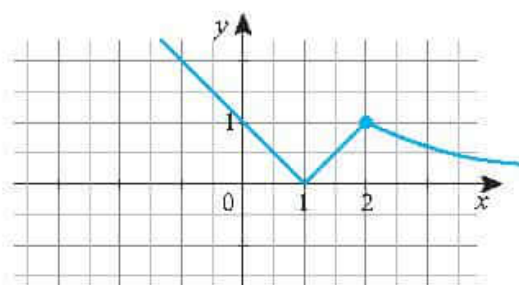
$$D_f = \mathbb{R}, Y_f = \{-1; 1\}$$

c)



$$D_f = \mathbb{R}, Y_f = \langle 0; +\infty \rangle$$

d)



$$D_f = \mathbb{R}, Y_f = \langle 0; +\infty \rangle$$

13. Równania kwadratowe

13.1. Równania kwadratowe: **1** $-x^2 + 9 = 0$ – równanie niepełne, **2** $3x^2 - 147 = 0$ – równanie niepełne, **4** $19x^2 - 57x = 0$ – równanie niepełne, **6** $y^2 - 28y + 96 = 0$, **7** $7y^2 + 78y - 36 = 0$, **8** $z^2 + 7z = 0$ – równanie niepełne, **9** $16x^2 - 64 = 0$ – równanie niepełne.

13.2. a) -2, 2, b) żadna z liczb, c) -2, d) 0 i -2.

13.3. a) $\sqrt{2}x^2 + x = 0$, b) $-x^2 + x + 1 = 0$, c) $-4x^2 + \sqrt{3} = 0$. **13.4.** B.

13.5. a) $x_0 = 0$, b) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, c) $x_1 = -11$, $x_2 = 11$, d) nie ma rozwiązania, e) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, f) $x_1 = -\frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, g) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, h) $x_1 = -7$, $x_2 = 7$, i) nie ma rozwiązania, j) nie ma rozwiązania, k) nie ma rozwiązania, l) $y_1 = -3$, $y_2 = 3$.

13.6. a) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, b) $x_1 = -8$, $x_2 = 0$, c) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, d) $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, e) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, f) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$, g) $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 0$, h) $y_1 = 0$, $y_2 = 22$, i) $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{9}{13}$.

13.7. a) $m_1 = -3\sqrt{2}$, $m_2 = 3\sqrt{2}$, b) $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{3}{4}$, c) $r_1 = -3\sqrt{2}$, $r_2 = 3\sqrt{2}$, d) $p_1 = -10$, $p_2 = 10$,

e) $y_1 = 0$, $y_2 = 14$, f) nie ma rozwiązania. **13.8.** A.

13.9. a) $(x+1)^2 - 1^2$, b) $\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2$, c) $(x-5)^2 - 5^2$, d) $\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2$.

13.10. a) $x_0 = 7$, b) $x_1 = 3 - 4\sqrt{2}$, $x_2 = 3 + 4\sqrt{2}$, c) $x_1 = -1\frac{3}{5}$, $x_2 = -2\frac{2}{5}$, d) nie ma rozwiązania,
e) $x_1 = 8 - \sqrt{5}$, $x_2 = 8 + \sqrt{5}$, f) $x_1 = -2 - 2\sqrt{3}$, $x_2 = -2 + 2\sqrt{3}$. **13.11.** B.

13.12. a) $x_0 = -8$, b) $x_0 = 7$, c) $x_0 = 10$, d) $x_0 = \sqrt{2}$, e) $x_0 = -0,5$, f) $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

13.13. a) $x_1 = 2 - 2\sqrt{5}$, $x_2 = 2 + 2\sqrt{5}$, b) $x_1 = -10$, $x_2 = 2$, c) $x_1 = -3 - \sqrt{6}$, $x_2 = -3 + \sqrt{6}$,
d) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, e) $x_1 = \frac{5}{2} - \sqrt{7}$, $x_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{7}$, f) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{15}{2}$, g) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$,
h) $x_1 = -9,5$, $x_2 = 0,5$, i) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$. *Wskazówka.* a) $(x-2)^2 = 20$, b) $(x+4)^2 = 36$,

c) $(x+3)^2 = 6$, d) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, e) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 7$, f) $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = 16$, g) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$,
h) $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = 25$, i) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$.

13.14. a) $x_1 = -5$, $x_2 = 7$, b) $x_1 = -24$, $x_2 = 6$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = 8$, d) $x_1 = -3 - \sqrt{3}$, $x_2 = 3 - \sqrt{3}$,

e) $x_1 = -3 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$, f) $x_1 = \frac{\sqrt{7}-3}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{7}+3}{2}$. *Wskazówka.* a) $(x-1)^2 = 36$,

b) $(x+9)^2 = 225$, c) $(x+3)^2 = 25$, d) $(x+\sqrt{3})^2 = 9$, e) $(x-2\sqrt{2})^2 = 9$, f) $\left(x - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

13.15. a) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$, b) $x_1 = -2$, $x_2 = 0,2$, c) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$, d) $x_1 = -1\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$,

e) $x_1 = -0,7$, $x_2 = 1,3$, f) $x_1 = -0,4$, $x_2 = 4,4$. *Wskazówka.* W pierwszym kroku podziel obie strony równania przez liczbę stojącą przy x^2 . Po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia

otrzymasz: a) $\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}$, b) $\left(x + \frac{9}{10}\right)^2 = \frac{121}{100}$, c) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$, d) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 1$,

e) $(x-0,3)^2 = 1$, f) $(x-2)^2 = 5,76$.

13.16. a) $\Delta = 5$, tak, b) $\Delta = -3$, nie, c) $\Delta = -10$, nie, d) $\Delta = 25$, tak, e) $\Delta = 49$, tak, f) $\Delta = 1$, tak.

13.17. a) Dwa, b) dwa, c) jeden, d) zero, e) dwa, f) zero, g) dwa.

13.18. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 14$, c) $x_0 = 1$, d) równanie nie ma rozwiązania, e) $x_1 = 2$, $x_2 = 8$,

f) $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.

13.19. a) $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{3}{2}$, b) $y_0 = 0,1$, c) $x_0 = 0$, d) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, e) $x_1 = 0$, $x_2 = 16$,

f) $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, g) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{7}$, h) brak rozwiązania, i) $x_1 = -6,5$, $x_2 = 0$.

13.20. a) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, c) $y_1 = -\frac{25}{3}$, $y_2 = -\frac{17}{3}$, d) $x_1 = -4$, $x_2 = 2$,

e) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, f) $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{5}{3}$, g) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{11}{13}$, h) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,

i) $x_1 = \frac{3}{2}(\sqrt{10} - \sqrt{2})$, $x_2 = \frac{3}{2}(\sqrt{10} + 2\sqrt{2})$. **13.21. D.**

13.22. -4 i -6 lub 4 i 6 . *Wskazówka.* $x(x+2) = 24$, gdzie x to mniejsza z liczb.

13.23. a) 3 , 4 i 5 , **b)** 6 , 8 , 10 . *Wskazówka.* **a)** $n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$, gdzie n to długość najkrótszego boku trójkąta, **b)** $(2n)^2 + (2n+2)^2 = (2n+4)^2$, gdzie $2n$ to długość najkrótszego boku trójkąta.

13.24. $12\text{ m} \times 15\text{ m}$. *Wskazówka.* $x \cdot (x+3) = 180$, gdzie x to krótszy wymiar.

13.25. Działka rolnika miała powierzchnię 100 m^2 . *Wskazówka.* $x^2 - 4x = 9600$.

13.26. Podstawy 30 cm i 14 cm , a ramię $2\sqrt{41}\text{ cm}$. *Wskazówka.* $\frac{(x+6+3x+6) \cdot (x+2)}{2} = 220$, skąd $x^2 + 5x - 104 = 0$.

13.27. 1 i 3 . *Wskazówka.* $x^2 + (x+2)^2 = 10$, gdzie x to długość boku mniejszego kwadratu.

13.28. 30 cm i 40 cm . *Wskazówka.* $\frac{x \cdot (x+10)}{2} = 600$, gdzie x to długość krótszej przekątnej rombu.

13.29. 54 . *Wskazówka.* $11x^2 = 99$, gdzie x^2 to pole jednego małego kwadracika.

13.30. $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *Wskazówka.* $E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$.

13.31. $7\text{ cm} \times 10\text{ cm}$. *Wskazówka.* $5 \cdot 8 + 30 = (5+x) \cdot (8+x)$, gdzie x to różnica długości między bokami prostokątów i $x > 0$.

13.32. a) $x_0 = 1$, **b)** $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, **c)** $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, **d)** $x_0 = 3$,

e) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, **f)** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = 8$, **g)** $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, **h)** $x_1 = 2$, $x_2 = 3$,

i) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$.

13.33. a) $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, **b)** $x_1 = -1$, $x_2 = 14$, **c)** $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

13.34. a) $1^\circ 1$, $2^\circ -6$, $3^\circ -13$, $4^\circ -\frac{1}{6}$, $5^\circ 13$, **b)** $1^\circ -2$, $2^\circ -35$, $3^\circ -68$, $4^\circ \frac{2}{35}$, $5^\circ 74$, **c)** $1^\circ -7$, $2^\circ -78$, $3^\circ -149$, $4^\circ \frac{7}{78}$, $5^\circ 205$, **d)** $1^\circ 6$, $2^\circ -27$, $3^\circ -60$, $4^\circ -\frac{2}{9}$, $5^\circ 90$, **e)** $1^\circ -12$, $2^\circ 35$, $3^\circ 82$, $4^\circ -\frac{12}{35}$, $5^\circ 74$, **f)** $1^\circ 15$, $2^\circ -100$, $3^\circ -215$, $4^\circ -0,15$, $5^\circ 425$.

13.35. a) Przeciwnie znaki, **b)** nie ma pierwiastków, **c)** dwa dodatnie.

13.36. a) $b = -3$, $c = 0$, **b)** $b = 1$, $c = -6$, **c)** $b = 1,5$, $c = 0,5$, **d)** $b = -5,8$, $c = 4$, **e)** $b = 3$, $c = -10$,

f) $b = -2$, $c = -63$.

13.37. a) $-\frac{b}{c}$, b) $b^2 + 10b - 2c + 50$, c) $b^2 - 4c$, d) $\frac{b^2 - 2c}{c^2}$.

13.38. a) $x^2 - 5\sqrt{5}x + 30 = 0$, b) $x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$, c) $x^2 + 6x + 4 = 0$, d) $x^2 - 2x + 0,25 = 0$,

e) $x^2 - 10^{21}x + 9 \cdot 10^{40} = 0$, f) $x^2 - (\log 4)^2 = 0$.

13.40. Wskazówka. $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$.

13.41. a) $m = \frac{33}{8}$, b) $m = -1$, c) $m = 2$.

13.42. a) $m > 0,25$. **13.43.** $m \in \left(\frac{31}{16}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

13.44. a) $m \in \left(2\frac{1}{2}; +\infty\right)$, b) $m \in (-\infty; -1)$. **13.45.** a) $m \in (-16; 0)$, b) $m \in \left(\frac{31}{48}; \frac{2}{3}\right)$.

13.46. a) $x_1 = \frac{-m - |m-2|}{2}$, $x_2 = \frac{-m + |m-2|}{2}$, gdzie $m \in \mathbb{R}$, b) $m \in \mathbb{Z}$. **Wskazówka.** b) Przedstaw pierwiastki równania w prostszej postaci bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

13.47. a) 0 pierwiastków, gdy $m < -\frac{1}{4}$; 1 pierwiastek, gdy $m = -\frac{1}{4}$ lub $m = 0$; 2 pierwiastki, gdy

$m \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; +\infty)$,

b) 2 pierwiastki, gdy $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$; 1 pierwiastek, gdy $m = 0$ lub $m = 1$; 0 pierwiastków, gdy $m > 1$,

c) 0 pierwiastków, gdy $m < -\frac{9}{8}$; 1 pierwiastek, gdy $m = -\frac{9}{8}$ lub $m = -1$; 2 pierwiastki, gdy

$m \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right) \cup (-1; +\infty)$,

d) 0 pierwiastków, gdy $m \in \left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$; 1 pierwiastek, gdy $m = \frac{15}{4}$ lub $m = 3$; 2 pierwiastki, gdy

$m \in (-\infty; 3) \cup \left(3; \frac{15}{4}\right)$.

e) 0 pierwiastków, gdy $m \leq 0$; 2 pierwiastki, gdy $m > 0$,

f) 1 pierwiastek, gdy $m \neq 2$; nieskończenie wiele pierwiastków, gdy $m = 2$.

Zestaw powtórkowy

1. C. 2. D. 3. C. 4. D. 5. B. 6. P, P. 7. D. 8. N - B.

9. a) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, b) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, c) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2 + \sqrt{7}$.

14. Funkcja kwadratowa

14.1. a) $f(x) = 3x^2 - x + 14$, b) $f(x) = 0,2x^2 + 1$, c) $f(x) = -12x^2 + 11x$, d) $f(x) = 6x^2$.

14.2. Np.: $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ i $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$. **14.3.** a) A i C, b) B, c) A, d) C.

14.4. 1 - 3, 2 - 8, 4 - 6, 5 - 7. **14.5.** a) $a = 2$, b) $a = -1$, c) $a = 4$. **14.6.** D.

14.7. A. **14.8.** B i C. **14.9.** a) $a = 1$, b) $a = -2$, c) $a = -\frac{1}{2}$.

14.10. a) $y = 3x^2 - 6x - 2$, $a = 3$, $b = -6$, $c = -2$, b) $y = -9x^2 - 6x - 1$, $a = -9$, $b = -6$, $c = -1$,

c) $y = x^2 - 4x$, $a = 1$, $b = -4$, $c = 0$, d) $y = 2x^2 + 4x - 3$, $a = 2$, $b = 4$, $c = -3$, e) $y = 4x^2 - 16x + 17$,
 $a = 4$, $b = -16$, $c = 17$, f) $y = -2x^2 - 16x - 35$, $a = -2$, $b = -16$, $c = -35$.

14.11. a) $a = -3$, $p = 4$, $q = -2$, b) $a = 1$, $p = -2$, $q = -6$, c) $a = -\frac{1}{2}$, $p = q = 0$, d) $a = -1$, $p = -1$, $q = 0$,

e) $a = 10$, $p = 0$, $q = 30$, f) $a = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$.

14.12. a) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 4$, b) $f(x) = 4x^2$, c) $f(x) = -\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + 1,5$, d) $f(x) = x^2 - 2$.

14.13. 1 - F, 2 - C, 3 - A, 4 - D, 5 - B, 6 - E.

14.14. a) Tak, b) nie, c) tak, d) tak, e) nie, f) nie.

14.15. a)

x	-2	-1	0
$f(x) = (x+1)^2 - 2$	-1	-2	-1

 b)

x	0	1	2
$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-2\frac{1}{2}$

 c)

x	-1	0	1
$f(x) = -x^2$	-1	0	-1

d)

x	2	3	4
$f(x) = 1\frac{1}{2}(x-3)^2 + 3$	$4\frac{1}{2}$	3	$4\frac{1}{2}$

 e)

x	-1	0	1
$f(x) = -2x^2 + 4$	2	4	2

 f)

x	-2	-1	0
$f(x) = 5(x+1)^2$	5	0	5

12.16. a)

x	-3	-2	-1
$f(x) = -2(x+2)^2 - 2$	-4	-2	-4

1 $\langle -2; +\infty \rangle$, 2 $y_{MAX} = f(-2) = -2$, 3 $x = -2$.

b)

x	-5	-4	-3
$f(x) = 2(x+4)^2 + 1$	3	1	3

1 $(-\infty; -4]$, 2 $y_{MIN} = f(-4) = 1$, 3 $x = -4$.

c)

x	-1	0	1
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$	$4\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$

1 $\langle 0; +\infty \rangle$, 2 $y_{MAX} = f(0) = 5$, 3 $x = 0$.

d)

x	-6	-5	-4
$f(x) = 3(x+5)^2$	3	0	3

1 $(-\infty; -5]$, 2 $y_{MIN} = f(-5) = 0$, 3 $x = -5$.

e)

x	-1	0	1
$f(x) = \frac{1}{3}x^2$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

1 $(-\infty; 0]$, 2 $y_{MIN} = f(0) = 0$, 3 $x = 0$.

f)

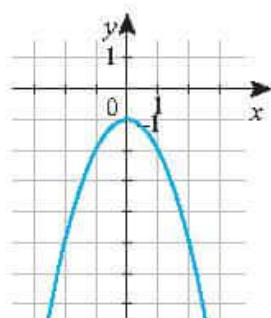
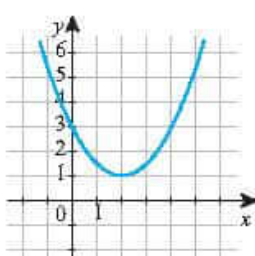
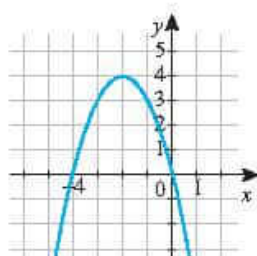
x	1	2	3
$f(x) = -(x-2)^2 - 1$	-2	-1	-2

1 $\langle 2; +\infty \rangle$, 2 $y_{MAX} = f(2) = -1$, 3 $x = 2$.

14.17. F, P, P. **14.18.** a) $a < 0$, b) $a > 0$, c) $a > 0$, d) $a < 0$, e) $x = 3$ i $a > 0$, f) 5 i $a < 0$.

14.19. a) $(2, 0)$, b) $(-2, -12)$, c) $(0, 3)$, d) $\left(-\frac{5}{8}, -\frac{9}{16}\right)$.

14.20. a) $f(x) = -x^2 - 4x$, b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, c) $f(x) = -x^2 - 1$.



14.21. $Y_f = \left[-\frac{25}{12}; +\infty\right)$.

14.22. a) 1 $W = (-1, -4)$, 2 $y = (x+1)^2 - 4$, 3 $x = -1$, 4 $Y = [-4, +\infty)$, 5 dwa miejsca zerowe,

b) 1 $W = (1, 2)$, 2 $y = -(x-1)^2 + 2$, 3 $x = 1$, 4 $Y = (-\infty; 2]$, 5 dwa miejsca zerowe,

c) 1 $W = (2, -12)$, 2 $y = 3(x-2)^2 - 12$, 3 $x = 2$, 4 $Y = [-12; +\infty)$, 5 dwa miejsca zerowe,

d) 1 $W = (0, 3)$, 2 $y = 2x^2 + 3$, 3 $x = 0$, 4 $Y = [3; +\infty)$, 5 brak miejsc zerowych,

e) 1 $W = (0, 16)$, 2 $y = -4x^2 + 16$, 3 $x = 0$, 4 $Y = (-\infty; 16]$, 5 dwa miejsca zerowe,

f) 1 $W = (-1, -3)$, 2 $y = 4(x+1)^2 - 3$, 3 $x = -1$, 4 $Y = [-3; +\infty)$, 5 dwa miejsca zerowe.

14.23. P, F, F.

14.24. a) $W = (3, 282)$, b) $W_1 = (-6, 15)$, $W_2 = (-6, 21)$.

Wskazówka. a) $p = \frac{m+2}{4}$ i $p = 3$, czyli $m = 10$. Funkcja f ma postać $f(x) = 2x^2 - 12x + 300$ i $q = f(3)$,

b) $p = \frac{m^2-3}{-1}$ i $p = 6$, czyli $m = \pm 3$. Funkcja f ma postać $f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ i $f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x - 3$.

14.25. B.

14.26. Np.: $y = -3(x-1)^2 + 2$. *Wskazówka.* Oblicz współrzędne wierzchołka i określ znak współczynnika a .

14.27. D. **14.28.** B i C. **14.29.** B. **14.30.** a) Tak, b) nie, c) nie, d) nie.

14.31. a) 0, b) 1, c) 2. **14.32.** a) $x_0 = 2$, $f(x) = (x-2)^2$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $f(x) = -3x(x-3)$,

c) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+2)$, d) nie ma miejsc zerowych, nie ma postaci iloczynowej,

e) $x_0 = -1$, $f(x) = -2(x+1)^2$, f) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, $f(x) = -0,75(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

14.33. a) 2, b) 1, c) 0, d) 2.

Wskazówka. d) $\Delta = (-3^5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3^{10} = 3^{10} + 8 \cdot 3^{10} = 3^{10}(1+8) = 3^{10} \cdot 3^2 = 3^{12}$.

14.34. a) $x_1 = -3, x_2 = 1, W = (-1, 8)$, b) $x_1 = -5, x_2 = 0, W = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{75}{4}\right)$, c) $x_1 = 2, x_2 = 4,$

$W = (3, -8)$, d) $x_1 = -3, x_2 = 1, W = (-1, 16)$. *Wskazówka.* $W = (p, q), p = \frac{x_1 + x_2}{2}, q = f(p)$.

14.35. Kolejno: F, P, P.

14.36. *Wskazówka.* Wykres funkcji f przechodzi przez punkty o współrzędnych: a) $(-3, 0), (1, 0)$ i $(-1, 4)$,

b) $(3, 0), (-1, 0)$ i $(1, -8)$, c) $(2, 0), (-4, 0)$ i $\left(-1, -4\frac{1}{2}\right)$, d) $(0, 0), (1, 0)$ i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **14.37.** B.

14.38. a) $b = -8$ i $c = 15$, b) $b = 7$ i $c = -18$, c) $b = -2$ i $c = -2$, d) $b = 6$ i $c = 9$, e) $b = -4$ i $c = 0$,

f) $b = 0$ i $c = -2$. **14.39.** C.

14.40. 1 a) $\langle -3; 0 \rangle$, b) $y_{MAX} = f(-1) = 4, y_{MIN} = f(-3) = 0$,

2 a) $\langle -1; 1 \rangle$, b) $y_{MAX} = f(-1) = f(1) = 3, y_{MIN} = f(0) = 2$,

3 a) $\langle 1; 4 \rangle$, b) $y_{MAX} = f(4) = 0, y_{MIN} = f(2) = -4$. **14.41.** A.

14.42. a) $y_{MAX} = f(1) = 4, y_{MIN} = f(-1) = -6$, b) $y_{MAX} = f(-1) = 9, y_{MIN} = f(0) = 4$,

c) $y_{MAX} = f(-2) = f(0) = -9, y_{MIN} = f(-1) = 12$, d) $y_{MAX} = f(-1) = 40, y_{MIN} = f(-2) = 15$,

e) $y_{MAX} = f(0) = 12, y_{MIN} = f(2) = 4$, f) $y_{MAX} = f(2) = 22, y_{MIN} = f(-2) = -2$.

14.43. P, F. **14.44.** a) $f(1) = 41, f(40) = 1601$, b) tak, gdy $n = 23$.

14.45. $y_{MIN} = f(3) = 8, y_{MAX} = f(1) = f(5) = 20$.

14.46. a) $y_{MIN} = f(5) = \frac{3}{25}, y_{MAX} = f(1) = 3$, b) $y_{MIN} = f(-8) = \frac{1}{15}, y_{MAX} = f(-6) = \frac{1}{8}$,

c) $y_{MIN} = f(7) = \frac{1}{16}, y_{MAX} = f(2) = 1$, d) $y_{MIN} = f(-6) = -\frac{3}{8}, y_{MAX} = f(-8) = -\frac{3}{20}$.

14.47. *Wskazówka.* Zauważ, że funkcja f w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$ ma wartość największą równą 4.

14.48. a) $f(x) = 0,3(x+2)(x-5)$, b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2$, c) $f(x) = x^2 + 2$.

14.49. a) $f(x) = \frac{7}{4}(x-3)^2 + 2$, b) $f(x) = -\frac{4}{5}(x-4)^2 + \frac{6}{5}$, c) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}(x-5)^2 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Wskazówka. b) Zauważ, że $p = \frac{2+6}{2} = 4$ i skorzystaj z wzoru $y = a(x-4)^2 + q$ i z tego,

że np. punkty $(2, -1)$ i $(1, -6)$ leżą na wykresie funkcji. **14.50.** Kolejno: P, P, F.

14.51. a) $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$, b) $f(x) = -x^2 + 28x - 160$, c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3}x$.

14.52. a) $f(x) = -(x+1)(x-5)$, $W = (2, 9)$, b) $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)(x-6)$, $W = \left(1, -\frac{25}{2}\right)$,

c) $f(x) = -2(x+4)(x-1)$, $W = \left(-\frac{3}{2}, \frac{25}{2}\right)$, d) $f(x) = 100(x+3)(x-1)$, $W = (-1, -400)$.

14.53. a) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x-7)$, b) $f(x) = \frac{1}{16}(x+1)(x-7)$. **14.54.** A.

14.55. a) $f(x) = 2(x-3)^2 - 10$, b) $f(x) = -3(x+1)^2 + 8$.

14.56. a) $f(x) = -\frac{5}{9}(x-2)^2 + 5$, b) $f(x) = (x-4)^2 - 8$, c) $f(x) = (x+2)^2 - 4 = x^2 + 4x$.

14.57. a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$, b) $f(x) = x^2 - 5x + 5$, c) $f(x) = -3x^2 + 5x$, d) $f(x) = -x^2 - 4$.

14.58. a) $a=1$, $b=4$, $c=2$, b) $a=2$, $b=-1$, $c=1$, c) $a=-1$, $b=1$, $c=3$.

14.59. a) $m=-2$, b) $m=4$, c) $m=4$, d) $m=1$, e) $m=0$, f) $m=8$.

14.60. a) 0, b) 1, c) 2. *Wskazówka.* a) $f(x) = -0,4(x^2 - 4)$, b) $f(x) = -0,5x(x-4)$, c) $f(x) = 0,5x^2 + 1$.

14.61. a) 580 zł, b) 4000 zł, c) 97 600 zł. **14.62.** a) Ciało spadnie na ziemię po 3 sekundach,

b) $h_{MAX} = 11,25$ m, gdy $t = 1,5$ s. **14.63.** a) Tak, bo $q = f(0) = 3$, b) 4 m.

14.64. a) $y = -\frac{2}{3}x^2 + 3x$, b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$.

14.65. a) $f(x) = x^2 + (20-x)^2$, $D: x \in \mathbf{R}$, b) $f(x) = x(x-5)$, $D: x \in \mathbf{R}$ lub $f(x) = x(x+5)$,

$D: x \in \mathbf{R}$, c) $f(x) = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 3x^2 + 6x + 5$, $D: x \in \mathbf{N}$,

d) $f(x) = (2x)^2 + (2x+2)^2 = 8x^2 + 8x + 4$, $D: x \in \mathbf{Z}$, e) $f(x) = (2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$, $D: x \in \mathbf{Z}$,

f) $f(x) = (13+x)(19+x)$, $D: x > 0$, g) $f(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ lub

$f(x) = x^3 - (x+1)^3 = -3x^2 - 3x - 1$, $D: x \in \mathbf{N}$.

14.66. a) $E(1) = 22$, $E(10) = 40$, b) w szóstym dniu przyjęło 72 chorych, c) 12 dni.

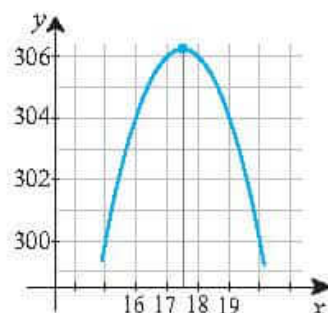
14.67. $f(n) = \frac{1}{2}n(n-3)$, $D: n \in \mathbf{N}$ i $n \geq 3$, trzydzieści boków.

14.68. a) $f(x) = x(35-x)$, gdzie x jest liczbą naturalną z przedziału $\langle 0; 35 \rangle$,

b) 17 lub 18 uczniów chorych na gripę, 306 esemesów.

Wskazówka. b) Do wykresu funkcji $f(x) = x(35-x)$ należą punkty

o współrzędnych naturalnych. Liczba 17,5 nie należy do dziedziny funkcji f .



14.69. $17 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *Wskazówka.* Średnia prędkość v_{sr} jest ilorazem przyrostu przebytej drogi do przyrostu czasu.
Zatem $v_{sr} = \frac{s(7) - s(4)}{7 - 4}$.

14.70. $36 = 18 + 18$.

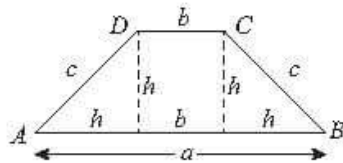
14.71. Prostokąt jest kwadratem o boku długości 6 cm.

14.72. Parking powinien mieć kształt kwadratu o boku 78 m. Jego powierzchnia będzie równa 6084 m^2 .

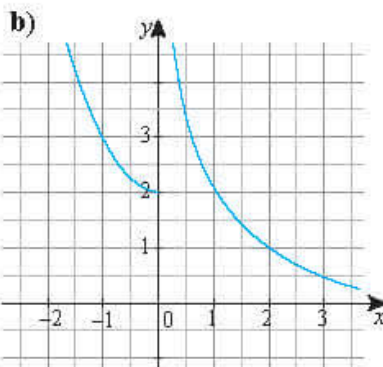
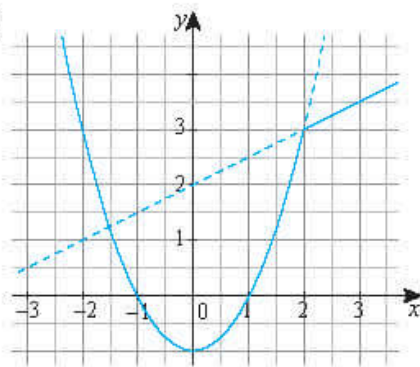
14.73. $P_{MAX} = 48\sqrt{3}$, gdy $x = 8\sqrt{3}$.

14.74. a) $P(h) = -2h^2 + 12h$, $D : h \in (0; 4)$, **b)** $a = 9$, $b = 3$, $c = 3\sqrt{2}$.

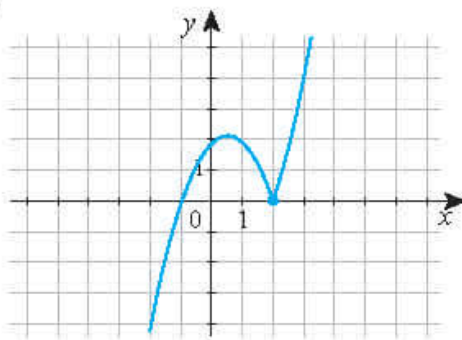
Wskazówka. $a = 2h + b$.



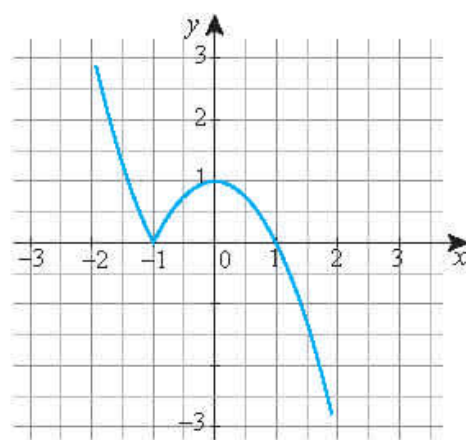
14.75. a)



14.76. a)

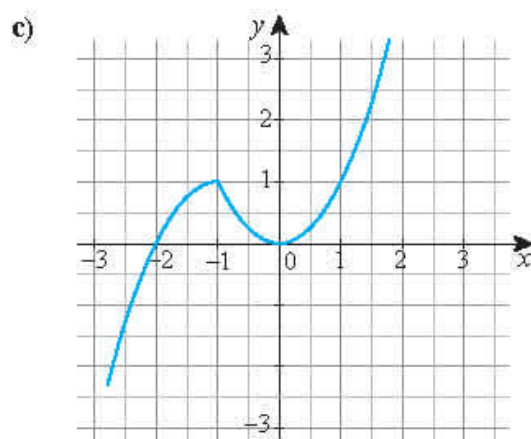


b)

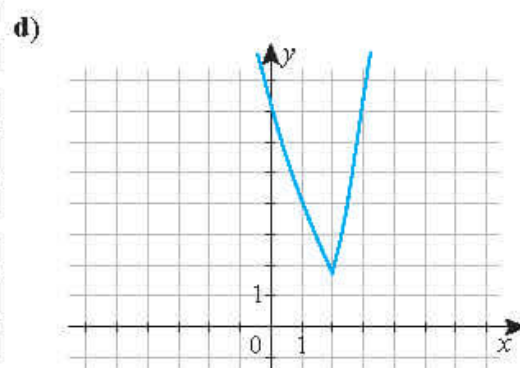


Wskazówka. $f(x) = \begin{cases} (x+1)(x-2), & \text{gdy } x \geq 2 \\ -(x+1)(x-2), & \text{gdy } x < 2 \end{cases}$

Wskazówka. $f(x) = \begin{cases} (1-x)(x+1), & \text{gdy } x \geq -1 \\ (x-1)(x+1), & \text{gdy } x < -1 \end{cases}$



Wskazówka. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x \geq -1 \\ -x^2 - 2x, & \text{gdy } x < -1 \end{cases}$.



Wskazówka. $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{gdy } x \leq 1 \\ x^2 + 4x - 4, & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$.

Zestaw powtórkowy

1. B. 2. A. 3. D.

4. $a = 2$, $b = -4$, $c = -6$. *Wskazówka.* Zauważ, że $y_{\min} = f(0) = -6$, $f(-1) = 0$ i $p = -\frac{b}{2a} = 1$ oraz $f(3) = 0$.

5. T-B. 6. T-B. 7. a) $a = -\frac{3}{8}$, b) $C = \left(3, 9\frac{3}{8}\right)$, c) $P_{\Delta ABC} = 46\frac{7}{8}$.

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)^2, & \text{gdy } x < 0 \\ \frac{1}{2}(x-2)^2, & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$.

9. a) $a = -1$, $b = 4$, $c = -3$, b) $a = -2$, $b = 4$, $c = 16$, c) $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

$\alpha [^\circ]$	$\sin\alpha / \cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha [^\circ]$	$\sin\alpha / \cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	0,9848	5,6713	10
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	1,0000	–	0

**Charakterystyczne cechy podręczników
z serii „MATEMATYKA i przykłady jej zastosowań”
do kształcenia w zakresie podstawowym i rozszerzonym**

- W każdym rozdziale wszystkich podręczników z serii „MATEMATYKA i przykłady jej zastosowań” podtytuł jest tematem lekcji. Każdemu tematowi lekcji są przypisane odpowiednie umiejętności wymienione w podstawie programowej.
- Każda umiejętność wymieniona w podstawie programowej jest zilustrowana przykładami, ćwiczeniami i zadaniami utrwalającymi.
- Duża liczba ćwiczeń, zadań i zestawów powtórkowych stanowi dobrą bazę przygotowującą do egzaminu maturalnego.
- Do ćwiczeń i zadań utrwalających podane są odpowiedzi, a do niektórych również wskazówki.

ISBN 978-83-65120-81-6



9 788365 120816