MATEMATYKA

Alicja Cewe • Małgorzata Krawczyk • Maria Kruk,
Alina Magryś-Walczak • Halina Nahorska

MATEMATYKA
i przykłady jej zastosowań

zakres podstawowy

Podręcznik 1

- licea ogólnokształcące
- technika

Podręcznik dla absolwentów ośmioletniej szkoły podstawowej

PODKOWA

Oznaczenia graficzne

- W niebieskiej ramce umieszczono treści odpowiadające definicjom lub twierdzeniom.

Przypomnijmy

- W pomarańczowej ramce umieszczono te treści, które powinny być znane z wcześniejszych lat nauki.

- Na szarym tle umieszczono uwagi, które są podsumowaniem ważnych treści; warto je zapamiętać.

- Na fioletowym tle umieszczono ćwiczenia przewidziane jako zadania domowe, ponieważ ich rozwiązanie wymaga większej ilości czasu niż inne.

- Na żółtym tle umieszczono zadania otwarte i zamknięte różnego rodzaju pod hasłem **Zestaw powtórkowy**.

-  Symbol zeszytu na marginesie oznacza, że przykłady z ćwiczenia lub zadania należy przepisać do zeszytu i rozwiązać je; **odpowiedzi do tych zadań i ćwiczeń nie należy wpisywać w podręczniku**.

- **6.32.** Na niebieskim tle umieszczono numery zadań o podwyższonym stopniu trudności.

- **2.48. D** Literka D przy numerze zadania oznacza zadanie na dowodzenie.

Skróty: *c.n.u.* – co należało uzasadnić (udowodnić),
c.n.w. – co należało wykazać,
c.k.d. – co kończy dowód.

Alicja Cewe, Małgorzata Krawczyk, Maria Kruk,
Alina Magryś-Walczak, Halina Nahorska

MATEMATYKA
i przykłady jej zastosowań

zakres podstawowy

Podręcznik 1

Wydawnictwo PODKOWA

Gdańsk

Autorki: Alicja Cewe, Małgorzata Krawczyk, Maria Kruk, Alina Magryś-Walczak, Halina Nahorska

Opracowanie edytorskie i redakcyjne: Alicja Cewe, Halina Nahorska, Alina Magryś-Walczak

Konsultacja polonistyczna: Beata Różańska

Projekt okładki: Alicja Cewe

Skład i ilustracje: Jarosław Mach

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr. Macieja Bryńskiego, mgr Elżbiety Krzysztofiak, dr hab. Elżbiety M. Kur.
Zakres kształcenia: podstawowy.
Etap edukacyjny: III.
Typ szkoły: szkoły ponadpodstawowe.
Rok dopuszczenia: 2019.

Numer ewidencyjny w wykazie: 1003/1/2019.

Podręcznik zgodny z podstawą programową kształcenia ogólnego w liceach ogólnokształcących i technikach – zakres podstawowy, określoną w rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz.U. z 2018 poz. 467.)

ISBN 978-83-65120-82-3

© Copyright by Wydawnictwo Podkowa
Gdańsk, ul. Paganiniego 17/17

Dystrybucja i zamówienia:

Skr. pocztowa 18, 80-460 Gdańsk 6
tel. 602 211 526, tel./fax 585 208 745 } dział zamówień i reklamacji

pinia@podkowa.gda.pl • www.podkowa.gda.pl

Spis treści

Wstęp 6

1. Zbiory, działania na nich i pojęcie funkcji 7

Zbiory i działania na nich 7
Część wspólna zbiorów (iloczyn zbiorów) . . 9
Suma zbiorów (złączenie zbiorów) 10
Różnica zbiorów 11
Zadania utrwalające 12
Przyporządkowanie jednoznaczne a pojęcie funkcji 13
Zadania utrwalające 16

2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym . . . 18

Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym 21
Zadania utrwalające 24
Sinus i cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym 26
Zadania utrwalające 29
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60° 31
Zadania utrwalające 34
Odczytywanie wartości funkcji trygonometrycznych z tablic 35
Zadania utrwalające 38
Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych . . 38
Zadania utrwalające 39
Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego 41
Zadania utrwalające 43
Zestaw powtórkowy 44

3. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory 46

Liczby naturalne 46
Zadania utrwalające 52
Liczby całkowite 53
Zadania utrwalające 55
Liczby wymierne 56
Zadania utrwalające 61
Liczby niewymierne 62
Zadania utrwalające 64
Liczby rzeczywiste 65
Zadania utrwalające 67
Przedziały liczbowe 69
Zadania utrwalające 72
Działania na przedziałach liczbowych 74
Zadania utrwalające 76
Zestaw powtórkowy 77

4. Potęgowanie, pierwiastkowanie i logarytmowanie 79

Potęga o wykładniku całkowitym 79
Zadania utrwalające 82
Pierwiastki kwadratowe i pierwiastki sześcienne 83
Zadania utrwalające 86
Pierwiastki stopnia n i działania na nich . . . 88
Zadania utrwalające 92
Potęga o wykładniku wymiernym 94
Zadania utrwalające 97
Pojęcie logarytmu 99
Zadania utrwalające 103
Logarytm iloczynu, ilorazu oraz logarytm potęgi 104
Zadania utrwalające 106
Przykłady zastosowań potęg i logarytmów 108
Zadania utrwalające 111
Zestaw powtórkowy 112

5. Wzory skróconego mnożenia 114
Kwadrat sumy i kwadrat różnicy dwóch wyrażeń 114
Zadania utrwalające 117
Różnica kwadratów dwóch wyrażeń 118
Zadania utrwalające 120
Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia 122
Zadania utrwalające 127
Zestaw powtórkowy 128

6. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą 130
Równanie liniowe z jedną niewiadomą ... 132
Zadania utrwalające 137
Nierówność liniowa z jedną niewiadomą . 139
Zadania utrwalające 143
Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania nierówności liniowych ... 145
Zadania utrwalające 147
Równania z wartością bezwzględną 148
Zadania utrwalające 152
Nierówności z wartością bezwzględną ... 153
Zadania utrwalające 155
Zestaw powtórkowy 156

7. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi 158
Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi 158
Zadania utrwalające 160
Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi 160
Zadania utrwalające 164
Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania układów równań liniowych 167
Zadania utrwalające 169
Zestaw powtórkowy 170

8. Funkcja i jej własności 173
Sposoby określania funkcji 173
Ciąg liczbowy 176
Zadania utrwalające 178
Dziedzina i zbiór wartości funkcji 180
Zadania utrwalające 184
Miejsce zerowe i znak funkcji w przedziale 186
Zadania utrwalające 188
Monotoniczność funkcji 190
Zadania utrwalające 192
Wartość najmniejsza i największa funkcji w przedziale domkniętym 193
Zadania utrwalające 195
Zestaw powtórkowy 196

9. Funkcja liniowa i jej własności 198
Wzór i wykres funkcji liniowej 198
Zadania utrwalające 200
Interpretacja współczynników liczbowych we wzorze funkcji liniowej 201
Zadania utrwalające 205
Miejsce zerowe i znak funkcji liniowej ... 206
Zadania utrwalające 210
Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej 211
Zadania utrwalające 213
Przykłady funkcji liniowych określonych w różnych przedziałach różnymi wzorami 215
Zadania utrwalające 217
Funkcja liniowa w zastosowaniach 218
Zadania utrwalające 222
Zestaw powtórkowy 224

10. Funkcja $f(x)=\frac{a}{x}$ i wielkości odwrotnie proporcjonalne 226
Wykres i własności funkcji określonej wzorem $f(x)=\frac{a}{x}$ 226
Zadania utrwalające 230
Wielkości odwrotnie proporcjonalne 231
Zadania utrwalające 235
Zestaw powtórkowy 237

11. Równania kwadratowe 239
Równania kwadratowe niezupełne 240
Zadania utrwalające 242
Równanie kwadratowe zupełne a wzory skróconego mnożenia 243
Zadania utrwalające 245
Wyróżnik równania kwadratowego i liczba jego pierwiastków 246
Zadania utrwalające 248
Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania równań kwadratowych ... 250
Zadania utrwalające 252
Zestaw powtórkowy 253

12. Funkcja kwadratowa 254
Wykres i własności funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2$ 254
Zadania utrwalające 258
Postać kanoniczna funkcji kwadratowej 260
Zadania utrwalające 265
Postać kanoniczna a postać ogólna funkcji kwadratowej 267
Zadania utrwalające 269
Miejsca zerowe funkcji kwadratowej i jej postać iloczynowa 271
Zadania utrwalające 275
Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym .. 276
Zadania utrwalające 279
Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie informacji o niej 281
Zadania utrwalające 283
Funkcja kwadratowa w zastosowaniach .. 286
Zadania utrwalające 291
Zestaw powtórkowy 293

Wskazówki i odpowiedzi 295
1. Liczby rzeczywiste i działania na nich 295
2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym 295
3. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory 297
4. Potęgowanie, pierwiastkowanie i logarytmowanie 299
5. Wyrażenia algebraiczne i wzory skróconego mnożenia 302
6. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą 303
7. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi 306
8. Funkcja i jej własności 307
9. Funkcja liniowa i jej własności 309
10. Funkcja $f(x)=\frac{a}{x}$ i wielkości odwrotnie proporcjonalne 312
11. Równania kwadratowe 313
12. Funkcja kwadratowa 315

Wstęp

Umieć matematykę to między innymi wiedzieć, jak w codziennym życiu korzystać z jej dobrodziejstw.

Książka „**Podręcznik 1 – zakres podstawowy**" z serii **Matematyka i przykłady jej zastosowań** jest podręcznikiem dla liceum ogólnokształcącego i technikum. Jest w niej wystarczająca liczba zadań i ćwiczeń, by poznać realizowane treści, a tym samym nabyć umiejętności wymienione w podstawie programowej określonej w rozporządzeniu z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz. U. z 2017 r., poz. 59, 949 i 2203).

W końcowej części każdego realizowanego tematu lekcji zamieszczono zadania pozwalające na utrwalenie przerobionego materiału.
Odpowiedzi do zadań utrwalających znajdują się na ostatnich stronach książki. Odpowiedzi do ćwiczeń są umieszczone przed każdym zestawem zadań utrwalających na końcu każdego podrozdziału (w fioletowej ramce).

Przy rozwiązywaniu problemów można korzystać z dostępnych narzędzi i technologii informatycznych, czyli encyklopedii, tablic matematycznych, kalkulatorów i komputerów.

Życzymy powodzenia,

Autorki

1. Zbiory, działania na nich i pojęcie funkcji

Zbiory i działania na nich

Punktem wyjścia do definiowania wielu nowych pojęć w matematyce jest pojęcie zbioru. Mówimy o zbiorze uczniów w szkole, zbiorze samochodów na parkingu, zbiorze książek na półce, zbiorze rozwiązań równania itp. Jednak gdy ktoś nas zapyta, co to jest zbiór, to nie udzielimy ścisłej odpowiedzi.

Zbiór to **pojęcie pierwotne**, czyli takie, którego nie definiujemy.

Zbiory będziemy oznaczać dużymi literami alfabetu, np.: A, B, C, T, X, ...

Elementy zbioru będziemy oznaczać małymi literami alfabetu, np.: a, b, x, y, ...

Zbiór A o elementach a, b, c ma zapis symboliczny $A=\{a,\ b,\ c\}$.

Stwierdzenie, że:

- a jest elementem zbioru A *zapisujemy* $a \in A$ i *czytamy* „a **należy** do A”.
- a nie jest elementem zbioru A *zapisujemy* $a \notin A$ i *czytamy* „a **nie należy** do A”.

Zbiór określamy, podając jego elementy lub opisując warunki, które te elementy spełniają, np. **zbiór dni tygodnia A = {poniedziałek, wtorek, środa, czwartek, piątek, sobota, niedziela}**.

Przykład 1. Podaj przykład dwóch liczb, które są elementami zbioru B takiego, że $B=\{-3,\ 0,\ 1,\ 5\}$, oraz przykład liczby, która do zbioru B nie należy.

Rozwiązanie. Liczba 1 jest elementem zbioru B, co zapisujemy $1 \in B$,
liczba 5 jest elementem zbioru B, co zapisujemy $5 \in B$,
liczba 3 nie jest elementem zbioru B, co zapisujemy $3 \notin B$.

Ćwiczenie 1. Które spośród liczb $-4, -1, 0, 2, 4$ są, a które nie są elementami zbioru A takiego, że $A=\{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$?

Ze względu na liczbę elementów rozróżniamy zbiory skończone i nieskończone.

Zbiór skończony to zbiór, którego liczba elementów jest równa pewnej liczbie naturalnej n, np. zbiór uczniów w twojej szkole.

Zbiór pusty (oznaczamy go symbolem $\emptyset$) to zbiór skończony, który nie ma żadnego elementu, np. zbiór liczb rzeczywistych spełniających równanie $x^2=-3$.

Zbiór nieskończony to zbiór, który nie jest skończony (ma nieskończenie wiele elementów), np. zbiór liczb naturalnych.

W matematyce szczególnie ważną rolę odgrywają te zbiory, których elementami są liczby. Nazywamy je **zbiorami liczbowymi**.

Uwaga. Jeżeli wypisujemy elementy zbioru nieskończonego, to zwykle piszemy kilka kolejnych elementów, a w miejsce pozostałych wstawiamy wielokropek, np.:
- zbiór liczb naturalnych parzystych: $\{0, 2, 4, 6, ...\}$,
- zbiór liczb całkowitych ujemnych: $\{..., -4, -3, -2, -1\}$.

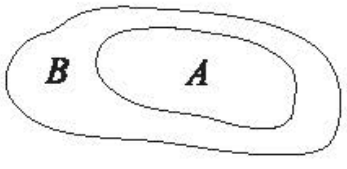
Ćwiczenie 2. Spośród zbiorów A, B, C, D i E takich, że:
- A to zbiór wszystkich liczb naturalnych nie większych niż 5,
- B to zbiór wszystkich naturalnych dzielników liczby 12,
- C to zbiór wszystkich potęg liczby 3 o wykładnikach naturalnych,
- D to zbiór wszystkich liczb x spełniających warunek $|x| < 0$,
- E to zbiór wszystkich liczb x spełniających równanie $2x + 1 = 0$,

wybierz ten, który jest:

a) zbiorem skończonym, **b)** zbiorem nieskończonym,

c) zbiorem pustym, **d)** zbiorem jednoelementowym.

Zbiór A zawiera się w zbiorze B (co zapisujemy $A \subset B$), gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B. Zbiór A nazywamy **podzbiorem zbioru B**.



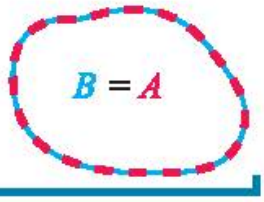
Uwaga
- Każdy zbiór jest jednocześnie swoim podzbiorem, bo każdy element zbioru A jest elementem zbioru A.
- Przyjmujemy, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru.

$A \subset A$
$\emptyset \subset A$

Ćwiczenie 3. Określ relacje zawierania się zbiorów A, B, C i D, gdy:
A – zbiór trapezów, B – zbiór równoległoboków,
C – zbiór prostokątów, D – zbiór rombów.

Jeżeli $A \subset B$ i $B \subset A$, to $A = B$.

$A \subset B$ i $B \subset A$



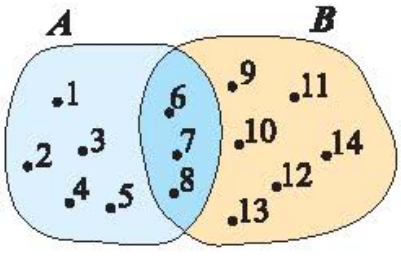
Na zbiorach wykonujemy działania. Wyznaczamy iloczyn (inaczej część wspólną), sumę (inaczej złączenie) i różnicę zbiorów. Pojęcia te wyjaśnimy na przykładzie.

Przykład 2. Czternastu uczniów klasy Ia w ramach zajęć pozalekcyjnych uprawia pływanie lub grę w piłkę nożną. Wiadomo też, że uczeń może uprawiać obie te dyscypliny. W dzienniku zajęć pozalekcyjnych uczniowie uprawiający pływanie są zapisani na liście od numeru 1 do 8, natomiast uprawiający piłkę nożną zapisani są od numeru 6 do 14.

Pisząc **1**, *mamy na myśli* **Alę**,
pisząc **8**, *mamy na myśli* **Pawła**,
pisząc **14**, *mamy na myśli* **Tadka** itd.

Opisaną sytuację przedstawiamy graficznie.



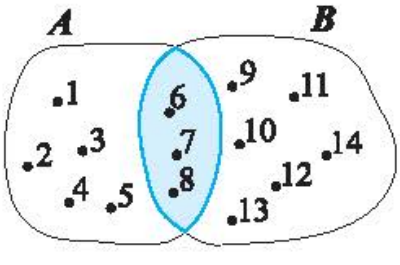


Oznaczenie: A – zbiór uczniów uprawiających pływanie,
B – zbiór uczniów uprawiających piłkę nożną.

Część wspólna zbiorów (iloczyn zbiorów)

Analizując zawarte w przykładzie 2. informacje o uczniach, zauważamy, że troje uczniów zapisanych pod numerami 6, 7 i 8 uprawia pływanie i grę w piłkę nożną.

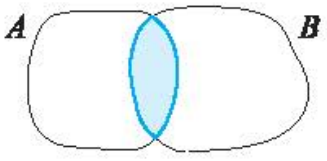
Mówimy, że zbiór uczniów uprawiających obie te dyscypliny sportowe jest częścią wspólną zbiorów A i B, co zapisujemy $A \cap B = \{6, 7, 8\}$.



Częścią wspólną zbiorów A i B (iloczynem zbiorów A i B) nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Część wspólną zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

$x \in A \cap B$ *oznacza, że* $x \in A$ i $x \in B$

Do części wspólnej zbiorów A i B należą te elementy, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Część wspólną zbiorów A i B można zilustrować za pomocą rysunku.



$A \cap B$

Ćwiczenie 4. Wyznacz zbiór $A \cap B$, gdy:

a) $A = \{-7,\ -3,\ 1,\ 6\}$, $B = \{-3,\ 0,\ 3\}$, **b)** $A = \{\pi,\ \sqrt{3},\ 13\}$, $B = \left\{\frac{1}{3},\ \sqrt{2}\right\}$,

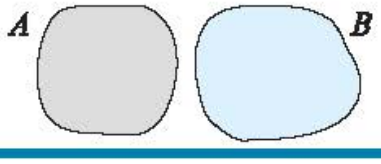
c) $A = \{a,\ b,\ k,\ x\}$, $B = \{b,\ x\}$.

Przykład 3. Wyznacz zbiór $A \cap B$, gdy: A – zbiór liczb całkowitych dodatnich,
B – zbiór liczb całkowitych ujemnych.

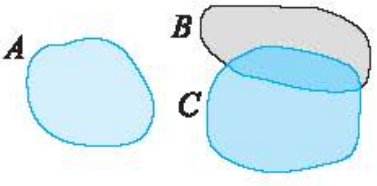
Rozwiązanie. Nie ma liczb, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Zbiory te nie mają elementów wspólnych. Mówimy o nich, że są rozłączne. Ich wspólna część jest zbiorem pustym, co zapisujemy $A \cap B = \varnothing$.

Dwa zbiory, których wspólna część jest zbiorem pustym, nazywamy **rozłącznymi**.

$A \cap B = \varnothing$



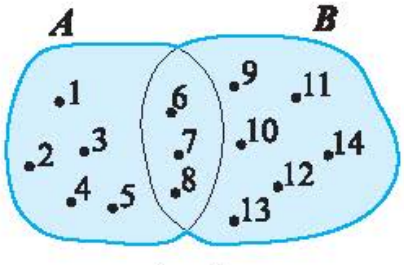
Ćwiczenie 5. Wypisz pary zbiorów rozłącznych przedstawionych na rysunku.



Suma zbiorów (złączenie zbiorów)

Zbiór uczniów uprawiających co najmniej jedną z dyscyplin sportowych z przykładu 2. jest sumą zbiorów A i B, co zapisujemy

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.



$A \cup B$

Sumą dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór tych wszystkich elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B. Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

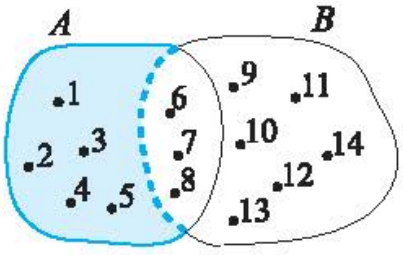
$x \in A \cup B$ *oznacza, że* $x \in A$ lub $x \in B$.

Ćwiczenie 6. Wyznacz sumę zbiorów A i B, gdy:

a) $A = \{-3, 0, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, **b)** $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$.

Różnica zbiorów

Jeżeli spośród uczniów klasy Ia z przykładu 2., uprawiających pływanie lub grę w piłkę nożną, wszyscy trenujący grę w piłkę nożną wyjechali na zgrupowanie, to zbiór uczniów, którzy pozostali w szkole, zapisujemy symbolicznie i jest on różnicą zbiorów A i B.



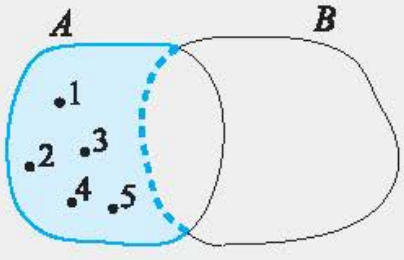
$A \setminus B$

Różnicą dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Różnicę zbiorów A i B oznaczamy $A \setminus B$.

$x \in A \setminus B$ *oznacza, że* $x \in A$ i $x \notin B$.

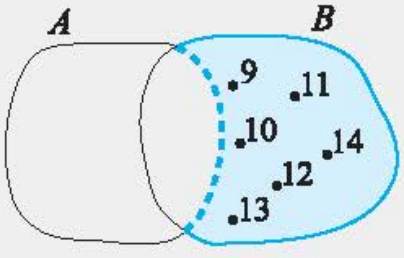
Uwaga. Dla zbiorów A i B z przykładu 2. możemy określić dwie różnice: $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

$A \setminus B$ – zbiór uczniów, którzy uprawiają tylko pływanie,



$A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B \setminus A$ – zbiór uczniów, którzy uprawiają tylko piłkę nożną.



$B \setminus A = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

Ćwiczenie 7. Wiedząc, że $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, wyznacz różnice zbiorów: $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus B$.

Przykład 4. Zbiór A jest zbiorem trójkątów prostokątnych, a zbiór B zbiorem trójkątów równoramiennych. Nazwij trójkąty należące odpowiednio do zbiorów: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Rozwiązanie

Do zbioru $A \cap B$ należą trójkąty prostokątne równoramienne,

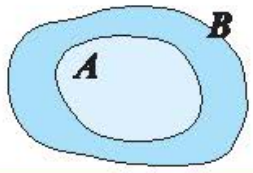
do zbioru $A \cup B$ należą trójkąty prostokątne lub równoramienne,

do zbioru $A \setminus B$ należą trójkąty prostokątne, które nie są równoramienne,

do zbioru $B \setminus A$ należą trójkąty równoramienne, które nie są prostokątne.

Jeżeli $A \subset B$, to różnicę $B \setminus A$ nazywamy dopełnieniem zbioru A do zbioru B.

$B \setminus A$



Ćwiczenie 8. Zbiór X jest zbiorem wszystkich trójkątów, A – zbiorem trójkątów ostrokątnych, B – zbiorem trójkątów prostokątnych, C – zbiorem trójkątów rozwartokątnych. Nazwij trójkąty należące odpowiednio do zbioru: **a)** $X \setminus A$, **b)** $X \setminus B$, **c)** $X \setminus C$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. $-4 \notin A$, $-1 \in A$, $0 \in A$, $2 \in A$, $4 \notin A$. 2. **a)** A, B, E, **b)** C, **c)** D, **d)** E. 3. $B \subset A$, $D \subset A$, $C \subset A$, $C \subset B$, $D \subset B$. 4. **a)** $\{-3\}$, **b)** $\emptyset$, **c)** $\{b, x\}$. 5. $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$. 6. **a)** $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$, **b)** $\{-1, 0, 1, 2\}$. 7. $A \setminus B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B \setminus A = \emptyset$, $B \setminus C = B$, $C \setminus B = C$.

8. **a)** Trójkąty rozwartokątne lub prostokątne, **b)** trójkąty rozwartokątne lub ostrokątne, **c)** trójkąty ostrokątne lub prostokątne.

Zadania utrwalające

1.1. Określ, jakim zbiorem, skończonym czy nieskończonym, jest zbiór A, gdy:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$,
b) $A = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$,
c) $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...\}$,
d) $A = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$.

1.2. Wypisz niepuste podzbiory trójelementowego zbioru liter $\{a, b, c\}$. Ile podzbiorów otrzymałaś(eś)? Czy pamiętałaś(eś), że każdy zbiór jest swoim podzbiorem?

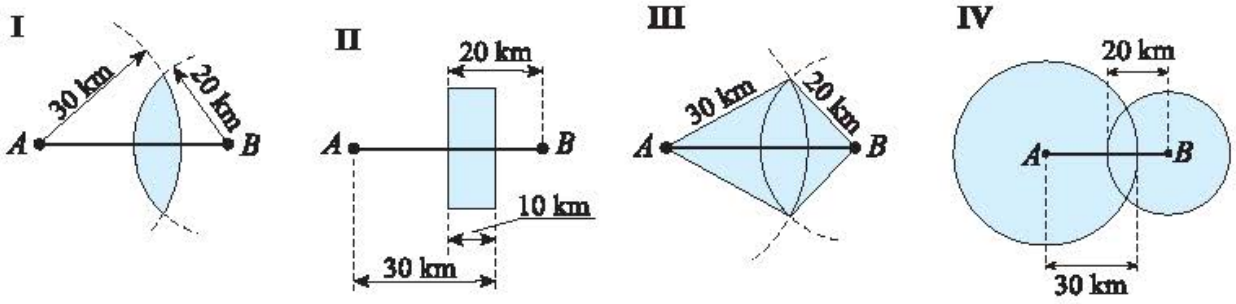
1.3. W supermarkecie na półce znajdują się 234 opakowania płynów do prania, w tym 157 do prania wyłącznie w pralkach automatycznych i 97 do prania ręcznego. Czy wśród wszystkich opakowań są płyny, które można stosować do prania ręcznego i do prania w pralce automatycznej? Ile jest takich płynów?

1.4. Z klasy liczącej 32 uczniów na wakacje wyjechali wszyscy. Osiemnastu wyjechało do rodziny, a dwudziestu czterech poza województwo, w którym mieszkają. Ilu uczniów spędziło wakacje u rodziny mieszkającej poza województwem?

1.5. Wiedząc, że zbiór A jest zbiorem liczb całkowitych nie mniejszych niż –2 i mniejszych niż 5, a zbiór B zbiorem liczb naturalnych nie większych niż 7, wypisz elementy zbioru:

a) A, **b)** B, **c)** $A \cup B$, **d)** $A \cap B$, **e)** $A \setminus B$, **f)** $B \setminus A$.

1.6. Stacje radiowe A i B położone są w odległości 40 km od siebie. Audycje nadawane przez stację A mogą być odbierane w promieniu 30 km od niej, zaś audycje nadawane przez stację B w promieniu 20 km od niej.



Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Rejon zasięgu obu stacji radiowych jednocześnie przedstawiono na rysunku:

A. I, **B.** II.

Rejon zasięgu co najmniej jednej z tych stacji przedstawiono na rysunku:

C. III, **D.** IV.

1.7. Wiedząc, że:

- X to zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych,
- A to zbiór parzystych liczb naturalnych dwucyfrowych,
- B to zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 3,
- C to zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6,

opisz słowami zbiór:

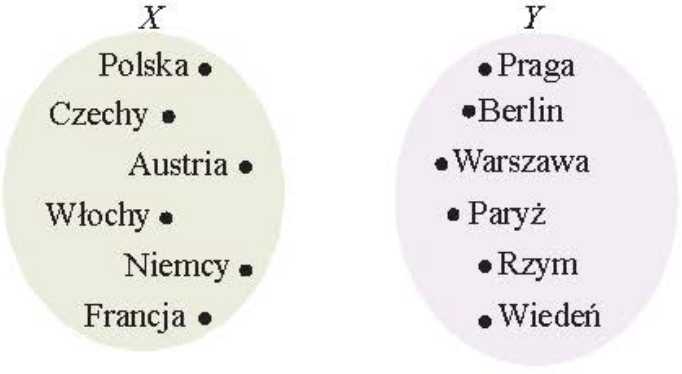
a) $A \cup B$, **b)** $B \cap C$, **c)** $X \cap C$, **d)** $X \setminus A$, **e)** $X \cup C$.

Przyporządkowanie jednoznaczne a pojęcie funkcji

Ludzie komunikując się między sobą, z reguły używają zdań. Zdania mogą określać przyporządkowanie między dwoma zbiorami.

Ćwiczenie 9. Zbiorowi państw: Polska, Czechy, Austria, Włochy, Niemcy i Francja przyporządkowano zbiór jego stolic. Na rysunku przedstawiono dwa zbiory X i Y.

Przerysuj do zeszytu i połącz strzałkami każde państwo i jego stolicę.



Zauważ, że każdemu elementowi ze zbioru X, czyli każdemu państwu, przyporządkowano dokładnie jeden element ze zbioru Y, czyli jego stolicę.

Tak uzyskane przyporządkowanie nazywamy **funkcją**.

Przykład 5. *Marek na spotkaniu z kolegami i koleżankami powiedział:*

– W mojej grupie nie ma ocen niedostatecznych na koniec pierwszego semestru z matematyki.

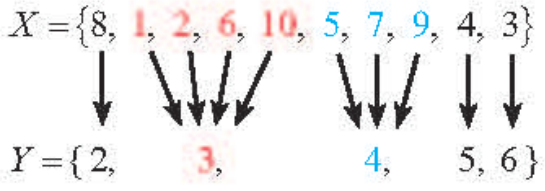
Oceny semestralne dziesięcioosobowej grupy uczniów, którzy w dzienniku lekcyjnym są zapisani pod numerami od 1 do 10, przedstawiono w tabeli.

Numer z dziennika pod którym uczeń jest zapisany [x] (numer ucznia w dzienniku)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ocena [y]	3	3	6	5	4	3	4	2	4	3

Zmienna x przybiera wartości ze zbioru kolejnych liczb naturalnych od 1 do 10.

Zmienna y przybiera wartości ze zbioru pięcioelementowego: 2, 3, 4, 5, 6.

Zobrazujemy to strzałkami poprowadzonymi od liczb odpowiadających uczniom do liczb oznaczających stopnie.



Zauważamy, że każdemu uczniowi z Marka grupy przyporządkowana została w sposób **jednoznaczny** ocena semestralna.

Zbiór X nazywamy dziedziną tego przyporządkowania (funkcji), a zbiór Y nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Ćwiczenie 10. Określ, czy podane zdanie jest funkcją. Jeśli tak, to podaj jej dziedzinę X i zbiór wartości Y.

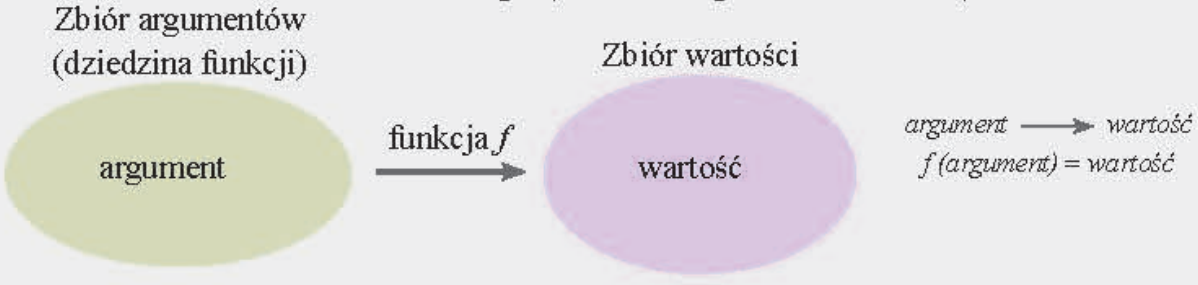
a) Każdy Polak ma swój numer PESEL.

b) Każdy człowiek ma (bądź miał) dziadka.

c) Każdy człowiek ma swój kod DNA.

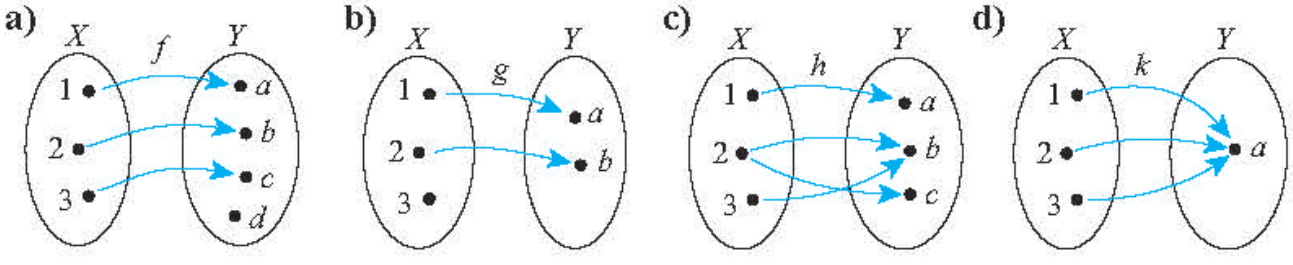
Uwaga. **Jednoznaczne przyporządkowanie** w matematyce **nazywamy funkcją**.

- Funkcja przyporządkowuje każdemu elementowi jednego zbioru tylko jeden element drugiego zbioru.
  Pierwszy zbiór nazywa się **dziedziną funkcji**, a drugi jest zbiorem zawierającym **zbiór wartości funkcji**.
- **Funkcje w matematyce** najczęściej oznaczamy:
  – **małymi literami alfabetu**, np.: *f*, *w*, *g*, *h*, *s*, *t*, *u*,
  – słowami albo ich skrótami, np.: tg (skrót od *tangens*),
  sgn (skrót od *signum* – łac. *znak*).



Przyporządkowanie funkcyjne między zbiorami X i Y możemy krótko zapisać $y = f(x)$.

Przykład 6. Określ, czy graf przedstawiony na rysunku spełnia warunek: „każdemu elementowi ze zbioru X odpowiada dokładnie jeden element ze zbioru Y". Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązanie

a) Tak, bo $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, czyli przyporządkowanie f jest jednoznaczne.

b) Nie, bo $g(3)$ nie ma wartości.

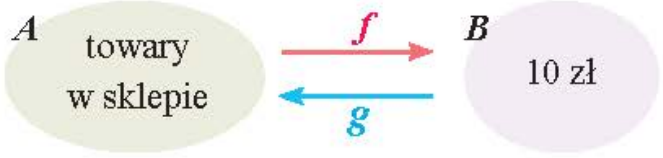
c) Nie, bo $h(2) = b$ i $h(2) = c$, czyli argumentowi 2 przyporządkowane są aż dwie wartości.

d) Tak, bo $k(1) = a$, $k(2) = a$, $k(3) = a$, czyli przyporządkowanie k jest jednoznaczne.

Odp.: **a)** Tak, **b)** nie, **c)** nie, **d)** tak.

Ćwiczenie 11. Określ, czy jeżeli elementom ze zbioru Y przyporządkujemy elementy zbioru X z przykładu 6. a), b), c), d), to przyporządkowanie będzie funkcją. Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 12. W witrynie sklepu „Ciucholand" widnieje napis reklamowy: ***Dziś wszystko po 10 zł!*** Określ, czy przyporządkowanie f i g jest funkcją, gdy A to zbiór towarów w „Ciucholandzie", a B to zbiór cen.

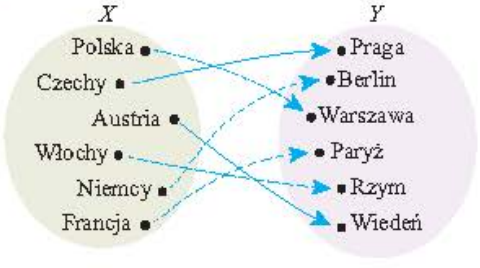


Ćwiczenie 13. **a)** Uzasadnij, że nie jest funkcją przyporządkowanie, które do każdego dnia tygodnia przyporządkowuje człowieka, który się w tym dniu urodził.

b) Czy przyporządkowanie, które każdemu człowiekowi przyporządkowuje dzień tygodnia w którym się urodził, jest funkcją? Jeśli tak, to określ jej dziedzinę i zbiór wartości.

Odpowiedzi do ćwiczeń

9.



10. **a)** Tak, X – zbiór Polaków, Y – zbiór numerów PESEL,
b) nie, bo jeden człowiek ma dwóch dziadków,
c) tak, X – zbiór ludzi, Y – zbiór kodów DNA.

11. **a)** Nie, bo elementowi d nie jest przyporządkowana żadna wartość, **b)** tak, **c)** nie, bo elementowi b są przyporządkowane dwie wartości, **d)** nie, bo elementowi a są przyporządkowane trzy wartości.

12. Przyporządkowanie f jest funkcją, bo każda sztuka towaru ma stałą wartość 10 zł. Przyporządkowanie g nie jest funkcją, bo elementowi 10 zł odpowiada wiele towarów.

13. **a)** *Wskazówka.* Zauważ, że np. środa może być dniem urodzin wielu ludzi.

Zadania utrwalające

1.8. Określ, czy funkcją jest przyporządkowanie, które:

a) człowiekowi przyporządkowuje jego wagę,
b) matce przyporządkowuje jej dziecko,
c) dziecku przyporządkowuje jego ojca biologicznego,
d) drzewu przyporządkowuje jego liść,
e) jabłku przyporządkowuje jabłoń.
f) piosence przyporządkowuje jej wykonawcę.

1.9. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jednoznaczne jest przyporządkowanie, które:

A. dniu tygodnia przyporządkowuje datę,
B. dacie przyporządkowuje dzień tygodnia,

Nie jest funkcją przyporządkowanie, które:

C. miastu przyporządkowuje liczbę jego mieszkańców,

D. liczbie mieszkańców przyporządkowuje miasto.

1.10. Określ, czy funkcją jest przyporządkowanie, które:

a) liczbie boków wielokąta przyporządkowuje liczbę jego przekątnych,

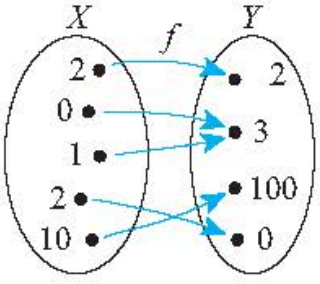
b) długości boku kwadratu przyporządkowuje jego pole,

c) liczbie boków wielokąta przyporządkowuje sumę miar jego kątów wewnętrznych,

d) każdej liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną.

1.11. Pewną funkcję f przedstawiono w postaci grafu.
Popraw tabelę tak, aby funkcja f była zgodna z przedstawieniem jej w postaci grafu.

x	-2	0	1	2	10
y	-2	3	0	100	100

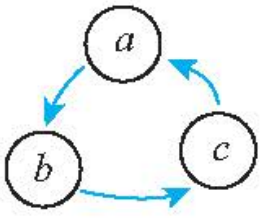


1.12. Określ, które z przyporządkowań jest funkcją, gdy:

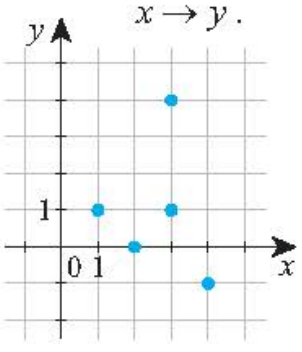
a) $x \to y$,

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

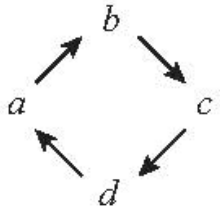
b)



c) $x \to y$.



1.13. Elementom zbioru $A = \{a, b, c, d\}$ przyporządkowano elementy zbioru A w sposób pokazany na grafie. Przyporządkowanie to nazwano p. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ▭ wpisz odpowiedni element zbioru A.



$p(a) = $ ▭, $p(b) = $ ▭, $p(c) = $ ▭, $p(d) = $ ▭.

1.14. Między podanymi zbiorami określ funkcję.

a) A – zbiór liczb stron, B – zbiór książek,

b) C – zbiór samochodów, D – zbiór numerów podwozi samochodów,

c) E – zbiór numerów butów, F – zbiór ludzi,

d) G – zbiór pierwszych imion ludzi, H – zbiór ludzi.

2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Słowo „trygonometria" jest zaczerpnięte z języka greckiego i oznacza mierzenie trójkątów. Ta dziedzina matematyki zajmuje się opisywaniem związków między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów. Znajomość tych związków wykorzystują geodeci, architekci, a także specjaliści innych dziedzin (np. fizyki, geografii, astronomii itp.).

Przyporządkowania kątom ostrym w trójkącie prostokątnym stosunków długości odpowiednich jego boków są jednoznaczne, dlatego zyskały one nazwy funkcji trygonometrycznych. Nim poznamy definicje funkcji trygonometrycznych, określimy pojęcia **odcinków proporcjonalnych** i **podobieństwa trójkątów**.

- **Stosunkiem odcinków** AB i CD nazywamy liczbę, która jest ilorazem długości tych odcinków mierzonych tą samą jednostką długości, co zapisujemy $\frac{|AB|}{|CD|}$.
- **Odcinki** A_1B_1 i C_1D_1 **nazywamy proporcjonalnymi** do odcinków AB i CD wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{|A_1B_1|}{|AB|}=\frac{|C_1D_1|}{|CD|}$.

Na przykład: Odcinki o długościach

$$|A_1B_1|=12,8 \quad \text{i} \quad |C_1D_1|=48,4$$

są proporcjonalne do odcinków o długościach

$$|AB|=32 \quad \text{i} \quad |CD|=121, \quad \text{ponieważ}$$

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|}=\frac{12,8}{32}=\frac{2}{5} \quad \text{i} \quad \frac{|C_1D_1|}{|CD|}=\frac{48,4}{121}=\frac{2}{5}.$$

Zatem $\frac{|A_1B_1|}{|AB|}=\frac{|C_1D_1|}{|CD|}$.

Trójkąty nazywamy podobnymi, jeżeli miary kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich kątów drugiego trójkąta i boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta.

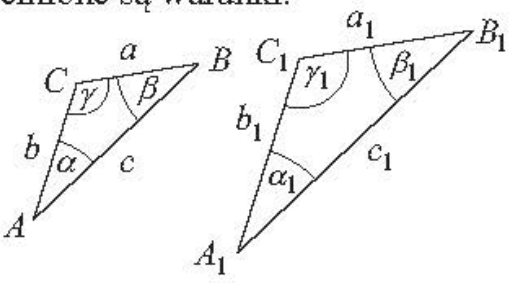
- Zapis $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ *czytamy* trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$.

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$, gdy spełnione są warunki:

1 $\alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1$ oraz

2 $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$, gdzie $k > 0$, skąd

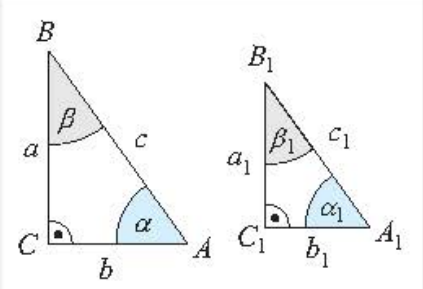
$a = ka_1,\ b = kb_1,\ c = kc_1.$



Uwaga

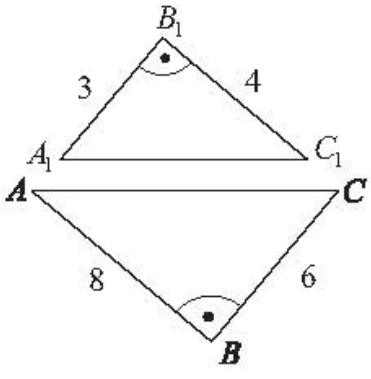
Dwa trójkąty prostokątne są podobne, gdy:

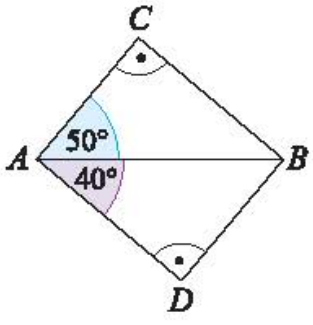
- jeden z kątów ostrych w obu trójkątach ma tę samą miarę, czyli np. $\alpha = \alpha_1$ lub $\beta = \beta_1$,
- stosunek długości dwóch boków jednego trójkąta jest równy stosunkowi długości odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta, np. $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1},\ \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1},\ \frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$.

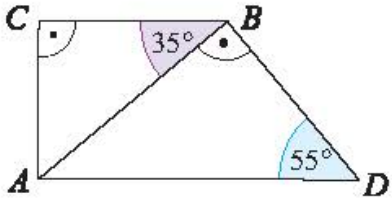


Ćwiczenie 1. Uzasadnij, że:

a) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, b) $\Delta ABC \sim \Delta ABD$, c) $\Delta ABC \sim \Delta ABD$.

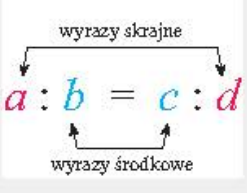




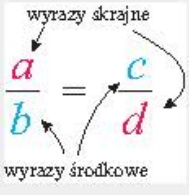


Uwaga

Proporcją nazywamy równość dwóch stosunków (równość dwóch ilorazów), co zapisujemy:



lub



- W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych:

$a : b = c : d$, więc $a \cdot d = b \cdot c$ lub $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, więc $a \cdot d = b \cdot c$.

- W proporcji można zamieniać „miejscami” wyrazy skrajne lub wyrazy środkowe.

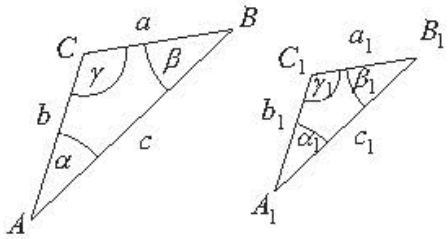
Zamiana wyrazów skrajnych:

jeżeli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.

Zamiana wyrazów środkowych:

jeżeli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Przykład 1. Przedstawione na rysunku trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ są podobne.



Wykaż, że $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}$ oraz $\frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}$.

Rozwiązanie

Z (***założenie***): $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$. | T (***teza***): $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}$ oraz $\frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}$.

Dowód: Z podobieństwa trójkątów ABC i $A_1B_1C_1$ wynika, że:

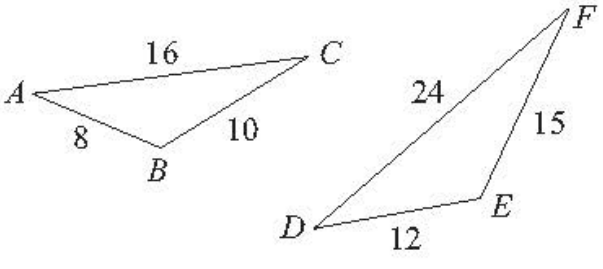
$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, skąd $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$, — *zamiana wyrazów środkowych*

$\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$, skąd $\frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1}$, — *zamiana wyrazów środkowych*

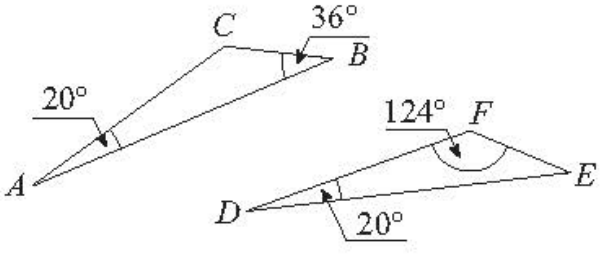
$\frac{a}{a_1}=\frac{c}{c_1}$, skąd $\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}$ ***c.n.w.*** — *zamiana wyrazów środkowych*

Ćwiczenie 2. Trójkąty ABC i DEF są podobne, czyli $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

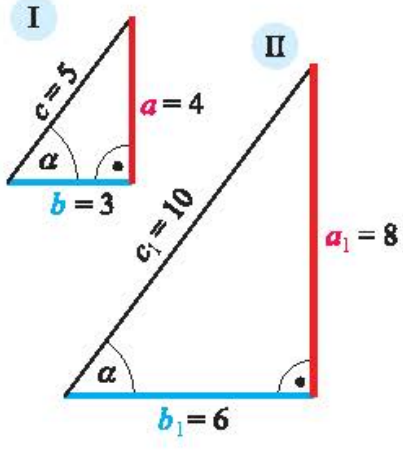
a) Wskaż pary kątów równych.



b) Wskaż pary boków proporcjonalnych.



Ćwiczenie 3. Trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją.

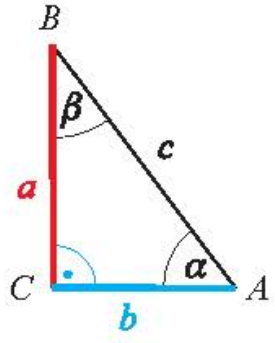


W trójkącie I	W trójkącie II	Zauważamy, że
$\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$	$\frac{a_1}{b_1}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$	$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$
$\frac{a}{c}=$	$\frac{a_1}{c_1}=$	$\frac{a}{c}=$
$\frac{b}{c}=$	$\frac{b_1}{c_1}=$	$\frac{b}{c}=$

W trójkątach prostokątnych podobnych o kącie ostrym α stosunki długości odpowiednich boków są równe. Stosunki te są wartościami pewnych funkcji, które nazywamy **funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α.**

Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Przypomnijmy



α, β – miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym, gdzie $\alpha + \beta = 90°$,

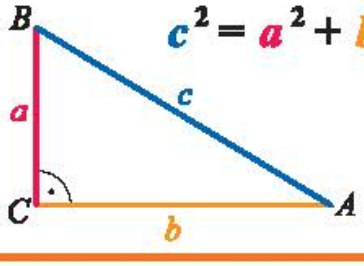
c – długość przeciwprostokątnej,

a – długość przyprostokątnej przeciwległej kątowi α (przyprostokątna przyległa do kąta β),

b – długość przyprostokątnej przyległej do kąta α (przyprostokątna przeciwległa do kąta β).

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



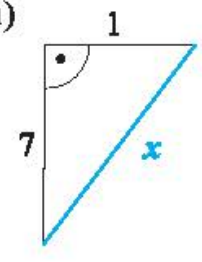


Pitagoras

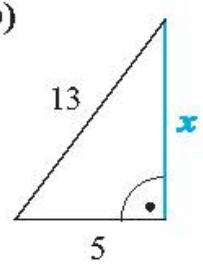
(ok. 572–497 p.n.e.)

Ćwiczenie 4. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość boku oznaczonego literą x.

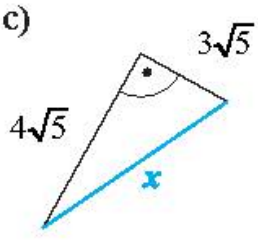
a)



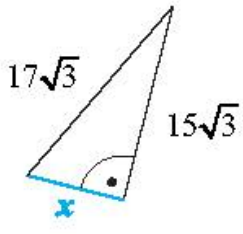
b)



c)



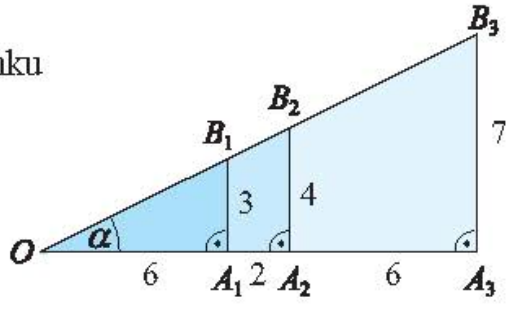
d)



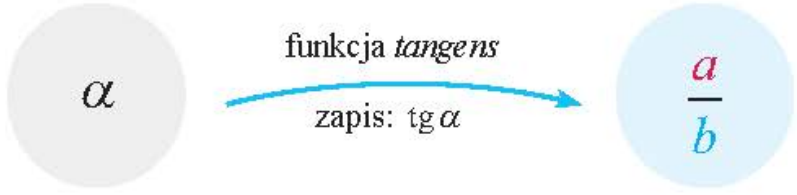
Ćwiczenie 5. Sprawdź, czy suma kwadratów dwóch pierwszych liczb jest równa kwadratowi trzeciej liczby: **a)** 2, 3, 4, **b)** 3, 4, 5, **c)** $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, **d)** 6, 8, 10, **e)** 12, 13, 14, **f)** 300, 400, 500.

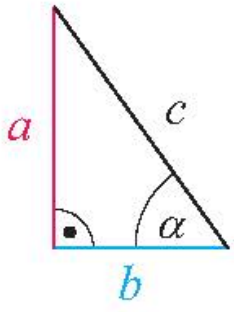
Ćwiczenie 6. Narysuj wszystkie przedstawione na rysunku trójkąty prostokątne o kącie ostrym α i oblicz:

$$\frac{|A_1B_1|}{|OA_1|}, \quad \frac{|A_2B_2|}{|OA_2|}, \quad \frac{|A_3B_3|}{|OA_3|}.$$



Jeśli w trójkącie prostokątnym przyporządkowujemy kątowi ostremu α liczbę, która jest stosunkiem długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do drugiej przyprostokątnej, to takie jednoznaczne przyporządkowanie jest funkcją trygonometryczną kąta ostrego, którą nazywamy **tangensem kąta α** (w skrócie **tg α**).

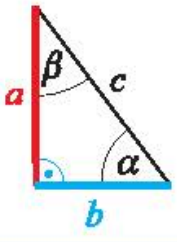




$\alpha > 0° \text{ i } \alpha < 90°$

$\frac{a}{b} > 0$

Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do długości drugiej przyprostokątnej.

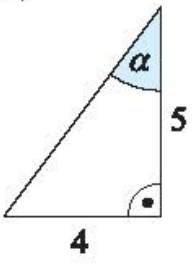


$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

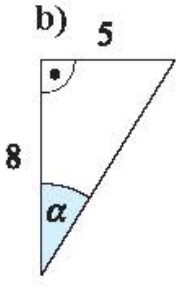
$\text{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$

Ćwiczenie 7. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz tangens kąta α.

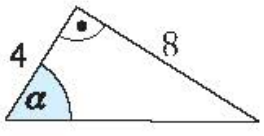
a)



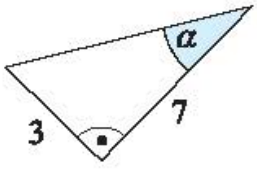
b)



c)

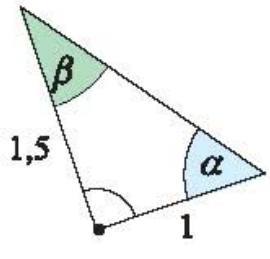


d)

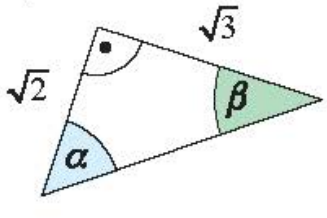


Ćwiczenie 8. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i oblicz tangens każdego z kątów ostrych trójkąta.

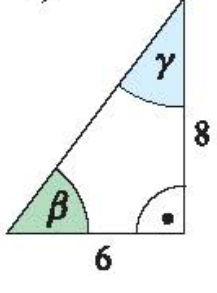
a)



b)

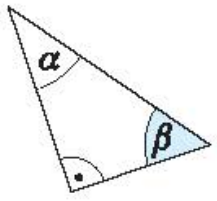


c)



Ćwiczenie 9. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego wierzchołki oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem trójkąta była prawdziwa oraz w miejsce ■ wpisz odpowiedni iloraz długości boków.

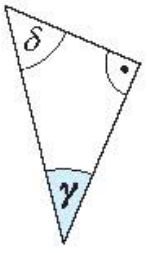
1



$\operatorname{tg}\beta = \frac{|AC|}{|BC|}$,

$\operatorname{tg}\alpha =$ ■.

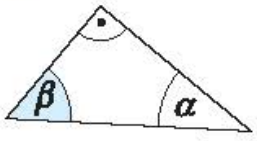
2



$\operatorname{tg}\gamma = \frac{|KL|}{|KM|}$,

$\operatorname{tg}\delta =$ ■.

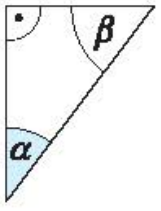
3



$\operatorname{tg}\beta = \frac{|HP|}{|GP|}$,

$\operatorname{tg}\alpha =$ ■.

4

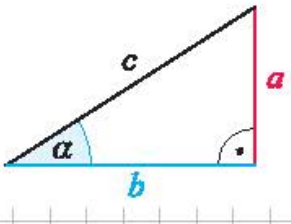


$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$,

$\operatorname{tg}\beta =$ ■.

Przykład 2. Zbuduj trójkąt prostokątny o kącie ostrym α takim, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$.
Ile jest takich trójkątów?

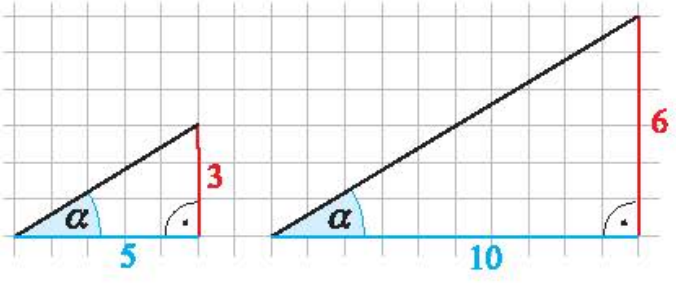
Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Z definicji $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$, więc $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

Z własności proporcji przy ustalonej jednostce możemy przyjąć np.:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 6 \\ b = 10 \end{cases} \text{ lub } \ldots .$$

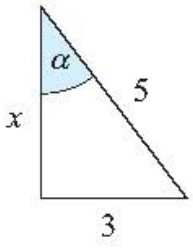


Konstruujemy kąt prosty i zgodnie z oznaczeniami na rysunku odkładamy na jego ramionach odcinki długości a oraz b, wykorzystując dowolną spośród wyżej podanych par liczb a i b. Trójkątów spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele.

Ćwiczenie 10. Zbuduj trójkąt prostokątny o kącie ostrym α takim, że:
a) $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}2$, **b)** $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

W trójkącie prostokątnym nie zawsze podane są długości przyprostokątnych. Często należy obliczyć ich długości, stosując twierdzenie Pitagorasa.

Ćwiczenie 11. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz $\operatorname{tg}\alpha$.



Odpowiedzi do ćwiczeń

1. Trójkąty są podobne, bo mają; **a)** boki proporcjonalne, **b), c)** po jednym kącie ostrym równym.

2. a) $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle FDE|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$, **b)** $\frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|}$.

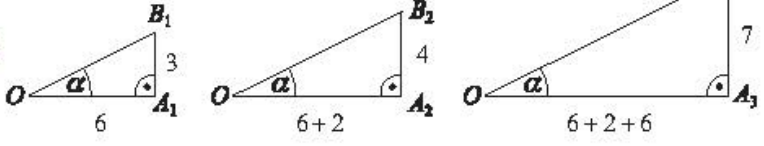
3.

W trójkącie I	W trójkącie II	Zauważamy, że
$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$	$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$
$\frac{a}{c} = \frac{4}{5}$	$\frac{a_1}{c_1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$	$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}$
$\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$	$\frac{b_1}{c_1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$

4. a) $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, **b)** $x = 12$, **c)** $x = 5\sqrt{5}$, **d)** $x = 8\sqrt{3}$.

5. Tak: **b), d), f)**, nie: **a), c), e)**.

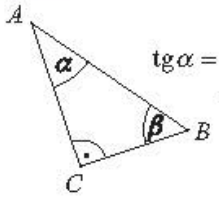
6.



$\frac{|A_1B_1|}{|OA_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|OA_2|} = \frac{|A_3B_3|}{|OA_3|} = \frac{1}{2}$.

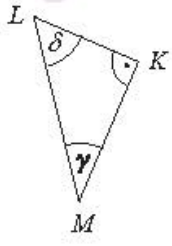
7. a) $\frac{4}{5}$, **b)** $\frac{5}{8}$, **c)** 2, **d)** $\frac{3}{7}$. **8. a)** $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$, **b)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$, **c)** $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{4}$.

9. **1**



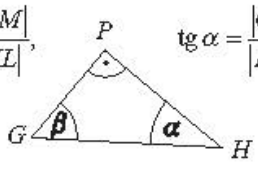
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$,

2



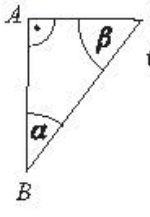
$\operatorname{tg}\delta = \frac{|KM|}{|KL|}$,

3



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|GP|}{|PH|}$,

4



$\operatorname{tg}\beta = \frac{|AB|}{|AC|}$.

11. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, gdzie $x = \sqrt{5^2 - 3^2}$.

Zadania utrwalające

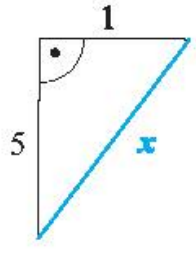
2.1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Trójkątem prostokątnym jest trójkąt o bokach mających długości:

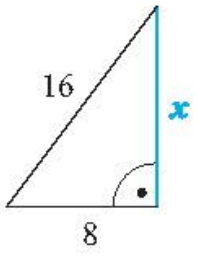
A. 2, 4, 6, **B.** $\sqrt{5}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, **C.** 10, 24, 26, **D.** 10, 15, 20.

2.2. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość boku oznaczonego literą x.

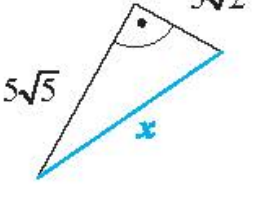
a)



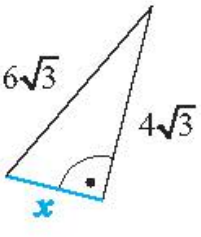
b)



c)



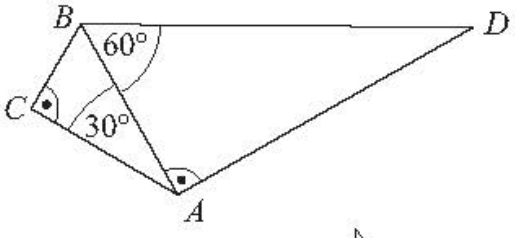
d)



2.3. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeżeli jest fałszywe. Wpisz odpowiedź do zeszytu i ją uzasadnij.*

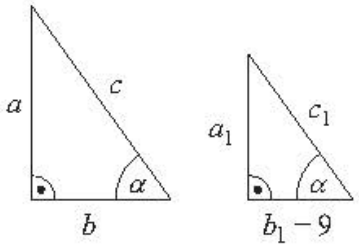
Każde dwa trójkąty przystające są podobne.	P	F
Trójkąt prostokątny o kącie ostrym 17° nie jest podobny do trójkąta prostokątnego o kącie ostrym 73°.	P	F

2.4. Uzasadnij, że trójkąty ABC i ABD przedstawione na rysunku są podobne.



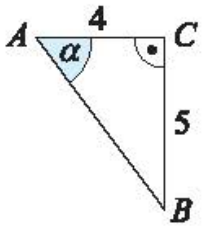
2.5. Na rysunku przedstawiono dwa trójkąty podobne.

Oblicz długości boków a_1 i c_1, wiedząc, że $\frac{a}{b}=3$.

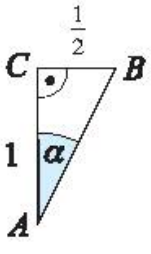


2.6. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz tangens kąta α.

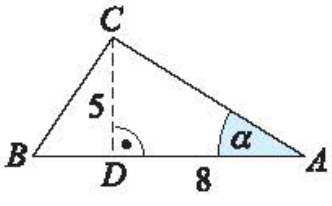
a)



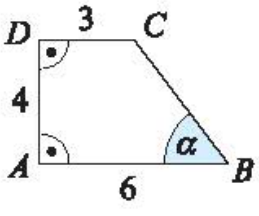
b)



c)

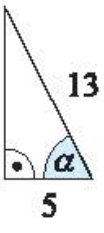


d)

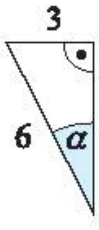


2.7. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz tangens kąta α.

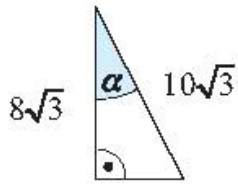
a)



b)



c)



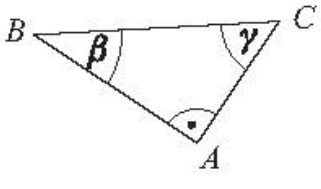
2.8. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

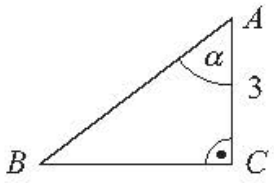
Prawidłowo zdefiniowany jest tangens:

A. $\operatorname{tg}\gamma=\frac{|AC|}{|BC|}$, **B.** $\operatorname{tg}\gamma=\frac{|AB|}{|CB|}$,

C. $\operatorname{tg}\beta=\frac{|AB|}{|BC|}$, **D.** $\operatorname{tg}\beta=\frac{|AC|}{|AB|}$.

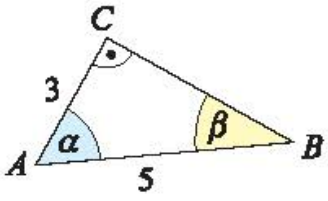


2.9. W trójkącie prostokątnym ABC, przedstawionym na rysunku, $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Oblicz długości boków BC i AB.

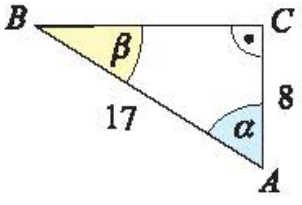


2.10. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz $\operatorname{tg}\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\beta$.

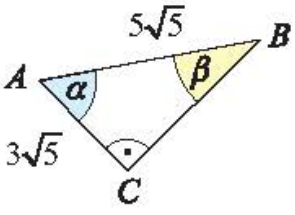
a)



b)



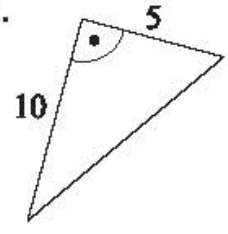
c)



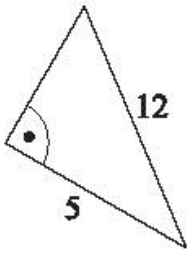
2.11. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i wskaż trójkąt, w którym tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{5}{12}$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

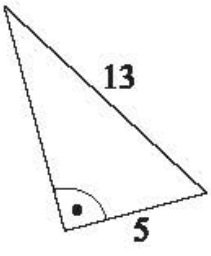
A.



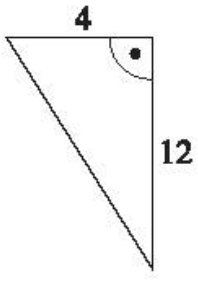
B.



C.



D.



2.12. Zbuduj trójkąt prostokątny o kącie ostrym α takim, że:

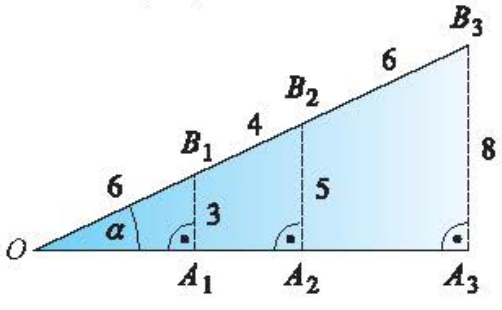
a) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, **b)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, **c)** $\operatorname{tg}\alpha = 10$.

2.13. D Uzasadnij, że jeżeli w trójkącie prostokątnym kąt α jest kątem ostrym, to $\alpha > 0°$ i $\alpha < 90°$ oraz $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

Sinus i cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Ćwiczenie 12. Wypisz trójkąty podobne przedstawione na rysunku. Oblicz stosunki długości:

$$\frac{|A_1B_1|}{|OB_1|}, \quad \frac{|A_2B_2|}{|OB_2|}, \quad \frac{|A_3B_3|}{|OB_3|}.$$

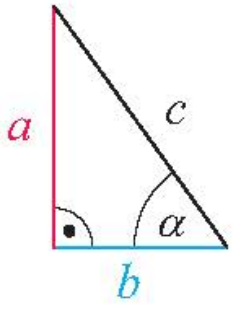


Zauważamy, że w trójkątach prostokątnych podobnych OA_1B_1, OA_2B_2 i OA_3B_3 stosunki długości przyprostokątnych leżących naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnych są równe. Stosunki te nazywamy **sinusem** kąta α (w skrócie **sin** α).

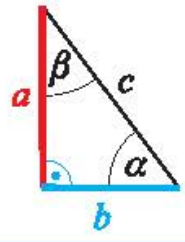
α — funkcja *sinus*, zapis: $\sin\alpha$ → $\frac{a}{c}$

$\alpha > 0° \text{ i } \alpha < 90°$.

$\frac{a}{c} > 0 \text{ i } \frac{a}{c} < 1$



Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do długości przeciwprostokątnej.

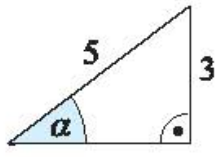


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

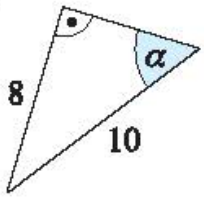
$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

Ćwiczenie 13. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz sinus kąta α.

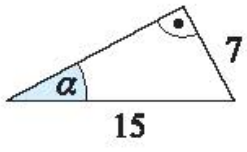
a)



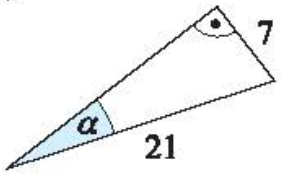
b)



c)

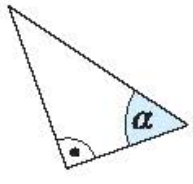


d)



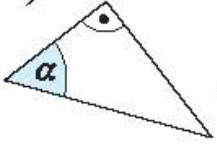
Ćwiczenie 14. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego wierzchołki oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem była prawdziwa.

a)



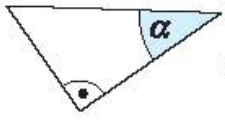
$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$,

b)



$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$,

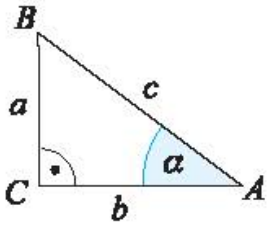
c)



$\sin\alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$.

Przykład 3. Zbuduj kąt ostry α, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Z definicji sinusa dla trójkąta prostokątnego ABC

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, więc $\frac{a}{c} = \frac{2}{3}$, czyli możemy przyjąć,

np. $\begin{cases} a = 2 \\ c = 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 4 \\ c = 6 \end{cases}$ lub ... .

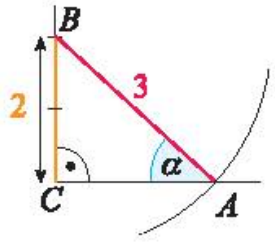
Opis konstrukcji.

1° Konstruujemy kąt prosty o wierzchołku C.

2° Na jednym z ramion odkładamy odcinek o długości dwóch jednostek i otrzymujemy punkt B.

3° Z punktu B, jako środka okręgu, kreślimy okrąg o promieniu równym trzem jednostkom.

4° Otrzymujemy punkt A z przecięcia się okręgu z drugim ramieniem kąta prostego, zatem $\alpha = |\sphericalangle CAB|$.

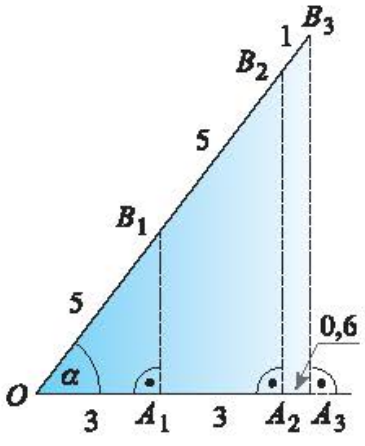


Dowód poprawności konstrukcji:

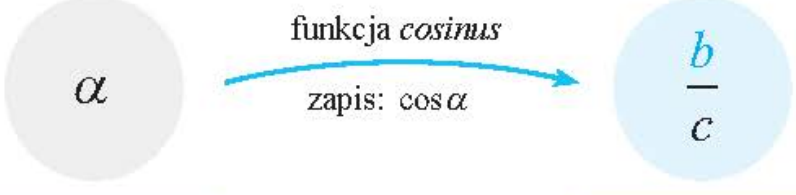
ponieważ $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{2}{3}$ i $\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$, więc $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

Ćwiczenie 15. Zbuduj kąt ostry α, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 16. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i sprawdź, czy $\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OB_2|} = \frac{|OA_3|}{|OB_3|}$.

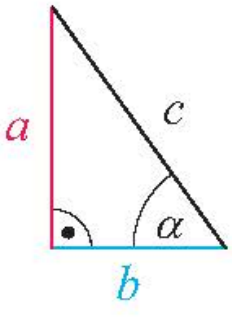


Zauważamy, że w trójkątach prostokątnych podobnych OA_1B_1, OA_2B_2 i OA_3B_3 stosunki długości przyprostokątnych leżących przy kącie α do długości przeciwprostokątnych są równe. Stosunki te nazywamy **cosinusem** kąta α (w skrócie **cos** α).

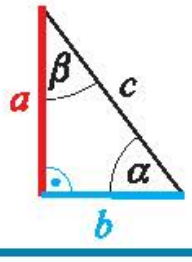


$\alpha > 0° \text{ i } \alpha < 90°$.

$\frac{b}{c} > 0 \text{ i } \frac{b}{c} < 1$.



Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.

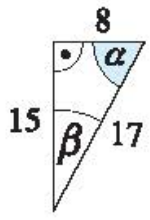


$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

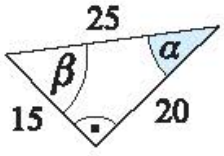
$\cos\beta = \frac{a}{c}$

Ćwiczenie 17. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz cosinus kąta α oraz cosinus kąta β.

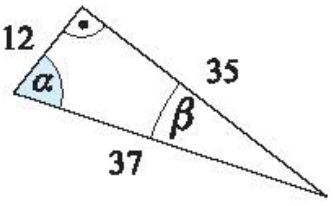
a)



b)



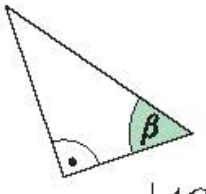
c)



Ćwiczenie 18. Zbuduj kąt ostry α, wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

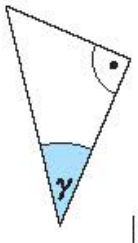
Ćwiczenie 19. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego wierzchołki oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem była prawdziwa.

a)



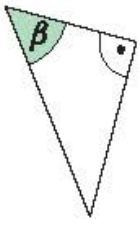
$\sin\beta = \frac{|AC|}{|BC|}$,

b)



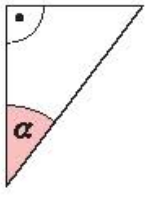
$\cos\gamma = \frac{|KL|}{|KM|}$,

c)



$\sin\beta = \frac{|HP|}{|GP|}$,

d)



$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$.

Uwaga. Wartości funkcji sinus i cosinus kąta ostrego α są liczbami mniejszymi od 1.

Ćwiczenie 20. Wyjaśnij, korzystając z definicji funkcji sinus, że $\sin\alpha < 1$ i $\sin\alpha > 0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

12. $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OA_2B_2 \sim \Delta OA_3B_3$, $\frac{|A_1B_1|}{|OB_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|OB_2|} = \frac{|A_3B_3|}{|OB_3|} = \frac{1}{2}$. 13. a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{4}{5}$, c) $\frac{7}{15}$, d) $\frac{1}{3}$.

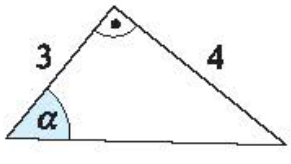
16. $\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OA_2|}{|OB_2|} = \frac{|OA_3|}{|OB_3|} = \frac{3}{5}$. 17. a) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{15}{17}$, b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, c) $\cos\alpha = \frac{12}{37}$, $\cos\beta = \frac{35}{37}$.

20. Zauważ, że sinus kąta ostrego jest stosunkiem przyprostokątnej do przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, więc licznik tego ułamka jest mniejszy od mianownika.

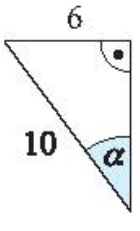
Zadania utrwalające

2.14. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz sinus oraz cosinus kąta α.

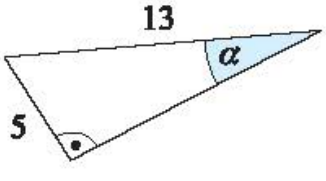
a)



b)

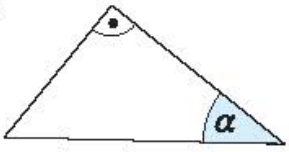


c)



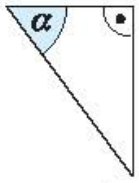
2.15. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego wierzchołki oznacz takimi literami, aby równość zapisana pod rysunkiem była prawdziwa.

a)



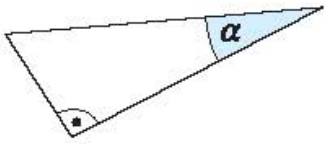
$\sin\alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$,

b)



$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$,

c)



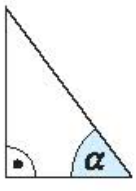
$\sin\alpha = \frac{|MN|}{|KM|}$.

2.16. Zbuduj kąt ostry α, gdy:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, **b)** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

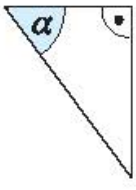
2.17. Przerysuj trójkąt do zeszytu i jego długości boków oznacz takimi literami, aby równości zapisane pod rysunkiem były prawdziwe.

a)



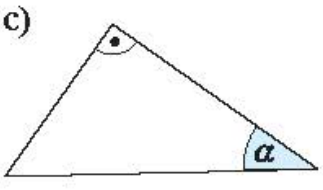
$\sin\alpha = \frac{m}{l}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{k}$,

b)



$\cos\alpha = \frac{a}{b}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a}$,

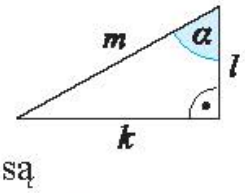
c)



$\sin\alpha = \frac{l}{p}$ i $\cos\alpha = \frac{m}{p}$.

2.18. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Spośród zapisów: **1** $\sin\alpha = \frac{k}{m}$, **2** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{l}$, **3** $\cos\alpha = \frac{k}{m}$



dla trójkąta prostokątnego przedstawionego na rysunku poprawnymi są

A. **1**, **2**, **3**, **B.** tylko **1** i **2**, **C.** tylko **2** i **3**, **D.** tylko **1** i **3**.

2.19. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości 12 i 5. Cosinus najmniejszego kąta w tym trójkącie jest równy:

A. $\frac{5}{12}$, **B.** $\frac{5}{13}$, **C.** $\frac{12}{13}$, **D.** $\frac{13}{12}$.

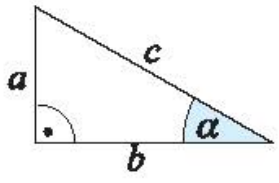
2.20. Uzasadnij, korzystając z definicji funkcji cosinus, że $\cos\alpha > 0$ i $\cos\alpha < 1$.

D

2.21. Podaj przykładowe wymiary przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o kącie ostrym α, gdy:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 20$, **b)** $\operatorname{tg}\alpha = 10\,000$, **c)** $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, **d)** $\cos\alpha = \frac{8}{17}$.

2.22. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

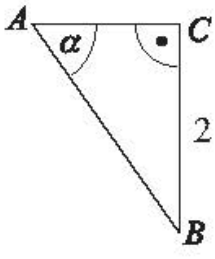


Przerysuj tabelę do zeszytu i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę.

a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
6	8	10	■	■	■
4	$4\sqrt{3}$	■	$\frac{1}{2}$	■	■
4	■	$2\sqrt{13}$	■	■	$\frac{2}{3}$
3	■	5	■	$\frac{4}{5}$	■

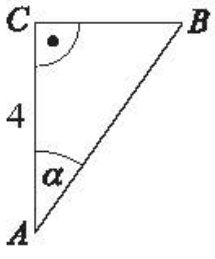
2.23. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku oraz podaną wartość funkcji trygonometrycznej i oblicz pozostałe długości boków trójkąta ABC.

a)



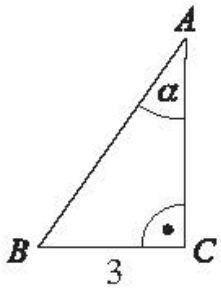
$\sin\alpha = \frac{1}{4}$,

b)



$\cos\alpha = \frac{1}{3}$,

c)

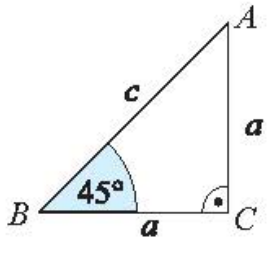


$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°

Przykład 4. Oblicz wartości funkcji sinus i tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym równoramiennym.

Rozwiązanie. Ponieważ trójkąt jest równoramienny, więc kąty ostre tego trójkąta mają miary 45°. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. W trójkącie ABC:



$$c^2 = a^2 + a^2, \text{ czyli } c^2 = 2a^2, \text{ skąd } c = a\sqrt{2}.$$

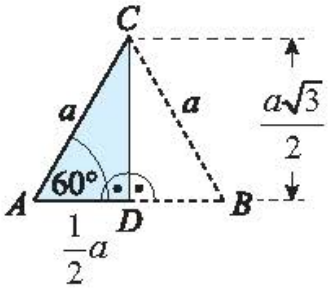
Zatem $\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1$.

Odp.: $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$.

Ćwiczenie 21. Oblicz $\cos 45°$.

Przykład 5. W trójkącie prostokątnym ADC jeden z kątów ostrych ma miarę $60°$.
Oblicz: **a)** $\sin 60°$, **b)** $\operatorname{tg} 60°$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że trójkąt prostokątny ADC, którego jeden kąt ostry ma miarę $60°$, jest połową trójkąta równobocznego ABC o boku a i wysokości $|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Wówczas $|AD| = \frac{1}{2}a$.

a) $\sin 60° = \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, **b)** $\operatorname{tg} 60° = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}$.

Odp.: **a)** $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, **b)** $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 22. Oblicz: **a)** $\cos 60°$, **b)** $\sin 30°$, **c)** $\cos 30°$, **d)** $\operatorname{tg} 30°$.

Ćwiczenie 23. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ▭ wpisz odpowiednią miarę kąta, gdy: **a)** $\sin 30° = \cos$ ▭, **b)** $\cos 30° = \sin$ ▭, **c)** $\cos 45° = \sin$ ▭.

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów:			
funkcja trygonometryczna \ α	**30°**	**45°**	**60°**
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Uwaga
Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych są dodatnie, bo są równe ilorazowi długości odpowiednich boków w trójkącie prostokątnym.

Ćwiczenie 24. Oblicz: **a)** $2\sin 45° - \operatorname{tg}^2 60°$, **b)** $\sin^2 60° + \cos^2 60°$.

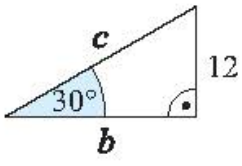
Przyjmujemy, że: $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$, $(\operatorname{tg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha$.

Przykład 6. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 12 cm, a kąt leżący naprzeciw niej ma miarę 30°. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Rozwiązanie. ***Dane:*** $a = 12\,\text{cm}$, $\alpha = 30°$, ***obliczyć:*** b, c.

$\sin 30° = \frac{12}{c}$, więc $\frac{1}{2} = \frac{12}{c}$, skąd $c = 24$,

$\cos 30° = \frac{b}{24}$, więc $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{24}$, skąd $b = 12\sqrt{3}$.



Odp.: $12\sqrt{3}$ cm i 24 cm.

Ćwiczenie 25. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 8 cm, a kąt przyległy do niej ma miarę 60°. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

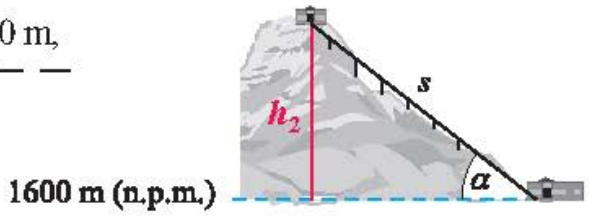
Przykład 7. Kolejka górska wznosi się pod kątem 45° do poziomu, pokonując trasę 1000 m. Na jakiej wysokości znajduje się stacja końcowa tej kolejki, jeżeli jej stacja początkowa leży na wysokości 1600 m (n.p.m.)? Wynik zaokrąglij do 1 metra.

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $\alpha = 45°$, $h_1 = 1600\,\text{m}$ (n.p.m.), $s = 1000\,\text{m}$,

obliczyć: h_2 – różnica wysokości pomiędzy położeniem stacji końcowej i początkowej,

$H = h_1 + h_2$ – wysokość stacji końcowej.

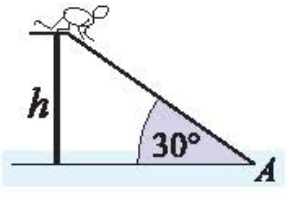


Ponieważ $\sin\alpha = \frac{h_2}{s}$, czyli $\sin 45° = \frac{h_2}{1000}$, więc $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h_2}{1000}$, skąd $h_2 = 500\sqrt{2}$.

$H = 1600 + 500\sqrt{2}$, więc $H \approx 2307\,\text{m}$.

Odp.: Kolejka wjeżdża na wysokość około 2307 m (n.p.m.).

Ćwiczenie 26. W aquaparku stoi zjeżdżalnia. Tor zjazdu jest nachylony do poziomu pod kątem 30°. Oblicz długość toru zjeżdżalni, gdy jej wysokość h jest równa 2 m.



Odpowiedzi do ćwiczeń

22. a) $\cos 60° = \frac{1}{2}$, b) $\sin 30° = \frac{1}{2}$, c) $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 23. a) $\sin 30° = \cos 60°$, b) $\cos 30° = \sin 60°$, c) $\cos 45° = \sin 45°$. 24. a) $\sqrt{2} - 3$, b) 1. 25. $8\sqrt{3}$ cm, 16 cm. 26. 4 m.

Zadania utrwalające

2.24. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $5 \cdot \sin 30^\circ + 4 \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$,

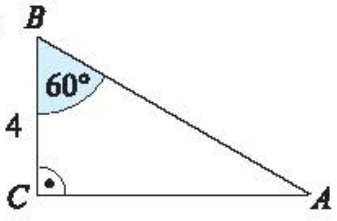
b) $3\sin 60^\circ - 5\operatorname{tg} 45^\circ + 3\operatorname{tg} 30^\circ$,

c) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ + \operatorname{tg}^2 45^\circ$,

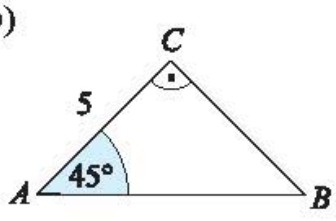
d) $\dfrac{2 - \operatorname{tg}^2 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}$.

2.25. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz obwód trójkąta ABC.

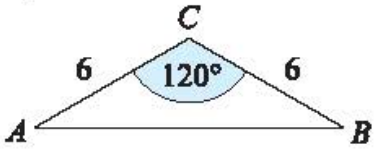
a)



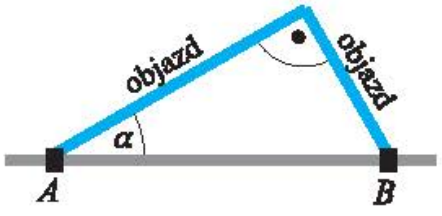
b)



c)

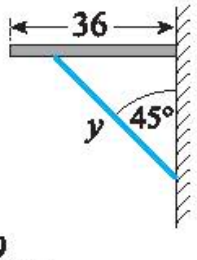


2.26. Ze względu na naprawę drogi pomiędzy miejscowościami A i B wytyczono objazd, tak jak na rysunku. Oblicz, o ile kilometrów trasa objazdu jest dłuższa od odległości między tymi miejscowościami, gdy $|AB| = 8\,\text{km}$ i $\alpha = 30^\circ$.

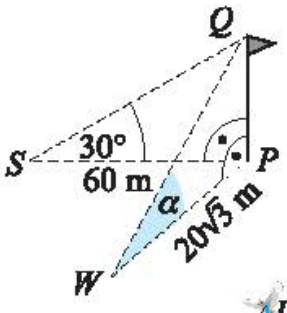


2.27. Samolot startuje z lotniska pod kątem 30° do poziomu. Jak wysoko znajdzie się ten samolot po przebyciu 3 km w linii prostej?

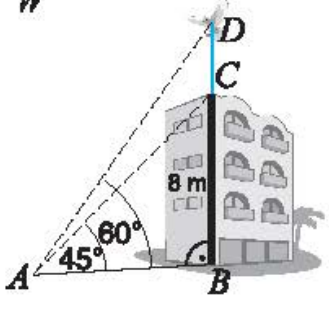
2.28. Oblicz długość y listewki potrzebnej do zrobienia podpórki pod półkę. Półka ma szerokość 36 cm, a listewka ma być zamocowana w odległości od ściany równej $\frac{2}{3}$ szerokości tej półki. Wynik zaokrąglij do 1 cm.



2.29. Maszt PQ widziany jest z miejsca S, odległego o 60 m od jego podstawy, pod kątem 30°. Pod jakim kątem α widać ten maszt z punktu W, oddalonego o $20\sqrt{3}$ m od jego podstawy?



2.30. Na antenie umieszczonej na dachu budynku siedzi gołąb. Uwzględniając dane przedstawione na rysunku, oblicz odległość gołębia od dachu. Wynik zaokrąglij do 0,01 metra.



Odczytywanie wartości funkcji trygonometrycznych z tablic

Aby podać wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od 0° do 90°, korzystamy z tablic wartości tych funkcji, których fragmenty zamieszczamy poniżej.

α [°]	$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83

α [°]	$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37

Można z nich odczytać wartości funkcji sinus, cosinus i tangens.

Np. $\sin 5° = 0{,}0872 = \cos 85°$, $\operatorname{tg} 5° = 0{,}0875$.

Ćwiczenie 27. Odczytaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:
$\sin 4°$, $\operatorname{tg} 40°$, $\sin 89°$, $\cos 1°$, $\operatorname{tg} 15°$.

Ćwiczenie 28. Oblicz za pomocą kalkulatora przybliżoną wartość funkcji:
a) $\sin 45°$, **b)** $\cos 30°$, **c)** $\operatorname{tg} 60°$ i porównaj ją z wartością podaną w tablicach.

Przykład 8. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, odczytaj przybliżoną miarę kąta α, dla której spełniona jest równość:
a) $\cos\alpha = 0{,}5878$, **b)** $\sin\alpha = 0{,}6608$.

Rozwiązanie

a) $\cos\alpha = 0{,}5878$. Znajdujemy w kolumnie oznaczonej $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ liczbę 0,5878.

Miarę kąta, gdy dana jest wartość jego cosinusa, odczytujemy w kolumnie oznaczonej β [°].

Zatem $\alpha = 54°$.

α [°]	$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
⋮			⋮
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54

b) $\sin\alpha = 0{,}6608$. Ponieważ liczby 0,6608 nie ma w kolumnie oznaczonej $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$, więc najpierw znajdujemy w tej kolumnie dwie liczby, pomiędzy którymi się ona znajduje, a następnie wybieramy z nich tę, która różni się od niej o mniej (obliczenia pod tabelą).

$0{,}6561 < 0{,}6608 < 0{,}6691.$

Zatem $\alpha \approx 41°$.

α [°]	$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47

$$\begin{array}{r} 0{,}6608 \\ -0{,}6561 \\ \hline 0{,}0047 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}6691 \\ -0{,}6608 \\ \hline 0{,}0083 \end{array}$$

Ćwiczenie 29. Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (trzecia strona okładki), odczytaj przybliżoną miarę kąta α, dla której spełniona jest równość:
a) $\sin\alpha = 0{,}9740$, **b)** $\cos\alpha = 0{,}8140$, **c)** $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}9626$.

Prezentowany kalkulator umożliwia obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, np. 42°.



1° Naciskamy klawisze:



.

2° Naciskamy klawisz funkcji sinus (

).

3° Odczytujemy: $\sin 42° = 0{,}6691306064...$, zatem $\sin 42° \approx 0{,}6691$.

Przykład 9. Oblicz miarę kąta ostrego α, gdy $\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 4$. Miarę kąta podaj z dokładnością do 1°.

Rozwiązanie. $\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 4 \quad / : \sqrt{2}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \approx 2{,}8284.$$

$$\begin{array}{r} 2{,}8284 \\ -2{,}7475 \\ \hline 0{,}0809 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}9042 \\ -2{,}8284 \\ \hline 0{,}0758 \end{array}$$

α [°]	$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
⋮			⋮
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18

Ponieważ $0{,}0758 < 0{,}0809$, zatem $\alpha \approx 71°$.

Odp.: $\alpha \approx 71°$.

Ćwiczenie 30. Oblicz miarę kąta ostrego α, gdy:

a) $3\sin\alpha = 2$, **b)** $2\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$, **c)** $\cos\alpha = 0{,}1$.

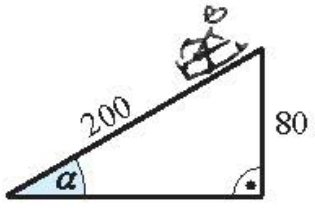
Przykład 10. Różnica poziomów początku i końca toru saneczkowego jest równa 80 m. Tor ma długość 200 m. Oblicz miarę kąta nachylenia tego toru.

Rozwiązanie

Budujemy model matematyczny problemu. Tym modelem jest trójkąt prostokątny. Zauważamy, że:

$$\sin\alpha = \frac{80}{200}, \text{ czyli } \sin\alpha = 0{,}4,$$

skąd $\alpha \approx 24°$.



Odp.: Kąt nachylenia toru saneczkowego ma miarę 24°.

Ćwiczenie 31. Drabinę o długości 5 m oparto o mur tak, że podstawa drabiny znajduje się w odległości 3 m od muru. Oblicz miarę kąta, jaki tworzy drabina z poziomem ziemi.

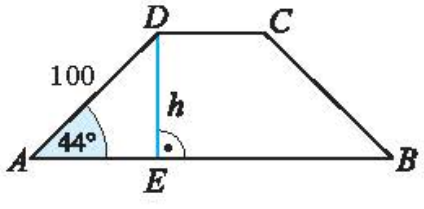
Przykład 11. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 44°, a jego ramię ma długość 100 cm. Oblicz wysokość trapezu. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych milimetrów.

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

W trójkącie AED mamy:

$$\frac{h}{100} = \sin 44°, \text{ czyli } \frac{h}{100} \approx 0{,}6947$$

$$h \approx 69{,}47 \text{ cm}.$$



Odp.: Wysokość trapezu jest równa około 695 mm.

Ćwiczenie 32. W trapezie prostokątnym dłuższe ramię ma długość 15 cm i jest nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 54°. Oblicz długość krótszego ramienia trapezu. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

Odpowiedzi do ćwiczeń

29. **a)** $\alpha \approx 77°$, **b)** $\alpha \approx 36°$, **c)** $\alpha = 63°$. 30. **a)** $\alpha \approx 42°$, **b)** $\alpha \approx 48°$, **c)** $\alpha \approx 84°$. 31. 53°. 32. 12 cm.

Zadania utrwalające

2.31. Odczytaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

a) $\sin 8°$, **b)** $\cos 8°$, **c)** $\operatorname{tg} 32°$, **d)** $\sin 73°$, **e)** $\cos 86°$.

2.32. Skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych i odczytaj przybliżoną miarę kąta α, dla której spełniona jest równość:

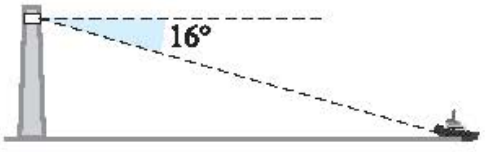
a) $\sin\alpha = 0{,}3090$, **b)** $\cos\alpha = 0{,}4040$, **c)** $\operatorname{tg}\alpha = 3{,}0777$,

d) $\sin\alpha = 0{,}5005$, **e)** $\cos\alpha = 0{,}7200$, **f)** $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}6$.

2.33. Oblicz miarę kąta ostrego α, gdy:

a) $6\cos\alpha = 1$, **b)** $5\operatorname{tg}\alpha = 24$, **c)** $8\sin\alpha = 5$.

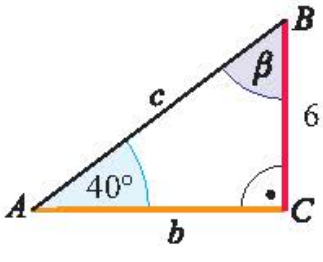
2.34. Obserwator zauważył z okna latarni morskiej kuter pod kątem depresji 16°. Jak daleko od brzegu znajduje się kuter, jeżeli latarnia stoi tuż nad brzegiem i miejsce obserwacji znajduje się 70 m nad poziomem morza? Wynik podaj, zaokrąglając do 1 m.



Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych

Rozwiązać trójkąt, to znaczy obliczyć długości wszystkich jego boków i miary wszystkich kątów.

Przykład 12. W trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α mającym miarę 40° przyprostokątna przeciwległa kątowi α ma długość 6 cm. Rozwiąż ten trójkąt. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 cm.



Rozwiązanie

Dane: $\alpha = 40°$, $a = 6$ cm, | ***obliczyć:*** b, c, β.

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 40° = 50°$.

Z definicji funkcji sinus:

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, więc $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$,

$c = \dfrac{6}{0{,}6428}$ $\quad \sin 40° \approx 0{,}6428$

$c \approx 9{,}33$ cm.

Z definicji funkcji cosinus:

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, więc $b = c \cdot \cos\alpha$,

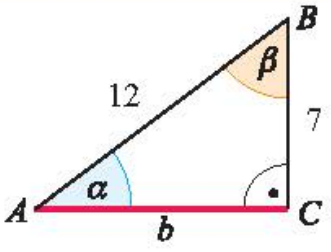
$b \approx 9{,}33 \cdot 0{,}7660$ $\quad \cos 40° \approx 0{,}7660$

$b \approx 7{,}15$ cm.

Odp.: $b \approx 7{,}15$ cm, $c \approx 9{,}33$ cm, $\beta \approx 50°$.

Ćwiczenie 33. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna ma długość 8 cm, a kąt ostry ma miarę 37°. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta. Rozważ dwa przypadki.

Przykład 13. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna a ma długość 7 cm, a przeciwprostokątna c ma długość 12 cm. Rozwiąż ten trójkąt.



Rozwiązanie

Dane: $a=7$ cm, $c=12$ cm, ***obliczyć:*** α, β i b.

Z definicji funkcji sinus:

$$\sin\alpha=\frac{7}{12},\ \text{więc}\ \sin\alpha\approx 0{,}5833,\ \text{skąd}\ \alpha\approx 36°.$$

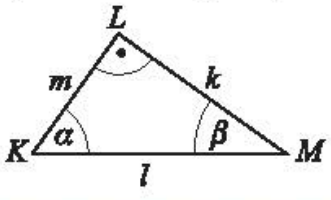
Odczytujemy z kalkulatora lub tablic matematycznych

Obliczamy miarę kąta β: $\beta\approx 90°-36°$, więc $\beta\approx 54°$.

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy b, gdzie $b=\sqrt{12^2-7^2}=\sqrt{95}$.

Odp.: Kąty ostre trójkąta prostokątnego mają miary 36° i 54°, a druga przyprostokątna ma długość około 9,7 cm.

Ćwiczenie 34. Przerysuj tabelę do zeszytu, przyjmij oznaczenia boków oraz kątów w trójkącie MLK jak na rysunku i uzupełnij tabelę.



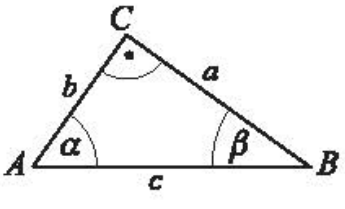
k	m	l	α	β
1			30°	
		100		10°
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$			
$\sqrt{3}$		$2\sqrt{3}$		

Odpowiedzi do ćwiczeń

33. Przypadek 1. – około 10,6 cm i 13,3 cm; przypadek 2. – około 6 cm i 10 cm.

34. Kolejno: $\sqrt{3}$, 2, 60°; 17,4, 98,5, 80°; $\sqrt{10}$, 27°, 63°; 3, 30°, 60°.

Zadania utrwalające



2.35. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i rozwiąż trójkąt prostokątny ABC, w którym:

a) $a=18$ cm i $b=23$ cm,

b) $a=11$ cm i $c=21$ cm,

c) $a=34$ cm i $\alpha=42°$,

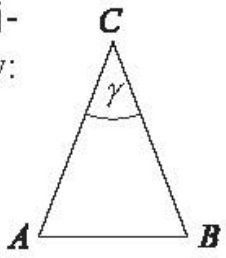
d) $a=4{,}5$ dm i $\beta=52°$,

e) $a=8$ cm i $P_{\Delta ABC}=48$ cm^2,

f) $b=16$ cm i $P_{\Delta ABC}=56$ cm^2,

g) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$ i $b=3$ cm, **h)** $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ i $a=6$ cm, **i)** $\cos\beta=\frac{3}{5}$ i $c=10$ cm.

2.36. W trójkącie równoramiennym ABC kąt zawarty między ramionami trójkąta ma miarę γ. Oblicz długości boków i miary kątów trójkąta ABC, gdy:



a) $|AC| = 10,\ \gamma = 42°$, b) $|AB| = 25,\ \gamma = 70°$,

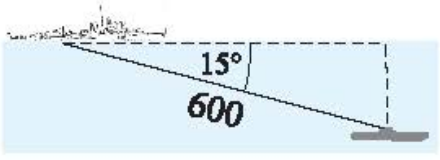
c) $|AB| = 5,\ |AC| = 4$.

2.37. Oblicz długości boków i miary kątów trójkąta prostokątnego ABC, w którym kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym, gdy:

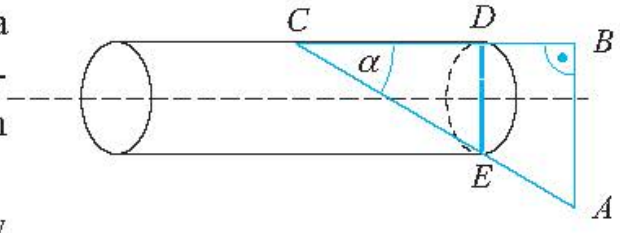
a) $|BC| = 30,\ |\sphericalangle BAC| = 30°$, b) $|AB| = 28,\ |\sphericalangle BAC| = 30°$,

c) $|AC| = 0{,}24,\ |\sphericalangle BAC| = 60°$, d) $|AB| = 2,\ |AC| = \sqrt{3}$.

2.38. Na niszczycielu operator sonaru wykrył łódź podwodną w odległości 600 metrów pod kątem depresji 15°. Na jakiej głębokości znajduje się łódź podwodna? Wynik podaj, zaokrąglając go do 1 m.

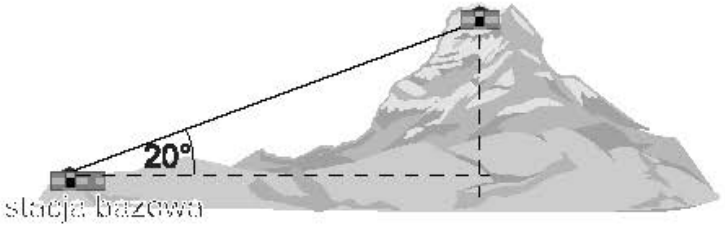


2.39. Pomiarów średnicy rurki można dokonać za pomocą przyrządu w kształcie trójkąta prostokątnego ACB, którego jeden z kątów ostrych ma miarę α.



Chcąc zmierzyć średnicę rurki, wsuwamy trójkąt ABC w sposób pokazany na rysunku i mierzymy długość odcinka CD. Oblicz średnicę rurki, jeżeli $\alpha = 15°$ i $|CD| = 3{,}7$ cm.

2.40. Kolejka linowa wznosi się pod kątem 20°. Obserwatorium na szczycie góry jest położone o 1800 m wyżej niż stacja bazowa. Oblicz długość trasy w linii prostej, jaką pokonuje kolejka wjeżdżając na szczyt, i podaj wynik, zaokrąglając go do 0,001 km.



2.41. Kąt między skrajnymi położeniami wahadła zegara ma miarę 20°. Odległość między skrajnymi położeniami ciężarka znajdującego się na końcu wahadła mierzona na prostej jest równa 25 cm. Jaka jest długość wahadła?

2.42. Statek płynący z prędkością $9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ przecina linię równika pod kątem o mierze 14° i nie zmienia kierunku. Jaka będzie odległość statku od równika po dwóch dobach podróży?

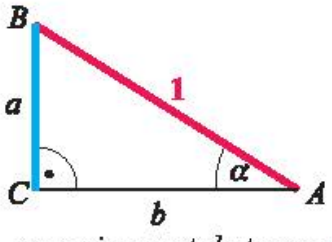
Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

W trygonometrii przy rozwiązywaniu różnych problemów matematycznych często potrzebujemy wyrazić jedną funkcję trygonometryczną za pomocą innej funkcji. Tymi zależnościami zajmiemy się poniżej.

Przykład 14. Dla trójkąta prostokątnego o kącie ostrym α i przeciwprostokątnej mającej długość 1:

1) oblicz długości przyprostokątnych a i b, **2)** wykaż, że $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

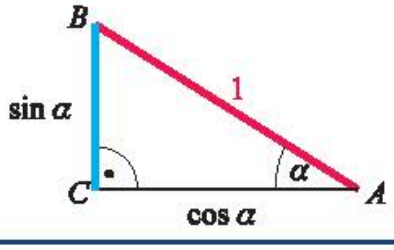


przeciwprostokątna $c=1$.

1) W trójkącie prostokątnym ABC:

$$\sin\alpha=\frac{a}{1},\ \text{więc}\ \ a=\sin\alpha,$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{1},\ \text{więc}\ \ b=\cos\alpha.$$



2) Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC:

$$a^2+b^2=c^2,\ \text{czyli}\ (\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1^2,$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\quad \textit{c.n.w.}$$

Uwaga. Dla każdego kąta ostrego α prawdziwy jest wzór

$$\boldsymbol{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}.$$

Zależność tę nazywamy **jedynką trygonometryczną**.

Przykład 15. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α taki, że $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ i $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Rozwiązanie. Sprawdzamy, czy $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{7}{16}=\frac{16}{16}=1.$$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2-1$

Odp.: Tak, istnieje, bo $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

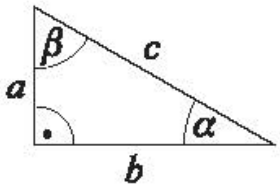
Ćwiczenie 35. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α, gdy:

a) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ i $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, **b)** $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ i $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Przykład 16. Wykaż, że jeżeli kąty ostre α i β są kątami tego samego trójkąta prostokątnego, to $\sin\alpha = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha)$.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Z (założenie):	*T (teza):*
α, β – miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.	$\sin\alpha = \cos\beta$, $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$.

Dowód: Z definicji funkcji sinus i cosinus w trójkącie prostokątnym mamy:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ i } \cos\beta = \frac{a}{c}, \text{ więc } \sin\alpha = \cos\beta.$$

Ponieważ w trójkącie prostokątnym $\alpha + \beta = 90^\circ$, więc $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Zatem $\boldsymbol{\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)}$. ***c.n.w.***

Ćwiczenie 36. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym α, prawdziwy jest związek: **a)** $\boldsymbol{\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)}$, **b)** $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}}$.

Ćwiczenie 37. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ▮ wpisz odpowiednią miarę kąta.

a) $\sin 15^\circ = \cos$ ▮, **b)** $\cos 29^\circ = \sin$ ▮, **c)** $\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg}\ ▮}$, **d)** $\frac{1}{\operatorname{tg} 50^\circ} = \operatorname{tg}$ ▮.

Przykład 17. Oblicz: **a)** $\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ$, **b)** $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$.

Rozwiązanie

a) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1$.

$\sin 89^\circ - \cos(90^\circ - 89^\circ) - \cos 1^\circ$

b) $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = 1$.

$\operatorname{tg} 75^\circ - \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - 75^\circ)} - \frac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ}$

Odp.: **a)** 1, **b)** 1.

Ćwiczenie 38. Oblicz: **a)** $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ$, **b)** $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ$.

Ćwiczenie 39. Uzasadnij, że gdy α jest kątem ostrym, to $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$.

Przykład 18. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α taki, że $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie. Obliczamy $\cos\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha=1\frac{1}{3},\ \text{więc}\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3},\ \text{skąd}\ \cos\alpha=\frac{3}{4}\sin\alpha.$$

Ponieważ $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, więc $\cos\alpha=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$.

Sprawdzamy, czy $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1.$$

Odp.: Tak, istnieje.

Ćwiczenie 40. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α taki, że $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ i $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

35. **a)** Tak, **b)** nie. 37. **a)** $\cos 75°$, **b)** $\sin 61°$, **c)** $\operatorname{tg}65°$, **d)** $\operatorname{tg}40°$. 38. **a)** 1, **b)** 1. 40. Tak. *Wskazówka.* $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

Zadania utrwalające

2.43. Oblicz, bez użycia tablic matematycznych, wartość wyrażenia:

a) $\sin^2 13°+\cos^2 13°+\operatorname{tg}13°\cdot\operatorname{tg}77°$,

b) $\operatorname{tg}35°\cdot\operatorname{tg}55°$,

c) $\frac{\sin 25°}{\cos 65°}+\frac{\cos 65°}{\sin 25°}$,

d) $\sin 18°\cdot\cos 72°+\cos 18°\cdot\sin 72°$,

e) $\frac{\cos 83°}{\sin 7°}-\frac{\sin 7°}{\cos 83°}$,

f) $\sin 39°\cdot\cos 51°+\cos 39°\cdot\sin 51°$.

2.44. Oblicz, bez użycia tablic matematycznych, wartość wyrażenia:

a) $\frac{\sin 5°}{\cos 85°}+\frac{\sin 10°}{\cos 80°}+\frac{\sin 15°}{\cos 75°}+\frac{\sin 20°}{\cos 70°}$,

b) $\operatorname{tg}1°\cdot\operatorname{tg}89°+\operatorname{tg}2°\cdot\operatorname{tg}88°+\operatorname{tg}3°\cdot\operatorname{tg}87°$,

c) $\sin 17°\cdot\cos 73°+\cos 17°\cdot\sin 73°+\sin 37°\cdot\cos 53°+\cos 37°\cdot\sin 53°$,

d) $\operatorname{tg}19°\cdot\operatorname{tg}45°\cdot\operatorname{tg}71°$,

e) $\sqrt{3}\cdot\sin^2 23°+\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}23°\cdot\operatorname{tg}67°+\sqrt{3}\cdot\sin^2 67°$,

f) $\cos^2 15°+\cos^2 30°+\cos^2 45°+\cos^2 60°+\cos^2 75°$.

2.45. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α taki, że:

a) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ i $\cos\alpha=\frac{5}{13}$,

b) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$ i $\cos\alpha=\frac{8}{17}$,

c) $\sin\alpha=\frac{9}{41}$ i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{9}{40}$,

d) $\cos\alpha=\frac{1}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{6}$.

2.46. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $1+\sin^2 41^\circ+\cos^2 41^\circ$ jest równa:

A. 1, **B.** 2, **C.** 3, **D.** 4.

2.47. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\operatorname{tg}35^\circ\cdot\operatorname{tg}65^\circ+\sin15^\circ\cdot\cos75^\circ+\cos15^\circ\cdot\sin75^\circ$ jest równa:

A. 0, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 3.

2.48. Uzasadnij, że: D

a) $\frac{\sin 39^\circ}{\cos 51^\circ}=1$,

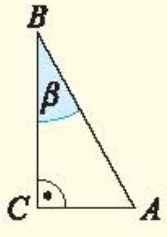
b) $\frac{\cos 20^\circ}{\cos 70^\circ}\cdot\operatorname{tg}20^\circ=1$.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

W trójkącie prostokątnym ABC, gdzie $|BC|=5$ i $|AC|=3$, sinus kąta ostrego β jest równy:

A. $\frac{3}{4}$, **B.** $\frac{4}{34}$, **C.** $\frac{3\sqrt{34}}{34}$, **D.** $\frac{5\sqrt{34}}{34}$.



2. Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości 12 i 5.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus najmniejszego kąta w tym trójkącie jest równy:

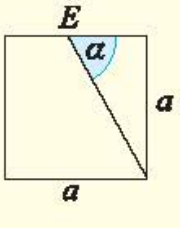
A. $\frac{5}{12}$, **B.** $\frac{5}{13}$, **C.** $\frac{12}{13}$, **D.** $\frac{13}{12}$.

3. W kwadracie o boku długości a punkt E jest środkiem boku.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy:

A. 1, **B.** $\sqrt{3}$, **C.** 2, **D.** 3.

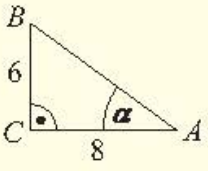


4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ$ jest równa:

A. 1, **B.** $1\frac{1}{4}$, **C.** $1\frac{1}{2}$, **D.** $1\frac{3}{4}$.

5. Kątem ostrym w trójkącie prostokątnym ABC jest α.



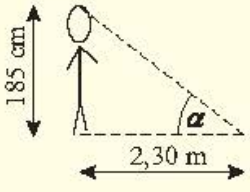
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zatem wartością wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$ jest liczba:

A. 0,65, **B.** 0,55, **C.** 0,95, **D.** 2,15.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Człowiek mający 185 cm wzrostu rzuca cień o długości 2,30 m. Zatem promienie słoneczne w tym czasie padają na ziemię pod kątem około:



A. 39°, **B.** 40°, **C.** 60°, **D.** 61°.

7. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$.	**P**	**F**
Spośród liczb $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ$ największą liczbą jest $\operatorname{tg} 30^\circ$.	**P**	**F**

8. Czy prawdą jest, że jeśli $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, to $\operatorname{tg}\alpha = 2$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B i C.

T	Tak,	ponieważ	**A.**	$\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} : \frac{2}{3}$.
N	Nie,		**B.**	$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3}$.
			C.	$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3}$.

9. Wykaż, że równość $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 1$ jest spełniona dla każdego kąta ostrego α.

D

10. W prostokącie przekątne przecinają się pod kątem 60°. Krótszy bok prostokąta ma długość 6. Oblicz długość drugiego boku.

3. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

W szkole podstawowej wykonywaliście działania na liczbach naturalnych, całkowitych, wymiernych oraz na liczbach, które nie są wymierne.

Wszystkie poznane we wcześniejszych latach nauki liczby tworzą zbiór liczb rzeczywistych, który oznaczamy symbolem R.

Np.: $0 \in R$, $-2 \in R$, $\frac{2}{3} \in R$, $3\sqrt{2} \in R$, $\pi \in R$.

W matematyce liczby o określonej własności tworzą zbiory liczbowe, które oznacza się symbolami jak w tabeli.

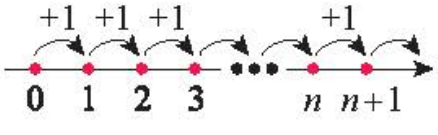
	Zbiór liczb:				
	naturalnych	całkowitych	wymiernych	niewymiernych	rzeczywistych
Oznaczenie międzynarodowe	N	Z	Q	$R \setminus Q$	R
Oznaczenie używane w Polsce	N	C	W	NW	R

Ćwiczenie 1. Podaj trzy liczby, które należą do zbioru liczb:
a) naturalnych (N), **b)** wymiernych (Q), **c)** całkowitych (Z).

Liczby naturalne

Przypomnijmy

Liczby naturalne: 0, 1, 2, 3, 4, ...
Najmniejszą liczbą naturalną jest liczba zero.
Wśród liczb naturalnych wyróżniamy liczby pierwsze i złożone.



- **Liczba pierwsza** to liczba naturalna większa od 1, która jest podzielna tylko przez 1 i przez samą siebie, np. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.
- **Liczba złożona** to liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki naturalne, np. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14.
- Każdą naturalną liczbę złożoną można przedstawić jednoznacznie w postaci iloczynu liczb pierwszych.
- **Liczb 0 i 1** nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do liczb złożonych.

Uwaga

Wszystkie liczby naturalne tworzą zbiór liczb naturalnych, który oznaczamy N.

- $N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ – zbiór liczb naturalnych.
- $N^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ – zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Zbiór N jest zbiorem nieskończonym. Nie można podać największej liczby naturalnej.

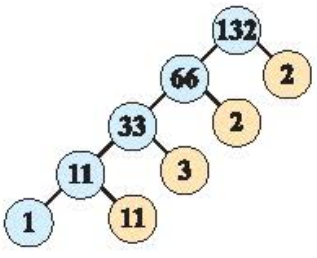
Ćwiczenie 2. Spośród liczb naturalnych większych od 17 i mniejszych od 30 wypisz:
a) wszystkie liczby pierwsze, **b)** wszystkie liczby złożone.

Przedstawienie liczby złożonej w postaci iloczynu liczb pierwszych nazywamy rozkładem na czynniki pierwsze. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 1. Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę 132 i zapisz ją jako iloczyn liczb pierwszych.

Rozwiązanie

	132	2
pierwszy iloraz	66	2
drugi iloraz	33	3
trzeci iloraz	11	11
czwarty iloraz	1	



Odp.: $132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$.

Ćwiczenie 3. Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę: **a)** 70, **b)** 192, **c)** 2016.

Cechy podzielności liczb.

Liczba naturalna jest podzielna przez:	
2,	jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0, 2, 4, 6 albo 8,
3,	jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 3,
4,	jeśli liczba, wyrażona kolejnymi dwiema ostatnimi jej cyframi, jest podzielna przez 4,
5,	jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 albo 5,
6,	jeśli jest podzielna przez 2 i przez 3,
8,	jeśli liczba, wyrażona trzema kolejnymi ostatnimi jej cyframi, jest podzielna przez 8,
9,	jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9,
10,	jeśli ostatnią jej cyfrą jest 0,
25,	jeśli liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry jest podzielna przez 25.

Ćwiczenie 4. Sformułuj cechę podzielności przez 100.

Ćwiczenie 5. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ▮ wpisz cyfrę tak, aby otrzymana liczba była podzielna przez podany obok dzielnik.

Liczba	Dzielnik liczby
6745▮	3
1583▮	4
6321▮	5
3▮291	9

Liczba	Dzielnik liczby
301▮▮	25
31▮54	6
35▮2▮	8
1389▮▮	50

Rozkład na czynniki ułatwia nam wyznaczanie **największego wspólnego dzielnika** (NWD) liczb oraz ich **najmniejszej wspólnej wielokrotności** (NWW).

- $\mathrm{NWD}(a, b)$ to największa liczba, przez którą dzielą się liczby a i b.
- $\mathrm{NWW}(a, b)$ to najmniejsza liczba, która dzieli się przez liczby a i b.

Uwaga

Najmniejszą wspólną wielokrotność NWW liczb naturalnych dodatnich a i b można wyznaczyć z zależności $\mathrm{NWW}(a, b) = \dfrac{ab}{\mathrm{NWD}(a, b)}$.

Przykład 2. Oblicz NWD i NWW liczb: **a)** 90 i 54, **b)** $2^2 \cdot 7^5$ i $2^3 \cdot 7^3$.

Rozwiązanie

a)

90	2	54	2
45	3	27	3
15	3	9	3
5	5	3	3
1		1	

$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$

$\mathrm{NWD}(90, 54) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18,$

$\mathrm{NWW}(90, 54) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 270.$

b) $2^2 \cdot 7^5 = 2^2 \cdot 7^3 \cdot 7^2, \quad 2^3 \cdot 7^3 = 2^2 \cdot 2 \cdot 7^3,$

$\mathrm{NWD}\left(2^2 \cdot 7^5,\ 2^3 \cdot 7^3\right) = 2^2 \cdot 7^3,$

I sposób: $\mathrm{NWW}\left(2^2 \cdot 7^5,\ 2^3 \cdot 7^3\right) = 2^2 \cdot 7^3 \cdot 7^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 7^5,$

II sposób: $\mathrm{NWW}\left(2^2 \cdot 7^5,\ 2^3 \cdot 7^3\right) = \dfrac{2^2 \cdot 7^5 \cdot 2^3 \cdot 7^3}{2^2 \cdot 7^3} = 2^3 \cdot 7^5.$

Odp.: **a)** $\mathrm{NWD}(90, 54) = 18$, $\mathrm{NWW}(90, 54) = 270$,

b) $\mathrm{NWD}\left(2^2 \cdot 7^5,\ 2^3 \cdot 7^3\right) = 2^2 \cdot 7^3$, $\mathrm{NWW}\left(2^2 \cdot 7^5,\ 2^3 \cdot 7^3\right) = 2^3 \cdot 7^5$.

Ćwiczenie 6. Oblicz NWD i NWW liczb 60 i 96 .

Ćwiczenie 7. Oblicz NWD i NWW liczb:

a) $2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^3$ i $2 \cdot 3^2 \cdot 7$, **b)** $3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ i $3^2 \cdot 7^4 \cdot 11^3$.

Ćwiczenie 8. Uzasadnij, że każde dwie kolejne liczby naturalne dodatnie są względnie pierwsze, czyli, że $\mathrm{NWD}(n, n+1) = 1$, gdy n jest liczbą naturalną dodatnią.

Przykład 3. Uzasadnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Rozwiązanie

Dowód wprost	**Dowód nie wprost**
Z **(założenie)**	**zaprzeczenie tezie** T
↓ dowód	↓ dowód
T **(teza)** ***c.n.u.****	**zaprzeczenie założenia** Z ***c.k.d.****

****c.n.u.*** – co należało udowodnić.

****c.k.d.*** – co kończy dowód.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost.

Z ***(założenie)*:**	T ***(teza)*:**
P – zbiór wszystkich liczb pierwszych,	P – zbiór nieskończony.

Dowód:

1° Zaprzeczamy tezie T, czyli zakładamy, że zbiór P wszystkich liczb pierwszych jest zbiorem skończonym i największą liczbą pierwszą jest p,

$$P = \{2, 3, 5, 7, \ldots, 97, \ldots, p\}.$$

2° Tworzymy liczbę a, która jest iloczynem wszystkich liczb pierwszych ze zbioru P,

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot \ldots \cdot p.$$

3° Wnioskujemy, z 1° i 2°, że:

- liczba $a+1$ jest liczbą złożoną, *Nie jest elementem zbioru P.*
- liczby $a+1$ w rozkładzie na czynniki pierwsze nie można przedstawić w postaci iloczynu elementów zbioru P. $\mathrm{NWD}(a, a+1) = 1$

4° Wniosek z 3°.

Poza zbiorem P musi istnieć co najmniej jedna liczba pierwsza, która będzie się znajdować w rozkładzie na czynniki liczby $a+1$.

5° Wniosek z 4°.

Zbiór P nie jest zbiorem skończonym. *Zaprzeczenie założenia.*

c.k.d.

Ćwiczenie 9. Obok podana jest informacja o największej, znanej na początku 2018 roku, liczbie pierwszej. Sprawdź w internecie, czy w dniu, w którym czytasz to ćwiczenie, znaleziono już większą liczbę pierwszą.

$2^{77\,232\,917}-1$ to liczba pierwsza uznana (2018 r.) za największą, do jej zapisu potrzeba 23 249 425 cyfr.

Uwaga. Wśród kolejnych liczb naturalnych dodatnich:

co druga jest parzysta	$n,\ n+1$ – *dwie kolejne liczby naturalne dodatnie, jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta*
co druga jest nieparzysta	
co trzecia jest podzielna przez 3	$n,\ n+1,\ n+2$ – *trzy kolejne liczby naturalne, wśród których jedna jest podzielna przez 3*
co czwarta jest podzielna przez 4 itd.	$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$ – *cztery kolejne liczby naturalne, wśród których jedna jest podzielna przez 4*

Przykład 4. Udowodnij, że iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

Rozwiązanie. Zapisujemy założenie Z i tezę T.

Z (założenie):

$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$ – cztery kolejne liczby naturalne dodatnie.

T (teza):

liczba $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ jest podzielna przez 24.

Dowód:

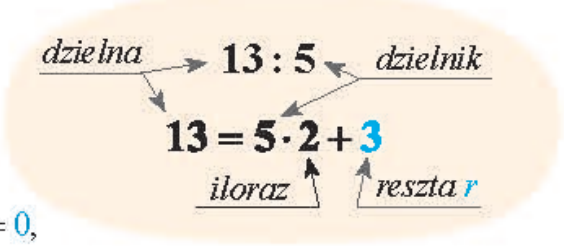
Wśród czterech kolejnych liczb naturalnych: jedna jest podzielna przez 4, co najmniej jedna jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2, więc iloczyn $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ jest podzielny przez iloczyn $4\cdot3\cdot2$, czyli przez 24. ***c.n.u.***

Ćwiczenie 10. Udowodnij, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych dodatnich jest podzielny przez 120.

Przypomnijmy

$$a = q\cdot n + r,$$

gdzie reszta r jest liczbą naturalną mniejszą od dzielnika q oraz n jest ilorazem.



$$\frac{12}{6}=2,\ \text{więc}\quad 12=6\cdot2+0,\quad \text{czyli}\quad r=0,$$

$$\frac{33}{5}=6\frac{3}{5}=6+\frac{3}{5},\ \text{więc}\quad 33=5\cdot6+3,\quad \text{czyli}\quad r=3,$$

Przykład 5. Zapisz trzy kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez:

a) 3 dają resztę 2, **b)** 5 dają resztę 1.

Rozwiązanie

a) Zauważamy, że kolejne liczby różnią się o 3, więc aby otrzymać następną liczbę, do poprzedniej należy dodać 3.

$3k+2$, gdzie $k \in N$,

$3k+2+3=3k+5$,

$3k+2+6=3k+8$,

$3k+2$ – *najmniejsza liczba*

$3k+5$ – *druga liczba,* $3k+5=3(k+1)+2$

$3k+8$ – *trzecia liczba,* $3k+8=3(k+2)+2$

b) Zauważamy, że kolejne liczby różnią się o 5.

$5k+1$, gdzie $k \in N$,

$5k+1+5=5k+6$,

$5k+1+10=5k+11$.

$5k+1$ – *najmniejsza liczba*

$5k+6$ – *druga liczba,* $5k+6=5(k+1)+1$

$5k+11$ – *trzecia liczba,* $5k+11=5(k+2)+1$

Ćwiczenie 11. Zapisz trzy kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez:

a) 3 dają resztę 1, **b)** 7 dają resztę 4.

Przykład 6. Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

Rozwiązanie

Z (*założenie*):	*T* (*teza*):
$2n+1,\ 2n+3,\ 2n+5,\ 2n+7$ – cztery kolejne liczby naturalne nieparzyste.	Suma $2n+1+2n+3+2n+5+2n+7$ jest podzielna przez 8.

Dowód:

$$2n+1+2n+3+2n+5+2n+7=$$
$$=8n+16=$$
$$=8\cdot(n+2).$$

Wyłączamy liczbę 8 przed nawias.

Liczba $8\cdot(n+2)$ jest podzielna przez 8, bo jest iloczynem liczb naturalnych 8 i $n+2$, ***c.n.u.***

Ćwiczenie 12. Wykaż, że:

a) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,

b) suma sześciu kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest podzielna przez 12.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. Np.: **a)** 0, 5, 9, **b)** $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{2}{5}$, **c)** $-5, -1, 0$. **2. a)** 19, 23, 29, **b)** 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28.

3. a) $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, **b)** $192 = 2^6 \cdot 3$, **c)** $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

4. Liczba naturalna jest podzielna przez 100, jeśli jej dwie ostatnie cyfry są zerami.

6. $\text{NWD}(60, 96) = 12$, $\text{NWW}(60, 96) = 480$. *Wskazówka.* $\text{NWW}(60, 96) = \frac{60 \cdot 96}{12} = 5 \cdot 96$.

7. a) $\text{NWW}\left(2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^3,\ 2 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^3$, $\text{NWD}\left(2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^3,\ 2 \cdot 3^2 \cdot 7\right) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$,

b) $\text{NWW}\left(3^3 \cdot 7^2 \cdot 11,\ 3^2 \cdot 7^4 \cdot 11^3\right) = 3^3 \cdot 7^4 \cdot 11^3$, $\text{NWD}\left(3^3 \cdot 7^2 \cdot 11,\ 3^2 \cdot 7^4 \cdot 11^3\right) = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$.

9. *Wskazówka.* Zauważ, że wśród dwóch kolejnych liczb naturalnych jedna jest parzysta, a druga nieparzysta.

11. a) $3n+1$, $3n+4$, $3n+7$, gdzie $n \in N$, **b)** $7n+4$, $7n+11$, $7n+18$, gdzie $n \in N$.

Zadania utrwalające

3.1. Spośród liczb: 21, 23, 24, 25, 28, 29, 30, 31, 33 wypisz wszystkie:

a) liczby pierwsze, **b)** liczby, które są kwadratami liczb naturalnych,

c) wielokrotności liczby 7, **d)** liczby podzielne przez 3.

3.2. Liczby 108 i 1944 rozłóż na czynniki pierwsze.

3.3. Liczby 12 i 15 można przedstawić w postaci sumy kolejnych liczb naturalnych w następujący sposób: $12 = 3 + 4 + 5$ oraz $15 = 7 + 8$ lub $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Podobnie przedstaw liczby 18 i 21.

3.4. Oblicz NWD i NWW liczb:

a) 300 i 990, **b)** 546 i 306, **c)** 12, 18 i 96,

d) $2^3 \cdot 5^4 \cdot 3^2$ i $2^5 \cdot 5^3 \cdot 3^4$, **e)** 75, 120 i 96, **f)** 10^6 i 10^{12}.

3.5. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

$\text{NWD}(180, 54) = 18$.	**P**	**F**
$\text{NWW}(180, 54) = 540$.	**P**	**F**

3.6. **D** 69 jabłek i 92 gruszki rozdzielono po równo między uczniów klasy pierwszej. Uzasadnij, że 161 cukierków można również rozdzielić po równo między uczniów tej klasy.

3.7. Masz pociąć prostokątny arkusz blachy o wymiarach 48 cm x 60 cm na jednakowe kwadraty o możliwie najdłuższym boku, którego długość jest liczbą naturalną wyrażoną w centymetrach.

a) Jaką długość powinien mieć bok każdego z tych kwadratów?

b) Ile otrzymasz takich kwadratów?

3.8. Na dwóch kolejnych skrzyżowaniach długiej ulicy są światła sygnalizacyjne. Na pierwszym skrzyżowaniu światła zmieniają się co 40 sekund, a na drugim co 1 minutę. W pewnym momencie światła czerwone włączyły się jednocześnie na obu skrzyżowaniach. Podaj najkrótszy czas w minutach, w którym sytuacja będzie się powtarzała.

3.9. Uzasadnij, że suma dzielników każdej liczby pierwszej jest o 1 od niej większa. D

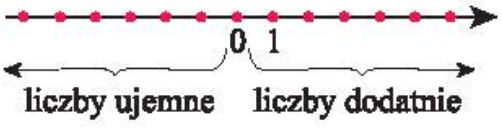
Liczby całkowite

Przypomnijmy

Liczby całkowite: ... , –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...

Liczby całkowite dodatnie: 1, 2, 3, ...

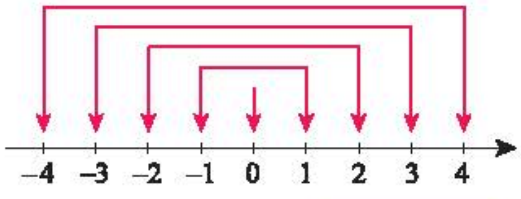
Liczby całkowite ujemne: ... , –3, –2, –1.



Liczba 0 nie jest ani liczbą całkowitą dodatnią, ani liczbą całkowitą ujemną.

- Liczby położone na osi liczbowej symetrycznie względem liczby 0 nazywamy liczbami przeciwnymi.
- Jeżeli a jest pewną liczbą, to $-a$ oznacza liczbę do niej przeciwną.

Liczba $-(-5)$ jest liczbą przeciwną do liczby –5.



$-a+a=0$ $\quad -(-a)=a$

Uwaga

Wszystkie liczby całkowite tworzą zbiór liczb całkowitych, który oznaczamy Z.

- $Z=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych, $N \subset Z$.
- $Z^+=\{1,2,3,\ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych dodatnich, czyli $Z^+=N^+$.
- $Z^- =\{\ldots,-3,-2,-1\}$ – zbiór liczb całkowitych ujemnych.
- $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$.
- Zbiór Z jest zbiorem nieskończonym. Nie można podać liczby całkowitej największej ani najmniejszej.

Ćwiczenie 13. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę.

a	–4	17	■	■	–13	■	■	0
$-a$	■	■	2	■	■	–9	■	■
$-(-a)$	■	■	■	–8	■	■	7	■

Uwaga

Wszystkie własności dotyczące podzielności liczb naturalnych i reszt z dzielenia odnoszą się również do liczb całkowitych.

Np. liczby …, –18, –13, –8, –3, 2, 7, … są liczbami postaci $5k+2$, gdzie $k \in Z$, czyli liczbami, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2.

Przykład 7. Oblicz resztę z dzielenia liczby:

a) –20 przez 3, **b)** –24 przez 7, **c)** –30 przez –4.

Rozwiązanie

a) Przedstawiamy liczbę –20 w postaci $-20 = 3 \cdot q + r$ tak, by r było liczbą naturalną, taką, że $0 \le r < 3$.

$-20 = 3 \cdot (-7) + 1$.

$21 + 1 = 20$

b) $-24 = 7 \cdot q + r$, gdzie $0 \le r < 7$, więc $-24 = 7 \cdot (-4) + 4$.

$28 + 4 = 24$

c) $-30 = -4 \cdot q + r$, gdzie $0 \le r < 4$, więc $-30 = -4 \cdot 8 + 2$.

$32 + 2 = 30$

Odp.: **a)** 1, **b)** 4, **c)** 2.

Ćwiczenie 14. Oblicz resztę z dzielenia liczby:

a) –53 przez 20, **b)** –200 przez 9, **c)** –132 przez –5.

Przypomnijmy

$a - 0 = a$ $\quad a \cdot 1 = a$

$a + 0 = a$ $\quad 1 + (-1) = 0$ $\quad 1 \cdot 1 = -1 \cdot (-1) = 1$ $\quad a : 1 = a$

$a - b - a + (-b)$ $\quad a - b = -b + a$ $\quad -1 \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1$

- Wykonując działania łączne na liczbach, należy pamiętać o kolejności działań. Jeśli nie ma nawiasów, to kolejność działań jest następująca:

  mnożenie i **dzielenie** *w kolejności ich występowania,*

  a następnie **dodawanie** i **odejmowanie** *w kolejności ich występowania.*

- Przy obliczeniach zawierających nawiasy najpierw wykonujemy działania w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma już nawiasów.

Przykład 8. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $[27:(-3)]:(14-5)$, **b)** $(-12):(-4)-(-3)\cdot(-5)+(-8):4+44$.

Rozwiązanie

a) $[27:(-3)]:(14-5)=-9:9=-1$,

b) $(-12):(-4)-(-3)\cdot(-5)+(-8):4+44=3-15-2+44=$

$$=(3+44)-(15+2)=47-17=30.$$

Ćwiczenie 15. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $-32:(16:8)$, **b)** $(-7+9)\cdot(3-5)$, **c)** $4-4\cdot7+5-5\cdot2+3-3\cdot4$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

14. **a)** 7, **b)** 7, **c)** 3. *Wskazówka.* **a)** $-53=20\cdot(-3)+7$, **b)** $-200=9\cdot(-23)+7$, **c)** $-132=-5\cdot27+3$.

15. **a)** –16, **b)** –4, **c)** –38.

Zadania utrwalające

3.10. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(-12):(-4)-3\cdot(-5)+(-8)\cdot4$, **b)** $1-[(-2)\cdot3-(-4)\cdot(-5)]\cdot(-2)+(-2)\cdot4$.

3.11. Oblicz:

a) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$,
b) $(-1):(-1):(-1):(-1)$,
c) $(-1):(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$,
d) $[(-13)\cdot(-17)\cdot0]:(-2)$,
e) $(-27-45)\cdot[-23-(-23)]$,
f) $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot2\cdot(-2)$.

3.12. D Uzasadnij, że jeśli $n\in Z$, to liczba całkowita zapisana w postaci:

a) $3n-4$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2,
b) $4n-30$ przy dzieleniu przez 4 daje resztę 2,
c) $7n-21$ jest podzielna przez 7,
d) $6n+19$ przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1.

3.13. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba $5n-21$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę:

A. 1, **B.** 2, **C.** 3, **D.** 4.

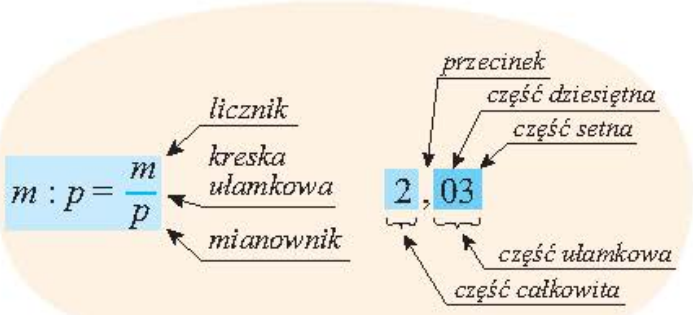
3.14. Oblicz reszty z dzielenia liczby:

a) –12 przez 3, 5, 8 i 10, **b)** –20 przez 2, 6, 7 i 15.

Liczby wymierne

Przypomnijmy

Liczbę nazywamy **wymierną**, jeżeli można przedstawić ją w postaci ułamka $\frac{m}{p}$, gdzie m i p są liczbami całkowitymi oraz $p \neq 0$.



- Liczby całkowite są liczbami wymiernymi, bo każdą z nich można przedstawić w postaci ułamka. Na przykład:

$$1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\ldots, \quad 0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{5}=\ldots, \quad -2=\frac{-2}{1}=-\frac{4}{2}=\frac{6}{-3}=\ldots.$$

- Jeżeli $\boldsymbol{a \neq 0}$, to liczby a i $\frac{1}{a}$ nazywamy liczbami odwrotnymi.

  Liczba 0 nie ma swojej odwrotności.

- Jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to odwrotnością liczby $\frac{a}{b}$ jest liczba $\frac{b}{a}$.

Liczby wymierne

Liczby, które można zapisać jako iloraz liczb całkowitych

Np.: $\frac{5}{11}$, $0{,}3$, $-\frac{3}{7}$, $-\frac{21}{100}$, $1\frac{4}{7}$, $\frac{7}{5}$, $-\frac{37}{10}$, -5

Ułamki właściwe

Wartość bezwzględna licznika jest mniejsza niż wartość bezwzględna mianownika

$\frac{5}{11}$, $\frac{3}{10}$, $-\frac{3}{7}$, $-\frac{21}{100}$

Ułamki niewłaściwe

Wartość bezwzględna licznika nie jest mniejsza niż wartość bezwzględna mianownika

$\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}$, $-\frac{37}{10}=-3\frac{7}{10}$, $-\frac{5}{1}=-5$

Ułamki dziesiętne to inaczej liczby dziesiętne

Ułamki, które można zapisać w postaci ułamka o mianowniku: 10, 100, 1000, ...

$\frac{3}{10}=0{,}3$, $-\frac{21}{100}=-0{,}21$, $-3\frac{7}{10}=-3{,}7$, $\frac{7}{5}=1{,}4$

Uwaga

Wszystkie liczby wymierne tworzą zbiór liczb wymiernych, który oznaczamy Q.

- Q^+ – zbiór liczb wymiernych dodatnich.
- Q^- – zbiór liczb wymiernych ujemnych.
- $Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$, $N \subset Q$, $Z \subset Q$.

Ćwiczenie 16. Wypisz wszystkie ułamki właściwe większe od zera o mianowniku: **a)** 3, **b)** 4, **c)** 5, **d)** 6, **e)** 7.

Ćwiczenie 17. Podaj ułamek właściwy większy od zera, którego suma licznika i mianownika jest równa 9. Czy jest tylko jeden taki ułamek właściwy? Podaj wszystkie możliwości.

Ćwiczenie 18. Podaj odwrotność liczby: **a)** 3, **b)** $\frac{1}{5}$, **c)** -2, **d)** $\frac{2}{3}$, **e)** $-2\frac{1}{4}$.

Ćwiczenie 19. Porównaj liczby: **a)** $-\frac{2}{5}$ i $-\frac{6}{5}$, **b)** $-2\frac{1}{3}$ i $-2\frac{2}{3}$, **c)** $-\frac{4}{3}$ i $-\frac{4}{5}$.

Przypomnijmy

Jeśli liczbę wymierną zapiszemy w postaci ułamka, to można:

- **skrócić ten ułamek** czyli **podzielić** jego **licznik i mianownik** przez tę samą liczbę całkowitą różną od zera,
- **rozszerzyć ten ułamek** czyli **pomnożyć** jego **licznik i mianownik** przez tę samą liczbę różną od zera.

Jeżeli $b \neq 0$ i $c \neq 0$, to:

$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$ *skracanie ułamka,*

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ *rozszerzanie ułamka.*

Polecenie „**skróć ułamek**” oznacza przedstawienie tego ułamka w najprostszej postaci, czyli w postaci ułamka nieskracalnego.

Ułamek nieskracalny to iloraz dwóch liczb całkowitych, których największy wspólny dzielnik jest równy 1.

Ćwiczenie 20. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taką liczbę, by prawdziwa była równość: **a)** $\frac{16}{40} = \frac{■}{15}$, **b)** $\frac{75}{100} = \frac{-6}{■}$, **c)** $-0{,}12 = \frac{■}{-175}$.

Przykład 9. Wykonaj działania.

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=-\frac{3\cdot 5}{4\cdot 7}=-\frac{15}{28}$,

b) $\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{9}_{3}}\cdot\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{16}_{4}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{12}$,

c) $\frac{2}{3}\cdot 7=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{1}=4\frac{2}{3}$,

d) $15\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{\cancel{15}^{5}\cdot 2}{\cancel{3}_{1}}=-10$.

Jeżeli $b\neq 0$ i $d\neq 0$, to $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Jeżeli $b\neq 0$, to $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{a\cdot c}{b}$.

Ćwiczenie 21. Wykonaj działanie i wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

a) $-\frac{3}{5}\cdot 0-\left(1\frac{1}{2}\right):1\frac{2}{3}$, b) $-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)$, c) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{12}$.

Ćwiczenie 22. Oblicz: a) $\left(1\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{12}$, b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(6\frac{3}{5}-7\right)$, c) $\dfrac{1\frac{1}{3}:2\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{0,2}$.

Przypomnijmy

Jedną z metod zamiany ułamka zwykłego na dziesiętny jest dzielenie licznika tego ułamka przez jego mianownik. Możemy wtedy otrzymać **rozwinięcie dziesiętne** tej liczby, które może być **skończone** lub **nieskończone okresowe**.

$\frac{1}{9}=0,111...$

$\frac{2}{9}=0,222...$ $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}=0,333...$ $\frac{4}{9}=0,444...$

Aby odróżnić ułamki mające rozwinięcie skończone od tych o rozwinięciu nieskończonym okresowym należy je najpierw skrócić.

- **Ułamek nieskracalny ma rozwinięcie dziesiętne skończone**, gdy jego mianownik można przedstawić jako iloczyn liczb 2 lub liczb 5, lub liczb 2 i 5, na przykład
$\frac{1}{40}=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}=0,025$, $\frac{5}{32}=\frac{5}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=0,15625$.
- **Ułamek nieskracalny ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone (okresowe)**, gdy jego mianownik można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych, z których co najmniej jedna jest różna od 2 i 5, na przykład
$\frac{5}{12}=\frac{5}{2\cdot 2\cdot 3}=0,41666...$, $\frac{8}{15}=\frac{8}{3\cdot 5}=0,5333...$.

Uwaga. Jednoczesne zachodzenie dwóch nierówności $a<b$ i $b<c$ można zapisać w postaci $a<b<c$, zwanej **nierównością podwójną**.

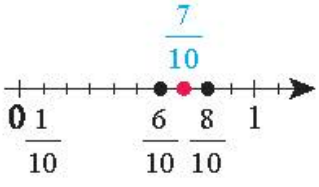
Ćwiczenie 23. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taką liczbę, by prawdziwa była nierówność: **a)** $2<\frac{\blacksquare}{3}<3$, **b)** $-\frac{2}{3}<\frac{\blacksquare}{-9}<-\frac{1}{3}$, **c)** $-\frac{7}{9}<\frac{-25}{\blacksquare}<-\frac{6}{9}$.

Przykład 10. Podaj przykład liczby wymiernej w takiej, że $\frac{3}{5}<w<\frac{4}{5}$.

Rozwiązanie. Rozszerzamy ułamki $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$, mnożąc liczniki i mianowniki np. przez 2:

$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ i $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$, więc $\frac{6}{10}<w<\frac{8}{10}$.

Zatem w może być równe $\frac{7}{10}$, bo $\frac{7}{10}>\frac{6}{10}$ i $\frac{7}{10}<\frac{8}{10}$.



$\frac{6}{10}<\frac{7}{10}<\frac{8}{10}$, więc $w=\frac{7}{10}$.

Ćwiczenie 24. Podaj przykład liczby wymiernej w takiej, że:

a) $1<w<2$, **b)** $1<w<1{,}1$, **c)** $1<w<1{,}0001$,

d) $0{,}01<w<0{,}011$, **e)** $\sqrt{2}<w<\sqrt{3}$, **f)** $\sqrt{2}<w<\frac{3}{2}$.

Przypomnijmy

Rozwinięcie okresowe liczby to takie rozwinięcie dziesiętne, które jest nieskończone i w którym od pewnego miejsca ta sama cyfra lub taka sama grupa cyfr powtarza się. Powtarzającą się cyfrę lub grupę cyfr nazywamy **okresem** i zapisujemy ją w nawiasie.

Na przykład:

$\frac{1}{6}=0{,}1\underbrace{666\ldots}=0{,}1(6)$, *powtarza się cyfra 6*

$\frac{2}{7}=0{,}\underbrace{285714}\underbrace{285714}28\ldots=0{,}(285714)$. *powtarzają się cyfry 285714*

Ćwiczenie 25. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz odpowiedni znak: „<”, „>” lub „=” .

a) $0{,}(3)\ \blacksquare\ \frac{1}{3}$, **b)** $\frac{1}{4}\ \blacksquare\ 0{,}(25)$, **c)** $0{,}(2)\ \blacksquare\ \frac{1}{5}$, **d)** $\frac{1}{10}\ \blacksquare\ 0{,}(1)$.

Ćwiczenie 26. Odczytaj z rozwinięcia dziesiętnego okres i zapisz z użyciem tego okresu liczbę:

a) $0{,}444\ldots$, **b)** $5{,}2012012012\ldots$, **c)** $1{,}0121212\ldots$, **d)** $0{,}34434343\ldots$,

e) $7{,}21721721\ldots$, **f)** $0{,}0010010010\ldots$.

Przykład 11. Uzasadnij, że: **a)** $0,(3)=\frac{1}{3}$, **b)** $0,(36)=\frac{4}{11}$.

Rozwiązanie

a)
$$x=0,(3)$$
$$x=0,333... \quad /\cdot 10$$
$$10x=3,333...$$
$$10x=3+\underbrace{0,333...}_{x}$$
$$10x=3+x$$
$$9x=3$$
$$x=\frac{1}{3} \qquad \textit{c.n.u.}$$

b)
$$x=0,(36)$$
$$x=0,363636... \quad /\cdot 100$$
$$100x=36,3636...$$
$$100x=36+\underbrace{0,3636...}_{x}$$
$$100x=36+x$$
$$99x=36$$
$$x=\frac{36}{99}=\frac{4}{11} \qquad \textit{c.n.u.}$$

Ćwiczenie 27. Uzasadnij, że:

a) $0,(9)=1$, **b)** $0,(72)=\frac{8}{11}$, **c)** liczba $3,(6)\cdot 0,(27)$ jest całkowita,

d) $1,(5)+0,(6)=2,(1)$.

Uwaga

Liczby całkowite są liczbami wymiernymi, bo każdą z nich można przedstawić w postaci ułamka. Na przykład:

$$1=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=...,\quad 0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\frac{0}{5}=...,\quad -2=\frac{-2}{1}=-\frac{4}{2}=\frac{6}{-3}=....$$

Odpowiedzi do ćwiczeń

16. **a)** $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, **b)** $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$, **c)** $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, **d)** $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$, **e)** $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$.

17. $\frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{4}{5}$. **18.** **a)** $\frac{1}{3}$, **b)** 5, **c)** $-\frac{1}{2}$, **d)** $\frac{3}{2}$, **e)** $-\frac{4}{9}$.

19. **a)** $-\frac{2}{5}>-\frac{6}{5}$, **b)** $-2\frac{1}{3}>-2\frac{2}{3}$, **c)** $-\frac{4}{3}<-\frac{4}{5}$.

20. **a)** 6, **b)** –8, **c)** 21. **21.** **a)** –0,9, **b)** 0,25, **c)** 2. **22.** **a)** 13, **b)** 0,7, **c)** 5.

24. Np.: **a)** 1,5, **b)** 1,09, **c)** 1,00005, **d)** 0,01055, **e)** 1,6, **f)** 1,43. **25.** **a)** „=”, **b)** „<”, **c)** „>”, **d)** „<”.

26. **a)** $0,(4)$, **b)** $5,(201)$, **c)** $1,0(12)$, **d)** $0,34(43)$, **e)** $7,(217)$, **f)** $0,(001)$.

Zadania utrwalające

3.15. Wypisz wszystkie ułamki właściwe dodatnie, których:
a) suma licznika i mianownika jest równa 10,
b) iloczyn licznika i mianownika jest równy 12.

3.16. Uporządkuj rosnąco liczby:
a) $\frac{28}{21}, \frac{3}{21}, \frac{1}{21}, \frac{100}{21}$, **b)** $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{14}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{100}$, **c)** $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{15}, -\frac{7}{15}$.

3.17. D Wykaż, że jeżeli $a=\frac{30}{50}$ i $b=\frac{36}{60}$, to $a=b$.

3.18. Bartek ma zaznaczyć na osi liczbowej liczby: $-\frac{2}{3}, -\frac{28}{42}, -\frac{35}{42}, -\frac{10}{15}, -\frac{15}{18}$.
Ile różnych punktów powinien Bartek zaznaczyć na osi?

3.19. D Uzasadnij, że rozwinięcie dziesiętne skończone ma ułamek:
a) $\frac{7}{125}$, **b)** $\frac{15}{16}$, **c)** $\frac{51}{85}$, **d)** $\frac{26}{65}$.

3.20. D Uzasadnij, że rozwinięcie dziesiętne okresowe ma ułamek:
a) $\frac{7}{75}$, **b)** $\frac{11}{150}$, **c)** $\frac{199}{120}$, **d)** $\frac{15}{140}$.

3.21. Podaj najmniejszą liczbę dziesiętną z dwoma miejscami po przecinku, która jest większa od liczby:
a) $0,(3)$, **b)** $0,(2)$, **c)** $0,(1)$, **d)** $0,(5)$.

3.22. Oblicz:
a) $\left[15\frac{2}{3}-\left(-7\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{3}{2}$, **b)** $2\frac{1}{3}\left(\frac{7}{8}+1,5-0,75\right)$, **c)** $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2,1:1\frac{2}{5}$.

3.23. Zamień na ułamek zwykły liczbę:
a) $0,(5)$, **b)** $0,(45)$, **c)** $0,(729)$, **d)** $0,0(27)$.

3.24. D Uzasadnij, że:
a) $0,(4)+0,(2)=0,(6)$, **b)** $0,(4)-0,(2)=0,(2)$, **c)** $0,(4):0,(2)=2$,
d) liczba $\frac{\sqrt{44,(4)}}{0,(6)}$ jest całkowita.

Liczby niewymierne

Wszystkie liczby niewymierne tworzą zbiór liczb niewymiernych, który oznaczamy $R \setminus Q$.

Liczbę nazywamy **niewymierną**, gdy nie jest ona liczbą wymierną, czyli **nie można jej przedstawić w postaci ułamka** $\frac{m}{p}$, gdzie m i p są liczbami całkowitymi oraz $p \neq 0$.

- Liczbami niewymiernymi są wszystkie pierwiastki:
  - kwadratowe, gdy liczba podpierwiastkowa nie jest kwadratem liczby wymiernej. Np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, ..., $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{0,5}$, ...
  - sześcienne, gdy liczba podpierwiastkowa nie jest sześcianem liczby wymiernej. Np. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, ..., $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$, ...
- Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe.

  Na przykład: $\pi = 3,141592653...$, $\sqrt{2} = 1,4142135...$,

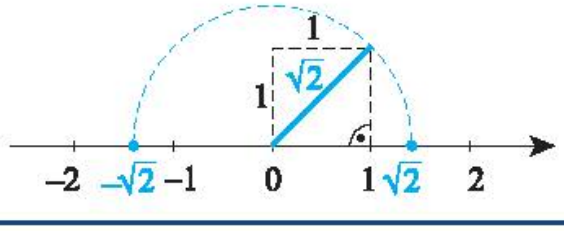
  $-\sqrt{5} = -2,2360679...$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,8660254...$.
- Suma (różnica), iloczyn (iloraz) liczby wymiernej różnej od 0 i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie 28. Spośród liczb: $\sqrt{49}$, $\sqrt{18}+1$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{81-36}$, $\sqrt{81}-\sqrt{36}$ wskaż te, które są: **a)** naturalne, **b)** całkowite ujemne, **c)** niewymierne.

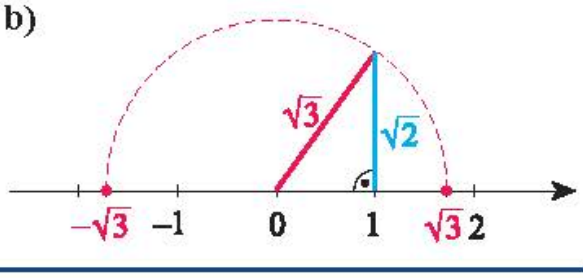
Przykład 12. Na osi liczbowej zaznacz punkty, których współrzędnymi są liczby:
a) $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$, **b)** $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że długość przekątnej kwadratu o boku 1 jest równa $\sqrt{2}$, a długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i $\sqrt{2}$ jest równa $\sqrt{3}$.

a)



b)



Ćwiczenie 29. Na osi liczbowej zaznacz punkty A, B, C, D, E takie, że:

$A=(-6,5)$, $B=(0,(3))$, $C=(\sqrt{2}-1)$, $D=(2\sqrt{2})$, $E=(-2\sqrt{3})$.

Przykład 13. Podaj przykład liczby niewymiernej p takiej, że $-50 < p < -49$.

Rozwiązanie. Przedstawiamy liczby -50 i -49 w postaci np. pierwiastków kwadratowych:

$-50=-\sqrt{2500}$ i $-49=-\sqrt{2401}$.

Zatem p może być równe np: $-\sqrt{2402}$, $-\sqrt{2415}$ itp.

Ćwiczenie 30. Podaj przykład liczby niewymiernej p takiej, że:

a) $1<p<2$, **b)** $0<p<1$, **c)** $0<p<0{,}1$, **d)** $-1<p<0$.

Uwaga

Dla dowolnych liczb a i b takich, że $a<b$, istnieje taka liczba niewymierna p, że $a<p<b$.

Ćwiczenie 31. Zapisz liczby w takiej kolejności, w jakiej leżą na osi liczbowej.

a) π, $\frac{22}{7}$, $3,(14)$, **b)** $-\sqrt{2}$, $-1,(4)$, $\sqrt{3}-3$.

Przykład 14. Udowodnij, że liczba $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną.

Dowód nie wprost:

1° Zakładamy, że $\sqrt{5}$ jest liczbą wymierną, czyli że

$\sqrt{5}=\frac{m}{n}$, gdy $\mathrm{NWD}(m,n)=1$,

gdzie $m\in N^+$ i $n\in N^+\setminus\{1\}$.

$\frac{m}{n}$ – *ułamek nieskracalny*

2° $\sqrt{5}=\frac{m}{n}$, więc $5=\frac{m^2}{n^2}$, skąd $n^2=\frac{m^2}{5}$.

Kwadraty liczb dodatnich równych są równe.

3° Z równości $n^2=\frac{m^2}{5}$ wnioskujemy, że liczba 5 jest dzielnikiem m.

4° Z 3° wnioskujemy, że 25 jest dzielnikiem m^2.

5° Z 3° i 4° wnioskujemy, że 5 jest dzielnikiem n.

Jest to sprzeczne z założeniem, że ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. ***c.k.d.***

Ćwiczenie 32. Uzasadnij, że liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Przykład 15. Uzasadnij, że $\sqrt{2}-3$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie

Z (*założenie*):	*T* (*teza*):
$\sqrt{2}$ – liczba niewymierna,	$\sqrt{2}-3$ – liczba niewymierna.
-3 – liczba wymierna.	

Dowód nie wprost:

1° Zaprzeczamy tezie *T*

$$\sqrt{2}-3=\frac{m}{n}, \text{ gdzie } m\in Z \text{ i } n\in Z\setminus\{0,1\}.$$

2° $\sqrt{2}=\frac{m}{n}+3.$

3° Z 2° wnioskujemy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną, co jest sprzeczne z założeniem *Z*. ***c.k.d.***

$\frac{m}{n}+3$ – *liczba wymierna*

Ćwiczenie 33. Uzasadnij, że niewymierną jest liczba: **a)** $\sqrt{3}+1$, **b)** $\pi-2$.

Uwaga

Jeżeli *a* jest liczbą wymierną i *b* liczbą niewymierną, to liczby:

$$\bullet\ a+b,\quad \bullet\ a-b,\quad \bullet\ a\cdot b,\quad \bullet\ \frac{a}{b},\quad \bullet\ \frac{b}{a},\quad \text{gdzie } a\neq 0,$$

są liczbami niewymiernymi.

Odpowiedzi do ćwiczeń

28. a) $\sqrt{49}$, $\sqrt{81}-\sqrt{36}$, b) $\sqrt[3]{-27}$, c) $\sqrt{18}+1$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{81-36}$. 30. Np. a) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{0,99}$, $\sqrt{0,3}$, c) $\sqrt{0,00002}$, $\sqrt{0,0003}$, d) $-\sqrt{0,2}$, $-\sqrt{\frac{3}{4}}$. 31. a) $3,(14)$, π, $\frac{22}{7}$, b) $-1,(4)$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-3$.

Zadania utrwalające

3.25. Na osi liczbowej zaznacz punkty, których współrzędnymi są liczby:

a) $\sqrt{5}$ i $-\sqrt{5}$, **b)** $\sqrt{6}$ i $-\sqrt{6}$, **c)** $\sqrt{5}$ i $-\sqrt{6}$.

3.26. Wskaż liczby niewymierne spośród liczb:

a) $\sqrt{1,21}$, $\sqrt[3]{2,7}$, $\sqrt[3]{0,008}$, $\sqrt[3]{-0,125}$, $\sqrt{1,96}$,

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{-16}$, $\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{22,5}$,

c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{-2}}$, $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{11}}$, $\frac{\sqrt[3]{0{,}01}}{\sqrt[3]{100}}$, $\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{10}}$.

3.27. Spośród liczb $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}+1$, $\sqrt[3]{125}$, $-\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{1}+\sqrt{9}$, π wybierz te liczby, które są:

a) niewymierne, **b)** wymierne, **c)** całkowite, **d)** naturalne.

3.28. Podaj przykład liczby niewymiernej p takiej, że:

a) $10 < p < 11$, **b)** $-5 < p < -4$, **c)** $1000 < p < 1001$,

d) $\sqrt{2} < p < \sqrt{3}$, **e)** $\sqrt[3]{3} < p < \sqrt[3]{4}$, **f)** $\sqrt{5} < p < \sqrt[3]{30}$.

3.29. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Pole koła o promieniu 1 jest liczbą wymierną.	P	F
Obwód koła o promieniu $\frac{1}{\pi}$ jest liczbą wymierną.	P	F

Liczby rzeczywiste

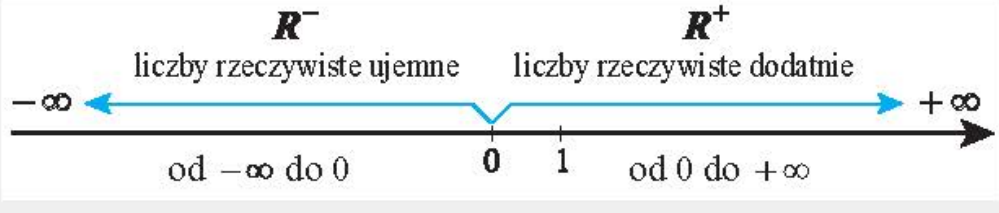
Zbiór wszystkich liczb wymiernych i wszystkich liczb niewymiernych tworzą jeden zbiór liczb rzeczywistych, który oznaczamy symbolem R.



Uwaga

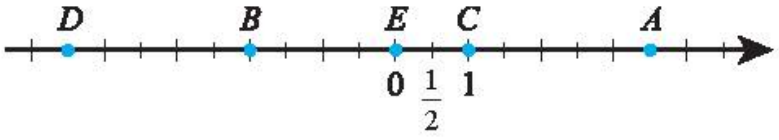
Oś liczbowa jest obrazem graficznym zbioru liczb rzeczywistych.

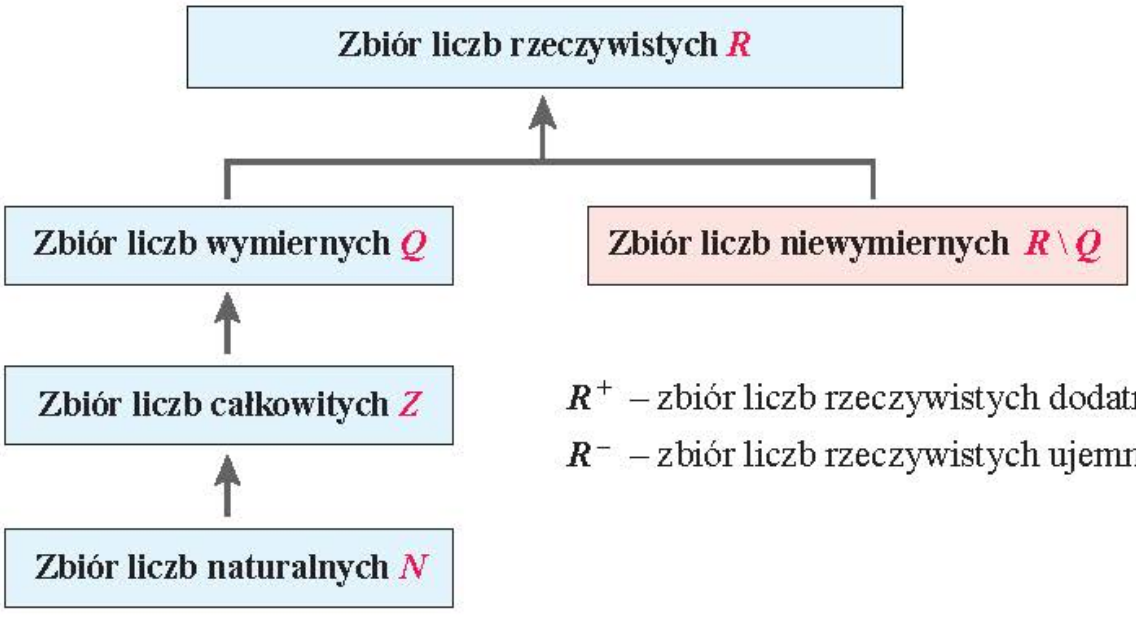
Zamiast mówić „punkt o współrzędnej”, mówimy „liczba na osi”.



$-\infty$ *czytamy* minus nieskończoność $+\infty$ *czytamy* plus nieskończoność

Ćwiczenie 34. Odczytaj i zapisz współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.





R^+ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,
R^- – zbiór liczb rzeczywistych ujemnych.

Zbiory liczbowe: N, Z, Q, $R\setminus Q$ są podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych R.

Prawa i własności, które zachodzą dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c.

Działanie	Prawa i własności działania
Dodawanie	$a+b=b+a$ – *przemienność dodawania* $a+(b+c)=(a+b)+c$ – *łączność dodawania*
Odejmowanie	$a-b=a+(-b)$
Mnożenie	$a\cdot b=b\cdot a$ – *przemienność mnożenia* $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ – *łączność mnożenia* $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ – *rozdzielność mnożenia względem dodawania*
Dzielenie	$a:b=a\cdot\frac{1}{b}$, gdzie $b\neq 0$

Ćwiczenie 35. Spośród równości oznaczonych cyframi od **1** do **5** wskaż te, w których błędnie zastosowano prawa działań.

1 $4+(-7)=-7+4$, **2** $(1-\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}=1-3$, **3** $-3+(8-12)=(-3+8)-12$,

4 $\left[6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot(-2)=(-2\cdot 6)\cdot\left[(-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$, **5** $-2\cdot[(-4)+7]=(-2)\cdot(-4)+(-2)\cdot 7$.

Ćwiczenie 36. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce kratki ■ wpisz taką liczbę, by prawdziwa była równość: **a)** $-15+\blacksquare=-15$, **b)** $\blacksquare\cdot 7=1$, **c)** $\sqrt{2}\cdot\blacksquare=\sqrt{2}$, **d)** $3+\blacksquare=0$, **e)** $\blacksquare\cdot\sqrt{3}=-1$, **f)** $\sqrt{2}-1+\blacksquare=0$.

Uwaga. Jeżeli w wyrażeniu arytmetycznym nie ma nawiasów, to kolejność wykonywania działań jest następująca:

potem **potęgowanie** i **pierwiastkowanie**[1)],

a następnie **mnożenie** i **dzielenie**, *w kolejności ich występowania,*

dodawanie i **odejmowanie**, *w kolejności ich występowania.*

Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy wykonujemy najpierw działania (według powyższych reguł) w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych nawiasów.

[1)] Gdy pod pierwiastkiem wykonano wszystkie działania.

Każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w różnej postaci, np.:

$$\underbrace{\frac{7}{2}}_{\text{ułamek}}=\underbrace{3\frac{1}{2}}_{\substack{\text{liczba}\\ \text{mieszana}}}=\underbrace{3{,}5}_{\substack{\text{liczba}\\ \text{dziesiętna}}}=\underbrace{7\cdot\frac{1}{2}}_{\substack{\text{iloczyn}\\ \text{dwóch liczb}}}=\underbrace{7:2}_{\substack{\text{iloraz}\\ \text{dwóch liczb}}}=\underbrace{\sqrt{\frac{49}{4}}}_{\text{pierwiastek}}=\underbrace{2+1\frac{1}{2}}_{\substack{\text{suma dwóch}\\ \text{liczb}}}=\underbrace{5-1\frac{1}{2}}_{\substack{\text{różnica}\\ \text{dwóch liczb}}}=\ldots$$

Ćwiczenie 37. Przedstaw w trzech różnych postaciach liczbę: **a)** 0, **b)** 1, **c)** $\frac{1}{2}$, **d)** -2.

Odpowiedzi do ćwiczeń

34. $A=\left(3\frac{1}{2}\right)$, $B=(-2)$, $C=(1)$, $D=\left(-4\frac{1}{2}\right)$, $E=(0)$. **35.** **2** i **4**.

36. **a)** 0, **b)** $\frac{1}{7}$, **c)** 1, **d)** -3, **e)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, **f)** $1-\sqrt{2}$. **37.** Np.: **a)** $\frac{0}{2}$, $\sqrt{0}$, $(1-1)^2$.

Zadania utrwalające

3.30. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz symbol „$\in$” lub „$\notin$” tak, by otrzymać zdanie prawdziwe.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ \blacksquare\ Q$, **b)** $0,(3)-0,3\ \blacksquare\ Q$, **c)** $\left(\sqrt{5}\right)^2\ \blacksquare\ Z$,

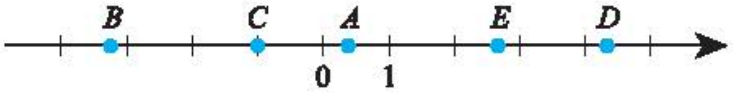
d) $\sqrt{3}-2\ \blacksquare\ R^+$, **e)** $-3+\sqrt{5}\ \blacksquare\ R^-$, **f)** $\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{12}\right)\ \blacksquare\ Z^-$.

3.31. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz znak „$\cap$”, „$\cup$” lub „$\setminus$” tak, by otrzymać zdanie prawdziwe.

a) R ■ $Q = Q$, b) R ■ $Q = R$, c) N ■ $Q = N$,

d) N ■ $R \setminus Q = \emptyset$, e) N ■ $Q = Q$, f) $(R \setminus Q)$ ■ $Q = R$.

3.32. Każdemu z punktów A, B, C, D, E zaznaczonych na rysunku



przyporządkuj jedną spośród liczb: $-3\frac{1}{4}$, -1, $\frac{1}{3}$, 2,8, 4,(3), która jest jego współrzędną.

3.33. Liczby: $\sqrt{2}$, $-3{,}2$, -2π, 2,8, $-6\frac{1}{3}$, 4 uporządkuj w takiej kolejności, w jakiej leżą na osi liczbowej.

3.34. Podaj przykłady liczb całkowitych dodatnich m i k spełniających nierówność $\frac{4}{9} < \frac{m}{k} < \frac{5}{9}$.

3.35. Podaj przykład liczby niewymiernej p, takiej że $-100 < p < -99$.

3.36. D Uzasadnij, że liczby $-\sqrt{3}$ i $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ są odwrotne względem siebie.

3.37. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczbą wymierną w spełniającą warunek $\frac{\sqrt{2}}{2} < w < \frac{\sqrt{3}}{2}$, może być liczba:

A. $\frac{9}{16}$, B. $\frac{10}{16}$, C. $\frac{11}{16}$, D. $\frac{12}{16}$.

3.38. Podaj przykłady liczb a, b, c i d spełniających jednocześnie warunki: $a < b$, $c < d$, $a > c$, $d > b$ i zaznacz je na osi liczbowej.

3.39. Spośród liczb: $-1\frac{1}{5}$, 1,25, $2\frac{2}{5}$, $-2{,}5$ wybierz wszystkie możliwe pary liczb tak, aby wynik ich:

a) mnożenia był liczbą całkowitą, **b)** dzielenia był liczbą całkowitą.

3.40. Przedstaw w postaci potęgi jednej liczby wyrażenie:

a) $2^{19} + 2^{19}$, b) $3 \cdot 2^{15} - 2^{15}$, c) $\left(\frac{1}{4}\right)^6 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6$.

3.41. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Druga potęga liczby $2\sqrt{2}$ jest równa:

A. $4\sqrt{2}$, **B.** 8.

Trzecia potęga liczby $2\sqrt[3]{-2}$ jest równa:

C. -8, **D.** -16.

3.42. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Liczba 2,4 przedstawiona w postaci pierwiastka kwadratowego to $\sqrt{5\frac{19}{25}}$.	P	F
Liczba $1\frac{2}{3}$ przedstawiona w postaci pierwiastka sześciennego to $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$.	P	F
Liczbę 0 można przedstawić w postaci wyrażenia: $-1-[-(-1)]$.	P	F
Wartość wyrażenia $\sqrt{6+5\sqrt{2\left(9+3\sqrt{9}\right)}}$ jest liczbą wymierną.	P	F

Przedziały liczbowe

Przypomnijmy

Oś liczbowa jest obrazem graficznym zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. Na osi liczbowej można wskazywać zbiory liczb spełniające pewne określone warunki.

Ćwiczenie 38. Zaznacz na osi liczbowej zbiór punktów, których współrzędne x spełniają warunek: **a)** $x \neq 3$, **b)** $x \geq 2$, **c)** $x \leq -5$.

Ćwiczenie 39. Zapisz symbolicznie (w postaci nierówności) warunek, jaki spełniają liczby x zaznaczone na osi liczbowej.

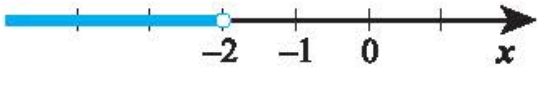
a)



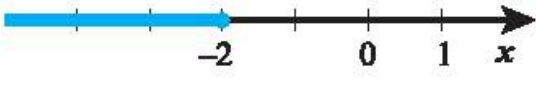
b)



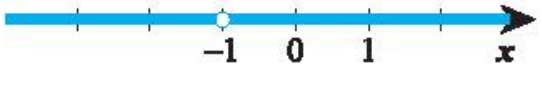
c)



d)



e)



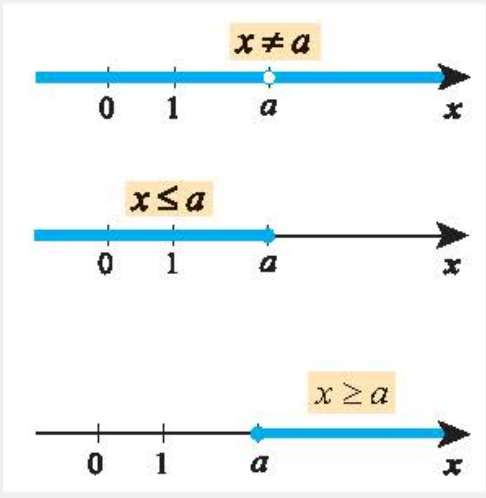
f)



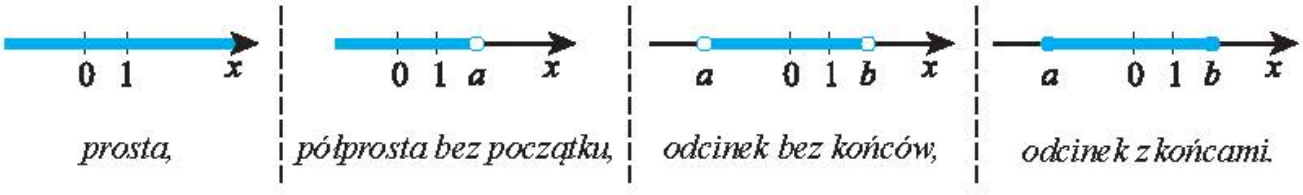
Uwaga

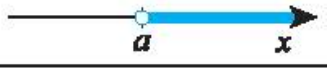
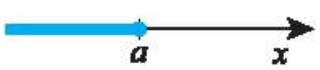
Jeżeli na osi liczbowej zaznaczymy dowolny punkt o współrzędnej a, to zapis:

- $x \neq a$ oznacza zbiór punktów leżących na osi, których współrzędne spełniają warunek: $x < a$ lub $x > a$,
- $x \leq a$ oznacza zbiór punktów leżących na osi, których współrzędne spełniają warunek: $x < a$ lub $x = a$,
- $x \geq a$ oznacza zbiór punktów leżących na osi, których współrzędne spełniają warunek: $x > a$ lub $x = a$.



Na osi liczbowej wyróżniamy szczególne zbiory, zwane przedziałami liczbowymi. Ich ilustracją graficzną na osi może być prosta (oś liczbowa), półprosta z początkiem lub bez, albo odcinek z końcami lub bez.



Przedział	Nazwa przedziału	Warunek, który spełniają liczby rzeczywiste x należące do przedziału	Ilustracja graficzna przedziału na osi
$(a; +\infty)$	przedział otwarty	$x > a$	
$(-\infty; a)$	przedział otwarty	$x < a$	
$\langle a; +\infty)$	przedział lewostronnie domknięty	$x \geq a$	
$(-\infty; a\rangle$	przedział prawostronnie domknięty	$x \leq a$	

Uwaga

Zbiór liczb rzeczywistych R możemy zapisać jako przedział $(-\infty; +\infty)$, czyli $R = (-\infty; +\infty)$.

Ćwiczenie 40. Nazwij i zaznacz na osi liczbowej przedział:
a) $(-\infty; 4)$, **b)** $(-\infty; -5)$, **c)** $(3; +\infty)$, **d)** $\langle -4; +\infty)$.

Przykład 16. Na osi liczbowej zaznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, które są większe od liczby -1 i jednocześnie są mniejsze od liczby 4, czyli liczby x spełniające warunki $x > -1$ i $x < 4$.

Rozwiązanie. Warunki $x > -1$ i $x < 4$ można zapisać w postaci $-1 < x < 4$. Ilustracją graficzną zbioru liczb x spełniających powyższe warunki jest odcinek bez końców (co oznaczono na rysunku pustymi kółeczkami).



Warunek $-1 < x < 4$ opisuje przedział $(-1; 4)$, który nazywamy przedziałem ograniczonym, obustronnie otwartym lub krótko – przedziałem otwartym o końcach -1 i 4.

Ćwiczenie 41. Zapisz w postaci podwójnej nierówności warunki:
a) $x > 0$ i $x < 5$, **b)** $x \geq -2$ i $x < 0$, **c)** $x > -8$ i $x \leq -6$.

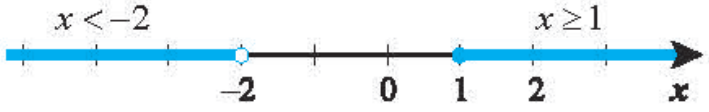
Przedział	Nazwa przedziału	Warunek, który spełniają liczby rzeczywiste x należące do przedziału	Ilustracja graficzna przedziału na osi
$(a; b)$	przedział otwarty	$a < x < b$, czyli $x \in (a; b)$,	
$\langle a; b\rangle$	przedział domknięty	$a \leq x \leq b$, czyli $x \in \langle a; b\rangle$,	
$(a; b\rangle$	przedział prawostronnie domknięty (lewostronnie otwarty)	$a < x \leq b$, czyli $x \in (a; b\rangle$,	
$\langle a; b)$	przedział prawostronnie otwarty (lewostronnie domknięty)	$a \leq x < b$, czyli $x \in \langle a; b)$,	

Ćwiczenie 42. Zaznacz na osi liczbowej przedział:
a) $(-3; 2)$, **b)** $\langle -1; 4)$, **c)** $\langle -5; -1\rangle$, **d)** $(-2; 0\rangle$.

Przykład 17. Na osi liczbowej zaznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, które spełniają warunki: **a)** $x<-2$ lub $x\geq 1$, **b)** $x\leq 4$ lub $x>4$, **c)** $x<2$ i $x>2$.

Rozwiązanie

a) Warunki $x<-2$ lub $x\geq 1$ spełniają liczby rzeczywiste x należące do przedziału $(-\infty;-2)$ lub do przedziału $\langle 1;+\infty)$.



$x\in(-\infty;-2)$ lub $x\in\langle 1;+\infty)$.

b) Warunki $x\leq 4$ lub $x>4$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste, gdzie $x\in(-\infty;4\rangle$ lub $x\in(4;+\infty)$, czyli $x\in R$.



$x\in R$

c) Warunków $x<2$ i $x>2$ nie spełnia żadna liczba rzeczywista, bo liczba nie może być jednocześnie mniejsza niż 2 i większa od 2.

Ćwiczenie 43. Na osi liczbowej zaznacz zbiór liczb, które należą:

a) do przedziału $(1;+\infty)$ lub do przedziału $(-\infty;-3)$,

b) do przedziału $(-\infty;0\rangle$ lub do przedziału $\langle 0;+\infty)$,

c) do przedziału $(-\infty;5\rangle$ i do przedziału $\langle 5;+\infty)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

39. **a)** $x\geq -2$, **b)** $x>-2$, **c)** $x<-2$, **d)** $x\leq -2$, **e)** $x\neq -1$, **f)** $x\neq 1\frac{1}{2}$.

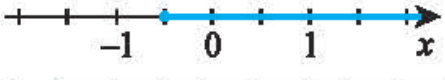
41. **a)** $0<x<5$, **b)** $-2\leq x<0$, **c)** $-8<x\leq -6$. **43.** *Wskazówka.* **b)** $(-\infty;+\infty)$, **c)** $\{5\}$.

Zadania utrwalające

3.43. Zapisz za pomocą nierówności warunek:

a) Liczba m jest większa od $-3{,}3$.
b) Liczba n jest nie większa od 0.
c) Liczba k jest ujemna.
d) Liczba s jest dodatnia.
e) Liczba x jest niedodatnia.
f) Liczba y jest mniejsza od 14.
g) Liczba z jest nie mniejsza niż -5.
h) Liczba t jest nieujemna.

3.44. Zapisz nierówność, jaką spełniają wszystkie liczby zaznaczone kolorem niebieskim na osi liczbowej.

a)


b)


c)


d)


3.45. Zaznacz na osi liczbowej przedział:

a) $\langle -2; 1\rangle$, **b)** $(-\infty; 3\rangle$, **c)** $(-3; 4)$, **d)** $(0; +\infty)$, **e)** $(-5; 1\rangle$.

3.46. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb rzeczywistych spełniających warunki:

a) $x > -2$, **b)** $x \leq -5$, **c)** $x \geq 0$ i $x < 2$,

d) $x > -3$ i $x < -1$, **e)** $x \leq 4$ i $x \geq 0$,

f) $x > 5$ i $x \leq 10$, **g)** $x \geq -\sqrt{2}$ i $x \leq \sqrt{2}$.

3.47. Zapisz warunki, jakie spełniają liczby rzeczywiste x należące do przedziału:

a) $(-\infty; 0\rangle$, **b)** $\langle 4; +\infty)$, **c)** $\langle -5; +\infty)$, **d)** $(-2; 0)$, **e)** $\langle 1; 3\rangle$,

f) $\langle -2; 4)$, **g)** $(-3; 5\rangle$, **h)** $\langle 0; 4)$, **i)** $\langle -2; 2\rangle$, **j)** $\langle -100; 1\rangle$.

3.48. Podaj wszystkie liczby naturalne należące do przedziału:

a) $(-1; 1)$, **b)** $\langle -1; 1\rangle$, **c)** $(0; 3)$, **d)** $\langle 0; 3)$, **e)** $(0; 3\rangle$.

3.49. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do przedziału:

a) $(-1; 4\rangle$, **b)** $\left\langle -\frac{1}{5}; 2\right)$, **c)** $(-\pi; \pi\rangle$, **d)** $\left(-2\sqrt{2}; \sqrt{7}\right\rangle$.

3.50. Zaznacz na osi liczbowej przedział $\langle -8; 3\rangle$ i podaj:

a) wszystkie liczby naturalne należące do tego przedziału,

b) trzy liczby niewymierne należące do tego przedziału,

c) trzy liczby całkowite, które nie należą do tego przedziału,

d) liczbę najmniejszą należącą do tego przedziału,

e) liczbę największą należącą do tego przedziału,

f) wszystkie liczby całkowite z tego przedziału nie mniejsze niż zero,

g) liczby naturalne dodatnie należące do tego przedziału.

3.51. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Do przedziału $\langle -1; 3\rangle$ należą tylko dwie liczby naturalne.	**P**	**F**
Jedna z liczb $0,(3)$ lub $1,7(6)$ należy do przedziału $(0,3; 1,76)$.	**P**	**F**
Do przedziału $\langle 2; 8\rangle$ należy iloczyn $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$.	**P**	**F**

3.52. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb rzeczywistych:

a) nieujemnych, **b)** dodatnich, **c)** ujemnych, **d)** niedodatnich.

3.53. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb x spełniających warunki:

a) $x<-5$ lub $x>1$, **b)** $x\leq -2$ lub $x>1$, **c)** $\boldsymbol{x\leq 2}$ lub $x\geq 2$,

d) $x<2$ i $x\in\langle 0;3\rangle$, **e)** $-3\leq x\leq 8$ i $x>0$, **f)** $-2\leq x\leq 0$ i $x\in\langle 0;5\rangle$,

g) $x\in R$ lub $2<x<5$, **h)** $x\in\langle 2;5\rangle$ i $x\in R$, **i)** $x\leq -1$ lub $-1<x<3$.

Działania na przedziałach liczbowych

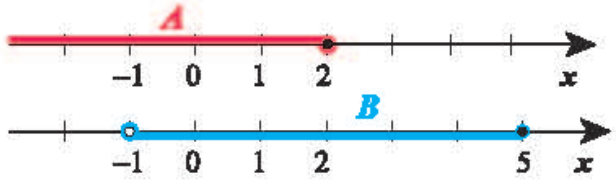
Przedziały liczbowe to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Wykonując działania na przedziałach liczbowych, stosujemy te same prawa, co dla dowolnych zbiorów.

Przykład 18. Wiedząc, że $A=(-\infty;2\rangle$ i $B=(-1;5\rangle$, wyznacz takie zbiory C, D, E i F, że: $C=A\cap B$, $D=A\cup B$, $E=A\setminus B$, $F=B\setminus A$.

Rozwiązanie

$A=(-\infty;2\rangle$

$B=(-1;5\rangle$



$C=A\cap B=(-\infty;2\rangle\cap(-1;5\rangle=(-1;2\rangle$

$C=(-1;2\rangle$

$D=A\cup B=(-\infty;2\rangle\cup(-1;5\rangle=(-\infty;5\rangle$

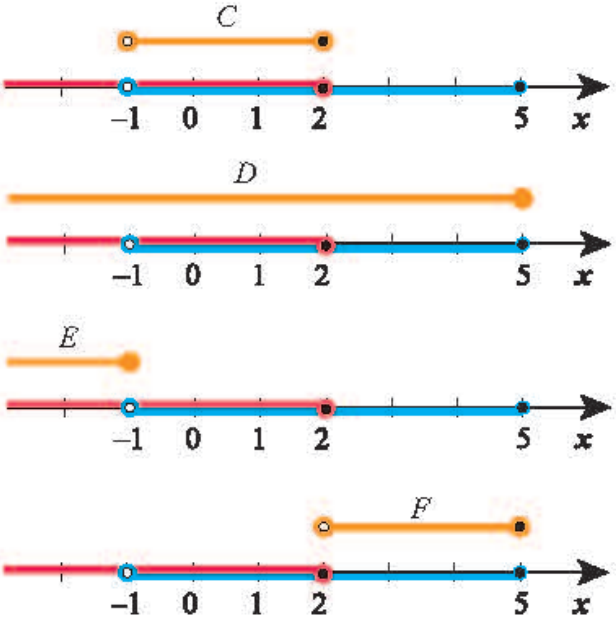
$D=(-\infty;5\rangle$

$E=A\setminus B=(-\infty;2\rangle\setminus(-1;5\rangle=(-\infty;-1\rangle$

$E=(-\infty;-1\rangle$

$F=B\setminus A=(-1;5\rangle\setminus(-\infty;2\rangle=(2;5\rangle$

$F=(2;5\rangle$



Uwaga. Na rysunkach wyniki działań na zbiorach A i B zaznaczono kolorem pomarańczowym.

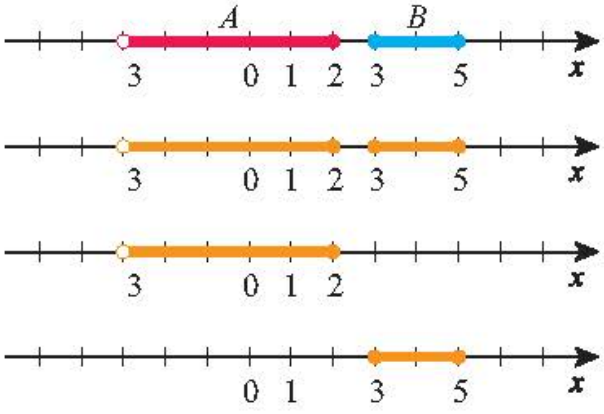
Odp.: $C=(-1;2\rangle$, $D=(-\infty;5\rangle$, $E=(-\infty;-1\rangle$, $F=(2;5\rangle$.

Ćwiczenie 44. Wiedząc, że $A=(-5;3\rangle$ i $B=\langle 0;4)$, wyznacz zbiory:

a) $A\cap B$, **b)** $A\cup B$, **c)** $A\setminus B$, **d)** $B\setminus A$.

Przykład 19. Podaj ilustrację graficzną i wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy $A = \langle -3; 2 \rangle$ i $B = \langle 3; 5 \rangle$.

Rozwiązanie



$A \cap B = \varnothing$

$A \cup B = \langle -3; 2 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$

$A \setminus B = A$

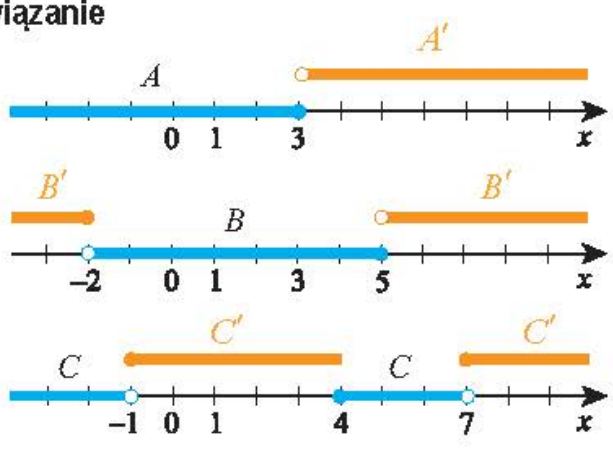
$B \setminus A = B$

Odp.: $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \langle -3; 2 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle$, $A \setminus B = \langle -3; 2 \rangle$, $B \setminus A = \langle 3; 5 \rangle$.

Ćwiczenie 45. Podaj ilustrację graficzną i wyznacz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy:
a) $A = \langle -5; 5 \rangle$ i $B = (-2; 2)$, **b)** $A = (-\infty; -2\rangle$ i $B = (-2; +\infty)$.

Przykład 20. Wiedząc, że $A = (-\infty; 3\rangle$, $B = (-2; 5\rangle$, $C = (-\infty; -1) \cup \langle 4; 7)$, wyznacz zbiory A', B', C', gdzie $A' = \boldsymbol{R} \setminus A$, $B' = \boldsymbol{R} \setminus B$, $C' = \boldsymbol{R} \setminus C$.

Rozwiązanie



$A' = \boldsymbol{R} \setminus A = (3; +\infty)$

$B' = \boldsymbol{R} \setminus B = (-\infty; -2\rangle \cup (5; +\infty)$

$C' = \boldsymbol{R} \setminus C = \langle -1; 4) \cup \langle 7; +\infty)$

Ćwiczenie 46. Wyznacz zbiory: $\boldsymbol{R} \setminus A$, $\boldsymbol{R} \setminus B$, $\boldsymbol{R} \setminus C$, gdy: $A = \langle -3; 0)$, $B = (-7; +\infty)$, $C = (-\infty; -4\rangle \cup (1; 2)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

44. **a)** $\langle 0; 3\rangle$, **b)** $(-5; 4)$, **c)** $(-5; 0)$, **d)** $(3; 4)$.

45. **a)** $A \cap B = B$, $A \cup B = A$, $A \setminus B = \langle -5; -2) \cup (2; 5\rangle$, $B \setminus A = \varnothing$, **b)** $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = R$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$.

46. $R \setminus A = (-\infty; -3) \cup \langle 0; +\infty)$, $R \setminus B = (-\infty; -7\rangle$, $R \setminus C = (-4; 1\rangle \cup (2; +\infty)$.

Zadania utrwalające

3.54. Wyznacz sumę, iloczyn i obie różnice przedziałów A i B, gdy:

a) $A=(-3;4)$, $B=\langle 1;7\rangle$, **b)** $A=(-\infty;1\rangle$, $B=\langle -5;+\infty)$, **c)** $A=(-1;0)$, $B=\langle 1;5\rangle$.

3.55. Zaznacz na osi liczbowej odpowiednie przedziały i wykonaj działania.

a) $(-\infty;2\rangle\setminus\langle -3;+\infty)$, **b)** $(3;5)\cap\langle 5;6)$, **c)** $(-10;6\rangle\cap\langle -4;7)$,

d) $(-\infty;1)\setminus\langle 1;+\infty)$, **e)** $(-3;-2)\cap\langle -3;4)$, **f)** $(-4;2)\cup(3;7)$,

g) $(-\infty;1\rangle\cup(-1;+\infty)$, **h)** $(-\infty;6)\cup\langle 5;8)$, **i)** $(-4;10)\cup(0;11\rangle$,

j) $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$, **k)** $(-5;3)\cup(-7;4)$, **l)** $(-5;1)\setminus\langle 1;10)$.

3.56. Za pomocą sumy przedziałów zapisz różnicę zbiorów:

a) $R\setminus\{0\}$, **b)** $R\setminus\{-1,1\}$, **c)** $R\setminus\{-\sqrt{2},1,\sqrt{2}\}$.

3.57. Określ, czy wynik działania jest przedziałem, czy sumą przedziałów:

a) $N\cup Z$, **b)** $N\cap Z$, **c)** $R\cup N$, **d)** $R\cap N$,

e) $R\setminus N$, **f)** $N\setminus R$, **g)** $R^+\cup R^-\cup\{0\}$, **h)** $Q\cup(R\setminus Q)$.

3.58. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jeżeli $D=(-\infty;2\rangle$, to $R\setminus D$ jest przedziałem:

A. $(2;+\infty)$, **B.** $\langle 2;+\infty)$.

Częścią wspólną $A\cap B$, gdy $A=(-\infty;1\rangle$ i $B=\langle 1;2)$ jest zbiór:

C. pusty, **D.** jednoelementowy.

3.59. Wyznacz zbiór:

a) $(-3;2)\cap Z$, **b)** $\langle 6;10)\cap N$, **c)** $\langle -3;0)\cap N$,

d) $\langle -4;0)\cap R$, **e)** $(-5;5)\cap R$, **f)** $\varnothing\cap R$.

3.60. Sprawdź, czy jeżeli $a\in R$, $b\in R$ i $a<b$, to:

a) $(a;b)=(a;+\infty)\cap(-\infty;b)$, **b)** $\langle a;b)=\left\langle a;\ \frac{a+b}{2}\right)\cup\left\langle\frac{a+b}{2};\ b\right)$.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczbą mniejszą od 1 jest iloraz liczb:

A. $0,01:0,001$, **B.** $0,001:100$, **C.** $10:0,0001$, **D.** $0,1:0,000001$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Nieprawdą jest, że:

A. $0,(15)<0,15$, **B.** $0,(15)=\frac{5}{33}$, **C.** $1,(7)>1,777$, **D.** $2,8(27)<2,(827)$.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\frac{2^{15}+2^{15}}{2}$ jest równa:

A. 2^{29}, **B.** $2^{15}+2^{14}$, **C.** $3\cdot 2^{14}$, **D.** 2^{15}.

4. Czy liczba 4 270 008 jest podzielna przez 6?

D *Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B i C.*

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	liczba jest parzysta.
N	**Nie,**		**B.**	suma cyfr liczby dzieli się przez 3.
			C.	liczba jest parzysta i suma cyfr jest podzielna przez 3.

5. Liczby a i b spełniają warunek $a\cdot b=100$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

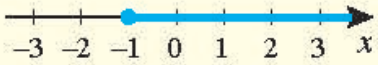
Jeśli liczby a i b są parzyste, to 10 jest dzielnikiem jednej z nich.	**P**	**F**
Jeśli liczby a i b są naturalne, to 10 jest dzielnikiem jednej z nich.	**P**	**F**
Jeśli $a=\sqrt[3]{50}$, to $b=\sqrt[3]{20\,000}$.	**P**	**F**

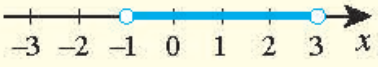
6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

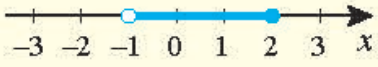
Wszystkie liczby całkowite należące do przedziału $\langle -\sqrt{3};2\sqrt{2}\rangle$ to liczby:

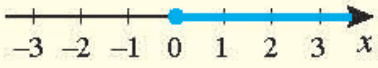
A. –2, –1, 0, 1, 2, 3, **B.** –1, 0, 1, 2, 3, **C.** –1, 0, 1, 2, **D.** 0, 1, 2.

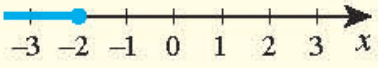
7. Przyporządkuj każdemu przedziałowi przedstawionemu na osiach liczbowych oznaczonych literami od A do F, odpowiedni opis słowny, oznaczony cyframi od **1** do **6**.

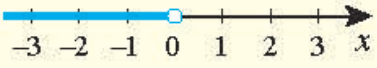
A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

F. 

1 Liczby rzeczywiste nieujemne.

2 Liczby rzeczywiste mniejsze lub równe –2.

3 Liczby rzeczywiste większe od –1 i mniejsze od 3.

4 Liczby rzeczywiste ujemne.

5 Liczby rzeczywiste większe od –1 i mniejsze lub równe 2.

6 Liczby rzeczywiste większe lub równe –1.

8. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

$\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\in(0;1)$.	P	F
$-2\notin\left(-\sqrt{8};-\sqrt{4}\right)$.	P	F

9. Podaj ilustrację graficzną i wyznacz zbiory $A\cap B$ i $A\cup B$, gdy:

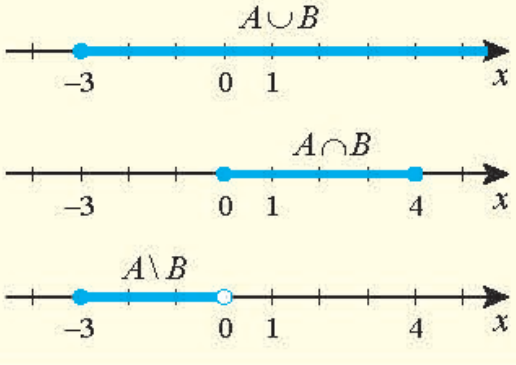
a) $A=(-\infty;3\rangle$, $B=(-2;5\rangle$,

b) $A=(-5;2\rangle$, $B=\langle 2;4)$,

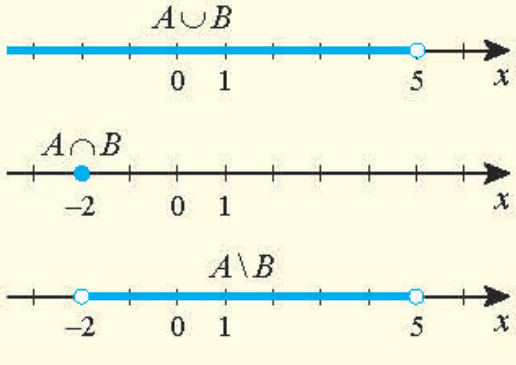
c) $A=(-2;3\rangle$, $B=(4;6)$.

10. Zbiory A i B są przedziałami liczbowymi, dla których wyniki działań (sumy, iloczynu i różnicy) przedstawiono na rysunkach poniżej. Wyznacz zbiory A i B.

a)



b)



4. Potęgowanie, pierwiastkowanie i logarytmowanie

Potęga o wykładniku całkowitym

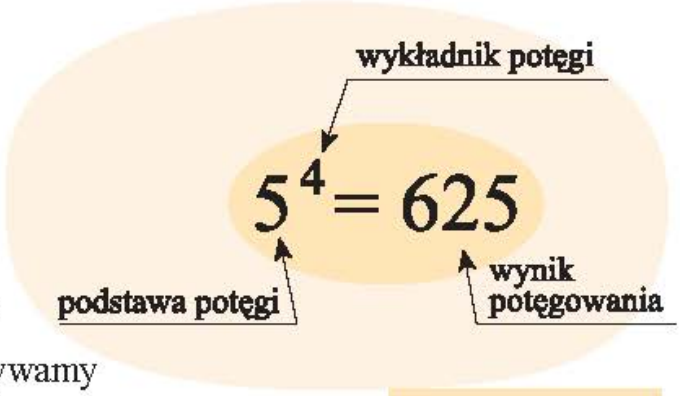
Przypomnijmy

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

5^4 – czwarta potęga liczby 5

(*czytamy:* pięć do potęgi czwartej)

- Potęgowanie zastępuje mnożenie przez siebie tych samych czynników.
- Potęgą a^n liczby rzeczywistej a nazywamy iloczyn n czynników, z których każdy jest równy a, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1.



$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Przyjmujemy: $a^1 = a$ oraz $a^0 = 1$, gdy $a \neq 0$

Uwaga

0^0 – działanie niewykonalne, $a^n \cdot a = a^{n+1}$, $a^n : a = a^{n-1}$

Ćwiczenie 1. Każdą z liczb:

a) 9, 81, 243 zapisz w postaci potęgi liczby 3,

b) 32, 64, 128, 1024 zapisz w postaci potęgi liczby 2.

Przykład 1. Oblicz:

a) $(-3)^4$, **b)** -3^4, **c)** $\left(-\frac{10}{3}\right)^2$, **d)** $3{,}5^0$.

Rozwiązanie

a) $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$,

b) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$,

c) $\left(-\frac{10}{3}\right)^2 = \left(-\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$,

d) $3{,}5^0 = 1$.

Ćwiczenie 2. Oblicz:

a) -6^3, b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, c) $\left(-\frac{11}{12}\right)^2$, d) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$, e) $(0,02)^3$.

Dla każdej liczby naturalnej dodatniej n i dla każdej liczby rzeczywistej a, różnej od zera, przyjmujemy, że $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Liczby a^{-n} i a^n są liczbami odwrotnymi.

Przykład 2. Oblicz: a) 5^{-1}, b) 2^{-3}, c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$.

Rozwiązanie. a) $5^{-1}=\frac{1}{5}$, b) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$, c) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{4}{1}\right)^2=16$.

Ćwiczenie 3. Oblicz:

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$, b) $(-3)^{-2}$, c) -3^{-2}, d) $\frac{1}{6^{-2}}$, e) $\left(3\frac{1}{2}\right)^{-3}$, f) $(0,125)^{-2}$.

Uwaga

Jeżeli a i b są liczbami różnymi od 0 oraz n jest liczbą naturalną dodatnią, to:

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{b}{a}\right)^n$,
- $a^{-1}=\frac{1}{a}$,
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$.

Wykonując działania na potęgach, korzystamy z twierdzenia:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b różnych od zera oraz całkowitych wykładników m, n, prawdziwe są wzory:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — *iloczyn potęg o tych samych podstawach*
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ — *iloraz potęg o tych samych podstawach*
- $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ — *potęga potęgi*
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ — *potęga iloczynu*
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ — *potęga ilorazu*

Przykład 3. Wykaż, że $a^m : a^n = a^{m-n}$, gdy $a \neq 0$, $m \in Z$ i $n \in Z$.

Rozwiązanie. $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m+0}}{a^n} =$ $0 = n - n$

$= \frac{a^{m+\overbrace{n-n}^{0}}}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}$. ***c.n.w.*** $a^{(m-n)+n} = a^{m-n} \cdot a^n$

Ćwiczenie 4. Wykaż, że jeżeli $a \neq 0$, $b \neq 0$, $m \in Z$ i $n \in Z$, to:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, **b)** $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$, **c)** $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, **d)** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Ćwiczenie 5. Przedstaw w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych iloczyn:

a) $5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, **b)** $4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7$, **c)** $2^2 \cdot 4 \cdot 3^5 \cdot 27$.

Przykład 4. Zastosuj prawa działań na potęgach i oblicz:

a) $\frac{2^3\left(2^2\right)^3}{2^5}$, **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 10^{-3}$.

Rozwiązanie. a) $\frac{2^3\left(2^2\right)^3}{2^5} = \frac{2^3 \cdot 2^{2 \cdot 3}}{2^5} = \frac{2^{3+6}}{2^5} = 2^{9-5} = 16$,

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 10^{-3} = \left(\frac{1}{5} \cdot 10\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Ćwiczenie 6. Zastosuj prawa działań na potęgach i oblicz:

a) $\frac{\left(4^2\right)^3}{4^2 \cdot 4^3}$, **b)** $\left(-1\frac{1}{5}\right)^4 : \left(\frac{6}{5}\right)^4$, **c)** $\left[\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2$, **d)** $\left(7\frac{3}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{19}{3}\right)^{-3}$.

Przypomnijmy

Notacja wykładnicza to sposób zapisywania bardzo dużych albo bardzo małych liczb, np. $2\,500\,000 = 2{,}5 \cdot 10^6$, $0{,}0000034 = 3{,}4 \cdot 10^{-6}$.

Liczbę wymierną dodatnią a możemy przedstawić w postaci $\boldsymbol{a = x \cdot 10^n}$, gdzie $1 \leq x < 10$ i $n \in Z$. Taki zapis liczby a nazywamy notacją wykładniczą

Przykład 5. Zapisz w notacji wykładniczej liczbę:

a) 5 270 000, **b)** 0,00653, **c)** 1 000 000.

Rozwiązanie

a) $5\,270\,000 = 5{,}27 \cdot 10^6$, $1 \le 5{,}27 < 10$

b) $0{,}00653 = 6{,}53 \cdot 10^{-3}$, $1 \le 6{,}53 < 10$

c) $1\,000\,000 = 1 \cdot 10^6$. $1 \le 1 < 10$

Ćwiczenie 7. Średnica Ziemi jest równa około 12 750 km. Długość tę podaj w metrach i zapisz w notacji wykładniczej.

Ćwiczenie 8. Polska ma powierzchnię około $3{,}13 \cdot 10^5$ km^2. Wielkość tę zapisz bez użycia notacji wykładniczej.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) 3^2, 3^4, 3^5, b) 2^5, 2^6, 2^7, 2^{10}. 2. a) -216, b) $\frac{1}{81}$, c) $\frac{121}{144}$, d) $-\frac{125}{8}$, e) 0,000008.
3. a) 36, b) $\frac{1}{9}$, c) $-\frac{1}{9}$, d) 36, e) $\frac{8}{343}$, f) 64. 5. a) $2^3 \cdot 5^5$, b) $2^6 \cdot 7^4$, c) $2^4 \cdot 3^8$.
6. a) 4, b) 1, c) 1, d) $\frac{125}{216}$. 7. $1{,}275 \cdot 10^7$ m. 8. 313 000 km^2.

Zadania utrwalające

4.1. Oblicz:

a) $(-2)^2$, **b)** $(-3)^3$, **c)** $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, **d)** $(-1)^6$, **e)** $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$,

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, **g)** $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}$, **h)** $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$, **i)** $16 \cdot 2^{-3}$.

4.2. Oblicz, korzystając z kalkulatora:

a) $(0{,}012)^2$, **b)** $(1{,}75)^3$, **c)** $\left(3\frac{1}{2}\right)^3$, **d)** $(-0{,}31)^2$.

4.3. Każdą z liczb: 64, 128, 256, 512 zapisz w postaci potęgi liczby 2.

4.4. Oblicz:

a) $5 \cdot 2^5$, **b)** $4^3 + 4 \cdot 3$, **c)** $2^6 - 2 \cdot 6$,

d) $(1+0{,}5)^2 - (1-0{,}5)^3$, **e)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$, **f)** $(-1)^3 \cdot 2^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$,

g) $\left(2^2\right)^3$, **h)** $\left[(-2)^2\right]^3$, **i)** $\left(-2^2\right)^3$, **j)** $\dfrac{3^2\left(3^3\right)^2}{3^5}$.

4.5. Oblicz:

a) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-2}:\left(\dfrac{9}{49}\right)^{-2}$, **b)** $\left[4-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$, **c)** $\dfrac{\left(3^5\right)^2:\left(3^7\cdot 3^0\right)}{3^2}$,

d) $4-2^{-1}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^0$, **e)** $\dfrac{1}{2}\cdot 2^0-3^{-2}$, **f)** $\left[\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right]^0$.

4.6. Oblicz:

a) $\dfrac{5^{13}+5^{12}}{5^{10}}$, **b)** $\dfrac{7^{21}-7^{19}}{49^9}$, **c)** $\dfrac{\left(3^{18}+3^{16}\right)\cdot 27}{\left(3^{14}+3^{12}\right)\cdot 9}$.

4.7. Zapisz w notacji wykładniczej liczbę:

a) 0,02, **b)** 0,05, **c)** 0,012, **d)** 0,00078, **e)** 1680, **f)** 231.

4.8. W jednym z mórz jest około $2{,}05\cdot 10^2$ gatunków ryb. Podaj liczbę tych gatunków.

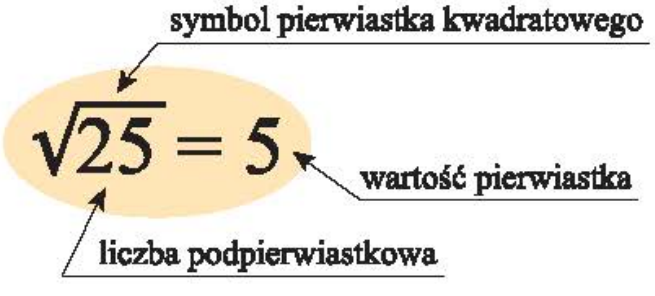
4.9. Merkury znajduje się w odległości 57 900 000 km od Słońca. Zapisz tę odległość w notacji wykładniczej.

4.10. Jeden rok astronomiczny to $365{,}25\cdot 86\,400$ sekund. Liczbę sekund zapisz w postaci notacji wykładniczej.

Pierwiastki kwadratowe i pierwiastki sześcienne

Przypomnijmy

Symbol $\sqrt{\ }$ czytamy: „pierwiastek kwadratowy” albo „pierwiastek drugiego stopnia” lub krótko pierwiastek.



Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b, która podniesiona do kwadratu jest równa a.

Jeśli $a\geq 0$ i $b\geq 0$, to $\sqrt{a}=b$, gdy $b^2=a$.

Przykład 6. Oblicz, jeśli jest to możliwe, bez użycia kalkulatora:

a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, b) $\sqrt{0{,}16}$, c) $\sqrt{17}$.

Rozwiązanie

a) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

b) $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, $(0{,}4)^2 = 0{,}16$

c) $\sqrt{17}$ – nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat jest równy 17, $\sqrt{17}$ jest liczbą niewymierną.

Przypomnijmy prawa działań na pierwiastkach kwadratowych.

Jeśli $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, gdy $b > 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

Przykład 7. Oblicz: a) $\sqrt{81 \cdot 144}$, b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$, c) $\left(\sqrt{6}\right)^2$, d) $\sqrt{25 \cdot 3}$.

Rozwiązanie. a) $\sqrt{81 \cdot 144} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{144} = 9 \cdot 12 = 108$, $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

c) $\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

d) $\sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$

Ćwiczenie 9. Oblicz: a) $\sqrt{4 \cdot 25}$, b) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}}$, c) $\left(\sqrt{7}\right)^2$, d) $\sqrt{100 \cdot 7}$.

Przykład 8. Uzasadnij, że $\sqrt{75} = \sqrt{27} + \sqrt{12}$.

Rozwiązanie. Wprowadzamy oznaczenia:

$\underbrace{\sqrt{75}}_{L} = \underbrace{\sqrt{27} + \sqrt{12}}_{P}$. *L – lewa strona równości, P – prawa strona równości*

Sprawdzamy, czy prawą stronę P można tak przekształcić, by otrzymać stronę lewą L.

$P = \sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} =$

$= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

$L = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$. Zatem $L = P$. ***c.n.u.***

Ćwiczenie 10. Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{128}=\sqrt{50}+\sqrt{18}$, b) $\sqrt{2}+\sqrt{72}=7\sqrt{2}$.

Uwaga

Przedstawianie iloczynu liczb $a\cdot\sqrt{b}$ w postaci pierwiastka kwadratowego $\sqrt{a^2\cdot b}$ nazywamy **włączaniem czynnika pod znak pierwiastka**.

Przykład 9. Przedstaw w postaci pierwiastka kwadratowego (włącz czynnik pod znak pierwiastka): a) $4\cdot\sqrt{3}$, b) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$.

Rozwiązanie. Korzystamy z zależności $a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$, gdy liczby a i b są nieujemne.

a) $4\cdot\sqrt{3}=\sqrt{4^2\cdot 3}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{48}$, b) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ćwiczenie 11. Przedstaw w postaci pierwiastka kwadratowego liczbę:

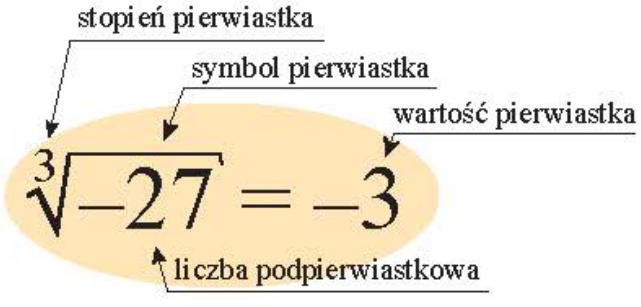
a) $3\sqrt{7}$, b) $0{,}1\cdot\sqrt{60}$, c) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{27}$.

Przypomnijmy

$\sqrt[3]{-27}=-3$, bo $(-3)^3=-27$.

$\sqrt[3]{0{,}001}=0{,}1$, bo $(0{,}1)^3=0{,}001$.

- Symbol $\sqrt[3]{\ }$ czytamy „pierwiastek trzeciego stopnia” albo „pierwiastek sześcienny”.



Pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do potęgi 3 jest równa liczbie a.

Jeśli $\sqrt[3]{a}=b$, to $b^3=a$.

Przykład 10. Oblicz: a) $\sqrt[3]{-1}$, b) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Rozwiązanie

a) $\sqrt[3]{-1}=-1$. $(-1)^3=-1$

b) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}$. $\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}$

Ćwiczenie 12. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{0,008}$, b) $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$, c) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$.

Jeśli liczby a i b są rzeczywiste, to:

$\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, gdy $b\neq 0$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$, $\sqrt[3]{a^3\cdot b}=a\cdot\sqrt[3]{b}$.

Przykład 11. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{216\cdot 64}$, b) $\frac{\sqrt[3]{-162}}{\sqrt[3]{48}}$, c) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$, d) $\sqrt[3]{-500}$.

Rozwiązanie

a) $\sqrt[3]{216\cdot 64}=\sqrt[3]{216}\cdot\sqrt[3]{64}=6\cdot 4=24$, $\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$

b) $\frac{\sqrt[3]{-162}}{\sqrt[3]{48}}=\sqrt[3]{\frac{-162}{48}}=\sqrt[3]{-\frac{27\cdot 6}{8\cdot 6}}=\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}=-\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

c) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5$, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$

d) $\sqrt[3]{-500}=\sqrt[3]{-125\cdot 4}=\sqrt[3]{-125}\cdot\sqrt[3]{4}=-5\cdot\sqrt[3]{4}$. $\sqrt[3]{a^3\cdot b}=a\cdot\sqrt[3]{b}$

Ćwiczenie 13. Oblicz:

a) $-\sqrt[3]{7^3}$, b) $\sqrt[3]{64\cdot 343}$, c) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{-320}}$, d) $\sqrt[3]{7\cdot 343}$.

Ćwiczenie 14. Sprawdź, czy:

a) $\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{98}$, b) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

9. a) 10, b) $\frac{2}{3}$, c) 7, d) $10\sqrt{7}$. 11. a) $\sqrt{63}$, b) $\sqrt{0,6}$, c) $\sqrt{12}$. 12. a) 0,2, b) $\frac{5}{3}$, c) $\frac{5}{2}$.

13. a) -7, b) 28, c) $-\frac{3}{4}$, d) $7\cdot\sqrt[3]{7}$. 14. a) Nie, b) tak.

Zadania utrwalające

4.11. Oblicz w pamięci:

a) $\sqrt{9}$, $\sqrt{0,09}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{0,25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{0,0036}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{121}$,

b) $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{16}{81}}$, $\sqrt{\frac{144}{169}}$, $\sqrt{\frac{100}{225}}$, $\sqrt{\frac{256}{289}}$, $\sqrt{\frac{324}{196}}$, $\sqrt{\frac{361}{400}}$, $\sqrt{\frac{121}{441}}$.

4.12. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{125}$, b) $\sqrt[3]{-\frac{33}{264}}$, c) $\sqrt[3]{\frac{7}{875}}$, d) $\sqrt[3]{\frac{27}{216}}$, e) $\sqrt[3]{0,008}$, f) $\sqrt[3]{64}$.

4.13. Oblicz:

a) $\sqrt{16\cdot 169}$, b) $\sqrt[3]{64\cdot 125}$, c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$, d) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{50}\cdot\sqrt[3]{100}$,

e) $\sqrt{80}:\sqrt{5}$, f) $\sqrt[3]{-54}:\sqrt[3]{2}$, g) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}:\sqrt[3]{\frac{2}{81}}$, h) $\sqrt[3]{0,27}:\sqrt[3]{-10}$.

4.14. Przedstaw w postaci iloczynu liczby wymiernej i niewymiernej wyrażenie:

a) $\sqrt{25\cdot 3}$, b) $\sqrt{5\cdot 25}$, c) $\sqrt[3]{2\cdot 8}$, d) $\sqrt[3]{27\cdot 3}$,

e) $\sqrt{162}$, f) $\sqrt{128}$, g) $\sqrt[3]{375}$, h) $\sqrt[3]{135}$.

4.15. Przedstaw w postaci pierwiastka iloczyn liczb:

a) $2\sqrt{3}$, b) $3\sqrt{2}$, c) $4\sqrt{5}$, d) $5\sqrt{6}$, e) $6\sqrt{2}$,

f) $-2\cdot\sqrt[3]{2}$, g) $3\cdot\sqrt[3]{2}$, h) $2\cdot\sqrt[3]{3}$, i) $4\cdot\sqrt[3]{-3}$, j) $-3\cdot\sqrt[3]{-5}$.

4.16. D Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{50}$, b) $\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{128}$,

c) $\left(\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{0,5}\right)\cdot\sqrt{2}=11$, d) $\left(\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{0,016}\right):\sqrt[3]{2}=8,8$,

e) $\left(\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{108}\right)^2=147$,

f) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=-2\sqrt{3}$.

4.17. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wynikiem działania $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt{\frac{3}{7}}:\sqrt{1\frac{5}{7}}$ jest liczba:

A. $2\frac{1}{2}$, B. $-\frac{5}{2}$, C. $-\frac{7}{2}$, D. $3\frac{1}{2}$.

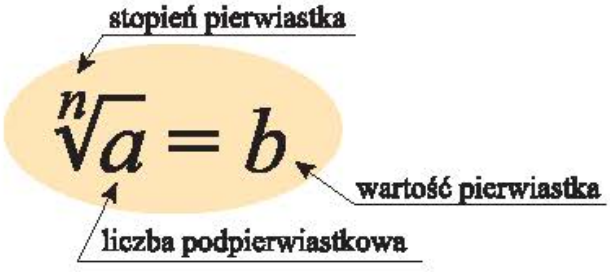
4.18. D Czy $\sqrt{3,0625}=\sqrt[3]{5,35975}$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$\sqrt{3,0625}=\sqrt{\frac{49}{16}}$ i $\sqrt[3]{5,35975}=\sqrt[3]{\frac{343}{64}}$.
N	Nie,		B.	$\sqrt[3]{5,35975}=5\frac{23}{64}$ i $\sqrt[3]{5,35975}=5\frac{23}{64}$.

Pierwiastki stopnia n i działania na nich

a – liczba podpierwiastkowa,
n – stopień pierwiastka, gdzie n to liczba naturalna większa od 1,
b – wartość pierwiastka n-tego stopnia z liczby a.



Pierwiastek $\sqrt[n]{a}$ nazywamy **pierwiastkiem arytmetycznym stopnia n**.
Wartością pierwiastka arytmetycznego (jeśli istnieje) może być tylko jedna liczba.

Pierwiastkiem stopnia n, gdzie n jest liczbą naturalną:

parzystą większą od 0,	**nieparzystą** większą od 1,
z liczby nieujemnej a $(a \geq 0)$,	**z liczby rzeczywistej a** $(a \in R)$,
nazywamy	nazywamy
liczbę nieujemną b $(b \geq 0)$,	**liczbę rzeczywistą b** $(b \in R)$,
taką że	taką że

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a.$$

Przykłady:

$\sqrt{121} = 11$,	bo	$11^2 = 121$,	$\sqrt[3]{64} = 4$,	bo	$4^3 = 64$,
$\sqrt[4]{16} = 2$,	bo	$2^4 = 16$,	$\sqrt[3]{-64} = -4$,	bo	$(-4)^3 = -64$,
$\sqrt[10]{1024} = 2$,	bo	$2^{10} = 1024$,	$\sqrt[5]{-243} = -3$,	bo	$(-3)^5 = -243$,
$\sqrt[12]{1} = 1$,	bo	$1^{12} = 1$,	$\sqrt[9]{1} = 1$,	bo	$1^9 = 1$,
$\sqrt[14]{0} = 0$,	bo	$0^{14} = 0$,	$\sqrt[11]{-1} = -1$,	bo	$(-1)^{11} = -1$.

Ćwiczenie 15. Oblicz: **a)** $\sqrt[4]{81}$, **b)** $\sqrt[5]{-32}$, **c)** $\sqrt[5]{0,00001}$, **d)** $\sqrt[17]{0}$, **e)** $\sqrt[3]{-343}$.

Przykład 12. Przedstaw liczbę -5 w postaci pierwiastka stopnia n, gdy:
a) $n = 3$, **b)** $n = 5$, **c)** $n = 7$.

Rozwiązanie

a) $(-5)^3 = -125$, więc $-5 = \sqrt[3]{-125}$,

b) $(-5)^5 = -3125$, więc $-5 = \sqrt[5]{-3125}$.

Ćwiczenie 16. Przedstaw liczbę –2 w postaci pierwiastka stopnia n, gdy:

a) $n=7$, **b)** $n=9$, **c)** $n=11$.

Czy można liczbę –2 przedstawić w postaci pierwiastka stopnia 6?

Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga

- Każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci pierwiastka nieparzystego stopnia.
- Liczb ujemnych nie można przedstawić w postaci pierwiastka parzystego stopnia.
- Każdą liczbę nieujemną można przedstawić w postaci pierwiastka parzystego stopnia.

Ćwiczenie 17. Spośród liczb: –1; 0; 0,0081; –0,0081; $\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{8}$ wskaż te, których nie można przedstawić w postaci pierwiastka czwartego stopnia.

Na pierwiastkach możemy wykonywać działania, korzystając z twierdzenia.

Jeśli istnieją pierwiastki $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[n]{b}$, to:

- $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ — *iloczyn pierwiastków tego samego stopnia (pierwiastek z iloczynu)*
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, gdzie $b\neq 0$ — *iloraz pierwiastków tego samego stopnia (pierwiastek z ilorazu)*
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$, gdzie $m\in N$ i $a\neq 0$ — *potęga pierwiastka (pierwiastek z potęgi)*
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

Przykład 13. Oblicz:

a) $\frac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{1215}}$, **b)** $\sqrt[5]{-2}\cdot\sqrt[5]{16}$, **c)** $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3$.

Rozwiązanie

a) $\frac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{1215}}=\sqrt[5]{\frac{160}{1215}}=\sqrt[5]{\frac{5\cdot 32}{5\cdot 243}}=\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}=\frac{2}{3}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

b) $\sqrt[5]{-2}\cdot\sqrt[5]{16}=\sqrt[5]{-2\cdot 16}=\sqrt[5]{-32}=-2$, $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

c) $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3=\sqrt[6]{25^3}=\sqrt[6]{\left(5^2\right)^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ i $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

Ćwiczenie 18. Oblicz:

a) $\sqrt[5]{-9}\cdot\sqrt[5]{-27}$, b) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{243}}$, c) $\left(\sqrt[9]{-27}\right)^3$.

Ćwiczenie 19. Uzasadnij, że jeżeli istnieją pierwiastki $\sqrt[n]{-a}$ i $\sqrt[n]{a}$, to $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$.

Uwaga

- Liczby ujemnej nie można włączyć pod znak pierwiastka parzystego stopnia.
- Nie istnieją pierwiastki parzystego stopnia z liczb ujemnych.

Przykład 14. Przedstaw w postaci pierwiastka iloczyn liczb, czyli włącz liczbę pod znak pierwiastka:

a) $3\cdot\sqrt[5]{7}$, b) $-2\cdot\sqrt[4]{6}$, c) $-3\cdot\sqrt[5]{-4}$.

Rozwiązanie

a) $3\cdot\sqrt[5]{7}=\sqrt[5]{3^5\cdot 7}=\sqrt[5]{1701}$, $\sqrt[5]{3^5}=3$

b) $-2\cdot\sqrt[4]{6}=-\sqrt[4]{2^4\cdot 6}=-\sqrt[4]{96}$, $\sqrt[4]{2^4}=2$

c) $-3\cdot\sqrt[5]{-4}=\sqrt[5]{(-3)^5\cdot(-4)}=\sqrt[5]{(-243)\cdot(-4)}=\sqrt[5]{972}$. $\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$

Ćwiczenie 20. Przedstaw w postaci pierwiastka iloczyn liczb:

a) $-2\cdot\sqrt[7]{3}$, b) $-2\cdot\sqrt[10]{2}$, c) $-3\cdot\sqrt[6]{2}$.

Przykład 15. Przedstaw pierwiastek w postaci iloczynu liczby wymiernej i pierwiastka, czyli wyłącz czynnik przed znak pierwiastka: a) $\sqrt[4]{243}$, b) $\sqrt[5]{-288}$.

Rozwiązanie. Obliczenie pierwiastka ułatwi rozkład liczby podpierwiastkowej na czynniki.

a)

243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$243=3^5$

$\sqrt[4]{243}=\sqrt[4]{3^5}=\sqrt[4]{3^4\cdot 3}=3\sqrt[4]{3}$.

b)

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$288=2^5\cdot 3^2$

$\sqrt[5]{-288}=-\sqrt[5]{2^5\cdot 3^2}=-2\sqrt[5]{9}$

Odp.: a) $\sqrt[4]{243}=3\sqrt[4]{3}$, b) $\sqrt[5]{-288}=-2\sqrt[5]{9}$.

Ćwiczenie 21. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt[4]{32}$, b) $\sqrt[4]{5000}$, c) $\sqrt[5]{-224}$, d) $\sqrt[4]{7\frac{19}{32}}$.

Uwaga

Aby usunąć niewymierność z mianownika ułamka, mnożymy ten ułamek przez odpowiednio przedstawioną liczbę 1.

Przykład 16. Usuń niewymierność z mianownika ułamka: a) $\frac{7}{2\sqrt{3}}$, b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, c) $\frac{2}{\sqrt[5]{-3}}$.

Rozwiązanie

a) $\frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = 1$

c) $\frac{2}{\sqrt[5]{-3}} = -\frac{2}{\sqrt[5]{3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^4}} = -\frac{2\sqrt[5]{81}}{3}$. $\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^4}} = 1$

Ćwiczenie 22. Usuń niewymierność z mianownika: a) $\frac{8}{\sqrt[6]{2}}$, b) $\frac{4}{\sqrt[7]{-4}}$.

Przykład 17. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{80} + 2\sqrt[4]{405}$, b) $\frac{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{-64}}$, c) $\sqrt[9]{7^{18}}$, d) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[5]{-32}}\right)^5$.

Rozwiązanie

a) $\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{80} + 2\sqrt[4]{405} =$ $80 - 5 \cdot 2^4$

$= \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} + 2\sqrt[4]{3^4 \cdot 5} =$ $405 - 5 \cdot 3^4$

$= \sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} + 2 \cdot 3\sqrt[4]{5} = 5\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[4]{2^4} = 2$ $\sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\frac{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{486}}{\sqrt[5]{-64}} = \frac{\sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{3^5 \cdot 2}}{-\sqrt[5]{2^5 \cdot 2}} =$ $486 - 2 \cdot 3^5$ $64 - 2 \cdot 2^5$

$= \frac{\sqrt[5]{2} - 3\sqrt[5]{2}}{-2\sqrt[5]{2}} = \frac{-2\sqrt[5]{2}}{-2\sqrt[5]{2}} = 1$, $\sqrt[5]{3^5} = 3$ $\sqrt[5]{2^5} = 2$

c) $\sqrt[9]{7^{18}} = \sqrt[9]{7^{2 \cdot 9}} = \sqrt[9]{\left(7^2\right)^9} = \left(\sqrt[9]{7^2}\right)^9 = 7^2 = 49$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n - a$

d) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[5]{-32}}\right)^5 = \sqrt[5]{-32} = -2$. $\left(\sqrt[5]{a}\right)^5 - a$ $(-2)^5 = -32$

Ćwiczenie 23. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\sqrt[5]{-3}-\sqrt[5]{96}+2\sqrt[5]{729}$, b) $\dfrac{\sqrt[4]{1250}-\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{512}}$, c) $\sqrt[13]{5^{39}}$, d) $\left(\sqrt[7]{\sqrt[3]{-125}}\right)^7$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. a) 3, b) –2, c) 0,1, d) 0, e) –7. **16.** a) $\sqrt[7]{-128}$, b) $\sqrt[9]{-512}$, c) $\sqrt[11]{-2048}$. Nie, bo nie istnieją pierwiastki parzystego stopnia z liczb ujemnych. **17.** –1; –0,0081; $-\frac{1}{8}$. **18.** a) 3, b) $\frac{2}{3}$, c) –3.

19. *Wskazówka:* $\sqrt[n]{-a}=\sqrt[n]{(-1)\cdot a}$. **20.** a) $\sqrt[7]{-384}$, b) $-\sqrt[10]{2048}$, c) $-\sqrt[6]{1458}$.

21. a) $2\sqrt[4]{2}$, b) $5\sqrt[4]{8}$, c) $-2\sqrt[5]{7}$, d) $\frac{3}{2}\sqrt[4]{1\frac{1}{2}}$. **22.** a) $4\sqrt[6]{32}$, b) $-2\sqrt[7]{32}$. **23.** a) $3\sqrt[5]{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 125, d) –5.

Zadania utrwalające

4.19. Oblicz:

a) $\sqrt[4]{160\,000}$, b) $\sqrt[5]{0,00032}$, c) $\sqrt[5]{-1024}$, d) $\sqrt[6]{729}$,

e) $\sqrt[7]{128}$, f) $\sqrt[8]{256}$, g) $\sqrt[3]{-1331}$, h) $\sqrt[4]{2401}$.

4.20. Przedstaw liczbę a w postaci pierwiastka stopnia n, gdy:

a) $a=6$ i $n=3$, b) $a=-2$ i $n=9$, c) $a=4$ i $n=6$,

d) $a=7$ i $n=3$, e) $a=6$ i $n=4$, f) $a=-5$ i $n=5$.

4.21. Oblicz:

a) $\sqrt{16\cdot 169}$, b) $\sqrt[3]{64\cdot 125}$, c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$, d) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{50}\cdot\sqrt[3]{100}$,

e) $\sqrt{80}:\sqrt{5}$, f) $\sqrt[3]{54}:\sqrt[3]{2}$, g) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}:\sqrt[3]{\frac{2}{81}}$, h) $\sqrt[3]{0,27}:\sqrt[3]{10}$,

i) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$, j) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$, k) $\sqrt[5]{64}:\sqrt[5]{2}$, l) $\sqrt[4]{0,128}:\sqrt[4]{0,008}$.

4.22. Wyłącz czynnik przed pierwiastek:

a) $\sqrt{75}$, b) $\sqrt{125}$, c) $\sqrt[3]{16}$, d) $\sqrt[3]{81}$, e) $\sqrt[3]{375}$,

f) $\sqrt[4]{162}$, g) $\sqrt[4]{112}$, h) $\sqrt[5]{64}$, i) $\sqrt[5]{486}$, j) $\sqrt[5]{6250}$,

k) $\sqrt[7]{-384}$, l) $\sqrt[4]{1280}$, m) $\sqrt[6]{1458}$, n) $\sqrt[5]{-9375}$, o) $\sqrt[3]{-1512}$.

4.23. Włącz pod pierwiastek czynnik stojący przed pierwiastkiem:

a) $3\sqrt{2}$, b) $5\sqrt{6}$, c) $2\sqrt[3]{3}$, d) $4\sqrt[3]{2}$, e) $2\sqrt[4]{3}$,

f) $3\sqrt[5]{2}$, g) $5\sqrt[3]{2}$, h) $7\sqrt[4]{2}$, i) $2\sqrt[4]{6}$, j) $2\sqrt[6]{3}$,

k) $3\sqrt[6]{2}$, l) $5\sqrt[4]{2}$, m) $-6\sqrt[3]{-5}$, n) $2\sqrt[7]{-3}$, o) $11\sqrt[4]{11}$.

4.24. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$, b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, c) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$, d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$,

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$, f) $-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$, g) $\frac{-1}{\sqrt[5]{-2}}$, h) $\frac{5}{\sqrt[7]{2}}$.

4.25. Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{98}$, b) $\sqrt{125}-\sqrt{20}+3\sqrt{45}$, c) $\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{81}$,

d) $\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$, e) $\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}$, f) $\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{243}$,

g) $\frac{3\sqrt{8}-\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$, h) $\frac{4\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{8}}$, i) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{32}}$, j) $\frac{\sqrt{125}+\sqrt{20}-\sqrt{45}}{-\sqrt{20}}$.

4.26. Dziecko bawiąc się kalkulatorem, wystukało pewną liczbę. Następnie trzy razy nacisnęło przycisk $\sqrt{\ }$ i otrzymało liczbę 3. Podaj liczbę, którą dziecko wystukało.

4.27. Oblicz:

a) $\sqrt{17^2-8^2}$, b) $\sqrt{15^2+8^2}$, c) $\sqrt[3]{\left(3^3\right)^4}$,

d) $\sqrt[3]{9^2-17}-\sqrt[3]{64}$, e) $\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{8}-2\sqrt{32}\right)$, f) $\sqrt[3]{3}\left(5\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{243}\right)$,

g) $7\sqrt[3]{54}-5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{128}$, h) $\left(2\sqrt[3]{9}-5\sqrt[3]{72}\right)\sqrt[3]{3}$, i) $\sqrt[3]{9}\left(5\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{243}\right)$,

j) $0,75^7\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^7\cdot\left(1\frac{1}{12}-\frac{5}{7}\right)^0$, k) $\left(-\frac{10}{17}\right)^5\cdot\left(-\frac{51}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)^5$.

4.28. Zbadaj, dla jakich wartości m zachodzi równość:

a) $\sqrt{27}-\sqrt{108}=m\sqrt{3}$, b) $\sqrt{180}-\sqrt{125}=m\sqrt{5}$,

c) $-\sqrt{50}-\sqrt{98}=m\sqrt{32}$, d) $\sqrt{512}-\sqrt{200}=m\sqrt{18}$,

e) $\sqrt{50}-\sqrt{98}=m\sqrt{18}$, f) $5\sqrt{12}+2\sqrt{27}=m\sqrt{243}$.

4.29. Czy prawdziwa jest równość $\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{2187}$?

D *Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.*

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{375+195}$.
N	**Nie,**		**B.**	$\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{125\cdot 3}+\sqrt[3]{64\cdot 3}$.

Potęga o wykładniku wymiernym

a – nieujemna liczba rzeczywista,
n – liczba naturalna większa od 1.

stopień pierwiastka, wykładnik potęgi

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Potęgę liczby dodatniej a o wykładniku wymiernym $\frac{m}{n}$, gdzie m jest liczbą całkowitą i n liczbą naturalną większą od 1, określamy wzorem $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Przykład 18. Zapisz w postaci potęgi pierwiastek: **a)** $\sqrt{27}$, **b)** $\sqrt[5]{8}$, **c)** $\sqrt[3]{7}$.

Rozwiązanie. **a)** $\sqrt{27} = 27^{\frac{1}{2}}$, **b)** $\sqrt[5]{8} = 8^{\frac{1}{5}}$, **c)** $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$.

Ćwiczenie 24. Zapisz w postaci potęgi pierwiastek: **a)** $\sqrt{3}$, **b)** $\sqrt{5}$, **c)** $\sqrt[3]{12}$, **d)** $\sqrt[8]{4}$.

Przykład 19. Zapisz w postaci pierwiastka potęgę: **a)** $4^{\frac{3}{5}}$, **b)** $2^{\frac{5}{3}}$, **c)** $10^{1\frac{1}{2}}$.

Rozwiązanie. **a)** $4^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{64}$, **b)** $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32}$,
c) $10^{1\frac{1}{2}} = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = \sqrt{1000}$.

Ćwiczenie 25. Zapisz w postaci pierwiastka potęgę: **a)** $3^{\frac{2}{3}}$, **b)** $5^{2,5}$, **c)** $7^{0,4}$.

Uwaga. Wszystkie prawa działań na potęgach o wykładnikach całkowitych odnoszą się również do potęg o wykładnikach wymiernych. Z praw tych korzystamy we wszelkich obliczeniach łączących potęgi i pierwiastki.

Przykład 20. Zapisz w postaci potęgi liczby 2 pierwiastek: **a)** $\sqrt[3]{4}$, **b)** $\sqrt[6]{32}$.

Rozwiązanie

a) $\sqrt[3]{4} = \begin{cases} 4^{\frac{1}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{2\cdot\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \\ \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} \end{cases}$,

b) $\sqrt[6]{32} = \begin{cases} 32^{\frac{1}{6}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{5\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{5}{6}} \\ \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}} \end{cases}$.

Ćwiczenie 26. Zapisz w postaci potęgi liczby 3 pierwiastek:

a) $\sqrt[4]{27}$, **b)** $\sqrt[5]{81}$, **c)** $\sqrt[7]{2187}$.

Ćwiczenie 27. Wiedząc, że a jest liczbą dodatnią, k i p są liczbami całkowitymi oraz n i m liczbami naturalnymi większymi od 1, przepisz wzory do zeszytu i w miejsce ■ wpisz właściwy wykładnik.

a) $a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{p}{m}} = a^{\blacksquare}$, *iloczyn potęg o tych samych podstawach*

b) $a^{\frac{k}{n}} : a^{\frac{p}{m}} = a^{\blacksquare}$, *iloraz potęg o tych samych podstawach*

c) $\left(a^{\frac{k}{n}}\right)^{\frac{p}{m}} = a^{\blacksquare}$. *potęga potęgi*

Przykład 21. Oblicz: **a)** $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}$, **b)** $\frac{3^{2,5}}{\sqrt{3}}$, **c)** $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Rozwiązanie

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 2^2 = 4 \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4 \end{cases}$, $a^{\frac{k}{n}} \cdot a^{\frac{l}{m}} = a^{\frac{k}{n}+\frac{l}{m}}$, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

b) $\frac{3^{2,5}}{\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{3^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 3^2 = 9 \\ \frac{3^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3^5}{3}} = \sqrt{81} = 9 \end{cases}$, $a^{\frac{k}{n}} : a^{\frac{l}{m}} = a^{\frac{k}{n}-\frac{l}{m}}$, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

c) $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 64^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{6 \cdot \frac{1}{6}} = 2 \\ \left(\sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

Ćwiczenie 28. Oblicz:

a) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}$, **b)** $\frac{2^{1,5}}{\sqrt{2}}$, **c)** $\left(729^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ćwiczenie 29. Wiedząc, że a i b są liczbami dodatnimi, k jest liczbą całkowitą i n liczbą naturalną większą od 1, przepisz wzory do zeszytu i w miejsce ■ wpisz właściwy wykładnik.

a) $(a\cdot b)^{\frac{k}{n}} = a^{\blacksquare}\cdot b^{\blacksquare}$, *potęga iloczynu*

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k}{n}} = \frac{a^{\blacksquare}}{b^{\blacksquare}}$. *potęga ilorazu*

Przykład 22. Oblicz:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot 2^{-\frac{1}{5}}$, **b)** $2^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Rozwiązanie

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}\cdot 2^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^{-\frac{1}{5}} = 1^{-\frac{1}{5}} = 1,$ $a^{\frac{k}{n}}\cdot b^{\frac{k}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{k}{n}}$

b) $2^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2 : \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$ $a^{\frac{k}{n}} : b^{\frac{k}{n}} = (a : b)^{\frac{k}{n}}$

Ćwiczenie 30. Oblicz: **a)** $3^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$, **b)** $25^{-\frac{1}{3}} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Przykład 23. Przedstaw w postaci potęgi liczby 2 pierwiastek $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Rozwiązanie. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}}.$ $2\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}}$

Ćwiczenie 31. Wykaż, że $\sqrt[5]{4\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Przykład 24. Porównaj liczby:

a) 2^{300} i 3^{200}, **b)** $\sqrt[5]{3}$ i $\sqrt[3]{5}$.

Rozwiązanie. Przedstawiamy każdą z liczb w postaci potęgi o takim samym wykładniku i badamy ich iloraz.

a) $2^{300} = \left(2^3\right)^{100} = 8^{100}$ oraz $3^{200} = \left(3^2\right)^{100} = 9^{100}$, więc

$$\frac{2^{300}}{3^{200}} = \frac{8^{100}}{9^{100}} = \left(\frac{8}{9}\right)^{100}.$$

$\frac{8}{9} < 1$, więc $\left(\frac{8}{9}\right)^{100} < 1$, zatem $8^{100} < 9^{100}$, czyli $2^{300} < 3^{200}$.

b) $\sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{3}{15}}=\left(3^3\right)^{\frac{1}{15}}=27^{\frac{1}{15}}$ oraz $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{5}{15}}=\left(5^5\right)^{\frac{1}{15}}=3125^{\frac{1}{15}}$,

więc $\dfrac{27^{\frac{1}{15}}}{3125^{\frac{1}{15}}}=\left(\dfrac{27}{3125}\right)^{\frac{1}{15}}$.

$\dfrac{27}{3125}<1$, więc $\left(\dfrac{27}{3125}\right)^{\frac{1}{15}}<1$, zatem $27^{\frac{1}{15}}<3125^{\frac{1}{15}}$, czyli $\sqrt[5]{3}<\sqrt[3]{5}$.

Ćwiczenie 32. Porównaj liczby:

a) 4^{300} i 3^{400}, **b)** $\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt{3}$.

Uwaga

Jeżeli a i b są dodatnimi liczbami oraz w jest liczbą wymierną dodatnią i:

- $a^w=b^w$, to $a=b$,
- $a^w<b^w$, to $a<b$,
- $a^w>b^w$, to $a>b$,
- $\dfrac{a^w}{b^w}=1$, to $a=b$,
- $\dfrac{a^w}{b^w}<1$, to $a<b$,
- $\dfrac{a^w}{b^w}>1$, to $a>b$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

24. a) $3^{\frac{1}{2}}$, b) $5^{\frac{1}{2}}$, c) $12^{\frac{1}{3}}$, d) $4^{\frac{1}{8}}$. **25.** a) $\sqrt[3]{9}$, b) $\sqrt{3125}$, c) $\sqrt[5]{49}$. **26.** a) $3^{\frac{3}{4}}$, b) $3^{\frac{4}{5}}$, c) 3.
28. a) 9, b) 2, c) 3. **30.** a) $\frac{1}{9}$, b) $\frac{1}{5}$. **32.** a) $4^{300}<3^{400}$, b) $\sqrt[3]{2}<\sqrt{3}$.

Zadania utrwalające

4.30. Spośród liczb $8^{-\frac{1}{3}}$, $\left(1\frac{7}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{27}{16}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{9-4}$ wypisz:

a) liczby całkowite, **b)** liczby niewymierne, **c)** liczby większe od 2.

4.31. Oblicz:

a) $64^{\frac{1}{3}}$, **b)** $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$, **c)** $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$, **d)** $\left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$, **e)** $(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}$, **f)** $25^{\frac{3}{2}}$,

g) $(0{,}027)^{\frac{2}{3}}$, **h)** $1000^{-\frac{2}{3}}$, **i)** $2\cdot 27^{\frac{2}{3}}$, **j)** $\left(\frac{49}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$, **k)** $256^{0{,}75}-3^{-1}\cdot 21^0$.

4.32. Zastosuj prawa działań na potęgach i oblicz:

a) $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{3}{5}}$, b) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}}$, c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$, d) $5^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{3}}$, e) $108^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} + 7^{\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{3}}$.

4.33. Określ, do której potęgi należy podnieść liczbę 8, aby otrzymać:

a) 64, b) 1, c) 2, d) 4, e) $\frac{1}{32}$, f) 32, g) $\frac{1}{2}$, h) $\frac{1}{256}$.

4.34. Przedstaw w postaci jednej potęgi wyrażenie:

a) $3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-2}$, b) $\sqrt[3]{9} \cdot 3^2 \cdot 3^0 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$, c) $\sqrt{3\sqrt{3}}$, d) $\sqrt[4]{3^{-3} \cdot \sqrt[5]{9}}$,

e) $\left(3^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{27}\right)^2$, f) $\frac{2^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{4} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt{2} \cdot 16^{\frac{1}{2}}}$, g) $\frac{\sqrt{5} \cdot 125^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{25^{-\frac{1}{2}}}$, h) $\sqrt[3]{5\sqrt[3]{5}}$.

4.35. Przedstaw w postaci pierwiastka wyrażenie:

a) $2^{\frac{3}{4}}$, b) $2^{0,5}$, c) $3^{\frac{4}{5}}$, d) $3^{0,4}$, e) $3^{-\frac{2}{3}}$, f) $8^{-\frac{3}{5}}$, g) $2^{\frac{7}{3}}$.

4.36. D Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{48} + \sqrt{147} = \sqrt{363}$, b) $\sqrt[3]{1080} - \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{320}$, c) $\sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$,

d) $7 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}} + \sqrt[3]{\frac{1}{54}}\right) = 5\frac{5}{6}$, e) $\sqrt[4]{a^9} = a^2 \cdot \sqrt[4]{a}$, gdy $a \geq 0$, f) $\sqrt[12]{16} = \sqrt[3]{2}$.

4.37. Oblicz:

a) $\sqrt[5]{-97\frac{21}{32}}$, b) $\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[6]{16}$, c) $2\sqrt[5]{\frac{243}{1024}} + \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.

4.38. Porównaj liczby:

a) $\sqrt{2^{80}}$ i $\sqrt[3]{4^{60}}$, b) $\sqrt[5]{25^{75}}$ i $\sqrt[10]{125^{100}}$, c) $\sqrt[10]{11}$ i $\sqrt[11]{10}$, d) $\sqrt[3]{3}$ i $\sqrt[4]{4}$.

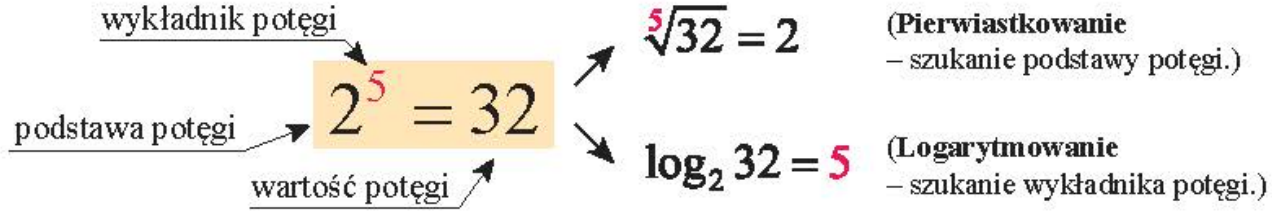
4.39. D Uzasadnij, że:

a) $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, b) $3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$, c) $\sqrt[3]{-\sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{-216}} = -2$,

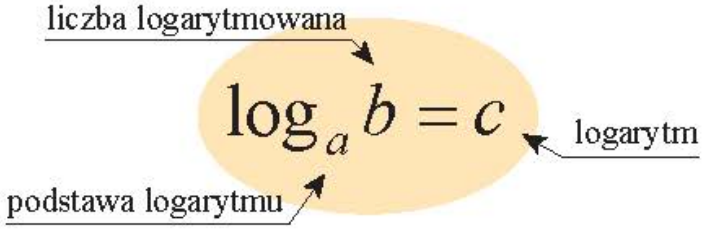
d) jeżeli $a = 2^{45}$, $b = 3^{30}$ i $c = 5^{20}$, to $a < c < b$.

Pojęcie logarytmu

Działaniem odwrotnym do dodawania jest odejmowanie, a do odejmowania dodawanie. Działaniem odwrotnym do mnożenia jest dzielenie (jeśli je można wykonać) i odwrotnie, do dzielenia mnożenie. Natomiast do potęgowania istnieją dwa działania odwrotne, pierwiastkowanie i logarytmowanie, jeżeli można je wykonać.



$\log_2 8 = 3$, bo $2^3 = 8$,
$\log_3 9 = 2$, bo $3^2 = 9$,
$\log_5 25 = 2$, bo $5^2 = 25$.



Logarytmem liczby dodatniej b, przy dodatniej podstawie a różnej od 1, nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę logarytmowaną b.

$$c = \log_a b, \text{ gdy } a^c = b$$

Przykład 25. Oblicz:

a) $\log_4 1$, $\log_4 4$, $\log_4 16$, $\log_4 64$, **b)** $\log_{\frac{1}{3}} 1$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, $\log_{\frac{1}{3}} 3$, $\log_{\frac{1}{3}} 27$.

Rozwiązanie

a) $\log_4 1 = 0$, bo $4^0 = 1$, $\log_4 4 = 1$, bo $4^1 = 4$,
$\log_4 16 = 2$, bo $4^2 = 16$, $\log_4 64 = 3$, bo $4^3 = 64$,

b) $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$, bo $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$, bo $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$,
$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$, bo $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$, $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, bo $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

Odp.: **a)** 0, 1, 2, 3, **b)** 0, 1, –1, –3.

Ćwiczenie 33. Oblicz:

a) $\log_5 1$, $\log_5 5$, $\log_5 \frac{1}{5}$, $\log_5 \frac{1}{125}$, **b)** $\log_6 \frac{1}{6}$, $\log_6 1$, $\log_6 \frac{1}{36}$, $\log_6 216$.

Przykład 26. Uzasadnij, że jeśli a jest liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1, to:

a) $\log_a a = 1$, **b)** $\log_a 1 = 0$.

Rozwiązanie. Założenia: $a > 0$ i $a \neq 1$. Bezpośrednio z definicji logarytmu wynika, że:

a) $\log_a a = 1$, bo $a^1 = a$ ***c.n.u.***

b) $\log_a 1 = 0$, bo $a^0 = 1$ ***c.n.u.***

Ćwiczenie 34. Oblicz: **a)** $\log_6 6$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$, $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\log_{10} 10$,

b) $\log_2 1$, $\log_{1000} 1$, $\log_{0,1} 1$, $\log_{\pi} 1$, $\log_{2\sqrt{2}} 1$.

Przykład 27. Uzasadnij, że jeśli a jest liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1, to:

a) $\log_a a^k = k$, gdzie k jest dowolną liczbą rzeczywistą,

b) $\log_{a^p} a^k = \frac{k}{p}$, gdzie k jest dowolną liczbą rzeczywistą i p liczbą rzeczywistą różną od 0.

Rozwiązanie. Założenie: $a > 0$ i $a \neq 1$.

a) Załóżmy, że $\log_a a^k = c$, gdzie $k \in R$.

$a^c = a^k$,

$c = k$. ***c.n.u.***

Z definicji logarytmu $\log_a b = c$, *więc* $a^c = b$.

b) Załóżmy, że $\log_{a^p} a^k = c$, gdzie $k \in R$ oraz $p \in R$ i $p \neq 0$.

$\left(a^p\right)^c = a^k$,

$a^{p \cdot c} = a^k$,

$p \cdot c = k$,

$c = \frac{k}{p}$. ***c.n.u.***

Z definicji logarytmu $\log_a b = c$, *więc* $a^c = b$.

$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

Jeżeli a jest liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1 oraz b liczbą rzeczywistą dodatnią, to:

- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_a a = 1$,
- $\log_a a^k = k$, gdzie $k \in R$,
- $\log_{a^p} a^k = \frac{k}{p}$, gdzie $k \in R$, $p \in R$ i $p \neq 0$,
- $a^{\log_a b} = b$.

Ćwiczenie 35. Skorzystaj z definicji logarytmu i uzasadnij wzór $a^{\log_a b} = b$.

Przykład 28. Oblicz:

a) $\log_2 2^{-3}$, $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^5$, $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}$, **b)** $\log_{\sqrt{2}} 4$, **c)** $\log_9 \frac{1}{3}$, **d)** $\log_{\frac{1}{4}} 8$.

Rozwiązanie

a) $\log_2 2^{-3} = -3$, $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^5 = 5$, $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} = -5$, $\log_a a^k = k$

b) $\log_{\sqrt{2}} 4 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^2 = 2 : \frac{1}{2} = 4$, $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $4 = 2^2$

c) $\log_9 \frac{1}{3} = \log_{3^2} 3^{-1} = -1 : 2 = -\frac{1}{2}$, $9 = 3^2$, $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

d) $\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = 3 : (-2) = -\frac{3}{2}$. $\frac{1}{4} = 2^{-2}$, $8 = 2^3$

Odp.: **a)** –3, 5, –5, **b)** 4, **c)** $-\frac{1}{2}$, **d)** $-\frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 36. Oblicz:

a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4$, **b)** $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^3$, **c)** $\log_{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{8}\right)^{-2}$, **d)** $\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4}$, **e)** $\log_2 \frac{1}{4}$.

Ćwiczenie 37. Oblicz:

a) $\log_4 8$, **b)** $\log_{2\sqrt{2}} 4$, **c)** $\log_{\frac{1}{8}} 16$, **d)** $\log_{\frac{1}{9}} 27$, **e)** $\log_{\frac{1}{125}} \frac{1}{5}$, **f)** $\log_{64} 32$.

Przykład 29. Oblicz:

a) $2^{\log_2 7}$, **b)** $2^{3\log_2 5}$, **c)** $16^{\log_2 3}$.

Rozwiązanie

a) $2^{\log_2 7} = 7$, $a^{\log_a b} = b$

b) $2^{3\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^3 = 5^3 = 125$, $a^{n\cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n$ i $2^{\log_2 5} = 5$

c) $16^{\log_2 3} = \left(2^4\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^4 = 3^4 = 81$. $16 = 2^4$ i $\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n$ i $2^{\log_2 3} = 3$

Odp.: **a)** 7, **b)** 125, **c)** 81.

Ćwiczenie 38. Oblicz:

a) $3^{\log_3 5}$, **b)** $6^{\log_6 2}$, **c)** $5^{2\log_5 3}$, **d)** $4^{3\log_4 5}$, **e)** $27^{\log_3 2}$, **f)** $64^{\log_8 3}$.

Przykład 30. Przedstaw liczbę:

a) 2 w postaci potęgi liczby 7, **b)** 11 w postaci potęgi liczby 15.

Rozwiązanie. Korzystamy z wzoru $a^{\log_a b} = b$.

a) $2 = 7^{\log_7 2}$, **b)** $11 = 15^{\log_{15} 11}$.

Ćwiczenie 39. Przedstaw liczbę: **a)** 3 w postaci potęgi liczby 10,

b) 25 w postaci potęgi liczby 4, **c)** 100 w postaci potęgi liczby 5.

Ćwiczenie 40. Przedstaw liczbę: **a)** 2 w postaci logarytmu o podstawie 3,

b) $\frac{1}{2}$ w postaci logarytmu o podstawie 2, **c)** 100 w postaci logarytmu o podstawie 10.

Uwaga

Ważną rolę w matematyce i naukach matematyczno-przyrodniczych odgrywa:

- logarytm przy podstawie 10 zwany **logarytmem dziesiętnym**, zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$ lub $\lg b$,
- logarytm przy podstawie e (gdzie $e = 2{,}718281828...$) zwany **logarytmem naturalnym**, zamiast $\log_e b$ piszemy $\ln b$.

Ćwiczenie 41. Przerysuj tabelę do zeszytu i w miejsce ■ wpisz właściwą liczbę.

b	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10 000	100 000	1000 000
$\log b$	−3	■	■	■	■	2	■	■	■	6

Posługując się uzupełnioną tabelą, oceń prawdziwość poniższych nierówności:

a) $\log 34 > 0$, **b)** $\log 124 < 3$ i $\log 124 > 2$, **c)** $\log 0{,}02 > -3$ i $\log 0{,}02 < -1$,

d) $\log 10\,000\,000 < 5$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

33. **a)** 0, 1, −1, −3, **b)** −1, 0, −2, 3. **34.** **a)** 1, **b)** 0. **35.** *Wskazówka.* Załóż, że $\log_a b = c$.

36. **a)** 4, **b)** 3, **c)** −2, **d)** 2, **e)** −2. **37.** **a)** $\frac{3}{2}$, **b)** $\frac{4}{3}$, **c)** $-\frac{4}{3}$, **d)** $-\frac{3}{2}$, **e)** $\frac{1}{3}$, **f)** $\frac{5}{6}$.

38. **a)** 5, **b)** 2, **c)** 9, **d)** 125, **e)** 8, **f)** 9. **39.** **a)** $3 = 10^{\log_{10} 3}$, **b)** $25 = 4^{\log_4 25}$, **c)** $100 = 5^{\log_5 100}$.

40. **a)** $2 = \log_3 9$, **b)** $\frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{2}$, **c)** $100 = \log_{10} 10^{100}$. **41.** **a)** Prawda, **b)** prawda, **c)** prawda, **d)** fałsz.

Zadania utrwalające

4.40. Oblicz:

a) $\log_2 1,\ \log_2 4,\ \log_2 \sqrt{2},\ \log_2 0{,}125,$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}} 2,\ \log_{\frac{1}{2}} 4,\ \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2},\ \log_{\frac{1}{2}} 16,$

c) $\log 100,\ \log \sqrt{10},\ \log 0{,}01,\ \log \sqrt[3]{10},$ **d)** $\log_5 1,\ \log_5 \frac{1}{5},\ \log_5 \sqrt{5},\ \log_5 625.$

4.41. Oblicz:

a) $\log_5 125,\ \log_4 16,\ \log_3 81,\ \log_6 6,\ \log_7 343,$

b) $\log_5 \frac{1}{125},\ \log_2 \frac{1}{8},\ \log_3 \frac{1}{27},\ \log_4 \frac{1}{64},\ \log 0{,}001,$

c) $\log_5 \left(25\sqrt{5}\right),\ \log_2 \sqrt{2},\ \log_6 \left(6\sqrt{6}\right),\ \log_3 \sqrt{3},\ \log_7 \sqrt[3]{49},$

d) $\log_4 \sqrt{2},\ \log_{27} \sqrt{3},\ \log_{\sqrt{2}} \sqrt{32},\ \log_9 \frac{1}{27},\ \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}.$

4.42. Oblicz, nie używając kalkulatora:

a) $3^{\log_3 8},\ (0{,}5)^{\log_{0,5} 5},\ \left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 3},\ e^{\ln 12},$ **b)** $5^{2\log_5 7},\ 10^{3\log 5},\ 6^{2\log_6 10},\ e^{2\ln 5},$

c) $25^{\log_5 2},$ **d)** $8^{\log_2 5},$ **e)** $7^{2\log_7 3+1},$ **f)** $3^{4\log_3 5-3},$ **g)** $27^{2\log_3 2-1}.$

4.43. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz właściwą liczbę.



a) $\log_7 ■ = 2,\ \log_6 ■ = 3,\ \log_9 ■ = -\frac{1}{2},$ **b)** $\log_■ 27 = 3,\ \log_■ 64 = 6,\ \log_■ 7 = -1.$

4.44. Zapisz za pomocą logarytmu równość:

a) $6^3 = 216,$ **b)** $11^3 = 1331,$ **c)** $10^{-2} = 0{,}01,$ **d)** $4^{0,5} = 2,$ **e)** $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 4.$

4.45. Oblicz $\log_{0,2} b$, gdy:

a) $b = 0{,}2,$ **b)** $b = 625,$ **c)** $b = \sqrt[3]{0{,}04},$ **d)** $b = 5,$ **e)** $b = \frac{1}{5}.$

4.46. Spośród liczb:

$\log_2 4,\ \log 0{,}0001,\ \ln e,\ \log_6 \frac{1}{36},\ \log_7 1,\ \log_3 \sqrt{3},\ \log_4 \frac{1}{4},\ \log_8 8,\ \log_9 \frac{1}{27}$

wypisz te, które są:

a) ujemne, **b)** równe 1, **c)** dodatnie i mniejsze od 1.

4.47. Przerysuj tabelę do zeszytu i w miejsce ■ wpisz właściwą liczbę.

b	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\log_2 b$	–3	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	10

Posługując się uzupełnioną tabelą, porównaj liczby:

a) $\log_2 0{,}1$ i -3, **b)** $\log_2 0{,}8$ i $0{,}5$, **c)** $\log_2 100$ i 7.

4.48. Przedstaw liczbę 2 w postaci logarytmu o podstawie:

a) 2, **b)** $\frac{1}{2}$, **c)** 3, **d)** 4, **e)** 5, **f)** 10.

Logarytm iloczynu, ilorazu oraz logarytm potęgi

Pojęcie logarytmu jest związane z pojęciem potęgi, więc z praw działań na potęgach wynikają prawa działań na logarytmach.

Jeśli a, b i c są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$, to:

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ — *logarytm iloczynu*

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ — *logarytm ilorazu*

$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$, gdy $m \in R$. — *logarytm potęgi*

Udowodnimy dwa pierwsze wzory. Dowód wzoru trzeciego pozostawiamy Czytelnikowi.

Dowód: Jeśli $\log_a b = x$ i $\log_a c = y$, wtedy $b = a^x$ i $c = a^y$.

Zatem:

- $b \cdot c = a^x \cdot a^y$, skąd $b \cdot c = a^{x+y}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

  $x + y = \log_a (b \cdot c)$. *Z definicji logarytmu $a^c = b$, więc $\log_a b = c$.*

  Zatem $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ ***c.n.d.***

- $\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y}$, skąd $\frac{b}{c} = a^{x-y}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$

  $x - y = \log_a \frac{b}{c}$. *Z definicji logarytmu $a^c = b$, więc $\log_a b = c$.*

  Zatem $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$. ***c.n.d.***

Przykład 31. Oblicz:

a) $\log_2 12{,}8+\log_2 2{,}5$, **b)** $\log_2 40-\log_2 10$, **c)** $2\log_3 6-\log_3 4$.

Rozwiązanie

a) $\log_2 12{,}8+\log_2 2{,}5=\log_2(12{,}8\cdot 2{,}5)=\log_2 32=5$, $\log_a b+\log_a c-\log_a(b\cdot c)$

b) $\log_2 40-\log_2 10=\log_2\frac{40}{10}=\log_2 4=2$, $\log_a b-\log_a c-\log_a\frac{b}{c}$

c) $2\log_3 6-\log_3 4=\log_3 6^2-\log_3 4=\log_3\frac{36}{4}=\log_3 9=2$. $m\cdot\log_a b-\log_a b^m$

Ćwiczenie 42. Oblicz:

a) $\log_2 80+\log_2 0{,}1$, **b)** $\log_3\frac{2}{3}+\log_3\frac{1}{6}$, **c)** $\log_4 10+\log_4 0{,}4$,

d) $\log_2 48-\log_2 3$, **e)** $\log_5 10-\log_5 2$, **f)** $\log_2 9-\log_2 72$,

g) $2\log_{10}5+2\log_{10}2$, **h)** $3\log 2+3\log 5$, **i)** $2\log_2 6-4\log_2\sqrt{3}$.

Przykład 32. Oblicz:

a) $\log_2(\log 100)$, **b)** $\log_4(\log_2 24+\log_2 4-\log_2 6)$.

Rozwiązanie

a) $\log_2(\underbrace{\log 100}_{\text{wykonujemy w pierwszej kolejności}})=\log_2 2=1$, $\log 100=2$

b) $\log_4(\underbrace{\log_2 24+\log_2 4-\log_2 6}_{\text{wykonujemy w pierwszej kolejności}})=\log_4\left(\log_2\frac{24\cdot 4}{6}\right)=\log_4(\log_2 16)=\log_4 4=1$.

Odp.: **a)** 1, **b)** 1.

Ćwiczenie 43. Oblicz: **a)** $\log_3(\log_2 512)$, **b)** $\log_4\left(\log_6 11-\log_6\frac{11}{72}-\log_6 2\right)$.

Ćwiczenie 44. Wskaż za pomocą nawiasów kolejność wykonywania działań i oblicz:

a) $\log_2\log_4 16$, **b)** $\log_3\log_2 512$.

Przykład 33. Wiedząc, że $\log_2 5\approx 2{,}322$, oblicz przybliżoną wartość logarytmu:

a) $\log_2 50$, **b)** $\log_2 6{,}25$. Wynik podaj z dokładnością do $0{,}01$.

Rozwiązanie

a) $\log_2 50=\log_2(2\cdot 25)=\log_2 2+\log_2 5^2=1+2\log_2 5$,

zatem $\log_2 50\approx 1+2\cdot 2{,}322$, czyli $\log_2 50\approx 5{,}64$.

b) $\log_2 6{,}25 = \log_2 \frac{25}{4} = \log_2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2 \cdot \log_2 \frac{5}{2} = 2\left(\log_2 5 - \log_2 2\right) = 2 \cdot \left(\log_2 5 - 1\right)$,

zatem $\log_2 6{,}25 \approx 2 \cdot (2{,}322 - 1)$, czyli $\log_2 6{,}25 \approx 2{,}64$.

Odp.: **a)** $\log_2 50 \approx 5{,}64$, **b)** $\log_2 6{,}25 \approx 2{,}64$.

Ćwiczenie 45. Wiedząc, że $\log 2 \approx 0{,}3010$, oblicz $\log 4 + \frac{1}{3}\log 8 - 4\log\frac{1}{16}$.

Wynik podaj z dokładnością do $0{,}01$.

Przykład 34. Oblicz: **a)** $3^{\frac{\log_4 3}{\log_4 9}}$, **b)** $\frac{\log 36 - \log 4}{\log 9 + \log 3}$.

Rozwiązanie

a) $3^{\frac{\log_4 3}{\log_4 9}} = 3^{\frac{\log_4 3}{2\log_4 3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$,

$\log_4 9 = 2\log_4 3$

b) $\frac{\log 36 - \log 4}{\log 9 + \log 3} = \frac{\log \frac{36}{4}}{\log(9 \cdot 3)} =$

$= \frac{\log 9}{\log 27} = \frac{\log 3^2}{\log 3^3} = \frac{2 \cdot \log 3}{3 \cdot \log 3} = \frac{2}{3}$.

$\log a \quad \log b = \log \frac{a}{b}$,

$\log a + \log b = \log(a \cdot b)$

Ćwiczenie 46. Oblicz:

a) $5^{\frac{\log_3 16}{\log_3 4}}$, **b)** $\frac{\log_2 48 - \log_2 8}{\log_2 9 + \log_2 4}$, **c)** $\frac{\log_{\frac{1}{2}} 21 - \log_{\frac{1}{2}} 3}{\log_{\frac{1}{2}} 49}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

42. a) 3, b) –2, c) 1, d) 4, e) 1, f) –3, g) 2, h) 3, i) 2. 43. a) 2, b) $\frac{1}{2}$. 44. a) 1, b) 2. 45. 5,72.
46. a) 25, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}$.

Zadania utrwalające

4.49. Oblicz:

a) $\log 4 + \log 25$, **b)** $\log 50 + \log 20$, **c)** $\log_6 2 + \log_6 18$,

d) $\log_2 96 - \log_2 6$, **e)** $\log_9 108 - \log_9 4$, **f)** $\log_{\frac{1}{2}} 6 - \log_{\frac{1}{2}} 3$,

g) $\log 6 - \log 2 - \log 3$, **h)** $\log_4 480 - \log_4 5 - \log_4 3$.

4.50. Oblicz:

a) $2\log_3 6 - \log_3 4$, **b)** $\log 8 + 3\log 5$, **c)** $\log_4 3 + 2\log_4 \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

d) $2\log_{\frac{1}{2}} 5 + 4\log_{\frac{1}{2}} 2 - 2\log_{\frac{1}{2}} 10$, **e)** $\log_3 3 - 3\log_3 2 + \log_3 24$,

f) $\log_{\frac{1}{4}} 18 + \log_{\frac{1}{4}} 8 - 2\log_{\frac{1}{4}} 3$, **g)** $\log 15 + \log 2 + 2\log 5 - \log\frac{3}{4}$.

4.51. D Wykaż, że:

a) $\log_5 50 = 2 + \log_5 2$, **b)** $\log_3 15 = 1 + \log_3 5$,

c) $\log_4 6 + \log_4 8 = 2 + \log_4 3$, **d)** $\log_{\frac{1}{2}} 5 - 1 = \log_{\frac{1}{2}} 10$.

4.52. Przedstaw w postaci jednego logarytmu wyrażenie:

a) $1 + \log_3 4$, **b)** $\log_2 5 - 1$, **c)** $\log_{\frac{1}{2}} 3 - 2$, **d)** $2 - \log_4 6$.

4.53. Oblicz:

a) $\log_3(\log 1000)$, **b)** $5^{\frac{\log 5}{\log 25}}$, **c)** $10 \cdot 10^{\log 3 - \log 2}$,

d) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 9)$, **e)** $10^{2+\log 8}$, **f)** $\frac{\log_5 36 \cdot \log_5 64}{\log_5 6 \cdot \log_5 512}$,

g) $\frac{\log_{\frac{1}{2}} 75 - 2\log_{\frac{1}{2}} 5}{\log_{\frac{1}{2}} 6 - \log_{\frac{1}{2}} 2}$, **h)** $\frac{\log 36 + \log 4}{\log 3 + \log 4}$, **i)** $\frac{\log 4}{\log 2} + \frac{\log 9}{\log 3} - \frac{\log 25}{\log 125}$.

4.54. Porównaj liczby:

a) $\sqrt{8}$ i $2^{\log_2 \sqrt{7}}$, **b)** $\sqrt{5}$ i $9^{\log_3 \sqrt{2,5}}$, **c)** 0 i $\frac{2}{\log_{\frac{1}{2}} 4}$, **d)** $\sqrt{26}$ i $4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{9}}$.

4.55. Wiedząc, że $\log 3 \approx 0,4771$, oblicz przybliżoną wartość logarytmu:

a) $\log 30$, **b)** $\log\frac{1}{3}$, **c)** $\log\frac{1}{9}$, **d)** $\log 27$.

4.56. D Wykaż, że jeśli $\log_2 5 = a$, to:

a) $\log_2 10 = a + 1$, **b)** $\log_2 2,5 = a - 1$, **c)** $\log_2 100 = 2(a+1)$.

4.57. Oblicz x, gdy:

a) $\log x = 2\log 5$, **b)** $\log x = \log 40 - \log 5$,

c) $\log x = \log 2 + \log 3 + \log 4$, **d)** $\log x = 2\log 3 + \log 4$,

e) $\log x = 3\log 5 - \frac{1}{2}\log 9$, **f)** $\log_2 x = \log_2 10 + \log_2 5 - \log_2 25$.

Przykłady zastosowań potęg i logarytmów

Przypomnijmy

Notacją wykładniczą nazywamy zapis liczby wymiernej dodatniej x w postaci $x = a \cdot 10^n$, gdzie $1 \le a < 10$ i n jest liczbą całkowitą.

Na przykład: $2^5 = 3{,}2 \cdot 10$, $(0{,}02)^5 = 3{,}2 \cdot 10^{-9}$.

Ćwiczenie 47. Zapisz w notacji wykładniczej liczbę:

a) 2^8, **b)** 3^5, **c)** 7^3, **d)** 2^{10}.

Korzystając z zapisu liczb dodatnich w notacji wykładniczej przy użyciu logarytmów dziesiętnych, można określać liczbę cyfr potrzebnych do zapisywania wielkich liczb.

W tym celu wystarczy znać tylko kilka wartości logarytmów dziesiętnych: $\log 2 \approx 0{,}301$, $\log 3 \approx 0{,}4771$. Pokażemy to na przykładach.

$2^6 = \underbrace{64}_{\text{2 cyfry w zapisie}} = 6{,}4 \cdot 10^1$

$2 = 1 + 1$

$\log 2^6 = 6 \cdot \log 2 = 6 \cdot 0{,}301$

$\log 2^6 = 1{,}806$

$1 + 1 = 2$

$2^{15} = \underbrace{32\,768}_{\text{5 cyfr w zapisie}} = 3{,}2768 \cdot 10^4$

$5 = 4 + 1$

$\log 2^{15} = 15 \cdot \log 2 = 15 \cdot 0{,}301$

$\log 2^{15} = 4{,}515$

$4 + 1 = 5$

Uwaga

Jeżeli $x = a \cdot 10^n$ i $a \in (1; 10)$, to do zapisu liczby x potrzebnych jest $n + 1$ cyfr.

Przykład 35. Określ liczbę cyfr potrzebnych do zapisu liczby:

a) 2^{100}, **b)** 6^{50}, **c)** 5^{30}.

W obliczeniu przyjmij $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}4771$.

Rozwiązanie

a) $\log 2^{100} = 100 \cdot \log 2 = 100 \cdot 0{,}301 = 30{,}1$

Zatem w zapisie liczby 2^{100} będzie 31 cyfr. $n + 1 = 30 + 1$

b) $\log 6^{50} = 50 \cdot \log 6 = 50 \cdot (\log 2 + \log 3) = 50 \cdot (0{,}301 + 0{,}4771) = 38{,}905$

Zatem w zapisie liczby 6^{50} będzie 39 cyfr. $n + 1 = 38 + 1$

c) $\log 5^{30} = \log\left(\frac{10}{2}\right)^{30} = 30\cdot(\log 10 - \log 2) = 30\cdot(1-\log 2) = 30\cdot 0{,}699 = 20{,}97$

Zatem w zapisie liczby 5^{30} będzie 21 cyfr. $n+1 = 20+1$

Odp.: **a)** 31 cyfr, **b)** 39 cyfr, **c)** 21 cyfr.

Ćwiczenie 48. Określ liczbę cyfr potrzebnych do zapisu liczby:
a) 3^{100}, **b)** 8^{45}, **c)** 25^{50}.

Logarytmy przed erą komputerów i kalkulatorów miały olbrzymie zastosowanie w obliczeniach. Przyrząd, zwany suwakiem logarytmicznym, był powszechnie używany do końca lat 80. XX wieku przez techników i inżynierów.

Ćwiczenie 49. Poszukaj w internecie informacji o suwaku logarytmicznym i określ, jakie działania na liczbach pozwalał szybko wykonywać.

Wielu naukowców wyniki swoich doświadczeń i obserwacji starało się opisać wzorem. We wzorach tych wykorzystywali logarytmy dziesiętne (log) albo logarytmy naturalne (ln). Oto kilka przykładów.

Prawo Webera-Fechnera (psychologia)	Wzór Ciołkowskiego (kosmonautyka)	Skala Richtera (sejsmologia)
$w = k\cdot\ln\frac{B}{B_0}$	$v = \omega\cdot\ln\frac{m_0}{m}$	$R = \log\frac{A}{A_0}$
Wzór opisuje zależność pomiędzy fizyczną miarą bodźca B a reakcją zmysłową, np. wzroku, słuchu, węchu na jego siłę.	*Wzór opisuje zależność między prędkością v rakiety a jej masą m_0 z paliwem i masą m bez paliwa oraz prędkością gazów wylotowych.*	*Wzór określa wielkość trzęsienia ziemi na podstawie amplitudy A drgań wstrząsów sejsmicznych.*

Przykład 36. Zastosuj wzór $R = \log\frac{A}{A_0}$, gdzie $A_0 = 10^{-4}$ [cm] i oblicz, ile razy mniejszą siłę ma trzęsienie ziemi w skali Richtera 3 od trzęsienia ziemi w skali Richtera 5.

Rozwiązanie

$$R = \log\frac{A}{A_0} \text{ i } A_0 = 10^{-4} \text{ [cm]},$$

$\log\frac{a}{b} = \log a \quad \log b$

$$R = \log\frac{A}{10^{-4}}, \text{ skąd } R = \log A - \log 10^{-4}$$

$R = \log A + 4\log 10$.

$\log 10 = 1$

Zatem $\log A = R - 4$,

$A = 10^{R-4}$.

$\log_a b = c$, to $b = a^c$

Jeżeli: $R = 3$, to $A_3 = 10^{3-4} = \frac{1}{10}$

$R = 5$, to $A_5 = 10^{5-4} = 10$

skąd $\frac{A_3}{A_5} = \frac{1}{10} : 10 = \frac{1}{100}$.

Odp.: 100 razy.

Ćwiczenie 50. Przerysuj tabelę do zeszytu, zastosuj wzór $R = \log \frac{A}{10^{-4}}$

R	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A [cm]	■	■	■	■	■	■	■	■	■

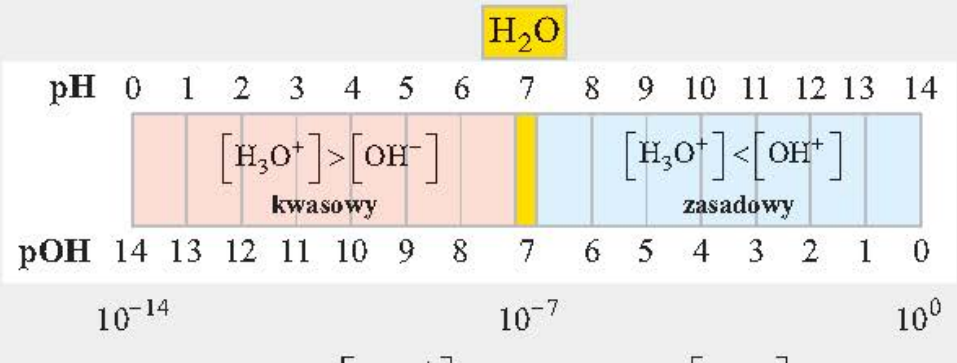
i w miejsce ■ wpisz właściwą liczbę. Z tabeli odczytaj wartość R, dla której:
a) $A = 1\,\text{m}$, **b)** $A = 100\,\text{m}$, **c)** $A = 1\,\text{km}$.

Ćwiczenie 51. Poszukaj w internecie informacji o największych zarejestrowanych trzęsieniach ziemi: **a)** na całym świecie, **b)** w Europie, **c)** w Polsce.

Uwaga

Chemicy do określenia kwasowości roztworu wodnego posługują się określeniem czynnika pH: $\text{pH} = -\log\left[\text{H}^+\right]$,

gdzie $\left[\text{H}^+\right]$ określa stężenie w roztworze jonów wodorowych.



$\text{pH} = -\log\left[\text{H}_3\text{O}^+\right]$, $\text{pOH} = -\log\left[\text{OH}^-\right]$

Dla chemicznie czystej wody $\text{pH} = -\log 10^{-7} = 7$.

Jeśli:

- $\text{pH} < 7$, to roztwór ma odczyn kwaśny,
- $\text{pH} > 7$, to roztwór ma odczyn zasadowy,
- $\text{pH} = 7$ (woda), to roztwór ma odczyn obojętny.

Przykład 37. Stężenie jonów wodorowych $\left[H^+\right]$ w mieszaninie jest równe $1,26\cdot10^{-4}$. Oblicz pH tego napoju. W obliczeniach przyjmij $\log1,26\approx0,1$.

Rozwiązanie

$$pH=-\log\left[H^+\right]$$

$$pH=-\log\left[1,26\cdot10^{-4}\right]=-\left(\log1,26+\log10^{-4}\right)= \qquad \log(a\cdot b)=\log a+\log b$$

$$=-\log1,26-\log10^{-4},\ \text{więc}\ \ pH\approx-0,1+4=3,9.$$

Odp.: $pH\approx3,9$.

Ćwiczenie 52. Oblicz pH soku z pomarańczy, jeśli stężenie $\left[H^+\right]$ jest równe $1,26\cdot10^{-5}$. W obliczeniach przyjmij $\log1,26\approx0,1$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

47. **a)** $2,56\cdot10^2$, **b)** $2,43\cdot10^2$, **c)** $3,43\cdot10^2$, **d)** $1,024\cdot10^3$. 48. **a)** 48 cyfr, **b)** 41 cyfr, **c)** 70 cyfr.

50.

R	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A [cm]	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000

a) 6, **b)** 8, **c)** 9.
Wskazówka. Zastosuj wzór $A=10^{R-4}$.

52. 4,9.

Zadania utrwalające

4.58. Określ liczbę cyfr potrzebnych do zapisu liczby:

a) 12^{30}, **b)** 15^{15}, **c)** 40^{40}, **d)** 60^{60}.

W obliczeniu przyjmij $\log2=0,301$ i $\log3=0,4771$.

4.59. Oblicz amplitudę A trzęsienia ziemi o sile w skali Richtera:

a) 4,7 (trzęsienie ziemi w Polsce – 1993 r.),

b) 9,5 (najsilniejsze trzęsienie ziemi na świecie – Chile, 1960 r.),

c) 9 (trzęsienie ziemi w Japonii – 2011 r.).

W obliczeniach zastosuj wzór $R=\log\frac{A}{10^{-4}}$.

4.60. Oblicz:

a) pH octu wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w occie jest równe $1,26\cdot10^{-3}$ (w obliczeniach przyjmij $\log1,26\approx0,1$),

b) stężenie jonów wodorowych w mleku, wiedząc, że pH mleka jest równe 6,6 (w obliczeniach zastosuj wzór $pH=-\log\left[H_3O^+\right]$).

4.61. Poziom głośności dźwięku L, wyrażony w decybelach (skrót dB), oblicza się z wzoru $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, gdzie I to natężenie dźwięku, a $I_0 = 10^{-12} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$ jest natężeniem dźwięku odpowiadającego progowi słyszalności przez człowieka. Oblicz:

a) poziom głośności startującego samolotu, dla którego $I = 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$,

b) ile razy większe natężenie ma grzmot pioruna, dla którego $L = 120\text{dB}$ (decybeli), od najcichszego dźwięku, dla którego $L = 0\text{dB}$.

4.62. Cichy szept to 30 dB (decybeli), głośna rozmowa 60 dB, a intensywny ruch uliczny to 90 dB. Oceń, ile razy od szeptu większe natężenie głośności ma:

a) głośna rozmowa, **b)** ruchliwa ulica.

W obliczeniach zastosuj wzór $L = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$, gdzie L to poziom głośności dźwięku, a I to jego natężenie.

4.63. Podgrzewany garnek z zupą gospodarz zdejmuje z palnika i odstawia. Temperatura T garnka, wyrażona w stopniach Celsjusza, jest w procesie stygnięcia opisana wzorem $T = 100 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{t}{10}}$, gdzie czas t mierzony jest w minutach.

a) Podaj temperaturę garnka zaraz po zdjęciu z palnika.

b) Oblicz temperaturę garnka po upływie 10 minut.

c) Czy po 30 minutach można podnieść garnek gołymi rękoma, nie dotykając uchwytów?

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Dziesiąta część liczby $2^{\frac{7}{3}} \cdot 5^{\frac{7}{3}}$ jest równa:

A. $\sqrt[3]{10\,000\,000}$, **B.** $\sqrt[3]{1000\,000}$, **C.** $\sqrt[3]{100\,000}$, **D.** $\sqrt[3]{10\,000}$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\frac{\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{-96}}{-\sqrt[5]{-729}}$ jest równa:

A. –2, **B.** –1, **C.** 0, **D.** 1.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wyrażenie $\sqrt[3]{5}\cdot 125^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}} : 25^{-\frac{1}{2}}$ zapisane w postaci potęgi liczby 5 to:

A. 5^{-2}, **B.** $5^{-\frac{1}{2}}$, **C.** $5^{\frac{1}{2}}$, **D.** 5^{2}.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\log_3 0{,}5 + \log_3 6$ jest równa:

A. 6,5, **B.** 1, **C.** $\log_3 6{,}5$, **D.** 3.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba $\log_2 24$ jest równa:

A. $1+\log_2 6$, **B.** $2+\log_2 12$, **C.** $3+\log_2 3$, **D.** $4\log_2 3$.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczbą ujemną jest wartość wyrażenia:

A. $\log_5 125-\log_5 5$, **B.** $2\log_8 4-\log_8 2$, **C.** $\log_9 9-\log_{\frac{1}{2}} 2$, **D.** $\log_2\frac{5}{6}+\log_2\frac{3}{5}$.

7. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

$\sqrt[5]{-9}\cdot\sqrt[5]{-81}=3.$	**P**	**F**
$\left(4\cdot 3^{-1}-\sqrt{9^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}=2.$	**P**	**F**
$\log\sqrt{10}=0{,}5.$	**P**	**F**

8. **D** Czy wartość wyrażenia $\left(\sqrt[3]{\sqrt[9]{-343}}\right)^{9}$ jest liczbą wymierną?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$\left(\sqrt[3]{\sqrt[9]{-343}}\right)^{9}=-\sqrt[3]{343}=-7.$
N	**Nie,**		**B.**	$\left(\sqrt[3]{\sqrt[9]{-343}}\right)^{9}=\left(-\sqrt[12]{343}\right)^{9}.$

9. **D** Wykaż, że liczbą całkowitą jest wartość wyrażenia:

a) $10^{\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{3}\log 16+\frac{1}{6}\log 128}$, **b)** $0{,}1^{\log 0{,}11} : 0{,}11^{\log 0{,}1}$.

5. Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy i kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

Przypomnijmy

Aby pomnożyć wielomian przez wielomian, korzystamy najpierw z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, a następnie przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych. Możemy również wykonać to działanie „pisemnie", w sposób analogiczny jak pisemne mnożenie liczb.

$$(a+b)\cdot(c+d)=$$
$$=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$$

Na przykład. Wykonaj mnożenie $(5x-2)\cdot(2x-3)$.

I sposób:

$$(5x-2)\cdot(2x-3)=$$
$$=5x\cdot 2x+5x\cdot(-3)+$$
$$+(-2)\cdot 2x+(-2)\cdot(-3)=$$
$$=10x^2-19x+6$$

II sposób:

$$\begin{array}{r} 5x-2 \\ \cdot\ \ 2x-3 \\ \hline -15x+6 \quad \leftarrow -3\cdot(5x-2) \\ +\ 10x^2-4x \quad \leftarrow 2x\cdot(5x-2) \\ \hline 10x^2-19x+6 \end{array}$$

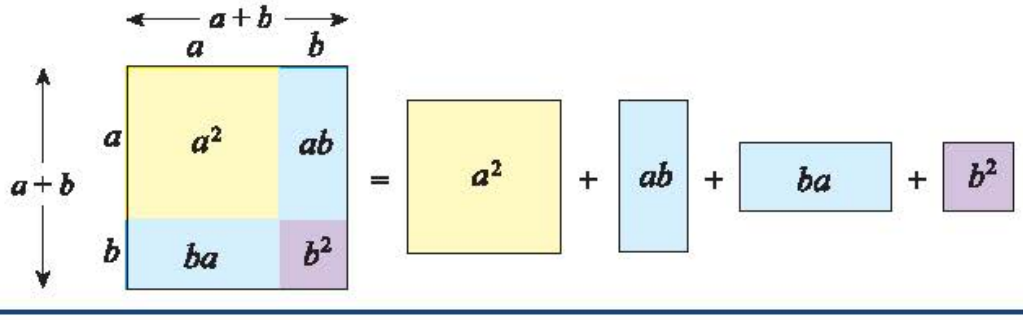
Przekształcając wyrażenia algebraiczne, często trzeba podnieść do kwadratu sumę lub różnicę dwóch wyrażeń albo też pomnożyć sumę dwóch wyrażeń przez ich różnicę.

Wzory, które ułatwiają wykonywanie wyżej wymienionych działań, nazywamy **wzorami skróconego mnożenia**.

Przykład 1. Wykaż, że $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Rozwiązanie. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=$
$=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2.$ $a\cdot b=b\cdot a$

Ilustracja graficzna rozwiązania, gdy $a>0$ i $b>0$:



Kwadrat sumy dwóch dowolnych wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń powiększonej o ich podwojony iloczyn.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Przykład 2. Zastosuj wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń i wykonaj potęgowanie:
a) $(x+3)^2$, **b)** $(4a+9c)^2$.

Rozwiązanie

a) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{3})^2 = \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{3} + \boldsymbol{3}^2$

$(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$,

b) $(\boldsymbol{4a}+\boldsymbol{9c})^2 = \boldsymbol{4a}^2 + 2\boldsymbol{4a}\boldsymbol{9c} + \boldsymbol{9c}^2$

$(4a+9c)^2 = (4a)^2 + 2\cdot 4a\cdot 9c + (9c)^2 = 16a^2 + 72ac + 81c^2$.

Ćwiczenie 1. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:
a) $(x+5)^2$, **b)** $(2x+7)^2$, **c)** $(9y+8z)^2$, **d)** $\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2$, **e)** $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$.

Przykład 3. Przedstaw w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń:
a) $x^2+14x+49$, **b)** $4x^2+20x+25$.

Rozwiązanie

a) $x^2+14x+49 = x^2 + 2\cdot\frac{14}{2}\cdot x + 49 =$ $\quad a^2+2ab+b^2$

$= x^2 + 2\cdot 7\cdot x + 7^2 =$ $\quad a^2+2ab+b^2$

$= (x+7)^2$,

b) $4x^2+20x+25 = 4x^2 + 2\cdot 10x + 25 =$

$= (2x)^2 + 2\cdot \underbrace{2x\cdot 5}_{10x} + 5^2 = (2x+5)^2$.

Ćwiczenie 2. Przedstaw w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń:
a) $x^2+12x+36$, **b)** $16x^2+8x+1$, **c)** $\frac{1}{4}x^2+2x+4$, **d)** $0{,}01x^2+0{,}04x+0{,}04$.

Kwadrat różnicy dwóch dowolnych wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń pomniejszonej o ich podwojony iloczyn.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ćwiczenie 3. Uzasadnij, że $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Przykład 4. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie $(3x-4)^2$.

Rozwiązanie

$$(\mathbf{3x} - \mathbf{4})^2 = \mathbf{3x}^2 - 2\cdot\mathbf{3x}\cdot\mathbf{4} + \mathbf{4}^2$$

$$(3x-4)^2 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16.$$

Ćwiczenie 4. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:

a) $(x-2)^2$, b) $(2x-7)^2$, c) $(4-3x)^2$, d) $\left(\frac{1}{2}y - 5x\right)^2$, e) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

Przykład 5. Przedstaw w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń:

a) $x^2 - 20x + 100$, b) $36x^2 - 84x + 49$.

Rozwiązanie

a) $x^2 - 20x + 100 = x^2 - 2\cdot 10\cdot x + 100 =$ $a = x$ i $b = 10$

$= x^2 - 2\cdot 10\cdot x + 10^2 = (x-10)^2$,

b) $36x^2 - 84x + 49 = (6x)^2 - 2\cdot 6x\cdot 7 + 7^2 =$ $a = 6x$ i $b = 7$

$= (6x-7)^2$.

Ćwiczenie 5. Przedstaw w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń:

a) $x^2 - 6x + 9$, b) $4x^2 - 4x + 1$, c) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 16$.

Przykład 6. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i oblicz:

a) 2003^2, b) 1999^2.

Rozwiązanie

a) $2003^2 = (2000+3)^2 = 2000^2 + 2\cdot 2000\cdot 3 + 3^2 = 4\,012\,009$,

b) $1999^2 = (2000-1)^2 = 2000^2 - 2\cdot 2000\cdot 1 + 1^2 = 3\,996\,001$.

Ćwiczenie 6. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i oblicz:

a) 305^2, **b)** 102^2, **c)** 99^2, **d)** 999^2.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. **a)** $x^2+10x+25$, **b)** $4x^2+28x+49$, **c)** $81y^2+144yz+64z^2$, **d)** $\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$, **e)** $3+2\sqrt{2}$.

2. **a)** $(x+6)^2$, **b)** $(4x+1)^2$, **c)** $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2$, **d)** $(0{,}1x+0{,}2)^2$. 4. **a)** x^2-4x+4, **b)** $4x^2-28x+49$, **c)** $16-24x+9x^2$, **d)** $\frac{1}{4}y^2-5xy+25x^2$, **e)** $4-2\sqrt{3}$. 5. **a)** $(x-3)^2$, **b)** $(2x-1)^2$, **c)** $\left(\frac{1}{3}x-4\right)^2$.

6. **a)** 93 025, **b)** 10 404, **c)** 9801, **d)** 998 001.

Zadania utrwalające

5.1. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:

a) $(x+8)^2$, **b)** $(x+14)^2$, **c)** $(2y+6)^2$, **d)** $\left(3x^2+1\right)^2$,

e) $\left(8x+y^3\right)^2$, **f)** $\left(2x^2+3y^2\right)^2$, **g)** $\left(2ab+\frac{1}{2}\right)^2$, **h)** $\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}y\right)^2$.

5.2. Przedstaw w postaci kwadratu sumy dwóch wyrażeń:

a) x^2+2x+1, **b)** x^2+4x+4, **c)** x^2+6x+9,

d) $x^2+8x+16$, **e)** $4x^2+4x+1$, **f)** $4x^2+12x+9$,

g) $9x^2+12x+4$, **h)** $25x^2+40x+16$, **i)** $64x^2+8x+\frac{1}{4}$.

5.3. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taki jednomian, aby podane wyrażenie było kwadratem sumy dwóch wyrażeń.

a) ■$+18x+81$, **b)** $9x^2+$■$+100$, **c)** $9x^2+12x+$■.

5.4. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj potęgowanie:

a) $(2-x)^2$, **b)** $(4-x)^2$, **c)** $(5z-1)^2$, **d)** $(1-xy)^2$,

e) $(3x-2y)^2$, **f)** $(4xy-3)^2$, **g)** $\left(\frac{1}{4}x-3y\right)^2$, **h)** $(-2-x)^2$.

5.5. Przedstaw w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń:

a) x^2-2x+1, **b)** $x^2-x+\frac{1}{4}$, **c)** $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$,

d) $4x^2-36x+81$, **e)** $25x^2-30x+9$, **f)** $\frac{4}{9}x^2-8x+36$,

g) $1{,}21x^2-2{,}2x+1$, **h)** $9x^2-6x+1$, **i)** $2x^2-4\sqrt{2}x+4$.

5.6. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ■ wpisz taki jednomian, aby podane wyrażenie było kwadratem różnicy dwóch wyrażeń.

a) $\blacksquare - 4x + \frac{1}{4}$, **b)** $81x^2 - \blacksquare + \frac{1}{9}$, **c)** $\frac{1}{25}x^2 - 4x + \blacksquare$.

5.7. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i oblicz:

a) $\left(3+\sqrt{2}\right)^2$, **b)** $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$, **c)** $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$, **d)** $\left(1-3\sqrt{5}\right)^2$, **e)** $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2$.

5.8. Zastosuj odpowiedni wzór skróconego mnożenia i oblicz:

a) 39^2, **b)** 103^2, **c)** 202^2, **d)** 499^2.

5.9. D Uzasadnij, że liczbą naturalną jest wartość wyrażenia:

a) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2+6\sqrt{2}$, **b)** $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{5}$,

c) $\left(\sqrt{6}-5\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{15}-2\sqrt{5}\right)^2$, **d)** $\left(5\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{10}-3\sqrt{5}\right)^2$.

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń

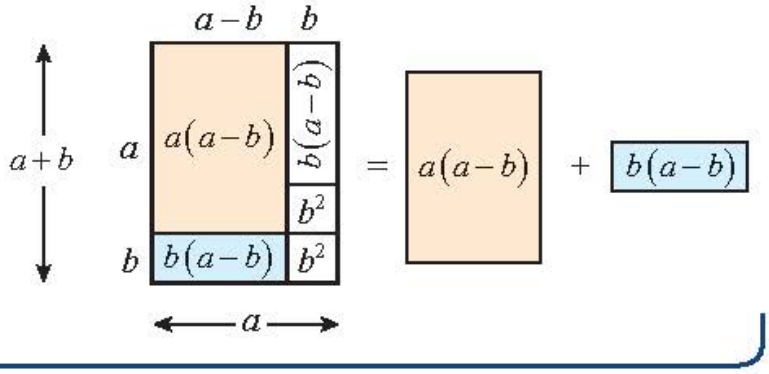
Przykład 7. Wykaż, że $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Rozwiązanie

$$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)=$$
$$=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2.$$

$-ab+ba-0$

Ilustracja graficzna rozwiązania, gdy $a>0$, $b>0$ i $a>b$:



Iloczyn sumy dwóch dowolnych wyrażeń przez ich różnicę jest równy **różnicy kwadratów** tych wyrażeń.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Przykład 8. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj działania:

a) $(5x-3y)(5x+3y)$, **b)** $\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$, **c)** $53\cdot 47$.

Rozwiązanie

a) $(\boxed{a}-\boxed{b})(\boxed{a}+\boxed{b})=\boxed{a}^2-\boxed{b}^2$

$(\boxed{5x}-\boxed{3y})(\boxed{5x}+\boxed{3y})=\boxed{5x}^2-\boxed{3y}^2$

$(5x-3y)(5x+3y)=(5x)^2-(3y)^2=25x^2-9y^2,$

b) $(\boxed{3}-\boxed{2\sqrt{2}})(\boxed{3}+\boxed{2\sqrt{2}})=\boxed{3}^2-\boxed{2\sqrt{2}}^2$

$\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)=3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2=9-8=1,$

c) $53\cdot 47=(\boxed{50}+\boxed{3})(\boxed{50}-\boxed{3})$

$53\cdot 47=(50+3)(50-3)=50^2-3^2=2500-9=2491.$

Ćwiczenie 7. Zastosuj wzór skróconego mnożenia i wykonaj działania:

a) $(x+4)(x-4)$, **b)** $(5-y)(5+y)$, **c)** $\left(2m+\frac{1}{5}n\right)\left(2m-\frac{1}{5}n\right)$, **d)** $31\cdot 29$.

Ćwiczenie 8. Oblicz i określ, czy otrzymany wynik jest liczbą wymierną.

a) $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$, **b)** $\left(1+\sqrt{7}\right)^2$, **c)** $\left(2-\sqrt{6}\right)\left(2+\sqrt{6}\right)$, **d)** $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$.

Przykład 9. Przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń wyrażenie:

a) x^2+2x, **b)** x^2-3x.

Rozwiązanie

a) $x^2+2x=x^2+2\cdot 1\cdot x=$

$=x^2+2\cdot 1\cdot x+\underbrace{1^2-1^2}_{0}=$

$=(x+1)^2-1^2,$

Korzystamy z równości $a^2+2ab=(a+b)^2\quad b^2$.

b) $x^2-3x=x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x=$

$=x^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{0}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2.$

Korzystamy z równości $a^2\quad 2ab=(a\quad b)^2\quad b^2$.

Ćwiczenie 9. Przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń wyrażenie:

a) x^2-4x, **b)** x^2+5x, **c)** x^2-6x+5.

Przykład 10. Przedstaw w postaci iloczynu dwóch wyrażeń różnicę kwadratów:

a) $(x+4)^2-25$, **b)** $(x+1)^2-3$.

Rozwiązanie

a) $(x+4)^2-25=(x+4)^2-5^2=$

$=(x+4+5)(x+4-5)=$

$=(x+9)(x-1)$.

$a=x+4$ i $b=5$.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

b) $(x+1)^2-3=(x+1)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=$

$=\left(x+1+\sqrt{3}\right)\left(x+1-\sqrt{3}\right)$.

$3=\left(\sqrt{3}\right)^2$

Ćwiczenie 10. Przedstaw w postaci iloczynu dwóch wyrażeń różnicę kwadratów:

a) $(x-2)^2-16$, **b)** $(x+7)^2-81$, **c)** $(x+3)^2-5$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

7. **a)** x^2-16, **b)** $25-y^2$, **c)** $4m^2-\frac{1}{25}n^2$, **d)** 899. 8. **a)** $9-4\sqrt{5}$, nie, **b)** $8+2\sqrt{7}$, nie, **c)** -2, tak, **d)** 13, tak. 9. **a)** $(x-2)^2-2^2$, **b)** $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2$, **c)** $(x-3)^2-2^2$.

10. **a)** $(x+2)(x-6)$, **b)** $(x+16)(x-2)$, **c)** $\left(x+3+\sqrt{5}\right)\left(x+3-\sqrt{5}\right)$.

Zadania utrwalające

5.10. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i wykonaj działanie:

a) $\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$, **b)** $(x+2y)(x-2y)$, **c)** $(2a-5)(2a+5)$,

d) $(6a-2b)(6a+2b)$, **e)** $(4-3x)(4+3x)$, **f)** $\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)$.

5.11. Zapisz w postaci iloczynu wyrażenie:

a) $9a^2-100$, **b)** $144-y^2$, **c)** $1-9x^2$,

d) $49x^2-9y^2$, **e)** $64x^2-25y^2$, **f)** $169x^2-225$.

5.12. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$, **b)** $\left(2\sqrt{6}-3\right)\left(2\sqrt{6}+3\right)$, **c)** $\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$.

5.13. Wykonaj wskazane działania i zapisz w najprostszej postaci wyrażenie:

a) $(x+3)(x-3)+(x+3)^2$, b) $(x-1)^2-x(x+1)$,

c) $(x-5)^2-(x-5)(x+5)$, d) $2(3x-1)^2+3(1-2x)^2$,

e) $4(x-y)(x+y)-3(x-y)^2$, f) $(2x-y)^2-(2x+y)^2$.

5.14. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość liczbową dla podanych wartości zmiennych zapisanych obok.

a) $(x+2)^2-3(5-x)^2$, $x=-2$,

b) $4(x-1)(x+1)+(2x-1)(2x+1)$, $x=\frac{1}{2}$,

c) $2(y-1)^2-(y-2)^2+(y-3)(y+3)$, $y=-\sqrt{11}$,

d) $-(y-2)^2-2(y+2)^2-3(1-y)(1+y)$, $y=-\frac{1}{4}$,

e) $(x-y)^2-(x+y)^2$, $x=0,5$, $y=-0,2$,

f) $(3x-5y)(3x+5y)$, $x=\frac{1}{9}$, $y=-\frac{1}{5}$.

5.15. Zastosuj wzór na różnicę kwadratów i oblicz:

a) $199\cdot 201$, b) $7,9\cdot 8,1$, c) $3,02\cdot 2,98$, d) $1,2\cdot 10^6\cdot 0,8\cdot 10^7$.

5.16. D Uzasadnij, że wartość wyrażenia jest liczbą wymierną.

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$, b) $\sqrt{10-5\sqrt{3}}\cdot\sqrt{10+5\sqrt{3}}$,

c) $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{8}}$, d) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

e) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$, f) $\left(\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{15}}-\sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{15}}\right)^2$.

5.17. Przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń wyrażenie:

a) x^2-8x, b) x^2+10x, c) x^2-x,

d) x^2+3x, e) $x^2+\sqrt{2}x$, f) $x^2-\sqrt{3}x$.

5.18. Przedstaw w postaci iloczynu dwóch wyrażeń różnicę kwadratów:

a) $(x+4)^2-100$, b) $(2x+1)^2-9$, c) $(4x-1)^2-2$,

d) $(x-1)^2-x^2$, e) $(3x+1)^2-4x^2$, f) $3x^2-2y^2$,

g) $(x+2)^2-(2x-1)^2$, h) $4x^2-(x-1)^2$, i) $16x^2-(3-x)^2$.

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia

Wzory skróconego mnożenia stosujemy między innymi do:

- usuwania niewymierności w mianownikach ułamków – czynimy tak dlatego, że dzieląc przez liczbę wymierną, otrzymujemy dokładniejszy wynik, niż gdy dzielimy przez liczbę niewymierną,
- rozkładania wyrażeń algebraicznych na czynniki – jest to pomocne przy rozwiązywaniu równań i nierówności różnego typu,
- zapisywania wyrażeń w prostszych albo dla nas wygodniejszych postaciach,
- porównywania liczb niewymiernych.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 11. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia $\frac{3}{\sqrt{2}+5}$.

Rozwiązanie

$$\frac{3}{\sqrt{2}+5}=\frac{3}{\sqrt{2}+5}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-5}}_{1}=$$

Mnożymy ułamek przez liczbę $1-\frac{\sqrt{2}-5}{\sqrt{2}-5}$, by zastosować w mianowniku wzór $(a+b)(a\ \ b)=a^2\ \ b^2$.

$$=\frac{3\cdot(\sqrt{2}-5)}{(\sqrt{2})^2-5^2}=\frac{3\sqrt{2}-15}{2-25}=\frac{-(15-3\sqrt{2})}{-23}=\frac{15-3\sqrt{2}}{23}.$$

Ćwiczenie 11. Usuń niewymierność z mianownika wyrażenia:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$, b) $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$, c) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$, d) $\frac{7}{2\sqrt{5}+1}$, e) $\frac{1+\sqrt{7}}{2-\sqrt{7}}$.

Przykład 12. Uzasadnij, że jeśli $a>0,\ b>0$ i $a-b=1$, to $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Rozwiązanie

*Z (**założenie**):* $a>0,\ b>0,\ a-b=1$, | *T (**teza**):* $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Dowód:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}_{1}=$$

$$1=\frac{\sqrt{a}\ \ \sqrt{b}}{\sqrt{a}\ \ \sqrt{b}}$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.\quad \textbf{\textit{c.n.u.}}$$

$$(\sqrt{a})^2=a\ \ i\ \ (\sqrt{b})^2=b$$

z założenia $a\ \ b=1$

Ćwiczenie 12. Uzasadnij, że jeżeli $a>0,\ b>0$ i $a-b=1$, to $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Ćwiczenie 13. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Nieprawdziwa jest równość:

A. $\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, **B.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,

C. $\sqrt{7}+6=\dfrac{1}{\sqrt{7}-6}$, **D.** $\sqrt{8}-\sqrt{7}=\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}$.

Uwaga

Jeżeli zapiszemy poznane wzory skróconego mnożenia w postaci:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,\quad a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

to mówimy, że stosujemy je do przekształcenia sumy algebraicznej na iloczyn odpowiednich wyrażeń.

Przekształcenia takie nazywamy **rozkładaniem wyrażeń algebraicznych na czynniki** z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia.

Ćwiczenie 14. Zastosuj wzory skróconego mnożenia, rozłóż na czynniki wyrażenie:

a) $9x^2-6x+1$, **b)** $25m^2-0{,}36$, **c)** $\dfrac{1}{4}x^2+2x+4$, **d)** $(4x-3)^2-(2-x)^2$.

Przykład 13. Wykaż, że $\dfrac{(a+b)^2}{4}-\dfrac{(a-b)^2}{4}=ab$.

Rozwiązanie. $\underbrace{\dfrac{(a+b)^2}{4}-\dfrac{(a-b)^2}{4}}_{L}=\underbrace{ab}_{P}$.

L – lewa strona równości
P – prawa strona równości

Aby wykazać równość, należy przekształcić jedną z jej stron (w naszym przykładzie stronę lewą L) tak, aby otrzymać drugą stronę:

$$L=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}=$$

$$\frac{x}{y}-\frac{z}{y}=\frac{x-z}{y}$$

$$=\frac{[(a+b)-(a-b)]\cdot[(a+b)+(a-b)]}{4}=$$

Stosujemy wzór skróconego mnożenia, np. na różnicę kwadratów.

$$=\frac{2b\cdot 2a}{4}=\frac{4ab}{4}=ab=P.$$

Zatem $L=P$ ***c.n.w.***

Ćwiczenie 15. Wykaż, że $\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{(a+b)^2}{4}+\frac{(a-b)^2}{4}$.

Przykład 14. Porównaj liczby a i b, gdy $a=\frac{(\sqrt{3}+5)^2}{2}$ i $b=\frac{5\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie. Przedstawiamy liczby a i b w najprostszej postaci:

$$a=\frac{(\sqrt{3}+5)^2}{2}=\frac{3+10\sqrt{3}+25}{2}=\frac{28+10\sqrt{3}}{2}=\frac{28}{2}+\frac{10\sqrt{3}}{2}=14+5\sqrt{3}$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$b=\frac{5\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}+15}{4-3}=10\sqrt{3}+15.$$

$1=\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Badamy różnicę $a-b$:

$$a-b=14+5\sqrt{3}-(10\sqrt{3}+15)=-5\sqrt{3}-1.$$

Ponieważ $-5\sqrt{3}-1<0$, więc $a-b<0$, zatem $a<b$.

Uwaga

Aby porównać dwie liczby rzeczywiste a i b między sobą, możemy badać:

- **różnicę $a-b$** i porównywać ją z liczbą 0, wtedy jeśli:
  $a-b>0$, to $a>b$, lub $a-b<0$, to $a<b$,
- **iloraz $\frac{a}{b}$**, gdy $b>0$, i porównywać go z liczbą 1, wtedy jeśli:
  $\frac{a}{b}>1$, to $a>b$, lub $\frac{a}{b}<1$, to $a<b$.

Ćwiczenie 16. Porównaj liczby a i b, gdy $a=\frac{(\sqrt{7}-1)^2}{7}$ i $b=\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$.

Przykład 15. Oblicz $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$.

Rozwiązanie. $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$=\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}+\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=$$

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$

$$=3+\sqrt{5}-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+3-\sqrt{5}=$$

$$=6-2\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=6-2\sqrt{9-5}=6-4=2.$$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Ćwiczenie 17. Oblicz $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$.

Przykład 16. Przedstaw w postaci kwadratu sumy albo kwadratu różnicy wyrażenie:

a) $3+2\sqrt{2}$, **b)** $29-12\sqrt{5}$.

Rozwiązanie

a) Stosujemy wzór $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

$3+2\cdot\sqrt{2}$

a^2+b^2 $\quad$ $2\cdot ab$

Jeśli $a=1$ i $b=\sqrt{2}$, to $a^2+b^2=3$.

$ab=\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot 1$,

Jeśli $2ab=2\sqrt{2}$, to $ab=\sqrt{2}$.

zatem $3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

b) Stosujemy wzór $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

$29-12\sqrt{5}=29-2\cdot 6\sqrt{5}$

a^2+b^2 $\quad$ $2\cdot ab$

Jeśli $2ab=12\sqrt{2}$, to $ab=6\sqrt{2}$.

$ab=6\sqrt{5}=$ $6\cdot\sqrt{5}$ lub $2\cdot 3\sqrt{5}$ lub $3\cdot 2\sqrt{5}$,

Jeśli:
$a=6$ i $b=\sqrt{5}$, to $a^2+b^2\neq 29$,
$a=2$ i $b=3\sqrt{5}$, to $a^2+b^2\neq 29$,
$a=3$ i $b=2\sqrt{5}$, to $a^2+b^2=29$.

zatem $29-12\sqrt{5}=\left(3-2\sqrt{5}\right)^2$.

Ćwiczenie 18. Przedstaw w postaci kwadratu sumy albo kwadratu różnicy wyrażenie:

a) $6+4\sqrt{2}$, **b)** $124-70\sqrt{3}$.

Umiejętność przedstawiania liczb niewymiernych w postaci kwadratu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń pozwala obliczać między innymi pierwiastki kwadratowe z liczb niewymiernych. Korzystamy wtedy z własności $\sqrt{a^2}=|a|$. Pokażemy to na przykładzie.

Przypomnijmy

Dla dowolnej liczby rzeczywistej a:

- $|a|=a$, gdy $a\geq 0$,
- $|a|=-a$, gdy $a<0$,
- $\sqrt{a^2}=|a|$.

Przykład 17. Oblicz:

a) $\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)^2}+\sqrt{\left(2-2\sqrt{2}\right)^2}$, b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

Rozwiązanie

a) $\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)^2}=\left|\overbrace{3-\sqrt{8}}^{\oplus}\right|=3-2\sqrt{2}$, $3-\sqrt{8}>0$

i $\sqrt{\left(2-2\sqrt{2}\right)^2}=\left|\overbrace{2-2\sqrt{2}}^{\ominus}\right|=-2+2\sqrt{2}$, więc $2-2\sqrt{2}<0$

$$\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)^2}+\sqrt{\left(2-2\sqrt{2}\right)^2}=3-2\sqrt{2}-\left(2-2\sqrt{2}\right)=$$
$$=3-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}=1.$$

b) 1° Przedstawiamy liczbę $9-4\sqrt{5}$ w postaci kwadratu różnicy dwóch wyrażeń:

$$9-4\sqrt{5}=9-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}=$$
$$=2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=$$
$$=\left(2-\sqrt{5}\right)^2.$$

2° Obliczamy $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$:

Jeżeli $a=2$ i $b=\sqrt{5}$, to $a^2+b^2=9$.

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|\overbrace{2-\sqrt{5}}^{\ominus}\right|=$$
$$=\sqrt{5}-2.$$

$\sqrt{a^2}=|a|$

$|2-\sqrt{5}|=(2-\sqrt{5})$, bo $2-\sqrt{5}<0$.

Ćwiczenie 19. Oblicz:

a) $\sqrt{\left(10-3\sqrt{12}\right)^2}-\sqrt{\left(2\sqrt{27}-9\right)^2}$, b) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$, c) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$, d) $\sqrt{13-2\sqrt{30}}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$, b) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, c) $3\left(\sqrt{5}+2\right)$, d) $\frac{14\sqrt{5}-7}{19}$, e) $-3-\sqrt{7}$. 13. C.

14. a) $(3x-1)^2$, b) $(5m-0{,}6)(5m+0{,}6)$, c) $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2$, d) $(5x-5)(3x-1)$. 16. $a>b$. 17. 2.

18. a) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$, b) $\left(5\sqrt{3}-7\right)^2$ lub $\left(7-5\sqrt{3}\right)^2$. 19. a) -1, b) $\sqrt{6}-1$, c) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$, d) $\sqrt{10}-\sqrt{3}$.

Zadania utrwalające

5.19. Rozłóż na czynniki wyrażenie:

a) $a^2+4ab+4b^2$, b) $4x^2+4x+1$, c) $9a^2-12ay+4y^2$,

d) $4x^2-20x+25$, e) $x^2-8xy+16y^2$, f) $4n^2+12n+9$,

g) $25x^2-40xz+16z^2$, h) $36m^2+12m+1$, i) $49x^2+112xy+64y^2$,

j) $9x^2-b^2$, k) $16b^2-9$, l) $5-x^2$,

m) $(5x-2)^2-36$, n) $(6x+1)^2-(6x-5)^2$, o) x^4-81.

5.20. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{4}{3-\sqrt{3}}$, b) $\frac{-2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$, c) $\frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$, d) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$, e) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$.

5.21. Usuń niewymierność z mianownika odwrotności liczby:

a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3}$, c) $\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$, d) $\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}+3}$.

5.22. D Wykaż, że:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, b) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

5.23. Wiedząc, że $m=3+\sqrt{5}$ i $n=3-\sqrt{5}$, oblicz:

a) m^2, b) n^2, c) m^2-n^2, d) $(m-n)^2$, e) $(m+n)^2$.

5.24. Przedstaw w postaci kwadratu sumy albo kwadratu różnicy wyrażenie:

a) $7+2\sqrt{6}$, b) $4-2\sqrt{3}$, c) $21-8\sqrt{5}$, d) $5+2\sqrt{6}$.

5.25. D Wykaż, że:

a) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2$, b) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}=\sqrt{7}+1$.

5.26. Porównaj liczby a i b, gdy:

a) $a=\sqrt{6}+2$ i $b=2-\sqrt{3}$, b) $a=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ i $b=\frac{2}{\sqrt{5}-1}$,

c) $a=5\sqrt{2}+2$ i $b=\frac{5}{\sqrt{2}-1}$, d) $a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ i $b=\frac{\sqrt{2}-7}{\sqrt{2}}$,

e) $a=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ i $b=\frac{2}{\sqrt{5}-1}-\frac{2}{\sqrt{5}+1}$.

5.27. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{5-\sqrt{7}}+\sqrt{5+\sqrt{7}}\right)^2$,

b) $\left(\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}\right)^2$,

c) $\frac{2^2-1}{2+1}+\frac{3^2-2^2}{3+2}+\frac{4^2-3^2}{4+3}+\frac{5^2-4^2}{5+4}+\ldots+\frac{100^2-99^2}{100+99}$.

5.28. D Wykaż, że liczba $\frac{\left(9-2\sqrt{14}\right)^2}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2}+\frac{\left(9+2\sqrt{14}\right)^2}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2}$ jest wymierna.

5.29. D Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

5.30. D Uzasadnij, że jeśli a i b są dowolnymi liczbami, to:

a) $a^2+1\geq 2a$,

b) $4a^2+1\geq 4a$,

c) $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$.

5.31. D Wykaż, że dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej x liczba postaci $(x-1)^2+(x+3)^2$ jest podzielna przez 8.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$ jest równa:

A. $\sqrt{14}+\frac{5}{2}$, B. $\sqrt{14}-5$, C. 12, D. 2.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wyrażenie $(2x+1)^2-(2x-1)(2x+1)$ jest równe:

A. $8x^2$, B. $8x^2+2$, C. $4x+2$, D. $4x$.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Suma $x^2-8x+16$ rozłożona na czynniki to wyrażenie:

A. $x(x-4)$, B. $(x-4)(x+4)$, C. $(x-4)^2$, D. $x(x-8)+4$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Aby usunąć z mianownika ułamka $\frac{5}{2-\sqrt{7}}$ niewymierność, należy jego licznik i mianownik pomnożyć przez:

A. $2-\sqrt{7}$, B. $\sqrt{7}$, C. $2\sqrt{7}$, D. $2+\sqrt{7}$.

5. **D** Wykaż, że wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{8}$ jest liczbą całkowitą.

6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe. Wpisz odpowiedź do zeszytu i ją uzasadnij.*

Jeżeli w wyrażeniu $25x^2+\blacksquare+\frac{1}{4}$ w miejsce $\blacksquare$ wpisze się jednomian $5x$, to nie otrzyma się kwadratu sumy dwóch wyrażeń.	**P**	**F**
Jeżeli w wyrażeniu $36a^2-6a+\blacksquare$ w miejsce $\blacksquare$ wpisze się liczbę $\frac{1}{4}$, to otrzyma się kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.	**P**	**F**
Wartość wyrażenia $\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$ jest liczbą niewymierną.	**P**	**F**
Równość $\left(5-2\sqrt{6}\right)^2=x+y\sqrt{6}$ będzie prawdziwa, gdy w miejsce x podstawimy liczbę 49, a w miejsce y liczbę –20.	**P**	**F**

7. **D** Czy liczba 555^2-333^2 jest podzielna przez 222?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B. Wpisz odpowiedź do zeszytu i ją uzasadnij.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$555^2-333^2=(555-333)^2=222^2$.
N	**Nie,**		**B.**	$555^2-333^2=222\cdot 888$.

8. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli $x^2+y^2=65$ i $xy=28$, to wartość wyrażenia $(x+y)^2$ jest równa:

A. 158, **B.** 121, **C.** 93, **D.** 37.

9. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Różnica kwadratów liczb $\sqrt{2}+1$ i $2-\sqrt{2}$ jest równa:

A. –3, **B.** $3\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

Kwadrat różnicy liczb $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ jest równy:

C. $11+4\sqrt{6}$, **D.** 3.

10. **D** Wykaż, że $\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\left(6+\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{22}-\sqrt{2}\right)=50$.

6. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą

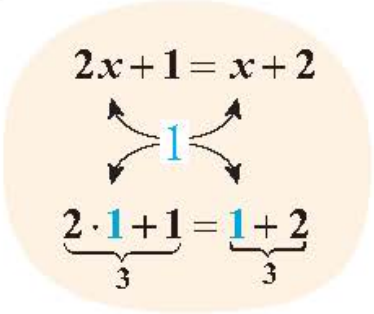
Przypomnijmy

Dwa wyrażenia algebraiczne, z których przynajmniej jedno zawiera zmienną, połączone znakiem równości nazywamy **równaniem**.

Zmienną występującą w równaniu nazywamy **niewiadomą**.

- Tradycyjnie (najczęściej) niewiadomą w równaniu oznaczamy literą x.
- **Liczba spełnia równanie**, jeśli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymujemy równość prawdziwą.

  Na przykład: $0=0$, $2=2$, $-1=-1$, ... itp.



- Liczbę, która spełnia równanie, nazywamy **pierwiastkiem** równania lub **rozwiązaniem** równania.

Przykład 1. Sprawdź, która z liczb: -2, 0 spełnia równanie:

a) $|x-2|=4$, **b)** $x(x+2)(x-6)=0$.

Rozwiązanie

a) $\underbrace{|x-2|}_{L}=\underbrace{4}_{P}$

- Sprawdzamy, czy liczba -2 spełnia równanie.

  $L=|-2-2|=|-4|=4$,

  $L=P$.

- Sprawdzamy, czy liczba 0 spełnia równanie.

  $L=|0-2|=|-2|=2$,

  więc $L\neq P$.

b) $\underbrace{x(x+2)(x-6)}_{L}=\underbrace{0}_{P}$

- Sprawdzamy, czy liczba -2 spełnia równanie.

  $L=-2\cdot(-2+2)\cdot(-2-6)=-2\cdot 0\cdot(-8)=0$,

  $L=P$.

- Sprawdzamy, czy liczba 0 spełnia równanie.

  $L=0\cdot(0+2)\cdot(0-6)=0$,

  więc $L=P$.

Odp.: **a)** -2, **b)** -2 i 0.

Ćwiczenie 1. Sprawdź, które z liczb: -2, 0, 2, 4 spełniają równanie:

a) $2(x-2)=4$, **b)** $|x-1|=3$, **c)** $\frac{1}{1-x}=\frac{-1}{3}$, **d)** $x^2+4x=(x+2)^2-4$, **e)** $x^2=1$.

Ćwiczenie 2. Ułóż równanie, którego pierwiastkiem jest liczba:

a) 1, **b)** 3, **c)** -2, **d)** 0.

Nie każdą liczbę można podstawić w równaniu za zmienną. Wszystko zależy od tego, czy po podstawieniu liczby za zmienną można wykonać działania na liczbach.

Zbiór wszystkich liczb, które można podstawić w równaniu w miejsce niewiadomej i sprawdzić, czy spełniają lub nie to równanie, nazywamy **dziedziną** tego **równania**. Najczęściej dziedzinę oznaczamy literą D.

Działania niewykonalne, które poznaliśmy, to:

1° dzielenie przez liczbę 0, na przykład w równaniu:

- $\frac{1}{x}=4$ — nie możemy za zmienną x podstawić liczby 0, co zapisujemy $x\neq 0$, wtedy $D=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$,
- $\frac{x}{x-1}=3$ — za zmienną x nie możemy podstawić liczby 1, co zapisujemy $x\neq 1$, wtedy $D=\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$;

2° zerowa potęga liczby 0, na przykład w równaniu:

- $x^0=1$ — za zmienną x nie możemy podstawić liczby 0, co zapisujemy $x\neq 0$, wtedy $D=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$,
- $(a+1)^2=(a+1)^0$ — za zmienną a nie możemy podstawić liczby -1, co zapisujemy $a\neq -1$, wtedy $D=\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$;

3° obliczanie pierwiastków parzystego stopnia z liczb ujemnych, na przykład w równaniu:

- $\sqrt{x+2}=16$ — za zmienną x możemy podstawić tylko liczby spełniające warunek $x+2\geq 0$, wtedy $D=\langle -2;+\infty)$,
- $\frac{4x}{\sqrt{x-1}}=3$ — za zmienną x możemy podstawić tylko liczby spełniające warunek $x-1>0$, wtedy $D=(1;+\infty)$,
- $\sqrt[4]{3-x}=2$ — za zmienną x możemy podstawić tylko liczby spełniające warunek $3-x\geq 0$, wtedy $D=(-\infty;3\rangle$.

Ćwiczenie 3. Spośród liczb: -1, 0, 1 wybierz te, które należą do dziedziny równania:

a) $x(x-1)=2$, **b)** $\frac{5}{x(x-1)}=3$, **c)** $\frac{3}{x^2-1}=1$, **d)** $\sqrt{1-2x}=2$.

Uwaga

- Równanie, które spełniają wszystkie liczby należące do jego dziedziny nazywamy **równaniem tożsamościowym (tożsamością)** lub **równaniem nieoznaczonym**.
- Równanie, które spełnia jedna lub kilka liczb należących do jego dziedziny, nazywamy **równaniem oznaczonym**.
- Równanie, którego nie spełnia żadna liczba należąca do jego dziedziny, nazywamy **równaniem sprzecznym**.

Równanie liniowe z jedną niewiadomą

Równanie z niewiadomą x postaci $ax+b=0$, gdzie $b \in R$, nazywamy:

- **równaniem stopnia pierwszego** z jedną niewiadomą, gdy $a \neq 0$,
- **równaniem liniowym**, gdy $a \in R$;

a, b – współczynniki liczbowe równania.

Równania stopnia pierwszego zaliczamy do równań liniowych.

Dziedziną równania liniowego jest zbiór liczb rzeczywistych R.

Przykład 2. Rozwiąż równanie liniowe i zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $4(x-1)+5=3+2x$, b) $2x-(4-x)=2\left(\frac{3}{2}x-2\right)$, c) $2(3x+7)=5+6x$.

Rozwiązanie

a) $4(x-1)+5=3+2x$

$4x-4+5=3+2x$

$4x-2x=3+4-5$

$2x=2 \quad /:2$

$x=1$

Odp.:



Równanie ma jedno rozwiązanie $x_0=1$ (**równanie oznaczone**).

b) $2x-(4-x)=2\left(\frac{3}{2}x-2\right)$

$2x-4+x=3x-4$

$3x-3x=-4+4$

$0 \cdot x=0$

równość prawdziwa dla każdej liczby x, czyli $x \in R$



Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista (**równanie tożsamościowe**).

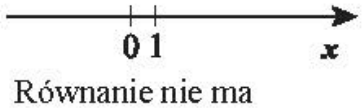
c) $2(3x+7)=5+6x$

$6x+14=5+6x$

$6x-6x=5-14$

$0 \cdot x=-9$

równość fałszywa



Równanie nie ma rozwiązania (**równanie sprzeczne**).

Ćwiczenie 4. Zbadaj, czy równanie jest oznaczone, tożsamościowe czy sprzeczne. Jeśli równanie jest oznaczone, podaj jego pierwiastek.

a) $4(x+1)-1=6(2x-3)-3(x-2)$, **b)** $(x-6)+4x=2(x-3)+3x$,

c) $2(2x-3)+3=4(x-2)$, **d)** $2+(x-4)(x+4)=(x-1)^2$.

Uwaga

Równania, które mają takie same dziedziny i takie same zbiory rozwiązań nazywamy **równaniami równoważnymi**.

Ćwiczenie 5. Sprawdź, czy równania **1** i **2** są równoważne, gdy:

a) **1** $\frac{1}{x}=2$ i **2** $x-\frac{1}{2}=0$, **b)** **1** $(x+2)^2=x^2$ i **2** $1-\frac{2x-3}{2}=\frac{7}{2}$.

Ćwiczenie 6. Podaj, dla jakich wartości a i b równanie $ax+b=0$ będzie równoważne równaniu $5x+3=0$.

W szkole podstawowej rozwiązywaliście równania metodą równań równoważnych.

Przypomnijmy

Rozwiązując równanie, możemy:

- do obu stron równania dodać lub odjąć to samo wyrażenie

$4x-12=20 \longrightarrow 4x-12+12=20+12 \longrightarrow 4x=32$,

$3x=10-2x \longrightarrow 3x+2x=10-2x+2x \longrightarrow 5x=10$,

$6x=4x+12 \longrightarrow 6x-4x=4x+12-4x \longrightarrow 2x=12$,

- obie strony równania pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera

$\frac{x+5}{4}=3 \longrightarrow 4\cdot\frac{x+5}{4}=4\cdot 3 \longrightarrow x+5=12$,

$\sqrt{5}\cdot x=45 \longrightarrow \frac{\sqrt{5}\cdot x}{\sqrt{5}}=\frac{45}{\sqrt{5}} \longrightarrow x=\frac{45}{\sqrt{5}} \longrightarrow x=\frac{45}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \longrightarrow x=9\sqrt{5}$,

- przekształcać jedną lub obydwie strony równania, stosując znane prawa działań, np. uwalniać się od nawiasów i redukować wyrazy podobne

$3(x-2)-3=0 \longrightarrow 3x-6-3=0 \longrightarrow 3x-9=0$.

Uwaga

Przy rozwiązywaniu równania metodą równań równoważnych pamiętajmy, by:

- do obu stron równania dodawać (odejmować)
- obie strony równania mnożyć (dzielić) przez

takie wyrażenia, które nie zmieniają ani dziedziny, ani zbioru rozwiązań równania.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\frac{27-11c}{7}=\frac{5c}{14}$.

Rozwiązanie.

$\frac{27-11c}{7}=\frac{5c}{14} \quad /\cdot 14$

Mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik.

$\frac{2\cdot(27-11c)}{1}=\frac{1\cdot 5c}{1}$

Skracamy ułamki.

$2\cdot(27-11c)=5c$

$54-22c=5c$

Przenosimy $-22c$ na prawą stronę ze zmienionym znakiem (do obu stron równania dodajemy $22c$).

$54=5c+22c$

$54=27c \quad /:27$

$2=c$, czyli $c=2$.

Ćwiczenie 7. Rozwiąż równanie i sprawdź, czy otrzymana liczba spełnia to równanie:

a) $\frac{x+2}{2}-\frac{x}{3}=1$, **b)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-x=1$.

W szkole podstawowej poznaliście równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą, czyli takie równanie, które po wykonaniu przekształceń zachowujących równoważność można zapisać w postaci $ax+b=0$.

Na przykład równanie $(x+1)^2+x+1=x^2$ jest równoważne równaniu $3x+2=0$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie:

a) $(x+2)^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, **b)** $\sqrt{3}x+2=x+\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

a)

$(x+2)^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$x^2+4x+4-3=x^2-3$

$x^2+4x-x^2=-3+3-4$

$4x=-4$, skąd $x=-1$

b)

$\sqrt{3}x+2=x+\sqrt{3}$

$\sqrt{3}x-x=\sqrt{3}-2$

$x(\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}-2 \quad /:(\sqrt{3}-1)$

$x=\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Odp.: **a)** $x_0=-1$, **b)** $x_0=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Ćwiczenie 8. Rozwiąż równanie:

a) $2(x-1)^2-(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=x^2+4$, b) $\sqrt{5}x-3=2x-2\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 9. Spośród równań, oznaczonych cyframi od **1** do **4**, wybierz pary równań równoważnych.

1 $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=1$, **2** $4x-5=1+3x$, **3** $-x+3=2(x+1)+1$, **4** $\frac{x}{4}+1=1$.

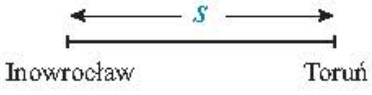
Za pomocą równań możemy opisać i rozwiązać wiele różnorodnych problemów. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 5. Rowerzysta jechał z Torunia do Inowrocławia z prędkością $15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a z powrotem (z Inowrocławia do Torunia) z prędkością $12\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jazda w obie strony zajęła mu 5,4 godziny. Oblicz odległość pomiędzy Toruniem a Inowrocławiem oraz liczbę godzin, którą jechał rowerzysta w każdą stronę.

Rozwiązanie

I sposób:

Trasa	Droga (s)	Prędkość (v)	Czas (t)
Toruń – Inowrocław	s	15	$\frac{s}{15}$
Inowrocław – Toruń	s	12	$\frac{s}{12}$
		Razem	5,4



$s=v\cdot t$,

$t=\frac{s}{v}$, $v=\frac{s}{t}$,

s – droga, v – prędkość, t – czas.

Warunek „czas jazdy w obie strony wyniósł 5,4 godziny” zapisujemy w postaci równania $\frac{s}{15}+\frac{s}{12}=5,4$ i rozwiązujemy je:

$$\frac{s}{15}+\frac{s}{12}=5,4 \quad /\cdot 60$$

$$\frac{60\cdot s}{15}+\frac{60\cdot s}{12}=60\cdot 5,4$$

Mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik, czyli przez NWW(15, 12).

$$4s+5s=324, \text{ czyli } 9s=324, \text{ skąd } s=36,$$

więc czas przejazdu jest równy $\frac{s}{15}=2,4$ i $\frac{s}{12}=3$.

II sposób:

Trasa	Czas (t)	Prędkość (v)	Droga (s)
Toruń – Inowrocław	t	15	$15t$
Inowrocław – Toruń	$5,4-t$	12	$12\cdot(5,4-t)$

Warunek „droga tam i z powrotem jest taka sama" zapisujemy w postaci równania $15t=12(5,4-t)$ i rozwiązujemy je:

$$15t=12\cdot 5,4-12t$$
$$15t+12t=64,8$$
$$27t=64,8 \quad /:27$$
$$t=2,4, \quad \text{więc} \quad s=15t=15\cdot 2,4=36 \quad \text{oraz}$$
$$5,4-t=5,4-2,4=3.$$

Odp.: Odległość między Toruniem a Inowrocławiem jest równa 36 km. Rowerzysta jechał do Inowrocławia przez 2,4 godziny, a z powrotem przez 3 godziny.

Ćwiczenie 10. Rowerzysta pojechał z Gdańska do Wejherowa i wrócił z powrotem. Wracając do Gdańska, jechał z prędkością o $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą, niż gdy jechał z Gdańska do Wejherowa. Jazda do Wejherowa trwała 2,5 godziny, a z powrotem 3,5 godziny. Oblicz odległość między Gdańskiem a Wejherowem.

Ćwiczenie 11. Pomyśl i napisz dowolną liczbę. Pomnóż ją przez 2. Do otrzymanego iloczynu dodaj 9, a następnie liczbę pomyślaną. Otrzymaną sumę podziel przez 3 i do ilorazu dodaj 2. Na koniec odejmij liczbę pomyślaną. Otrzymałeś wynik równy 5. Uzasadnij, że wynik taki otrzymasz niezależnie od tego, jaką liczbę pomyślisz.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. **a)** 4, **b)** −2, 4, **c)** 4, **d)** −2, 0, 2, 4, **e)** żadna z podanych liczb. **3.** **a)** −1, 0, 1, **b)** −1, **c)** 0, **d)** −1, 0.

4. **a)** Oznaczone, $x_0=3$, **b)** tożsamościowe, **c)** sprzeczne, **d)** oznaczone, $x_0=7,5$.

5. **a)** Nie, **b)** tak. *Wskazówka.* **a)** Równania mają różne dziedziny.

6. Np. $a=5$ i $b=3$, $a=-10$ i $b=-6$. **7.** **a)** $x_0=0$, **b)** $x_0=12$. **8.** **a)** $x_0=0$, **b)** $x_0=-4-\sqrt{5}$.

9. 1 i 2, 3 i 4. **10.** 35 km. **11.** *Wskazówka.* $\frac{2x+9+x}{3}+2-x=5$.

Zadania utrwalające

6.1. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Liczba –2 spełnia równanie:

A. $-2x(x+2)(x-4)=0$, **B.** $x^3-8=0$.

Liczba 2 **nie spełnia** równania:

C. $x^2-4=0$, **D.** $|x+2|=3$.

6.2. Sprawdź, które spośród liczb: –1, 0, 2, 4 są pierwiastkami równania:

a) $|x+4|=3$, **b)** $-x^2(x-2)(x+4)=0$, **c)** $(x-1)^2-(x+2)(x-2)=x(x-2)+5$,

d) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{3}=0$, **e)** $\sqrt{x}=2$, **f)** $x^3+1=0$, **g)** $x(x+1)(x-2)(x-4)=0$.

6.3. Sprawdź, która z liczb –2, 0, 3 jest pierwiastkiem równania:

a) $(x+2)(x-3)(x+4)=0$, **b)** $x^2=6+x$, **c)** $\frac{1}{2}x^2+x=0$,

d) $\frac{x^2-4}{x+1}=0$, **e)** $\frac{x^2-9}{x-1}=0$, **f)** $x^3+x=x-8$.

6.4. Sprawdź, które z liczb całkowitych niedodatnich większych od –8 są pierwiastkami równania $\frac{x^3}{8}+\frac{x^2}{2}=0$.

6.5. Sprawdź, które z liczb całkowitych niedodatnich większych od –6 są pierwiastkami równania:

a) $x^2+8x+15=0$, **b)** $x^3+3x^2+2x=0$, **c)** $x^3+64=0$,

d) $\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{2}=0$, **e)** $\frac{1}{4}x^3+2=0$, **f)** $x^3+7x^2+14x+8=0$.

6.6. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wstaw taką liczbę, aby liczby 1 i –2 były pierwiastkami równania:

a) $(x-1)(x+2)=$■, **b)** $(x+2)(x-1)=$■, **c)** $2(x-1)(x+$■$)=0$,

d) $(2x-2)(x+$■$)=0$, **e)** $-\frac{1}{2}(x-$■$)(x+2)=0$, **f)** $(2x+$■$)(x-1)=0$.

6.7. Rozwiąż równanie:

a) $(x+3)^2-1=x^2$,

b) $x(x-1)-4=(x-2)(x+2)-x$,

c) $4x^2-(1-2x)^2+2x=11$,

d) $0=4(10-5x)-3(-3x-5)$,

e) $\frac{x-4}{2}+\frac{x+3}{5}=\frac{2(x+3)}{3}$,

f) $2x-\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}=\frac{1}{3}(4+5x)-\frac{7}{30}$.

6.8. Sprawdź, czy równoważne są równania:

a) $\frac{2}{5}y-3=y$ i $\frac{2y+1}{3}+y=-3+y$, **b)** $x-1-\frac{4x-14}{7}=3x-53$ i $12x+1=3x+3$.

6.9. Oblicz „sprytnie” wartość wyrażenia podanego obok (kolor niebieski):

a) $3(x-5)+19=-2$, $x-5$,

b) $2(y+8)-9=5$, $2y+16$,

c) $-3=4(y+7)-15$, $3y+21$,

d) $9-\frac{4}{5}(a-3)=1$, $4(a-3)$.

6.10. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli $y+5=13$, to różnica $y-5$ jest równa:

A. 2, **B.** 3, **C.** 8, **D.** 15.

6.11. Spośród równań oznaczonych cyframi od **1** do **5** :

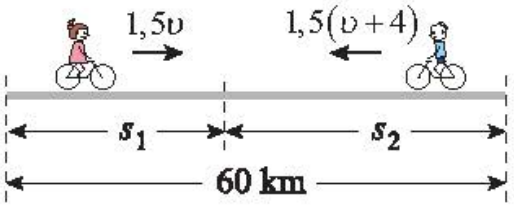
1 $0\cdot x=0$, **2** $0\cdot x=1$, **3** $1\cdot x=1$, **4** $1\cdot x=0$, **5** $1\cdot x+0=1\cdot x$

wskaż te, które:

a) mają tylko jeden pierwiastek, **b)** nie mają pierwiastków.

6.12. Z lotniska A na lotnisko B mały samolot leciał z prędkością $660\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Tę samą trasę helikopter lecący z prędkością $360\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokonał w czasie dłuższym o 20 minut. Oblicz odległość między lotniskami A i B.

6.13. Z dwóch różnych miejscowości, odległych od siebie o 60 km, o tej samej godzinie wyjechali rowerami naprzeciw siebie Kasia i Jurek. Spotkali się po upływie 1,5 godziny. Wiedząc, że Jurek jechał z prędkością o 4 kilometry na godzinę większą niż Kasia, oblicz drogę, jaką przejechał każdy z nich do chwili spotkania.



Nierówność liniowa z jedną niewiadomą

Nierówność tym różni się od równania, że obie jej strony połączone są jednym ze znaków: **$<$, $\leq$, $>$, $\geq$**.

Przykłady nierówności liniowych z jedną niewiadomą:

$-2x+7<0, \quad 5x+4\geq 0, \quad -0,3x+7\leq 0, \quad 4x>0, \quad x(x-1)\geq x^2-3.$

Nierówność z niewiadomą x postaci $ax+b>0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$, gdzie $b\in R$, nazywamy:

- **nierównością stopnia pierwszego**, gdy $a\neq 0$,
- **nierównością liniową**, gdy $a\in R$.

Dziedziną nierówności liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych R.

Ćwiczenie 12. Spośród nierówności: **1** $3x-5>0$, **2** $x^2-x\leq 0$, **3** $4-x\geq 0$, **4** $6x-x^2<0$, **5** $-3x>0$, **6** $0,5x-5\leq 3$ wybierz te, które są nierównościami pierwszego stopnia.

Uwaga

Rozwiązaniem nierówności z jedną niewiadomą jest każda liczba rzeczywista spełniająca tę nierówność, tzn. każda liczba, która wstawiona w miejsce niewiadomej zmienia nierówność w nierówność prawdziwą.

Sprawdzając, czy liczba spełnia nierówność, możesz otrzymać porównanie liczb:

- fałszywe: $0>0$, $-2\geq 2$, $5<5$ itp.,
- prawdziwe: $0\leq 0$, $2\geq 2$, $8>-3$ itp.

Przykład 6. Sprawdź, która z liczb -6 i 0 spełnia nierówność $-3(x+1)<6$.

Rozwiązanie. Sprawdzamy, czy liczby -6 oraz 0 spełniają nierówność:

$x=-6$, wtedy	$x=0$, wtedy
$-3(-6+1)<6$	$-3(0+1)<6$
$15<6$ *nierówność fałszywa*	$-3<6$ *nierówność prawdziwa*
Liczba -6 nie spełnia nierówności.	Liczba 0 spełnia nierówność.

Ćwiczenie 13. Sprawdź, która z liczb: -2, 3, 11 spełnia nierówność $3x+2>2x+5$.

Ćwiczenie 14. Podaj wszystkie liczby naturalne, które spełniają nierówność $x\leq 5$.

Przykład 7. Liczby stojące po lewej i prawej stronie nierówności $-5<9$ pomnóż przez liczbę -1 i porównaj otrzymane liczby.

Rozwiązanie

$-5\cdot(-1)=5$ i $9\cdot(-1)=-9$, więc $5>-9$.

Z nierówności $-5<9 \quad /\cdot(-1)$ wynika, że $5>-9$.

Uwaga

- Jeśli mnożymy lub dzielimy obie strony nierówności przez liczbę ujemną, to **zmieniamy zwrot nierówności** na przeciwny.
- Jeśli rozwiązujemy nierówność liniową z jedną niewiadomą, postępujemy podobnie jak przy rozwiązywaniu równań, tzn. niewiadome grupujemy po jednej stronie nierówności, a liczby po drugiej i przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 8. Rozwiąż nierówność i podaj dwie liczby, które ją spełniają:

a) $\frac{2}{3}x\geq -12$, **b)** $-2x<8$, **c)** $-x>-\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

a) $\frac{2}{3}x\geq -12 \quad /:\frac{2}{3}$

$x\geq -18$

b) $-2x<8 \quad /:(-2)$

$x>-4$

c) $-x>-\frac{1}{2} \quad /\cdot(-1)$

$x<\frac{1}{2}$

Odp.: **a)** $x\geq -18$, np. -18; 10^{10}, **b)** $x>-4$, np. $-3{,}9$; -1, **c)** $x<\frac{1}{2}$, np. $\frac{1}{3}$, -5; -1000.

Ćwiczenie 15. Rozwiąż nierówność i podaj dwie liczby, które ją spełniają:

a) $1\frac{1}{2}x<-3$, **b)** $-\frac{4}{5}x\leq 10$, **c)** $-2\frac{1}{3}x>-14$, **d)** $-2<2x$.

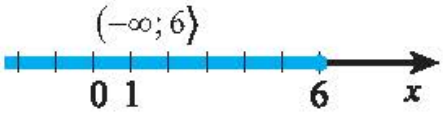
Uwaga

- Nierówności liniowe, które mają ten sam zbiór rozwiązań, nazywamy **równoważnymi**.
- **Rozwiązaniem nierówności** jest każda liczba, która spełnia tę nierówność.
- **Zbiorem rozwiązań nierówności** jest zbiór wszystkich liczb spełniających tę nierówność.

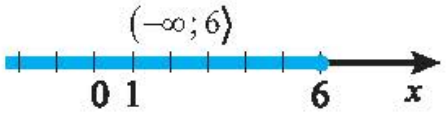
Przykład 9. Przedstaw na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału liczbowego zbiór rozwiązań nierówności: **a)** $2x+1\le 13$, **b)** $2x-9\ge 3(x-5)$.

Rozwiązanie

a)
$$2x+1\le 13$$
$$2x\le 13-1$$
$$\mathbf{2x\le 12}\quad /:2$$
$$\mathbf{x\le 6}.$$



b)
$$2x-9\ge 3(x-5)$$
$$2x-9\ge 3x-15$$
$$2x-3x\ge -15+9$$
$$-x\ge -6\quad /\cdot(-1)$$
$$\mathbf{x\le 6}.$$



Odp.: Obie nierówności spełnia każda liczba x należąca do przedziału $(-\infty;6\rangle$, czyli nierówności są równoważne. Przedział $(-\infty;6\rangle$ nazywamy zbiorem rozwiązań nierówności.

Ćwiczenie 16. Wykaż, że podane nierówności są równoważne.

a) $2x\ge 4$ i $-3x\le -6$, **b)** $-\frac{1}{2}x\ge -1$ i $\mathbf{\frac{1}{2}x\le 1}$.

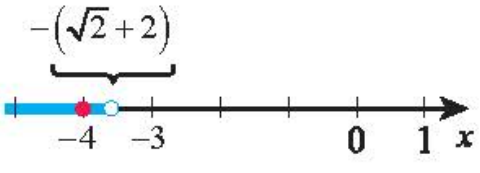
Przykład 10. Rozwiąż nierówność $x>\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot x$ i podaj największą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

Rozwiązanie.
$$x>\sqrt{2}+\sqrt{2}x$$
$$x-\sqrt{2}x>\sqrt{2}$$
$$x\left(1-\sqrt{2}\right)>\sqrt{2}$$
$$x\left(1-\sqrt{2}\right)>\sqrt{2}\quad /:\left(1-\sqrt{2}\right)$$
$$x<\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

Grupujemy niewiadome po jednej stronie nierówności.

Wyłączamy wspólny czynnik x poza nawias.

Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę stojącą przy niewiadomej x i zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny, bo $1-\sqrt{2}<0$.



$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-\left(\sqrt{2}+2\right)$, $-\left(\sqrt{2}+2\right)\approx -3{,}4$

Zaznaczamy zbiór rozwiązań nierówności na osi.

Odp.: $x<-\left(\sqrt{2}+2\right)$ i -4 jest największą liczbą całkowitą spełniającą tę nierówność.

Ćwiczenie 17. Rozwiąż nierówność i podaj największą (jeśli istnieje) albo najmniejszą (jeśli istnieje) liczbę całkowitą, która ją spełnia:

a) $\sqrt{3}x > x-1$, **b)** $\sqrt{2}x-1 > 2x+3$.

Przykład 11. Rozwiąż nierówność $\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(x+1)(x-1)}{3} \geq \frac{1}{6}(x+2)^2$.

Rozwiązanie

$$\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(x+1)(x-1)}{3} \geq \frac{1}{6}(x+2)^2 \quad /\cdot 6$$

Mnożymy obie strony nierówności przez wspólny mianownik 6.

$$3(x-2)^2 - 2(x+1)(x-1) \geq (x+2)^2$$

Wykonujemy działania, stosując wzory skróconego mnożenia.

$$3(x^2-4x+4) - 2(x^2-1) \geq x^2+4x+4$$

$$3x^2-12x+12-2x^2+2 \geq x^2+4x+4$$

$$3x^2-12x-2x^2-x^2-4x \geq 4-12-2$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$-16x \geq -10 \quad /:(-16)$$

$$x \leq \frac{5}{8}.$$

Odp.: $x \leq \frac{5}{8}$, czyli $x \in \left(-\infty; \frac{5}{8}\right\rangle$.

Ćwiczenie 18. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-3)(x+3)+24x > (x+2)^2$, **b)** $2(x-2)^2 > (x-3)(x+3)-x+x^2+1$.

Przykład 12. Rozwiąż nierówność:

a) $(x-4)(x+4) < 2(3+0{,}5x^2)$,

Rozwiązanie

a) $(x-4)(x+4) < 2(3+0{,}5x^2)$

$$x^2-16 < 6+x^2$$

$0 < 22$ – *nierówność prawdziwa*

Odp.: Każda liczba rzeczywista ($x \in R$) spełnia tę nierówność – nierówność tożsamościowa.

b) $\frac{1-x}{4} - \frac{3-2x}{8} > 1$.

b) $\frac{1-x}{4} - \frac{3-2x}{8} > 1 \quad /\cdot 8$

$$2(1-x)-(3-2x) > 8$$

$$2-2x-3+2x > 8$$

$$-2x+2x > 8-2+3$$

$0 > 9$ – *nierówność fałszywa*

Odp.: Nie istnieje liczba, która spełnia tę nierówność – nierówność sprzeczna.

Ćwiczenie 19. Rozwiąż nierówność:

a) $(2x-3)(2x+3)-24x>4(x-3)^2$, **b)** $\frac{5x}{12}+\frac{x+2}{3}\geq\frac{3x-1}{4}$.

Uwaga

Nierówności liniowe z jedną niewiadomą dzielimy na nierówności:

- **oznaczone** – nierówności, które mają zbiór rozwiązań, ale nie jest nim zbiór R,
- **tożsamościowe** – nierówności, których zbiorem rozwiązań jest zbiór R,
- **sprzeczne** – nierówności, które nie mają rozwiązania.

Odpowiedzi do ćwiczeń

12. **1**, **3**, **5**, **6**. **13.** 11. **14.** 0, 1, 2, 3, 4, 5.

15. **a)** $x<-2$, np. $-3;-15$, **b)** $x\geq-12{,}5$, np. $-12{,}5$; 0, **c)** $x<6$, np. 5; 1, **d)** $x>-1$, np. 0; 6.

16. Zbiorem rozwiązań obu nierówności jest przedział: **a)** $\langle 2;+\infty)$, **b)** $(-\infty;2\rangle$.

17. **a)** $x>\frac{1}{1-\sqrt{3}}$, najmniejsza liczba całkowita ją spełniająca to -1, **b)** $x<\frac{4}{\sqrt{2}-2}$, największa liczba całkowita ją spełniająca to -7. *Wskazówka.* **a)** $\frac{1}{1-\sqrt{3}}\approx-1{,}4$, **b)** $\frac{4}{\sqrt{2}-2}\approx-6{,}7$.

18. **a)** $x>\frac{13}{20}$, **b)** $x<\frac{16}{7}$. **19.** **a)** Nie ma rozwiązania, **b)** każda liczba x spełnia nierówność.

Zadania utrwalające

6.14. Sprawdź, które z liczb: -2, 0, 1, $\frac{5}{2}$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $2x>x+\frac{1}{2}$.

6.15. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności:

a) $-x\geq-5$, **b)** $x>\frac{2}{3}+2x$, **c)** $\frac{1}{2}x+2\leq x-1$, **d)** $3x>10x-7$.

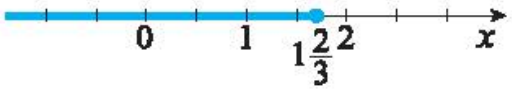
6.16. Rozwiąż nierówność:

a) $4x-5\geq3$, **b)** $\frac{1}{3}x\geq1$, **c)** $1{,}5x+15<29-1{,}3x$,

d) $2(x-1)+3\leq4(x+3)-1$, **e)** $1+\frac{y}{4}-y<-3$, **f)** $2z-1<\frac{1}{2}z+1$.

6.17. Sprawdź, które z liczb: $4\frac{1}{2}$, $-\sqrt{2}$, -3, π, $\sqrt{2}-5$ należą do zbioru rozwiązań nierówności $(x-1)(x+1)+x>x^2-2\frac{1}{2}$.

6.18. Na osi liczbowej przedstawiono zbiór liczb.



a) Ułóż nierówność, dla której jest on zbiorem rozwiązań.

b) Podaj największą liczbę spełniającą tę nierówność.

c) Podaj wszystkie liczby naturalne spełniające tę nierówność.

6.19. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczb naturalnych spełniających nierówność $x+10>\frac{5}{2}x+1$ jest:

A. 2, **B.** 4, **C.** 5, **D.** 6.

6.20. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $4x+43\le 23x+5$.

6.21. Rozwiąż nierówność i zbiór rozwiązań zaznacz na osi liczbowej.

a) $(x+2)(x-2)-2x>x^2+8$,

b) $3x^2-3(1-x)^2-6<-3x$,

c) $(x+3)^2>x(x+6)$,

d) $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\ge y\left(y+\frac{3}{4}\right)$,

e) $\frac{4y-3}{6}+3\le\frac{3y}{2}+\frac{5}{8}$,

f) $(x-3)(x+3)>\frac{x+2}{2}+1+x^2$.

6.22. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Liczba -1 jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\sqrt{5}x<3x+1$.	P	F
Liczba -8 jest największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $x-2>\sqrt{2}x+1$.	P	F

6.23. D

Uzasadnij, że najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność:

a) $x^2-1<(x+1)^2+2<(x+2)^2$ jest liczba 0,

b) $2x\cdot\log 2>3-x(1+2\log 5)$ z niewiadomą x jest liczba 2.

Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania nierówności liniowych

Za pomocą nierówności liniowych możemy rozwiązywać wiele problemów matematycznych, a także praktycznych. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 13. Określ, dla jakich wartości x wyrażenie $\frac{3}{4}x-6$ przyjmuje wartości:

a) ujemne, **b)** dodatnie, **c)** nieujemne, **d)** niedodatnie.

Rozwiązanie. Aby odpowiedzieć na pytanie postawione w zadaniu, należy rozwiązać nierówność:

a) $\frac{3}{4}x-6<0$

$\frac{3}{4}x<6 \quad /:\frac{3}{4}$

$x<8$

b) $\frac{3}{4}x-6>0$

$x>8$

c) $\frac{3}{4}x-6\geq 0$

$x\geq 8$

d) $\frac{3}{4}x-6\leq 0$

$\boldsymbol{x\leq 8}$

Odp.: **a)** $x<8$, **b)** $x>8$, **c)** $x\geq 8$, **d)** $\boldsymbol{x\leq 8}$.

Ćwiczenie 20. Określ, dla jakich wartości x wyrażenie:

a) $-x+1$ przyjmuje wartości ujemne, **b)** $5-6x$ przyjmuje wartości dodatnie,

c) $2-\frac{1}{2}x$ przyjmuje wartości niedodatnie, **d)** $1-\sqrt{2}x$ przyjmuje wartości nieujemne.

Przykład 14. Określ, dla jakich wartości x sens liczbowy ma wyrażenie:

a) $\frac{3x}{x-1}$, **b)** $\sqrt{x-2}$.

Rozwiązanie

a) Dzielenie przez zero jest niewykonalne, więc mianownik ułamka $\frac{3x}{x-1}$ nie może być równy zero.

Zatem wyrażenie $\frac{3x}{x-1}$ ma sens liczbowy, gdy $x-1\neq 0$, czyli gdy $\boldsymbol{x\neq 1}$.

b) Pierwiastki kwadratowe istnieją tylko z liczb nieujemnych, więc wyrażenie $\sqrt{x-2}$ ma sens liczbowy, gdy $x-2\geq 0$, czyli gdy $x\geq 2$.

Odp.: **a)** $\boldsymbol{x\neq 1}$, czyli $x<1$ lub $x>1$, **b)** $x\geq 2$, czyli $x\in\langle 2;+\infty)$.

Ćwiczenie 21. Określ, dla jakich wartości x ma sens liczbowy wyrażenie:

a) $\frac{x}{2x+4}$, b) $\sqrt{2-x}$, c) $\frac{1}{\sqrt{x+5}}$, d) $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

Przykład 15. Dwie wypożyczalnie sprzętu wodnego stosują różne metody opłat za wypożyczenie roweru wodnego.

Wypożyczalnia I
za każdą rozpoczętą godzinę
5 zł

Wypożyczalnia II
pierwsza godzina ..... 9 zł
druga godzina ..... 7 zł
trzecia godzina i każda rozpoczęta następna ..... 3 zł

Zapisz zależność i oblicz, na co najmniej ile godzin należy wypożyczyć rower wodny, aby bardziej opłacało się skorzystać z usług wypożyczalni II niż wypożyczalni I.

Rozwiązanie. Oznaczamy:

x – liczba godzin wypożyczenia roweru, gdzie $x \in N^+$,

$5x$ – opłata za wypożyczenie roweru na x godzin z wypożyczalni I,

$9+7+3(x-2)$ – opłata za wypożyczenie roweru na co najmniej 3 godziny z wypożyczalni II.

$$5x > 9+7+3(x-2)$$
$$5x-3x > 16-6,$$
$$2x > 10, \text{ więc } x > 5.$$

Koszt wypożyczenia roweru wodnego z wypożyczalni I jest większy niż z wypożyczalni II.

Odp.: Wypożyczenie roweru wodnego z wypożyczalni II jest bardziej opłacalne, jeżeli jego użytkowanie będzie trwało dłużej niż 5 godzin, tj. 6, 7, 8 lub 9 godzin itd.

Ćwiczenie 22. Z dwóch miejscowości odległych od siebie o 29 km wyruszyło jednocześnie dwóch turystów idących naprzeciw siebie ze stałą prędkością $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$ aż do chwili spotkania. Po jakim czasie odległość między turystami będzie mniejsza niż 7 km?

Odpowiedzi do ćwiczeń

20. a) $x>1$, b) $x<\frac{5}{6}$, c) $x\geq 4$, d) $x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$. **21.** a) $x\neq -2$, b) $x\leq 2$, c) $x>-5$, d) $x\neq 0$.

22. Po upływie 2 godzin i 45 minut. *Wskazówka.* $29-2\cdot 4\cdot x<7$, gdzie x to czas marszu turystów.

Zadania utrwalające

6.24. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jeżeli $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, to dodatnie wartości przyjmuje wyrażenie:

A. $12x-6$, **B.** $6-12x$.

Ujemne wartości przyjmuje wyrażenie $6-3x$, gdy:

C. $x<2$, **D.** $x>2$.

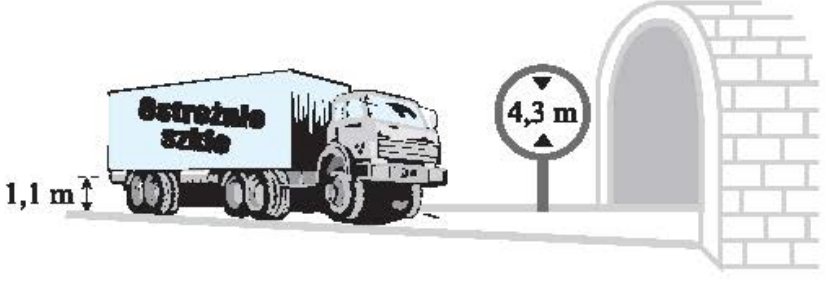
6.25. Określ, dla jakich x wyrażenie przyjmuje wartości niedodatnie:

a) $4x-\sqrt{5}x$, **b)** $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)-x^2$, **c)** $3x-\pi x$.

6.26. Określ, dla jakich wartości x ma sens liczbowy wyrażenie:

a) $\frac{-2+x}{x+5}$, **b)** $\sqrt{3x-6}$, **c)** $\frac{x}{\sqrt{4-x}}$, **d)** $\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}$.

6.27. Ułóż odpowiednią nierówność opisującą sytuację przedstawioną na rysunku. Podaj, co oznaczyłeś jako niewiadomą.



6.28. Uczeń oszczędza po 40 zł miesięcznie i zaoszczędził już 160 zł.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

W dwunastym miesiącu oszczędności ucznia przekroczą kwotę 640 zł.	P	F
Po dwóch latach oszczędności ucznia nie przekroczą 2000 zł.	P	F

6.29. Koszt produkcji pewnego przedmiotu jest równy 120 zł. Producent sprzedaje go za 160 zł. Ile sztuk musi sprzedać, aby osiągnąć co najmniej 1000 zł zysku?

6.30. Pewnego dnia stan wody w rzece był o 5 cm wyższy od stanu ostrzegawczego. W ciągu kilku następnych dni poziom wody podnosił się o 6 cm na dobę. Po ilu następnych dniach stan wody będzie wyższy od stanu ostrzegawczego o więcej niż 23 cm?

6.31. Uczestnicy szkolnej sztafety 4×100 m zamierzają osiągnąć podczas biegu czas poniżej 45,6 s. Jaki czas powinien uzyskać czwarty zawodnik, jeżeli trzej pierwsi sprinterzy uzyskali na swoich zmianach czas odpowiednio równy: 11,42 s, 11,35 s, 11,50 s?

6.32. Różnica kwadratu liczby naturalnej parzystej i kwadratu następnej po niej liczby parzystej jest nie mniejsza niż -20. Wyznacz wszystkie pary takich liczb.

6.33. Suma S kątów wewnętrznych wielokąta o n bokach określona jest wzorem $S=(n-2)\cdot 180°$. Podaj wszystkie wielokąty, których suma kątów wewnętrznych nie przekracza 1500°.

6.34. O godzinie 12:00 wyruszyły z dwóch stacji A i B, odległych od siebie o 100 km, dwa pojazdy szynowe. Jeden jedzie z A do B z prędkością 13 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, drugi z B do A z prędkością 12 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. O której godzinie odległość między pojazdami będzie mniejsza niż 30 km?

6.35. D Rozwiąż nierówność $1-1000x<1{,}999\cdot 10^6$. Uzasadnij, że najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą tę nierówność jest liczba -1998.

Równania z wartością bezwzględną

W szkole podstawowej obliczaliście wartość bezwzględną z dowolnej liczby,

np. $|4|=4$, $|0|=0$, $|-3|=-(-3)=3$, $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$, bo $\sqrt{2}-1>0$,

$|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})$, bo $1-\sqrt{2}<0$.

Wartością bezwzględną (modułem) liczby:
- nieujemnej x jest liczba x,
- ujemnej x jest liczba $-x$.

Wartość bezwzględna z dowolnej liczby rzeczywistej jest zawsze liczbą nieujemną, czyli $|x|\geq 0$ dla $x\in R$.

- $|x|=x$, gdy $x\geq 0$
- $|x|=-x$, gdy $x<0$

co zapisujemy

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{gdy } x\geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x<0 \end{cases}$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y prawdziwe są zależności:
- $|x|=|-x|$, np. $|-3|=|3|$,
- $\sqrt{x^2}=|x|$, np. $\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}=|2-\sqrt{2}|$, $\sqrt{x^2-2x+1}=|x-1|$.

Ćwiczenie 23. Oblicz: **a)** $|\sqrt{3}-5|$, **b)** $|\pi-\sqrt{10}|$, **c)** $|-2|$,
d) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}|$, **e)** $|3\sqrt{5}+2\sqrt{6}|-|\sqrt{5}-2\sqrt{6}|$.

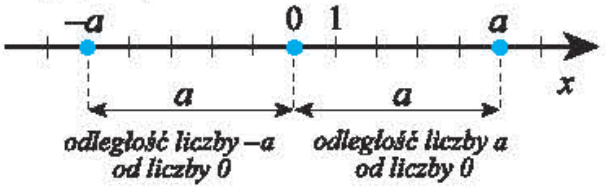
Ćwiczenie 24. Skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej i określ, dla jakich x prawdziwa jest równość: **a)** $|x|=x$, **b)** $|x|=-x$, **c)** $|-x|=x$, **d)** $|-x|=-x$.

Ćwiczenie 25. Oblicz:
a) $\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$, **b)** $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$, **c)** $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, **d)** $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Wartość bezwzględna z liczby ma interpretację geometryczną na osi liczbowej.

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby a jest równa odległości na osi liczbowej liczby a od liczby 0 (zero).



Uwaga
Z dwóch liczb ujemnych ta jest większa, której bezwzględna wartość jest mniejsza, np. $-3,5>-4,1$, bo $|-3,5|<|-4,1|$.

Przykład 16. Oblicz odległość między liczbami:
a) -4 i 3, **b)** -1 i -5.

Rozwiązanie. Obliczyć odległość na osi liczbowej między dwoma liczbami można na dwa sposoby.

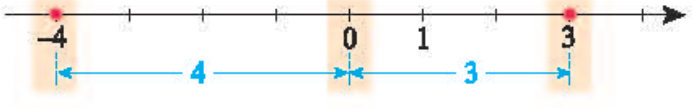
I sposób: Od liczby większej odejmujemy liczbę mniejszą.

a) $3>-4$, więc $3-(-4)=3+4=7$.

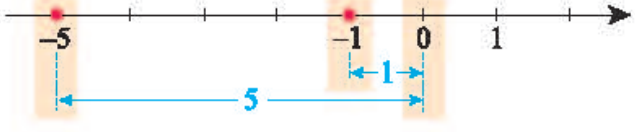
b) $-1<-5$, więc $-1-(-5)=-1+5=4$.

II sposób: Obliczamy wartość bezwzględną z różnicy tych liczb.

a) $|-4-3|=|-7|=7$,



b) $|-1-(-5)|=|-1+5|=4$.



Odp.: **a)** 7, **b)** 4.

Ćwiczenie 26. Oblicz i zaznacz na osi liczbowej odległość między liczbami:

a) $-3{,}1$ i 2, **b)** $-3{,}1$ i -5, **c)** $-\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{3}$.

Najprostszym równaniem z wartością bezwzględną jest równanie $|x| = a$, gdy $a \in \boldsymbol{R}$. Pokażemy na przykładach, w jaki sposób liczba rozwiązań tego równania zależy od a.

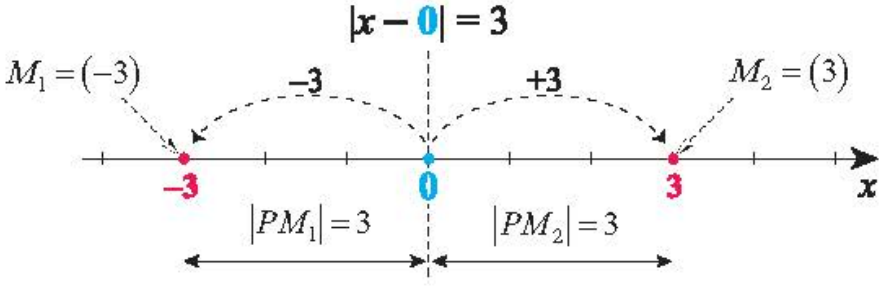
Przykład 17. Rozwiąż równanie $|x| = 3$.

Rozwiązanie

I sposób: Korzystamy z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

Zauważamy, że równanie $|x| = 3$ jest równoważne równaniu $|x - 0| = 3$.

Rozwiązać równanie $|x| = 3$ można poprzez wyznaczenie współrzędnych takich punktów M_1 i M_2 na osi, których odległość od punktu O jest równa 3.



Zatem $x_1 = -3$ i $x_2 = 3$.

II sposób: Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej

$|x| = 3$

$x = 3$ lub $x = -3$.

$|3| = |\,3| = 3$

Odp.: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Ćwiczenie 27. Rozwiąż równanie: **a)** $|x| = 5$, **b)** $|x| = 2\frac{1}{2}$, **c)** $|x| = 0$, **d)** $|x| = -1$.

Uwaga

Równanie $|x| = a$:

- **ma dwa pierwiastki** $x_1 = -a$ i $x_2 = a$, gdy $a > 0$,
- **ma jeden pierwiastek** $x_0 = 0$, gdy $a = 0$,
- **nie ma pierwiastków**, gdy $a < 0$.

Równania typu $|b \cdot x| = a$ najwygodniej jest rozwiązywać, korzystając z definicji wartości bezwzględnej. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 18. Rozwiąż równanie: **a)** $|5x|=3$, **b)** $\left|\left(1-\sqrt{2}\right)x\right|=1$.

Rozwiązanie

a)
$$|5x|=3,$$
$$5x=-3 \text{ lub } 5x=3$$
$$x=-\frac{3}{5} \text{ lub } x=\frac{3}{5}.$$

b)
$$\left|\left(1-\sqrt{2}\right)x\right|=1$$
$$\left(1-\sqrt{2}\right)x=-1 \text{ lub } \left(1-\sqrt{2}\right)x=1$$
$$x=-\frac{1}{1-\sqrt{2}} \text{ lub } x=\frac{1}{1-\sqrt{2}}$$
$$x=\frac{-1}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \text{ lub } x=\frac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$
$$x=1+\sqrt{2} \text{ lub } x=-1-\sqrt{2}.$$

Odp.: **a)** $x_1=-\frac{3}{5}$, $x_2=\frac{3}{5}$, **b)** $x_1=-1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$.

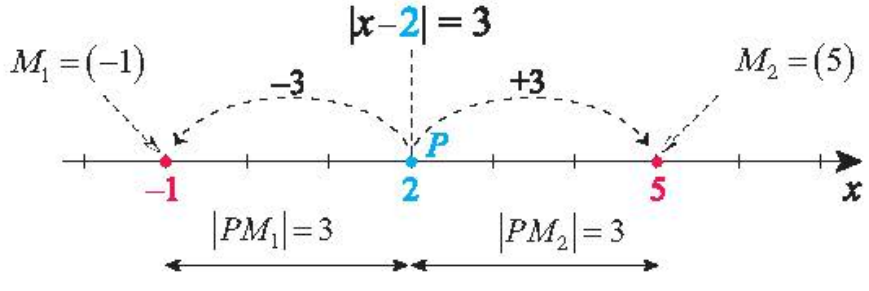
Ćwiczenie 28. Rozwiąż równanie: **a)** $\left|\frac{1}{2}x\right|=4$, **b)** $\left|\left(\sqrt{2}-2\right)x\right|=\sqrt{2}$.

Przykład 19. Rozwiąż równanie $|x-2|=3$.

Rozwiązanie

I sposób: Korzystamy z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej.

Aby rozwiązać równanie $|x-2|=3$, wystarczy znaleźć współrzędną takiego punktu $M=(x)$, którego odległość od punktu P, gdy $P=(2)$, jest równa 3.



$$x_1=2-3 \qquad x_2=2+3$$
$$x_1=-1 \qquad x_2=5$$

II sposób: Korzystamy z definicji wartości bezwzględnej.

$$|x-2|=3$$
$$x-2=-3 \text{ lub } x-2=3$$
$$x=-1 \text{ lub } x=5$$

Odp.: $x_1=-1$, $x_2=5$.

gdy $a>0$, *to*
$|x|=a$
$x=-a$ *lub* $x=a$

Ćwiczenie 29. Rozwiąż równanie: **a)** $|x-6|=4$, **b)** $|x+3|=2$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

23. a) $5-\sqrt{3}$, b) $10-\pi$, c) 2, d) $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$, e) $4\sqrt{5}$.

24. a) $x\geq 0$, b) $x<0$, c) $x>0$, d) $x\leq 0$. *Wskazówka.* c), d) $|-x|=\begin{cases}-x, & \text{gdy } -x\geq 0\\ -(-x), & \text{gdy } -x<0\end{cases}$

25. a) $2+\sqrt{5}$, b) $\sqrt{5}-2$, c) $\sqrt{2}+1$, d) $\sqrt{2}-1$. **26.** a) 5,1, b) 1,9, c) 1.

27. a) -5 i 5, b) $-2\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{2}$, c) 0, d) brak pierwiastków. **28.** a) $x_1=-8$, $x_2=8$, b) $x_1=1+\sqrt{2}$, $x_2=-1-\sqrt{2}$.

29. a) $x_1=2$, $x_2=10$, b) $x_1=-5$, $x_2=-1$.

Zadania utrwalające

6.36. Rozwiąż równanie:

a) $|x|=6$, b) $|x|=-6$, c) $|x|=0$,

d) $2|x|=4$, e) $|x|=-0{,}1$, f) $\frac{1}{2}|x|=1$.

6.37. Rozwiąż równanie:

a) $|-x|=20$, b) $-|y|=-4$, c) $|-x|-10=0$,

d) $|-2|-\frac{2\cdot|x|}{3}=1$, e) $-(|a|-5)=12$, f) $(\sqrt{2}+1)\cdot|x|=0$,

g) $|2x|=1-\sqrt{2}$, h) $|\sqrt{5}x|=1+\sqrt{5}$, i) $|(\sqrt{3}+1)x|=\sqrt{3}$.

6.38. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Liczba –3 nie spełnia równania:

A. $|-3x|=9$, B. $|3x|=-9$,

Liczba –2 jest pierwiastkiem równania:

C. $|\sqrt{2}x|=2\sqrt{2}$, D. $|\sqrt{3}x|=3\sqrt{3}$.

6.39. Rozwiąż równanie:

a) $|x-4|=1$, b) $|x+1|=2$, c) $|x+4|=1$,

d) $|5-x|=2$, e) $2|x+3|=10$, f) $-3|x-2|=-12$.

6.40. Nie rozwiązując równania, podaj liczbę jego pierwiastków.

a) $2|x|=0$, b) $|1-x|=0$, c) $4\cdot|x+2|=1$,

d) $|x|=2-\sqrt{5}$, e) $|x+3|=\sqrt{3}-1$, f) $|4-x|=3-\sqrt{8}$.

6.41. Wiedząc, że $\sqrt{(ax\pm b)^2}=|ax\pm b|$, rozwiąż równanie:

a) $\sqrt{(x+2)^2}=1$, b) $\sqrt{(x-3)^2}=0$, c) $\sqrt{(3-x)^2}=4$,

d) $\sqrt{x^2-6x+9}=2$, e) $\sqrt{x^2+14x+49}=5$, f) $\sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+2}=0$.

6.42. Używając symbolu wartości bezwzględnej, zapisz równanie, którego zbiorem rozwiązań jest zbiór punktów leżących na osi, których:

a) odległość od liczby 1 jest równa 4,

b) odległość od liczby –3 jest równa 3,

c) odległość od liczby $-\sqrt{2}$ jest równa 2.

6.43. D Uzasadnij, że równoważne są równania:

a) $\left|\left(1-\sqrt{3}\right)x\right|=1$ i $\left|\left(\sqrt{3}-1\right)x\right|=1$, b) $|1-x|=3$ i $|x-1|=3$.

6.44. D Uzasadnij, że rozwiązaniem równania $|x|=|-x|$ jest każda liczba rzeczywista x.

Nierówności z wartością bezwzględną

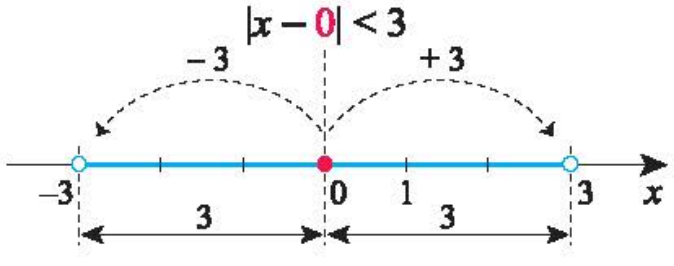
Przy rozwiązywaniu nierówności z wartością bezwzględną posługujemy się jej interpretacją na osi liczbowej oraz odległością na osi między dwiema liczbami.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 20. Rozwiąż nierówność: a) $|x|<3$, b) $|x|\geq 3$.

Rozwiązanie

a) Rozwiązać nierówność $|x|<3$, to znaczy znaleźć na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od liczby 0 jest mniejsza od liczby 3, co zapisujemy $|x-0|<3$.

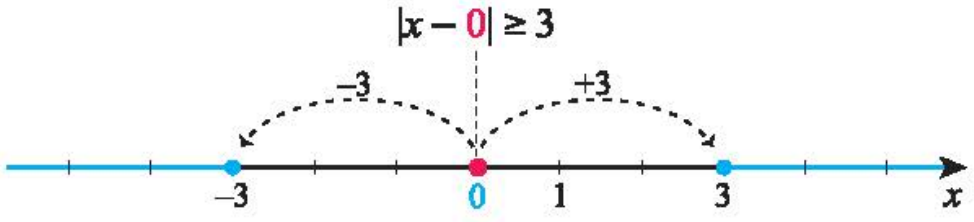


$x>-3$ i $x<3$, czyli

$x\in(-3;3)$.

Nierówność $|x|<3$ możemy zastąpić nierównością podwójną $-3<x<3$.

b) Rozwiązać nierówność $|x| \geq 3$, to znaczy znaleźć na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od liczby 0 jest niemniejsza niż 3, co zapisujemy $|x-0| \geq 3$.



$x \leq -3$ lub $x \geq 3$

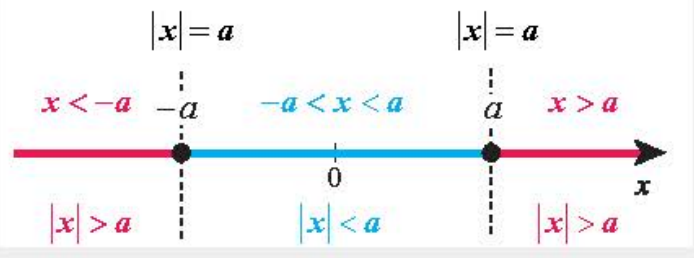
$x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Nierówność $|x| \geq 3$ możemy zastąpić alternatywą nierówności $x \leq -3$ lub $x \geq 3$.

Uwaga

Jeżeli $a > 0$ i $x \in R$, to:

- $|x| = a$, gdy $x = -a$ lub $x = a$,
- $|x| < a$, gdy $-a < x < a$, czyli gdy $x \in (-a; a)$,
- $|x| > a$, gdy $x < -a$ lub $x > a$, czyli gdy $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$.

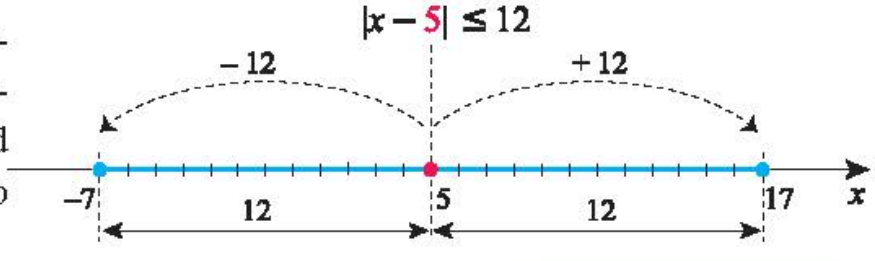


Ćwiczenie 30. Rozwiąż nierówność: **a)** $|x| < 6$, **b)** $|x| > \sqrt{2}$, **c)** $|x| \leq 8$.

Przykład 21. Rozwiąż nierówność: **a)** $|x-5| \leq 12$, **b)** $|x+1| > 3$.

Rozwiązanie

a) Warunek $|x-5| \leq 12$ spełniają współrzędne x punktów, których odległość od liczby 5 jest mniejsza lub równa 12.



Zatem $|x-5| \leq 12$, gdy $-12 \leq x-5 \leq 12$

$-12+5 \leq x \leq 12+5$

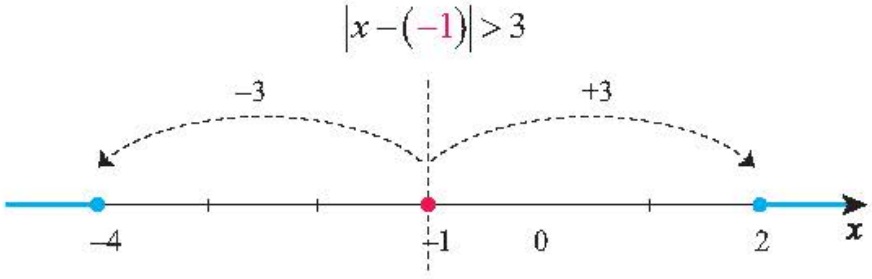
$-7 \leq x \leq 17$.

$|x| \leq a$, gdy $a \leq x \leq a$

Odp.: $x \in \langle -7; 17 \rangle$.

b) Nierówność $|x+1|>3$ zapisujemy w postaci $|x-(-1)|>3$.

Warunek $|x-(-1)|>3$ spełniają współrzędne x punktów, których odległość od liczby -1 jest większa od 3.



Zatem $|x-(-1)|>3$, gdy

$x+1<-3$ lub $x+1>3$

$x<-4$ lub $x>2$,

$x\in(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

$|x|>a$, *gdy* $x<-a$ *lub* $x>a$.

Odp.: $x\in(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

Ćwiczenie 31. Rozwiąż nierówność: **a)** $|x+4|<7$, **b)** $|x-5|\le 9$.

Ćwiczenie 32. Rozwiąż nierówność: **a)** $|x-2|>4$, **b)** $|x+3|\ge 2$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

30. **a)** $x\in(-6;6)$, **b)** $x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$, **c)** $x\in\langle -8;8\rangle$.

31. **a)** $x\in(-11;3)$, **b)** $x\in\langle -4;14\rangle$. 32. **a)** $x\in(-\infty;-2)\cup(6;+\infty)$, **b)** $x\in(-\infty;-5\rangle\cup\langle -1;+\infty)$.

Zadania utrwalające

6.45. Rozwiąż nierówność:

a) $|x|<2$, **b)** $|x|\le 3$, **c)** $|x|>1$,

d) $|x|\ge 5$, **e)** $2|x|\le 8$, **f)** $\frac{1}{3}|x|>2$.

6.46. Rozwiąż nierówność:

a) $|x|>0$, **b)** $|x|\ge 0$, **c)** $|x|<0$,

d) $|x|\le 0$, **e)** $|x|>-1$, **f)** $|x|<-2$.

6.47. Rozwiąż nierówność:

a) $|x-3|<4$, **b)** $|x+1|<3$, **c)** $|x+2|>2$,

d) $|x-4|\geq 3$, **e)** $|x+1|>1$, **f)** $|x+1|\leq\sqrt{2}$.

6.48. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby x spełniające warunek:

a) $|x|<5$, **b)** $|x|\geq 2$, **c)** $|x+1|<3$,

d) $|x+1|>4$, **e)** $|x-3|\leq 3$, **f)** $|x-5|\geq 1$.

6.49. Zapisz za pomocą wartości bezwzględnej warunek:

a) $x\in\langle -2;2\rangle$, **b)** $x>-3$ i $x<3$, **c)** $x<-4$ lub $x>4$,

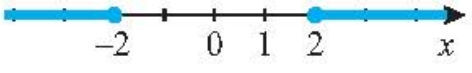
d) $x\in(0;4)$, **e)** $x\in\langle -4;0\rangle$, **f)** $x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

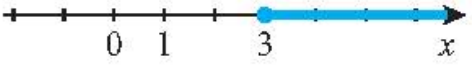
6.50. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

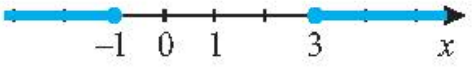
Zbiorem rozwiązań nierówności $\|x-3\|\leq 2$ jest przedział $\langle -5;5\rangle$.	P	F
Liczba 1 nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $\|2x\|>1$.	P	F
Liczba 1 nie spełnia nierówności $\|x-\sqrt{2}\|>1$.	P	F

6.51. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Zbiór rozwiązań nierówności $|x-1|\geq 2$ zaznaczono na rysunku:

A.


B.


C.


D.


Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli $x-2=15$, to wartość różnicy $x-5$ jest równa:

A. 12, **B.** 8, **C.** 10, **D.** –12.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

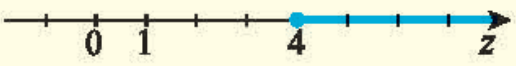
Pierwiastkiem równania $\frac{x+5}{x-6}=\frac{2}{3}$ jest liczba:

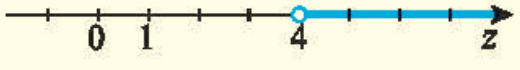
A. 6, **B.** 10, **C.** 17, **D.** –27.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Obrazem graficznym zbioru rozwiązań nierówności $2(x-1) \le x+2$ jest przedział przedstawiony na rysunku:

A. 

B. 

C. 

D. 

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Największą liczbą całkowitą, spełniającą nierówność $-2x+4>0$ jest liczba:

A. 0, **B.** 2, **C.** 1, **D.** –2.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do zbioru rozwiązań nierówności $4-1,5x \ge 7-(2x-1)$ **nie należy** liczba:

A. 7, **B.** 8, **C.** 9, **D.** 10.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Każda liczba rzeczywista spełnia nierówność:

A. $3(4x+1)<12x+2$, **B.** $3(4x+1)<12x$,

C. $3(4x+1)>12x+2$, **D.** $3(4x-1)>12x$.

7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{6-2x}}$ ma sens liczbowy, gdy:

A. $x>3$, **B.** $x \ge 3$, **C.** $x<3$, **D.** $x \le 3$.

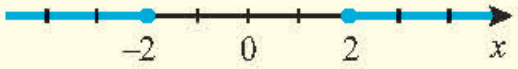
8. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Jeżeli w równaniu $3(1-x)=\square-3x$ w kratkę $\square$ wpiszemy:

liczbę 3, to otrzymamy równanie sprzeczne.	P	F
liczbę 5, to otrzymamy równanie tożsamościowe.	P	F
wyrażenie $2x$, to otrzymamy równanie oznaczone.	P	F

9. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Zbiór przedstawiony na osi liczbowej spełniają wszystkie liczby x takie, że:



A. $|x|>2$, **B.** $|x|<2$, **C.** $|x| \ge 2$, **D.** $|x| \le 2$.

7. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi

Rozwiązywanie niektórych problemów sprowadza się do ułożenia równania postaci $ax+by=c$ z niewiadomymi x i y, które nazywa się równaniem liniowym.
Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 1. Jacek narysował w zeszycie kilka trójkątów i kilka sześciokątów (figury były rozłączne) i policzył wierzchołki tych figur. Okazało się, że jest ich razem 24. Ułóż równanie opisujące daną sytuację i rozwiąż je.

Rozwiązanie. Nie znamy liczby trójkątów ani liczby sześciokątów. Oznaczmy:

x – liczba trójkątów, $x \in N^+$,

y – liczba sześciokątów, $y \in N^+$,

więc $3x$ – liczba wierzchołków wszystkich trójkątów,

$6y$ – liczba wierzchołków wszystkich sześciokątów.

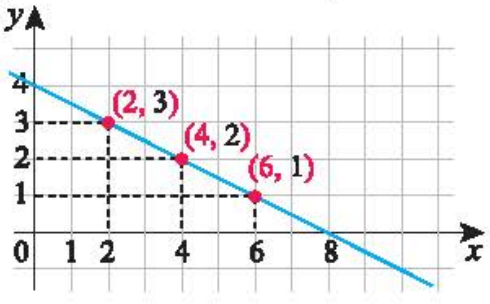
Z warunków zadania otrzymujemy równanie liniowe:

$3x+6y=24$, *liczba wszystkich wierzchołków wielokątów*

$x+2y=8$. $3x+6y=24 \quad /:3$

Rozwiązaniami równania $x+2y=8$ są wszystkie pary liczb (x, y) spełniające warunek $x+2y=8$, gdzie $x \in N^+$ i $y \in N^+$ (założenia wynikają z warunków zadania).

Zauważamy, że interpretacją geometryczną rozwiązań równania jest zbiór tych punktów leżących na prostej o równaniu $x+2y=8$, których współrzędne są dodatnimi liczbami naturalnymi.



Wyznaczamy y z równania $x+2y=8$:

$$y=-\frac{1}{2}x+4.$$

x	2	4	6	8	10
$y=-\frac{1}{2}x+4$	3	2	1	0	–1

Zauważamy, że wartość x powinna być liczbą naturalną parzystą, gdyż $y \in N^+$.

Odp.: Warunki zadania spełniają pary liczb: (2, 3), (4, 2), (6, 1). Jacek mógł narysować 2 trójkąty i 3 sześciokąty lub 4 trójkąty i 2 sześciokąty lub 6 trójkątów i 1 sześciokąt.

Równanie, które można przedstawić w postaci $ax+by=c$ z niewiadomymi x i y nazywamy:

- **równaniem stopnia pierwszego**, gdy $a\cdot b\neq 0$ (liczby a i b nie są zerami),
- **równaniem liniowym**, gdy $a^2+b^2>0$ (tylko jedna z liczb a i b może być równa 0).

Rozwiązaniem równania liniowego $ax+by=c$ jest para liczb (x, y), która spełnia to równanie.

Przykład 2. Podaj trzy pary liczb spełniających równanie $2x-y=25$.

Rozwiązanie

W praktyce równanie $2x-y=25$ zapisujemy w postaci $y=2x-25$.

- Jeśli $x=1$, to $y=2\cdot 1-25=-23$,
- jeśli $x=-2\frac{1}{2}$, to $y=2\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right)-25=-30$,
- jeśli $x=0$, to $y=2\cdot 0-25=-25$.

Odp.: Pary spełniające równanie: $(1,-23)$, $\left(-2\frac{1}{2},-30\right)$, $(0,-25)$.

Ćwiczenie 1. Podaj trzy pary liczb spełniających równanie:
a) $3x+y=5$, **b)** $x-2y=-3$, **c)** $x=y$.

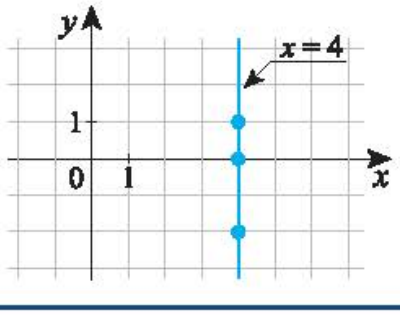
Ćwiczenie 2. Sprawdź, które pary liczb: $(-3,5)$, $(-1,1)$, $(-2,11)$, $(0,4)$, $(1,2)$, $(2,-1)$ należą do zbioru rozwiązań równania $3x+y=5$.

Uwaga

Jeżeli utożsamiamy pary liczb rzeczywistych (x, y) z punktami płaszczyzny, to równanie $ax+by+c=0$ opisuje prostą, gdy $a^2+b^2>0$.

Przykład 3. Podaj co najmniej dwie pary liczb spełniające równanie $x-4=0$. Przedstaw w układzie współrzędnych obraz graficzny zbioru rozwiązań tego równania.

Rozwiązanie. $x-4=0$ wtedy, gdy $x=4$.
Rozwiązaniami równania $x=4$ są pary liczb $(4, y)$, gdzie $y\in R$, np. $(4,-2)$, $(4,0)$, $(4,1)$ itd.
Obrazem graficznym zbioru rozwiązań równania $x-4=0$ jest prosta o równaniu $x=4$, równoległa do osi y.



Ćwiczenie 3. Podaj co najmniej dwie pary liczb będące rozwiązaniami równania $y = 3$. Zaznacz na płaszczyźnie obraz graficzny zbioru rozwiązań danego równania.

Ćwiczenie 4. Dane jest równanie $x - y + 6 = 0$.

a) Podaj trzy pary liczb spełniających równanie.

b) Czy zbiór wszystkich par liczb spełniających dane równanie jest zbiorem skończonym?

c) Nazwij figurę, która jest obrazem graficznym zbioru rozwiązań tego równania.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. Np.: **a)** $(-1, 8)$, $(0, 5)$, $(1, 2)$, **b)** $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(-3, 0)$, **c)** $(-2, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.
2. $(-2, 11)$, $(1, 2)$, $(2, -1)$. 3. Np.: $(0, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$. 4. **a)** Np.: $(0, 6)$, $(2, 8)$, $(-3, 3)$, **b)** nie, **c)** prosta.

Zadania utrwalające

7.1. Sprawdź, które pary liczb: $(1, 1)$, $(12, 2)$, $\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ należą do zbioru rozwiązań równania $x - 5y = 2$.

7.2. Przedstaw w układzie współrzędnych obraz graficzny zbioru rozwiązań równania:

a) $x - 5 = 0$, **b)** $2x - y - 1 = 0$, **c)** $y + 7 = 0$.

7.3. Równanie liniowe ma postać $-x + 2y - 1 = 0$.

a) Podaj dwie pary liczb, które spełniają to równanie.

b) Podaj parę liczb, która nie spełnia tego równania.

c) Nazwij figurę, która jest obrazem graficznym zbioru rozwiązań danego równania.

Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Uwaga

- Jeśli dwa równania liniowe z dwiema niewiadomymi połączone są spójnikiem **i**, np. $2x - y + 4 = 0$ **i** $5x + 4y = 12$,

  to możemy je zapisać w postaci układu równań $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$.

  Klamra $\{$ zastępuje spójnik **i**.

- Rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi jest każda para liczb (x, y), która spełnia jednocześnie oba równania.

Ćwiczenie 5. Sprawdź, czy para liczb $(3,-1)$ spełnia każde równanie układu:

a) $\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x-y=7 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x=3 \\ 5x=3-12y \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y=7 \\ y=-1 \end{cases}$.

Wskazówka. Wstaw do równań układu za x liczbę 3 i za y liczbę -1, wykonaj obliczenia i stwierdź, czy obie otrzymane równości są prawdziwe.

Układy równań liniowych możemy rozwiązywać metodą podstawiania lub metodą przeciwnych współczynników.

Metoda podstawiania polega na wyznaczeniu z jednego z równań jednej niewiadomej i za tę niewiadomą otrzymane wyrażenie podstawiamy do drugiego równania.

W ten sposób to drugie równanie staje się równaniem z jedną niewiadomą. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 4. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 6x-2y=16 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Rozwiązanie

$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 6x-2y=16 \end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy y.

$\begin{cases} y=7-2x \\ 6x-2\cdot(7-2x)=16 \end{cases}$

Podstawiamy do drugiego równania za y wyrażenie $7-2x$.

Rozwiązujemy drugie równanie: $6x-2(7-2x)=16$, $6x-14+4x=16$, $x=3$.

$\begin{cases} y=7-2x \\ x=3 \end{cases}$

$\begin{cases} y=7-2\cdot 3 \\ x=3 \end{cases}$

Wynik $x=3$ podstawiamy do pierwszego równania.

Odp.: $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(3,1)$.

Ćwiczenie 6. Rozwiąż metodą podstawiania układ równań:

a) $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 3x+y=11 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-3y=20 \end{cases}$.

Metoda przeciwnych współczynników polega na przekształceniu obu równań układu tak, by przy jednej z niewiadomych były liczby przeciwne. Tak otrzymane równania układu dodajemy stronami. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 5. Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników układ równań:

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 6x-2y=16 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases}$.

Rozwiązanie

a)
$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 6x-2y=16 \end{cases} \quad /\cdot 2$$

Obie strony pierwszego równania mnożymy przez 2, aby w równaniach przy zmiennej y były przeciwne liczby: 2 i –2.

$$+ \begin{cases} 4x+2y=14 \\ 6x-2y=16 \end{cases}$$

Równania dodajemy stronami.

$$10x+0y=30$$
$$10x=30$$
$$x=3$$

Otrzymujemy równanie $10x = 30$ z niewiadomą x i rozwiązujemy je.

$$\begin{cases} x=3 \\ 2x+y=7 \end{cases}$$

Wartość $x = 3$ podstawiamy do dowolnego równania układu i obliczamy y.

$$\begin{cases} x=3 \\ 2\cdot 3+y=7 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}.$$

b) Metodą przeciwnych współczynników możemy obliczyć obie niewiadome x i y.

Obliczamy niewiadomą x:

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases} \quad /\cdot 3$$

$$+ \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 9x-3y=15 \end{cases}$$

$$11x = 19$$
$$x=\frac{19}{11}.$$

Obliczamy niewiadomą y:

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-y=5 \end{cases} \quad /\cdot(-3) \quad /\cdot 2$$

$$\begin{cases} -6x-9y=-12 \\ 6x-2y=10 \end{cases}$$

$$-11y=-2$$
$$y=\frac{2}{11}.$$

Odp.: **a)** $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x=\frac{19}{11} \\ y=\frac{2}{11} \end{cases}$.

Uwaga

Rozwiązywanie układu równań polega na zastępowaniu tego układu kolejnymi układami jemu równoważnymi, eliminując niewiadomą przez:

- podstawianie (metoda podstawiania),
- dodawanie równań stronami (metoda przeciwnych współczynników).

Ćwiczenie 7. Rozwiąż metodą przeciwnych współczynników układ równań:

a) $\begin{cases} x+3y=2 \\ 3x-6y=-9 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 5x-4y=2 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$.

Ćwiczenie 8. Doprowadź każde równanie układu do postaci $ax+by=c$:

a) $\begin{cases} 2(x+y)-2=3(x+2) \\ 2(y+2)+3(x-y)=2x-1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} (x-1)^2-(y-3)^2=(x-y)(x+y) \\ \frac{x+4}{2}-\frac{y+4}{3}=1 \end{cases}$.

Przykład 6. Określ, czy układ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny, gdy:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x-2y=10 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$.

Rozwiązanie

Do wszystkich układów zastosujemy metodę przeciwnych współczynników.

a) $+\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases}$

$2x=6$

$x=3$

$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

Układ oznaczony

Rozwiązaniem układu jest jedna para liczb $(3,-1)$.

b) $\begin{cases} x-y=5 \\ 2x-2y=10 \end{cases} \quad /\cdot(-2)$

$+\begin{cases} -2x+2y=-10 \\ 2x-2y=10 \end{cases}$

$0x+0y=0$

$0=0$

równość prawdziwa.

Układ nieoznaczony

Rozwiązaniem układu są pary liczb (x, y), gdzie $\begin{cases} x\in R \\ y=x-5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} y\in R \\ x=y+5 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=4 \end{cases} \quad /\cdot(-2)$

$+\begin{cases} -2x+2y=-6 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$

$0x+0y=-2$

$0=-2$

równość fałszywa.

Układ sprzeczny

Układ nie ma rozwiązania.

Uwaga

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy:

- **układem oznaczonym** (lub układem równań niezależnych), gdy ma jedno rozwiązanie, którym jest para liczb,
- **układem nieoznaczonym** (lub układem równań zależnych), gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań, czyli nieskończenie wiele par liczb spełnia równania układu,
- **układem sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązania.

Ćwiczenie 9. Określ, czy układ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny, gdy:

a) $\begin{cases} 2x-y=6 \\ 2x-3y=-2 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=2 \\ 2x-3y=12 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} 4x-y=3 \\ 2x-0,5y=6 \end{cases}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

5. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** nie. **6.** **a)** $(3,2)$, **b)** $(7,-2)$. **7.** **a)** $(-1,1)$, **b)** $\left(\frac{4}{11},-\frac{1}{22}\right)$.

8. **a)** $\begin{cases} -x+2y=8 \\ x-y=-5 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} -2x+6y=8 \\ 3x-2y=2 \end{cases}$. **9.** Układ jest: **a)** oznaczony, **b)** nieoznaczony, **c)** sprzeczny.

Zadania utrwalające

7.4. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x+3y=3 \\ x-y=5 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} 2x-y=10 \\ x+5y=-17 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} 3m+n=9 \\ 2m-5n=-11 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} 4a-2=b \\ 3a+7b=1,5 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} 5x=4-2y \\ 4x+y=3 \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ x+5y=-9,5 \end{cases}$.

7.5. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=3 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ -3x+y=10 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x+4y=11 \\ 2x+5y=10 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} 4x+5y=-4 \\ 6x+7y=-6 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} -2x+5y=-10 \\ 7x-4y=8 \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} 9x+8y=1 \\ 5x-6y=11 \end{cases}$.

7.6. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} x=y \\ 5x-y=4 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} y=2x+1 \\ 4x+y=13 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} 5y-x=3 \\ x=3-y \end{cases}$.

7.7. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} 3x = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} 5y = 2 \\ x + y = 2\frac{2}{5} \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} 4y - x = 6 \\ 17y = 0 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} a = b \\ 2a + b = 9 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} u = v \\ 5u - v = 10 \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} 3r = s \\ 3r + s = 24 \end{cases}$.

7.8. **D** Uczeń, rozwiązując układ równań $\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$, otrzymał rozwiązanie $x = -2$ i $y = -1$. Czy uczeń poprawnie rozwiązał ten układ równań?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B i C.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	para liczb $(-2, -1)$ spełnia tylko równanie $x + y = -3$.
N	**Nie,**		**B.**	para liczb $(-2, -1)$ spełnia tylko równanie $3x - 2y = 4$.
			C.	para liczb $(-2, -1)$ spełnia oba równania układu.

7.9. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} 10(y+2) + x - 5 = x - 5 \\ 25(y+2) + 3(x-5) = -9 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} \frac{x+2y}{4} - \left(x - \frac{1}{3}y\right) = 1 + y \\ \frac{y+3}{6} + \frac{2-x}{8} = \frac{3}{2} \end{cases}$,

c) $\begin{cases} (x-1)^2 - (y-3)^2 = (x-y)(x+y) \\ \frac{x+4}{2} - \frac{y+4}{3} = 1 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} (x-2)^2 - (y-1)^2 = (x-y)(x+y) + 5 \\ 2(x-y) + y^2 = \left(y - 2\sqrt{2}\right)\left(y + 2\sqrt{2}\right) \end{cases}$.

7.10. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 3 \\ x - y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 5\sqrt{2} \\ x - y = 0 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x + y - 2\sqrt{2} = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} \left(\sqrt{2} - 1\right)x + y = \sqrt{2} + 1 \\ \left(\sqrt{2} + 1\right)x - y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$,

e) $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = -\sqrt{2} - 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} -3x + \sqrt{2}y = -4 \\ 2x - \sqrt{6}y = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$.

7.11. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x+y=16 \\ x-y=14 \end{cases}$ jest para liczb i są to:

A. dwie liczby dodatnie, **B.** dwie liczby ujemne,

C. liczba dodatnia i zero, **D.** liczba dodatnia i liczba ujemna.

7.12. Rozwiąż układ równań i określ, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny, gdy:

a) $\begin{cases} 6x+9y=15 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} 1{,}5x+0{,}5y=2 \\ 0{,}3x+0{,}1y=\frac{2}{3} \end{cases}$,

d) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y=2 \\ x+0{,}6y=6 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x-y=-1 \\ y=2x \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} 2x+y=13 \\ x-\frac{1}{2}y=2 \end{cases}$.

7.13. Podaj, jakie liczby można wpisać w miejsce □ i ○, aby układ równań $\begin{cases} \square x+2y=3 \\ 3x+\bigcirc y=9 \end{cases}$ był:

a) nieoznaczony, **b)** oznaczony, **c)** sprzeczny.

7.14. Do równania:

a) $4x+3y=5$, **b)** $y=-2x+5$, **c)** $3x=2(y-3)$, **d)** $y=2$

dopisz drugie równanie, aby otrzymany układ równań:

1° nie miał rozwiązania,

2° miał jedno rozwiązanie,

3° miał nieskończenie wiele rozwiązań.

7.15. Czy układ równań $\begin{cases} -3x+y=1 \\ 6x-2y=-2 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań?

D

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B i C.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	jedynym rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(1, 2)$.
N	**Nie,**		**B.**	jeśli pomnożymy obie strony pierwszego równania przez liczbę –2, to otrzymamy drugie równanie.
			C.	jeśli pomnożymy obie strony pierwszego równania przez liczbę –2, to nie otrzymamy drugiego równania.

Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania układów równań liniowych

Za pomocą równań liniowych i ich układów można rozwiązać wiele problemów z różnych dziedzin nauki i z życia. Wystarczy w tym celu:

- ustalić poszukiwane niewiadome i oznaczyć je dwiema dowolnymi literami – najczęściej używamy liter x i y,
- ułożyć dwa równania liniowe z dwiema niewiadomymi,
- rozwiązać otrzymany układ równań.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 7. Wprowadź niewiadome x oraz y i zapisz za pomocą układu równań informację:

Na parkingu stało 120 pojazdów, w tym samochody osobowe i motocykle. Ile było pojazdów każdego rodzaju, jeżeli wiadomo, że wszystkie pojazdy łącznie stały na 366 kołach?

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenia:

x – liczba samochodów, więc $4x$ – liczba kół samochodów,

y – liczba motocykli, więc $2y$ – liczba kół motocyklowych.

Układamy równania i zapisujemy je w postaci układu równań:

$$\begin{cases} x+y=120 \\ 4x+2y=366 \end{cases}.$$

Na parkingu stało 120 pojazdów, pojazdy miały łącznie 366 kół.

Ćwiczenie 10. Wprowadź niewiadome x i y, i zapisz informacje przedstawione w zadaniu za pomocą układu równań.

a) Do salonu samochodowego sprowadzono 48 samochodów dwóch marek: Kia i Suzuki. Samochodów Kia było dwa razy więcej niż Suzuki.

b) W klasie liczącej 27 uczniów dziewcząt jest dwa razy mniej niż chłopców.

W zależności od informacji zawartych w zadaniu obieramy strategię jego rozwiązania. Pokażemy na przykładzie, że ten sam problem (zadanie) można rozwiązać za pomocą jednego równania, jak również za pomocą dwóch równań, czyli układu.

Przykład 8. Kasia narysowała kilka trójkątów i kilka czworokątów, a następnie policzyła ich wierzchołki. Było ich 70. Ile trójkątów, a ile czworokątów narysowała Kasia, jeżeli trójkątów było dwukrotnie więcej niż czworokątów?

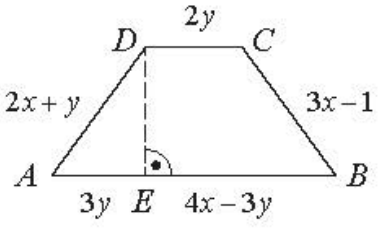
Rozwiązanie. Rozwiązujemy problem za pomocą:

jednego równania	*układu równań*
x – liczba czworokątów,	x – liczba czworokątów,
$4x$ – liczba wierzchołków czworokątów,	y – liczba trójkątów.
$2x$ – liczba trójkątów,	$2x$ – liczba trójkątów,
$3\cdot 2x$ – liczba wierzchołków trójkątów,	$\begin{cases} 2x = y \\ 4x+3y=70 \end{cases}$
$4x+3\cdot 2x=70$	
$x=7$	$\begin{cases} x=7 \\ y=14 \end{cases}$.
$2x=2\cdot 7=14.$	

Odp.: Kasia narysowała 7 czworokątów i 14 trójkątów.

Ćwiczenie 11. Tata kupił dwa rodzaje puszek z karmą dla psów. Karma „Smaczek" kosztuje 2,80 zł za puszkę, a karma „Łasuch" 3,40 zł za puszkę. Tata kupił o 3 puszki mniej „Łasuchów" niż „Smaczków" i zapłacił 33,20 zł. Ile puszek każdego rodzaju kupił tata?

Przykład 9. Oblicz długości boków trapezu równoramiennego $ABCD$ przedstawionego na rysunku.



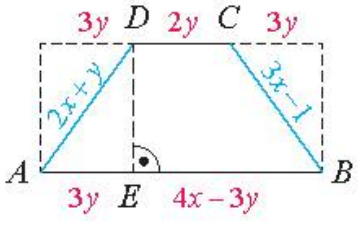
Rozwiązanie

Układamy układ równań.

$$\begin{cases} 2x+y=3x-1 \\ 3y+(4x-3y)=3y+2y+3y \end{cases}$$

$|AD|=|BC|$

$|AB|=3y+4x \quad 3y$
i $|AB|=3y+2y+3y$

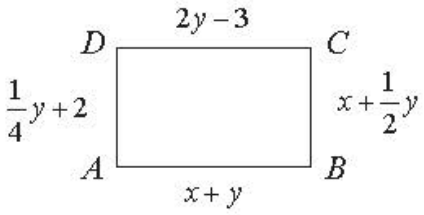


$$\begin{cases} y=x-1 \\ 4x=8y \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} |AB|=8y \\ |DC|=2y \\ |AD|=3x-1 \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} |AB|=8\cdot 1=8 \\ |DC|=2\cdot 1=2 \\ |AD|=3\cdot 2-1=5 \end{cases}.$$

Odp.: Podstawy trapezu mają długości 8 i 2, a ramię 5.

Ćwiczenie 12. Oblicz długości boków prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.



Odpowiedzi do ćwiczeń

10. a) $\begin{cases} x+y=48 \\ x=2y \end{cases}$, gdzie x – liczba samochodów Kia, y – liczba samochodów Suzuki, **b)** $\begin{cases} x+y=27 \\ 2x=y \end{cases}$, gdzie x – liczba dziewcząt, y – liczba chłopców. **11.** Tato kupił 7 puszek karmy „Smaczek" i 4 puszki karmy „Łasuch". **12.** 5 i 3.

Zadania utrwalające

7.16. Zapisz informację w postaci układu równań i rozwiąż go.

a) Liczba p jest o 3 większa od połowy liczby r, a suma liczb p i r jest równa 18.

b) Liczba m stanowi 30% liczby n, a suma liczb m i n jest równa 65.

7.17. Suma liczb x i y jest trzykrotnie większa niż ich różnica, a pierwsza liczba jest o 4,3 większa od drugiej.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Powyższą sytuację opisuje równanie:

A. $x+x-4{,}3=3\cdot\left[x-\left(x-4{,}3\right)\right]$, **B.** $x+x-4{,}3=3\cdot\left[x+\left(x-4{,}3\right)\right]$.

Powyższą sytuację opisuje równanie:

C. $\begin{cases} x=y+4{,}3 \\ x+y=3\cdot\left(x-y\right) \end{cases}$, **D.** $\begin{cases} y=x+4{,}3 \\ x+y=3\left(x-y\right) \end{cases}$.

7.18. Na zebraniu poddano głosowaniu pewien wniosek. Głosowało 360 osób. Za wnioskiem głosowało o 104 osoby więcej niż przeciw. Ile osób głosowało za wnioskiem, a ile przeciw wnioskowi, jeżeli nikt nie wstrzymywał się od głosu?

7.19. Piekarz ma obecnie pięć razy więcej lat praktyki niż jego uczeń. Za 4 lata piekarz będzie miał trzy razy więcej lat praktyki niż jego uczeń. Ile lat pracuje piekarz w swoim zawodzie?

7.20. Z przystani Radość odległej o 6 km od przystani Miłość wypłynęła motorówka. Z prądem rzeki płynęła 20 minut, a powrót trwał pół godziny. Oblicz prędkość własną motorówki i prędkość nurtu rzeki.

7.21. Gdyby Aleksander Wielki umarł o 5 lat wcześniej, to panowałby przez $\frac{1}{4}$ swego życia. Gdyby żył o 9 lat dłużej, to panowałby przez połowę swego życia. Ile lat żył i ile lat panował Aleksander Wielki?

7.22. Kierowca prowadzi samochód, który zużywając 1 litr benzyny, może przejechać 12 km autostradą lub 9 km ulicami miasta. Podczas ostatniego weekendu przejechał 348 km i zużył 35 litrów benzyny. Ile litrów benzyny zużył na jazdę w mieście?

7.23. D Dwa czerwone lizaki kosztują tyle samo co jeden lizak żółty i jeden lizak zielony. Dwa lizaki żółte kosztują tyle samo co jeden lizak czerwony i dwa lizaki zielone. Uzasadnij, że najdroższy jest lizak żółty.

7.24. Stół i 6 krzeseł kosztowały 4800 zł. Cenę stołu obniżono o 10%, a cenę krzesła o 20%. Teraz za zestaw trzeba zapłacić 4050 zł. Oblicz, ile kosztował stół, a ile krzesło przed obniżką.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Rozwiązaniem układu $\begin{cases} 2x+7y=16 \\ 4x+3y=10 \end{cases}$ jest para liczb:

A. $(2,1)$, **B.** $(1,2)$, **C.** $(1,-2)$, **D.** $(-1,-2)$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeśli $x+5=2y$ i $y=2x-14$, to:

A. $x=-11$, **B.** $x=-\frac{33}{5}$, **C.** $x=8$, **D.** $x=11$.

3. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Rozwiązaniem układu $\begin{cases} 2x+y=-4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ ma być para liczb $x=-2$ i $y=0$.

Zatem w miejsce kropek należy dopisać równanie:

A. $2x+y=4$, **B.** $4x-y-8=0$, **C.** $2x-y-8=0$, **D.** $4x-y=-8$.

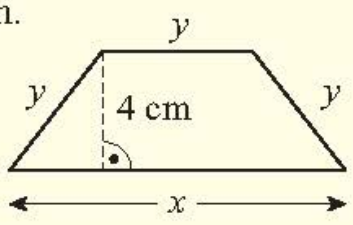
4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Układ równań $\begin{cases} 2x-y=2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$:

nie ma rozwiązania, gdy w miejsce kropek zapisze się równanie $-2x+y=-2$.	P	F
ma rozwiązanie, gdy w miejsce kropek wpisze się równanie $x+y=-2$.	P	F

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Pole narysowanego trapezu jest równe 32 cm^2, a obwód 26 cm. Długości boków tego trapezu można obliczyć, rozwiązując układ równań:



A. $\begin{cases} 32=\frac{1}{2}x+y\cdot 4 \\ 26=x+3y \end{cases}$, **B.** $\begin{cases} 32=(x+y)\cdot 2 \\ 26=x+3y \end{cases}$,

C. $\begin{cases} 32=(x+y)\cdot 4 \\ 26=x+3y \end{cases}$, **D.** $\begin{cases} 32=\frac{1}{2}xy\cdot 2 \\ 26=x+3y \end{cases}$.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Za 1 kg jabłek i 1 kg gruszek zapłacono 6 zł. Cena jednego kilograma jabłek (x) stanowi połowę ceny jednego kilograma gruszek (y). Sytuację tę opisuje układ równań:

A. $\begin{cases} x+y=6 \\ x=2y \end{cases}$, **B.** $\begin{cases} x+y=6 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$, **C.** $\begin{cases} x+y=6 \\ x=2 \end{cases}$, **D.** $\begin{cases} x+y=6 \\ x=\frac{1}{2}y \end{cases}$.

7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Matka jest cztery razy starsza od córki. Za 10 lat będą miały razem 75 lat. Jeżeli przez x oznaczymy wiek matki, przez y wiek córki, to powyższą sytuację opisuje układ równań:

A. $\begin{cases} y=4x \\ x+y+20=65 \end{cases}$, **B.** $\begin{cases} x=4y \\ x+y+20=75 \end{cases}$,

C. $\begin{cases} y=x-4 \\ x+10=y+10 \end{cases}$, **D.** $\begin{cases} x=y-4 \\ x+10+y+10=75 \end{cases}$.

8. Stefan powiedział do Jana zdania **1** i **2**.

1 Gdy dam ci jedną złotówkę, to każdy z nas będzie miał taką samą kwotę,

2 Jeżeli ty mi dasz dwa złote, to będę miał 2 razy tyle złotych co ty.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Równanie $x-1=y+1$ opisuje zdanie **1**, gdy x oznacza kwotę, którą ma Jan.	P	F
Układ równań $\begin{cases} x-1=y+1 \\ x+2=2(y-2) \end{cases}$ opisuje zdania **1** i **2**, gdy x oznacza kwotę, którą ma Stefan.	P	F

9. W sklepie obuwniczym obniżono ceny butów letnich o 10%, a butów sportowych o 15%. Pan Dariusz kupił buty letnie i sportowe przed obniżką i zapłacił 370 zł. Pan Wojtek kupił takie same buty po obniżce i zapłacił o 48 zł mniej. Oblicz, ile teraz kosztują buty sportowe.

10. **D** W teleturnieju telewizyjnym *MILIONERZY* uczestnik miał wybrać prawidłową odpowiedź na postawiony problem:

„*Nieprawdą jest, że układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi*:

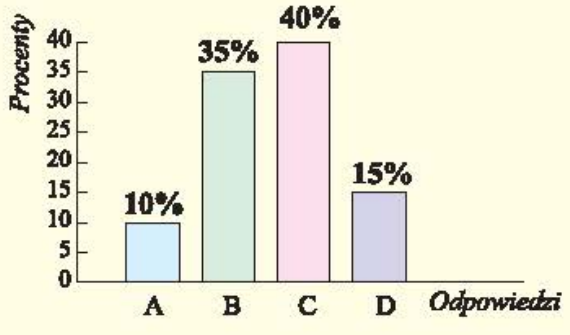
A. *może mieć tylko jedno rozwiązanie,*

B. *może mieć tylko dwa rozwiązania,*

C. *może mieć nieskończenie wiele rozwiązań,*

D. *może nie mieć rozwiązań.*”

Nie znając prawidłowej odpowiedzi, gracz poprosił o pomoc publiczność.
Wyniki głosowania publiczności są przedstawione na diagramie obok.
Czy publiczność wskazała prawidłową odpowiedź? Uzasadnij swój wybór.



11. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x+y=5\cdot 10^{10} \\ x-y=10^{10} \end{cases}$ jest para liczb:

A. $x=3\cdot 10^{10},\ y=10^{10},$

B. $x=3\cdot 10^{10},\ y=2\cdot 10^{10},$

C. $x=5\cdot 10^{10},\ y=10^{10},$

D. $x=2\cdot 10^{10},\ y=3\cdot 10^{10}.$

8. Funkcja i jej własności

Sposoby określania funkcji

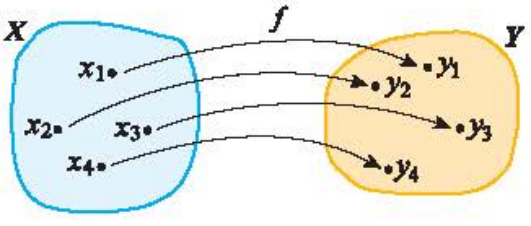
Funkcją można opisać wiele zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym.

Funkcją nazywamy **jednoznaczne przyporządkowanie**, według którego każdemu elementowi x ze zbioru X odpowiada dokładnie jeden element y ze zbioru Y.

Zapis $y = f(x)$ *czytamy* zmienna y jest funkcją zmiennej x.

x – zmienna niezależna y – zmienna zależna

x – argument funkcji f y i $f(x)$ – wartość funkcji f dla argumentu x



$X = D_f = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ $Y_f = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji** f lub **zbiorem argumentów funkcji** i oznaczamy symbolem X lub D_f.

Zbiór złożony z tych elementów y zbioru Y, dla których istnieje element x ze zbioru X taki, że $y = f(x)$, nazywamy **zbiorem wartości funkcji** f i oznaczamy Y_f.

Funkcję można określić za pomocą:

1 przepisu słownego, **2** wzoru, **3** tabeli, **4** grafu, **5** wykresu.

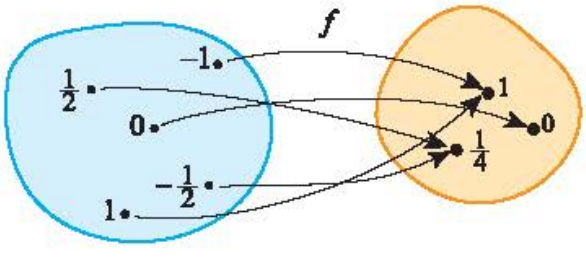
Np.: **1** przepis **słowny** „Każdej liczbie x ze zbioru X, gdzie $X = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, przyporządkowujemy liczbę y będącą jej kwadratem”,

2 **wzór** $f(x) = x^2$, gdzie $D_f = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$,

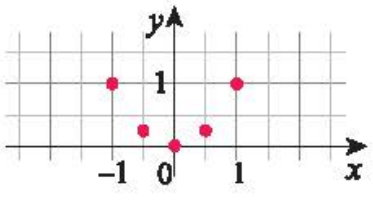
3 **tabela**

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = f(x)$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1

4 **graf**

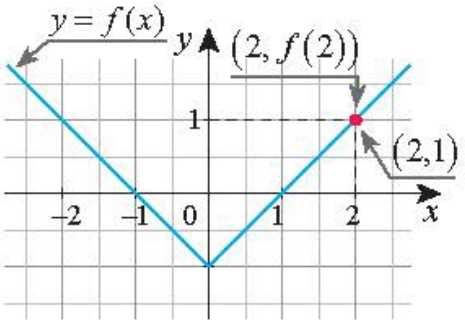


5 **wykres**

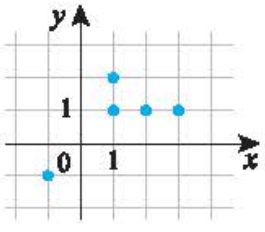


Ćwiczenie 1. Funkcja f określona jest słownie:
„Każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowano liczbę y, która jest jej trzecią potęgą".
Przedstaw funkcję f za pomocą wzoru, tabeli, grafu i wykresu, gdy $X=\{-1,0,1,2\}$.

Wykresem funkcji f nazywamy zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne x i y spełniają warunek $y=f(x)$. *Każdy punkt (x, y) należący do wykresu funkcji f ma współrzędne $(x, f(x))$, gdzie x jest argumentem funkcji f, a y wartością funkcji f dla tego argumentu x.*

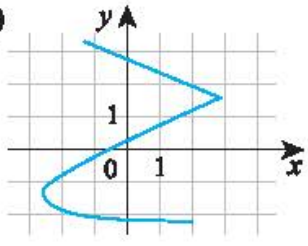


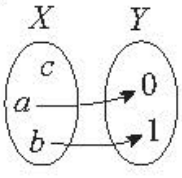
Przykład 1. Uzasadnij, że nie jest funkcją przyporządkowanie przedstawione na rysunku.

a)


b)

x	-2	-1	0	-1
y	3	4	0	2

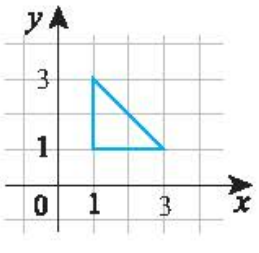
c)


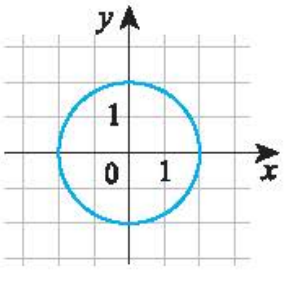
d)


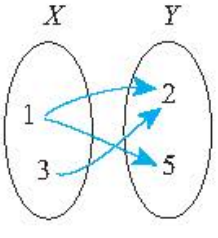
Rozwiązanie. Zauważamy, że przyporządkowanie nie jest funkcją, bo:
a) argumentowi $x=1$ przyporządkowane są dwie wartości: $y=1$ i $y=2$,
b) argumentowi $x=-1$ przyporządkowane są dwie wartości: $y=4$ i $y=2$,
c) istnieje wiele argumentów, np. $x=0$, $x=1$, $x=-2$, którym przyporządkowano więcej niż jedną wartość y,
d) argumentowi c nie przyporządkowano żadnej wartości.

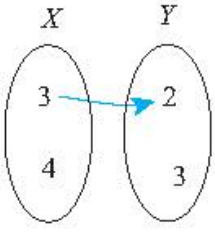
Uwaga. Aby stwierdzić, czy wykres przedstawiony na rysunku jest wykresem funkcji, wystarczy sprawdzić, że każda prosta prostopadła do osi x ma z wykresem tylko jeden punkt wspólny.

Ćwiczenie 2. Uzasadnij, że nie jest funkcją przyporządkowanie przedstawione na rysunku:

a)


b)


c)


d)


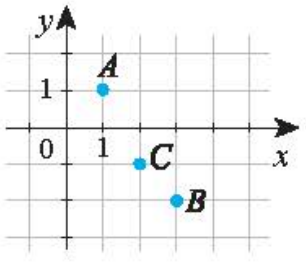
Przykład 2. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2x-1$. Określ, który z punktów A, B takich, że $A=(3,\ 5)$, $B=(-2,\ 0)$, należy do wykresu funkcji f.

Rozwiązanie. Punkt należy do wykresu funkcji f, jeżeli jego współrzędne x i y spełniają warunek $y=2x-1$. Sprawdzamy kolejno:

- $A=(3,\ 5)$. Jeśli $x=3$, to $y=f(3)=2\cdot 3-1=5$, zatem punkt A należy do wykresu funkcji f. $f(3)=5$
- $B=(-2,\ 0)$. Jeśli $x=-2$, to $y=f(-2)=2\cdot(-2)-1=-5$, czyli $f(-2)\neq 0$, zatem punkt B nie należy do wykresu funkcji f. $f(-2)\neq 0$

Odp.: Na wykresie funkcji f leży punkt A.

Ćwiczenie 3. Określ, które z punktów A, B, C przedstawionych na rysunku należą do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=3-2x$.



Jeżeli funkcja określona jest wzorem, to możemy obliczać, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje określone wartości. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 3. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=4-5x$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Oblicz, dla jakiego argumentu x funkcja f przyjmuje wartość równą:

a) -1, **b)** 0, **c)** 20.

Rozwiązanie. Zauważamy, że:

a) $f(x)=-1$, więc $4-5x=-1$, skąd $x=1$,

b) $f(x)=0$, więc $4-5x=0$, skąd $x=\frac{4}{5}$,

c) $f(x)=20$, więc $4-5x=20$, skąd $x=-3\frac{1}{5}$.

Odp.: **a)** 1, **b)** $\frac{4}{5}$, **c)** $-3\frac{1}{5}$.

Ćwiczenie 4. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=8x-15$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Oblicz, dla jakiego argumentu x funkcja f przyjmuje wartość równą:

a) 1, **b)** -7, **c)** 0.

Ciąg liczbowy

Ciąg liczbowy jest szczególnym przykładem funkcji.

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję, która liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje liczbę rzeczywistą, czyli $D = N^+$, a wartości ciągu należą do zbioru liczb rzeczywistych R.

Ciąg jest funkcją, która porządkuje, czyli ustawia w kolejności (w szereg) zbiór wartości, tzn. wskazuje, która wartość jest pierwsza, która druga itd.

Funkcje będące ciągami oznaczamy małymi literami alfabetu $a, b, c, d, \ldots$.

Zapisy $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ oznaczają funkcje a, b, c i d zmiennej n, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią.

Na przykład:

- 1, 3, 5, 7, 9, … – ciąg kolejnych liczb naturalnych nieparzystych określa wzór $a(n) = 2n-1$, gdy $n \in N^+$,
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ – ciąg ułamków określa wzór $a(n) = \frac{1}{n}$, gdy $n \in N^+$,
- –1, 2, –3, 4, … – ciąg liczb określa wzór $a(n) = (-1)^n \cdot n$, gdy $n \in N^+$.

Przyjęto następujące oznaczenia dla opisu funkcji będących ciągami:

- $a(n) = a_n$ – oznacza, że $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$, $a(n) = a_n$,
- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – oznacza wartości funkcji nazywane **wyrazami ciągu liczbowego**,
- $a_n = a(n)$ – oznacza wzór na n-ty wyraz ciągu lub wyraz ogólny ciągu, lub wzór ciągu, inaczej wzór funkcji a zmiennej n.

Ćwiczenie 5. Przerysuj tabelę do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę.

a)

n	$a_n = 3n-2$
1	$a_1 = 3 \cdot$ ■ $-2 = 1$
2	$a_2 = 3 \cdot$ ■ $-2 = 4$
3	$a_3 = 3 \cdot$ ■ $-2 = 7$

b)

n	$b_n = (-1)^n$
1	$b_1 = (-1)^{\blacksquare} = -1$
2	$b_2 = (-1)^{\blacksquare} = 1$
3	$b_3 = (-1)^{\blacksquare} = -1$

c)

n	$c_n = -2n^2 + 4$
1	$c_1 = -2(\blacksquare)^2 + 4 = 2$
2	$c_2 = -2(\blacksquare)^2 + 4 = -4$
3	$c_3 = -2(\blacksquare)^2 + 4 = -14$

Jednym ze sposobów określania ciągu jest podanie jego wzoru rekurencyjnego, tzn. podanie jego pierwszego wyrazu (lub kilku początkowych) i reguły obliczania kolejnych wyrazów ciągu w zależności od wartości wyrazu poprzedniego (wyrazów poprzednich).

Przykład 4. Wypisz pięć początkowych wyrazów nieskończonego ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie w następujący sposób:

a) $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = b_{n-1} + n, \text{ gdy } n \geq 2 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 4 \\ c_n = \dfrac{c_{n-2} + c_{n-1}}{2}, \text{ gdy } n \geq 3 \end{cases}$.

Rozwiązanie

a)

n	$b_n = b_{n-1} + n$, gdy $n \geq 2$
1	$b_1 = 1$
2	$b_2 = b_{2-1} + 2 = b_1 + 2 = 3$
3	$b_3 = b_{3-1} + 3 = b_2 + 3 = 6$
4	$b_4 = b_{4-1} + 4 = b_3 + 4 = 10$
5	$b_5 = b_{5-1} + 5 = b_4 + 5 = 15$

b)

n	$c_n = \dfrac{c_{n-2} + c_{n-1}}{2}$, gdy $n \geq 3$
1	$c_1 = 2$
2	$c_2 = 4$
3	$c_3 = \dfrac{c_1 + c_2}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$
4	$c_4 = \dfrac{c_2 + c_3}{2} = \dfrac{4+3}{2} = \dfrac{7}{2}$
5	$c_5 = \dfrac{c_3 + c_4}{2} = \dfrac{13}{4}$

Odp.: **a)** 1, 3, 6, 10, 15, **b)** 2, 4, 3, $\frac{7}{2}$, $\frac{13}{4}$.

Ćwiczenie 6. Wypisz pięć początkowych wyrazów ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie:

a) $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n - 3, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = b_n - n^2 + 3, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$,

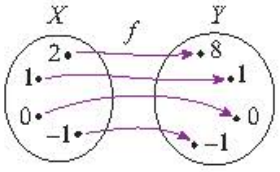
c) $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{4} \\ a_{n+1} = 4 \cdot (a_n)^2, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$,

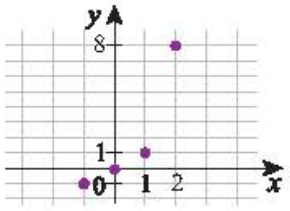
d) $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_n = \dfrac{c_{n-1}}{c_{n-2}}, \text{ gdy } n \geq 3 \end{cases}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. $f(x)=x^3$

x	–1	0	1	2
$y=f(x)$	–1	0	1	8

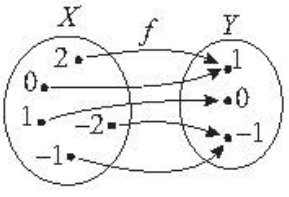




2. Argumentowi $x=1$ przyporządkowane są np. liczby 1, 2, 2,5, 3, **b)** argumentowi np. $x=0$ przyporządkowane są dwie wartości: –2 i 2, **c)** argumentowi $x=1$ przyporządkowane są dwie wartości: 2 i 5, **d)** argumentowi $x=4$ nie przyporządkowano żadnej wartości y. **3.** A i C. **4. a)** 2, **b)** 1, **c)** $\frac{15}{8}$. **5. a), b).** Kolejno: 1, 2, 3.

6. a) 7, 4, 1, –2, –5, **b)** 5, 7, 6, 0, –13, **c)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$, **d)** $1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}$.

Zadania utrwalające

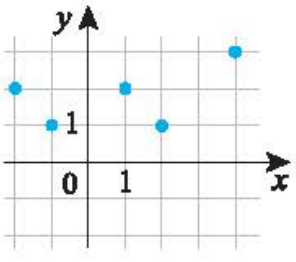


8.1. Funkcja f określona jest grafem. Sporządź:
a) tabelę funkcji f, **b)** wykres funkcji f.

8.2. Przerysuj tabelę do zeszytu i dokonaj takich zmian, by przyporządkowanie g było funkcją.

x	–2	–1	0	–1
$y=g(x)$	3	4	0	2

8.3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji g. Przedstaw funkcję g za pomocą grafu oraz tabeli.



8.4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*
Funkcją **nie jest** przyporządkowanie przedstawione tabelą:

A.

x	–1	0	2	5
$y=f(x)$	–1	0	2	5

B.

x	–1	0	2	5
$y=f(x)$	0	0	0	0

C.

x	–1	0	2	–1
$y=f(x)$	5	2	0	–5

D.

x	–1	0	2	5
$y=f(x)$	–3	–4	–5	–6

8.5. Uzasadnij, że punkt $A=(-1, 2)$ należy do wykresu funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$,

b) $f(x)=100x+102$,

c) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$,

d) $f(x)=x^2+1$.

8.6. Funkcja f określona jest tabelą.

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	4	5	10	11
$y=f(x)$	-2	1	3	7	12	15	17

a) Dla jakiego argumentu x funkcja f przyjmuje wartość 12?

b) Dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości większe od 3?

c) Dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości mniejsze lub równe 7?

8.7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość funkcji f dla argumentu $x=0$ jest równa 0, gdy funkcja f określona jest wzorem:

A. $f(x)=5-2x$, **B.** $f(x)=4x+2$, **C.** $f(x)=\frac{1}{x+2}$, **D.** $f(x)=x^2$.

8.8. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=7x-12$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Oblicz, dla jakiego argumentu x funkcja f przyjmuje wartość równą:

a) 2, **b)** -12, **c)** 0, **d)** 16, **e)** 100.

8.9. Napisz wzór przyporządkowania, które każdej liczbie rzeczywistej x różnej od 0 przyporządkowuje:

a) liczbę do niej przeciwną, **b)** liczbę, która jest jej odwrotnością,

c) jej wartość bezwzględną.

8.10. Każdej z liczb x: -8, -4, 0, $\frac{1}{2}$, 5 przyporządkuj liczbę y, która jest od niej mniejsza o 3.

a) Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą tabeli i opisz je wzorem.

b) Sporządź wykres tego przyporządkowania.

8.11. Wypisz pięć początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) zdefiniowanego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=-\frac{1}{a_n}, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$,

b) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=n\cdot a_n, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$,

c) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=(n+1)\cdot a_n, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$,

d) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$.

Dziedzina i zbiór wartości funkcji

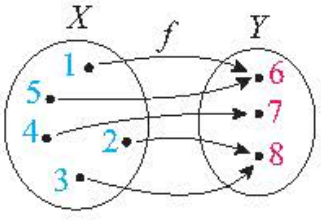
Jeżeli funkcja określona jest grafem lub tabelką, to jej dziedzinę i zbiór wartości odczytujemy bezpośrednio z grafu lub tabelki.

Przykład 5. Podaj dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f funkcji f określonej:

a) tabelką

x	-3	$-\frac{1}{2}$	0	4	7
y	0	0	1	2	2

b) grafem



Rozwiązanie

a) Odczytujemy z tabelki, że:

$D_f = \left\{-3, -\frac{1}{2}, 0, 4, 7\right\}$

$Y_f = \{0, 1, 2\}$.

b) Odczytujemy z grafu, że:

$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

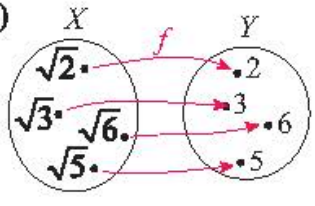
$Y_f = \{6, 7, 8\}$.

Ćwiczenie 7. Odczytaj z tabelki lub grafu dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f funkcji f.

a)

x	-3	-2	0	1
$y = f(x)$	0	0	0	0

b)

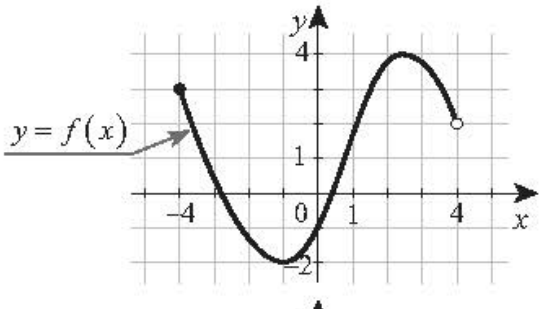


c)

x	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$
$y = f(x)$	-2	-1	1	1

Jeżeli funkcja określona jest wykresem, to dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji odczytujemy z wykresu. Pokażemy to na przykładzie.

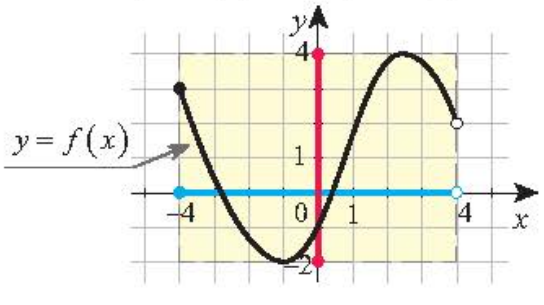
Przykład 6. Funkcja f określona jest wykresem. Odczytaj z wykresu dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f funkcji f.



Rozwiązanie

Dziedzina i zbiór wartości funkcji f wyznaczają wymiary prostokąta (kolor żółty), w którym mieści się wykres funkcji.

Dziedzinę funkcji określa szerokość prostokąta zaznaczona na osi x (kolor niebieski), a zbiór wartości funkcji określa wysokość prostokąta zaznaczona na osi y (kolor czerwony).



Na osi x odczytujemy dziedzinę D_f, a na osi y zbiór wartości Y_f.

Zatem $D_f = \langle -4; 4)$,

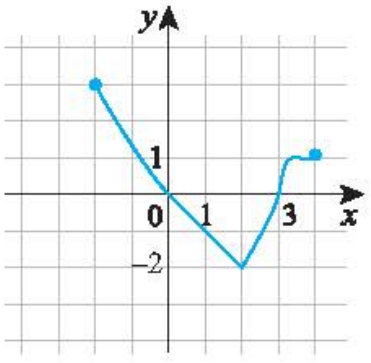
$Y_f = \langle -2; 4\rangle$.

Inne zapisy: $x \in \langle 4; 4)$ *albo* $4 \le x < 4$.

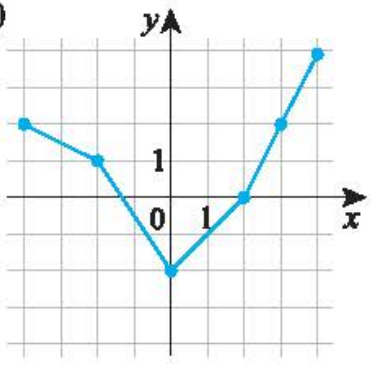
Inne zapisy: $y \in \langle 2; 4\rangle$ *albo* $2 \le y \le 4$.

Ćwiczenie 8. Podaj dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f funkcji f przedstawionej na rysunku.

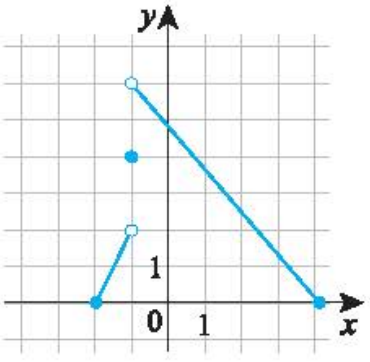
a)



b)

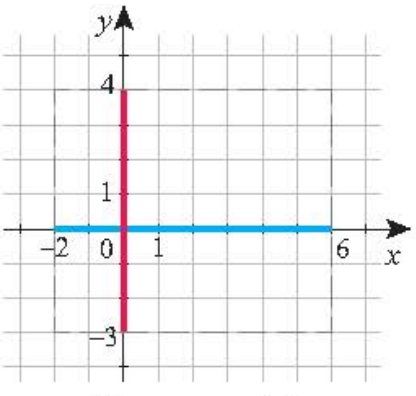


c)

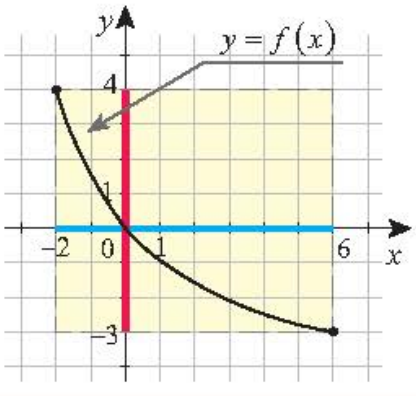


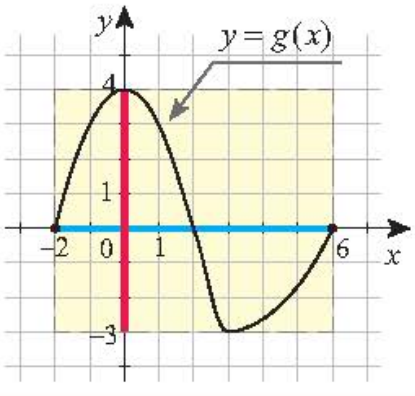
Przykład 7. Narysuj trzy przykładowe wykresy funkcji f, g i h, których dziedziną jest przedział $\langle -2; 6\rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle -3; 4\rangle$.

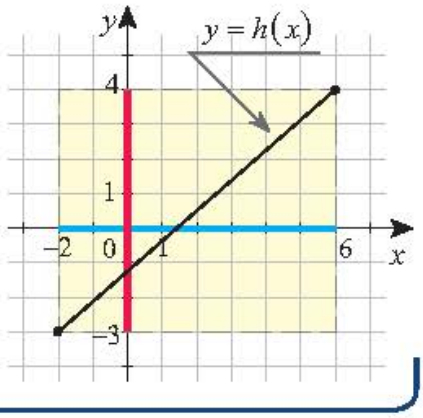
Rozwiązanie. Na osiach układu współrzędnych wyróżniamy kolorem niebieskim dziedzinę D funkcji, a kolorem czerwonym jej zbiór wartości Y.



Wykresów spełniających warunki zadania można narysować nieskończenie wiele.







Ćwiczenie 9. Narysuj trzy przykładowe wykresy funkcji f, g i h, których dziedziną D jest przedział $\langle 0; 4\rangle$, a zbiorem wartości Y przedział $\langle 1; 5\rangle$.

Jeżeli funkcja określona jest opisem słownym, to jej dziedzinę odczytujemy z tego opisu i na tej podstawie określamy zbiór wartości. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 8. Korzystając z informacji: „Okręgowi o promieniu r przyporządkowano jego obwód L", wskaż zmienną niezależną i zmienną zależną, napisz wzór przyporządkowania oraz określ jego dziedzinę i zbiór wartości.

Rozwiązanie. Zauważamy, że obwód L zależy od promienia r, więc L jest funkcją r, czyli $L(r)=2\pi r$, gdzie r – zmienna niezależna i $r>0$, L – zmienna zależna i $L>0$ oraz $\pi\approx 3{,}14$.

Odp.: $D_L=\boldsymbol{R}^+$, $Y_L=\boldsymbol{R}^+$.

Ćwiczenie 10. Skorzystaj z podanej informacji i wskaż zmienną niezależną oraz zmienną zależną, napisz wzór przyporządkowania oraz określ jego dziedzinę i zbiór wartości.

a) Sześcianowi o krawędzi a przyporządkowano jego objętość V.

b) Liczbie naturalnej dodatniej x przyporządkowano liczbę y większą od liczby x o 10%.

c) Czasowi t przyporządkowano drogę s, jaką można pokonać, idąc pieszo przez 6 godzin ze stałą prędkością równą $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Przykład 9. Wyznacz dziedzinę D_f funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=x+3$, **b)** $f(x)=\frac{1}{x+3}$, **c)** $f(x)=\sqrt{1-x}$, **d)** $f(x)=\frac{3}{\sqrt{4+x}}$.

Rozwiązanie

a) $f(x)=x+3$, więc $D_f=\boldsymbol{R}$.

Do każdej liczby rzeczywistej x można dodać 3.

b) $f(x)=\frac{1}{x+3}$, więc $x+3\neq 0$, czyli $x\neq -3$.

$D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{-3\}$, *inny zapis:* $D_f: x\neq -3$ *lub* $D_f=(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$.

Dzielenie przez 0 to działanie niewykonalne.

c) $f(x)=\sqrt{1-x}$, więc $1-x\geq 0$, czyli $\boldsymbol{x\leq 1}$.

$D_f=(-\infty;1\rangle$ *inny zapis:* $\boldsymbol{D_f: x\leq 1}$.

Pierwiastek parzystego stopnia istnieje tylko z liczb nieujemnych.

d) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{4+x}}$, więc $4+x>0$, czyli $x>-4$.

$D_f=(-4;+\infty)$ *inny zapis:* $D_f: x>-4$.

Dzielenie przez 0 jest działaniem niewykonalnym i pierwiastek parzystego stopnia istnieje tylko z liczb nieujemnych.

Uwaga

- Jeżeli nie jest podana dziedzina funkcji określonej wzorem $y=f(x)$, to wyznaczamy ją, przyjmując, że dziedziną tej funkcji jest zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wzór ma sens liczbowy (można obliczyć wartość funkcji f).
- Jeżeli wyznaczamy dziedzinę funkcji określonej wzorem, to należy pamiętać, że:
  - wyrażenie występujące w mianowniku może przyjmować tylko wartości różne od zera,
  - wyrażenie występujące pod znakiem pierwiastka kwadratowego może przyjmować tylko wartości nieujemne.

Ćwiczenie 11. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=x^2-2$, **b)** $f(x)=\frac{x}{x-1}$, **c)** $f(x)=\sqrt{x+5}$, **d)** $f(x)=\frac{8}{\sqrt{2-x}}$.

Jeżeli znamy wzór funkcji $y=f(x)$, to za argument x możemy do wzoru podstawić liczby oraz wyrażenia algebraiczne. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 10. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2x+1$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=f(-x)$, **b)** $g(x)=f(x+1)$, **c)** $g(x)=f(x^2-3x)$, **d)** $g(x)=f(f(x))$.

Rozwiązanie

Zapis $g(x)$ rozumiemy tak, że we wzorze funkcji f w miejsce x wstawiamy:

a) $-x$, więc $g(x)=f(-x)=2\cdot(-x)+1=-2x+1$,

b) $x+1$, więc $g(x)=f(x+1)=2\cdot(x+1)+1=2x+2+1=2x+3$.

c) x^2-3x, więc $g(x)=f(x^2-3x)=2\cdot(x^2-3x)+1=2x^2-6x+1$.

d) $f(x)$, więc $g(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2\cdot(2x+1)+1=4x+3$.

Odp.: **a)** $g(x)=-2x+1$, **b)** $g(x)=2x+3$, **c)** $g(x)=2x^2-6x+1$, **d)** $g(x)=4x+3$.

Ćwiczenie 12. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=4-3x$. Oblicz wartość funkcji f dla argumentu:

a) $-\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$, **c)** $1\frac{1}{3}$, **d)** $1-\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 13. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=4x^2-x$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=f(-x)$, **b)** $g(x)=f(x-1)$, **c)** $g(x)=f(2-x)$, **d)** $g(x)=f(2x)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

7. a) $D_f=\{-3,-2,0,1\}$, $Y_f=\{0\}$, b) $D_f=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{6}\}$, $Y_f=\{2,3,5,6\}$, c) $D_f=\left\{-1\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,1\frac{1}{2}\right\}$, $Y_f=\{-2,-1,1\}$. 8. a) $D_f=\langle -2;4\rangle$, $Y_f=\langle -2;3\rangle$, b) $D_f=\langle -4;4\rangle$, $Y_f=\langle -2;4\rangle$, c) $D_f=\langle -2;4\rangle$, $Y_f=\langle 0;6\rangle$.

10. a) $V(a)=a^3$, $a>0$ i $V>0$, a – zmienna niezależna, V – zmienna zależna,

b) $y=1{,}1x$, gdzie $x\in N^+$ i y jest liczbą wymierną taką, że $y\geq 1{,}1$, x – zmienna niezależna, y – zmienna zależna,

c) $s(t)=5t$, gdzie $0<t\leq 6$ i $0<s\leq 30$, t – zmienna niezależna, s – zmienna zależna.

11. a) $x\in R$, b) $x\neq 1$, c) $x\geq -5$, d) $x<2$. 12. a) 5; b) $4-2\sqrt{3}$; c) 0, d) $1+3\sqrt{2}$.

13. a) $g(x)=4x^2+x$, b) $g(x)=4x^2-9x+5$, c) $g(x)=4x^2-15x+14$, d) $g(x)=16x^2-2x$.

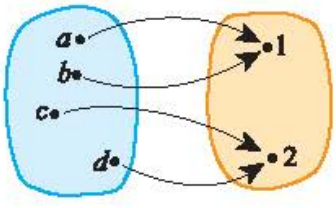
Zadania utrwalające

8.12. Na rysunkach od **1** do **4** funkcje f określono różnymi sposobami. Określ dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f każdej z nich.

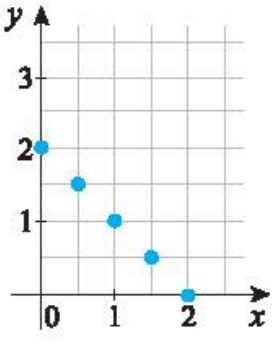
1

x	y
–2	7
–4	3
0	1
5	0

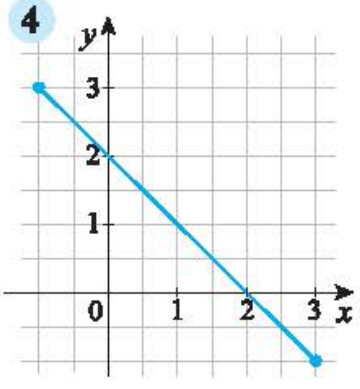
2



3

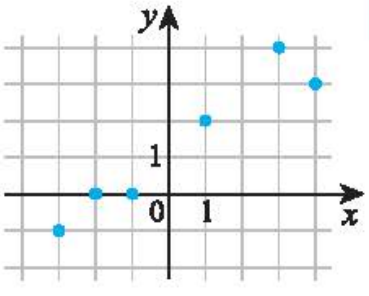


4

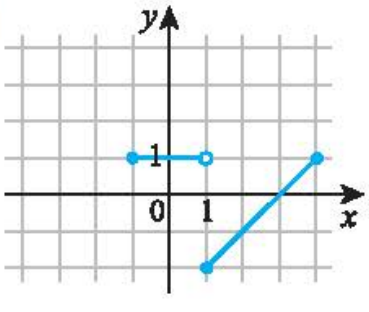


8.13. Funkcja f określona jest wykresem. Podaj dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f funkcji f.

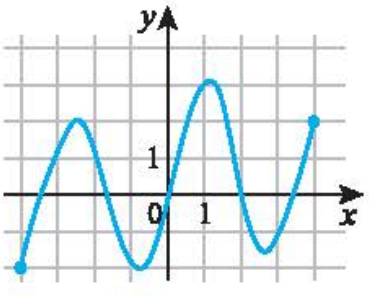
a)



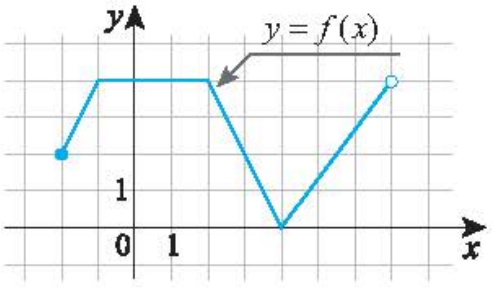
b)



c)



8.14. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział:

A. $\langle -2;7)$, B. $(0;4)$,

C. $\langle 0;4)$, D. $\langle 0;4\rangle$.

8.15. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\sqrt{1-x}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedziną funkcji f jest przedział:

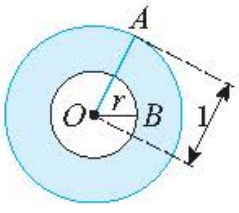
A. $(-\infty;1\rangle$, **B.** $(-\infty;1)$, **C.** $(1;+\infty)$, **D.** $\langle 1;+\infty)$.

8.16. Wykres funkcji f jest zbiorem punktów A, B, C, D, E, F, G takich, że $A=(-2,3)$, $B=(-1,5)$, $C=(0,-5)$, $D=(2,3)$, $E=(3,3)$, $F=(4,5)$, $G=(5,5)$.

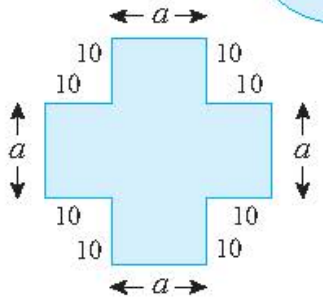
Podaj dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f funkcji f.

8.17. Skorzystaj z podanej informacji i wskaż zmienną niezależną oraz zmienną zależną, napisz wzór przyporządkowania oraz określ jego dziedzinę.

a) Promieniowi r koła, przedstawionemu na rysunku, przyporządkowano pole P, pierścienia wyróżnionego kolorem niebieskim, gdzie $|OA|=1$, $|OB|=r$.



b) Krawędzi a pudełka mającego kształt graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego siatka przedstawiona jest na rysunku, przyporządkowano jego objętość V.



8.18. Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=2x^2$, **b)** $f(x)=8-x^3$, **c)** $f(x)=\dfrac{3}{x}$,

d) $f(x)=\dfrac{5}{8+x}$, **e)** $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{4x-3}}$, **f)** $f(x)=\sqrt{3+x}$.

8.19. Przepisz przykład do zeszytu i określ zbiór wartości Y_f funkcji f, gdy:

a) $f(x)=3x^2-1$,
i $x\in\{-\sqrt{3},-\sqrt{2},0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$

b)

x	-4	-2	-1	1	2
$f(x)=\dfrac{4}{x^2}$					

8.20. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^2$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$, **b)** $g(x)=f(-x)$, **c)** $g(x)=f(x-3)$,

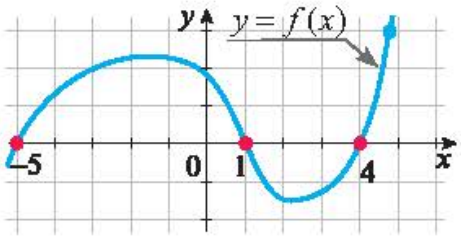
d) $g(x)=f(x)-3$, **e)** $g(x)=f(3x)$, **f)** $g(x)=f(f(x))$.

8.21. D Uzasadnij, że jeżeli $f(x)=4x$, to $f(a+b)=f(a)+f(b)$, gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Miejsce zerowe i znak funkcji w przedziale

Przykład 11. Przeanalizuj wykres funkcji f przedstawionej na rysunku i podaj wartości funkcji dla argumentów x_1, x_2, x_3, gdy:

$x_1 = -5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4.$



Rozwiązanie. Z wykresu odczytujemy:

$$y_1 = f(-5) = 0, \quad y_2 = f(1) = 0, \quad y_3 = f(4) = 0.$$

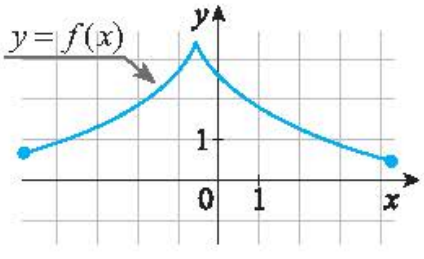
Zauważamy, że wartości funkcji f, gdy $x_1 = -5,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4$, są równe zero.

Wykres funkcji f przecina oś x w punktach o współrzędnych $(-5, 0)$, $(1, 0)$, $(4, 0)$.

- **Miejscem zerowym** funkcji nazywamy każdy argument, dla którego funkcja ma wartość równą zero.
- Liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji f, gdy $f(x_0) = 0$.
- **Miejsce zerowe** funkcji f jest równe **odciętej punktu**, w którym wykres funkcji przecina oś x.

Na przykład funkcja f określona wzorem $f(x) = -2x + 4$ ma miejsce zerowe równe 2, bo $f(2) = 0$.

Funkcja, której wykres przedstawiono na rysunku, nie ma miejsc zerowych, ponieważ jej wykres nie przecina osi x.

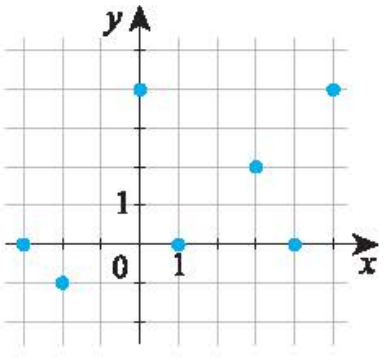


Ćwiczenie 14. Podaj miejsca zerowe funkcji przedstawionej poniżej:

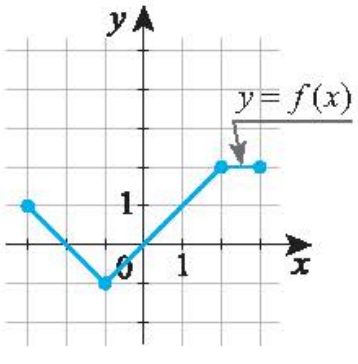
a) tabelką

x	$y = f(x)$
–3	–1
–1	0
0	3
3	1
4	0
5	2

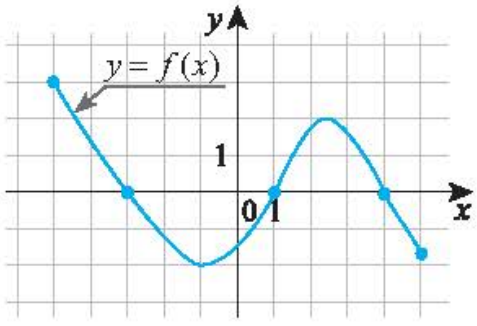
b) wykresem



c) wykresem



Przykład 12. Dla funkcji f określonej wykresem:



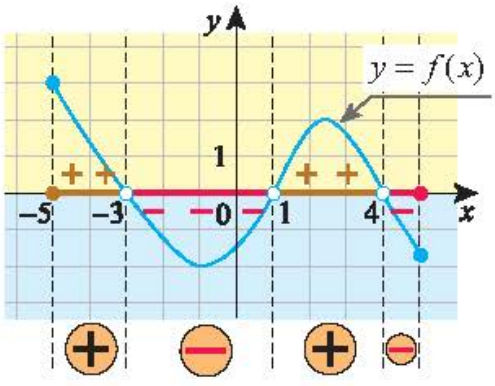
a) odczytaj i podaj miejsca zerowe,

b) podaj przedziały liczbowe, w których wartości funkcji są dodatnie,

c) podaj przedziały liczbowe, w których wartości funkcji są ujemne,

d) podaj, dla jakich argumentów x wartości funkcji f są niedodatnie, czyli $f(x) \le 0$.

Rozwiązanie



a) Miejscami zerowymi funkcji f są liczby:

-3, bo $f(-3) = 0$,

1, bo $f(1) = 0$,

4, bo $f(4) = 0$.

b) $x \in \langle -5; -3)$ lub $x \in (1; 4)$,
czyli $x \in \langle -5; -3) \cup (1; 4)$.

Wartości funkcji f są dodatnie ($f(x) > 0$) dla tych argumentów x, dla których wykres funkcji leży nad osią x (żółte tło).

c) $x \in (-3; 1)$ lub $x \in (4; 5\rangle$,
czyli $x \in (-3; 1) \cup (4; 5\rangle$.

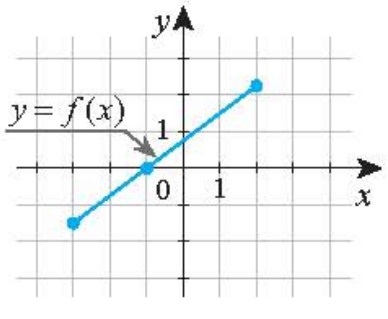
Wartości funkcji f są ujemne ($f(x) < 0$) dla tych argumentów x, dla których wykres funkcji leży pod osią x (niebieskie tło).

d) $x \in \langle -3; 1\rangle$ lub $x \in \langle 4; 5\rangle$,
czyli $x \in \langle -3; 1\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$.

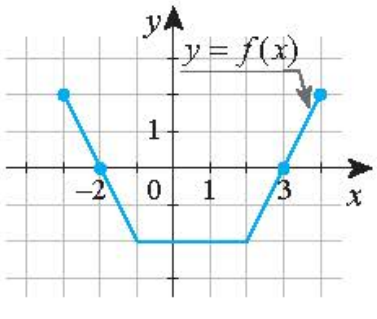
Argumenty, dla których $f(x) \le 0$, tzn. te argumenty x, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne lub wartość 0, czyli przyjmuje wartości niedodatnie.

Ćwiczenie 15. Odczytaj z wykresu te wartości argumentów x, dla których funkcja f przyjmuje wartości:

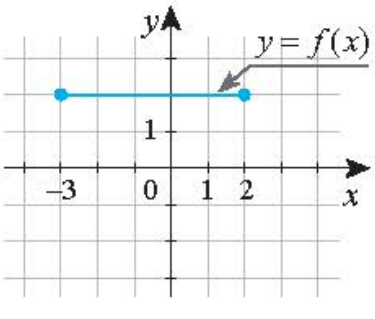
a) dodatnie



b) ujemne



c) dodatnie

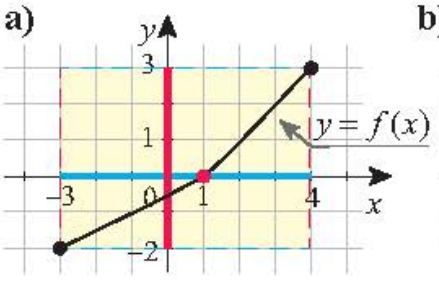


Przykład 13. Narysuj przykładowy wykres funkcji f, której dziedziną jest przedział $\langle -3; 4\rangle$, zbiorem wartości przedział $\langle -2; 3\rangle$ i która ma:

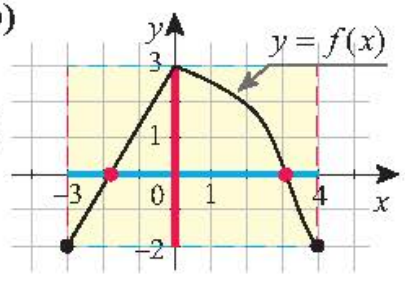
a) jedno miejsce zerowe, **b)** dwa miejsca zerowe, **c)** trzy miejsca zerowe.

Rozwiązanie. Na płaszczyźnie kartezjańskiej rysujemy prostokąt (kolor żółty), w którym umieszczamy wykres funkcji.

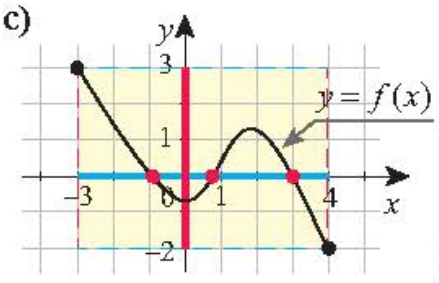
a)



b)



c)



Ćwiczenie 16. Narysuj przykładowy wykres funkcji f, która spełnia warunki:

a) $D_f = \langle -5; 5\rangle$, $Y_f = \langle -4; 4\rangle$, $f(-3) = 0$ i $f(3) = 0$,

b) $D_f = \langle -6; 1\rangle$, $Y_f = \langle -3; 1\rangle$ i $f(x) = 0$, gdy $x_1 = -4$ i $x_2 = -1$,

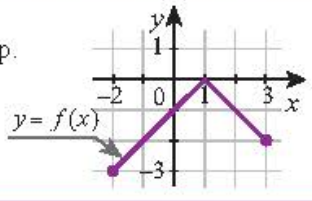
c) $D_f = \langle -2; 3\rangle$, $Y_f = \langle -3; 0\rangle$ i $f(1) = 0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

14. **a)** $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, **b)** $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, **c)** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

15. **a)** $x \in (-1; 2\rangle$, **b)** $x \in (-2; 3)$, **c)** $x \in \langle -3; 2\rangle$.

16. **c)** Np.



Zadania utrwalające

8.22. Podaj miejsca zerowe funkcji określonej za pomocą tabeli.

a)

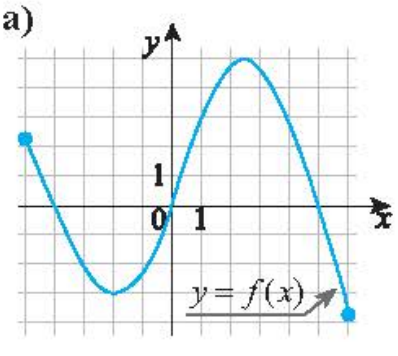
x	–3	–2	–1	0	1
$y = f(x)$	–1	0	1	2	0

b)

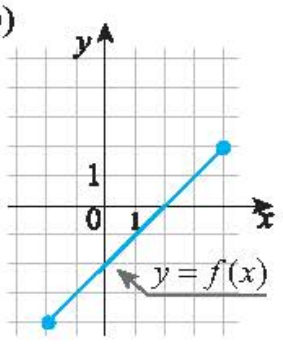
x	–1	0	2	3	4
$y = f(x)$	0	1	0	1	0

8.23. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f.

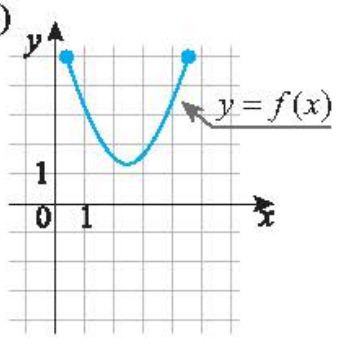
a)



b)

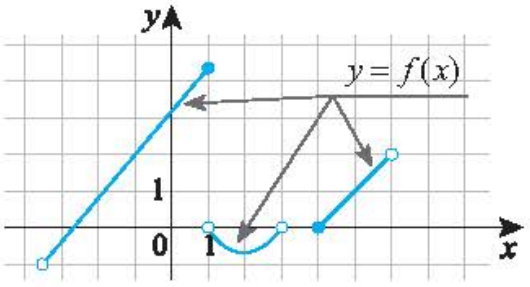


c)



8.24. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



Funkcja f miejsc zerowych ma:

A. jedno, **B.** dwa,

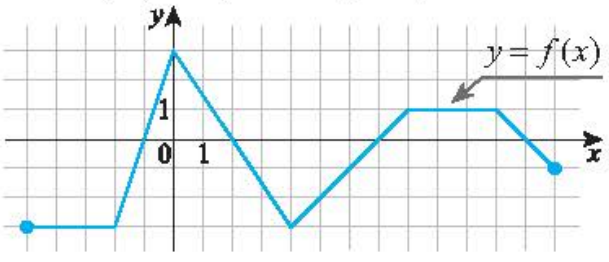
C. trzy, **D.** cztery.

8.25. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu i podaj:

a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji f,

b) miejsca zerowe tej funkcji,

c) te argumenty x, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

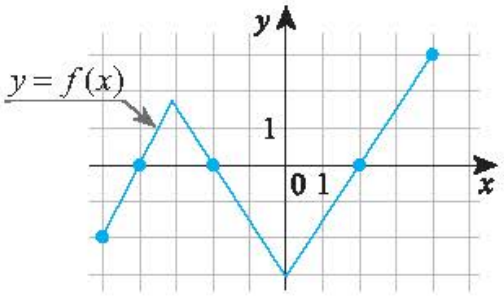


8.26. Funkcja f określona jest wykresem.

a) Odczytaj i podaj miejsca zerowe funkcji f.

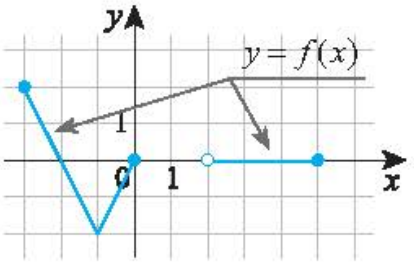
b) Podaj przedziały, dla których $f(x) > 0$.

c) Podaj przedziały, dla których $f(x) < 0$.



8.27. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

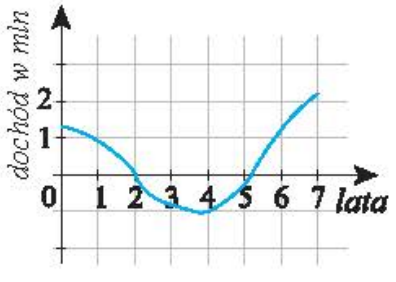


Funkcja f ma wartości dodatnie, gdy $x \in \langle -3; -2 \rangle$.	P	F
Funkcja f ma wartości niedodatnie, gdy $x \in \langle -2; 0 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$.	P	F
Funkcja f ma trzy miejsca zerowe.	P	F

8.28. Pewien przedsiębiorca przeanalizował dochód swojej firmy w ciągu siedmiu lat i przedstawił to na wykresie. Odczytaj z wykresu okresy, w których przedsiębiorstwo:

a) miało straty (dochód był ujemny),

b) osiągnęło zyski (dochód był dodatni).



8.29. Narysuj przykładowy wykres funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -4; 4 \rangle$ i która:

a) nie ma miejsc zerowych, **b)** ma trzy miejsca zerowe,

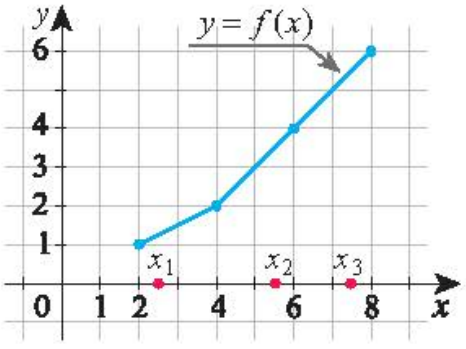
c) ma pięć miejsc zerowych, **d)** przyjmuje tylko wartości ujemne.

Monotoniczność funkcji

Określić monotoniczność funkcji, to znaczy wskazać maksymalne przedziały tych argumentów, dla których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała.

Ćwiczenie 17. Przepisz ćwiczenie do zeszytu. Przeanalizuj wykres funkcji f i wstaw w miejsce ■ znak „<” lub „>”.

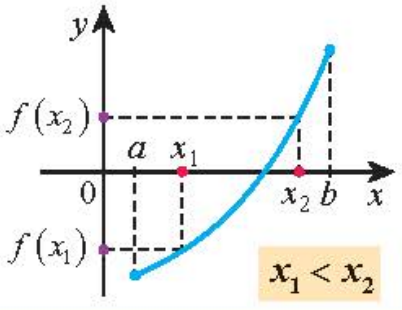
a) $2 \blacksquare 8$, $f(2) \blacksquare f(8)$,
b) $2 \blacksquare 6$, $f(2) \blacksquare f(6)$,
c) $x_1 \blacksquare x_2$, $f(x_1) \blacksquare f(x_2)$,
d) $x_2 \blacksquare x_3$, $f(x_2) \blacksquare f(x_3)$.



Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle a; b\rangle$, gdy w przedziale tym wraz ze wzrostem argumentów funkcji rosną jej wartości.

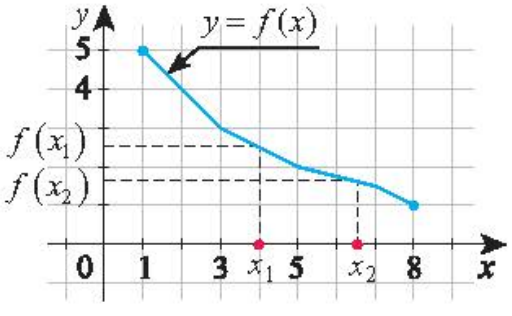
Jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

$f(x_1) < f(x_2)$



Ćwiczenie 18. Przepisz ćwiczenie do zeszytu. Przeanalizuj wykres funkcji f i wstaw w miejsce ■ znak „<” lub „>”.

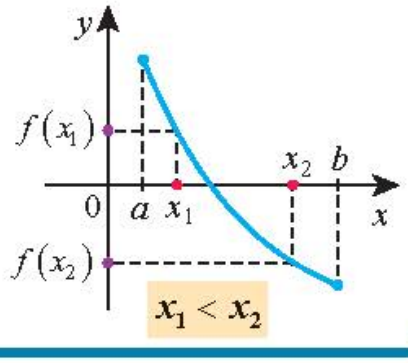
a) $1 \blacksquare 3$, $f(1) \blacksquare f(3)$,
b) $x_1 \blacksquare 7$, $f(x_1) \blacksquare f(7)$,
c) $x_1 \blacksquare x_2$, $f(x_1) \blacksquare f(x_2)$,
d) $x_2 \blacksquare 8$, $f(x_2) \blacksquare f(8)$.



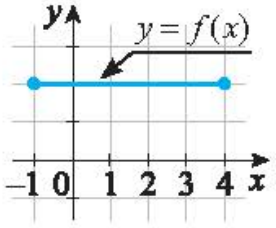
Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle a; b\rangle$, gdy w przedziale tym wraz ze wzrostem argumentów funkcji maleją jej wartości.

Jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

$f(x_1) > f(x_2)$



Ćwiczenie 19. Funkcja f określona jest wykresem. Przepisz tabelę do zeszytu oraz w miejsce ▢ wpisz wartości funkcji dla wybranych argumentów i zapisz wnioski.

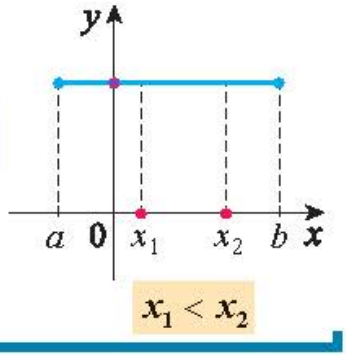


x	–1	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	▢	▢	▢	▢	▢	▢

Funkcja f jest stała w przedziale $\langle a; b\rangle$, gdy w przedziale tym wraz ze wzrostem argumentów funkcji jej wartości się nie zmieniają, czyli są stałe.

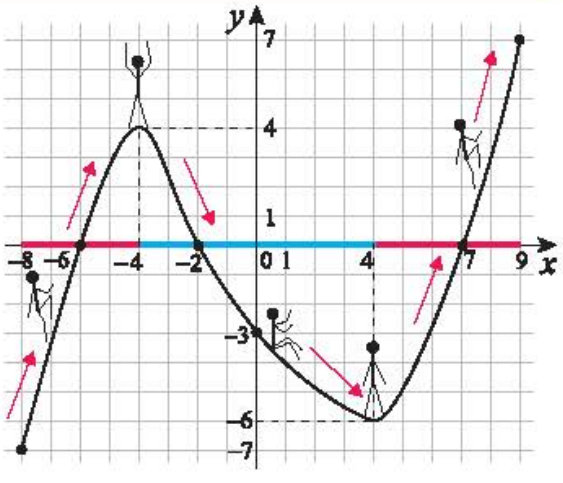
Jeśli $x_1 < x_2$, **to** $f(x_1) = f(x_2)$.

$f(x_1) = f(x_2)$



Przykład 14. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -8; 9\rangle$. Odczytaj z wykresu maksymalne przedziały, w których funkcja:

a) maleje, **b)** rośnie.



Rozwiązanie

Analizując wykres funkcji, zauważamy, że:

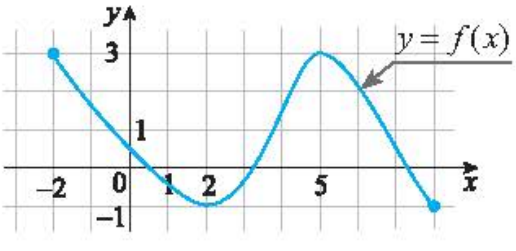
a) funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -4; 4\rangle$ (ludzik idzie w dół),

b) funkcja jest rosnąca w przedziałach $\langle -8; -4\rangle$, $\langle 4; 9\rangle$ (ludzik idzie w górę).

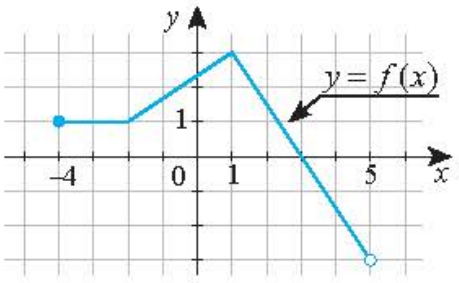
Rozpatrywana funkcja jest rosnąca również i w innych przedziałach, np. w przedziałach: $(-6; 4\rangle$, $(5; 8)$, $(4; 9)$ itp., ale przedziały $\langle -8; -4\rangle$ i $\langle 4; 9\rangle$ są maksymalnymi przedziałami, w których funkcja jest rosnąca.

Ćwiczenie 20. Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f przedstawiona na wykresie jest:

a) rosnąca, **b)** malejąca.



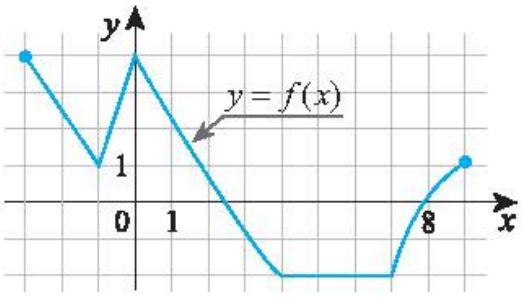
Ćwiczenie 21. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -4; 5)$. Odczytaj z wykresu maksymalny przedział, w którym funkcja jest:
a) stała, **b)** rosnąca, **c)** malejąca.



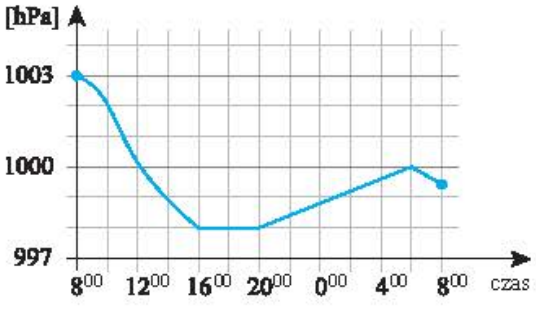
Odpowiedzi do ćwiczeń
19. Wniosek: Funkcja jest stała. 20. a) $\langle 2; 5\rangle$, b) $\langle -2; 2\rangle$, $\langle 5; 8\rangle$ 21. a) $\langle -4; -2\rangle$, b) $\langle -2; 1\rangle$, c) $\langle 1; 5)$.

Zadania utrwalające

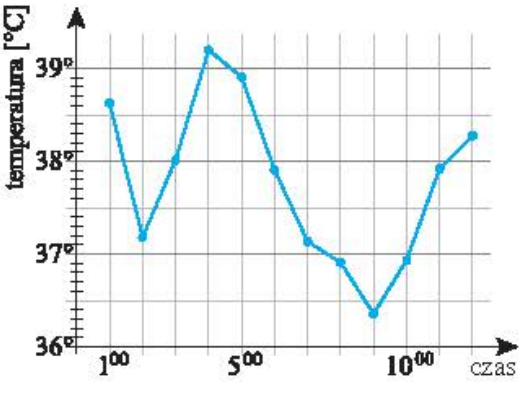
8.30. Funkcja f określona jest wykresem. Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja jest:
a) rosnąca, **b)** malejąca, **c)** stała.



8.31. Na rysunku przedstawiono zmiany ciśnienia atmosferycznego w ciągu jednej doby. Odczytaj z wykresu, w jakich przedziałach czasu ciśnienie to:
a) rosło, **b)** malało, **c)** było stałe.



8.32. Pacjent został przyjęty do szpitala o godzinie 1^{00}*. Temperaturę mierzono mu co godzinę i zapisywano w karcie choroby.
Odczytaj z wykresu:
a) w jakich przedziałach czasu temperatura ciała chorego rosła, a w jakich malała,
b) o której godzinie mierzona temperatura była równa 37°.

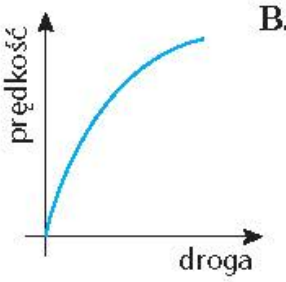


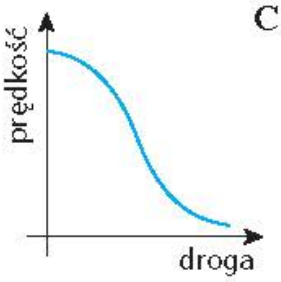
* Zapis godziny 1^{00} jest równoważny zapisowi 1:00.

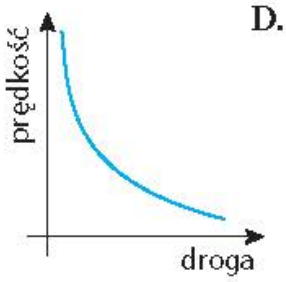
8.33. Dzieci zjeżdżają z górki na sankach.

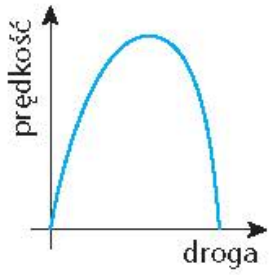
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zmianę prędkości jazdy dzieci zjeżdżających z górki na sankach opisuje wykres:

A.


B.


C.


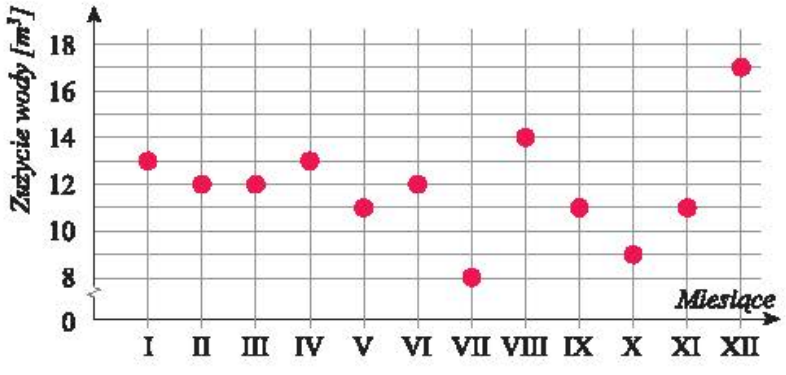
D.


8.34. Narysuj przykładowy wykres funkcji, która w przedziale $(-6;-2)$ jest malejąca, w przedziale $\langle -2;3\rangle$ jest stała, a w przedziale $(3;7)$ jest rosnąca oraz:

a) nie ma miejsc zerowych, **b)** ma miejsca zerowe.

Wartość najmniejsza i największa funkcji w przedziale domkniętym

Ćwiczenie 22. Skrupulatny pan Kowalski zaznaczał liczbę metrów sześciennych wody zużytej przez jego rodzinę w kolejnych miesiącach jednego roku.



a) W którym miesiącu roku rodzina Kowalskich zużyła najwięcej wody, a w którym najmniej?

b) Podaj najmniejsze (największe) miesięczne zużycie wody przez rodzinę Kowalskich.

Symbolicznie oznaczamy:

- y_{MIN} – najmniejsza wartość funkcji,
- y_{MAX} – największa wartość funkcji.

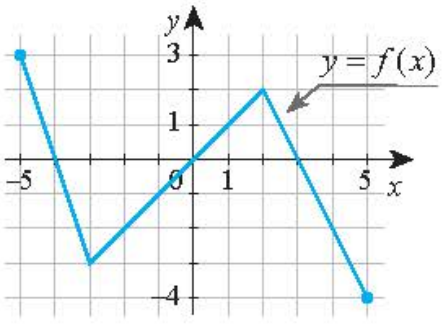
Aby z wykresu funkcji f odczytać najmniejszą i największą jej wartość w zadanym przedziale domkniętym, podajemy:

1° zbiór wartości funkcji w tym przedziale – są nimi te wartości y, które spełniają warunek $y_{MIN} \le y \le y_{MAX}$,

2° odpowiedź.

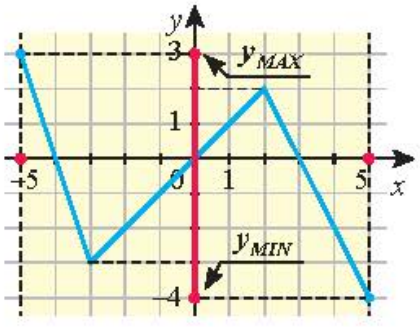
Przykład 15. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -5; 5\rangle$. Odczytaj z wykresu najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale:

a) $\langle -5; 5\rangle$, **b)** $\langle -3; 1\rangle$, **c)** $\langle 1; 4\rangle$.

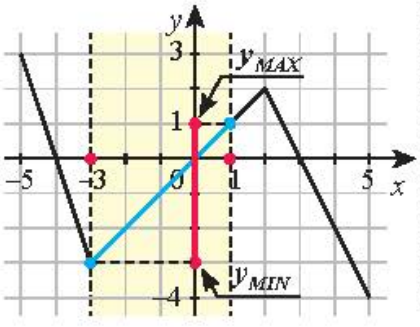


Rozwiązanie

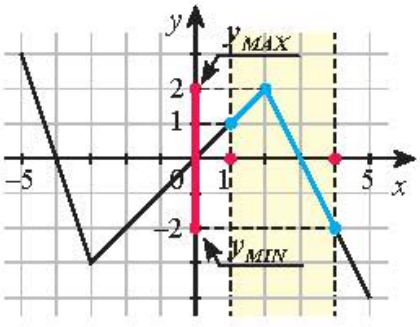
a) $x \in \langle -5; 5\rangle$



b) $x \in \langle -3; 1\rangle$



c) $x \in \langle 1; 4\rangle$



Z wykresu odczytujemy, że funkcji f ma:

a) w przedziale $\langle -5; 5\rangle$ wartość największą, gdy $x = -5$, oraz wartość najmniejszą, gdy $x = 5$, więc najmniejsza wartość y_{MIN} funkcji f jest równa -4, a największa wartość y_{MAX} jest równa 3.

b) w przedziale $\langle -3; 1\rangle$ wartość największą, gdy $x = 1$, oraz wartość najmniejszą, gdy $x = -3$, więc najmniejsza wartość y_{MIN} funkcji f jest równa -3, a największa wartość y_{MAX} jest równa 1.

c) w przedziale $\langle 1; 4\rangle$ wartość największą, gdy $x = 2$, oraz wartość najmniejszą, gdy $x = 4$, więc najmniejsza wartość y_{MIN} funkcji f jest równa -2, a największa wartość y_{MAX} jest równa 2.

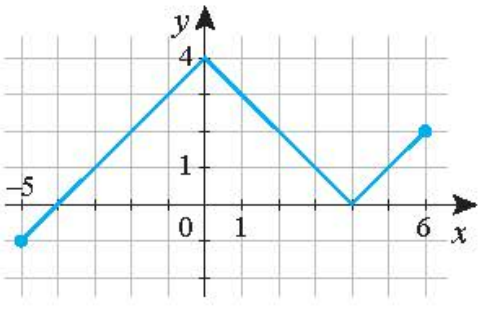
Odp.: **a)** $y_{MIN} = f(5) = -4$, $y_{MAX} = f(-5) = 3$,

b) $y_{MIN} = f(-3) = -3$, $y_{MAX} = f(1) = 1$,

c) $y_{MIN} = f(4) = -2$, $y_{MAX} = f(2) = 2$.

Ćwiczenie 23. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -5; 6\rangle$. Odczytaj z wykresu najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale:

a) $\langle -5; 6\rangle$, **b)** $\langle -2; 3\rangle$, **c)** $\langle -3; -1\rangle$.



Odpowiedzi do ćwiczeń

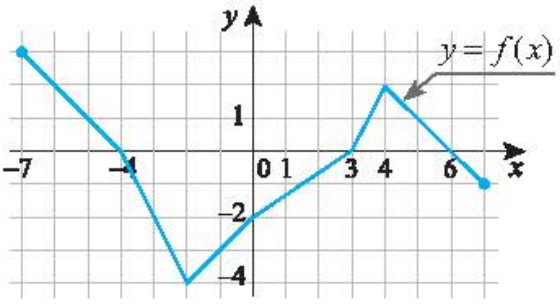
22. **a)** Najwięcej w grudniu, najmniej w lipcu. **b)** Najmniejsze zużycie wody – 8 m^3, a największe zużycie wody – 17 m^3.

23. **a)** $y_{MIN} = -1$, $y_{MAX} = 4$, **b)** $y_{MIN} = 1$, $y_{MAX} = 4$, **c)** $y_{MIN} = 1$, $y_{MAX} = 3$.

Zadania utrwalające

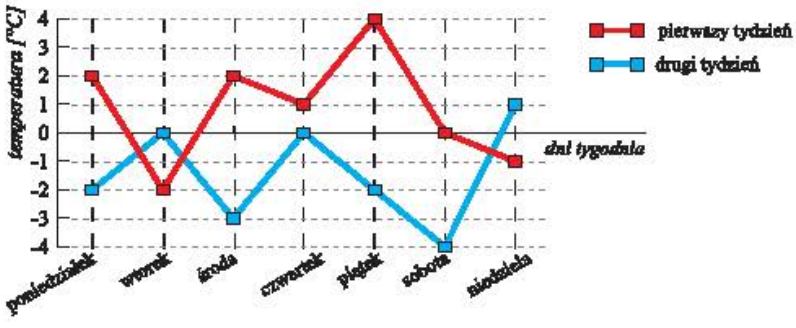
8.35. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale:

a) $\langle -7; 6 \rangle$, **b)** $\langle 0; 6 \rangle$, **c)** $\langle -4; 4 \rangle$.



8.36. Każdego dnia dwutygodniowych ferii zimowych Małgosia o godzinie 12^{00} odczytywała temperaturę powietrza. Wynik zaznaczała na wykresie.

Skorzystaj z wykresu Małgosi i odpowiedz na pytania:



a) W którym dniu ferii temperatura była najniższa, a w którym najwyższa?

b) Przez ile dni ferii temperatura była ujemna?

c) Ile było dni, w których Małgosia odczytała temperaturę 0°C?

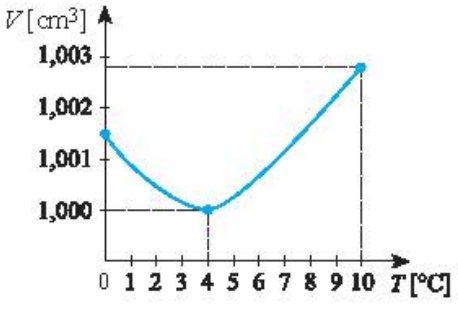
d) Jaka była różnica między najwyższą a najniższą temperaturą w czasie ferii?

8.37. Na wykresie przedstawiono anomalny charakter rozszerzalności cieplnej jednego grama wody. Odczytaj z wykresu:

a) dla jakich temperatur T objętość wody maleje,

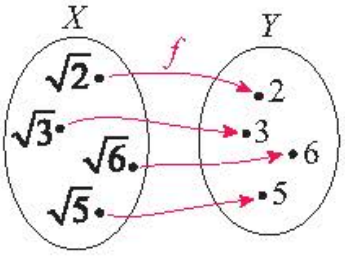
b) dla jakich temperatur T objętość wody rośnie,

c) dla jakiej temperatury T objętość wody jest najmniejsza.



8.38. Funkcja f przedstawiona jest grafem.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.



Najmniejszą wartością funkcji f jest liczba:

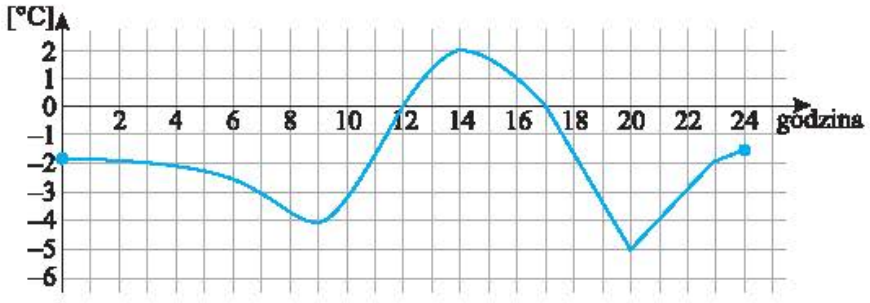
A. $\sqrt{2}$, B. 2.

Największą wartością funkcji f jest liczba:

C. 6, D. $\sqrt{6}$.

8.39. Termograf zarejestrował zmiany temperatury powietrza w ciągu jednej doby.

Odczytaj z wykresu:



a) o której godzinie temperatura była najwyższa i podaj jej wartość,

b) o której godzinie temperatura była najniższa i podaj jej wartość,

c) maksymalne przedziały czasu, w których temperatura rosła,

d) maksymalne przedziały czasu, w których temperatura malała,

e) maksymalne przedziały czasu, w których temperatura była dodatnia,

f) o której godzinie temperatura powietrza była równa 0°C.

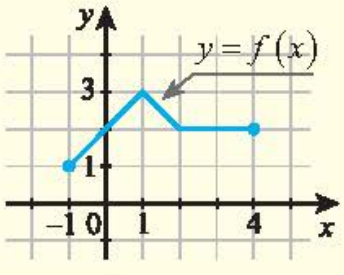
Zestaw powtórkowy

1. Wykres funkcji f tworzą punkty A, B, C, D takie, że $A=(-2, 2)$, $B=(2, 0)$, $C=(5, 3)$ i $D=(7, -2)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Do dziedziny funkcji f należy liczba 0.	P	F
Do zbioru wartości funkcji f należy liczba 0.	P	F
Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 0.	P	F
Najmniejszą wartość funkcja f przyjmuje dla największego argumentu.	P	F

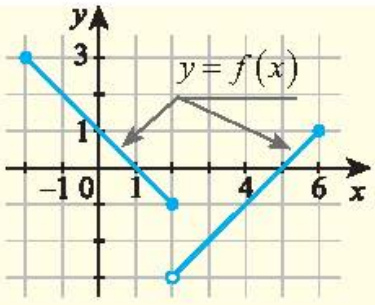
2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 1; 3\rangle$.	P	F
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1; 4\rangle$.	P	F
W przedziale $\langle -1; 1\rangle$ funkcja f jest rosnąca.	P	F
W przedziale $\langle 0; 2\rangle$ najmniejsza wartość funkcji jest równa 2.	P	F

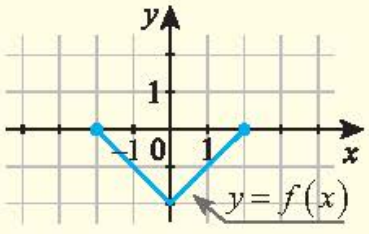
3. **D** Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Czy prawdą jest, że $f(2)=-3$?



Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$f(2)=-1$.
N	**Nie,**		**B.**	Liczba 2 nie należy do dziedziny funkcji.

4. **D** Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Czy prawdą jest, że funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne?



Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	Funkcja f nie ma miejsc zerowych.
N	**Nie,**		**B.**	Funkcja f ma miejsca zerowe.

5. Z hodowli roślin zbożowych pobierano w ciągu dnia po kilka roślin i mierzono stężenie glukozy w liściach. Wyniki pomiarów podano w tabeli.

Godzina	Stężenie glukozy w % suchej masy liści
4:00	0,45
8:00	0,60
12:00	1,75
16:00	2,0
20:00	1,4
24:00	0,5
4:00	0,45

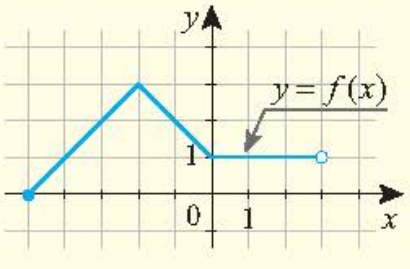
a) Podaj największą wartość stężenia glukozy.

b) Podaj przedział czasowy, w którym następował wzrost stężenia glukozy, a następnie taki przedział czasowy, w którym stężenie glukozy malało.

c) Podaj, o której godzinie stężenie glukozy osiągnęło 0,45% suchej masy liści.

d) Podaj, jakie było stężenie glukozy o północy.

6. **D** Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Czy $f(x)=2$, gdy $x=-3$ lub $x=-1$?



Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$f(-3)\neq f(-1)$.
N	**Nie,**		**B.**	$f(-3)=f(-1)=2$.

9. Funkcja liniowa i jej własności

Wzór i wykres funkcji liniowej

Funkcję f zmiennej x określoną wzorem $f(x)=ax+b$, gdy $x\in R$ oraz a i b są liczbami rzeczywistymi, nazywamy funkcją liniową.

a, b – współczynniki liczbowe funkcji liniowej

Wykresem funkcji liniowej $f(x)=ax+b$ jest prosta o równaniu $y=ax+b$.

Jeżeli:

- $f(x)=-3x+4$, to $a=-3$ i $b=4$,
- $y=12$, to $a=0$ i $b=12$,
- $f(x)=-x$, to $a=-1$ i $b=0$,
- $y=0$, to $a=0$ i $b=0$.

Ćwiczenie 1. Spośród funkcji określonych wzorami:

$f(x)=5x+3$, $f(x)=\sqrt{2}x-1$, $f(x)=7x^2$, $f(x)=-x+1$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=2$

wybierz te, które są funkcjami liniowymi i podaj wartości ich współczynników liczbowych.

Przykład 1. Sporządź wykres funkcji liniowej f i odczytaj z wykresu jej zbiór wartości, gdy: **a)** $f(x)=2x+1$, **b)** $f(x)=-3x$, **c)** $f(x)=-2$.

Rozwiązanie. Aby narysować wykres funkcji liniowej (prostą), wystarczy znać współrzędne dwóch różnych punktów, przez które ona przechodzi.

a)

x	0	1
$y=2x+1$	1	3

b)

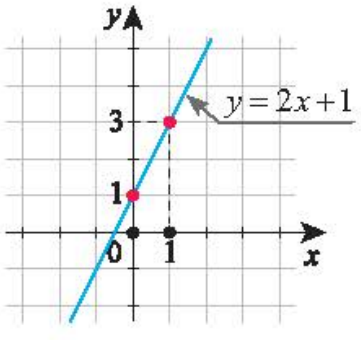
x	0	1
$y=-3x$	0	–3

c)

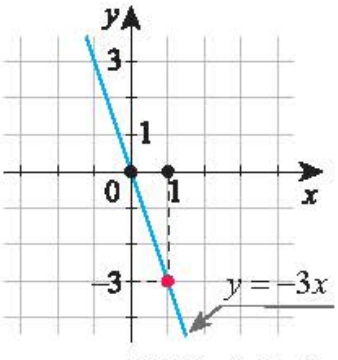
x	0	1
$y=-2$	–2	–2

Z tabeli odczytujemy, że do wykresu funkcji f należą punkty:

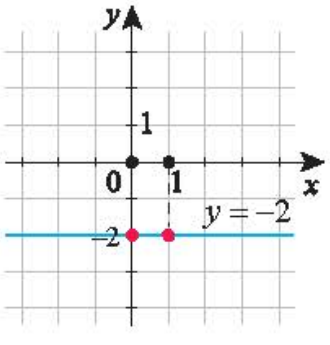
(0, 1) i (1, 3)



(0, 0) i (1, –3)



(0, –2) i (1, –2)



Zbiorem wartości funkcji f jest:

zbiór R, czyli $Y_f=(-\infty;+\infty)$

zbiór R, czyli $Y_f=(-\infty;+\infty)$

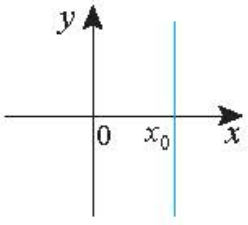
liczba –2, czyli $Y_f=\{-2\}$.

Uwaga

- **Dziedziną** każdej funkcji liniowej jest zbiór liczb rzeczywistych R, czyli $D_f = R$.
- **Zbiorem wartości** funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = ax + b$ jest:
  - zbiór liczb rzeczywistych R, gdy $a \neq 0$, czyli $Y_f = R$,
  - zbiór jednoelementowy, gdy $a = 0$, więc $Y_f = \{b\}$.

Ćwiczenie 2. Napisz wzór funkcji liniowej postaci $f(x) = ax + b$ i sporządź jej wykres, gdy: **a)** $a = -3$ i $b = 2$, **b)** $a = -\frac{1}{2}$ i $b = 0$, **c)** $a = 0$ i $b = 3$.

Ćwiczenie 3. Uzasadnij, że prosta prostopadła do osi x nie jest wykresem żadnej funkcji.



Ćwiczenie 4. Liczbie rzeczywistej x przyporządkowano liczbę y, która jest połową liczby x powiększoną o 2.

a) Napisz wzór funkcji liniowej określającej to przyporządkowanie.

b) Sporządź wykres tej funkcji.

Przykład 2. Sprawdź, czy do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = x + 2$ należy punkt o współrzędnych:

a) $(0, 0)$, **b)** $(-1, 1)$, **c)** $(100, 102)$.

Rozwiązanie. Punkt (x_0, y_0) należy do wykresu funkcji f, gdy $f(x_0) = y_0$.

a) $f(0) = 0 + 2 = 2$ i $f(0) \neq 0$, $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ i $f(x_0) \neq y_0$

b) $f(-1) = -1 + 2 = 1$ i $f(-1) = 1$, $x_0 = -1,\ y_0 = 1$ i $f(x_0) = y_0$

c) $f(100) = 100 + 2 = 102$ i $f(100) = 102$. $x_0 = 100,\ y_0 = 102$ i $f(x_0) = y_0$

Odp.: Do wykresu funkcji f należą punkty o współrzędnych $(-1, 1)$ i $(100, 102)$.

Ćwiczenie 5. Sprawdź, które spośród punktów: $(-8, 45)$, $(-1, 8)$, $(307, 619)$, $(-3215, 6435)$ należą do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = -2x + 5$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. $f(x) = 5x + 3$, $f(x) = \sqrt{2}x - 1$, $f(x) = -x + 1$, $f(x) = 2$. 2. **a)** $f(x) = -3x + 2$, **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x$, **c)** $f(x) = 3$, prosta przechodzi przez punkty, np.: **a)** $(0, 2)$, $(1, -1)$, **b)** $(0, 0)$, $(-2, 1)$, **c)** $(0, 3)$, $(1, 3)$.
3. *Wskazówka.* Zauważ, że na prostej leżą punkty o tej samej odciętej i różnych rzędnych. Takie przyporządkowanie nie jest funkcją. 4. **a)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$. 5. Do wykresu funkcji f należy punkt $(-3215, 6435)$.

Zadania utrwalające

9.1. Podaj wartości współczynników liczbowych a i b funkcji liniowej określonej wzorem postaci $f(x)=ax+b$, gdy:

a) $f(x)=\sqrt{2}x-1$, **b)** $f(x)=4x$, **c)** $f(x)=3\frac{1}{2}$, **d)** $f(x)=-2x+3$.

9.2. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x)=ax+b$, gdy:

a) $a=2,\ b=5$, **b)** $a=-1,\ b=7$, **c)** $a=0,\ b=-4$, **d)** $a=\frac{1}{2},\ b=0$.

9.3. Sporządź wykres funkcji liniowej f określonej wzorem:

a) $f(x)=-x+3$, **b)** $f(x)=3x-1$, **c)** $f(x)=4x+2$,

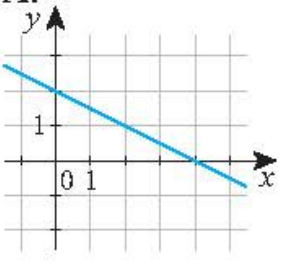
d) $f(x)=\frac{1}{2}x+2$, **e)** $f(x)=-x$, **f)** $f(x)=1$.

9.4. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$.

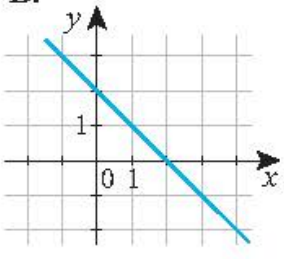
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku:

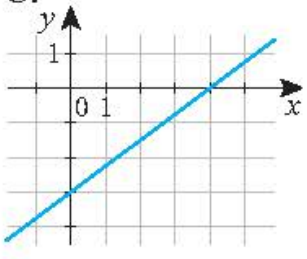
A.



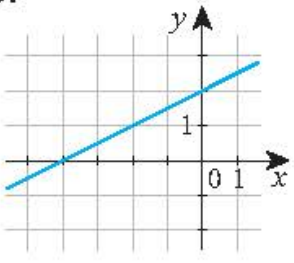
B.



C.



D.



9.5. Sprawdź, czy do wykresu funkcji liniowej f należą punkty A i B, gdy:

a) $f(x)=-\frac{1}{4}x+20,\ A=(80,0),\ B=(0,-80)$,

b) $f(x)=\sqrt{2}x+1,\ A=\left(-2\sqrt{2},-3\right),\ B=\left(\sqrt{18},7\right)$,

c) $f(x)=\frac{5}{12}x-\frac{1}{4},\ A=\left(2\frac{1}{2},\frac{19}{24}\right),\ B=\left(2\frac{1}{2},-\frac{5}{24}\right)$.

9.6. Wśród pięciu wartości funkcji liniowej, podanych w tabeli, dwie są błędne. Wskaż je.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	–2	5	2	7

b)

x	–2	–1	0	1	2
y	–3	–2	–1	3	4

c)

x	–2	–1	0	1	2
y	6	4	5	0	1

9.7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=-\frac{1}{2}x+50$ należy punkt:

A. $(-100, 0)$, **B.** $(0, 100)$, **C.** $(100, 0)$, **D.** $(50, 200)$.

9.8. Do wykresu funkcji liniowej f należy początek układu współrzędnych oraz punkt M. Narysuj wykres funkcji f, gdy:

a) $M=(1,-1)$, **b)** $M=(-3,2)$, **c)** $M=(k,k)$.

9.9. D Uzasadnij, że do wykresu funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x)=x-m$, gdzie $m\neq 0$, należy punkt o współrzędnych $(m, 0)$ i $(2m, m)$.

9.10. Sporządź wykres funkcji $g(x)=f(f(x))$, gdy:

a) $f(x)=x-2$, **b)** $f(x)=-2x$, **c)** $f(x)=2$.

Interpretacja współczynników liczbowych we wzorze funkcji liniowej

Jeżeli funkcja liniowa ma wzór $f(x)=ax+b$, to dla argumentu $x=0$ $f(0)=a\cdot 0+b=b$, czyli punkt o współrzędnych $(0, b)$ leży na prostej, która jest wykresem tej funkcji.

Przykład 3. W jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji f, gdy:

1 $f(x)=x+2$, **2** $f(x)=-x+2$, **3** $f(x)=-2x+2$, **4** $f(x)=2$.

Napisz równania prostych, które są wykresami tych funkcji.

Rozwiązanie. Sporządzamy tabele wartości funkcji:

1

x	0	1
$y=x+2$	2	3

2

x	0	1
$y=-x+2$	2	1

3

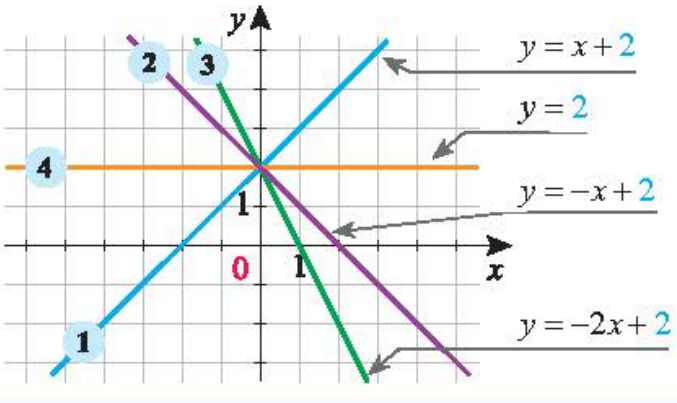
x	0	1
$y=-2x+2$	2	0

4

x	0	1
$y=2$	2	2

Zauważamy, że

- wykres każdej funkcji przechodzi przez punkt $(0, 2)$,
- wzory **1**, **2**, **3**, **4** różnią się wartością współczynnika a przy argumencie x.

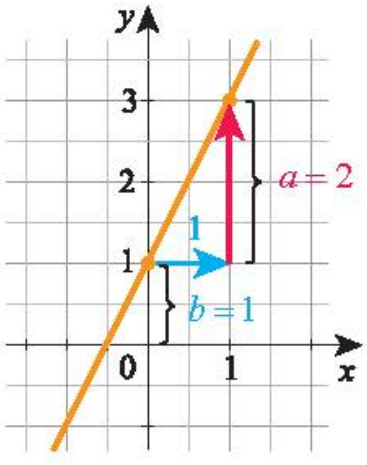


Uwaga

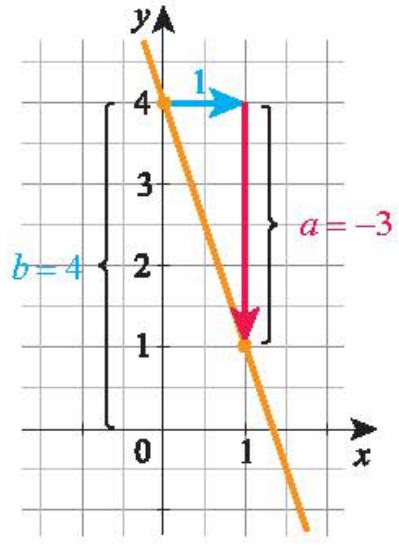
- Wykres funkcji liniowej, określonej wzorem $f(x)=ax+b$, przechodzi przez punkt $(0, b)$.
- Współczynnik b to **wartość funkcji dla argumentu zero**.
  W praktyce może to odpowiadać kapitałowi początkowemu, temperaturze na poziomie 0 m n.p.m., zapłacie za pierwszy kilometr jazdy taksówką itp.
- **Współczynnik a** we wzorze funkcji liniowej $f(x)=ax+b$ określa **tempo zmiany** wartości tej funkcji. Dokładniej, jest to **wielkość zmiany wartości funkcji odpowiadająca zwiększeniu argumentu x o jedną jednostkę**.

Na przykład, gdy:

$y=2x+1$, to $a=2$ i $b=1$, co oznacza, że jeżeli argument x zwiększymy o 1 (np. z 0 na 1), to wartość funkcji wzrośnie o 2 (z 1 na 3). Zatem funkcja jest rosnąca.



$y=-3x+4$, to $a=-3$ i $b=4$, co oznacza, że jeżeli argument x zwiększymy o 1 (np. z 0 na 1), to wartość funkcji zmaleje o 3 (z 4 na 1). Zatem funkcja jest malejąca.



Uwaga

- Jeżeli w funkcji liniowej określonej wzorem $f(x)=ax+b$ zwiększamy wartość argumentu x o jeden, to wartość funkcji zmienia się o wartość współczynnika a.
- Wykres każdej funkcji liniowej określonej wzorem $f(x)=ax+b$ przechodzi przez punkty $(0, b)$ i $(1, a+b)$.

Ćwiczenie 6. Dla funkcji $y=f(x)$ określonej wzorem postaci $f(x)=ax+b$ podaj współrzędne punktów $(0, b)$ i $(1, a+b)$:

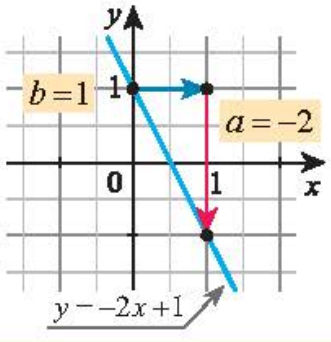
a) $f(x)=4x-2$, **b)** $f(x)=-2x-3$, **c)** $f(x)=-x+5$, **d)** $f(x)=5x+2$.

Przykład 4. Skorzystaj z wartości współczynników liczbowych i sporządź wykres funkcji liniowej f określonej wzorem: **a)** $f(x)=-2x+1$, **b)** $f(x)=2x$, **c)** $f(x)=2$.

Rozwiązanie. Wzory funkcji podane są w postaci $f(x)=ax+b$.

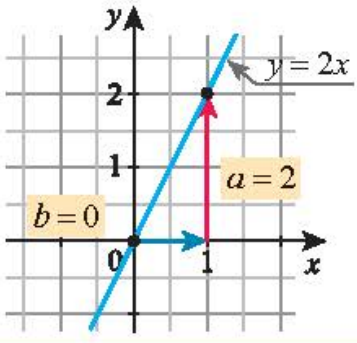
a) $f(x)=-2x+1$, więc $a=-2$ i $b=1$.

x	0	1
$y=-2x+1$	$\underbrace{1}_{b}$	$\underbrace{-1}_{a+b}$



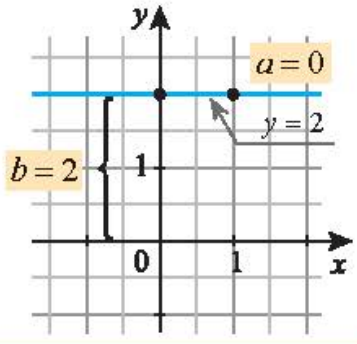
b) $f(x)=2x$, więc $a=2$ i $b=0$.

x	0	1
$y=2x$	$\underbrace{0}_{b}$	$\underbrace{2}_{a+b}$



c) $f(x)=2$, więc $a=0$ i $b=2$.

x	0	1
$y=2$	$\underbrace{2}_{b}$	$\underbrace{2}_{a+b}$



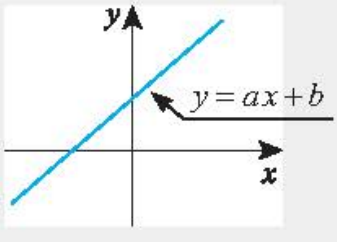
Ćwiczenie 7. Skorzystaj z interpretacji współczynników liczbowych i sporządź wykres funkcji liniowej f określonej wzorem:

a) $f(x)=2x+3$, **b)** $f(x)=-3x+2$, **c)** $f(x)=-1$, **d)** $f(x)=\frac{1}{2}x-4$.

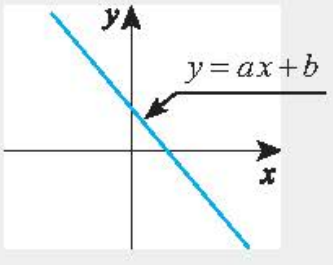
Współczynnik a we wzorze $f(x)=ax+b$ funkcji liniowej decyduje o tym, czy funkcja ta jest rosnąca, malejąca czy stała.

Uwaga. Funkcja liniowa określona wzorem $f(x)=ax+b$ jest:

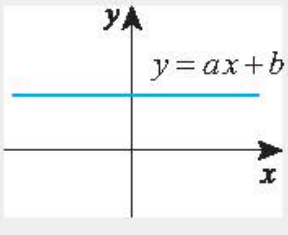
a) rosnąca, gdy $a>0$,



b) malejąca, gdy $a<0$,



c) stała, gdy $a=0$.



Ćwiczenie 8. Określ, czy funkcja określona wzorem:

a) $f(x)=-x$, **b)** $f(x)=2-3x$, **c)** $f(x)=8x+3$, **d)** $f(x)=170$

jest rosnąca, malejąca czy stała.

Przykład 5. Dla jakich liczb rzeczywistych m funkcja liniowa określona wzorem $f(x)=(m+1)x-2$ jest: **a)** rosnąca, **b)** malejąca, **c)** stała?

Rozwiązanie. $f(x)=(m+1)x-2$, więc $a=m+1$.

a) $m+1>0$, skąd $m>-1$, *Funkcja liniowa jest rosnąca, gdy $a>0$.*

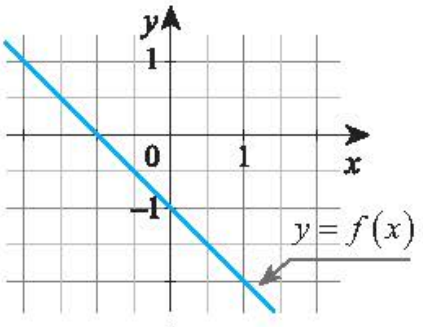
b) $m+1<0$, skąd $m<-1$, *Funkcja liniowa jest malejąca, gdy $a<0$.*

c) $m+1=0$, skąd $m=-1$. *Funkcja liniowa jest stała, gdy $a=0$.*

Odp.: Funkcja jest rosnąca, gdy $m>-1$, malejąca, gdy $m<-1$, stała, gdy $m=-1$.

Ćwiczenie 9. Dla jakich liczb rzeczywistych m funkcja liniowa określona wzorem $f(x)=(2-4m)x+7$ jest:
a) rosnąca, **b)** malejąca, **c)** stała?

Przykład 6. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej f. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór funkcji f w postaci $f(x)=ax+b$.

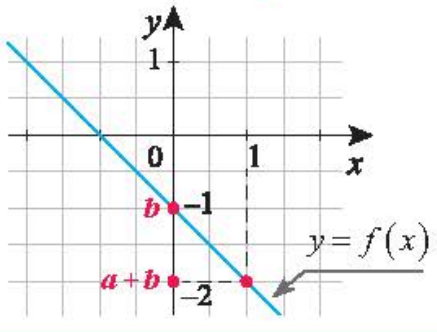


Rozwiązanie

Jeżeli $f(0)=-1$ i $f(1)=-2$, to

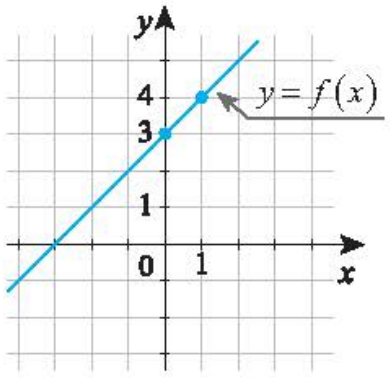
$\begin{cases} b=-1 \\ a+b=-2 \end{cases}$, skąd $a=-1$ i $b=-1$.

Odp.: $f(x)=-x-1$.

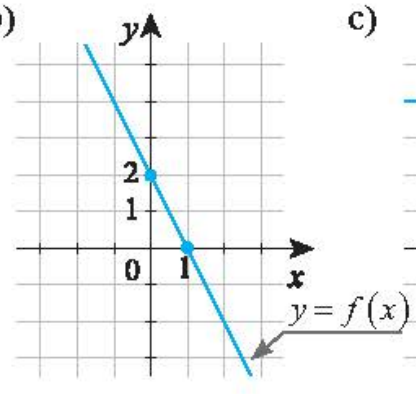


Ćwiczenie 10. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór funkcji liniowej f w postaci $f(x)=ax+b$.

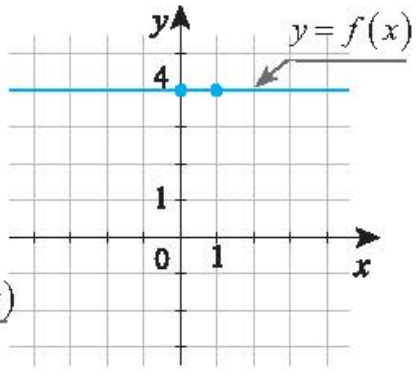
a)



b)



c)



Odpowiedzi do ćwiczeń

6. a) $(0,-2)$ i $(1,2)$, b) $(0,-3)$ i $(1,-5)$, c) $(0,5)$ i $(1,4)$, d) $(0,2)$ i $(1,7)$.

8. Funkcja rosnąca: c), malejąca: a) i b), stała: d). 9. a) $m<\frac{1}{2}$, b) $m>\frac{1}{2}$, c) $m=\frac{1}{2}$.

10. a) $y=x+3$, b) $y=-2x+2$, c) $y=4$.

Zadania utrwalające

9.11. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Jeżeli funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x)=-3x-1$, to do jej wykresu należy punkt $(-1,0)$.	P	F
Gdy argument funkcji określonej wzorem $f(x)=8x+2$ wzrośnie o 1, to wartość funkcji wzrośnie o 8.	P	F

9.12. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=-3x+6$, b) $f(x)=-2x-2$,

c) $f(x)=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$, d) $f(x)=\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$.

9.13. Określ, czy funkcja f jest rosnąca, malejąca czy stała, gdy:

a) $f(x)=3x-1$, b) $f(x)=5-2x$, c) $f(x)=x-20$, d) $f(x)=-\sqrt{2}$.

9.14. Spośród wzorów funkcji liniowych, ponumerowanych od **1** do **6**, wybierz te, których wykresy przecinają się w tym samym punkcie leżącym na osi y i podaj jego współrzędne.

1 $f(x)=-x+3$, **2** $f(x)=\frac{1}{2}x-1$, **3** $f(x)=2x+3$,

4 $f(x)=3$, **5** $f(x)=-1$, **6** $f(x)=-\frac{1}{2}x-1$.

9.15. Podaj trzy przykłady wzorów funkcji liniowych, których wykresy przecinają się w punkcie $(0,-2)$ i naszkicuj te wykresy.

9.16. D Uzasadnij, że jeśli w funkcji liniowej f, określonej wzorem $f(x)=ax+b$, zwiększamy argument x o jeden, to wartość funkcji zmienia się o wielkość współczynnika a.

9.17. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na wykresie funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x)=-\frac{1}{3}x+4$ leżą punkty A i B, gdzie $A=(a,4)$ i $B=(6,b)$. Wynika z tego, że:

A. $a=0$ i $b=4$, **B.** $a=0$ i $b=-4$, **C.** $a=0$ i $b=2$, **D.** $a=0$ i $b=-2$.

Miejsce zerowe i znak funkcji liniowej

Przypomnijmy

Miejscem zerowym funkcji $y=f(x)$ nazywamy taki argument x_0, dla którego wartość funkcji f jest równa zero, czyli $f(x_0)=0$.

Aby obliczyć miejsca zerowe funkcji $y=f(x)$, należy rozwiązać równanie $f(x)=0$.

Przykład 7. Oblicz miejsce zerowe i narysuj wykres funkcji f określonej wzorem:
a) $f(x)=2x-4$, **b)** $f(x)=-1$, **c)** $f(x)=0$.

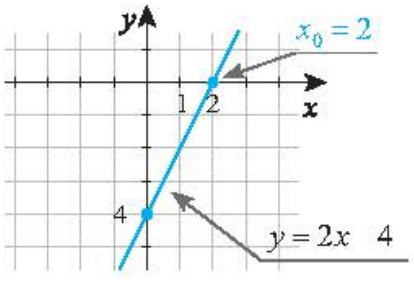
Rozwiązanie

Rozwiązujemy równanie $f(x)=0$.

a) $f(x)=2x-4$ i $f(x)=0$, więc

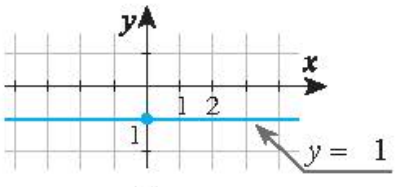
$2x-4=0$

$x=2$



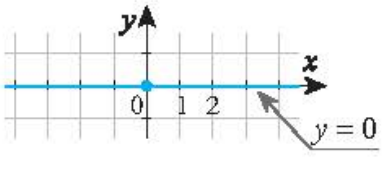
b) $f(x)=-1$ i $f(x)=0$, więc

$-1=0$ – *równanie sprzeczne*



c) $f(x)=0$ i $f(x)=0$, więc

$0=0$ – *równanie tożsamościowe*



Odp.: **a)** $x_0=2$, **b)** funkcja f nie ma miejsc zerowych, **c)** funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Ćwiczenie 11. Oblicz miejsce zerowe i narysuj wykres funkcji f określonej wzorem:
a) $f(x)=-3x-6$, **b)** $f(x)=4$, **c)** $f(x)=x-2-(x-2)$.

Przykład 8. Oblicz miejsce zerowe funkcji określonej wzorem $f(x)=ax+b$.

Rozwiązanie. $f(x)=0$, więc $ax+b=0$

$$ax=-b.$$

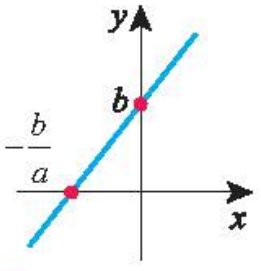
Rozpatrujemy dwa przypadki: **1** $a\neq 0$ i **2** $a=0$.

Dzielenie przez 0 to działanie niewykonalne.

1 $\boldsymbol{a\neq 0}$.

$ax=-b$, skąd $x=-\frac{b}{a}$.

$a>0$



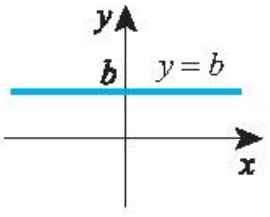
Liczba $-\frac{b}{a}$ jest miejscem zerowym funkcji liniowej.

2 $a=0$.

$y=0\cdot x+b$, więc $y=b$.

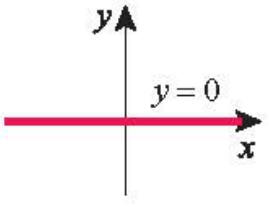
Możliwe są dwie sytuacje:

$a=0$ i $b\neq 0$



Funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych.

$a=0$ i $b=0$



Każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym funkcji liniowej.

Uwaga

Funkcja liniowa określona wzorem $f(x)=ax+b$:

- ma jedno miejsce zerowe $x_0=-\frac{b}{a}$, gdy $a\neq 0$,
- nie ma miejsc zerowych, gdy $a=0$ i $b\neq 0$,
- ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a=0$ i $b=0$.

Ćwiczenie 12. Oblicz miejsce zerowe funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=0{,}25x+3$, **b)** $f(x)=-x+2$, **c)** $f(x)=-2$, **d)** $f(x)=4x$.

Ćwiczenie 13. Spośród podanych wzorów funkcji liniowych oznaczonych cyframi od **1** do **5**:

1 $f(x)=2x-1$, **2** $f(x)=-1$, **3** $f(x)=0$, **4** $f(x)=8-5x$, **5** $f(x)=\frac{3}{4}-2x$

wskaż te, które: **a)** mają jedno miejsce zerowe, **b)** nie mają miejsc zerowych, **c)** mają nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Określić znak funkcji f, to znaczy odpowiedzieć na pytanie, dla jakich argumentów x wartości funkcji są dodatnie ($f(x)>0$), a dla jakich ujemne ($f(x)<0$).

Przykład 9. Oblicz, dla jakich argumentów x wartości funkcji f określonej wzorem $f(x)=2x-4$ są:

a) dodatnie, **b)** ujemne, **c)** równe zero.

Rozwiązanie

a) $f(x)>0$, gdy $2x-4>0$

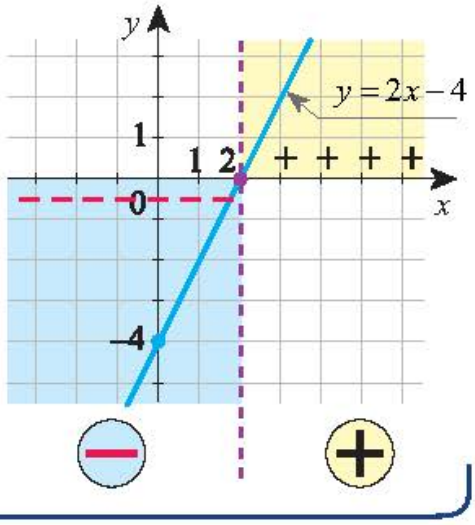
$x>2$,

b) $f(x)<0$, gdy $2x-4<0$

$x<2$,

c) $f(x)=0$, gdy $2x-4=0$

$x=2$.



Odp.: **a)** $x\in(2;+\infty)$, **b)** $x\in(-\infty;2)$, **c)** $x=2$.

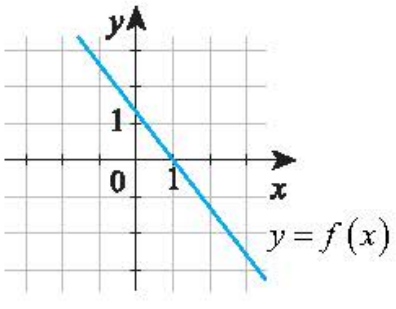
Ćwiczenie 14. Oblicz, dla jakich argumentów x wartości funkcji f określonej wzorem $f(x)=-x+2$ są:

a) dodatnie, **b)** ujemne, **c)** równe zero.

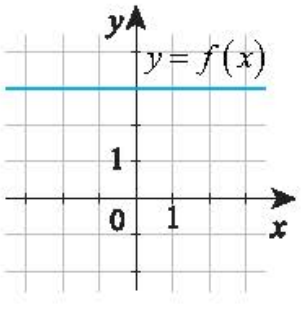
Ćwiczenie 15. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej f. Odczytaj z wykresu te wartości argumentów x, dla których funkcja f przyjmuje wartości:

1 ujemne, **2** nieujemne ($f(x)\geq 0$).

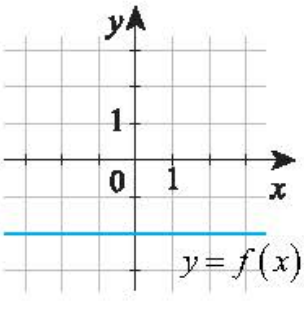
a)



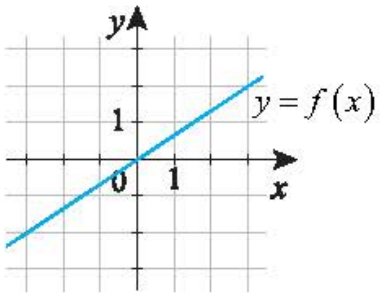
b)



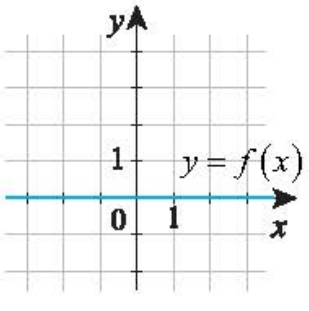
c)



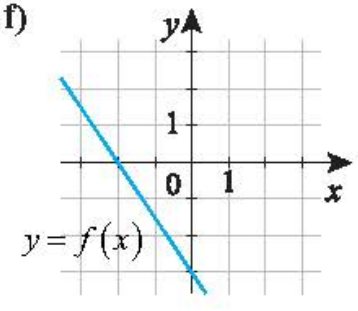
d)



e)

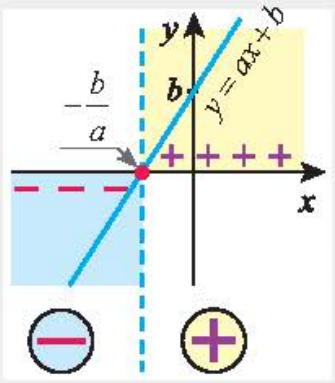


f)



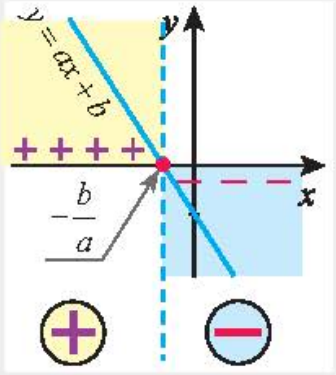
Uwaga. Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x)=ax+b$.

$a>0$



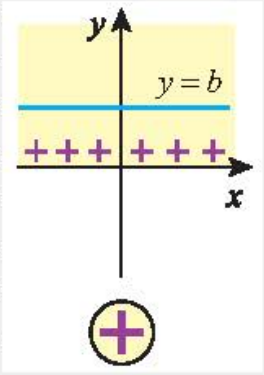
- $f(x)>0$, gdy $x>-\frac{b}{a}$,
- $f(x)<0$, gdy $x<-\frac{b}{a}$.

$a<0$



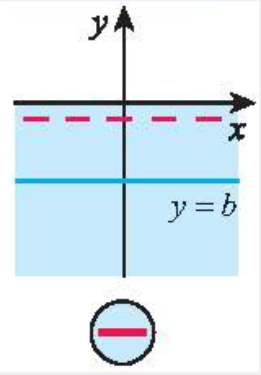
- $f(x)>0$, gdy $x<-\frac{b}{a}$,
- $f(x)<0$, gdy $x>-\frac{b}{a}$.

$a=0$ i $b>0$



- $f(x)>0$, gdy $x\in\mathbf{R}$,
- $f(x)<0$, nierówność nie ma rozwiązania.

$a=0$ i $b<0$



- $f(x)>0$, nierówność nie ma rozwiązania,
- $f(x)<0$, gdy $x\in\mathbf{R}$.

Przykład 10. W tabeli podano wartości funkcji liniowej f dla dwóch argumentów. Nie sporządzając wykresu funkcji f, określ, dla jakich wartości argumentów x funkcja f przyjmuje wartości: **a)** ujemne, **b)** dodatnie.

x	0	2
$y=f(x)$	7	0

Rozwiązanie. Z tabeli odczytujemy, że:

1° miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2,

2° funkcja f jest malejąca (argument x rośnie, a wartość y funkcji maleje).

Zatem: **a)** $f(x)<0$, gdy $x>2$, **b)** $f(x)>0$, gdy $x<2$.

Ćwiczenie 16. W tabeli podano wartości funkcji liniowej f dla dwóch argumentów. Nie sporządzając wykresu funkcji f, określ, dla jakich wartości argumentów x funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

a)

x	0	3
$y=f(x)$	3	0

b)

x	0	2
$y=f(x)$	–1	0

c)

x	0	2
$y=f(x)$	–4	–4

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. **a)** $x_0=-2$, **b)** brak miejsc zerowych, **c)** nieskończenie wiele miejsc zerowych.

12. **a)** –12, **b)** 2, **c)** brak, **d)** 0. **13.** **a)** 1), 4) i 5), **b)** 2), **c)** 3). **14.** **a)** $x<2$, **b)** $x>2$, **c)** $x=2$.

15. **a)** **1** $x>1$, **2** $x\leq 1$, **b)** **1** nie ma takich x, **2** $x\in R$, **c)** **1** $x\in R$, **2** nie ma takich x, **d)** **1** $x<0$, **2** $x\geq 0$, **e)** **1** nie ma takich x, **2** $x\in R$, **f)** **1** $x>-2$, **2** $x\leq -2$.

16. **a)** $x<3$, **b)** $x>2$, **c)** nie ma takiego x.

Zadania utrwalające

9.18. Oblicz miejsca zerowe funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x-8$, **b)** $f(x)=3x$, **c)** $f(x)=-\frac{3}{4}x+2$, **d)** $f(x)=4-x$,

e) $f(x)=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$, **f)** $f(x)=0{,}5x-1$, **g)** $f(x)=0{,}01x+100$, **h)** $f(x)=\pi x-\pi$.

9.19. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji f z osią x, gdy:

a) $f(x)=-\frac{1}{2}x-5$, **b)** $f(x)=-3x+6$, **c)** $f(x)=2x$,

d) $f(x)=-x-\frac{1}{2}$, **e)** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x+1$, **f)** $f(x)=2^{10}x-2^{13}$.

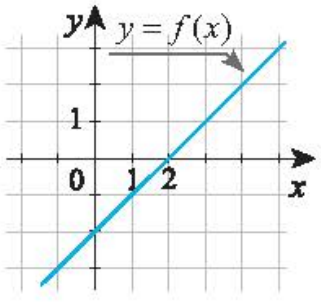
9.20. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Nie ma miejsca zerowego funkcja f określona wzorem:

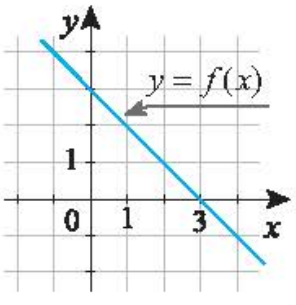
A. $f(x)=5x-\sqrt{2}$, **B.** $f(x)=\sqrt{10}x$, **C.** $f(x)=x$, **D.** $f(x)=-10^2$.

9.21. Odczytaj z wykresu funkcji liniowej f, dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

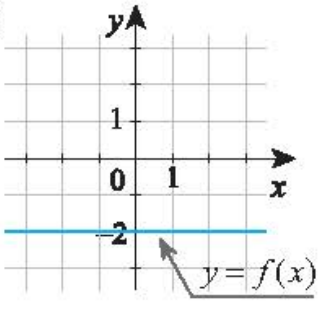
a)



b)



c)



9.22. Oblicz, dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, gdy:

a) $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$, **b)** $f(x)=3x-4$, **c)** $f(x)=5x-\frac{1}{2}$, **d)** $f(x)=2$.

9.23. Oblicz, dla jakich argumentów x funkcja f przyjmuje wartości ujemne, gdy:

a) $f(x)=0{,}2x$, **b)** $f(x)=-2\frac{1}{2}x+1$, **c)** $f(x)=4x-4$, **d)** $f(x)=5$.

9.24. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{2-\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}$. Uzasadnij, że $f(x)>0$, gdy $x<\sqrt{2}$.

D

9.25. Oblicz wartości współczynnika b, gdzie $b\in R$, dla których miejscem zerowym funkcji $f(x)=-3x+b$ jest liczba większa od 2.

Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej

Aby napisać wzór funkcji liniowej w postaci $f(x)=ax+b$, wystarczy znać współczynniki a i b. Jeżeli jeden ze współczynników jest znany, to potrzebna jest informacja, która pozwoli obliczyć drugi współczynnik.

Przykład 11. Miejscem zerowym funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x)=2x+b$ jest liczba 6. Oblicz b i napisz wzór tej funkcji f.

Rozwiązanie. $f(x)=2x+b$, więc $a=2$.

I sposób:

Korzystamy z definicji miejsca zerowego.

$x_0=6$, więc $f(6)=0$,

$2\cdot 6+b=0$, skąd $b=-12$.

II sposób:

Korzystamy z wzoru na miejsce zerowe.

$x_0=6$ i $x_0=-\frac{b}{a}$, więc

$-\frac{b}{2}=6$, skąd $b=-12$.

Odp.: $f(x)=2x-12$.

Ćwiczenie 17. Miejscem zerowym funkcji liniowej f jest liczba x_0. Napisz jej wzór, gdy:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x+b$ i $x_0=4$, **b)** $f(x)=-x+b$ i $x_0=-1$.

Przykład 12. Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x)=ax-3$. Oblicz współczynnik a i podaj wzór funkcji f, jeśli jej wykres przechodzi przez punkt $P=(-2,5)$.

Rozwiązanie. $f(x)=ax-3$, więc $b=-3$. Obliczamy współczynnik a.

Punkt $P=(-2,5)$ leży na wykresie funkcji f, więc

$$f(-2)=5$$
$$a\cdot(-2)-3=5$$
$$a=-4.$$

Odp.: $f(x)=-4x-3$.

Ćwiczenie 18. Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x)=ax+7$. Oblicz współczynnik a i podaj wzór funkcji f, jeśli jej wykres przechodzi przez punkt $A=(-3,10)$.

Jeśli we wzorze $f(x)=ax+b$ funkcji liniowej oba współczynniki a i b nie są dane, to potrzebne są dwie informacje, które pozwolą je obliczyć. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 13. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x)=ax+b$, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkty $A=(3,0)$ i $B=(-1,8)$.

Rozwiązanie. Punkty $A=(3,0)$ i $B=(-1,8)$ leżą na wykresie funkcji f, więc

$$\begin{cases} 0=3a+b \\ 8=-a+b \end{cases}, \text{ skąd}$$

$f(3)=0$
$f(-1)=8$

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=6 \end{cases}.$$

Odp.: $f(x)=-2x+6$.

Ćwiczenie 19. Napisz wzór funkcji liniowej, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty A i B takie, że:

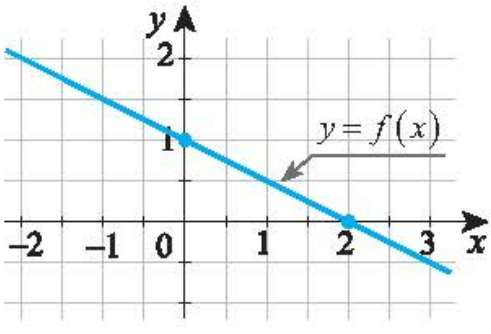
a) $A=(1,-1)$ i $B=(4,2)$, **b)** $A=(-2,8)$ i $B=(1,2)$, **c)** $A=(2,0)$ i $B=(0,-2)$.

Ćwiczenie 20. Na rysunku podany jest wykres funkcji liniowej.

a) Odczytaj z wykresu współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji z osią odciętych i osią rzędnych.

b) Napisz wzór tej funkcji.

c) Podaj argument x, dla którego wartość funkcji f jest równa -1.



Ćwiczenie 21. W tabeli podano wartości funkcji liniowej f dla dwóch argumentów. Napisz jej wzór, gdy:

a)

x	-2	1
$y=f(x)$	-3	-1

b)

x	-1	1
$y=f(x)$	-5	1

c)

x	-4	2
$y=f(x)$	-1	2

Przykład 14. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x)=ax+b$, wiedząc, że przyjmuje ona wartości ujemne tylko, gdy $x>-3$, i jej wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0,-9)$.

Rozwiązanie. Zauważamy, że miejscem zerowym funkcji f jest liczba -3, czyli $-\frac{b}{a}=-3$ oraz $b=-9$, więc $-\frac{-9}{a}=-3$, skąd $a=-3$.

Odp.: $f(x)=-3x-9$.

Ćwiczenie 22. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x)=ax+b$, wiedząc, że:
a) przyjmuje ona wartości dodatnie tylko, gdy $x>-1$, oraz jej wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, 4)$,
b) przyjmuje ona tylko wartości dodatnie i do jej wykresu należy punkt $(-45, 100)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

17. **a)** $f(x)=\frac{1}{2}x-2$, **b)** $f(x)=-x-1$. 18. $f(x)=-x+7$. 19. **a)** $f(x)=x-2$, **b)** $f(x)=-2x+4$, **c)** $f(x)=x-2$.
20. **a)** $(2, 0)$ i $(0,1)$, **b)** $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$, **c)** 4. 21. **a)** $f(x)=\frac{2}{3}x-1\frac{2}{3}$, **b)** $f(x)=3x-2$, **c)** $f(x)=\frac{1}{2}x+1$.
22. **a)** $f(x)=4x+4$, **b)** $f(x)=100$.

Zadania utrwalające

9.26. Miejscem zerowym funkcji liniowej f jest liczba x_0. Oblicz współczynnik b, gdy:
a) $f(x)=-3x+b$ i $x_0=-1$, **b)** $f(x)=5x+b$ i $x_0=0$,
c) $f(x)=\sqrt{2}x+b$ i $x_0=2\sqrt{2}$.

9.27. Wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=ax+3$ przechodzi przez punkt $A=\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.
a) Oblicz współczynnik a.
b) Oblicz współrzędne punktów przecięcia wykresu tej funkcji z osiami układu współrzędnych.

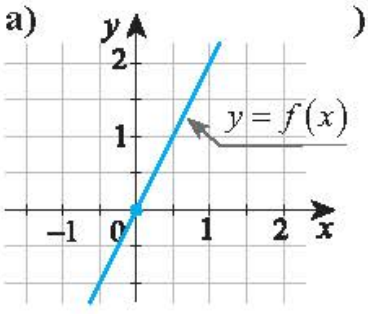
9.28. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Wykres funkcji liniowej f określonej wzorem $f(x)=ax-5$ przechodzi przez punkt $(-20, 35)$, gdy $a=-2$.	**P**	**F**
Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=-4x+b$ jest liczba -2, gdy $b=8$.	**P**	**F**

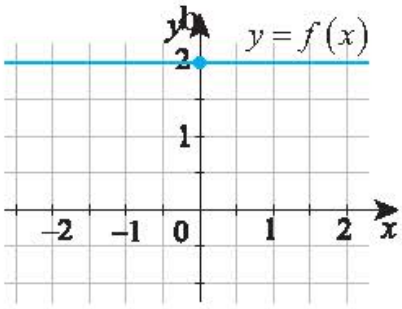
9.29. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x)=ax+b$, wiedząc, że jej miejscem zerowym jest x_0 i jej wykres przecina oś rzędnych w punkcie o współrzędnych $(0, b)$, gdy:
a) $x_0=2$, $b=-1$, **b)** $x_0=-3$, $b=2$, **c)** $x_0=\frac{1}{2}$, $b=-3$.

9.30. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej f. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.

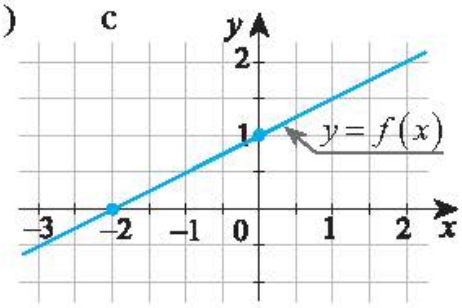
a)



b)



c)



9.31. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty P i M, gdy:

a) $P=(4,2)$ i $M=(3,0)$,

b) $P=(1,-1)$ i $M=(0,-4)$,

c) $P=(-3,-7)$ i $M=(2,2)$,

d) $P=(-4,0)$ i $B=(0,4)$.

9.32. W tabeli podano wartości funkcji liniowej dla dwóch argumentów. Napisz jej wzór, gdy:

a)

x	0	1
$y-f(x)$	0	–3

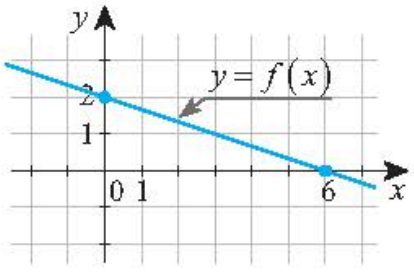
b)

x	0	2
$y-f(x)$	4	0

c)

x	–1	1
$y-f(x)$	–188	12

9.33. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej f.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f określona jest wzorem:

A. $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$, **B.** $f(x)=-3x+2$,

C. $f(x)=6x+2$, **D.** $f(x)=-6x+2$.

9.34. Na wykresie funkcji liniowej f, określonej wzorem $f(x)=-\frac{1}{3}x+4$, leżą punkty o współrzędnych $(k,4)$ i $(6,m)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika z tego, że:

A. $k=0$ i $m=4$, **B.** $k=0$ i $m=-4$, **C.** $k=0$ i $m=2$, **D.** $k=0$ i $m=-2$.

9.35. Napisz wzór funkcji liniowej w postaci $f(x)=ax+b$, wiedząc, że:

a) przyjmuje ona wartości dodatnie tylko, gdy $x>2$ i jej wykres przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0,-6)$,

b) przyjmuje ona tylko wartości ujemne i do jej wykresu należy punkt $(-2,-5)$.

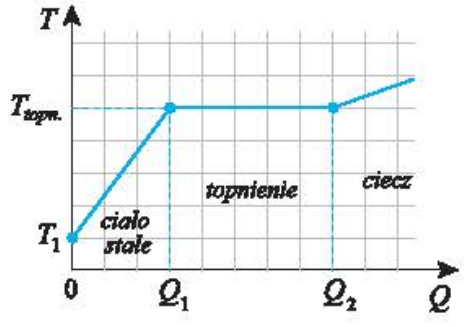
Przykłady funkcji liniowych określonych w różnych przedziałach różnymi wzorami

Dziedziną funkcji liniowej, określonej wzorem $f(x)=ax+b$, jest zbiór liczb rzeczywistych, a jej wykresem jest prosta.

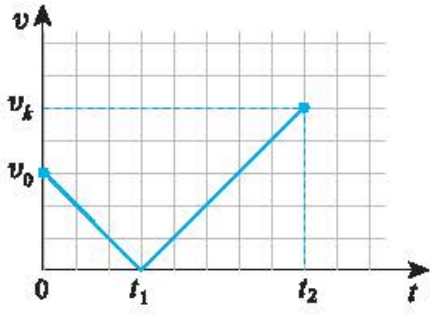
Funkcje opisujące zjawiska z życia codziennego są często w różnych przedziałach określone różnymi wzorami funkcji liniowej, więc ich wykresy mogą być sumą odcinków lub półprostych.

Przykłady:

1) Wykres zmiany temperatury T ciała stałego, które pod wpływem dostarczonego ciepła Q ulega topnieniu (przy stałym ciśnieniu).



2) Wykres zmiany prędkości v ciała rzuconego pionowo do góry z prędkością początkową v_0.

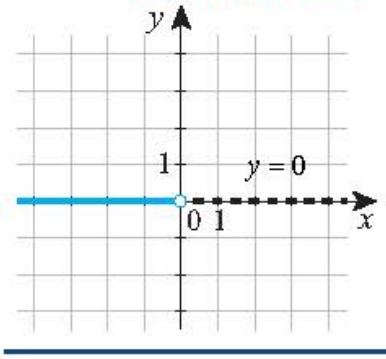


W matematyce często posługujemy się funkcjami, które są określone więcej niż jednym wzorem. Wzór takiej funkcji zapisujemy przy użyciu klamry. Pokażemy to na przykładach.

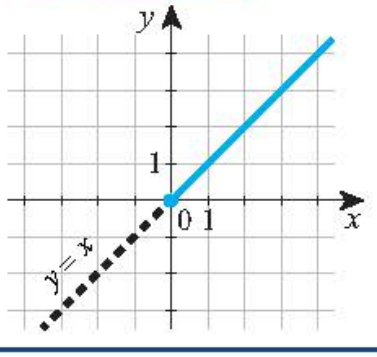
Przykład 15. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\begin{cases}0, & \text{gdy } x<0\\ x, & \text{gdy } x\geq 0\end{cases}$.

Rozwiązanie. W jednym układzie współrzędnych rysujemy fragmenty wykresów dwóch funkcji liniowych **1** i **2**:

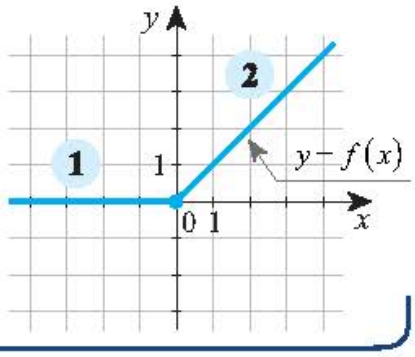
1 $y=0$, gdy $x<0$. Wykresem jest półprosta bez początku (na rysunku kolor niebieski).



2 $y=x$, gdy $x\geq 0$. Wykresem jest półprosta (na rysunku kolor niebieski).



Wykres funkcji f jest złączeniem (sumą) wykresów **1** i **2**.



Ćwiczenie 23. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=|x|$, czyli funkcji

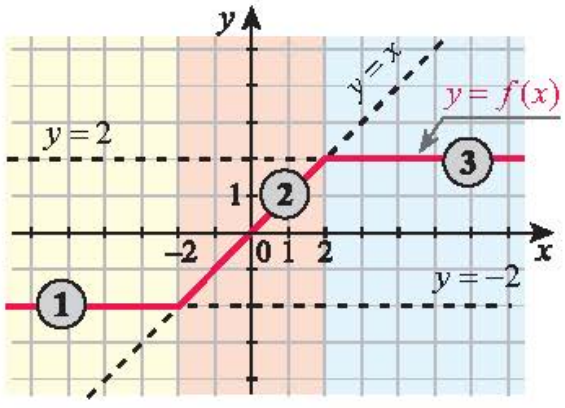
$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{gdy} \quad x<0\\ x, & \text{gdy} \quad x\geq 0\end{cases}.$$

Przykład 16. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases}-2, & \text{gdy} \quad x\leq -2 \quad (1)\\ x, & \text{gdy} \quad -2<x\leq 2 \quad (2)\\ 2, & \text{gdy} \quad x>2 \quad (3)\end{cases}$$

Rozwiązanie. Rysujemy w jednym układzie współrzędnych fragmenty wykresów trzech funkcji liniowych:

- $y=-2$, gdy $x\leq -2$, czyli półprostą (1),
- $y=x$, gdy $-2<x\leq 2$, czyli odcinek bez lewego końca (2),
- $y=2$, gdy $x>2$, czyli półprostą bez początku (3).



Ćwiczenie 24. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases}3, & \text{gdy} \quad -5\leq x\leq 0\\ 2, & \text{gdy} \quad 0<x\leq 4\\ 2-x, & \text{gdy} \quad x>4\end{cases}.$$

Przykład 17. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases}2x+4, & \text{gdy} \quad x\leq -1\\ -x, & \text{gdy} \quad -1<x<2\end{cases}$.

Określ: **a)** dziedzinę D_f funkcji f, **b)** zbiór wartości Y_f funkcji f.

Rozwiązanie

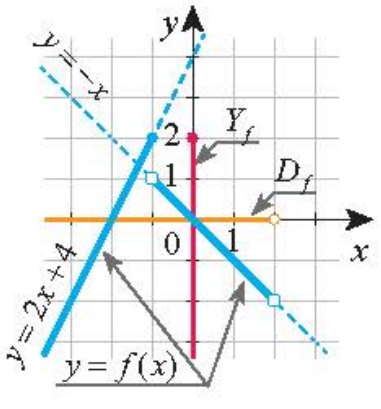
a) Dziedzinę D_f określamy z wzoru funkcji f. Warunki

$x\leq -1$ i $-1<x<2$

opisują przedziały, których suma jest dziedziną funkcji f.

Zatem $D_f=(-\infty;-1\rangle\cup(-1;2)$, czyli $D_f=(-\infty;2)$.

b) Zbiór wartości Y_f funkcji f najlepiej odczytać z jej wykresu. Zatem $Y_f=(-\infty;2\rangle$.



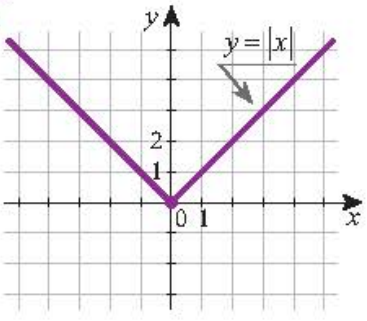
Odp.: **a)** $D_f=(-\infty;2)$, **b)** $Y_f=(-\infty;2\rangle$.

Ćwiczenie 25. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{gdy } -3<x\le 0\\ x+2, & \text{gdy } 0<x\le 3\end{cases}$.

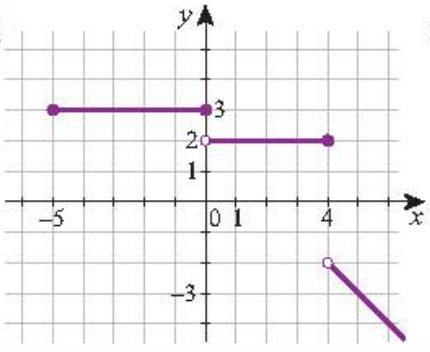
Określ: **a)** dziedzinę D_f funkcji f, **b)** zbiór wartości Y_f funkcji f.

Odpowiedzi do ćwiczeń

23.



24.



25. a) $D_f=(-3;3\rangle$, b) $Y_f=\langle 0;5\rangle$.

Zadania utrwalające

9.36. Sporządź wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{gdy } x<0\\ 0, & \text{gdy } x\ge 0\end{cases}$,

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & \text{gdy } x\le 0\\ -1, & \text{gdy } x>0\end{cases}$,

c) $f(x)=\begin{cases}-3, & \text{gdy } x<-3\\ -x, & \text{gdy } -3\le x\le 3,\\ 3, & \text{gdy } x>3\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}-2x, & \text{gdy } x<0\\ 2, & \text{gdy } 0\le x\le 2.\\ 2x, & \text{gdy } x>2\end{cases}$

9.37. Sporządź wykres funkcji f. Określ jej dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f, gdy:

a) $f(x)=\begin{cases}3x, & \text{gdy } x<1\\ 2x+1, & \text{gdy } x\ge 1\end{cases}$,

b) $f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{gdy } x\in\langle 0;2\rangle\\ 4, & \text{gdy } x\in(2;5)\\ -x+9, & \text{gdy } x\in\langle 5;+\infty)\end{cases}$.

9.38. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases}x, & \text{gdy } x\in(-\infty;-1)\\ 2x-3, & \text{gdy } x\in\langle -1;3)\\ -x+6, & \text{gdy } x\in\langle 3;+\infty)\end{cases}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby:

A. $\frac{3}{2}$ i 0, **B.** $\frac{3}{2}$ i 6, **C.** 6 i 0, **D.** –6 i 0.

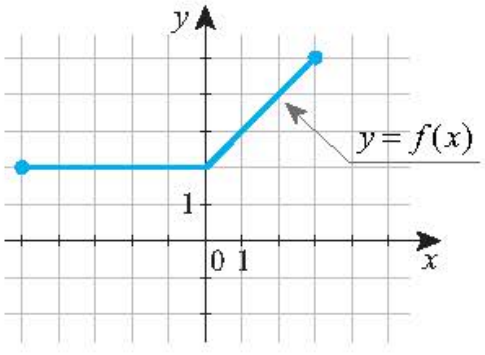
9.39. Narysuj wykres funkcji f, wiedząc, że jest on linią łamaną, a funkcja f spełnia jednocześnie wszystkie podane niżej warunki:

- $D_f = \langle -7 ; 5 \rangle$,
- $f(5) = 4$ i $f(1) = -2$,
- gdy $x \in \langle -7 ; -5 \rangle$, to funkcja f jest stała i jej wartość w tym przedziale jest równa 3,
- gdy $x \in (-5 ; 1)$, to funkcja f jest malejąca,
- gdy $x \in (1 ; 5)$, to funkcja f jest rosnąca.

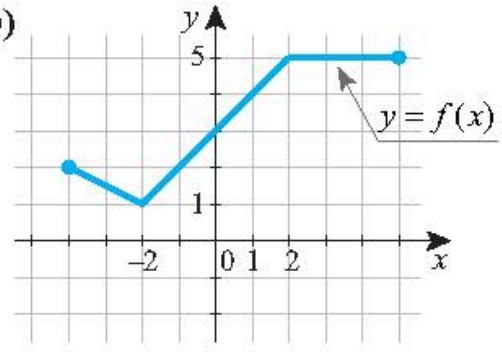
Określ zbiór wartości funkcji f.

9.40. Określ dziedzinę D_f i zbiór wartości Y_f oraz napisz wzór funkcji f, której wykres przedstawiono na rysunku.

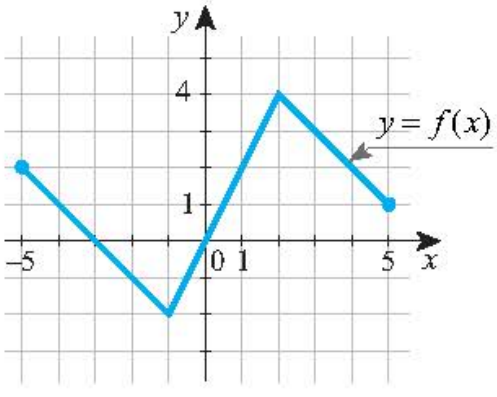
a)



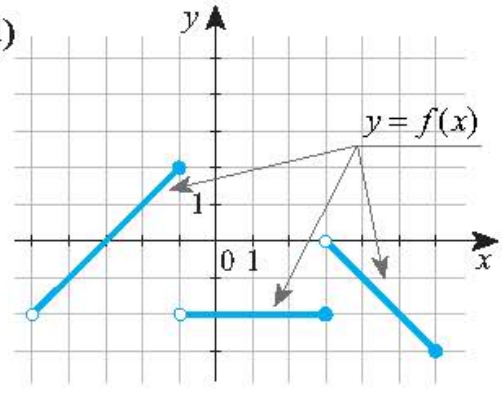
b)



c)



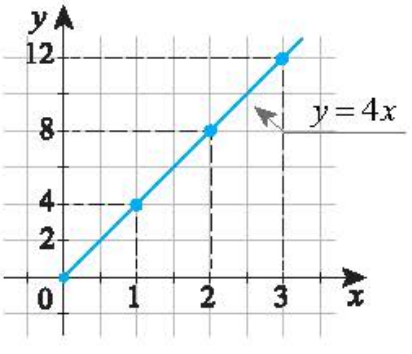
d)



Funkcja liniowa w zastosowaniach

Zależności występujące w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym często opisujemy za pomocą funkcji. Funkcją liniową możemy opisywać te procesy zmian zachodzące między dwiema wielkościami x i y, w których obie te wielkości zmieniają się równomiernie, czyli proporcjonalnie.

Na przykład, jeśli kupimy x kg jabłek po 4 zł za 1 kg, to koszt y zakupu można zapisać zależnością $y = 4x$, gdzie $x \geq 0$.



O wielkościach x i y mówimy, że są **wprost proporcjonalne**, a liczbę 4 nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności**.

Uwaga

Dwie wielkości x i y zmieniają się wprost proporcjonalnie, jeżeli wzrost jednej z nich pociąga za sobą odpowiednią zmianę drugiej w ten sposób, że w procesie zmian iloraz $\frac{y}{x}$ jest stały i równy a, gdzie a – współczynnik proporcjonalności.

Ćwiczenie 26. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę, wiedząc, że wielkości x i y są wprost proporcjonalne.

a)

x	2	■
y	4	6

b)

x	$\frac{1}{3}$	3
y	■	3

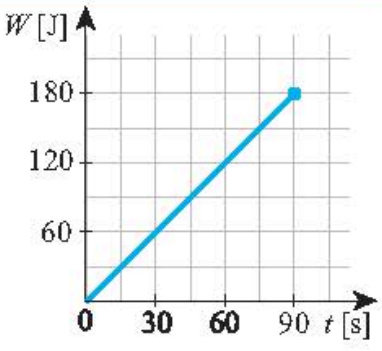
c)

x	10	2
y	5	■

d)

x	■	2
y	1	14

Przykład 18. Na wykresie przedstawiono zależność pomiędzy pracą W wykonaną przez silniczek zabawki a czasem t tej pracy. Oblicz moc P tego silniczka.



Rozwiązanie. Zauważamy, że czas t i praca W zmieniają się wprost proporcjonalnie. W dwukrotnie dłuższym czasie zostanie wykonana dwukrotnie większa praca.

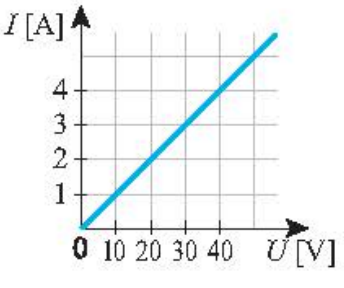
Moc P obliczamy z zależności $P = \frac{W}{t}$.

Niezbędne dane odczytujemy z wykresu, np. $W = 60\,\text{J}$, gdy $t = 30\,\text{s}$ albo $W = 180\,\text{J}$, gdy $t = 90\,\text{s}$. Dla każdej pary odczytanych wielkości otrzymamy $P = 2$.

Odp.: $P = 2$ W [waty].

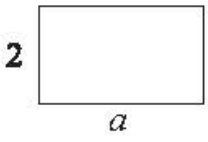
Ćwiczenie 27. Na wykresie przedstawiono zależność natężenia prądu I płynącego w przewodniku od wartości napięcia U na jego końcach. Oblicz opór R tego przewodnika.

Wskazówka. $U = R \cdot I$.



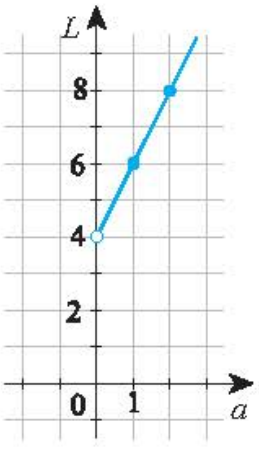
Ćwiczenie 28. Pociąg porusza się ze stałą prędkością równą $40\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jaka jest zależność między drogą, którą przebywa oraz czasem, w którym ją pokonuje? Napisz wzór wyrażający tę zależność. Czy droga s i czas t są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

Przykład 19. Boki prostokąta mają długości równe 2 i a. Napisz wzór opisujący zależność pomiędzy obwodem L tego prostokąta a długościami jego boków. Sporządź wykres otrzymanej zależności.

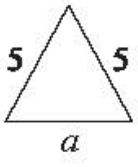


Rozwiązanie. $L(a)=2\cdot a+2\cdot 2$.
Zatem $L(a)=2a+4$, gdzie $a>0$.

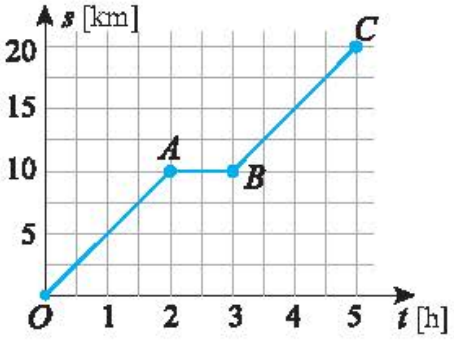
a	1	2
$L(a)=2a+4$	6	8



Ćwiczenie 29. Napisz wzór opisujący zależność pomiędzy obwodem L a długościami boków trójkąta. Sporządź wykres otrzymanej zależności.



Przykład 20. Beata w czasie pięciu godzin pieszej wycieczki przebyła 20 km. Na rysunku przedstawiony jest wykres określający zależność przebytej przez Beatę drogi s od czasu t trwania wycieczki.



a) Opisz drogę Beaty za pomocą wzoru $s(t)$.

b) Narysuj wykres prędkości, z jaką poruszała się Beata, w zależności od czasu.

Rozwiązanie

a) Cały dystans Beata pokonała w trzech etapach, którym na wykresie odpowiadają odcinki OA, AB i BC takie, że $O=(0,0)$, $A=(2,10)$, $B=(3,10)$ i $C=(5,20)$. Każdy z tych odcinków jest częścią wykresu pewnej funkcji liniowej $s(t)=at+b$ przechodzącej przez punkty:

- O i A, gdy $t\in\langle 0;2\rangle$, więc prosta OA ma równanie $s=5t$,
- A i B, gdy $t\in\langle 2;3\rangle$, więc prosta AB ma równanie $s=10$,
- B i C, gdy $t\in\langle 3;5\rangle$, więc prosta BC ma równanie $s=5t-5$.

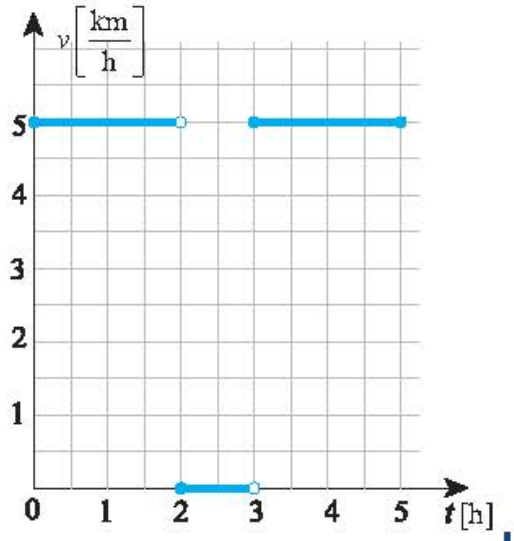
Podsumowując rozważania, zapisujemy $s(t)=\begin{cases}5t, & \text{gdy } t\in\langle 0;2\rangle\\ 10, & \text{gdy } t\in\langle 2;3\rangle\\ 5t-5, & \text{gdy } t\in\langle 3;5\rangle\end{cases}$.

b) Prędkość poruszania się Beaty na etapie:

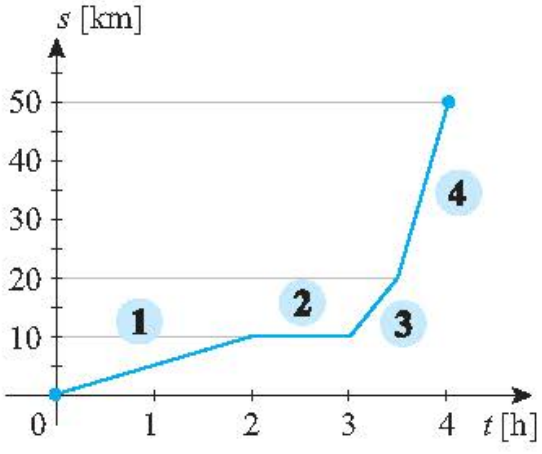
- OA jest równa v_1, gdzie $v_1 = \dfrac{s(2)-s(0)}{2-0} = 5$,
- AB jest równa v_2, gdzie $v_2 = \dfrac{s(3)-s(2)}{3-2} = 0$,
- BC jest równa v_3, gdzie $v_3 = \dfrac{s(5)-s(3)}{5-3} = 5$,

co zapisujemy wzorem

$$v(t) = \begin{cases} 5, & \text{gdy} \quad t \in \langle 0;2) \\ 0, & \text{gdy} \quad t \in \langle 2;3) \\ 5, & \text{gdy} \quad t \in \langle 3;5\rangle \end{cases}.$$



Ćwiczenie 30. Marta w ciągu czterech godzin przebyła 50 km. Najpierw szła pieszo, potem odpoczywała podziwiając piękny krajobraz, potem spotkała koleżankę rowerzystkę, która podwiozła ją do przystanku autobusowego. Resztę drogi przebyła autobusem. Oto wykres obrazujący drogę s w zależności od czasu t.



a) Ile czasu trwały poszczególne etapy (od **1** do **4**) podróży Marty?

b) Z jaką prędkością Marta poruszała się podczas tych etapów?

c) Przyjmij odpowiednią jednostkę na osi rzędnych, sporządź wykres prędkości poruszania się Marty w etapach od **1** do **4**.

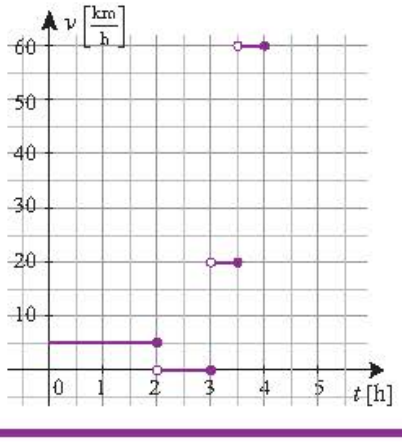
Odpowiedzi do ćwiczeń

26. **a)** 3, **b)** $\frac{1}{3}$, **c)** 1, **d)** $\frac{1}{7}$. **27.** 10 omów.

28. $s(t) = 40 \cdot t$, tak.

29. $L(a) = a + 10$, gdzie $0 < a < 10$. *Wskazówka.* Wykresem funkcji L jest odcinek bez końców w punktach o współrzędnych $(0,10)$ i $(10,20)$.

30. **a)** Marta w czasie 4 godzin: **1** szła pieszo 2 godziny, **2** odpoczywała 1 godzinę, **3** jechała rowerem $\frac{1}{2}$ godziny, **4** jechała autobusem $\frac{1}{2}$ godziny z prędkością 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **b)** **1** 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **2** 0 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **3** 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **4** 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. **c)** Wykres obok.



Zadania utrwalające

9.41. Na podstawie badań ustalono, że ciśnienie pod powierzchnią wody rośnie wraz z głębokością w przybliżeniu o 1000 hPa na każdy metr słupa wody.

a) Zapisz wzorem zależność ciśnienia słupa wody od głębokości.

b) Czy głębokość pod powierzchnią wody i ciśnienie tam panujące są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

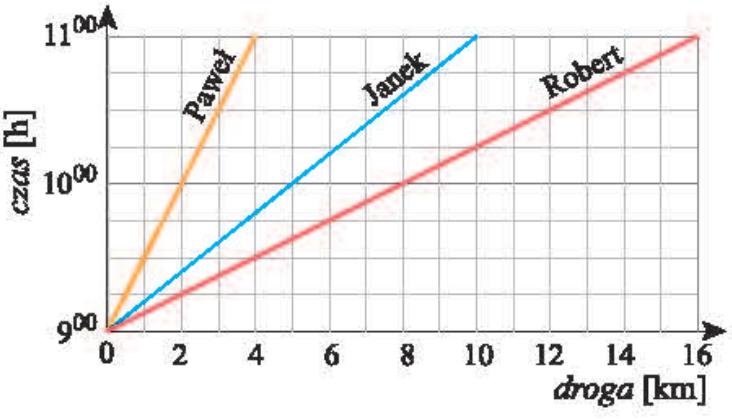
9.42. Trzej bracia: Paweł, Janek i Robert trenują chodzenie na czas. Ich wyniki na szkolnych zawodach przedstawiono na wykresie.

a) Który z braci przeszedł 8 km do godziny 10^{00}?

b) O ile kilometrów więcej przeszedł Robert niż Paweł do godziny 10^{30}?

c) Ile czasu zajęło Robertowi pokonanie 12 km drogi?

d) Oblicz średnią prędkość chodu każdego z nich.

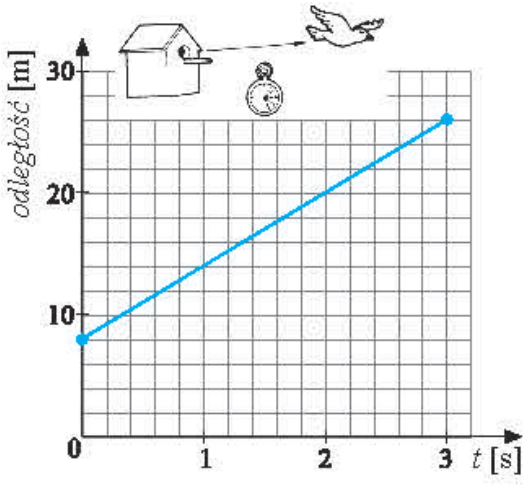


9.43. Janek obserwuje ptaka wylatującego z budki. Włącza swój stoper i szacunkowo ocenia, jak daleko znajduje się ptak od budki wraz z upływem czasu. Dane z obserwacji Janek przedstawił na wykresie.

a) Odczytaj z wykresu, jak daleko był ptak od budki, kiedy Janek włączył stoper.

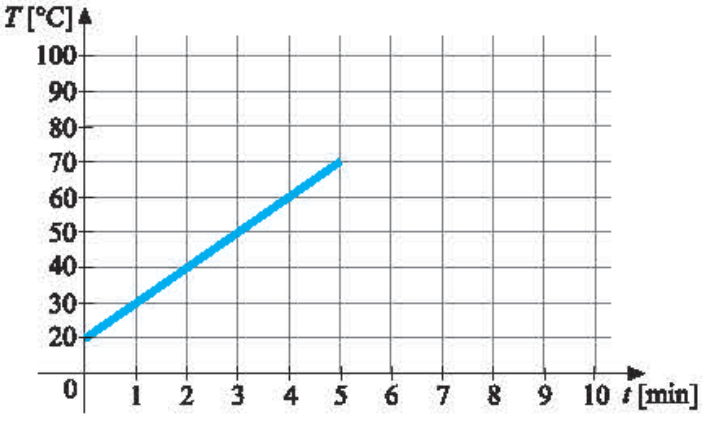
b) Oblicz, z jaką prędkością (v) leciał ptak.

c) Napisz wzór wyrażający zależność odległości (s) ptaka od budki w czasie t.



9.44. Przez 5 minut ogrzewano wodę, mierząc jej temperaturę co minutę. Dane z pomiarów przedstawiono na wykresie.

a) Odczytaj z wykresu, o ile stopni wzrasta temperatura wody w kolejnych minutach.



b) Przerysuj wykres do zeszytu i uzupełnij go o część przedstawiającą dalsze ogrzewanie wody przez kolejne 5 minut, pamiętając o temperaturze wrzenia wody w warunkach normalnych.

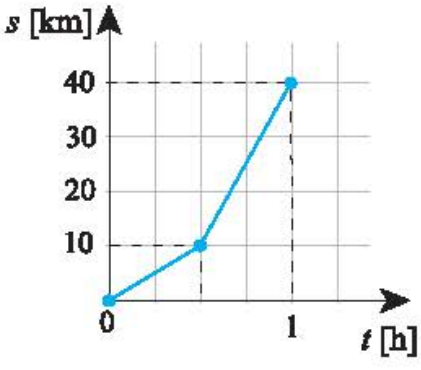
c) Po uzupełnieniu wykresu napisz wzór zależności temperatury (T) wody od czasu (t) jej ogrzewania.

9.45. Wsiadając do taksówki, pasażer płaci wstępną kwotę 6 zł. Po przejechaniu każdego kilometra dopłaca 2 zł. Napisz wzór opisujący zależność kosztu przejazdu taksówką od liczby przejechanych kilometrów. Oblicz koszt przejazdu taksówką, gdy pasażer przejechał:

a) 1 km, **b)** 5 km, **c)** 10 km.

9.46. W układzie SI jednostką temperatury jest kelwin (K). Zależność między stopniami Celsjusza ($T_{°C}$) a kelwinami (T_K) opisuje wzór $T_K = T_{°C} + 273{,}15$. Wyraź temperaturę 100°C w kelwinach oraz 100 K w stopniach Celsjusza.

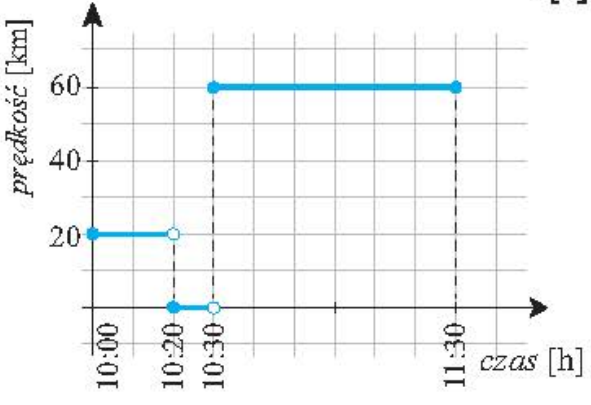
9.47. Na rysunku przedstawiony jest wykres drogi Pawła do szkoły, którą pokonał rowerem i pociągiem.



a) Opisz drogę Pawła za pomocą wzoru $s(t)$.

b) Narysuj wykres prędkości, z jaką poruszał się Paweł w drodze do szkoły.

9.48. Wojtek wybrał się w odwiedziny do babci, która mieszka w innej miejscowości. Najpierw dojechał do stacji kolejowej rowerem, potem czekał przez jakiś czas na pociąg, wreszcie jechał pociągiem. Odczytaj z wykresu:



a) Ile czasu i z jaką prędkością jechał rowerem?

b) Ile czasu trwało oczekiwanie na pociąg?

c) Ile czasu i z jaką prędkością jechał pociągiem?

d) Ile czasu trwała jego podróż do babci?

e) Ile kilometrów przebył Wojtek w czasie tej podróży?

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*
Rosnącą jest funkcja liniowa określona wzorem:

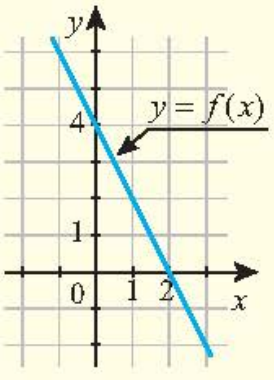
A. $f(x)=\left(1-\sqrt{2}\right)x-3$, **B.** $f(x)=(2-\pi)x+4$,

C. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}x-1$, **D.** $f(x)=5$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*
Wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x)=-\dfrac{3}{4}x+2$ przecina osie układu współrzędnych w punktach:

A. $(4,0)$, $(0,2)$, **B.** $\left(-\dfrac{3}{4},0\right)$, $(0,2)$, **C.** $\left(-\dfrac{8}{3},0\right)$, $(0,2)$, **D.** $\left(\dfrac{8}{3},0\right)$, $(0,2)$.

3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej f.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Funkcja f określona jest wzorem:



A. $f(x)=2x+4$, **B.** $f(x)=-4x+2$,

C. $f(x)=4x-2$, **D.** $f(x)=-2x+4$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*
Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x)=ax+b$ przyjmuje tylko wartości ujemne, gdy:

A. $a>0$ i $b<0$, **B.** $a=0$ i $b<0$, **C.** $a<0$ i $b<0$, **D.** $a<0$ i $b=0$.

5. Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x)=ax+b$.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli $a=0$ i $b=-3$, to funkcja f nie ma miejsc zerowych.	**P**	**F**
Funkcja f jest rosnąca, gdy $b>0$ i a jest dowolną liczbą rzeczywistą.	**P**	**F**
Jeśli $a=6$ i $b=-12$, to funkcja f przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(2;+\infty)$.	**P**	**F**

6. D Funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x)=ax+b$. Czy prawdą jest, że jeśli $a+b=0$ i $a\neq 0$, to miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i C.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$x_0=-\frac{b}{a}$ i $a=-b$, więc $x_0=-1$,
N	**Nie,**		**B.**	$x_0=-\frac{b}{a}$ i $a=-b$, więc $x_0=1$.

7. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=-4x+3$.

a) Oblicz miejsce zerowe funkcji f.

b) Określ monotoniczność funkcji f.

c) Podaj zbiór tych argumentów x, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

d) Rozwiąż nierówność $f(x)<11$.

8. Wykres funkcji liniowej f przechodzi przez punkt $P=(2,-6)$ i leży w II i IV ćwiartce układu współrzędnych. Napisz wzór funkcji f.

9. Funkcja L jest zależnością obwodu trójkąta równoramiennego o podstawie długości 10 od ramion tego trójkąta długości x.

a) Napisz wzór funkcji L i określ jej dziedzinę.

b) Naszkicuj wykres funkcji L.

c) Określ, czy funkcja L może przyjąć wartość 1000.

d) Podaj zbiór wartości funkcji L.

10. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & \text{gdy } x<-1\\ 5, & \text{gdy } -1\le x<4\\ 2x-3, & \text{gdy } x\ge 4\end{cases}$.

11. Zapisz wzór funkcji liniowej f w postaci $f(x)=ax+b$, gdy:

a) $\begin{cases}f(3)-f(2)=4\\ f(0)=3\end{cases}$, **b)** $\begin{cases}f(5)-f(3)=6\\ f(0)=-4\end{cases}$, **c)** $\begin{cases}f(11)-f(8)=15\\ f(0)=2\end{cases}$.

12. D Uzasadnij, że jeśli funkcja liniowa f określona jest wzorem $f(x)=ax+b$, to $f(x+n)-f(x)=n\cdot a$, gdzie $n\in N^+$.

10. Funkcja $f(x)=\frac{a}{x}$ i wielkości odwrotnie proporcjonalne

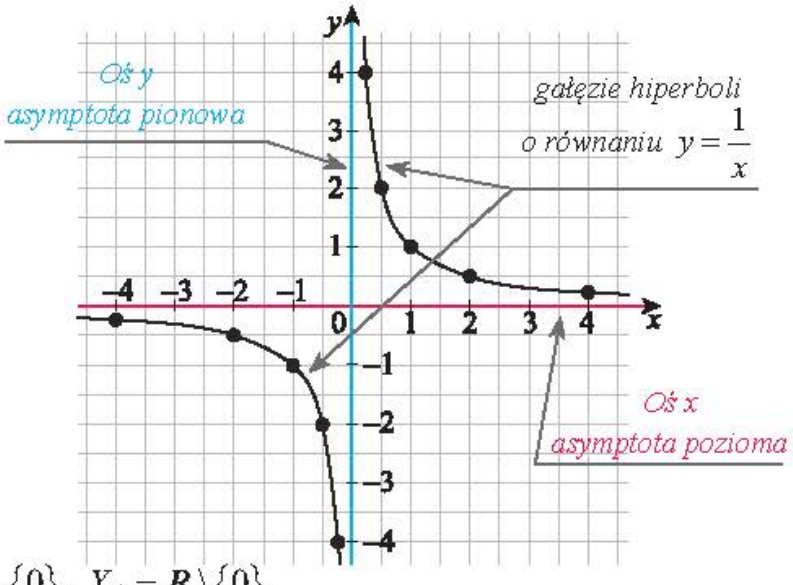
Wykres i własności funkcji określonej wzorem $f(x)=\frac{a}{x}$

Przykład 1. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{1}{x}$, gdzie $x\neq 0$, i z wykresu odczytaj dziedzinę D_f oraz zbiór wartości Y_f.

Rozwiązanie. Zauważamy, że funkcja $f(x)=\frac{1}{x}$ jest funkcją określoną wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $a=1$.

Sporządzamy tabelę wartości funkcji i szkicujemy jej wykres.

x	$y=f(x)$
-4	$-\frac{1}{4}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{4}$	-4
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$

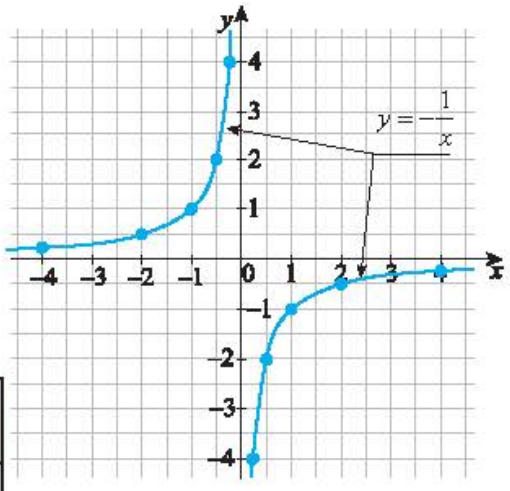


$D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$, $Y_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$

Uwaga

- Wykresem funkcji f określonej wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$ i $a\neq 0$, jest krzywa zwana **hiperbolą**, która składa się z dwóch części. Każdą z tych części nazywamy **gałęzią hiperboli**. O wzorze $y=\frac{a}{x}$ mówimy, że jest równaniem hiperboli.
- Hiperbola o równaniu $y=\frac{a}{x}$ nie ma punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych, czyli z prostymi o równaniach $x=0$ i $y=0$. Proste te nazywamy **asymptotami** tej hiperboli.
- Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ jest zbiór D_f taki, że $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Ćwiczenie 1. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=-\frac{1}{x}$, gdzie $x\neq 0$.



a) Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę.

b) Określ, czy funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

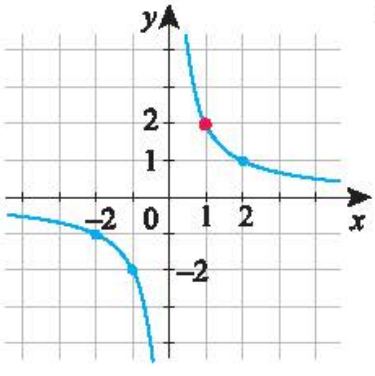
x	-4	-3	■	-1	$-\frac{1}{2}$	■	1	■	3	■
$y=\frac{1}{x}$	■	■	$\frac{1}{2}$	■	■	-2	■	$-\frac{1}{2}$	■	$-\frac{1}{4}$

Uwaga

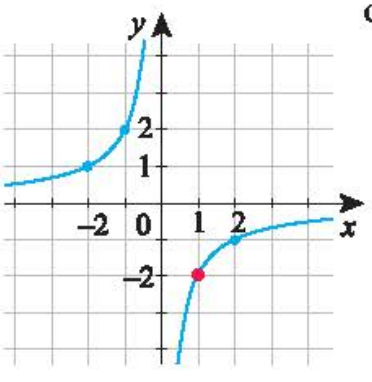
Hiperbola o równaniu $y=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$ i $a\neq 0$, przechodzi przez punkt o współrzędnych $(1, a)$ i jest wykresem funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$.

Ćwiczenie 2. Na rysunku przedstawiony jest szkic wykresu funkcji określonej wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$ i $a\neq 0$. Odczytaj z wykresu wartość współczynnika a.

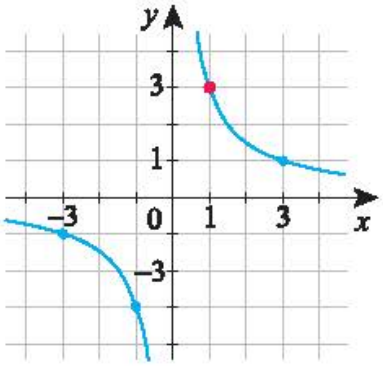
a)



b)



c)



Ćwiczenie 3. Przepisz zdanie do zeszytu i w miejsce ■ wpisz numery ćwiartek układu współrzędnych tak, aby zdanie było prawdziwe.

a) Wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$ i $a>0$, jest hiperbolą o równaniu $y=\frac{a}{x}$, której gałęzie położone są w ■ i ■ ćwiartce układu współrzędnych.

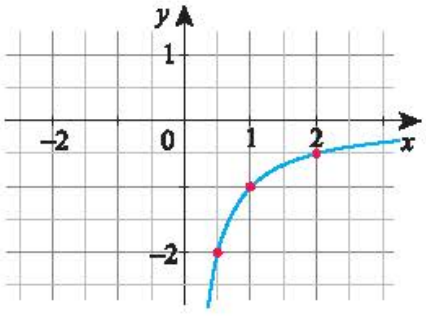
b) Wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$ i $a<0$, jest hiperbolą o równaniu $y=\frac{a}{x}$, której gałęzie położone są w ■ i ■ ćwiartce układu współrzędnych.

Przykład 2. Naszkicuj „sprytnie” wykres funkcji określonej wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$, jeżeli: **a)** $a=-1$, **b)** $a=6$.

Rozwiązanie. Wykresem funkcji określonej wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$, jest hiperbola składająca się z dwóch gałęzi. Zauważamy, że środkiem symetrii tej figury (hiperboli) jest początek układu współrzędnych, czyli punkt $O=(0,0)$. Aby naszkicować jedną gałąź hiperboli, wystarczy zaznaczyć dwa lub trzy punkty, które na niej leżą.

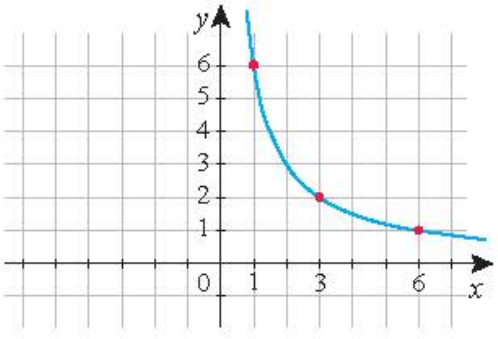
a)

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=\frac{-1}{x}$	−2	−1	$-\frac{1}{2}$

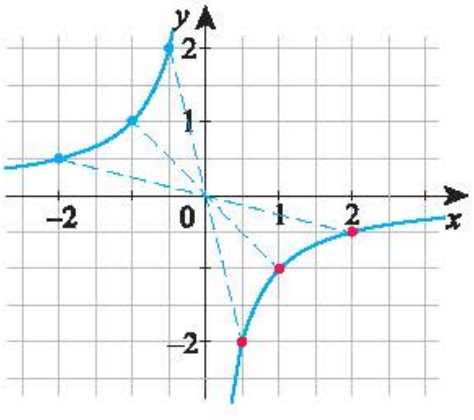


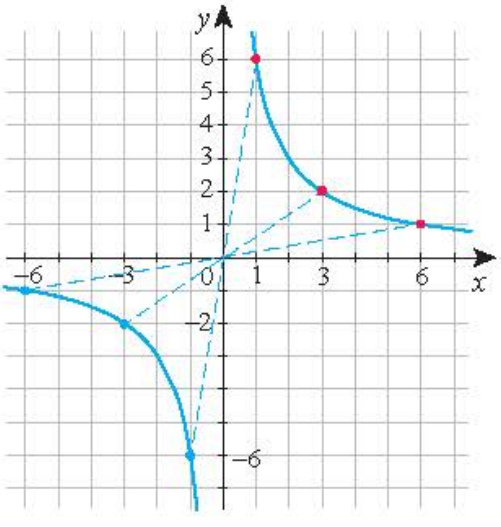
b)

x	1	3	6
$y=\frac{6}{x}$	6	2	1



Aby naszkicować drugą gałąź hiperboli, rysujemy ją symetrycznie względem punktu $O=(0,0)$.





Ćwiczenie 4. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$, jeżeli: **a)** $a=-3$, **b)** $a=4$, **c)** $a=-5$.

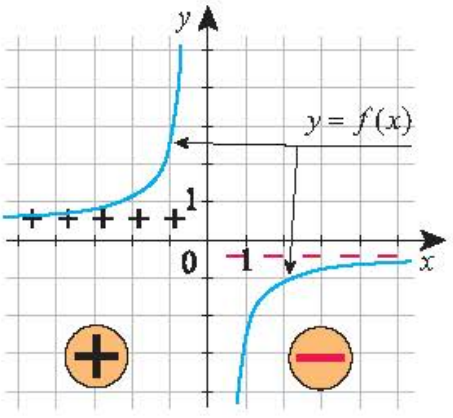
Uwaga

Jeżeli punkt $P=(x,y)$ leży na hiperboli o równaniu $y=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$ i $a\neq 0$, to $x\cdot y=a$.

Ćwiczenie 5. Punkt P leży na wykresie funkcji f określonej wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$. Oblicz wartość współczynnika a, gdy:

a) $P=(1, 6)$, **b)** $P=(-3, 5)$, **c)** $P=(2, -7)$, **d)** $P=(-4, -2)$.

Przykład 3. Hiperbola przedstawiona na rysunku jest wykresem funkcji określonej wzorem $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$ i $a<0$.



Odczytaj z wykresu i określ:

a) czy funkcja f ma miejsca zerowe,

b) przedziały, w których funkcja f jest rosnąca,

c) przedział, w którym funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

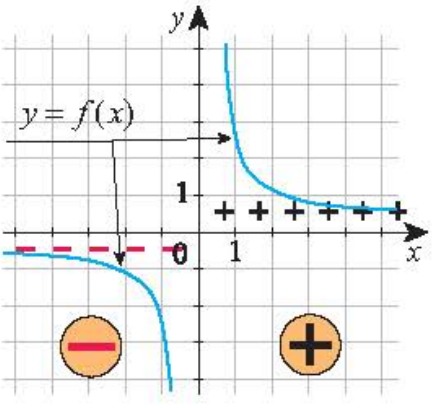
Rozwiązanie

a) Funkcja f nie ma miejsc zerowych, bo jej wykres nie przecina osi x.

b) Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.

c) $f(x)<0$, gdy $x>0$, czyli $f(x)<0$, gdy $x\in(0; +\infty)$.

Ćwiczenie 6. Hiperbola przedstawiona na rysunku jest wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$ i $a>0$.



Odczytaj z wykresu i określ:

a) przedziały, w których funkcja f jest malejąca,

b) przedział, w którym funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

Uwaga

Funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$ i $a\neq 0$, jest monotoniczna w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$, ale nie jest monotoniczna w całej dziedzinie $R\setminus\{0\}$.

Funkcja ta jest w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$:

- rosnąca, gdy $a<0$,
- malejąca, gdy $a>0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. **b)** Tak. 2. **a)** 2, **b)** −2, **c)** 3. 3. **a)** I i III, **b)** II i IV. 5. **a)** 6, **b)** −15, **c)** −14, **d)** 8.
6. **a)** Funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$, **b)** $f(x)<0$, gdy $x<0$, czyli $x\in(-\infty; 0)$.

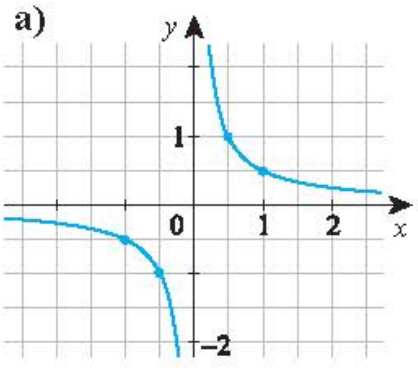
Zadania utrwalające

10.1. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę. Sporządź wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=\frac{-6}{x}$.

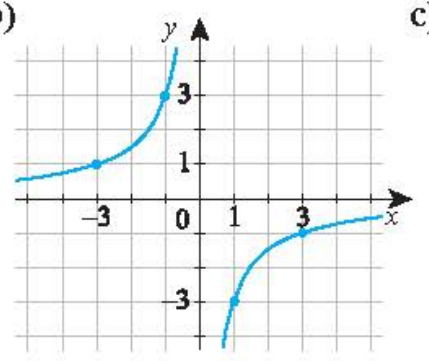
x	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6
$y=\frac{-6}{x}$	■	■	■	■	■	■	■	■

10.2. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji określonej wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$. Odczytaj z wykresu wartość współczynnika a.

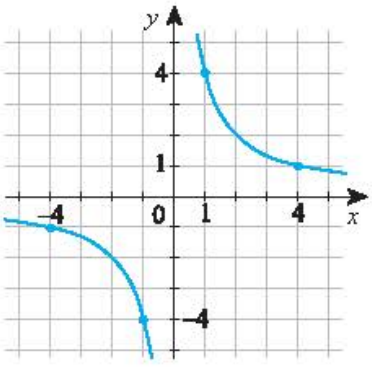
a)



b)



c)



10.3. Spośród punktów:

$A=(-3,0)$, $B=(-2,-3)$, $C=(3,2)$, $D=\left(9,\frac{2}{3}\right)$, $E=\left(5,\frac{6}{5}\right)$, $F=\left(30,\frac{1}{5}\right)$, $G=(3,6)$

wybierz te, które nie należą do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{6}{x}$.

10.4. Sporządź wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\frac{-4}{x}$, b) $f(x)=\frac{3}{x}$, c) $f(x)=-\frac{2}{x}$.

10.5. Przepisz zdanie do zeszytu i w miejsce ■ wpisz słowo „dodatnie” lub „ujemne”.

Funkcja określona wzorem $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x\neq 0$, jest rosnąca w przedziale $(0;+\infty)$, gdy a jest ■ oraz malejąca w przedziale $(-\infty;0)$, gdy a jest ■.

10.6. D Uzasadnij, że punkty A, B, C leżą na tej samej hiperboli, gdy:

a) $A=(-5,1)$, $B=\left(-\frac{1}{125},625\right)$, $C=\left(3000,-\frac{1}{600}\right)$,

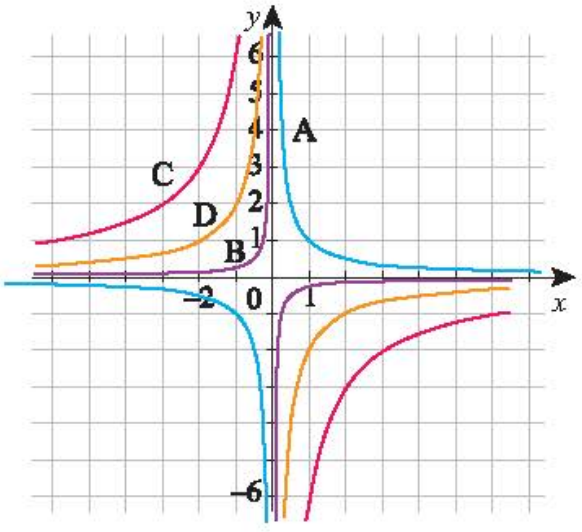
b) $A=\left(1,\sqrt{2}\right)$, $B=\left(\sqrt{8},\frac{1}{2}\right)$, $C=\left(\sqrt{0{,}2},\sqrt{10}\right)$.

10.7. Adam narysował w jednym układzie współrzędnych hiperbole A, B, C i D określone równaniami:

1 $y=\frac{-2}{x}$, **2** $y=\frac{1}{x}$,

3 $y=\frac{-\frac{1}{4}}{x}$, **4** $y=-\frac{6}{x}$.

Przyporządkuj wzór hiperboli do jej wykresu.



Wielkości odwrotnie proporcjonalne

- Dwie wielkości zmieniają się odwrotnie proporcjonalnie, jeżeli wzrost jednej z nich pociąga za sobą odpowiednie zmniejszenie drugiej.
- Dwie wielkości są odwrotnie proporcjonalne, gdy ich iloczyn ma **stałą wartość**.

Przykłady wielkości odwrotnie proporcjonalnych:

- Czas t oraz prędkość v w ruchu na ustalonej drodze s.
  Na przykład, gdy $s=120$ km, wtedy $t\cdot v=120$.

Gdańsk — $s=120$ km — Chojnice



$4\text{ h}\cdot 30\frac{\text{km}}{\text{h}}=120\text{ km}$



$15\text{ h}\cdot 8\frac{\text{km}}{\text{h}}=120\text{ km}$



$1{,}5\text{ h}\cdot 80\frac{\text{km}}{\text{h}}=120\text{ km}$

- Długości a i b boków prostokąta o stałym polu P.
  Na przykład, gdy $P=20$, to $a\cdot b=20$.

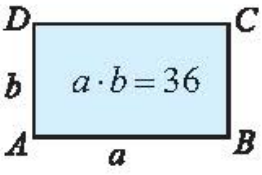
2 $P=20$ — **10**

2,5 $P=20$ — **8**

4 $P=20$ — **5**

5 $P=20$ — **4**

Ćwiczenie 7. Pole prostokąta jest równe 36. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę.



a	1	■	3	■	6	■	9	■
b	■	2	■	4	■	8	■	12

Uwaga

Dwie wielkości zmienne x i y są:

- wprost proporcjonalne, gdy obie jednocześnie rosną albo maleją tyle samo razy, to znaczy, gdy iloraz $\frac{y}{x}$ jest stały,
- odwrotnie proporcjonalne, gdy ze wzrostem jednej druga maleje tyle samo razy, to znaczy, gdy iloczyn $y \cdot x$ jest stały,

Ćwiczenie 8. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę, wiedząc, że wielkości zmienne x i y są odwrotnie proporcjonalne.

x	2	■	5	1	■	8
y	■	4	20	■	50	■

Ćwiczenie 9. Przerysuj do zeszytu tabele **1**, **2** i w miejsce ■ wpisz odpowiednie liczby, by wielkości x i y były:

1 wprost proporcjonalne oraz $\frac{y}{x}=24$

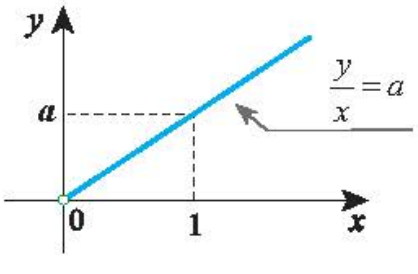
x	1	2	3	4
y	■	■	■	■

2 odwrotnie proporcjonalne oraz $x \cdot y = 24$

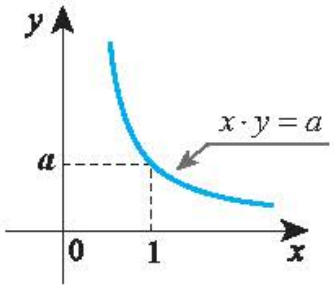
x	1	2	3	4
y	■	■	■	■

W zagadnieniach praktycznych, mówiąc o wielkościach wprost lub odwrotnie proporcjonalnych, mówimy o wielkościach przyjmujących wartości **dodatnie**. Wykresy tych zależności przedstawione są na rysunkach.

x, y – wielkości wprost proporcjonalne



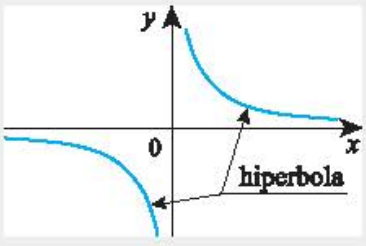
x, y – wielkości odwrotnie proporcjonalne



Uwaga

Dwie wielkości odwrotnie proporcjonalne mogą również przyjmować wartości ujemne.

Wykresem proporcjonalności odwrotnej wielkości x i y, gdy $x \neq 0$, jest hiperbola o równaniu $y=\frac{a}{x}$.



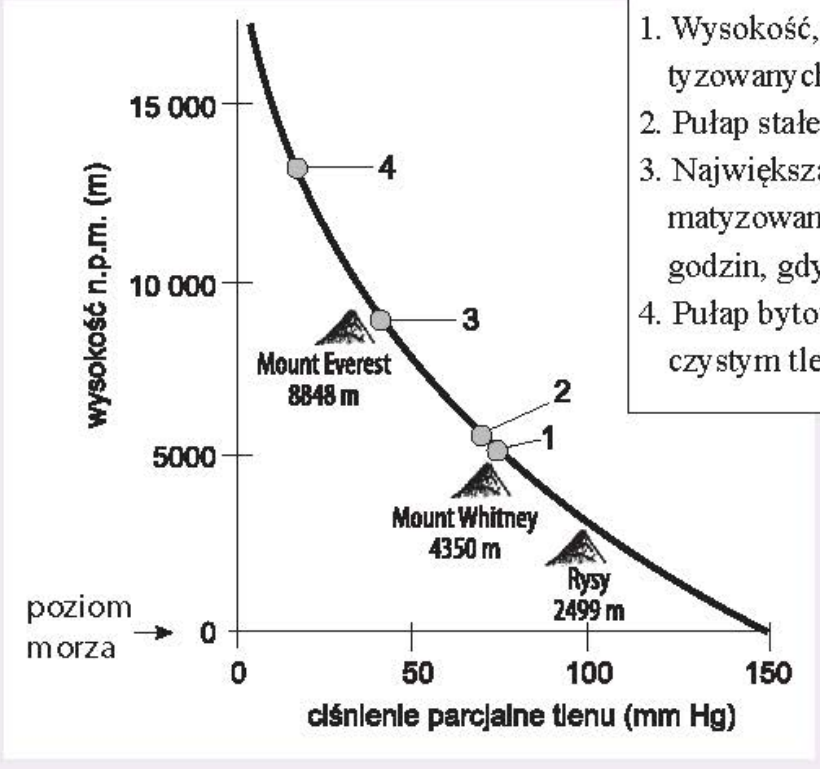
Obserwując zjawiska zachodzące w przyrodzie, staramy się ustalić zależności między wielkościami mającymi wpływ na przebieg tych zjawisk. Okazuje się, że niektóre z nich są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Pokażemy to na przykładach.

Ćwiczenie 10. Ustal, czy wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi są wielkości określające:

a) odległości na mapie i odpowiadające im odległości w terenie,

b) cenę bułki i liczbę bułek, które można kupić za 10 zł.

Ćwiczenie 11. Na rysunku przedstawiona jest zależność między wysokością nad poziomem morza a ciśnieniem parcjalnym tlenu.



1. Wysokość, na której większość niezaaklimatyzowanych osób traci przytomność.
2. Pułap stałego bytowania ludzi.
3. Największa wysokość umożliwiająca zaaklimatyzowanym ludziom przetrwanie kilku godzin, gdy oddychają powietrzem.
4. Pułap bytowania człowieka, gdy oddycha czystym tlenem.

Ciśnienie parcjalne (cząstkowe) tlenu – ciśnienie, jakie wywierałby tlen, gdyby sam zajmował całą objętość powietrza.

Jak myślisz, z jakiej najwyższej wysokości można bezpiecznie skoczyć ze spadochronem:
a) bez butli z tlenem, **b)** z butlą z tlenem?
Swoje odpowiedzi porównaj z informacjami podanymi w internecie.

Przykład 4. W pewnym doświadczeniu badano, w jaki sposób ciśnienie p gazu o stałej temperaturze wypełniającego balon zmienia się w zależności od jego objętości V. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli.

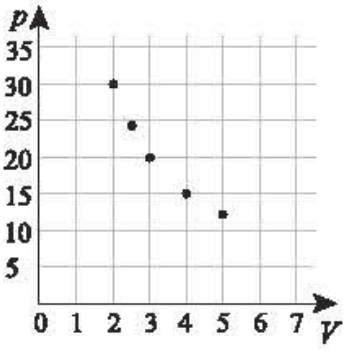
V	2	2,5	3	4	5
p	30	24	20	15	12

a) Zaznacz otrzymane wyniki w układzie współrzędnych.

b) Wyznacz wzór funkcji, która może określać zależność między ciśnieniem p a objętością V gazu w balonie.

Rozwiązanie

a)

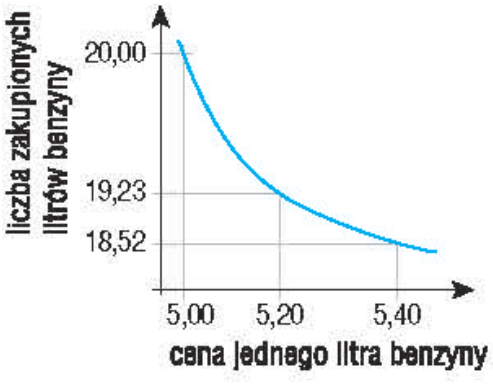


b) Analizując tabelę, zauważamy, że iloczyn wielkości V i p jest stały.

$$V \cdot p = 60, \text{ skąd } p = \frac{60}{V}, \text{ gdzie } V > 0.$$

Odp.: $p = \frac{60}{V}$, gdzie $\mathbf{2 \le V \le 5}$.

Ćwiczenie 12. Pewien kierowca ma zwyczaj tankowania benzyny za stałą kwotę. Na wykresie pokazano zależność między ceną benzyny a liczbą zatankowanych litrów paliwa. Określ, jaką kwotę przeznacza ten kierowca na jedno tankowanie.



Przykład 5. Pewną pracę może wykonać 14 robotników w ciągu 15 dni. W ciągu ilu dni wykona tę samą pracę 3 robotników?

Rozwiązanie. Pracodawca oszacował, że jeśli praca ma być wykonana przez 14 robotników w czasie 15 dni, to znaczy, że na jej wykonanie potrzeba $15 \cdot 14$ roboczodni. Zatem trzech robotników będzie na wykonanie tej pracy potrzebowało również $15 \cdot 14$ roboczodni, czyli $3 \cdot x = 15 \cdot 14$

$$x = \frac{15 \cdot 14}{3} = 5 \cdot 14 = 70.$$

Liczba dni i liczba robotników są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Odp.: Trzech robotników będzie wykonywało tę pracę przez 70 dni.

Ćwiczenie 13. Zapas ziemniaków w stołówce szkolnej wystarczy na 21 dni, jeżeli dziennie będzie się wydawać 240 obiadów. Na ile dni wystarczy ten zapas, jeśli dziennie będą wydawane 252 obiady?

Odpowiedzi do ćwiczeń

8.

x	2	25	5	1	2	8
y	50	4	20	100	50	12,5

9. 1°

x	1	2	3	4
y	24	48	72	96

2°

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

10. **a)** Nie, **b)** tak. **12.** 100 zł. **13.** 20 dni.

Zadania utrwalające

10.8. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz liczbę tak, by wielkości x i y były:

a) wprost proporcjonalne

x	2	5	■	11
y	■	7,5	6	■

b) odwrotnie proporcjonalne

x	1,5	■	6	0,6
y	30	9	■	■

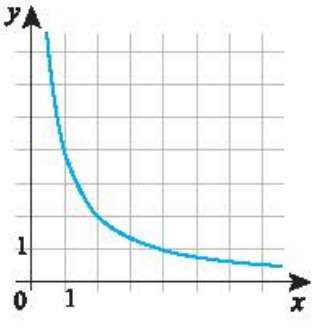
10.9. Kupiono działkę budowlaną w kształcie prostokąta o polu 1600 m^2. Zapisz wzór wyrażający zależność między wymiarami tej działki a jej polem.

10.10. Na rysunku przedstawiony jest wykres pewnej proporcjonalności.

a) Napisz wzór tej proporcjonalności.

b) Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednią liczbę.

x	$\sqrt{2}$	■
y	■	1



10.11. W tabeli podane są przybliżone wartości średnic erytrocytów oraz ich liczby zawarte w milimetrze sześciennym krwi u różnych kręgowców.

Badane zwierzę	Liczba erytrocytów (tys./mm^3 krwi)	Średnica erytrocytów w przybliżeniu (µm)
żaba	400	22
jaszczurka	1600	17
karp	2000	14
pies	6200	7
koza	18 000	3

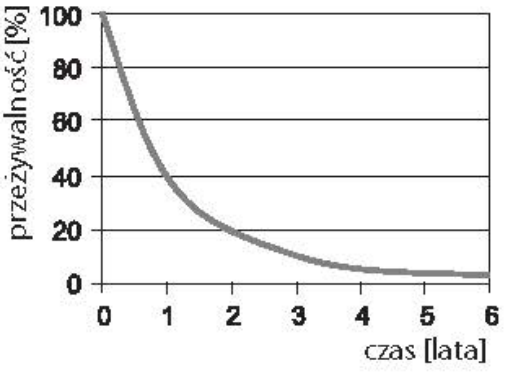
a) Przedstaw w formie wykresu dane zamieszczone w tabeli.

b) Podaj, jaka zależność występuje u kręgowców pomiędzy liczbą erytrocytów a ich średnicą.



Erytrocyty (krwinki czerwone) mają kształt krążka obustronnie wklęsłego. Erytrocyty u człowieka mają średnicę 7-8 mikrometrów.

10.12. Na wykresie przedstawiona jest krzywa przeżywalności populacji pewnego gatunku ryb.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Śmiertelność w populacji ryb jest stała i nie zależy od wieku osobników.	P	F
Największa śmiertelność w populacji ryb występuje do dwóch lat życia.	P	F
W populacji ryb występuje wysoka przeżywalność osobników młodych.	P	F

10.13. Ciężarówka, jadąca ze średnią prędkością równą $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$, przebywa odległość z Warszawy do Gdańska w czasie 5 godzin i 30 minut. W jakim czasie przebędzie tę samą drogę samochód jadący ze średnią prędkością równą $75\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

10.14. Sześciu pracowników, pracując z tą samą wydajnością, wykonuje pewną pracę w czasie 4 godzin. Ile osób powinno pracować z taką samą wydajnością, aby praca ta została wykonana w czasie 3 godzin?

10.15. Radio A nadaje na falach o długości 250 m na częstotliwości 1200 kHz. Radio B nadaje na częstotliwości 300 kHz. Na jakiej długości fal nadaje radio B?
Wskazówka. Iloczyn długości fali radiowej i jej częstotliwości jest wielkością stałą.

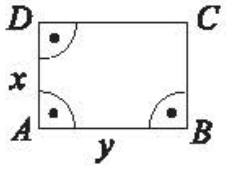
10.16. Z prawa Ohma wynika zależność $I=\frac{U}{R}$, gdzie I to natężenie prądu, U to napięcie, a R to opór obwodu prądu.

a) Gdy stały jest opór R, to natężenie I i napięcie U są wielkościami wprost czy odwrotnie proporcjonalnymi?

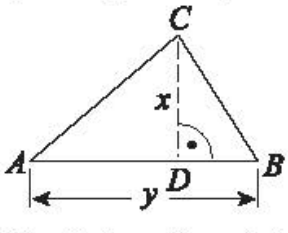
b) Gdy stałe jest napięcie U prądu, to natężenie I i opór R są wielkościami wprost czy odwrotnie proporcjonalnymi?

10.17. Pole wielokąta przedstawionego na rysunku jest równe 100.

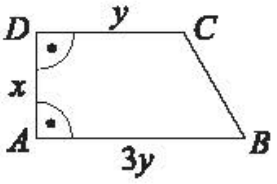
a)



b)



c)



Napisz wzór wyrażający zależność między długością odcinka y a długością odcinka x.

10.18. Wojtek ocenił, że wartość k (w złotych) samochodu jest odwrotnie proporcjonalna do jego wieku x (w latach). Zapisz tę zależność, gdy po dwóch latach samochód ma wartość 30 000 zł.

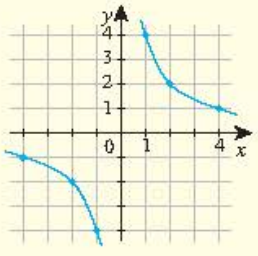
a) Oblicz cenę samochodu po sześciu latach.

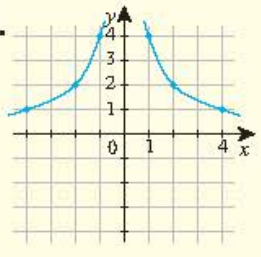
b) Ile lat ma samochód, jeżeli kosztuje 3000 zł?

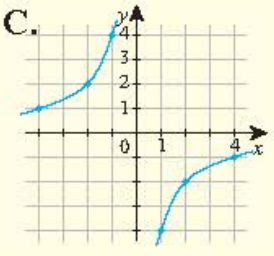
Zestaw powtórkowy

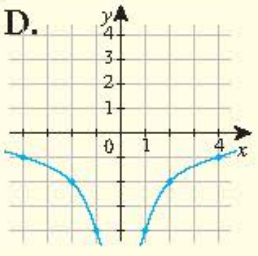
1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=-\frac{4}{x}$ przedstawiony jest na rysunku:

A.


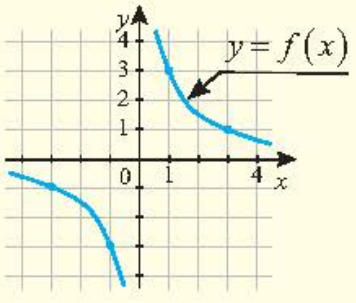
B.


C.


D.


2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem postaci $f(x)=\frac{a}{x}$, więc:



A. $f(x)=-\frac{3}{x}$, **B.** $f(x)=\frac{2}{x}$,

C. $f(x)=\frac{3}{x}$, **D.** $f(x)=\frac{6}{x}$.

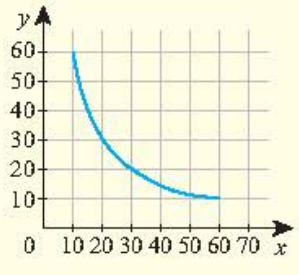
3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=-\frac{1}{x}$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu:

A. $y=-x$, **B.** $y=x$, **C.** $y=2$, **D.** $y=-4$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Współczynnik proporcjonalności wielkości x i y, których zależność przedstawiona jest na wykresie, jest równy:



A. 6, **B.** 10,

C. 60, **D.** 600.

5. W tabeli podane są po dwie wartości wielkości zmiennych x i y, które są odwrotnie proporcjonalne.

x	2	1
y	$k-1$	$k+1$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wzór tej proporcjonalności ma postać:

A. $x\cdot y=1$, **B.** $x\cdot y=2$, **C.** $x\cdot y=3$, **D.** $x\cdot y=4$.

6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Pewną pracę może wykonać 10 robotników w ciągu 15 dni. Tę samą pracę 3 robotników będzie wykonywało w ciągu 50 dni.	**P**	**F**
Dla 24 żołnierzy na 7-dniowy pobyt na poligonie przygotowuje się 126 kg chleba, a dla 36 żołnierzy na 9-dniowy pobyt – 147 kg chleba.	**P**	**F**
W czasie 0,4 sekundy głos w wodzie przebywa odległość równą 574 m, a w czasie 1,5 sekundy przebywa 2012 m.	**P**	**F**

7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi są wielkości x i y określone zależnością:

A. $\frac{3}{x}=\frac{4}{y}$, **B.** $\frac{2}{\sqrt{2}+1}=\frac{x}{y}$, **C.** $\frac{2x}{7}=\frac{3y}{2}$, **D.** $\frac{7}{x}=\frac{y}{5}$.

8. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wielkościami wprost proporcjonalnymi są wielkości x i y określone zależnością:

A. $\frac{x}{2}=\frac{8}{y}$, **B.** $\frac{4x}{15}=\frac{3}{8y}$, **C.** $\frac{7}{y}=\frac{2}{x}$, **D.** $\frac{5}{x}=\frac{y}{15}$.

9. Pojemność dętki samochodowej jest równa $0{,}08\,\text{m}^3$, a pojemność roboczej części pompki $0{,}001\ \text{m}^3$. W dętce ciśnienie powietrza jest równe 10^5 Pa. Oblicz, ile ruchów należy wykonać pompką, by ciśnienie w dętce wzrosło do wartości $3{,}5\cdot 10^5$ Pa. W obliczeniach przyjmij, że temperatura powietrza w dętce jest równa temperaturze otaczającego powietrza.

10. Naszkicuj wykres funkcji f oraz określ dziedzinę i zbiór jej wartości, gdy:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{gdy } x<-1\\ x+1, & \text{gdy } x\geq -1\end{cases}$,

b) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{gdy } -1\leq x\leq 1\\ \frac{1}{x}, & \text{gdy } x<-1 \text{ lub } x>1\end{cases}$.

11. Równania kwadratowe

Stopień uporządkowanego równania z jedną niewiadomą rozpoznajemy po wykładniku potęgi, w której podstawą jest ta niewiadoma.

Stopniem uporządkowanego równania jest najwyższy z tych wykładników.

Np.: $x^4+5x^2-1=0$ – równanie stopnia czwartego z niewiadomą x,

$2y^3+2y^2-3y=0$ – równanie stopnia trzeciego z niewiadomą y,

$2x\cdot(x+1)=x$ – równanie stopnia drugiego z niewiadomą x.

Ćwiczenie 1. Określ stopień równania:

a) $x^2-16=0$, **b)** $2x-3=0$, **c)** $x^2=27$, **d)** $2x^2+5x=0$,

e) $x^2(3x-x^2)=10$, **f)** $x^5-1=0$, **g)** $x^2-6x+5=0$, **h)** $x(x-2)=5$.

Obecnie poznamy równania stopnia drugiego zwane **równaniami kwadratowymi**.

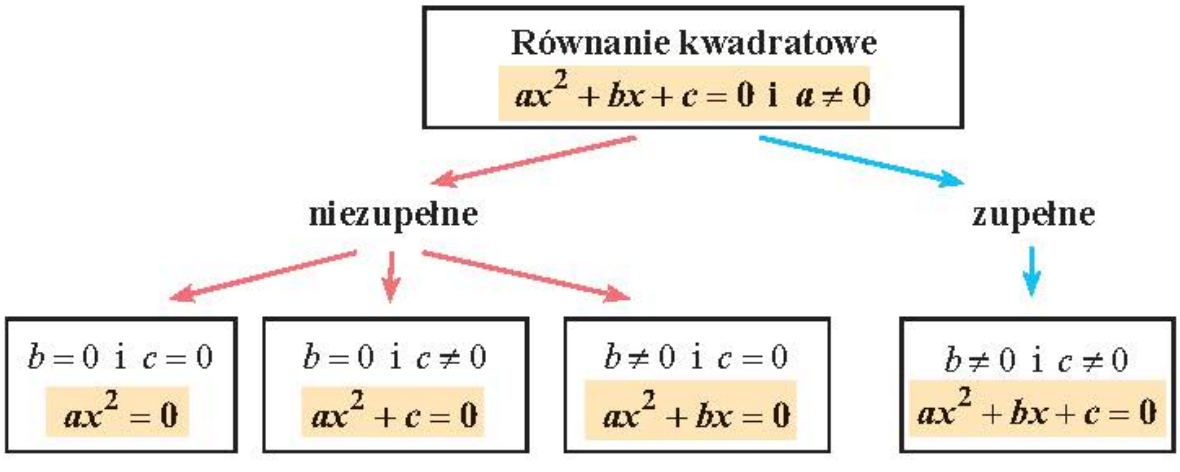
Równanie postaci $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, gdzie $\boldsymbol{a\neq 0}$ oraz a, b, c są liczbami rzeczywistymi, nazywamy **równaniem kwadratowym** (równaniem stopnia drugiego z niewiadomą x.

Liczby $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ nazywamy współczynnikami liczbowymi równania kwadratowego.

Ćwiczenie 2. Podaj współczynniki liczbowe równania kwadratowego:

a) $2x^2-6x+3=0$, **b)** $-3x^2+8x=0$, **c)** $-x^2+9=0$, **d)** $6x^2=0$, **e)** $2x-x^2=1$.

Wśród równań kwadratowych wyróżniamy równania kwadratowe zupełne i niezupełne.



Uwaga. **Pierwiastkiem (rozwiązaniem) równania** nazywamy każdą liczbę, która spełnia równanie, tzn. liczbę, po wstawieniu której w miejsce niewiadomej lewa L strona równania jest równa stronie prawej P.

Ćwiczenie 3. Sprawdź, która z liczb: -4, -3, 0, π jest pierwiastkiem równania:
a) $x^2-\pi^2=0$, **b)** $x^2+x-12=0$, **c)** $x(x+3)=0$, **d)** $(x+3)(x+4)=0$.

Równania kwadratowe niezupełne

Aby rozwiązać równanie kwadratowe niezupełne, korzystamy z jednej z dwóch podanych niżej własności działań na liczbach:

1° kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną,

Jeżeli $a\in\boldsymbol{R}$, to $a^2\geq 0$.

2° iloczyn dwóch liczb jest równy 0, gdy co najmniej jedna z nich jest równa 0.

Jeżeli $a\in\boldsymbol{R}$, $b\in\boldsymbol{R}$ i $a\cdot b=0$, to $a=0$ lub $b=0$.

Sposoby rozwiązywania takich równań pokażemy na przykładach.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $7x^2=0$.

Rozwiązanie

$$7x^2=0 \quad /:7$$
$$x^2=0, \text{ więc } x=0 \text{ (bo } 0^2=0).$$

Równanie $ax^2=0$, gdzie $a\neq 0$, ma jedno rozwiązanie równe 0.

Odp.: $x_0=0$.

Ćwiczenie 4. Rozwiąż równanie: **a)** $-3x^2=0$, **b)** $\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2$, **c)** $0=5x^2$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $4x^2-25=0$.

Rozwiązanie

I sposób:

$$4x^2-25=0$$

korzystamy z wzoru $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$(2x-5)(2x+5)=0$$

$a\cdot b=0$, gdy $a=0$ lub $b=0$

$$2x-5=0 \text{ lub } 2x+5=0$$
$$2x=5 \text{ lub } 2x=-5$$
$$x=\frac{5}{2} \text{ lub } x=-\frac{5}{2}$$

Odp.: $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=\frac{5}{2}$.

II sposób:

$$4x^2-25=0$$
$$4x^2=25 \quad /:4$$
$$x^2=\frac{25}{4}$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$|x|=\frac{5}{2}$$
$$x=\frac{5}{2} \text{ lub } x=-\frac{5}{2}.$$

$\frac{25}{4}>0$ i $x^2\geq 0$ pierwiastkujemy obie strony równania

Ćwiczenie 5. Rozwiąż równanie:

a) $16x^2-9=0$, **b)** $-3x^2=-27$, **c)** $x(x-2)=3x^2-2x-8$.

Przykład 4. Uzasadnij, że równanie $x^2+4=0$ nie ma rozwiązania.

Rozwiązanie

I sposób:

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej x jest liczbą nieujemną, tzn. $x^2\geq 0$, więc $x^2+4>0$.

II sposób:

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej x jest liczbą nieujemną, więc nie istnieje liczba, która podniesiona do kwadratu jest równa –4.

Zatem równanie $x^2+4=0$ nie ma rozwiązania. ***c.n.u.***

Ćwiczenie 6. Uzasadnij, że nie ma rozwiązania równanie:

a) $2x^2+3=0$, **b)** $-x^2-2=0$.

Uwaga

Jeżeli równanie kwadratowe ma postać $x^2=k$, to gdy:

- $k>0$ równanie ma dwa rozwiązania $x_1=-\sqrt{k}$, $x_2=\sqrt{k}$, $x=\pm\sqrt{k}$
- $k=0$ równanie ma jedno rozwiązanie $x_0=0$, $x=\sqrt{0}$
- $k<0$ równanie nie ma rozwiązania.

Ćwiczenie 7. Rozstrzygnij, ile rozwiązań ma równanie:

a) $\frac{1}{2}x^2+3=0$, **b)** $4-x^2=0$, **c)** $3x^2=2(x-1)^2+4x-2$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $3x^2+4x=0$.

Rozwiązanie. $3x^2+4x=0$ *Wyłączamy wspólny czynnik x poza nawias.*

$x\cdot(3x+4)=0$ $m\cdot n=0$ *gdy* $m=0$ *lub* $n=0$.

$x=0$ lub $3x+4=0$

$x=-\frac{4}{3}$.

Odp.: $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=0$.

Ćwiczenie 8. Rozwiąż równanie:

a) $-\frac{1}{2}x^2+3x=0$, **b)** $3x^2-5x=x^2-x$, **c)** $(x-2)^2=4$, **d)** $\frac{1}{2}x^2+x=\frac{1}{2}x+x^2$.

Uwaga

Równanie kwadratowe postaci $ax^2+bx=0$ lub postaci $x\cdot(ax+b)=0$, gdzie $a\neq 0$ i $b\neq 0$, ma dwa pierwiastki: $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. Stopień równania: **a)** 2, **b)** 1, **c)** 2, **d)** 2, **e)** 4, **f)** 5, **g)** 2, **h)** 2. 3. **a)** π, **b)** -4, **c)** $0, -3$, **d)** $-3, -4$.
5. **a)** $x_1=-\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{3}{4}$, **b)** $x_1=-3$, $x_2=3$, **c)** $x_1=-2$, $x_2=2$.
7. **a)** 0, **b)** 2, **c)** 1. 8. **a)** $x_1=0$, $x_2=6$, **b)** $x_1=0$, $x_2=2$, **c)** $x_1=0$, $x_2=4$, **d)** $x_1=0$, $x_2=1$.

Zadania utrwalające

11.1. Spośród równań oznaczonych cyframi od **1** do **9** wybierz te, które są kwadratowe i zapisz je w postaci $ax^2+bx+c=0$ oraz określ, czy równanie jest równaniem kwadratowym niezupełnym.

1 $(3-x)(3+x)=0$, **2** $x^2-17=130-2x^2$, **3** $5x^2-4x=5(x^2-2)$,

4 $15x(x-3)=4x(3-x)$, **5** $(x+4)^2-(x-1)^2=17$, **6** $(3y-2)^2=8(y+1)^2-100$,

7 $\frac{y^2}{6}+2y=\frac{6+y}{7}$, **8** $\frac{z(z+1)}{3}=\frac{(z-1)z}{4}$, **9** $(4x+6)(4x-6)=28$.

11.2. Sprawdź, która z liczb **–2**, **2**, **0** jest pierwiastkiem równania:

a) $x^2-4=0$, **b)** $x^2-2=0$, **c)** $x^2-x-6=0$, **d)** $3x(x+2)=0$.

11.3. Napisz równanie kwadratowe w postaci $ax^2+bx+c=0$ i określ, czy jest ono niezupełne, gdy:

a) $a=\sqrt{2}$, $b=1$, $c=0$, **b)** $a=-1$, $b=1$, $c=1$, **c)** $a=-4$, $b=0$, $c=\sqrt{3}$.

11.4. Pierwiastkami równania kwadratowego $3x^2+bx+c=0$ są liczby 0 i 2.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika z tego, że:

A. $b=0$ i $c=0$, **B.** $b=-6$ i $c=0$, **C.** $b=-6$ i $c\neq 0$, **D.** $b\neq -6$ i $c\neq 0$.

11.5. Rozwiąż równanie:

a) $3x^2=0$, **b)** $x^2-9=0$, **c)** $x^2=121$,

d) $-2x^2-8=0$, **e)** $x^2-3=0$, **f)** $x^2-\frac{4}{25}=0$,

g) $5x^2=99-6x^2$, **h)** $(x+5)(x-5)=24$, **i)** $x^2+169=0$,

j) $x^2-12x=2(x-3)^2$, **k)** $(x-4)^2=9-8x$, **l)** $(y+3)^2=3(2y+6)$.

11.6. Rozwiąż równanie:

a) $x^2+4x=0$, **b)** $x^2+8x=0$, **c)** $2x^2-10x=0$,

d) $x^2-5x=0$, **e)** $x^2=-\frac{1}{2}x$, **f)** $3x^2-\frac{9}{4}x=0$,

g) $y^2+0{,}75y=0{,}25y$, **h)** $\frac{3}{4}y^2+9=\frac{y}{2}+(y-3)^2$, **i)** $\frac{4}{3}y^2=\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}y^2$.

11.7. Rozwiąż równanie:

a) $m^2-18=0$, **b)** $\frac{1}{4}t^2=\frac{3}{16}t$, **c)** $\frac{1}{3}r^2-5\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$,

d) $0{,}49p^2=49$, **e)** $14y^2=196y$, **f)** $\frac{1}{4}v^2+16=0$,

g) $-2s^2=0$, **h)** $-0{,}8w^2=1$, **i)** $2\sqrt{2}\cdot z^2=2\sqrt{2}$.

11.8. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba $\sqrt{3}$ jest pierwiastkiem równania:

A. $x^2-3=0$, **B.** $x^2+\sqrt{3}x=0$, **C.** $x^2-\sqrt{3}=0$, **D.** $6x^2-6\sqrt{3}=0$.

Równanie kwadratowe zupełne a wzory skróconego mnożenia

Przypomnijmy

Przedstaw w postaci różnicy kwadratów wyrażenie x^2+5x.

Rozwiązanie

$$x^2+5x=x^2+2\cdot\overbrace{\frac{5}{2}}^{5}\cdot x+\overbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}^{0}=$$

$$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Stosujemy wzór $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, *gdzie* $a=x$ *i* $b=\frac{5}{2}$.

Ćwiczenie 9. Przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń sumę (różnicę):

a) x^2+7x, **b)** x^2-8x, **c)** $x^2+\frac{1}{2}x$.

W rozwiązywaniu równań kwadratowych zupełnych postaci $ax^2+bx+c=0$, gdy $a\neq 0$, $b\neq 0$ i $c\neq 0$, bardzo przydatne są wzory skróconego mnożenia: kwadrat sumy i różnicy dwóch wyrażeń oraz różnica kwadratów.

Przykład 5. Stosując wzór skróconego mnożenia, rozwiąż równanie:

a) $x^2-2x-8=0$, **b)** $\frac{1}{2}x^2-2x+3=0$.

Rozwiązanie

a)

$$x^2-2x-8=0$$

$$x^2-2x=8$$

Przedstawiamy różnicę x^2-2x w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń.

$$x^2-\overbrace{2}^{2}\cdot 1\cdot x+\overbrace{1^2-1^2}^{0}=8$$

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

$$(x-1)^2-1^2=8$$

$$(x-1)^2=9$$

$x-1=\pm\sqrt{9}$

$$x-1=3 \text{ lub } x-1=-3$$

$$x=4 \text{ lub } x=-2.$$

b)

$$\frac{1}{2}x^2-2x+3=0 \quad /\cdot 2$$

Mnożymy obie strony równania przez 2, by otrzymać przy x^2 współczynnik 1.

$$x^2-4x+6=0$$

$$x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2+6=0$$

$4x=2\cdot 2x$ i $2^2-2^2=0$

$$(x-2)^2=-2.$$

Równość fałszywa, bo $(x-2)^2\geq 0$.

Odp.: **a)** $x_1=-2$, $x_2=4$, **b)** równanie nie ma rozwiązania.

Ćwiczenie 10. Stosując wzór skróconego mnożenia, rozwiąż równanie:

a) $x^2+6x+5=0$, **b)** $x^2+8x+12=0$, **c)** $x^2-14x-51=0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

9. **a)** $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$, **b)** $(x-4)^2-16$, **c)** $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$. 10. **a)** $x_1=-5$, $x_2=-1$, **b)** $x_1=-6$, $x_2=-2$, **c)** $x_1=-3$, $x_2=17$. *Wskazówka.* **a)** $(x+3)^2=4$, **b)** $(x+4)^2=4$, **c)** $(x-7)^2=100$.

Zadania utrwalające

11.9. Przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń sumę (różnicę):

a) x^2+2x, **b)** $x^2+\frac{3}{4}x$, **c)** x^2-10x, **d)** $x^2+0,25x$.

11.10. Rozwiąż równanie:

a) $(x-7)^2=0$, **b)** $(x-3)^2=32$, **c)** $5(x+2)^2=\frac{4}{5}$,

d) $\left(x-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{1}{9}=0$, **e)** $5(x-8)^2=25$, **f)** $(x+2)^2=12$.

11.11. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeden pierwiastek ma równanie:

A. $(x-3)^2=-2$, **B.** $2(x-3)^2=0$, **C.** $(x-3)^2=2$, **D.** $(x-3)^2+2=0$.

11.12. Rozwiąż równanie:

a) $x^2+16x+64=0$, **b)** $x^2-14x+49=0$, **c)** $x^2-20x+100=0$,

d) $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$, **e)** $x^2+x+0,25=0$, **f)** $x^2-\sqrt{2}x+0,5=0$.

11.13. Stosując wzory skróconego mnożenia, rozwiąż równanie:

a) $x^2-4x=16$, **b)** $x^2+8x=20$, **c)** $x^2+6x=-3$,

d) $x^2+x=2$, **e)** $x^2-5x=\frac{3}{4}$, **f)** $x^2-7x=3\frac{3}{4}$,

g) $x^2+3x=4$, **h)** $x^2+9x=\frac{19}{4}$, **i)** $x^2-\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}$.

11.14. Rozwiąż równanie:

a) $x^2-2x-35=0$, **b)** $x^2+18x-144=0$, **c)** $x^2-6x-16=0$,

d) $x^2+2\sqrt{3}x-6=0$, **e)** $x^2-4\sqrt{2}x-1=0$, **f)** $x^2-\sqrt{7}x-\frac{1}{2}=0$.

11.15. Rozwiąż równanie:

a) $3x^2+5x=2$, **b)** $5x^2+9x=2$, **c)** $4x^2-12x=7$,

d) $4x^2+2x=\frac{15}{4}$, **e)** $3x^2-1,8x=2,73$, **f)** $5x^2-20x=8,8$.

Wyróżnik równania kwadratowego i liczba jego pierwiastków

Przykład 6. Wykaż, że równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a\neq 0$, można przedstawić w postaci $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Rozwiązanie

Z (założenie): $ax^2+bx+c=0$ i $a\neq 0$, | ***T (teza):*** $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Dowód:

$$ax^2+bx+c=0 \quad /:a$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0, \text{ skąd } x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \qquad a\neq 0$$

$$x^2+\overbrace{2\cdot\frac{1}{2}}^{1}\cdot\frac{b}{a}x+\overbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2}^{0}=-\frac{c}{a}$$

Wyrażenie $x^2+\frac{b}{a}x$ rozszerzamy do postaci $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\cdot\frac{4a}{4a} \qquad \frac{4a}{4a}=1$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \textbf{c.n.u.}$$

Uwaga

- Każde równanie kwadratowe $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ można przedstawić w postaci
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$
- Liczbę $\boldsymbol{b^2-4ac}$ nazywamy wyróżnikiem równania kwadratowego i oznaczamy Δ (*czytaj*: delta), czyli $\boldsymbol{\Delta=b^2-4ac}$.

Ćwiczenie 11. Oblicz wyróżnik Δ równania kwadratowego:

a) $2x^2-x-1=0$, **b)** $-x^2-10x+11=0$, **c)** $-\frac{1}{2}x^2+3x-6=0$, **d)** $25x^2+1=0$.

Liczba pierwiastków równania kwadratowego zależy od tego, czy wyróżnik delta (Δ) jest liczbą dodatnią, ujemną czy też równą zero. Jak myślisz, dlaczego?

Ćwiczenie 12. Uzasadnij, że liczba pierwiastków równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ zależy od znaku wyróżnika $\Delta=b^2-4ac$.

Przykład 7. Rozwiąż równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ zapisane w postaci $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$, gdzie $\Delta=b^2-4ac$.

Rozwiązanie

Rozpatrujemy trzy przypadki: **1** $\Delta<0$, **2** $\Delta=0$, **3** $\Delta>0$.

1 $\Delta<0$, wtedy $\frac{\Delta}{4a^2}<0$, więc równanie kwadratowe **nie ma rozwiązania**,

2 $\Delta=0$, wtedy $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{0}{4a^2}$, czyli $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$,

$$x+\frac{b}{2a}=0, \text{ więc } x_0=-\frac{b}{2a},$$

3 $\Delta>0$, wtedy $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\cdot|a|}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ więc}$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Postać równania	$ax^2+bx+c=0$, gdzie $a\neq0$ i $\Delta=b^2-4ac$		
Znak (wartość) wyróżnika Δ	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Pierwiastki równania	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0=-\frac{b}{2a}$	*nie ma rozwiązania*
	dwa pierwiastki x_1 *i* x_2	*jeden pierwiastek* x_0	*zero pierwiastków*

Przykład 8. Oblicz wyróżnik Δ i rozwiąż równanie:

a) $3x^2-x-4=0$, **b)** $4x^2-4x+1=0$, **c)** $2x^2+x+8=0$.

Rozwiązanie

a) $3x^2-x-4=0$

$(a=3,\ b=-1,\ c=-4)$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-4)=49.$

$\Delta>0$, więc $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7.$

$x_1=\dfrac{-(-1)-7}{2\cdot 3}=\dfrac{-6}{6}=-1$

$x_2=\dfrac{-(-1)+7}{2\cdot 3}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}.$

b) $4x^2-4x+1=0$

$(a=4,\ b=-4,\ c=1).$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 4\cdot 1=0.$

$\Delta=0.$

$x_0=\dfrac{-(-4)}{2\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$

$x_0=\dfrac{1}{2}.$

c) $2x^2+x+8=0$, $(a=2,\ b=1,\ c=8)$,

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot 2\cdot 8=1-64=-63.$ $\Delta<0$

Odp.: **a)** $x_1=-1,\ x_2=\dfrac{4}{3}$, **b)** $x_0=\dfrac{1}{2}$, **c)** równanie nie ma pierwiastków, bo $\Delta<0$.

Ćwiczenie 13. Oblicz wyróżnik Δ i rozwiąż równanie:

a) $2x^2-20x=22$, **b)** $3x^2-x+1=0$, **c)** $\dfrac{1}{8}x^2-2x+8=0.$

Ćwiczenie 14. Rozwiąż równanie:

a) $(x-5)(x-3)=0$, **b)** $x(x-5)=2x-10$, **c)** $(x-3)^2=8-4x.$

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. **a)** $\Delta=9$, **b)** $\Delta=144$, **c)** $\Delta=-3$, **d)** $\Delta=-100$. **12.** *Wskazówka.* Zauważ, że w ułamku $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ mianownik $4a^2$ jest zawsze liczbą dodatnią, więc znak tego ułamka zależy tylko od znaku licznika b^2-4ac, czyli wyróżnika Δ.

13. **a)** $x_1=-1,\ x_2=11$, **b)** nie ma rozwiązania, **c)** $x_0=8$. **14.** **a)** $x_1=3,\ x_2=5$, **b)** $x_1=2,\ x_2=5$, **c)** $x_0=1$.

Zadania utrwalające

11.16. Oblicz wyróżnik Δ równania kwadratowego i określ, czy to równanie ma rozwiązanie.

a) $x^2-x-1=0$, **b)** $x^2+x+1=0$, **c)** $3x^2-\sqrt{2}x+1=0$,

d) $6x^2-13x+6=0$, **e)** $x^2-3x-10=0$, **f)** $x^2-5x+6=0.$

11.17. Określ liczbę pierwiastków równania:

a) $x^2-\pi x+2=0$, **b)** $x^2-3x+\sqrt{2}=0$, **c)** $2^{98}\cdot x^2+2^{50}\cdot x+1=0$,

d) $\sqrt{3}x^2-\sqrt{6}x+\sqrt{2}=0$, **e)** $(\log_2 5)\cdot x^2-x+\log_2 1=0$.

11.18. Oblicz wyróżnik Δ i rozwiąż równanie:

a) $x^2-6x-7=0$, **b)** $x^2-x+\frac{1}{4}=0$, **c)** $x^2-4x+25=0$,

d) $-2x^2+x+3=0$, **e)** $-x^2-20x-75=0$, **f)** $3z^2-2z+10=0$.

11.19. Rozwiąż równanie:

a) $y^2-2y+1=\frac{1}{4}$, **b)** $y^2-0,2y+0,03=0,02$, **c)** $5x^2-4=2\left(x^2-2\right)$,

d) $15x(x-3)=4x(3-x)$, **e)** $\frac{x(x+4)}{2}=\frac{x(x-8)}{4}+8x$, **f)** $(x+4)^2+(x-1)^2=17$.

11.20. Określ, czy równanie kwadratowe jest zupełne, czy niezupełne, i je rozwiąż.

a) $5x^2=10x$, **b)** $(x-2)^2=4$, **c)** $(y+7)^2=1\frac{7}{9}$,

d) $x^2+2x=8$, **e)** $5x(x+2)=0$, **f)** $\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{3}\left(y-\frac{1}{3}\right)$.

11.21. Rozwiąż równanie:

a) $x^2=x$, **b)** $14x-x^2=0$, **c)** $x^2-2x=-1$,

d) $x^2-6x=-10$, **e)** $16=10x-x^2$, **f)** $0,4x^2+1,2x=4$.

11.22. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wyróżnik Δ równania $\sqrt[3]{2}\cdot x^2-\sqrt[6]{6}\cdot x+\sqrt[3]{3}=0$ jest równy:

A. $\sqrt[4]{6}-4\sqrt[3]{6}$, **B.** $\sqrt[12]{6}-4\sqrt[3]{6}$, **C.** $\sqrt[3]{6}-24$, **D.** $-3\sqrt[3]{6}$.

11.23. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Mniejszym z rozwiązań równania $x^2+5x+6=0$ jest liczba:

A. –6, **B.** –3, **C.** –2, **D.** 1.

Przykłady zadań prowadzących do rozwiązywania równań kwadratowych

Przykład 9. Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest równa 61. Jakie to liczby?

Rozwiązanie. Oznaczamy: $n,\ n+1$ – dwie kolejne liczby naturalne.

Wtedy: n^2 – kwadrat liczby naturalnej n,

$(n+1)^2$ – kwadrat liczby naturalnej $n+1$,

$n^2+(n+1)^2$ – suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych,

61 – suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych.

$$n^2+(n+1)^2=61, \quad \text{więc}$$

$$n^2+n-30=0, \quad \text{skąd}$$

$$\Delta=121, \quad n_1=-6, \quad n_2=5.$$

Liczba –6 nie spełnia warunków zadania, bo nie jest liczbą naturalną.

Jeżeli $n=5$, to $n+1=6$.

Odp.: Liczby naturalne spełniające warunki zadania to 5 i 6.

Ćwiczenie 15. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 509. Jakie to liczby?

Ćwiczenie 16. Suma połowy liczby x i jej kwadratu jest równa zero. Oblicz tę liczbę.

Przykład 10. Ciało swobodnie spadające z wysokości h przebywa drogę, której wartość obliczamy z wzoru $h=\frac{1}{2}gt^2$, gdzie t oznacza czas spadania w sekundach i $g\approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Nie uwzględniając oporu powietrza, oblicz czas spadania kamienia z wysokości 180 m.

Rozwiązanie. ***Dane***: $h=180\text{m}, \quad g\approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, | ***obliczyć***: t, gdzie $t>0$.

$$h=\frac{1}{2}gt^2, \quad \text{więc} \quad 180=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot t^2$$

$$180=5t^2 \quad /:5$$

$$36=t^2$$

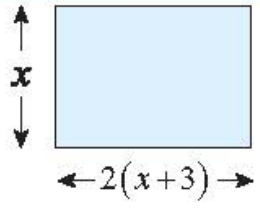
$$t=6 \quad \text{lub} \quad t=-6.$$

Z założenia $t>0$, więc $t=6$.

Odp.: Czas spadania kamienia jest równy 6 sekund.

Ćwiczenie 17. Samochód o masie (m) równej 800 kg ruszył ze skrzyżowania. Oblicz, jaką prędkość uzyskał samochód w chwili, gdy jego energia kinetyczna (E_k) była równa 80 000 J. *Wskazówka.* $E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$.

Przykład 11. Pole prostokąta jest równe 176 cm^2. Długości boków prostokąta zapisano w postaci wyrażeń algebraicznych. Oblicz długości boków prostokąta.



Rozwiązanie

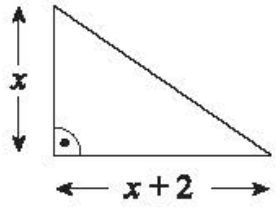
Dane: $P = 176$ cm^2, | ***obliczyć:*** x – długość boku prostokąta ($x > 0$), $2(x+3)$ – długość drugiego boku prostokąta.

$$P = x \cdot 2(x+3) \text{ i } P = 176, \text{ więc}$$
$$x \cdot 2(x+3) = 176$$
$$2x^2 + 6x = 176 \quad /:2$$
$$x^2 + 3x = 88$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{361}{4}$$
$$x_1 = -11, \quad x_2 = 8.$$

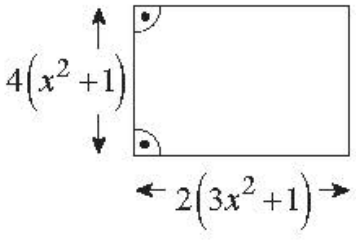
Z założenia $x > 0$, więc $x = 8$ i $2(8+3) = 22$.

Odp.: Długości boków prostokąta to 8 cm i 22 cm.

Ćwiczenie 18. Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm^2. Długości przyprostokątnych zapisano w postaci wyrażeń algebraicznych, jak na rysunku. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta.



Ćwiczenie 19. Czworokąt przedstawiony na rysunku jest kwadratem. Oblicz obwód tego kwadratu.



Odpowiedzi do ćwiczeń

15. 12, 13, 14. *Wskazówka.* Oznacz $n-1$, n, $n+1$ – trzy kolejne liczby naturalne.

16. $-\frac{1}{2}$ lub 0. **17.** $\upsilon = 10\sqrt{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, czyli $\upsilon \approx 14{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. **18.** 10 cm i 12 cm. *Wskazówka.* $\frac{x \cdot (x+2)}{2} = 60$. **19.** 32.

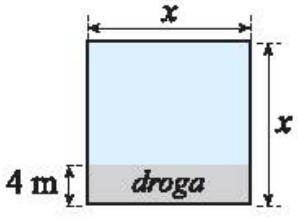
Zadania utrwalające

11.24. Iloczyn dwóch liczb jest równy 24. Wiedząc, że jedna z liczb jest o 2 większa od drugiej, znajdź te liczby.

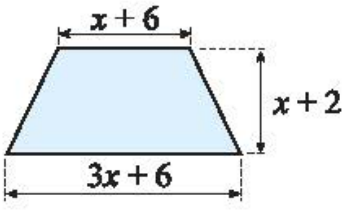
11.25. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego, wiedząc, że są one kolejnymi:
a) liczbami naturalnymi,
b) parzystymi liczbami naturalnymi.

11.26. Plac zabaw dla dzieci ma kształt prostokąta o polu 180 m^2. Jeden z boków placu jest o 3 m krótszy od drugiego. Oblicz wymiary placu zabaw.

11.27. Z działki w kształcie kwadratu rolnik odsprzedał gminie pas ziemi na drogę. Jakie były pierwotnie wymiary działki, jeżeli po sprzedaży pozostało mu 96 arów ziemi?



11.28. Pole trapezu równoramiennego jest równe 220 cm^2. Podstawy trapezu i jego wysokość opisano w postaci wyrażeń algebraicznych, jak na rysunku. Oblicz długości boków trapezu.



11.29. Boki dwóch kwadratów różnią się o 2, a suma ich pól jest równa 10. Oblicz długości boków tych kwadratów.

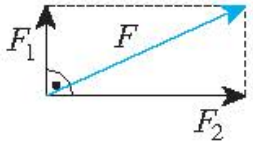
11.30. Pole rombu jest równe 600 cm^2, a długości jego przekątnych różnią się o 10 cm. Oblicz długości przekątnych i obwód tego rombu.

11.31. Sprawdź, czy długości boków trójkąta prostokątnego mogą być kolejnymi naturalnymi liczbami nieparzystymi.

11.32. Spadający kamień o masie 3 kg w chwili uderzenia o ziemię miał energię kinetyczną o wartości równej 24 J. Z jaką prędkością kamień uderzył o ziemię?

11.33. W prostokącie o wymiarach 8 cm i 5 cm powiększono tak długość i szerokość o tę samą liczbę centymetrów, że pole otrzymanego prostokąta zwiększyło się o 30 cm^2. O ile centymetrów powiększono długość i szerokość tego prostokąta?

11.34. Oblicz wartości sił F_1 i F_2 działających prostopadle do siebie, jeżeli jedna z nich jest większa od drugiej o 14 N, a ich wypadkowa F jest równa 26 N.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Liczba 2 jest pierwiastkiem równania:

A. $x^2-2=0$, **B.** $4x^2-4x+1=0$, **C.** $x^2-4x+4=0$, **D.** $x^2+4=0$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Równaniem kwadratowym zupełnym jest równanie:

A. $(x-3)(x+3)=0$, **B.** $2x(x-1)=x(x-1)$,

C. $2(x^2+1)=-3(x^2+1)$, **D.** $(x-3)^2=0$.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Tylko jeden pierwiastek ma równanie:

A. $2x^2+32=0$, **B.** $x^2=4$, **C.** $x^2-10x+25=0$, **D.** $x^2-25=0$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wyróżnik Δ równania $x^2-2\cdot10^4x+10^8=0$ jest równy:

A. $4\cdot10^4-4\cdot10^8$, **B.** $-2\cdot10^8$, **C.** $2\cdot10^4-4\cdot10^8$, **D.** 0.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Tylko jedno rozwiązanie ma równanie $x^2-x+c=0$, gdy:

A. $c=0$, **B.** $c=\frac{1}{4}$, **C.** $c=\frac{1}{2}$, **D.** $c=1$.

6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Jeżeli $x^2=9$, to $(x+1)^2$ może się równać 4.	P	F
Jeżeli $(x+1)^2-4=0$, to $x^2-4=-3$ lub $x^2-4=5$.	P	F

7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Równanie $ax^2+2x+3=0$ ma dwa pierwiastki, gdy:

A. $a=\frac{6}{12}$, **B.** $a=\frac{5}{12}$, **C.** $a=\frac{4}{12}$, **D.** $a=\frac{3}{12}$.

8. **D** Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 1636. Czy podaną zależność opisuje równanie $(2n-2)^2+(2n-1)^2+(2n)^2=1636$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	kolejne liczby parzyste to: $2n-2$, $2n-1$, $2n$.
N	Nie,		B.	kolejne liczby parzyste to: $2n-4$, $2n-2$, $2n$.

12. Funkcja kwadratowa

Funkcję f określoną wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie a, b, c są liczbami rzeczywistymi i $a\neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**.

- Wzór $f(x)=ax^2+bx+c$ nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.
- Wykresem funkcji kwadratowej jest krzywa zwana **parabolą** o równaniu $y=ax^2+bx+c$.
- Dziedziną funkcji kwadratowej jest zbiór liczb rzeczywistych, czyli $D_f=\boldsymbol{R}$.

Przykłady funkcji kwadratowych:

1 $f(x)=2x^2$, więc $a=2$, $b=0$, $c=0$,

2 $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+4$, więc $a=\frac{1}{3}$, $b=-2$, $c=4$.

Ćwiczenie 1. Spośród wzorów funkcji oznaczonych cyframi od **1** do **8** wybierz te, które są funkcjami kwadratowymi, a następnie określ ich współczynniki liczbowe.

1 $f(x)=2$, **2** $f(x)=-3x^2$, **3** $f(x)=\frac{1}{2}x-4$, **4** $f(x)=(x-2)^2$,

5 $f(x)=x(x-1)$, **6** $f(x)=x^2-x^3$, **7** $f(x)=\frac{1}{x}-x^2$, **8** $f(x)=x(1-x)$.

Ćwiczenie 2. Podaj przykład wzoru funkcji kwadratowej postaci $f(x)=ax^2+bx+c$, gdy: **a)** $b=0$, $a\neq 0$, $c\neq 0$, **b)** $c=0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, **c)** $a\neq 0$, $b=0$, $c=0$.

Wykres i własności funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2$

Badanie własności funkcji kwadratowej i szkicowanie jej wykresu rozpoczynamy od przykładów najprostszych.

Przykład 1. Dla funkcji kwadratowej f określonej wzorem:

a) $f(x)=x^2$, **b)** $f(x)=-x^2$,

wykonaj następującą czynność:

1° podaj wartość współczynnika a i sporządź tabelę wartości funkcji dla kilku argumentów,

2° naszkicuj wykres funkcji.

Rozwiązanie

a) 1° $f(x)=x^2$, więc $a=1$

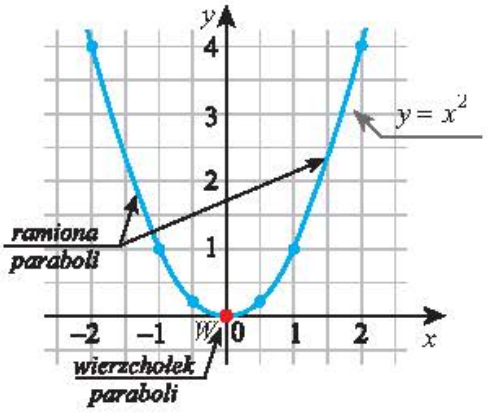
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4

b) 1° $f(x)=-x^2$, więc $a=-1$

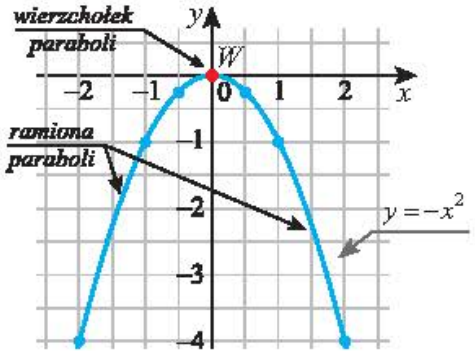
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y=-x^2$	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Zauważamy, że $f(-2)=f(2)$, $f(-1)=f(1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2°



2°



Każda z parabol o równaniach $y=x^2$ i $y=-x^2$ ma **oś symetrii** pokrywającą się z osią rzędnych, czyli prostą o równaniu $x=0$.

Punkt $W=(0,0)$ jest wierzchołkiem każdej z nich.

Wierzchołek W dzieli parabolę na dwie przystające części, które nazywamy ramionami paraboli.

Uwaga

- Prosta $x=0$ jest osią symetrii każdej z parabol o równaniu $y=ax^2$, gdzie $a\neq 0$.
- Punkt, w którym oś symetrii przecina parabolę, nazywamy wierzchołkiem paraboli.
- Aby naszkicować wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=ax^2$, gdzie $a\neq 0$, zwykle zaznaczamy w układzie współrzędnych trzy punkty:

$$W=(0,0),\quad A=(1,a),\quad B=(-1,a)$$

i prowadzimy przez nie odpowiednią parabolę.

Ćwiczenie 3. Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=2x^2$, **b)** $f(x)=-2x^2$.

Przykład 2. Na jednym rysunku sporządź wykresy funkcji określonych wzorem postaci $f(x)=ax^2$, gdy:

a) $a=1$, **b)** $a=2$, **c)** $a=\frac{1}{2}$, **d)** $a=\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie. Rysujemy parabole o równaniach: $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$.

a)

x	$y=x^2$
-1	1
0	0
1	1

b)

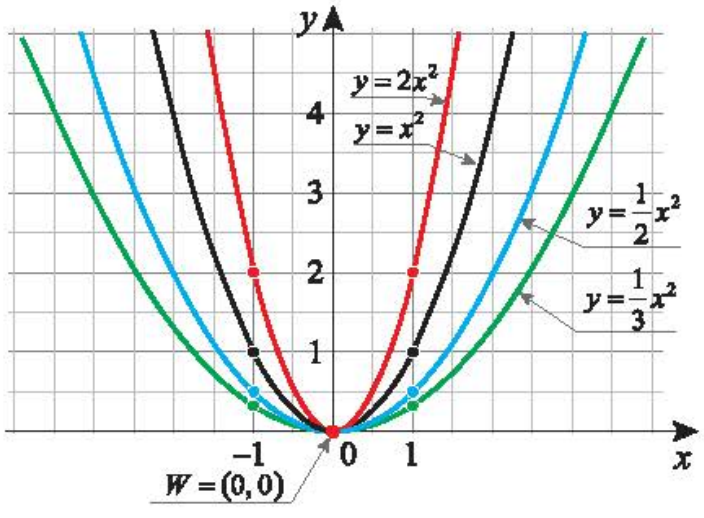
x	$y=2x^2$
-1	2
0	0
1	2

c)

x	$y=\frac{1}{2}x^2$
-1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$

d)

x	$y=\frac{1}{3}x^2$
-1	$\frac{1}{3}$
0	0
1	$\frac{1}{3}$



Jeśli $a>0$, to im wartość współczynnika a jest większa, tym ramiona paraboli o równaniu $y=ax^2$ są położone „bliżej" osi y.

Prosta o równaniu $x=0$ (oś y) jest osią symetrii każdej z parabol.

Ćwiczenie 4. W jednym układzie współrzędnych narysuj parabole o równaniach:

$$y=-3x^2,\quad y=-2x^2,\quad y=-x^2,\quad y=-\frac{1}{2}x^2.$$

Przepisz zdanie do zeszytu i uzupełnij je tak, by było prawdziwe.

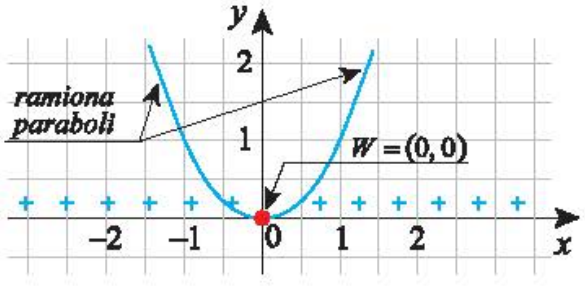
a) Gdy $a<0$, to im wartość współczynnika a jest większa, tym ramiona paraboli o równaniu $y=ax^2$ są położone ▪ osi y.

b) Ramiona paraboli skierowane są ku „dołowi", gdy a ▪ 0.

c) Wierzchołkiem każdej paraboli o równaniu $y=ax^2$, gdy $a<0$, jest punkt W o współrzędnych (▪, ▪).

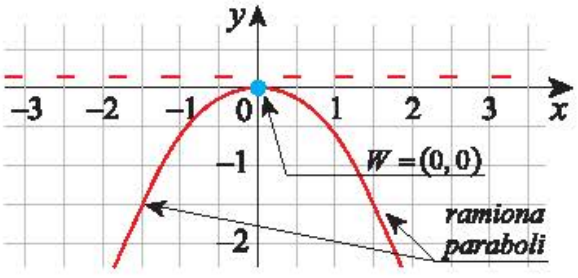
- Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x)=ax^2$ jest parabola o wierzchołku W, gdzie $W=(0,0)$.
- Wierzchołek W dzieli parabolę na dwie części zwane ramionami paraboli.
- Ramiona paraboli o równaniu $y=ax^2$ skierowane są „ku górze”, gdy $a>0$, skierowane „ku dołowi”, gdy $a<0$.

$y=ax^2$, gdy $a>0$



- Wierzchołek W jest „najniżej” położonym punktem paraboli. Zatem $y_{MIN}=f(0)=0$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0;+\infty)$.

$y=ax^2$, gdy $a<0$

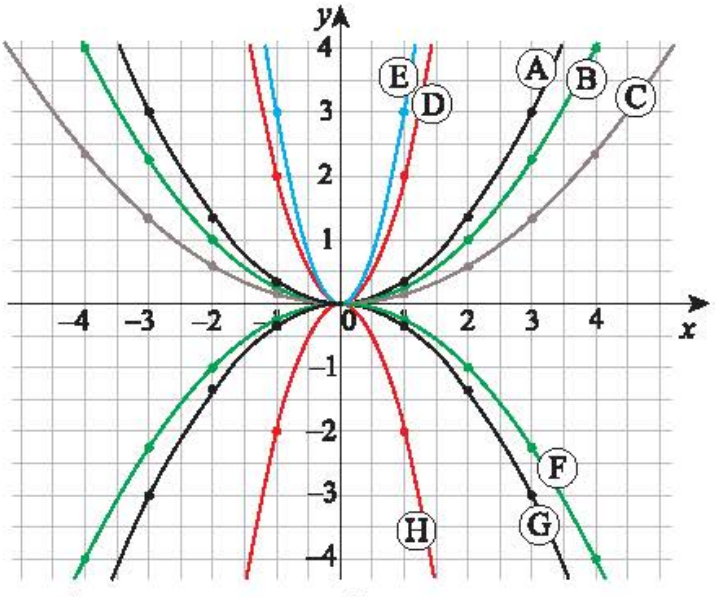


- Wierzchołek W jest „najwyżej” położonym punktem paraboli. Zatem $y_{MAX}=f(0)=0$.
- Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty;0\rangle$.

- Parabole o równaniach $y=ax^2$ i $y=-ax^2$ są figurami przystającymi i symetrycznymi względem osi x.

Ćwiczenie 5. Mirka sporządziła wykresy funkcji kwadratowych i zapomniała opisać je wzorami.

a) Wykonaj to za nią, przyporządkowując odpowiednie równania parabol (oznaczone cyframi od **1** do **8**) parabolom oznaczonym literami od Ⓐ do Ⓗ.



1 $y=\frac{1}{4}x^2$, **2** $y=-\frac{1}{3}x^2$

3 $y=2x^2$, **4** $y=-2x^2$,

5 $y=3x^2$, **6** $y=\frac{1}{3}x^2$, **7** $y=-\frac{1}{4}x^2$, **8** $y=\frac{1}{7}x^2$.

b) Wypisz pary równań tych parabol, które są symetryczne względem osi x.

Ćwiczenie 6. Przyjmij za jednostkę 1 cm i narysuj na papierze milimetrowym (lub za pomocą programu „Funkcje i wykresy") parabole o równaniach:

• $y=x^2$, • $y=2x^2$, • $y=3x^2$, • $y=4x^2$, • $y=\frac{1}{2}x^2$, • $y=\frac{1}{3}x^2$, • $y=\frac{1}{4}x^2$.

Zaznacz oś symetrii każdego wykresu. Naklej kartkę z wykresami na sztywny karton i wytnij **szablony** tych parabol.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. **2** $a=-3,\ b=c=0$, **4** $a=1,\ b=-4,\ c=4$, **5** $a=1,\ b=-1,\ c=0$, **8** $a=-1,\ b=1,\ c=0$.

2. Na przykład: **a)** $f(x)=2x^2-4$, **b)** $f(x)=-3x^2+4x$, **c)** $f(x)=-5x^2$. **4.** **a)** Dalej, **b)** „<", **c)** $(0,0)$.

5. **a)** 1 – B, 2 – G, 3 – D, 4 – H, 5 – E, 6 – A, 7 – F, 8 – C, **b)** **1** i **7**, **3** i **4**, **2** i **6**.

Zadania utrwalające

12.1. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci $f(x)=ax^2+bx+c$, gdy:

a) $a=3,\ b=-1,\ c=14$, **b)** $a=0{,}2,\ b=0,\ c=1$,

c) $a=-12,\ b=11,\ c=0$, **d)** $a=6,\ b=0,\ c=0$.

12.2. Liczby 2 i –1 są odpowiednio równe współczynnikom liczbowym b i c funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$. Podaj dwa przykłady funkcji kwadratowej spełniającej podane warunki.

12.3. Sprawdź, czy punkty A, B i C takie, że $A=(-1,3)$, $B=(2,2)$, $C=(\sqrt{2},6)$, należą do wykresu funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=3x^2$, **b)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, **c)** $f(x)=2x^2-x$, **d)** $f(x)=x^2+4$.

12.4. Wśród funkcji, określonych wzorami od **1** do **8**, wskaż pary funkcji, których wykresy są położone symetrycznie względem osi x.

1 $f_1(x)=\frac{3}{4}x^2$, **2** $f_2(x)=0{,}25x^2$, **3** $f_3(x)=-\frac{3}{4}x^2$, **4** $f_4(x)=-\frac{1}{2}x^2$,

5 $f_5(x)=\sqrt{2}x^2$, **6** $f_6(x)=0{,}5x^2$, **7** $f_7(x)=-\sqrt{2}x^2$, **8** $f_8(x)=-\frac{1}{4}x^2$.

12.5. Punkt A należy do wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x)=ax^2$. Oblicz współczynnik a, gdy:

a) $A=(2,8)$, **b)** $A=(3,-9)$, **c)** $A=\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

12.6. Punkt $M=\left(\frac{3}{4},3\right)$ należy do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=ax^2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik a jest równy:

A. $3\frac{1}{4}$, **B.** $\frac{15}{4}$, **C.** $\frac{14}{3}$, **D.** $5\frac{1}{3}$.

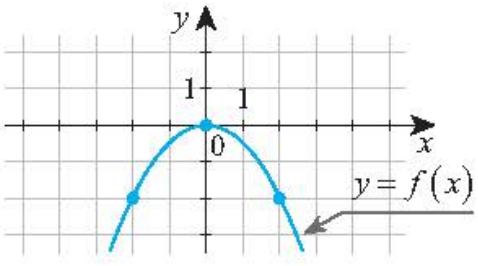
12.7. Na paraboli o równaniu $y=-2x^2$ leży punkt $A=(4,-32)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkt symetrycznie położony do punktu A względem osi y ma współrzędne:

A. $(-4,-32)$, **B.** $(4,32)$, **C.** $(-4,32)$, **D.** $(-4,-16)$.

12.8. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=ax^2$.



Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Współczynnik a funkcji f jest równy:

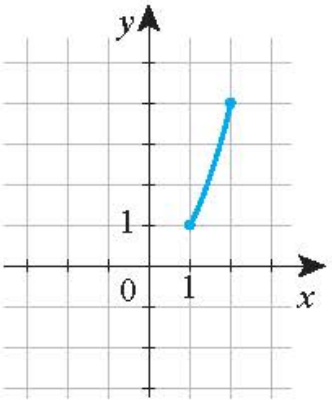
A. -2, **B.** $-\frac{1}{2}$.

Wzór funkcji f określa wzór:

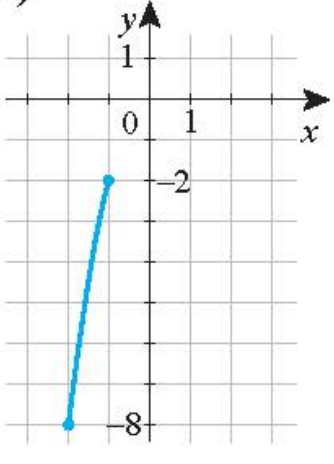
C. $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$, **D.** $f(x)=-2x^2$.

12.9. Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x)=ax^2$. Przerysuj ten fragment do zeszytu i uzupełnij wykres oraz podaj wartość współczynnika a.

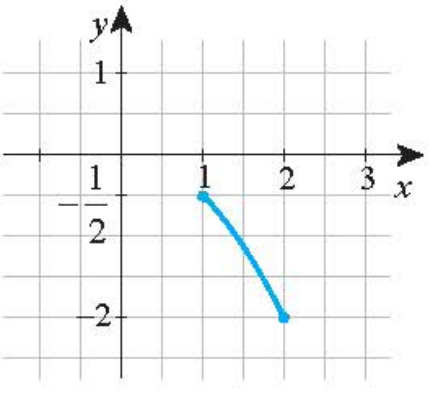
a)



b)



c)



Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Wzór określający funkcję kwadratową zapisany w postaci $f(x)=a(x-p)^2+q$ nazywamy postacią **kanoniczną funkcji kwadratowej**.

Przykład 3. Funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x)=2(x-1)^2+5$ zapisz w postaci ogólnej $f(x)=ax^2+bx+c$ i podaj jej współczynniki liczbowe a, b i c.

Rozwiązanie

$f(x)=2(x-1)^2+5$, skąd $f(x)=2(x^2-2x+1)+5$, więc $f(x)=2x^2-4x+7$.

Zatem $a=2$, $b=-4$, $c=7$.

Odp.: $f(x)=2x^2-4x+7$, $a=2$, $b=-4$, $c=7$.

Ćwiczenie 7. Funkcję kwadratową zapisz w postaci ogólnej i podaj jej współczynniki liczbowe, gdy: **a)** $f(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^2$, **b)** $f(x)=2(x+1)^2+2$.

Uwaga

Każdą funkcję kwadratową postaci $f(x)=a(x-p)^2+q$ można zapisać w postaci ogólnej, tj. $f(x)=ax^2+bx+c$.

Przykład 4. Wzór funkcji kwadratowej f podany jest w postaci kanonicznej $f(x)=a(x-p)^2+q$. Podaj wartości a, p i q, gdy:

a) $f(x)=3(x-1)^2-2$, **b)** $f(x)=-(x+1)^2+3$, **c)** $f(x)=4x^2+1$,

d) $f(x)=-2x^2$, **e)** $f(x)=(x+2)^2$.

Rozwiązanie

a) $f(x)=3\cdot(x-1)^2-2$, więc $a=3$, $p=1$ i $q=-2$,

b) $f(x)=-(x+1)^2+3$, więc $a=-1$, $p=-1$ i $q=3$,

c) $f(x)=4x^2+1$, więc $a=4$, $p=0$ i $q=1$,

d) $f(x)=-2x^2$, więc $a=-2$, $p=0$ i $q=0$,

e) $f(x)=(x+2)^2$, więc $a=1$, $p=-2$ i $q=0$.

Ćwiczenie 8. Wzór funkcji kwadratowej f podany jest w postaci kanonicznej $f(x)=a(x-p)^2+q$. Podaj wartości a, p i q, gdy:

a) $f(x)=2(x+3)^2-4$, **b)** $f(x)=-(x-1)^2$, **c)** $f(x)=-2x^2-\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 9. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci $f(x)=a(x-p)^2+q$,gdy:

a) $a=-1$, $p=-1$ i $q=2$, **b)** $a=3$, $p=0$ i $q=-1$, **c)** $a=\frac{1}{2}$, $p=4$ i $q=0$.

Przykład 5. Uzasadnij, że jeśli funkcja kwadratowa określona jest wzorem $f(x)=a(x-p)^2+q$, to punkt W taki, że $W=(p,q)$, leży na wykresie funkcji f.

Rozwiązanie. Wystarczy wykazać, że $f(p)=q$.

$$f(p)=a\cdot(p-p)^2+q=a\cdot 0^2+q=0+q=q,$$

Zatem $f(p)=q$. ***c.n.u.***

Ćwiczenie 10. Z wzoru funkcji kwadratowej f odczytaj współrzędne wierzchołka paraboli, która jest jej wykresem.

a) $f(x)=-3(x+4)^2-1$, **b)** $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, **c)** $f(x)=-3(x+2)^2$,

d) $f(x)=5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+2$, **e)** $f(x)=-\sqrt{2}\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{2}$, **f)** $f(x)=3x^2+1$,

g) $f(x)=-2x^2$.

Przykład 6. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=a(x-p)^2+q$. Uzupełnij tabelę dla funkcji f i naszkicuj jej wykres. Podaj współrzędne wierzchołka W i równanie osi symetrii wykresu funkcji f, gdy:

x	$p-1$	p	$p+1$
$y=f(x)$		q	

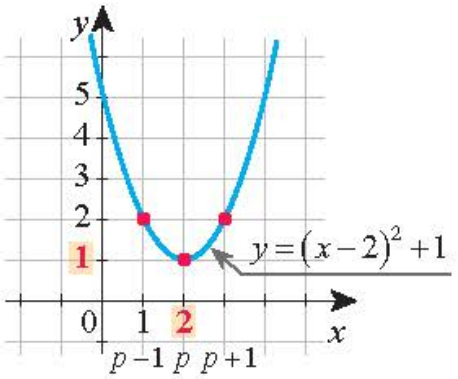
a) $f(x)=(x-2)^2+1$, **b)** $f(x)=-(x+2)^2-1$.

Rozwiązanie

a) $f(x)=(x-2)^2+1$, więc $a=1$, $p=2$ i $q=1$

	$p-1$	p	$p+1$
x	1	2	3
$y=(x-2)^2+1$	2	1	2

$f(1)=(1-2)^2+1=2$, $f(3)=(3-2)^2+1=2$



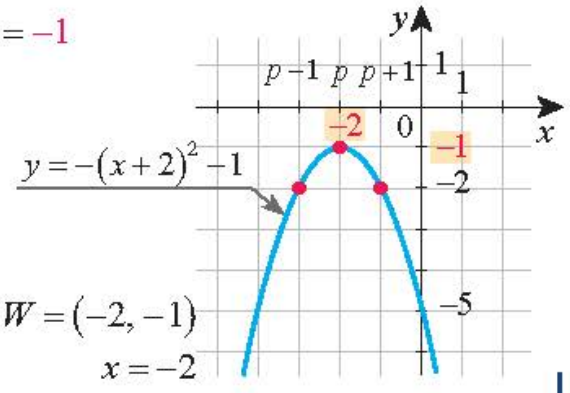
$W=(2,1)$, $x=2$

b) $f(x)=-(x+2)^2-1$, więc $a=-1$, $p=-2$ i $q=-1$

	$p-1$	p	$p+1$
x	-3	-2	-1
$y=-(x+2)^2-1$	-2	-1	-2

$f(-3)=-(-3+2)^2-1=-1-1=-2$

$f(-1)=-(-1+2)^2-1=-1-1=-2$



Ćwiczenie 11. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=a(x-p)^2+q$.

x	$p-1$	p	$p+1$
$y=f(x)$		q	

Przerysuj tabelę do zeszytu i uzupełnij ją oraz naszkicuj jej wykres, gdy: **a)** $f(x)=-2(x+1)^2-3$, **b)** $f(x)=-(x-3)^2$, **c)** $f(x)=2x^2-1$.

Przykład 7. Uzasadnij, że jeśli funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=a(x-p)^2+q$, to $f(p-1)=f(p+1)=a+q$.

Rozwiązanie

Obliczamy wartości funkcji f, gdy $x=p-1$ oraz gdy $x=p+1$, i porównujemy je.

Jeśli $x=p-1$, to $f(p-1)=a\cdot(p-1-p)^2+q=$

$=a\cdot(-1)^2+q=a+q$

$f(p-1)=a+q$.

Jeśli $x=p+1$, to $f(p+1)=a\cdot(p+1-p)^2+q=$

$=a\cdot 1^2+q=a+q$

$f(p+1)=a+q$.

Zatem $f(p-1)=f(p+1)=a+q$. ***c.n.u.***

Uwaga

Do paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x)=a(x-p)^2+q$ należą punkty o współrzędnych podanych w tabeli, tj. $(p-1, a+q)$, (p, q), $(p+1, a+q)$.

x	$p-1$	p	$p+1$
$f(x)=a\cdot(x-p)^2+q$	$a+q$	q	$a+q$

- Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x)=a\cdot(x-p)^2+q$ jest parabola o wierzchołku W, gdzie $W=(p, q)$, która jest przystająca do paraboli $y=ax^2$.

Przykład 8. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f, której wzór podany jest w postaci kanonicznej, gdy:

a) $f(x)=-(x+1)^2-2$, **b)** $f(x)=4(x-3)^2-5$.

Odczytaj z wykresu maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca oraz podaj jej najmniejszą albo największą wartość (o ile istnieje).

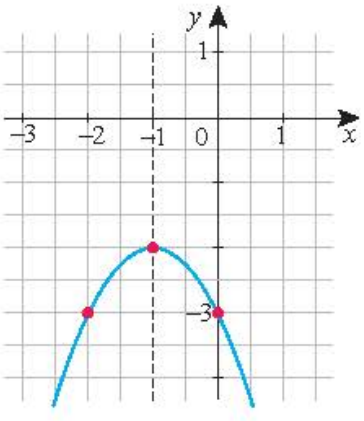
Rozwiązanie

a) $f(x)=-(x+1)^2-2$, więc:

$a=-1$, $p=-1$ i $q=-2$

$W=(-1,-2)$.

	$p-1$	p	$p+1$
x	-2	-1	0
$y=-(x+1)^2-2$	-3	-2	-3
	$a+q$	q	$a+q$



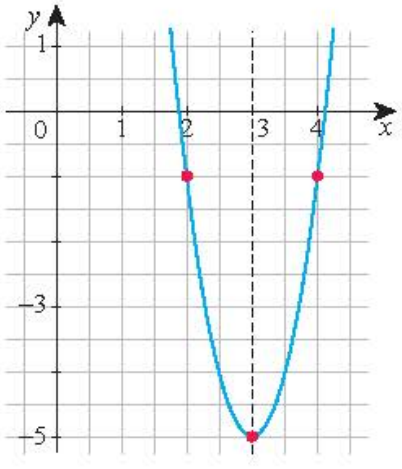
Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty;-1\rangle$, więc $y_{MAX}=f(-1)=-2$.

b) $f(x)=4(x-3)^2-5$, więc:

$a=4$, $p=3$ i $q=-5$

$W=(3,-5)$.

	$p-1$	p	$p+1$
x	2	3	4
$y=4(x-3)^2-5$	-1	-5	-1
	$a+q$	q	$a+q$



Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 3;+\infty)$, więc $y_{MIN}=f(3)=-5$.

Ćwiczenie 12. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem:

a) $f(x)=-2(x-3)^2+4$, **b)** $f(x)=3(x+3)^2-8$, **c)** $f(x)=-2(x-3)^2$.

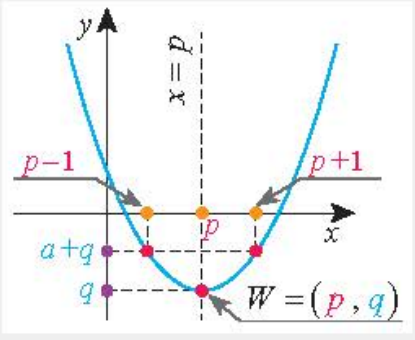
Ćwiczenie 13. Nie szkicując wykresu funkcji f, podaj jej zbiór wartości Y_f i maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca, gdy:

a) $f(x)=-2(x-3)^2-5$, **b)** $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2+1$, **c)** $f(x)=\sqrt{2}x^2-4$.

Uwaga

- Jeśli oznaczymy $W=(x_W, y_W)$, to $x_W = p$ i $y_W = q$.

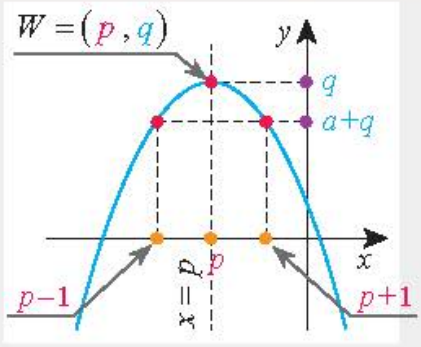
$f(x)=a\cdot(x-p)^2+q$, gdy $a>0$



Gdy $x=p$, to $y_{MIN}=f(p)=q$.

- $Y_f=\langle q;+\infty)$,
- funkcja f jest rosnąca, gdy $x\in\langle p;+\infty)$, a malejąca, gdy $x\in(-\infty;p\rangle$.

$f(x)=a\cdot(x-p)^2+q$, gdy $a<0$



Gdy $x=p$, to $y_{MAX}=f(p)=q$.

- $Y_f=x\in(-\infty;q\rangle$,
- funkcja f jest rosnąca, gdy $x\in(-\infty;p\rangle$, a malejąca, gdy $x\in\langle p;+\infty)$.

- Prosta o równaniu $x=p$ jest osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji f.

Ćwiczenie 14. Nie szkicując wykresu funkcji kwadratowej f, podaj równanie osi symetrii tego wykresu, gdy:

a) $f(x)=-2(x-1)^2+2$, **b)** $f(x)=4(x+2)^2-1$, **c)** $f(x)=-(x+1)^2$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

7. **a)** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$, $b=-3$, $c=-\frac{9}{2}$, **b)** $f(x)=2x^2+4x+4$, $a=2$, $b=4$, $c=4$.

8. **a)** $a=2$, $p=-3$, $q=-4$, **b)** $a=-1$, $p=1$, $q=0$, **c)** $a=-2$, $p=0$, $q=-\frac{1}{2}$.

9. **a)** $f(x)=-(x+1)^2+2$, **b)** $f(x)=3x^2-1$, **c)** $f(x)=\frac{1}{2}(x-4)^2$.

10. **a)** $(-4,-1)$, **b)** $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$, **c)** $(-2,0)$, **d)** $\left(\frac{1}{5},2\right)$, **e)** $(\sqrt{3},\sqrt{2})$, **f)** $(0,1)$, **g)** $(0,0)$.

11. **a)**

x	-2	-1	0
$y=f(x)$	-5	-3	-5

b)

x	2	3	4
$y=f(x)$	-1	0	-1

c)

x	-1	0	1
$y=f(x)$	1	-1	1

12. **a)**

x	2	3	4
$y=f(x)$	2	4	2

b)

x	-4	-3	-2
$y=f(x)$	-5	-8	-5

c)

x	2	3	4
$y=f(x)$	-2	0	-2

13. **a)** $Y_f=(-\infty;-5\rangle$, $\langle 3;+\infty)$, **b)** $Y_f=\langle 1;+\infty)$, $(-\infty;-2\rangle$, **c)** $Y_f=\langle -4;+\infty)$, $(-\infty;0\rangle$.

14. **a)** $x=1$, **b)** $x=-2$, **c)** $x=-1$.

Zadania utrwalające

12.10. Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej zapisz w postaci ogólnej i podaj wartości współczynników a, b i c.

a) $f(x)=3(x-1)^2-5$, **b)** $f(x)=-9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$, **c)** $f(x)=(x-2)^2-4$,

d) $f(x)=2(x+1)^2-5$, **e)** $f(x)=4(x-2)^2+1$, **f)** $f(x)=-2(x+4)^2-3$.

12.11. Wzór funkcji kwadratowej f podany jest w postaci kanonicznej $f(x)=a(x-p)^2+q$. Podaj wartości a, p i q, gdy:

a) $f(x)=-3(x-4)^2-2$, **b)** $f(x)=(x+2)^2-6$, **c)** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$,

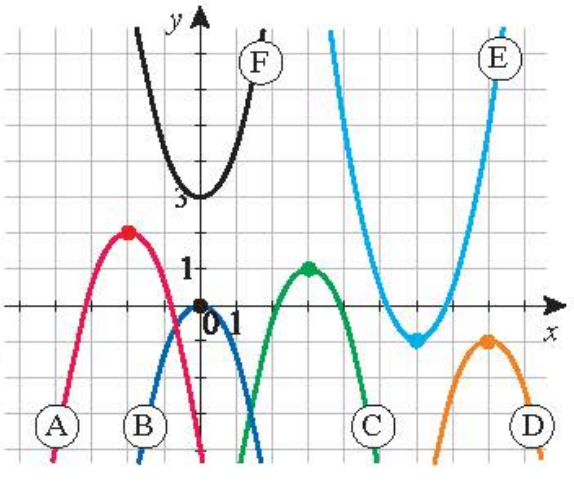
d) $f(x)=-(x+1)^2$, **e)** $f(x)=10x^2+30$, **f)** $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$.

12.12. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $f(x)=a(x-p)^2+q$, gdy:

a) $a=-\frac{1}{2}$, $p=-2$, $q=-4$, **b)** $a=4$, $p=0$, $q=0$,

c) $a=-\sqrt{2}$, $p=\frac{1}{5}$, $q=1{,}5$, **d)** $a=1$, $p=0$, $q=-2$.

12.13. Parabole przedstawione na rysunku są przystające do paraboli określonej równaniem $y=\frac{3}{2}x^2$. Przyporządkuj odpowiednie wzory oznaczone cyframi od **1** do **6** parabolom oznaczonym literami od Ⓐ do Ⓕ.



1 $y=\frac{3}{2}x^2+3$, **2** $y=-\frac{3}{2}(x-3)^2+1$,

3 $y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+2$, **4** $y=\frac{-3}{2}(x-8)^2-1$,

5 $y=-\frac{3}{2}x^2$, **6** $y=\frac{3}{2}(x-6)^2-1$.

12.14. Ustal, czy wykres funkcji f określonej wzorem postaci $f(x)=a(x-p)^2+q$ ma punkty wspólne z osią x, gdy:

a) $f(x)=x^2-4$, **b)** $f(x)=-2x^2-1$, **c)** $f(x)=(x-3)^2$,

d) $f(x)=-\frac{1}{2}(x+5)^2+5$, **e)** $f(x)=-(x-2)^2-1$, **f)** $f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+1$.

12.15. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=a(x-p)^2+q$. Sporządź tabelę dla funkcji f według wzoru podanego obok i naszkicuj jej wykres, gdy:

x	$p-1$	p	$p+1$
$y=f(x)$	$a+q$	q	$a+q$

a) $f(x)=(x+1)^2-2$, **b)** $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2-2$, **c)** $f(x)=-x^2$,

d) $f(x)=1\frac{1}{2}(x-3)^2+3$, **e)** $f(x)=-2x^2+4$, **f)** $f(x)=5(x+1)^2$.

12.16. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem:

a) $f(x)=-2(x+2)^2-2$, **b)** $f(x)=2(x+4)^2+1$, **c)** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$,

d) $f(x)=3(x+5)^2$, **e)** $f(x)=\frac{1}{3}x^2$, **f)** $f(x)=-(x-2)^2-1$.

Odczytaj z wykresu:

1 maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca,

2 najmniejszą albo największą wartość funkcji (o ile istnieje),

3 równanie prostej będącej osią symetrii wykresu funkcji f.

12.17. Funkcja g określona jest wzorem $g(x)=3(x-3)^2-4$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Osią symetrii wykresu funkcji g jest prosta o równaniu $x=-3$.	**P**	**F**
Funkcja g ma dwa miejsca zerowe.	**P**	**F**

12.18. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=a(x-3)^2+5$.

Przepisz do zeszytu poniższe zdania i uzupełnij je tak, by były prawdziwe.

a) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty;3\rangle$, gdy a ■ 0.

b) Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty;3\rangle$, gdy a ■ 0.

c) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 3;+\infty)$, gdy a ■ 0.

d) Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 3;+\infty)$, gdy a ■ 0.

e) Funkcja f ma najmniejszą wartość równą 5, gdy $x=$ ■ i a ■ 0.

f) Funkcja f ma największą wartość równą ■, gdy $x=3$ i a ■ 0.

Postać kanoniczna a postać ogólna funkcji kwadratowej

Postać ogólna funkcji kwadratowej określona jest wzorem

$f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$ i $x\in R$.

Aby wzór funkcji kwadratowej podany w postaci ogólnej zapisać w postaci kanonicznej, wykorzystujemy wzory skróconego mnożenia.

Przykład 9. Funkcję kwadratową f określoną wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$ przedstaw w postaci kanonicznej $f(x)=a(x-p)^2+q$.
Wyraź współrzędne wierzchołka $W=(p,q)$ w zależności od współczynników a, b i c.

Rozwiązanie

1 $f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ — *Wyłączamy współczynnik a przed nawias.*

2 $f(x)=a\left[\underbrace{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$ — *Dodajemy i odejmujemy liczbę $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, by pierwsze trzy wyrazy stanowiły kwadrat sumy.*

3 $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$ — *Uwalniamy się od nawiasu kwadratowego.*

4 $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$ — $\frac{b^2}{4a}+c=\left(\frac{b^2}{4a}\quad c\right)=\left(\frac{b^2}{4a}\quad\frac{4ac}{4a}\right)$

5 $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

6 $\Delta=b^2-4ac$, więc $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$,

$p=-\frac{b}{2a}$ i $q=-\frac{\Delta}{4a}$, zatem $W=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Uwaga

- Każdą funkcję kwadratową f w postaci ogólnej $f(x)=ax^2+bx+c$ można zapisać w postaci kanonicznej

$f(x)=a(x-p)^2+q$, gdzie $p=-\frac{b}{2a}$, $q=\frac{-\Delta}{4a}$ i $\Delta=b^2-4ac$.

Ćwiczenie 15. Funkcję kwadratową f przedstaw w postaci kanonicznej, gdy:

a) $f(x)=x^2-4x+7$, **b)** $f(x)=-x^2-2x+2$.

Przykład 10. Oblicz współrzędne p i q wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f określonej wzorem ogólnym:

a) $f(x)=-x^2-4x+3$, **b)** $f(x)=2x^2+6x$.

Rozwiązanie

a) $f(x)=-x^2-4x+3$

$(a=-1,\ b=-4,\ c=3)$

$p=-\frac{b}{2a}$, więc $p=-\frac{-4}{2\cdot(-1)}=-2.$

b) $f(x)=2x^2+6x$

$(a=2,\ b=6,\ c=0)$

$p=-\frac{b}{2a}$, więc $p=-\frac{6}{2\cdot 2}=-\frac{3}{2}.$

Wartość q możemy obliczyć na dwa sposoby.

I sposób:

$\Delta=b^2-4ac$, więc

$\Delta=(-4)^2-4\cdot(-1)\cdot 3=28.$

$q=\frac{-\Delta}{4a}$, więc $q=\frac{-28}{4\cdot(-1)}=7.$

II sposób:

$q=f(p)$, więc

$q=-(-2)^2-4\cdot(-2)+3=7.$

Odp.: $p=-2$ i $q=7$,

czyli $W=(-2,7)$.

I sposób:

$\Delta=b^2-4ac$, więc

$\Delta=6^2-4\cdot 2\cdot 0=36.$

$q=\frac{-\Delta}{4a}$, więc $q=\frac{-36}{4\cdot 2}=-\frac{9}{2}.$

II sposób:

$q=f(p)$, więc

$q=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}.$

Odp.: $p=-\frac{3}{2}$ i $q=-\frac{9}{2}$,

czyli $W=\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right)$.

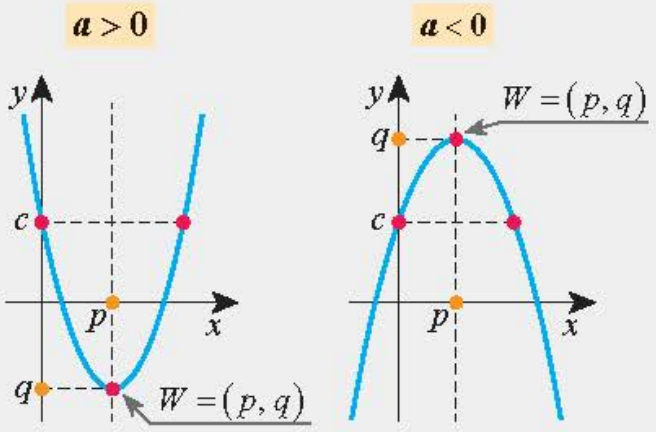
Ćwiczenie 16. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem:

a) $f(x)=-5x^2+3x-1$, **b)** $f(x)=-8x^2+4x$, **c)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$.

Uwaga

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem w postaci ogólnej $f(x)=ax^2+bx+c$ jest parabola:

- która przecina oś y w punkcie $(0,c)$,
- której wierzchołkiem jest punkt $W=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ i $\Delta=b^2-4ac$.



Ćwiczenie 17. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=-x^2+2x+2$, **b)** $f(x)=-x^2+2x$, **c)** $f(x)=-x^2+2$,

d) $f(x)=x^2+1$, **e)** $f(x)=2x^2-2$, **f)** $f(x)=x^2-2x+1$.

Ćwiczenie 18. Wykaż, że jeśli funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$, to $f(0)=c$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. a) $f(x)=(x-2)^2+3$,

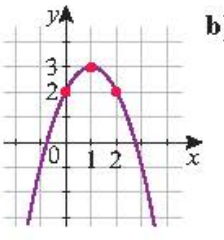
b) $f(x)=-(x+1)^2+3$.

16. a) $W=\left(\frac{3}{10},-\frac{11}{20}\right)$,

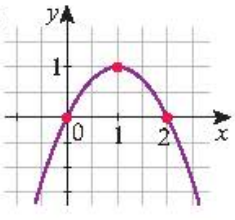
b) $W=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$,

c) $W=(0,-2)$.

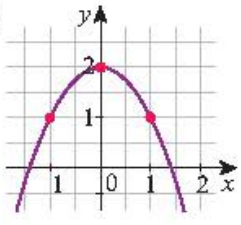
17. a)



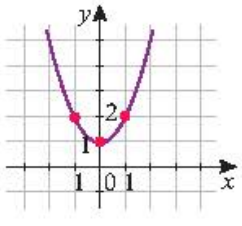
b)



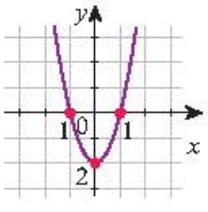
c)



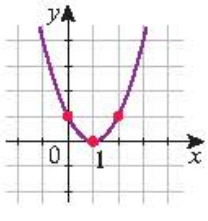
d)



e)



f)



Zadania utrwalające

12.19. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu:

a) $y=x^2+2x-3$, **b)** $y=3x^2+12x$, **c)** $y=2x^2+3$,

d) $y=-x^2+4x-4$, **e)** $y=4x^2+5x+1$, **f)** $y=-\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$.

12.20. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=-x^2-4x$, **b)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$, **c)** $f(x)=-2x^2+4x+6$,

d) $f(x)=-2x^2-12x$, **e)** $f(x)=x^2+5x+4$, **f)** $f(x)=x^2-3$.

12.21. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=(x-4)^2-3$, **b)** $f(x)=-(x-1)^2$, **c)** $f(x)=x^2+2x+1$,

d) $f(x)=-x^2-1$, **e)** $f(x)=-x(x-4)$, **f)** $f(x)=(x+2)(x-2)$.

12.22. Funkcja kwadratowa określona jest wzorem:

a) $f(x)=x^2+2x-3$, **b)** $f(x)=-x^2+2x+1$, **c)** $f(x)=3x^2-12x$,

d) $f(x)=2x^2+3$, **e)** $f(x)=-4x^2+16$, **f)** $f(x)=4x^2+8x+1$.

1 Podaj współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f.

2 Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

3 Napisz równanie osi symetrii wykresu funkcji f.

4 Podaj zbiór wartości funkcji f.

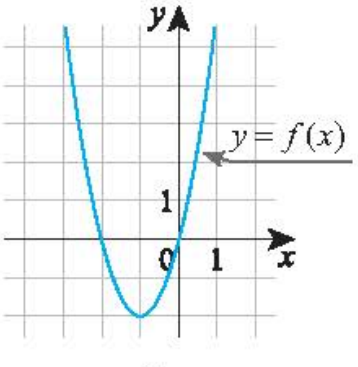
5 Naszkicuj wykres i określ liczbę miejsc zerowych funkcji f.

12.23. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Prosta o równaniu $x=2$ jest osią symetrii wykresu funkcji $y=2x^2-8x+6$.	P	F
Prosta o równaniu $x=3$ jest osią symetrii wykresu funkcji $y=2(x+3)^2+1$.	P	F

12.24. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem:



A. $f(x)=2x^2-2$, **B.** $f(x)=2x^2+4x$,

C. $f(x)=2x^2+4$, **D.** $f(x)=2x^2+8$.

12.25. Wyznacz zbiór wartości Y_f funkcji f określonej wzorem $f(x)=3x^2+x-2$.

12.26. *Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A, B i C.*

Największą wartością funkcji f określonej wzorem $f(x)=-x^2+4x+4$ jest liczba:

A. 2, **B.** 8.

Maksymalny przedział, w którym funkcja f określona wzorem $f(x)=-2x^2+3x-1$ jest rosnąca, to:

C. $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right\rangle$, **D.** $\left\langle-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

12.27. Podaj przykład funkcji kwadratowej, o której wiadomo, że ma największą wartość równą 2, a osią symetrii jej wykresu jest prosta o równaniu $x=1$. Napisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

12.28. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Funkcja kwadratowa, która jest malejąca w przedziale $(-\infty;2\rangle$, określona jest wzorem:

A. $f(x)=2(x-3)^2$, **B.** $f(x)=3(x-2)^2$,

C. $f(x)=2(x+3)^2$, **D.** $f(x)=3(x+2)^2$.

12.29. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Zbiorem wartości funkcji f określonej wzorem $f(x)=x^2-6x+c$ jest przedział $\langle 0;+\infty)$, gdy współczynnik c jest równy:

A. 0, **B.** 4, **C.** 6, **D.** 9.

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej i jej postać iloczynowa

Aby obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej f podanej w postaci ogólnej $f(x)=ax^2+bx+c$, należy rozwiązać równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$.
Miejscami zerowymi funkcji f są pierwiastki równania $f(x)=0$.

Przypomnijmy

Liczba rozwiązań równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ zależy od wartości wyróżnika Δ, gdzie $\Delta=b^2-4ac$, więc i liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej od niego zależy.

Wartość wyróżnika Δ $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Miejsca zerowe funkcji $y=ax^2+bx+c$, **gdzie** $a\neq 0$	*dwa miejsca zerowe*	*jedno miejsce zerowe*	*brak miejsc zerowych*
	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0=-\frac{b}{2a}$	

Przykład 11. Oblicz miejsca zerowe oraz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji f i naszkicuj jej wykres, gdy:

a) $f(x)=x^2+4x+3$, **b)** $f(x)=x^2-4x+4$, **c)** $f(x)=-2x^2+4x-3$.

Rozwiązanie

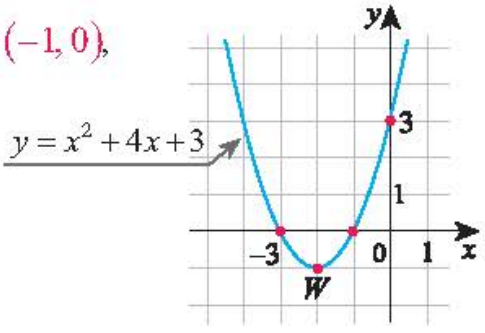
a) $f(x)=0$, gdy $x^2+4x+3=0$

$a=1,\ b=4,\ c=3,\ \Delta=4,\ \sqrt{\Delta}=2$

$$x_1=\frac{-4-2}{2}=-3,\quad x_2=\frac{-4+2}{2}=-1.$$

$x_1,\ x_2$ – miejsca zerowe funkcji f

Wykres funkcji f przecina oś x w punktach $(-3,0)$ i $(-1,0)$, a oś y w punkcie $(0,3)$, bo $f(0)=3$.



$$p=\frac{-4}{2}=-2,\quad q=f(-2)=-1,\ \text{czyli}$$

$$W=(-2,-1).$$

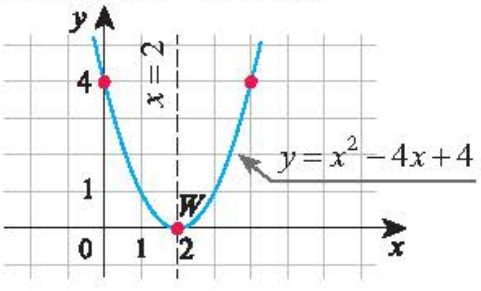
b) $f(x)=0$, gdy $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$, więc $x_0=2$ to odcięta wierzchołka W.

Jeśli $p=2$, to $q=f(2)=0$, czyli $W=(2,0)$.

Do wykresu funkcji f należą punkty:

$W=(2,0)$ oraz $(0,4)$ i $(4,4)$.



c) $f(x)=0$, gdy $-2x^2+4x-3=0$

$a=-2,\ b=4,\ c=-3$

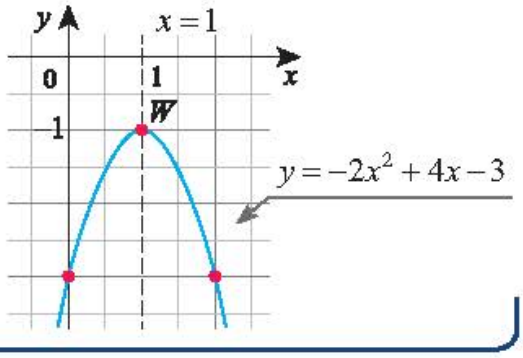
$\Delta=-8$, $\Delta<0$ (funkcja nie ma miejsc zerowych).

$$p=\frac{-4}{-4}=1,\quad q=\frac{8}{-8}=-1,\ \text{czyli}$$

$$W=(1,-1).$$

Do wykresu funkcji f należą punkty:

$W=(1,-1)$, $(0,-3)$, $(2,-3)$.



Ćwiczenie 19. Oblicz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f. Wyznacz współrzędne wierzchołka W jej wykresu. Naszkicuj wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x)=3x^2+6x$, **b)** $f(x)=x^2-2x+1$, **c)** $f(x)=x^2+2x+2$.

Przykład 12. Oblicz miejsca zerowe funkcji f, g i h, gdy:

a) $f(x)=-2x^2-4x+6$, **b)** $g(x)=-2(x-1)(x+3)$, **c)** $h(x)=-2(x+1)^2+8$.

Rozwiązanie

a) $f(x)=0$, gdy $-2x^2-4x+6=0$

$x^2+2x-3=0$

$\Delta=16,\ \sqrt{\Delta}=4$

$x_1=-3,\ x_2=1.$

b) $g(x)=0$, gdy $-2(x-1)(x+3)=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$a\cdot b=0$, gdy $a=0$ lub $b=0$.

$x-1=0$ lub $x+3=0$

$x=1$ lub $x=-3.$

c) $h(x)=0$, gdy $-2(x+1)^2+8=0 \quad /:(-2)$

$(x+1)^2-4=0$

$x+1=-2$ lub $x+1=2$

$x=-3$ lub $x=1.$

Odp.: Funkcje f, g i h mają te same miejsca zerowe x_1 i x_2, gdzie $x_1=-3$ i $x_2=1$.

Zauważamy, że f, g i h z przykładu 12. spełniają warunek $f(x)=g(x)=h(x)$, bo:

$g(x)=-2(x-1)(x+3)=-2\left(x^2+3x-x-3\right)=-2x^2-4x+6=f(x),$

$h(x)=-2(x+1)^2+8=-2\left(x^2+2x+1\right)+8=-2x^2-4x+6=f(x).$

Zatem $f(x)=\underbrace{-2(x-1)(x+3)}=\underbrace{-2(x+1)^2+8}=\underbrace{-2x^2-4x+6}.$

postać iloczynowa wzoru funkcji f — *postać kanoniczna wzoru funkcji f* — *postać ogólna wzoru funkcji f*

Uwaga

- Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w **postaci iloczynowej** tylko wtedy, gdy ma ona miejsca zerowe, czyli gdy $\Delta\geq 0$.
- Postać iloczynowa funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$ zależy od wartości wyróżnika Δ.

Wartość wyróżnika Δ	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Postać iloczynowa funkcji kwadratowej	$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	$f(x)=a(x-x_0)^2$	*Nie można funkcji kwadratowej przedstawić w postaci iloczynowej.*

Ćwiczenie 20. Zapisz w postaci iloczynowej wzór funkcji f, gdy:

a) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x$, **b)** $f(x)=(x-3)^2-1$, **c)** $f(x)=x^2+2x-3$,

d) $f(x)=x^2-10x+25$, **e)** $f(x)=-3x^2$, **f)** $f(x)=-x^2+4$.

Ćwiczenie 21. Uzasadnij, że wzoru funkcji f nie można przedstawić w postaci iloczynowej, gdy: **a)** $f(x)=x^2+x+6$, **b)** $f(x)=2x^2+0,5$, **c)** $f(x)=x^2+x+30$.

Uwaga

Jeżeli miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby x_1 i x_2, to współrzędne p i q wierzchołka $W=(p,q)$ paraboli, która jest wykresem tej funkcji, można obliczyć z wzorów: $p=\frac{x_1+x_2}{2}$, $q=f(p)$, czyli $x_W=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_W=f(x_W)$.

Przykład 13. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji określonej wzorem $f(x)=2(x-1)(x+5)$, i naszkicuj jej wykres.

Rozwiązanie

I sposób: Obliczamy miejsca zerowe.

$f(x)=0$, gdy

$2(x-1)(x+5)=0$

$x-1=0$ lub $x+5=0$

$x_1=1,\ x_2=-5$

$x_W=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1-5}{2}=-2$

$y_W=f(x_W)=f(-2)=-18$

$W=(-2,-18)$.

II sposób:

Funkcję f zapisujemy w postaci ogólnej

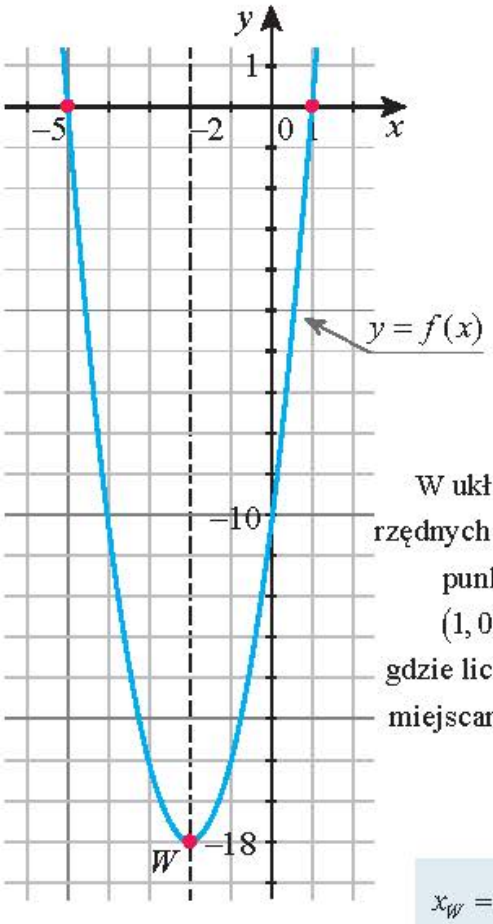
$f(x)=2x^2+8x-10$

$x_W=\frac{-8}{4}=-2$

$y_W=f(x_W)=f(-2)=-18$

$W=(-2,-18)$.

Odp.: $W=(-2,-18)$.

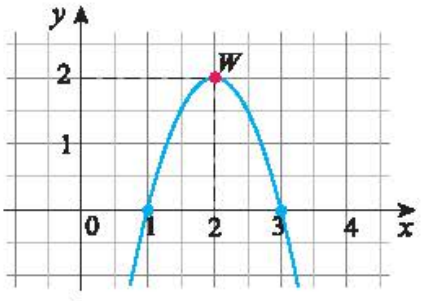


W układzie współrzędnych zaznaczamy punkty: $(-5,0)$, $(1,0)$, $(-2,-18)$, gdzie liczby –5 i 1 są miejscami zerowymi funkcji f.

$x_W=\frac{b}{2a}$, gdzie $a=2$, $b=8$

Ćwiczenie 22. Oblicz współrzędne wierzchołka W paraboli, która jest wykresem funkcji określonej wzorem $f(x)=-2(x+1)(x+3)$ i naszkicuj jej wykres.

Ćwiczenie 23. Dorota naszkicowała wykres funkcji określonej wzorem $y=-2x^2+8x-6$. Sprawdź, czy narysowała właściwą parabolę.



Odpowiedzi do ćwiczeń

19. a) $x_1=-2$, $x_2=0$, $W=(-1,-3)$, b) $x_0=1$, $W=(1,0)$ i np. punkty $(0,1)$, $(2,1)$, c) brak miejsc zerowych, $W=(-1,1)$ i np. punkty $(0,2)$, $(-2,2)$. **20.** a) $f(x)=-\frac{1}{2}x(x+4)$, b) $f(x)=(x-4)(x-2)$, c) $f(x)=(x-1)(x+3)$, d) $f(x)=(x-5)^2$, e) $f(x)=-3x^2$, f) $f(x)=-(x-2)(x+2)$. **21.** Nie ma postaci iloczynowej, bo $\Delta<0$. **22.** $W=(-2,2)$. **23.** Tak.

Zadania utrwalające

12.30. Sprawdź, czy liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=2x^2-2x-4$, b) $f(x)=x^2+4x+4$,

c) $f(x)=2x(x+6)+x(x+21)-30$, d) $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$.

12.31. Określ liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej f, gdy:

a) $f(x)=-3x^2+4x-5$, b) $f(x)=4x^2+4x+1$, c) $f(x)=x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{2}$.

12.32. Oblicz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f i zapisz ją w postaci iloczynowej (o ile taka istnieje), gdy:

a) $f(x)=x^2-4x+4$, b) $f(x)=-3x^2+9x$, c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$,

d) $f(x)=x^2-16x+74$, e) $f(x)=-2x^2-4x-2$, f) $f(x)=-0,75x^2+2,25$.

12.33. Ustal, ile punktów wspólnych z osią odciętych x ma wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=x^2-7x-8$, b) $f(x)=25x^2+30x+9$,

c) $f(x)=100x^2-100x+2500$, d) $f(x)=3^{10}\cdot x^2-3^5\cdot x-2$.

12.34. Podaj miejsca zerowe funkcji f, oblicz współrzędne wierzchołka jej wykresu, gdy:

a) $f(x)=-2(x+3)(x-1)$, **b)** $f(x)=3x(x+5)$,

c) $f(x)=8(x-4)(x-2)$, **d)** $f(x)=4(1-x)(x+3)$.

12.35. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=-\left(x+1\frac{1}{2}\right)\left(x-2\frac{1}{2}\right)$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

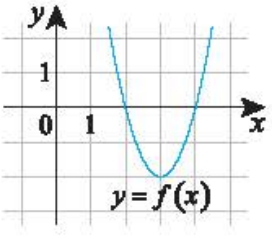
Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $1\frac{1}{2}$ i $-2\frac{1}{2}$.	P	F
Wierzchołek W wykresu funkcji f ma współrzędne $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.	P	F
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty; 4\rangle$.	P	F

12.36. Naszkicuj wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x)=-(x+3)(x-1)$, **b)** $f(x)=2(x-3)(x+1)$,

c) $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x+4)$, **d)** $f(x)=-2x(x-1)$.

12.37. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest określona wzorem:

A. $f(x)=2(x+2)(x+4)$, **B.** $f(x)=-2(2-x)(x-4)$,

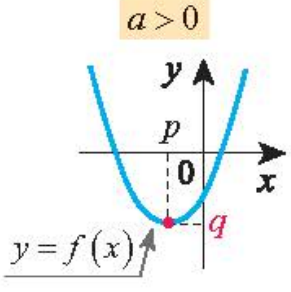
C. $f(x)=-2(x-2)(x-4)$, **D.** $f(x)=2(x+2)(x-4)$.

Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

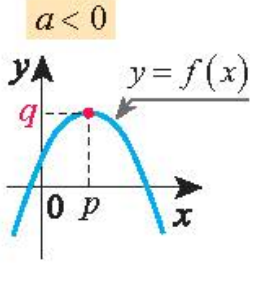
Przypomnijmy

Funkcja kwadratowa $f(x)=a(x-p)^2+q$ ma:

- wartość najmniejszą y_{MIN}, gdy $a>0$ *albo*
- wartość największą y_{MAX}, gdy $a<0$.



$y_{MIN}=f(p)=q$



$y_{MAX}=f(p)=q$

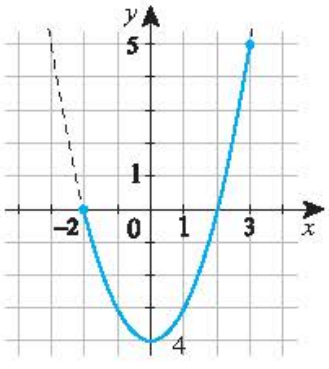
Przykład 14. Na rysunkach **1** i **2** przedstawiono fragmenty wykresu funkcji kwadratowej f (linia niebieska). Odczytaj z wykresu:

a) przedział argumentów, do którego odnosi się ten fragment wykresu,

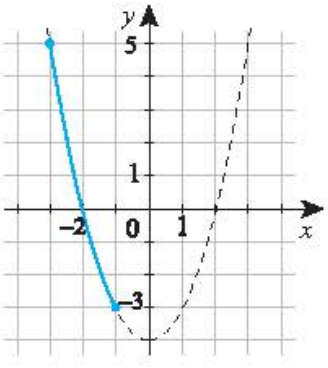
b) najmniejszą wartość funkcji f w tym przedziale,

c) największą wartość funkcji f w tym przedziale.

1



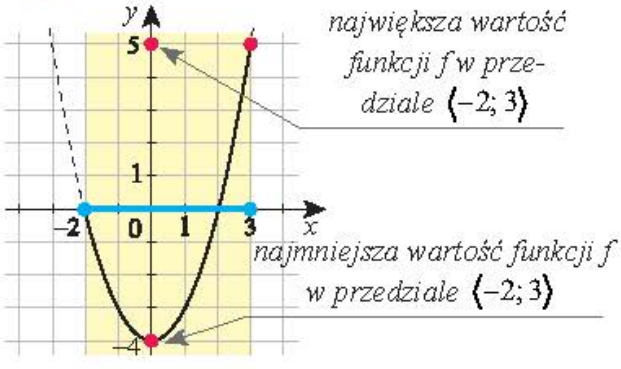
2



Rozwiązanie. Odczytujemy z wykresu:

a) maksymalny przedział argumentów, w którym fragment wykresu funkcji f jest sporządzony:

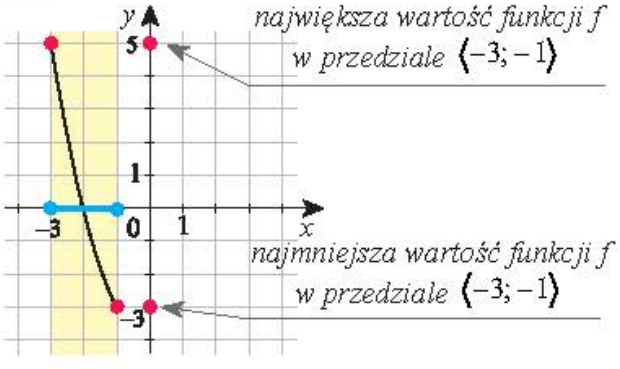
1 $\langle -2; 3 \rangle$



b) $y_{MIN} = f(0) = -4$,

c) $y_{MAX} = f(3) = 5$.

2 $\langle -3; -1 \rangle$



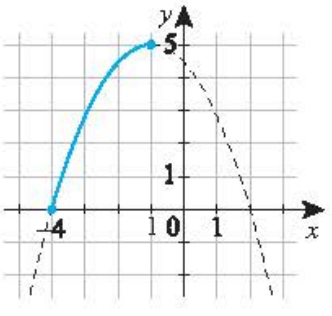
b) $y_{MIN} = f(-1) = -3$,

c) $y_{MAX} = f(-3) = 5$.

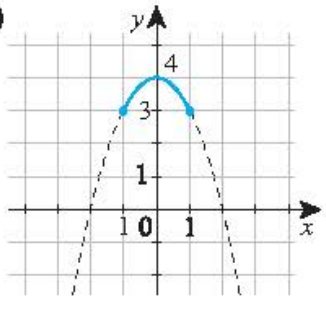
Odp.: **1** **a)** $\langle -2; 3 \rangle$, **b)** -4, **c)** 5, **2** **a)** $\langle -3; -1 \rangle$, **b)** -3, **c)** 5.

Ćwiczenie 24. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu pewnej funkcji kwadratowej. Odczytaj z wykresu przedział, w którym fragment ten jest określony oraz podaj wartość najmniejszą i wartość największą funkcji w tym przedziale.

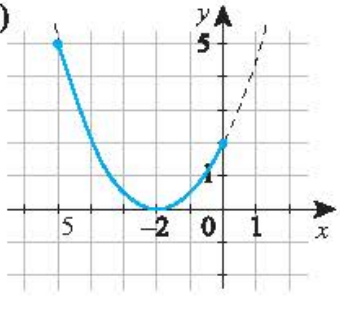
a)



b)



c)



Przykład 15. Wykonaj odpowiednie obliczenia i podaj wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej f w podanym przedziale:

a) $f(x)=2x^2-4x-1$, $\langle 0;3\rangle$, **b)** $f(x)=-(x+1)(x-5)$, $\langle -2;1\rangle$.

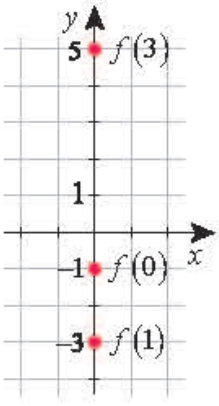
Rozwiązanie

a) Obliczamy $f(0)$, $f(3)$, x_W i sprawdzamy, czy x_W należy do przedziału $\langle 0;3\rangle$:

$f(0)=2\cdot 0^2-4\cdot 0=-1$

$f(3)=2\cdot 3^2-4\cdot 3-1=5$

$x_W=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{4}=1$ i zauważamy, że $1\in\langle 0;3\rangle$.



Obliczamy $y_W=f(x_W)$, bo $x_W\in\langle 0;3\rangle$,

$f(x_W)=f(1)=2\cdot 1-4-1=-3$, czyli $y_{MIN}=-3$.

Porównujemy liczby: -1, 5, -3.

Zatem $f(1)<f(0)<f(3)$.

b) Obliczamy $f(-2)$, $f(1)$:

$f(-2)=-(-2+1)(-2-5)=-7$, $f(1)=-(1+1)(1-5)=8$.

Obliczamy x_W. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x_1=-1$ i $x_2=5$, więc

$x_W=\frac{-1+5}{2}=2$ i zauważamy, że $x_W\notin\langle -2;1\rangle$.

Porównujemy tylko dwie wartości: -7 i 8. Zatem $f(-2)<f(1)$.

Odp.: **a)** $y_{MIN}=f(1)=-3$, $y_{MAX}=f(3)=5$,

b) $y_{MIN}=f(-2)=-7$, $y_{MAX}=f(1)=8$.

Uwaga

Aby określić wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej f w przedziale $\langle m;n\rangle$, należy:

- obliczyć wartości funkcji f na końcach przedziału $\langle m;n\rangle$, czyli $y_1=f(m)$ i $y_2=f(n)$,
- obliczyć odciętą p wierzchołka wykresu funkcji kwadratowej:
  - jeśli p należy do przedziału $\langle m;n\rangle$, to obliczyć $q=f(p)$ i porównać wartości $f(m)$, $f(n)$ i $f(p)$,
  - jeśli p nie należy do przedziału $\langle m;n\rangle$, to wystarczy porównać $f(m)$ i $f(n)$.

Ćwiczenie 25. Oblicz wartość najmniejszą y_{MIN} i największą y_{MAX} funkcji kwadratowej f w podanym przedziale:

a) $f(x)=x^2+3x$, $\langle 1;9\rangle$, **b)** $f(x)=x^2-3x+1$, $\langle 0;4\rangle$,

c) $f(x)=-2(x-2)^2+1$, $\langle -2;0\rangle$, **d)** $f(x)=-(x+3)(x-1)$, $\langle -1;2\rangle$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

24. **a)** $\langle -4;-1\rangle$, $y_{MIN}=f(-4)=0$, $y_{MAX}=f(-1)=5$, **b)** $\langle -1;1\rangle$, $y_{MIN}=f(-1)=f(1)=3$, $y_{MAX}=f(0)=4$, **c)** $\langle -5;0\rangle$, $y_{MIN}=f(-2)=0$, $y_{MAX}=f(-5)=5$.

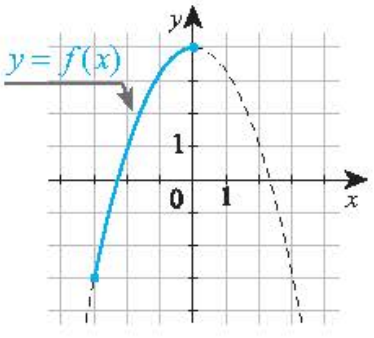
25. **a)** $y_{MIN}=f(1)=4$, $y_{MAX}=f(9)=108$, **b)** $y_{MIN}=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, $y_{MAX}=f(4)=5$,

c) $y_{MIN}=f(-2)=-31$, $y_{MAX}=f(0)=-7$, **d)** $y_{MIN}=f(2)=-5$, $y_{MAX}=f(-1)=4$.

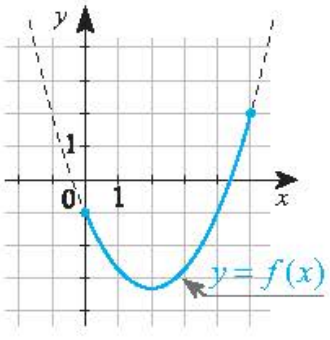
Zadania utrwalające

12.38. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f (linia niebieska). Odczytaj przedział tych argumentów x, do których odnosi się ten fragment.

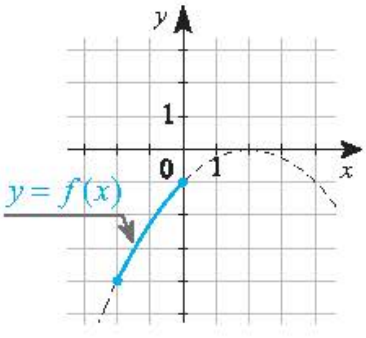
a)



b)



c)

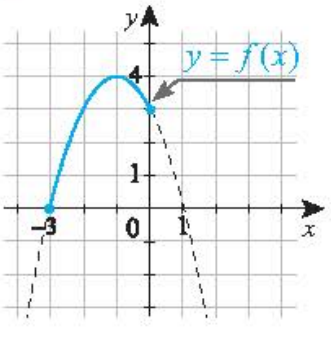


12.39. Na rysunkach **1**, **2** i **3** przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f (linia niebieska). Odczytaj z wykresu i podaj:

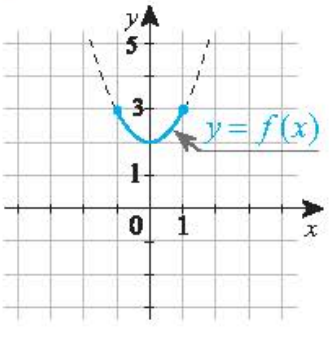
a) przedział tych argumentów x, dla których ten fragment jest określony,

b) wartość najmniejszą i największą funkcji f w tym przedziale.

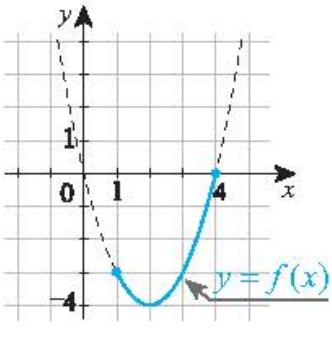
1



2



3



12.40. Oblicz najmniejszą y_{MIN} i największą y_{MAX} wartość funkcji kwadratowej f w podanym przedziale:

a) $f(x)=-x^2+5x$, $\langle -1;1\rangle$,

b) $f(x)=2x^2-3x+4$, $\langle -1;0\rangle$,

c) $f(x)=3(x+3)(x-1)$, $\langle -2;0\rangle$,

d) $f(x)=5(x+3)(x+5)$, $\langle -2;-1\rangle$,

e) $f(x)=2(x-2)^2+4$, $\langle 0;3\rangle$,

f) $f(x)=(x+3)^2-3$, $\langle -2;2\rangle$.

12.41. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Najmniejsza wartość funkcji f określonej wzorem $f(x)=x^2+2x-1$ w przedziale $\langle -2;1\rangle$ jest równa:

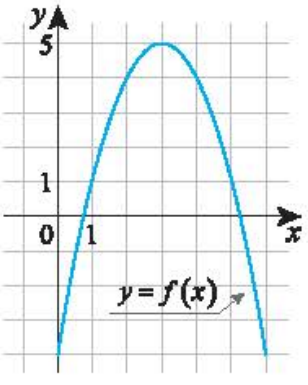
A. -2, **B.** -1, **C.** 0, **D.** 1.

12.42. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Największa wartość funkcji f określonej wzorem $f(x)=-\frac{1}{2}(x-5)^2+4$ w przedziale $\langle -1;3\rangle$ jest równa:

A. 0, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 4.

12.43. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

W przedziale $\langle 2;5\rangle$ funkcja f ma najmniejszą wartość równą 1.	P	F
W przedziale $\langle 0;4\rangle$ funkcja f ma największą wartość równą 4.	P	F

12.44. Wartościami funkcji f określonej wzorem $f(n)=n^2-n+41$, gdzie $n\in\{1, 2, 3, ..., 40\}$, są liczby pierwsze.

a) Oblicz najmniejszą i największą liczbę pierwszą, którą można wyznaczyć za pomocą tego wzoru.

b) Sprawdź, czy liczba pierwsza 547 jest wartością tej funkcji.

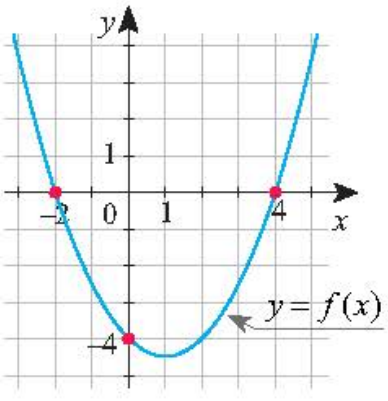
12.45. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji f, gdy $f(x)=(x-1)^2+(x-3)^2+(x-5)^2$, gdy $x\in\langle 1;5\rangle$.

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie informacji o niej

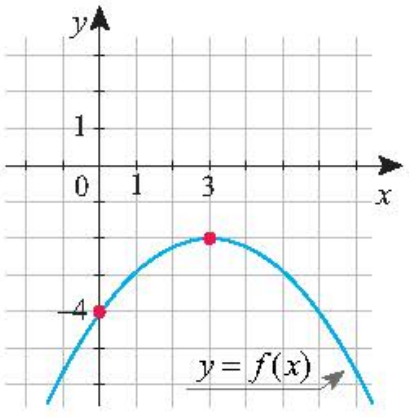
Jedną z informacji o funkcji kwadratowej jest jej wykres. Pokażemy na przykładzie, jak korzystając z danych umieszczonych na wykresie (odczytując współrzędne odpowiednich punktów), można napisać wzór funkcji.

Przykład 16. Na rysunku przestawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Odczytaj z niego odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.

a)



b)



Rozwiązanie. Z wykresu funkcji f odczytujemy:

a)
- miejsca zerowe funkcji f:
  $x_1 = -2,\ x_2 = 4.$
  Funkcję f zapisujemy w postaci iloczynowej
  $$f(x) = a(x+2)(x-4).$$
- $(0,-4)$ – współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji f z osią y.
  Zatem
  $$f(0) = -4 \text{ i } f(x) = a(x+2)(x-4),$$
  więc $-4 = a(0+2)(0-4),$
  skąd $a = \frac{1}{2},$
  czyli $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4).$

b)
- $(3,-2)$ – współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.
  Funkcję f zapisujemy w postaci kanonicznej
  $$f(x) = a(x-3)^2 - 2.$$
- $(0,-4)$ – punkt przecięcia się wykresu funkcji f z osią y.
  Zatem
  $$f(0) = -4 \text{ i } f(x) = a(x-3)^2 - 2,$$
  więc $-4 = a(0-3)^2 - 2,$
  skąd $a = -\frac{2}{9},$
  czyli $f(x) = -\frac{2}{9}(x-3)^2 - 2.$

Odp.: **a)** $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4)$, **b)** $f(x) = -\frac{2}{9}(x-3)^2 - 2.$

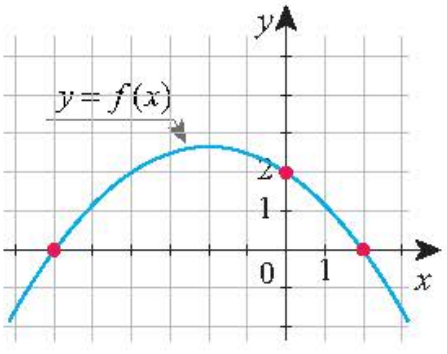
Uwaga

Jeżeli wyznaczamy wzór funkcji kwadratowej f, a wśród informacji podane są:

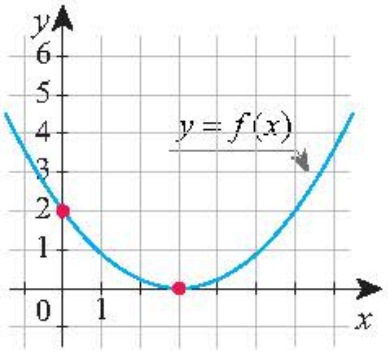
- **miejsca zerowe** – to korzystamy z postaci iloczynowej wzoru funkcji $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ lub $f(x)=a(x-x_0)^2$,
- **współrzędne p lub q wierzchołka W paraboli**, która jest jej wykresem, to korzystamy z postaci kanonicznej wzoru funkcji $f(x)=a(x-p)^2+q$.

Ćwiczenie 26. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Odczytaj odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.

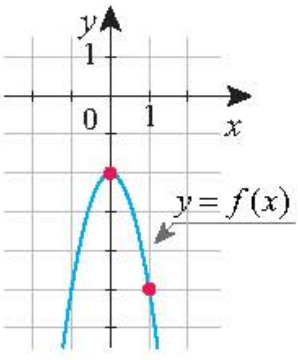
a)



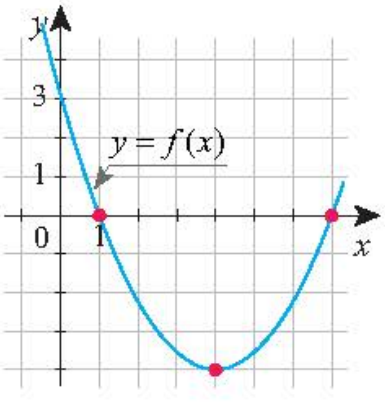
b)



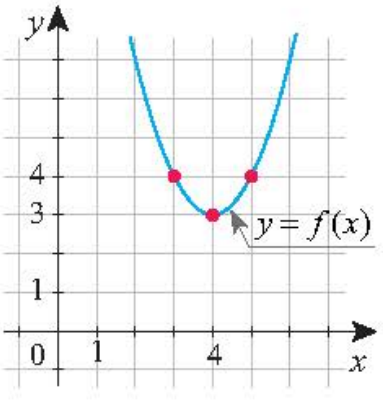
c)



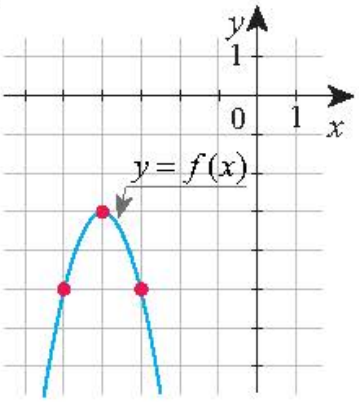
d)



e)



f)



Ćwiczenie 27. Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W=(p, q)$. Określ, o której współrzędnej, p czy q paraboli, jest poniższa informacja, a następnie podaj jej wartość.

a) Najmniejszą wartość funkcja f ma, gdy $x=3$.

b) Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty; 2)$.

c) Osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x=5$.

d) Przedział $\langle -3; +\infty)$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest rosnąca.

e) Prosta o równaniu $y=-2$ ma z wykresem funkcji f jeden punkt wspólny.

Przykład 17. Napisz wzór funkcji kwadratowej f, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty o współrzędnych $(0,4)$, $(1,3)$ i $(-1,9)$.

Rozwiązanie

W informacji o wykresie funkcji kwadratowej f nie są podane miejsca zerowe i współrzędne wierzchołka, więc korzystamy z wzoru ogólnego funkcji $f(x)=ax^2+bx+c$.

Punkt $(0,4)$ leży na wykresie funkcji f, więc $f(0)=4$, zatem $c=4$.

Wzór funkcji f możemy zapisać $f(x)=ax^2+bx+4$.

Rozwiązując układ równań, obliczamy wartości współczynników a i b.

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(-1)=9 \end{cases}$$

Punkt $(1,3)$ *leży na wykresie funkcji* f,
punkt $(-1,9)$ *leży na wykresie funkcji* f,

$$\begin{cases} a\cdot 1^2+b\cdot 1+4=3 \\ a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+4=9 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} a+b=-1 \\ a-b=5 \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}.$$

Odp.: $f(x)=2x^2-3x+4$.

Ćwiczenie 28. Napisz wzór funkcji kwadratowej f, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty o współrzędnych: **a)** $(1,-2)$, $(3,-6)$, $(0,-3)$, **b)** $(0,-5)$, $(1,0)$, $(-5,0)$.

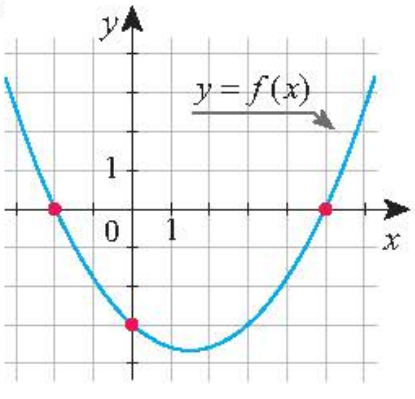
Odpowiedzi do ćwiczeń

26. a) $f(x)=-\frac{1}{6}(x+6)(x-2)$, b) $f(x)=\frac{2}{9}(x-3)^2$, c) $f(x)=-3x^2-2$, d) $f(x)=\frac{4}{9}(x-1)(x-7)$ lub $f(x)=\frac{4}{9}(x-4)^2-4$, e) $f(x)=(x-4)^2+3$, f) $f(x)=-2(x+4)^2-3$. 27. a) $p=3$, b) $q=2$, c) $p=5$, d) $p=-3$, e) $q=-2$. 28. a) $f(x)=-x^2+2x-3$, b) $f(x)=x^2+4x-5$.

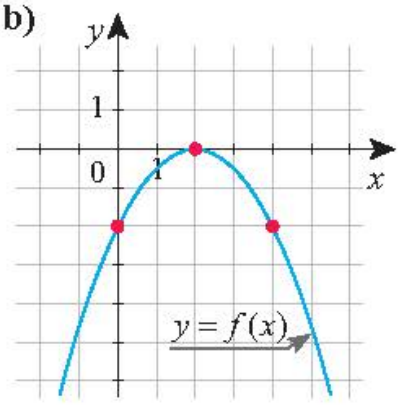
Zadania utrwalające

12.46. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Odczytaj odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.

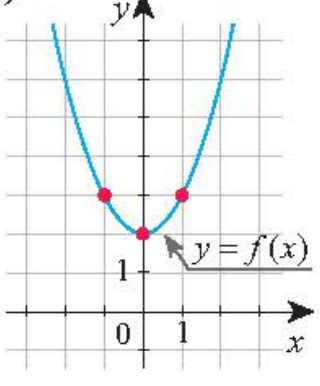
a)



b)

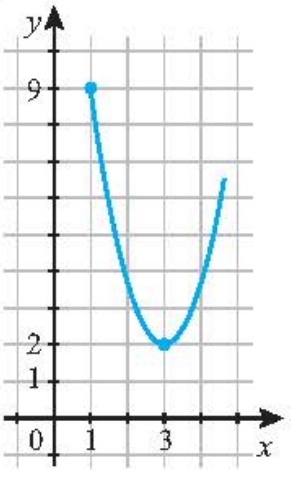


c)

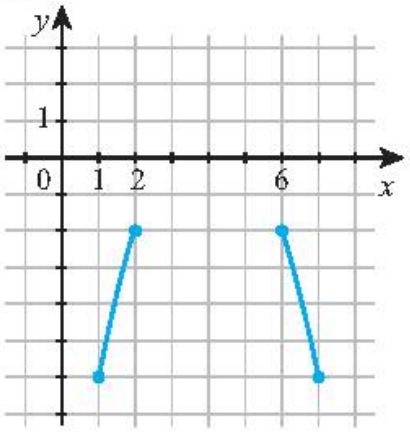


12.47. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f. Odczytaj odpowiednie dane i napisz wzór tej funkcji.

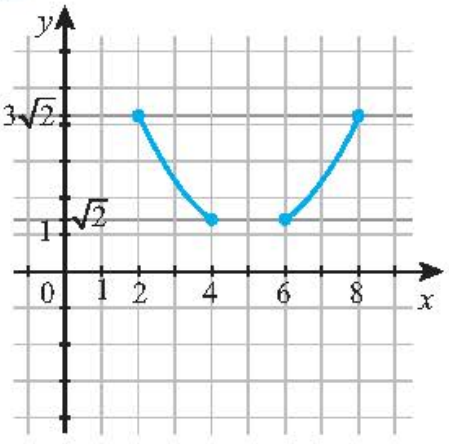
a)



b)

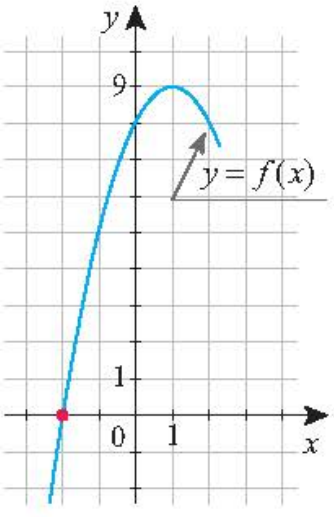


c)



12.48. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.



Miejscami zerowymi funkcji f są liczby -2 i 4.	P	F
Zbiorem wartości funkcji f są liczby należące do przedziału $(-\infty; 9\rangle$.	P	F
Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-2; 4)$.	P	F

12.49. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby x_1 i x_2, a jej wykres jest parabolą przystającą do paraboli o równaniu $y = ax^2$. Napisz wzór funkcji f w postaci ogólnej, gdy:

a) $x_1 = -2,\ x_2 = 5$ i $a = 3$, **b)** $x_1 = 8,\ x_2 = 20$ i $a = -1$, **c)** $x_1 = 0,\ x_2 = 7$ i $a = \frac{1}{3}$.

12.50. Wykres funkcji kwadratowej przecina oś x w punktach A i B oraz oś y w punkcie M. Napisz wzór tej funkcji oraz podaj współrzędne wierzchołka paraboli, która jest jej wykresem, gdy:

a) $A = (-1, 0),\ B = (5, 0),\ M = (0, 5)$, **b)** $A = (-4, 0),\ B = (6, 0),\ M = (0, -12)$,

c) $A = (-4, 0),\ B = (1, 0),\ M = (0, 8)$, **d)** $A = (-3, 0),\ B = (1, 0),\ M = (0, -300)$.

12.51. Napisz wzór funkcji kwadratowej f, której miejscami zerowymi są liczby -1 i 7, a zbiorem jej wartości jest zbiór Y_f, gdy:

a) $Y_f = (-\infty; 4\rangle$, **b)** $Y_f = \langle -1; +\infty)$.

12.52. Funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe 1 i –3, a jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 6)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f **nie jest** określona wzorem:

A. $f(x)=2(x-1)(x+3)$,

B. $f(x)=-2(x+1)^2+8$,

C. $f(x)=-2x^2-4x+6$,

D. $f(x)=(x+3)(2-2x)$.

12.53. Napisz wzór funkcji kwadratowej f, o której wiadomo, że:

a) ma najmniejszą wartość równą –10 dla argumentu równego 3, a jej wykres przechodzi przez punkt $P=(2,-8)$,

b) ma największą wartość równą 8 dla argumentu równego –1, a jej wykres przechodzi przez punkt $P=(-3,-4)$.

12.54. Napisz wzór funkcji kwadratowej f, o której wiadomo, że:

a) $f(5)=0$ i przedział $\langle 2;+\infty)$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest malejąca, a przedział $(-\infty;5\rangle$ jest jej zbiorem wartości,

b) $f(1)=1$ i przedział $\langle 4;+\infty)$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest rosnąca, a przedział $\langle -8;+\infty)$ jest jej zbiorem wartości,

c) $f(0)=0$ i przedział $(-\infty;-2\rangle$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja jest malejąca, a jej wykres z prostą o równaniu $y=-4$ ma jeden punkt wspólny.

12.55. Napisz wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty o współrzędnych:

a) $(0,2)$, $(1,3)$, $(-1,9)$,

b) $(-1,11)$, $(1,1)$, $(0,5)$,

c) $(0,0)$, $(-2,-22)$, $(2,-2)$,

d) $(0,-4)$, $(1,-5)$, $(-2,-8)$.

12.56. Określ, dla jakich wartości współczynników a, b i c do wykresu funkcji kwadratowej f, gdzie $f(x)=ax^2+bx+c$, należą punkty A i B, gdy:

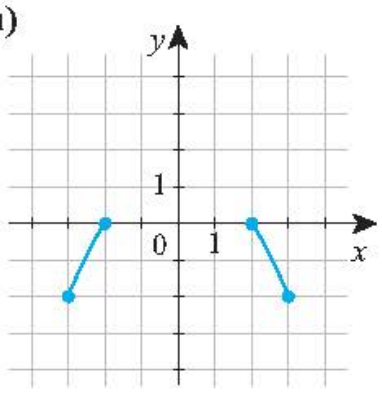
a) $f(x)=ax^2+bx+2$, $A=(-1,-1)$ i $B=(-2,-2)$,

b) $f(x)=2x^2+bx+c$, $A=(-3,22)$ i $B=(1,2)$.

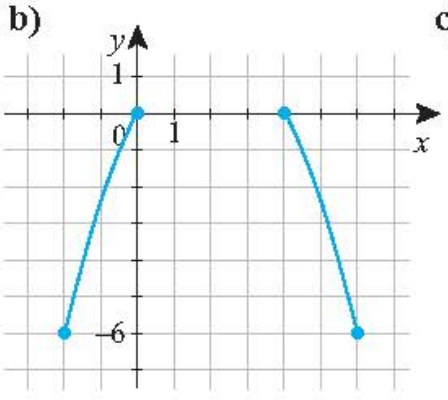
c) $f(x)=ax^2+x+c$, $A=(-2,-3)$ i $B=(3,-3)$.

12.57. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji kwadratowej f. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x)=2$.

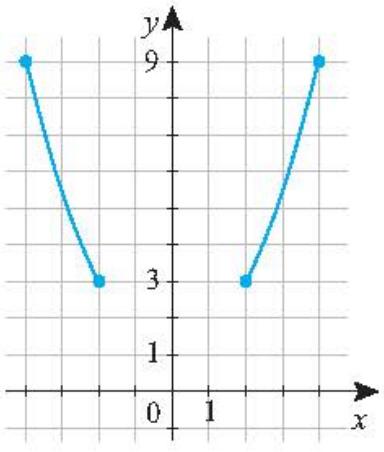
a)



b)



c)



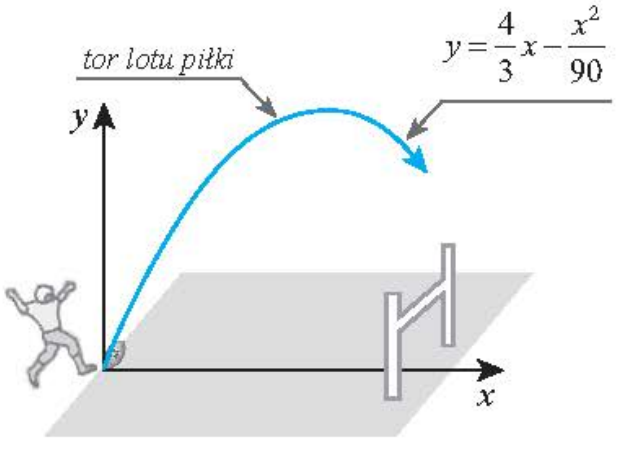
Funkcja kwadratowa w zastosowaniach

Funkcja kwadratowa ma szerokie zastosowanie przy interpretowaniu wielu zagadnień teoretycznych i praktycznych.

Przykłady zależności, które są opisane funkcją kwadratową:

- $P(a)=a^2$ – pole P kwadratu o boku a, gdzie $a>0$,
- $P(r)=\pi r^2$ – pole P koła o promieniu r, gdzie $r>0$,
- $s(t)=\dfrac{at^2}{2}$ – droga s przebyta w ruchu jednostajnie przyspieszonym w czasie t z przyspieszeniem a, gdzie $t\geq 0$,
- $E_k(v)=\dfrac{mv^2}{2}$ – energia kinetyczna E_k ciała o masie m, które osiągnęło w ruchu prędkość v, gdzie $v\geq 0$.

Jeżeli jakiś proces lub zjawisko można opisać za pomocą funkcji kwadratowej, to możliwe jest wtedy określanie warunków tak, by przyjmowała ona pożądane przez nas wartości.

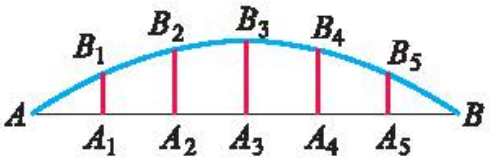


Za pomocą funkcji kwadratowej można opisać niektóre budowle. Pozwala to na wykonanie obliczeń potrzebnych do ich konstrukcji. Pokażemy to na przykładach.

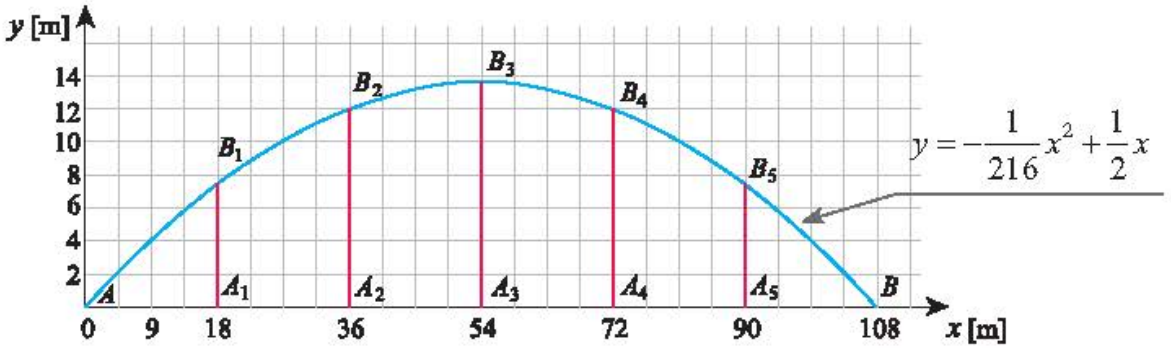
Przykład 18. Przęsło mostu ma kształt paraboli o równaniu $y=-\frac{1}{216}x^2+\frac{1}{2}x$, gdzie x oznacza odległość od punktu A i jest liczbą z przedziału $\langle 0\,;108\rangle$.



Pomost (jezdnia) AB ma długość 108 m i jest podtrzymywany przez pięć pionowych wieszaków: A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5 rozmieszczonych w równych odstępach. Oblicz ich długości.



Rozwiązanie. Rysunek schematyczny mostu jest fragmentem wykresu funkcji $f(x)=-\frac{1}{216}x^2+\frac{1}{2}x$. Zauważamy, że ta funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1=0$ i $x_2=108$.



Z warunków zadania: $|AA_1|=|A_1A_2|=|A_2A_3|=|A_3A_4|=|A_4A_5|=|A_5B|=\frac{108}{6}=18$.

Zatem: $A=(0\,,0)$, $A_1=(18\,,0)$, $A_2=(36\,,0)$, $A_3=(54\,,0)$, $A_4=(72\,,0)$, $A_5=(90\,,0)$, $B=(108\,,0)$.

Długości wieszaków to wartości funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x)=-\frac{1}{216}x^2+\frac{1}{2}x$ dla argumentów x równych kolejno: 18, 36, 54, 72, 90.

x	18	36	54	72	90
$y=-\frac{1}{216}x^2+\frac{1}{2}x$	7,5	12	13,5	12	7,5

$|A_1B_1|=7{,}5$ m, $|A_2B_2|=12$ m, $|A_3B_3|=13{,}5$ m, $|A_4B_4|=12$ m, $|A_5B_5|=7{,}5$ m.

Odp.: Wieszaki podtrzymujące jezdnię mostu mają długości: dwa z nich po 7,5 m, dwa po 12 m i jeden (najdłuższy) 13,5 m.

Ćwiczenie 29. Dla pewnego pojazdu w określonych warunkach długość drogi hamowania s (w metrach) obliczamy z wzoru $s(x)=0{,}01x^2+0{,}3x$, gdzie x jest prędkością w metrach na sekundę, z jaką poruszał się pojazd w chwili rozpoczęcia hamowania.

a) Oblicz długość drogi hamowania pojazdu, jeżeli w momencie rozpoczęcia hamowania jechał on z prędkością:

1 $90\frac{\text{km}}{\text{h}}=25\frac{\text{m}}{\text{s}}$, **2** $72\frac{\text{km}}{\text{h}}=20\frac{\text{m}}{\text{s}}$, **3** $54\frac{\text{km}}{\text{h}}=15\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Podaj prędkość, z jaką jechał pojazd, jeżeli długość drogi hamowania była równa 18 m.

Przy tworzeniu wzoru funkcji kwadratowej od przyjętych oznaczeń i warunków, o których informuje problem, zależy dziedzina utworzonej funkcji.

Problem	Przyjęte oznaczenia	Dziedzina
Iloczyn jakich dwóch liczb dodatnich różniących się o 3 jest najmniejszy?	x – pierwsza liczba $x+3$ – druga liczba	$D=(0;+\infty)$ (bo $x>0$ i $x+3>0$)
	x – pierwsza liczba $x-3$ – druga liczba	$D=(3;+\infty)$ (bo $x>0$ i $x-3>0$)

Przykład 19. Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy dwóch składników nieujemnych tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

Rozwiązanie. Oznaczamy: x – pierwszy składnik, gdzie $x\geq 0$ i $x\leq 100$,
$100-x$ – drugi składnik.

Tworzymy funkcję f zmiennej x, która jest sumą kwadratów tych składników.

$f(x)=x^2+(100-x)^2$, gdy $x\in\langle 0;100\rangle$.

$f(x)=2x^2-200x+10\,000$, gdy $0\leq x\leq 100$.

$f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a=2$, $b=-200$, $c=10\,000$.

Wykresem funkcji f, gdy $x\in\mathbf{R}$, jest parabola, której ramiona skierowane są „ku górze”, więc funkcja f ma najmniejszą wartość.

Obliczamy odciętą x_W wierzchołka paraboli opisanej równaniem $f(x)=2x^2-200x+10\,000$ i sprawdzamy, czy x_W jest liczbą z przedziału $\langle 0;100\rangle$.

$$x_w=\frac{-(-200)}{2\cdot 2}=50 \text{ i } 50\in\langle 0;100\rangle.$$

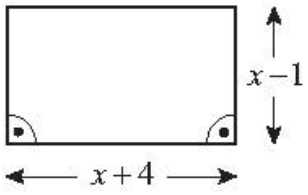
$W=(x_W,y_W)$
$x_W=-\frac{b}{2a}$

Jeżeli $x=50$, to $100-x=50$.

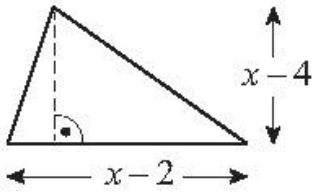
Odp.: $100=50+50$.

Ćwiczenie 30. Wyraź pole P figury przedstawionej na rysunku jako funkcję zmiennej x i określ jej dziedzinę.

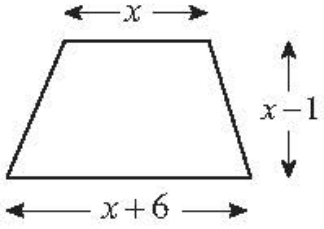
a) prostokąt



b) trójkąt

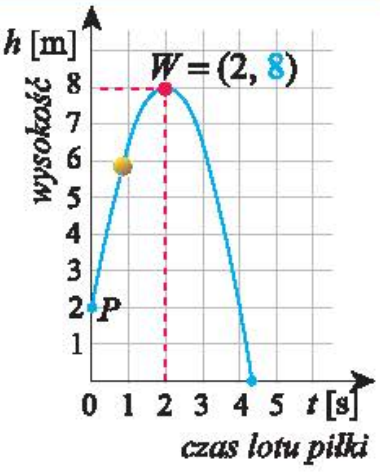


c) trapez



Ćwiczenie 31. Liczbę 40 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, aby ich iloczyn był największy.

Przykład 20. Na rysunku przedstawiono tor lotu piłki wyrzuconej w górę pod pewnym kątem z wysokości 2 m nad ziemią będący fragmentem wykresu funkcji o kreślonej wzorem $h(t)=-\frac{3}{2}t^2+6t+2$, gdzie $t>0$.



a) Oblicz, po jakim czasie piłka spadła na ziemię. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 s.

b) Odczytaj z wykresu, na jakiej maksymalnej wysokości znalazła się wyrzucona piłka.

Rozwiązanie

a) Czas t ($t>0$), po którym piłka spadła na ziemię, to jedno z miejsc zerowych funkcji h.

$$h(t)=0, \text{ więc } -\frac{3}{2}t^2+6t+2=0$$

$$\Delta=36-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 2=48, \quad \sqrt{\Delta}=4\sqrt{3}$$

$$t_1=\frac{-6-4\sqrt{3}}{-3}, \quad t_2=\frac{-6+4\sqrt{3}}{-3}$$

$$t_1\approx 4{,}31, \quad t_2\approx -0{,}31.$$

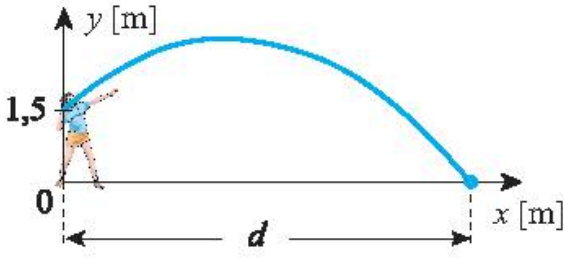
$t_2<0$ *nie spełnia warunków zadania*

Zatem $t_1\approx 4{,}31$.

b) $q=h_{MAX}=h(2)=8$ (największa wartość funkcji kwadratowej to wartość rzędnej wierzchołka paraboli).

Odp.: **a)** Czas lotu piłki $t\approx 4{,}31$ s. **b)** Maksymalna wysokość, na jakiej znalazła się piłka, wyniosła 8 m.

Ćwiczenie 32. Miotaczka pchnęła kulę z wysokości 1,5 m nad ziemią. Model matematyczny toru lotu kuli pchniętej przez zawodniczkę jest fragmentem wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x)=-0{,}1\cdot(x-5)^2+4$.



a) Oblicz, na jakiej wysokości nad ziemią znajdowała się kula w najwyższym punkcie swego lotu.

b) W jakiej odległości d od zawodniczki upadła pchnięta kula?

Przykład 21. Skup jagód w sezonie letnim trwał 20 dni. Liczbę kilogramów kupionych owoców w poszczególnych dniach opisuje w przybliżeniu funkcja f określona wzorem $f(n)=-2n^2+44n$, gdy $n=1, 2, ..., 20$. W którym dniu kupiono najwięcej jagód? Ile kilogramów ważyły te jagody?

Rozwiązanie. Wzór funkcji f zapisany jest w postaci

$f(n)=an^2+bn+c$, gdzie $a=-2,\ b=44,\ c=0$.

Zauważamy, że $a<0$, zatem funkcja f osiąga wartość największą $y_{MAX}=f(p)$, gdy p jest liczbą naturalną z przedziału $\langle 1; 20\rangle$.

Ponieważ $p=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-44}{-4}=11$, zatem $y_{MAX}=f(11)=-2\cdot 11^2+44\cdot 11=242$.

Odp.: W jedenastym dniu kupiono najwięcej jagód, tj. 242 kilogramy.

Ćwiczenie 33. Zależność między kosztem całkowitym produkcji K a liczbą x wyprodukowanych detali określona jest wzorem $K(x)=0{,}01x^2-4x+500$, gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią. Ile detali należy produkować, aby koszt całkowity produkcji był najmniejszy?

Odpowiedzi do ćwiczeń

29. **a)** 1) 13,75 m, 2) 10 m, 3) 6,75 m, **b)** $108\dfrac{\text{km}}{\text{h}}=30\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$. 30. **a)** $P(x)=(x+4)(x-1)$, $D: x>1$,

b) $P(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)(x-4)$, $D: x>4$, **c)** $P(x)=(x+3)(x-1)$, $D: x>1$. 31. $40=20+20$.

32. **a)** 4 m, **b)** $d\approx 11{,}3$ m. 33. 200 detali.

Zadania utrwalające

12.58. Po wielu badaniach ustalono, że koszt K produkcji pewnego towaru zależny od liczby x wyprodukowanych sztuk określa się wzorem $K(x)=0,1x^2-3x+600$. Oblicz koszt produkcji:

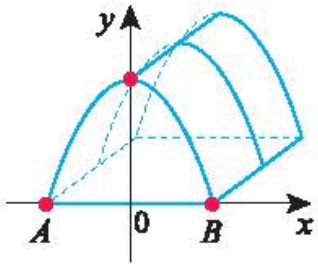
a) 20 sztuk towaru, **b)** 200 sztuk towaru, **c)** 1000 sztuk towaru.

12.59. Ciało wyrzucone w górę osiąga po t sekundach wysokość h liczoną w metrach, równą wartości funkcji określonej wzorem $h(t)=-5t^2+15t$.

a) W której sekundzie ciało spadnie na ziemię?

b) W której sekundzie lotu wysokość h ciała nad ziemią jest największa? Ile to jest metrów?

12.60. Tunele foliowe pod uprawę ogórków wsparte są na prętach w kształcie łuku paraboli o równaniu $y=-\frac{3}{4}x^2+3$.



a) Sprawdź, czy pracownik o wzroście 1,85 m może przejść bez pochylania się wzdłuż ścieżki prowadzącej środkiem tunelu. Odpowiedź uzasadnij.

b) Oblicz szerokość tunelu przy gruncie.

12.61. Modele matematyczne torów kropli wody tryskającej z fontanny są fragmentami parabol o równaniach:



- $y=-\frac{2}{3}x^2+3x$,
- $y=-\frac{3}{5}x^2+2x$,
- $y=-\frac{1}{4}x^2+x$.

Wskaż równanie opisujące tor, po którym:

a) krople spadają najdalej od środka fontanny,

b) krople wznoszą się najniżej.

12.62. W pewnej miejscowości liczbę przyjęć chorych do szpitala w czasie n dni trwania epidemii określa wzór $E(n)=-2n^2+24n$, gdzie n jest liczbą naturalną i $n\leq 10$.

a) Oblicz, ilu chorych przyjęto do szpitala w pierwszym dniu trwania epidemii, a ilu w dziesiątym.

b) W którym dniu trwania epidemii przyjęto najwięcej pacjentów i ilu ich było?

c) Przez ile dni przyjmowano do szpitala chorych ze względu na panującą epidemię?

12.63. Opisz podaną niżej informację za pomocą wzoru funkcji kwadratowej jednej zmiennej i określ jej dziedzinę.

a) Suma kwadratów dwóch składników liczby 20.

b) Iloczyn dwóch liczb różniących się o 5.

c) Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych.
d) Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych.
e) Iloczyn dwóch kolejnych liczb nieparzystych.
f) Iloczyn czynników pierwszych liczby 247, z których każdy zwiększono o tę samą wartość.

12.64. Opisz za pomocą wzoru funkcji kwadratowej zmiennej n liczbę przekątnych n-kąta i określ jej dziedzinę. Oblicz, ile boków ma wielokąt, w którym liczba przekątnych jest równa 405.

12.65. Część uczniów klasy liczącej 35 osób zachorowała na grypę i nie przyszła do szkoły. Każdy zdrowy uczeń wysłał do chorego kolegi esemesa z pozdrowieniami.
a) Napisz wzór funkcji f, która liczbie x uczniów chorych na grypę przyporządkowuje liczbę $f(x)$ wysłanych esemesów, a następnie określ ich dziedzinę.
b) Wiedząc, że liczba wysłanych esemesów jest największa z możliwych, wyznacz zarówno liczbę uczniów chorych na grypę, jak i liczbę wysłanych esemesów.

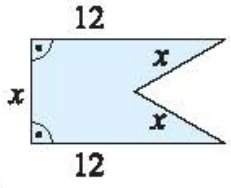
12.66. Drogę s pewnego poruszającego się ciała w czasie t określa wzór $s(t) = t^2 + 6t + 10$. Oblicz średnią prędkość ciała w czasie $t \in \langle 4; 7 \rangle$.

12.67. Liczbę 36 rozłóż na sumę takich dwóch składników, których iloczyn jest największy.

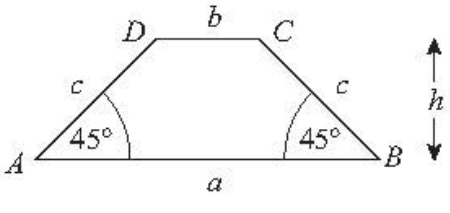
12.68. Podaj wymiary prostokąta o obwodzie 24 cm, którego kwadrat długości przekątnej jest najmniejszy.

12.69. Na ogrodzenie parkingu w kształcie prostokąta przeznaczono 300 metrów bieżących siatki. Ozdobna metalowa brama wjazdowa ma mieć szerokość 12 m. Jakie wymiary powinien mieć ten parking, aby jego pole powierzchni było największe? Oblicz to pole.

12.70. Dla jakich wartości x pole zacieniowanej figury przedstawionej na rysunku jest największe? Oblicz to pole.



12.71. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 45°, a suma długości wysokości i dłuższej podstawy jest równa 12.
a) Wyraź pole P trapezu jako funkcję zmiennej h i podaj jej dziedzinę.
b) Oblicz wymiary tego trapezu, którego pole jest największe.



Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Postacią kanoniczną funkcji f określonej wzorem $f(x)=-2x^2+5x-3$ jest wzór:

A. $f(x)=-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$,

B. $f(x)=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$,

C. $f(x)=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$,

D. $f(x)=-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$.

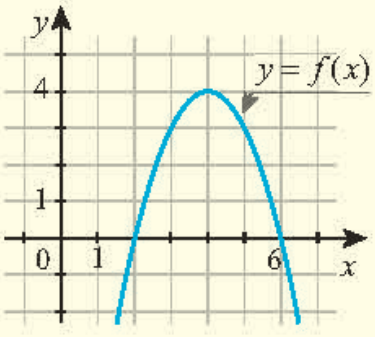
2. Funkcja f określona wzorem $f(x)=-x^2+bx+c$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty;2\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 2;+\infty)$, a jednym z jej miejsc zerowych jest liczba 1.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika z tego, że:

A. $b=4$ i $c=-3$, **B.** $b=2$ i $c=-1$, **C.** $b=4$ i $c=3$, **D.** $b=2$ i $c=1$.

3. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f **nie jest** określona wzorem:

A. $f(x)=-x^2+8x-12$,

B. $f(x)=-(x-4)^2+4$,

C. $f(x)=(2-x)(x-6)$,

D. $f(x)=-(2-x)(x-6)$.

4. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=-2(x+3)^2-5$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Prosta o równaniu $x=-3$ jest osią symetrii wykresu funkcji f.	P	F
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -5;+\infty)$.	P	F
Przedział $\langle 3;+\infty)$ jest maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest rosnąca.	P	F
Funkcja f nie ma miejsc zerowych.	P	F

5. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby -100 i 300.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu:

A. $x=-100$ **B.** $x=100$ **C.** $y=-100$ **D.** $y=100$

6. **D** Funkcja kwadratowa f ma najmniejszą wartość równą -3 dla argumentu 1. Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 4. Czy funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2-3$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród oznaczonych literami A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$f(-3)=1$ i $f(4)=0$.
N	Nie,		B.	$f(1)=-3$ i $f(4)=0$.

7. **D** Czy wzór funkcji f, gdy $f(x)=-x^2+9$, można zapisać w postaci iloczynowej $f(x)=-(x-3)(x+3)$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród oznaczonych literami A i B.

T	Tak,	ponieważ	A.	$-x^2+9=-(x^2+9)=-(x+3)^2$.
N	Nie,		B.	$-x^2+9=-(x^2-9)=(3-x)(3+x)$.

8. Chodziarz szedł z prędkością $v\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ określoną wzorem $v(t)=\frac{1}{5}t-\frac{1}{100}t^2$, gdzie t to czas w sekundach, jaki minął od startu.

a) Jaką maksymalną prędkość osiągnął chodziarz w czasie marszu?

b) Ile czasu szedł chodziarz?

9. Napisz wzór funkcji kwadratowej f, wiedząc, że:

a) wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(2, 1)$, a liczba 3 jest miejscem zerowym tej funkcji,

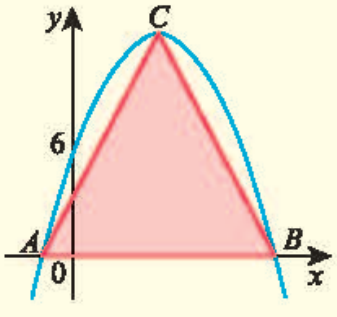
b) funkcja ma dwa miejsca zerowe -2 i 4 oraz $f(0)=16$.

10. W parabolę o równaniu $y=a(x+2)(x-8)$ wpisano trójkąt równoramienny ABC w sposób przedstawiony na rysunku. Oblicz:

a) współczynnik a równania paraboli,

b) współrzędne wierzchołka C trójkąta ABC,

c) pole trójkąta ABC.



Wskazówki i odpowiedzi

1. Liczby rzeczywiste i działania na nich

1.1. **a)** Zbiór nieskończony, **b)** zbiór skończony, **c)** zbiór nieskończony, **d)** zbiór nieskończony.

1.2. $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$, 7 podzbiorów. **1.3.** Tak, 20. **1.4.** 10.

1.5. **a)** $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$, **b)** $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, **c)** $A\cup B=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$, **d)** $A\cap B=\{0,1,2,3,4\}$, **e)** $A\setminus B=\{-2,-1\}$, **f)** $B\setminus A=\{5,6,7\}$. **1.6.** A i D.

1.7. **a)** Zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 2 lub przez 3, **b)** zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6, bo $B\cap C=C$, **c)** zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 6, bo $X\cap C=C$, **d)** zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych nieparzystych, **e)** zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych, bo $X\cup C=X$. **1.8.** **a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak, **d)** nie, **e)** tak, **f)** nie.

1.9. B i D. **1.10.** Tak: **a)**, **b)**, **c)**, **d)**. **1.11.** $1\to 3$ i $2\to 0$. **1.12.** **a)** Tak, **b)** tak, **c)** nie.

1.13. $p(a)=b$, $p(b)=c$, $p(c)=d$, $p(d)=a$. **1.14.** **a)** $B\to A$, **b)** $C\to D$, **c)** $F\to E$, **d)** $H\to G$.

2. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

2.1. C. **2.2.** **a)** $x=\sqrt{26}$, **b)** $x=8\sqrt{3}$, **c)** $x=5\sqrt{7}$, **d)** $x=2\sqrt{15}$.

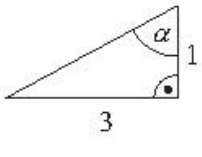
2.3. Kolejno: P, F. **2.4.** *Wskazówka.* Trójkąt ABC jest prostokątny o kątach 90°, 30°, 60° i trójkąt ABD jest prostokątny o kątach 90°, 60° i 30°, więc $\Delta ABC\sim\Delta ABD$. **2.5.** $a_1=27$, $c_1=9\sqrt{10}$.

2.6. **a)** $\frac{5}{4}$, **b)** $\frac{1}{2}$, **c)** $\frac{5}{8}$, **d)** $\frac{4}{3}$. **2.7.** **a)** $\frac{12}{5}$, **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **c)** $\frac{3}{4}$. **2.8.** D.

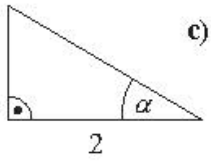
2.9. $|BC|=6$, $|AB|=3\sqrt{5}$. *Wskazówka.* $\frac{|BC|}{|AC|}=\operatorname{tg}\alpha$, skąd $\frac{|BC|}{3}=2$ oraz $|AB|=\sqrt{|BC|^2+|AC|^2}$.

2.10. **a)** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{4}$, **b)** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{15}{8}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{8}{15}$, **c)** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{4}$.

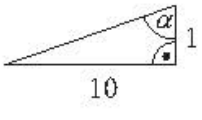
2.11. C. **2.12.** Np. **a)**



b)

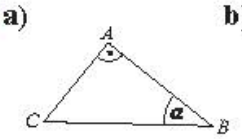


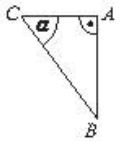
c)

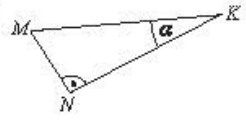


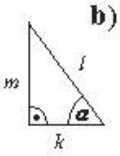
2.13. *Wskazówka.* Zauważ, że tangens kąta ostrego jest stosunkiem długości dwóch boków trójkąta.

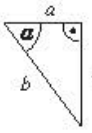
2.14. **a)** $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, **b)** $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, **c)** $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$.

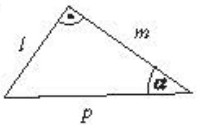
2.15. **a)** 

b) 

c) 

2.17. **a)** 

b) 

c) 

2.18. B. **2.19.** C. **2.20.** *Wskazówka.* Zauważ, że cosinus kąta ostrego jest stosunkiem długości boków trójkąta i licznik jest mniejszy od mianownika.

2.21. Np.: **a)** 1 i 20, **b)** 1 i 10 000, **c)** 1 i $\sqrt{24}$, **d)** 8 i 15.

2.22.

a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
6	8	10	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
4	$4\sqrt{3}$	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
4	6	$2\sqrt{13}$	$\frac{2\sqrt{13}}{13}$	$\frac{3\sqrt{13}}{13}$	$\frac{2}{3}$
3	4	5	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$

2.23. **a)** $|AC|=2\sqrt{15}$, $|AB|=8$, **b)** $|AB|=12$, $|CB|=8\sqrt{2}$, **c)** $|AC|=4$, $|AB|=5$.

2.24. **a)** 5,5, **b)** $\frac{5\sqrt{3}}{2}-5$, **c)** 2, **d)** –4.

2.25. **a)** $12+4\sqrt{3}$, **b)** $10+5\sqrt{2}$, **c)** $12+6\sqrt{3}$.

Wskazówka. **c)** Poprowadź wysokość z wierzchołka C.

2.26. $\left(4\sqrt{3}-4\right)$ km $\approx 2{,}9$ km. **2.27.** 1,5 km. **2.28.** **$24\sqrt{2}$ cm $\approx$ 34 cm** **2.29.** $\alpha=45°$.

2.30. $\left(8\sqrt{3}-8\right)$ m $\approx 5{,}86$m. **2.31.** **a)** 0,1392, **b)** 0,9903, **c)** 0,6249, **d)** 0,9563, **e)** 0,0698.

2.32. **a)** 18°, **b)** 66°, **c)** 72°, **d)** 30°, **e)** 44°, **f)** 58°. **2.33.** **a)** 80°, **b)** 78°, **c)** 39°.

2.34. Około 244 m.

2.35. **a)** $c\approx 29{,}2$ cm, $\alpha\approx 38°$, $\beta\approx 52°$, **b)** $b\approx 17{,}9$ cm, $\alpha\approx 32°$, $\beta\approx 58°$,

c) $a\approx 22{,}8$ cm, $b\approx 25{,}3$ cm, $\beta\approx 48°$, **d)** $b\approx 5{,}8$ dm, $c\approx 7{,}3$ dm, $\alpha\approx 38°$,

e) $b=12$ cm, $c\approx 14{,}4$ cm, $\alpha\approx 34°$, $\beta\approx 56°$, **f)** $a=7$ cm, $c\approx 17{,}5$ cm, $\alpha\approx 24°$, $\beta\approx 66°$,

g) $a=0{,}6$ cm, $c\approx 3{,}06$ cm, $\alpha\approx 11°$, $\beta\approx 79°$, **h)** $b=2\sqrt{7}$ cm, $c=8$ cm, $\alpha\approx 49°$, $\beta=41°$,

i) $a=6$ cm, $b=8$ cm, $c\approx 3{,}06$ cm, $\alpha\approx 37°$, $\beta\approx 53°$. *Wskazówka.* **e)** i **f)** Skorzystaj z wzoru $P_\Delta=\frac{1}{2}ab$.

2.36. $\alpha\approx 69°$, $\beta\approx 69°$, $|AB|\approx 7{,}17$, $|BC|=10$, **b)** $\alpha\approx 55°$, $\beta\approx 55°$, $|AC|\approx 21{,}8$ i $|AC|=|BC|$,

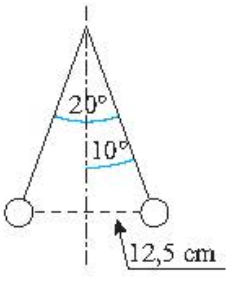
c) $|BC|=4$, $\alpha\approx 51°$, $\beta\approx 51°$, $\gamma\approx 78°$.

2.37. **a)** $|AC|=30\sqrt{3}$, $|AB|=60$, $|\sphericalangle ABC|=60°$, **b)** $|BC|=14$, $|AC|=14\sqrt{3}$, $|\sphericalangle ABC|=60°$,

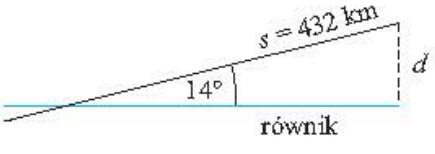
c) $|BC|=0{,}24\sqrt{3}$, $|AB|=0{,}48$, $|\sphericalangle ABC|=30°$, **d)** $|BC|=1$, $|\sphericalangle BAC|=30°$, $|\sphericalangle ABC|=60°$.

2.38. Około 155 m. **2.39.** Około 1 cm. **2.40.** Około 5,263 km.

2.41. 72 cm. *Wskazówka.*



2.42. Około 104,5 km. *Wskazówka.* $s=9\cdot 48=432$.



2.43. **a)** 2, **b)** 1, **c)** 2, **d)** 1, **e)** 0, **f)** 1.

2.44. **a)** 4, **b)** 3, **c)** 2, **d)** 1, **e)** $2\sqrt{3}$, **f)** $2\frac{3}{4}$. *Wskazówka.* **d)** $\operatorname{tg}19^\circ \cdot \operatorname{tg}71^\circ = 1$, **e)** wyłącz $\sqrt{3}$ poza nawias, **f)** $\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ = 1$. **2.45.** **a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak, **d)** tak. **2.46.** B. **2.47.** C.

2.48. *Wskazówka.* Zauważ, że: **a)** $\sin 51^\circ = \cos 39^\circ$, **b)** $\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$ i $\operatorname{tg}20^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg}70^\circ}$.

Zestaw powtórkowy

1. C. **2.** C. **3.** C. **4.** D. **5.** A. **6.** A. 7. P, F. **8.** N – C. **10.** $6\sqrt{3}$.

3. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory

3.1. **a)** 23, 29, 31, **b)** 25, **c)** 21, 28, **d)** 21, 24, 30, 33. **3.2.** $108 = 2^2 \cdot 3^3$, $1944 = 2^3 \cdot 3^5$.

3.3. Np.: $18 = 3+4+5+6$, $21 = 1+2+3+4+5+6$ lub $21 = 10+11$.

3.4. **a)** 30 i 9900, **b)** 6 i 27 846, **c)** 6 i 288, **d)** $2^3 \cdot 5^3 \cdot 3^2$ i $2^5 \cdot 5^4 \cdot 3^4$, **e)** 3 i 2400, **f)** 10^6 i 10^{12}.

3.5. P, P. **3.6.** *Wskazówka.* Zauważ, że klasa liczy 23 uczniów, bo $\mathrm{NWD}(69, 92) = 23$.

3.7. **a)** 12 cm, **b)** 20 kwadratów. *Wskazówka.* **a)** $\mathrm{NWD}(48, 60)$.

3.8. 2 minuty. *Wskazówka.* $\mathrm{NWW}(40, 60) = \frac{40 \cdot 60}{20}$. **3.9.** *Wskazówka.* Zauważ, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to $p+1$ jest sumą jej dzielników. **3.10.** **a)** –14, **b)** –59.

3.11. **a)** 1, **b)** 1, **c)** –1, **d)** 0, **e)** 0, **f)** 32. **3.12.** *Wskazówka.* **a)** $3n-4 = 3n-6+2 = 3(n-2)+2$.

3.13. D. **3.14.** Kolejno: **a)** 0, 3, 4, 8, **b)** 0, 4, 1, 10. *Wskazówka.* **a)** $-12 = 3 \cdot (-4) + 2 = 5 \cdot (-3) + 3 =$ $= 8 \cdot (-2) + 4 = 10 \cdot (-2) + 8$. **3.15.** **a)** $\frac{1}{9}, \frac{2}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{6}$, **b)** $\frac{1}{12}, \frac{2}{6}, \frac{3}{4}$.

3.16. **a)** $\frac{1}{21}, \frac{3}{21}, \frac{28}{21}, \frac{100}{21}$, **b)** $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{14}, \frac{3}{100}$, **c)** $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{7}{15}, -\frac{1}{15}$.

3.17. *Wskazówka.* Zauważ, że $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$ i $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$. **3.18.** Dwa punkty.

3.19. *Wskazówka.* Wykaż, że mianownik ułamka jest iloczynem tylko liczby 2 albo liczby 5 lub liczb 2 i 5.

3.20. *Wskazówka.* Wykaż, że w rozkładzie na czynniki pierwsze mianownika ułamka występuje co najmniej jedna liczba różna od 2 i 5. **3.21.** **a)** 0,34, **b)** 0,23, **c)** 0,12, **d)** 0,56. **3.22.** **a)** $15\frac{4}{9}$, **b)** $3\frac{19}{24}$, **c)** $1\frac{2}{3}$.

3.23. **a)** $\frac{5}{9}$, **b)** $\frac{5}{11}$, **c)** $\frac{27}{37}$, **d)** $\frac{3}{110}$. *Wskazówka.* **c)** Równanie $0{,}729729... = x$ pomnóż przez 1000, **d)** równanie $x = 0{,}02727...$ przez 10, a następnie równanie $10x = 0{,}2727,,,$ przez 100. Otrzymasz wtedy $1000x = 27 + 10x$. **3.26.** **a)** $\sqrt[3]{2{,}7}$, **b)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}$, **c)** $\frac{\sqrt[3]{0{,}01}}{\sqrt[3]{100}}, \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{10}}$.

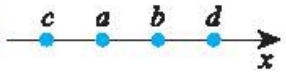
3.27. **a)** $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}+1$, π, **b)** $\sqrt[3]{125}$, $-\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{2\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{1}+\sqrt{9}$, **c)** $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{1}+\sqrt{9}$, **d)** $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{1}+\sqrt{9}$.

3.28. Np.: **a)** $\sqrt{110}$, **b)** $-\sqrt{20}$, **c)** $\sqrt{1\,000\,001}$, **d)** $\sqrt{2{,}5}$, **e)** $\sqrt[3]{3{,}5}$, **f)** $\sqrt{6}$. **3.29.** F, P.

3.30. **a)** $\notin$, **b)** $\in$, **c)** $\in$, **d)** $\notin$, **e)** $\in$, **f)** $\in$. **3.31.** **a)** $\cap$, **b)** $\cup$, **c)** $\cap$, **d)** $\cap$, **e)** $\cup$, **f)** $\cup$.

3.32. $A=\left(\frac{1}{3}\right)$, $B=\left(-3\frac{1}{4}\right)$, $C=(-1)$, $D=(4,(3))$, $E=(2,8)$. **3.33.** $-6\frac{1}{3}$; -2π; $-3{,}2$; $\sqrt{2}$; $2{,}8$; 4.

3.34. Np.: $m=1$ i $k=2$ lub $m=13$ i $k=27$. **3.35.** Np. $-\sqrt{9900}$. **3.37.** D.

3.38. 

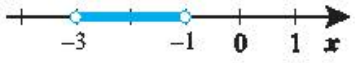
3.39. **a)** $-1\frac{1}{5}$ i $-2{,}5$; $1{,}25$ i $2\frac{2}{5}$; $2\frac{2}{5}$ i $-2{,}5$, **b)** $2\frac{2}{5}$ i $-1\frac{1}{5}$; $-2{,}5$ i $1{,}25$.

3.40. **a)** 2^{20}, **b)** 2^{16}, **c)** 4^{-5}. **3.41.** B i D. **3.42.** Kolejno: P, P, F, P.

3.43. **a)** $m>-3{,}3$, **b)** $n\leq 0$, **c)** $k<0$, **d)** $s>0$, **e)** $x\leq 0$, **f)** $y<14$, **g)** $z\geq -5$, **h)** $t\geq 0$.

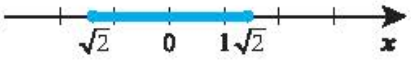
3.44. **a)** $x\geq -\frac{1}{2}$, **b)** $y\leq\frac{1}{4}$, **c)** $c\geq -2{,}5$, **d)** $z<1\frac{1}{4}$.

3.46. **c)** 

d) 

e) 

f) 

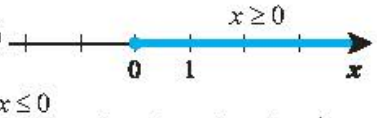
g) 

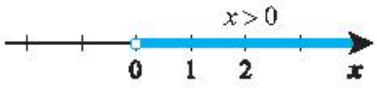
3.47. **a)** $x\leq 0$, **b)** $x\geq 4$, **c)** $x\geq -5$, **d)** $-2<x<0$, **e)** $1\leq x\leq 3$, **f)** $-2\leq x<4$, **g)** $-3<x\leq 5$,

h) $0\leq x<4$, **i)** $-2\leq x\leq 2$, **j)** $-100\leq x\leq 1$. **3.48.** **a)** 0, **b)** 0, 1, **c)** 1, 2, **d)** 0, 1, 2, **e)** 1, 2, 3.

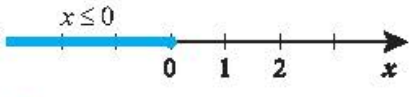
3.49. **a)** 0, 1, 2, 3, 4, **b)** 0, 1, **c)** −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, **d)** −2, −1, 0, 1, 2. **3.50.** **a)** 0, 1, 2, 3,

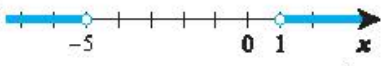
b) np.: $-2\sqrt{2}$, -2π, $\sqrt{2}$, **c)** np. −9, 4, 100, **d)** −8, **e)** 3, **f)** 0, 1, 2, 3, **g)** 1, 2, 3. **3.51.** Kolejno: F, P, P.

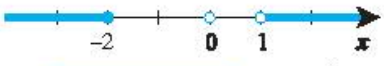
3.52. **a)** 

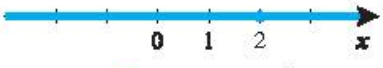
b) 

c) 

d) 

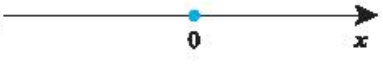
3.53. **a)** 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

3.54. **a)** $A\cup B=(-3;7\rangle$, $A\cap B=\langle 1;4)$, $A\setminus B=(-3;1)$, $B\setminus A=\langle 4;7\rangle$,

b) $A\cup B=\boldsymbol{R}=(-\infty;+\infty)$, $A\cap B=\langle -5;1\rangle$, $A\setminus B=(-\infty;-5)$, $B\setminus A=(1;+\infty)$,

c) $A\cup B=(-1;0)\cup\langle 1;5\rangle$, $A\cap B=\varnothing$, $A\setminus B=A$, $B\setminus A=B$.

3.55. **a)** $(-\infty;-3)$, **b)** $\varnothing$, **c)** $\langle -4;6\rangle$, **d)** $(-\infty;1)$, **e)** $(-3;-2)$, **f)** $(-4;7)\setminus\langle 2;3\rangle$, **g)** $(-\infty;+\infty)=R$, **h)** $(-\infty;8)$, **i)** $(-4;11\rangle$, **j)** $R\setminus\langle 1;5\rangle$, **k)** $(-7;4)$, **l)** $(-5;1)$. **3.56.** **a)** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, **b)** $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$, **c)** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(-\sqrt{2};1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

3.57. **a)** Nie, **b)** nie, **c)** tak, **d)** nie, **e)** tak, **f)** nie, **g)** tak, **h)** tak. **3.58.** A i D.

3.59. **a)** $\{-2,-1,0,1\}$, **b)** $\{6,7,8,9\}$, **c)** $\varnothing$, **d)** $\langle -4;0)$, **e)** $(-5;5)$, **f)** $\varnothing$.

3.60. *Wskazówka.* Zaznacz na osi liczbowej liczby a i b, gdzie $a<b$.

Zestaw powtórkowy

1. B. **2.** A. **3.** D. **4.** T–C. **5.** Kolejno: P, F, P. **6.** C. **7.** A – **6**, B – **3**, C – **5**, D – **1**, E – **2**, F – **4**.

8. Kolejno: F, P. **9.** **a)** $A\cup B=(-\infty;5\rangle$, $A\cap B=(-2;3\rangle$, **b)** $A\cup B=(-5;4)$, $A\cap B=\{2\}$, **c)** $A\cup B=(-2;3\rangle\cup(4;6)$, $A\cap B=\varnothing$. **10.** **a)** $A=\langle -3;4\rangle$, $B=\langle 0;+\infty\rangle$, **b)** $A=\langle -2;5)$, $B=(-\infty;-2\rangle$.

4. Potęgowanie, pierwiastkowanie i logarytmowanie

4.1. **a)** 4, **b)** –27, **c)** $\frac{4}{25}$, **d)** 1, **e)** $\frac{4}{5}$, **f)** $\frac{9}{4}$, **g)** $\frac{9}{25}$, **h)** $\frac{7}{8}$, **i)** 2. **4.3.** Kolejno: 2^6, 2^7, 2^8, 2^9.

4.4. **a)** 160, **b)** 76, **c)** 52, **d)** $2\frac{1}{8}$, **e)** $\frac{1}{27}$, **f)** 1, **g)** 64, **h)** 64, **i)** –64, **j)** 27.

4.5. **a)** $\frac{9}{49}$, **b)** $\frac{9}{8}$, **c)** 3, **d)** 3,5, **e)** $\frac{7}{18}$, **f)** 1. **4.6.** **a)** 150, **b)** 336, **c)** 243.

4.7. **a)** $2\cdot10^{-2}$, **b)** $5\cdot10^{-2}$, **c)** $1{,}2\cdot10^{-2}$, **d)** $7{,}8\cdot10^{-4}$, **e)** $1{,}68\cdot10^{3}$, **f)** $2{,}31\cdot10^{2}$. **4.8.** 205.

4.9. $5{,}79\cdot10^{7}$ km. **4.10.** $3{,}15576\cdot10^{7}$ s.

4.11. **b)** $\frac{1}{5}, \frac{4}{9}, \frac{12}{13}, \frac{2}{3}, \frac{16}{17}, \frac{9}{7}, \frac{19}{20}, \frac{11}{21}$. **4.12.** **a)** 5, **b)** $-\frac{1}{2}$, **c)** 0,2, **d)** $\frac{1}{2}$, **e)** 0,2, **f)** 4.

4.13. **a)** 52, **b)** 20, **c)** 8, **d)** 50, **e)** 4, **f)** –3, **g)** 3, **h)** –0,3. **4.14.** **a)** $5\sqrt{3}$, **b)** $5\sqrt{5}$, **c)** $2\sqrt[3]{2}$, **d)** $3\sqrt[3]{3}$, **e)** $9\sqrt{2}$, **f)** $8\sqrt{2}$, **g)** $5\sqrt[3]{3}$, **h)** $3\sqrt[3]{5}$. **4.15.** **a)** $\sqrt{12}$, **b)** $\sqrt{18}$, **c)** $\sqrt{80}$, **d)** $\sqrt{150}$, **e)** $\sqrt{72}$, **f)** $\sqrt[3]{-16}$, **g)** $\sqrt[3]{54}$, **h)** $\sqrt[3]{24}$, **i)** $\sqrt[3]{-192}$, **j)** $\sqrt[3]{135}$.

4.16. *Wskazówka.* **a)** $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{4\cdot2}+\sqrt{9\cdot2}$, **b)** $\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{250}{2}}-1\right)$, **c)** $\left(\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{0{,}5}\right)\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16}+\sqrt{64}-\sqrt{1}$, **d)** $\left(\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{0{,}016}\right):\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{125}+\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{0{,}008}$.

4.17. A. **4.18.** T – A. **4.19.** **a)** 20, **b)** 0,2, **c)** –4, **d)** 3, **e)** 2, **f)** 2, **g)** –11, **h)** 7.

4.20. **a)** $6=\sqrt[3]{216}$, **b)** $-2=\sqrt[9]{-512}$, **c)** $4=\sqrt[6]{4096}$, **d)** $7=\sqrt[3]{343}$, **e)** $6=\sqrt[4]{1296}$, **f)** $-5=\sqrt[5]{-3125}$.

4.21. **a)** 52, **b)** 20, **c)** 8, **d)** 50, **e)** 4, **f)** 3, **g)** 3, **h)** 0,3, **i)** 2, **j)** $\frac{1}{3}$, **k)** 2, **l)** 2.

4.22. **a)** $5\sqrt{3}$, **b)** $5\sqrt{5}$, **c)** $2\sqrt[3]{2}$, **d)** $3\sqrt[3]{3}$, **e)** $5\sqrt[3]{3}$, **f)** $3\sqrt[4]{2}$, **g)** $2\sqrt[4]{7}$, **h)** $2\sqrt[5]{2}$, **i)** $3\sqrt[5]{2}$, **j)** $5\sqrt[5]{2}$, **k)** $-2\sqrt[7]{3}$, **l)** $4\sqrt[4]{5}$, **m)** $3\sqrt[6]{2}$, **n)** $-5\sqrt[5]{3}$, **o)** $-6\sqrt[3]{7}$.

4.23. **a)** $\sqrt{18}$, **b)** $\sqrt{150}$, **c)** $\sqrt[3]{24}$, **d)** $\sqrt[3]{128}$, **e)** $\sqrt[4]{48}$, **f)** $\sqrt[5]{486}$, **g)** $\sqrt[3]{250}$, **h)** $\sqrt[4]{4802}$, **i)** $\sqrt[4]{96}$, **j)** $\sqrt[6]{192}$, **k)** $\sqrt[6]{1458}$, **l)** $\sqrt[4]{1250}$, **m)** $\sqrt[3]{1080}$, **n)** $\sqrt[7]{-384}$, **o)** $\sqrt[4]{161\,051}$.

4.24. **a)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **c)** $\frac{4\sqrt{5}}{15}$, **d)** $\frac{\sqrt{6}-2}{10}$, **e)** $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$, **f)** $\frac{-2\sqrt[4]{125}}{5}$, **g)** $\frac{\sqrt[5]{16}}{2}$, **h)** $\frac{5\sqrt[7]{64}}{2}$.

4.25. **a)** $8\sqrt{2}$, **b)** $12\sqrt{5}$, **c)** $12\sqrt[3]{3}$, **d)** $-\sqrt[3]{2}$, **e)** $2\sqrt[4]{2}$, **f)** 0, **g)** 1, **h)** $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, **i)** –1, **j)** –2.

4.26. 6561. **4.27.** **a)** 15, **b)** 17, **c)** 81, **d)** 0, **e)** –4, **f)** 6, **g)** $23\sqrt[3]{2}$, **h)** –24, **i)** $6\sqrt[3]{3}$, **j)** 1, **k)** –1.

4.28. **a)** $m=-3$, **b)** $m=1$, **c)** $m=-3$, **d)** $m=2$, **e)** $m=-\frac{2}{3}$, **f)** $m=\frac{16}{9}$. **4.29.** T–B.

4.30. **a)** $\sqrt{9}$, **b)** $\left(\frac{27}{16}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{9-4}$, **c)** $\sqrt{9}$, $\sqrt{9-4}$.

4.31. **a)** 4, **b)** $\frac{3}{4}$, **c)** $\frac{3}{2}$, **d)** $\frac{2}{5}$, **e)** 2, **f)** 125, **g)** 0,09, **h)** 0,01, **i)** 18, **j)** $\frac{5}{2}$, **k)** $63\frac{2}{3}$.

4.32. **a)** $\frac{7}{4}$, **b)** 9, **c)** 4, **d)** 5, **e)** 13. **4.33.** **a)** 8^2, **b)** 8^0, **c)** $8^{\frac{1}{3}}$, **d)** $8^{\frac{2}{3}}$, **e)** $8^{-\frac{5}{3}}$, **f)** $8^{\frac{5}{3}}$, **g)** $8^{-\frac{1}{3}}$, **h)** $8^{-\frac{8}{3}}$. **4.34.** **a)** $3^{1,5}$, **b)** 3^3, **c)** $3^{\frac{3}{4}}$, **d)** $3^{-\frac{13}{20}}$, **e)** $3^{\frac{9}{2}}$, **f)** $2^{-\frac{10}{3}}$, **g)** $5^{\frac{11}{2}}$, **h)** $5^{\frac{4}{9}}$.

4.35. **a)** $\sqrt[4]{8}$, **b)** $\sqrt{2}$, **c)** $\sqrt[5]{81}$, **d)** $\sqrt[5]{9}$, **e)** $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$, **f)** $\frac{1}{\sqrt[5]{512}}$, **g)** $\sqrt[3]{128}$. **4.37.** **a)** $-\frac{5}{2}$, **b)** –4, **c)** 2.

4.38. **a)** $\sqrt{2^{80}}=\sqrt[3]{4^{60}}$, **b)** $\sqrt[5]{25^{75}}=\sqrt[10]{125^{100}}$, **c)** $\sqrt[10]{11}>\sqrt[11]{10}$, **d)** $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}$.

4.39. *Wskazówka.* **a)** Nierówność $3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}$ zastąp nierównością $\frac{3^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{3}{6}}}>1$ i ją uzasadnij,

b) $3\cdot 3^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^3$, **d)** $a=2^{45}=\left(2^9\right)^5=512^5$, $b=3^{30}=\left(3^6\right)^5=729^5$, $c=5^{20}=\left(5^4\right)^5=625^5$.

4.40. **a)** 0, 2, $\frac{1}{2}$, –3, **b)** –1, –2, $-\frac{1}{2}$, –4, **c)** 2, $\frac{1}{2}$, –2, $\frac{1}{3}$, **d)** 0, –1, $\frac{1}{2}$, 4.

4.41. **a)** 3, 2, 4, 1, 3, **b)** –3, –3, –3, –3, –3, **c)** $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, **d)** $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, 5, $-\frac{3}{2}$, –2.

4.42. **a)** 8, 5, 3, 12, **b)** 49, 125, 100, 25, **c)** 4, **d)** 125, **e)** 63, **f)** $\frac{625}{27}$, **g)** $\frac{64}{27}$.

4.43. **a)** 49, 216, $\frac{1}{3}$, **b)** 3, 2, $\frac{1}{7}$.

4.44. **a)** $\log_6 216 = 3$, **b)** $\log_{11} 1331 = 3$, **c)** $\log 0{,}01 = -2$, **d)** $\log_4 2 = 0{,}5$, **e)** $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$.

4.45. **a)** 1, **b)** –4, **c)** $\frac{2}{3}$, **d)** –1, **e)** 1.

4.46. **a)** $\log 0{,}0001$, $\log_6 \frac{1}{36}$, $\log_4 \frac{1}{4}$, $\log_9 \frac{1}{27}$, **b)** $\ln e$, $\log_8 8$, **c)** $\log_3 \sqrt{3}$.

4.47.

b	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\log_2 b$	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

a) $\log_2 0{,}1 < -3$, **b)** $\log_2 0{,}8 < 0{,}5$, **c)** $\log_2 100 < 7$.

4.48. **a)** $2 = \log_2 4$, **b)** $2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$, **c)** $2 = \log_3 9$, **d)** $2 = \log_4 16$, **e)** $2 = \log_5 25$, **f)** $2 = \log_{10} 100$.

4.49. **a)** 2, **b)** 3, **c)** 2, **d)** 4, **e)** $\frac{3}{2}$, **f)** –1, **g)** 0, **h)** $\frac{5}{2}$. **4.50.** **a)** 1, **b)** 3, **c)** 1, **d)** –2, **e)** 2, **f)** –2, **g)** 3.

4.51. *Wskazówka.* **a)** $2 + \log_5 2 = \log_5 25 + \log_5 2$, **c)** $\log_4 6 + \log_4 8 = \log_4 (6 \cdot 8) =$

$= \log_4 \left(4^2 \cdot 3\right) = \log_4 4^2 + \log_4 3$. **4.52.** **a)** $\log_3 12$, **b)** $\log_2 2{,}5$, **c)** $\log_{\frac{1}{2}} 12$, **d)** $\log_4 \frac{8}{3}$.

4.53. **a)** 1, **b)** $\sqrt{5}$, **c)** 15, **d)** –1, **e)** 800, **f)** $\frac{4}{3}$, **g)** 1, **h)** 2, **i)** $3\frac{1}{3}$.

4.54. **a)** $\sqrt{8} > 2^{\log_2 \sqrt{7}}$, **b)** $\sqrt{5} < 9^{\log_3 \sqrt{2{,}5}}$, **c)** $0 > \frac{2}{\log_{\frac{1}{2}} 4}$, **d)** $\sqrt{26} > 4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{9}}$.

Wskazówka. **d)** $4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{9}} = 4^{\log_2 3} \cdot 4^{\log_4 \frac{5}{9}} = 2^{2\log_2 3} \cdot \frac{5}{9}$.

4.55. **a)** 1,4771, **b)** –0,4771, **c)** –0,9542, **d)** 1,4313. **4.54.** *Wskazówka.* **a)** $\log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5$,

b) $\log_2 2{,}5 = \log_2 5 - \log_2 2$, **c)** $\log_2 100 = \log_2 4 + \log_2 25$.

4.57. **a)** $x = 25$, **b)** $x = 8$, **c)** $x = 24$, **d)** $x = 36$, **e)** $x = \frac{125}{3}$, **f)** $x = 2$.

4.58. **a)** 33 cyfry, **b)** 18 cyfr, **c)** 65 cyfr, **d)** 107 cyfr. *Wskazówka.* **a)** $12^{30} = \left(2^2 \cdot 3\right)^{30}$,

b) $15^{15} = \left(3 \cdot \frac{10}{2}\right)^{15}$, **c)** $40^{40} = \left(2^2 \cdot 10\right)^{40}$, **d)** $60^{60} = (2 \cdot 3 \cdot 10)^{60}$.

4.59. **a)** $A = 10^{0{,}7}$ cm, $A \approx 5$ cm, **b)** $A = 10^{5{,}5}$ cm, $A \approx 316\,000$ cm, **c)** $A = 10^5$ cm.

4.60. **a)** pH $\approx 2{,}9$, **b)** $10^{-6{,}6}$. *Wskazówka.* **b)** $\text{pH} = -\log\left[\text{H}^+\right]$, więc $\log\left[\text{H}^+\right] = -6{,}6$, skąd

$\left[\text{H}^+\right] = 10^{-6{,}6} \ \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$.

4.61. **a)** 90 dB, **b)** 10^{12} razy (bilion razy). *Wskazówka.* **a)** $L = 10 \cdot \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^9$,

b) $L = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$, skąd $\log I = \frac{L - 120}{10}$.

4.62. **a)** 10^3 razy (1000 razy), **b)** 10^6 razy (milion razy).

4.63. **a)** 100°C, **b)** $66\frac{2}{3}$°C, **c)** tak, bo garnek z zupą osiągnie temperaturę około 30°C (dokładnie $\frac{800}{27}$°C).

Wskazówka. Oblicz T, gdy: **a)** $t=0$, **b)** $t=10$, **c)** $t=30$.

Zestaw powtórkowy

1. D. **2.** D. **3.** D. **4.** B. **5.** C. **6.** D. **7.** Kolejno: F, F, P. **8.** T – A.

9. *Wskazówka.* **a)** $\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{3}\log 16+\frac{1}{6}\log 128=\log 2^{\frac{1}{2}}+\log\left(2^4\right)^{\frac{1}{3}}+\log\left(2^7\right)^{\frac{1}{6}}$, **b)** $\log 0{,}1=-1$.

5. Wyrażenia algebraiczne i wzory skróconego mnożenia

5.1. **a)** $x^2+16x+64$, **b)** $x^2+28x+196$, **c)** $4y^2+24y+36$, **d)** $9x^4+6x^2+1$, **e)** $64x^2+16xy^3+y^6$, **f)** $4x^4+12x^2y^2+9y^4$, **g)** $4a^2b^2+2ab+\frac{1}{4}$, **h)** $\frac{9}{16}x^4+\frac{3}{4}x^2y+\frac{1}{4}y^2$.

5.2. **a)** $(x+1)^2$, **b)** $(x+2)^2$, **c)** $(x+3)^2$, **d)** $(x+4)^2$, **e)** $(2x+1)^2$, **f)** $(2x+3)^2$, **g)** $(3x+2)^2$, **h)** $(5x+4)^2$, **i)** $\left(8x+\frac{1}{2}\right)^2$. **5.3.** **a)** x^2, **b)** $60x$, **c)** 4. **5.4.** **a)** $4-4x+x^2$, **b)** $16-8x+x^2$, **c)** $25z^2-10z+1$, **d)** $1-2xy+x^2y^2$, **e)** $9x^2-12xy+4y^2$, **f)** $16x^2y^2-24xy+9$, **g)** $\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{2}xy+9y^2$, **h)** $4+4x+x^2$. **5.5.** **a)** $(x-1)^2$, **b)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, **c)** $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$, **d)** $(2x-9)^2$, **e)** $(5x-3)^2$, **f)** $\left(\frac{2}{3}x-6\right)^2$, **g)** $(1{,}1x-1)^2$, **h)** $(3x-1)^2$, **i)** $\left(\sqrt{2}x-2\right)^2$. **5.6.** **a)** $16x^2$, **b)** $6x$, **c)** 100.

5.7. **a)** $11+6\sqrt{2}$, **b)** $4-2\sqrt{3}$, **c)** $7+2\sqrt{10}$, **d)** $46-6\sqrt{5}$, **e)** $12-2\sqrt{35}$.

5.8. **a)** 1521, **b)** 10 609, **c)** 40 804, **d)** 249 001.

5.10. **a)** $a^2-\frac{1}{16}$, **b)** x^2-4y^2, **c)** $4a^2-25$, **d)** $36a^2-4b^2$, **e)** $16-9x^2$, **f)** $1-x^4$.

5.11. **a)** $(3a-10)(3a+10)$, **b)** $(12-y)(12+y)$, **c)** $(1-3x)(1+3x)$, **d)** $(7x-3y)(7x+3y)$, **e)** $(8x-5y)(8x+5y)$, **f)** $(13x-15)(13x+15)$. **5.12.** **a)** –1, **b)** 15, **c)** –30.

5.13. **a)** $2x^2+6x$, **b)** $1-3x$, **c)** $50-10x$, **d)** $30x^2-24x+5$, **e)** x^2-7y^2+6xy, **f)** $-8xy$.

5.14. **a)** $-2x^2+34x-71$; –147, **b)** $8x^2-5$; –3, **c)** $2y^2-11$; 11, **d)** $-4y-15$; –14, **e)** $-4xy$; $\frac{2}{5}$, **f)** $9x^2-25y^2$; $-\frac{8}{9}$. **5.15.** **a)** 39 999, **b)** 63,99, **c)** 8,9996, **d)** $9{,}6\cdot 10^{12}$.

5.16. *Wskazówka.* **c)** $\sqrt{4-\sqrt{8}}=\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}$, **d)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{3\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}$,

e) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2=\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2+2\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}+\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$.

5.17. **a)** $(x-4)^2-16$, **b)** $(x+5)^2-25$, **c)** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, **d)** $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$, **e)** $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, **f)** $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$.

5.18. **a)** $(x-6)(x+14)$, **b)** $(2x+4)(2x-2)$, **c)** $\left(4x-1-\sqrt{2}\right)\left(4x-1+\sqrt{2}\right)$, **d)** $-(2x-1)$, **e)** $(x+1)(5x+1)$, **f)** $\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y\right)$, **g)** $(3-x)(3x+1)$, **h)** $(x+1)(3x-1)$, **i)** $(5x-3)(3x+3)$.

5.19. **a)** $(a+2b)^2$, **b)** $(2x+1)^2$, **c)** $(3a-2y)^2$, **d)** $(2x-5)^2$, **e)** $(x-4y)^2$, **f)** $(2n+3)^2$, **g)** $(5x-4z)^2$, **h)** $(6m+1)^2$, **i)** $(7x+8y)^2$, **j)** $(3x-b)(3x+b)$, **k)** $(4b-3)(4b+3)$, **l)** $\left(\sqrt{5}-x\right)\left(\sqrt{5}+x\right)$, **m)** $(5x-8)(5x+4)$, **n)** $24(3x-1)$, **o)** $(x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)$.

5.20. **a)** $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$, **b)** $-\sqrt{7}-\sqrt{5}$, **c)** $-\sqrt{3}-3$, **d)** $2-\sqrt{3}$, **e)** $-4-3\sqrt{2}$.

5.21. **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **c)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=-1-\sqrt{2}$, **d)** $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}-3}=-\frac{1}{7}\left(11+6\sqrt{2}\right)$.

5.23. **a)** $14+6\sqrt{5}$, **b)** $14-6\sqrt{5}$, **c)** $12\sqrt{5}$, **d)** 20, **e)** 36.

5.24. **a)** $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, **b)** $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$, **c)** $\left(4-\sqrt{5}\right)^2$, **d)** $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$.

5.26. **a)** $a>b$, **b)** $a<b$, **c)** $a<b$, **d)** $a>b$, **e)** $a>b$. **5.27.** **a)** $10+6\sqrt{2}$, **b)** 100, **c)** 99.

5.28. *Wskazówka.* Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika i zauważ, że $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2=\left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\right]^2$. **5.29.** *Wskazówka.* $(n+1)^2-n^2=2n+1$.

5.30. *Wskazówka.* Każdą z nierówności przekształć do takiej postaci, by w jej uzasadnieniu można było zastosować wzór skróconego mnożenia. **5.31.** *Wskazówka.* Podstaw w wyrażeniu $x=2n+1$, gdzie $n\in\mathbb{N}$, bo $2n+1$ jest ogólną postacią liczby naturalnej nieparzystej.

Zestaw powtórkowy

1. D. **2.** C. **3.** C. **4.** D. **6.** Kolejno: F, P, F, P. **7.** T – B. **8.** B. **9.** B i C.

10. *Wskazówka.* Zauważ, że $\left(6+\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{22}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(6+\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{11}-1\right)=\sqrt{2}\cdot\left(5\sqrt{11}+5\right)=$
$=5\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{11}+1\right)$, zatem $\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\left(6+\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{22}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot5\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{11}+1\right)=$
$=5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(6-\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{11}+1\right)^2}$.

6. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą

6.1. A i D. **6.2.** **a)** –1, **b)** 0, 2, **c)** 0, **d)** –1, **e)** 4, **f)** –1, **g)** –1, 0, 2, 4.

6.3. **a)** –2 i 3, **b)** –2 i 3, **c)** –2 i 0, **d)** –2, **e)** 3, **f)** –2.

6.4. –4 i 0. *Wskazówka.* Sprawdź, czy pierwiastkami równania są liczby: –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0.

6.5. **a)** –5 i –3, **b)** –2, –1 i 0, **c)** –4, **d)** –2 i 0, **e)** –2, **f)** –4, –2, –1.

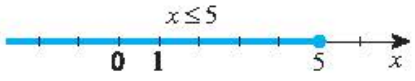
6.6. **a)** 0, **b)** 0, **c)** 2, **d)** 2, **e)** 1, **f)** 4. **6.7.** **a)** $x_0 = -\frac{4}{3}$, **b)** każda liczba rzeczywista (równanie tożsamościowe), **c)** $x_0 = 2$, **d)** $x_0 = 5$, **e)** $x_0 = 102$, **f)** brak rozwiązania, równanie sprzeczne.

6.8. **a)** Tak, **b)** nie.

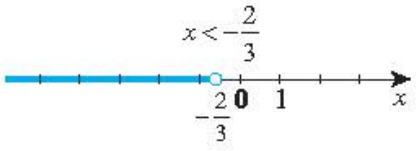
6.9. **a)** $x-5=-7$, **b)** $2y+16=14$, **c)** $3y+21=9$, **d)** $4(a-3)=40$. *Wskazówka.* **a)** $(x-5)=\frac{-2-19}{3}$.

6.10. B. **6.11.** **a)** **3**, **4**, **b)** **2**. **6.12.** 264 km. *Wskazówka.* $660t = 360\cdot\left(t+\frac{1}{3}\right)$, gdzie t to czas przelotu samolotu. **6.13.** Kasia – 27 km, Jurek – 33 km. **6.14.** 1, $\frac{5}{2}$.

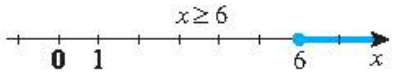
6.15. **a)**



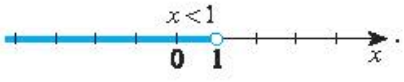
b)



c)



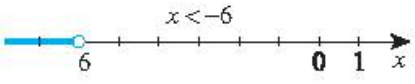
d)



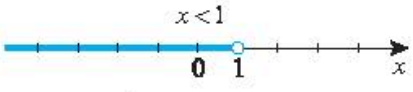
6.16. **a)** $x \geq 2$, **b)** $x \geq 3$, **c)** $x < 5$, **d)** $x \geq -5$, **e)** $y > \frac{16}{3}$, **f)** $z < \frac{4}{3}$.

6.17. $4\frac{1}{2}$, $-\sqrt{2}$, π. **6.18.** **a)** Np.: $x - 1 \leq \frac{2}{3}$, **b)** $1\frac{2}{3}$, **c)** 0,1. **6.19.** D. **6.20.** 2.

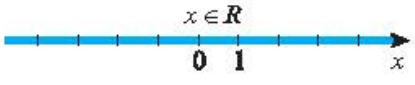
6.21. **a)**



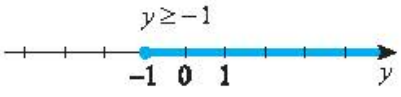
b)



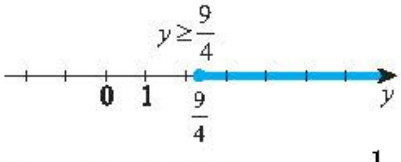
c)



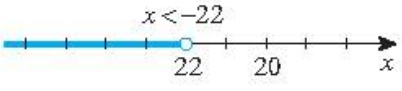
d)



e)



f)



6.22. P, P. *Wskazówka.* **a)** $x > \frac{1}{\sqrt{5}-3}$, –1 to najmniejsza liczba całkowita spełniająca tę nierówność, **b)** $x < \frac{3}{1-\sqrt{2}}$, –8 to największa liczba całkowita spełniająca tę nierówność.

6.23. *Wskazówka.* Daną nierówność zastąp nierównością $x(2\log 2 + 1 + 2\log 5) > 3$ i zastosuj prawa działań na logarytmach. **6.24.** B i D. **6.25.** **a)** $x \leq 0$, **b)** $x \in R$, **c)** $x \geq 0$.

6.26. **a)** $x \neq -5$, **b)** $x \geq 2$, **c)** $x < 4$, **d)** $x > 1$.

6.27. $1{,}1 + x < 4{,}3$, gdzie x oznacza wysokość nadwozia samochodu.

6.28. F, P. **6.29.** Co najmniej 25 sztuk. **6.30.** Po 3 dniach. **6.31.** Poniżej 11,33 s.

6.32. 0 i 2, 2 i 4 oraz 4 i 6. *Wskazówka.* $(2n)^2-(2n+2)^2\geq -20$, skąd $2n\leq 4$.

6.33. Trójkąt, czworokąt, pięciokąt, sześciokąt, siedmiokąt, ośmiokąt, dziewięciokąt i dziesięciokąt.

6.34. Po godzinie 14:48. *Wskazówka.* W czasie t oba pojazdy przejadą $(12t+13t)$ km, czyli $(25\cdot t)$ km. Odległość między nimi będzie równa $(100-25t)$ km. Zatem $100-25t<30$, skąd $t>\frac{14}{5}$. $\frac{14}{5}$ h = 2 h 48 min.

6.36. **a)** $x_1=-6,\ x_2=6$, **b)** brak rozwiązań, **c)** $x_0=0$, **d)** $x_1=-2,\ x_2=2$, **e)** brak rozwiązań, **f)** $x_1=-2,\ x_2=2$.

6.37. **a)** $x_1=-20,\ x_2=20$, **b)** $y_1=-4,\ y_2=4$, **c)** $x_1=-10,\ x_2=10$, **d)** $x_1=-\frac{3}{2},\ x_2=\frac{3}{2}$, **e)** brak rozwiązania, **f)** $x_0=0$, **g)** brak rozwiązania, **h)** $x_1=\frac{-\sqrt{5}-5}{5},\ x_2=\frac{\sqrt{5}+5}{5}$, **i)** $x_1=\frac{\sqrt{3}-3}{2},\ x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

6.38. B i C. **6.39.** **a)** $x_1=3,\ x_2=5$, **b)** $x_1=-3,\ x_2=1$, **c)** $x_1=-5,\ x_2=-3$, **d)** $x_1=3,\ x_2=7$, **e)** $x_1=-8,\ x_2=2$, **f)** $x_1=-2,\ x_2=6$.

6.40. **a)** 1, **b)** 1, **c)** 2, **d)** 0, **e)** 2, **f)** 2. *Wskazówka.* **d)** $2-\sqrt{5}<0$.

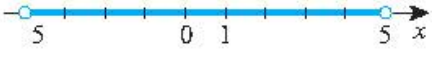
6.41. **a)** $x_1=-3,\ x_2=-1$, **b)** $x_0=3$, **c)** $x_1=-1,\ x_2=7$, **d)** $x_1=1,\ x_2=5$, **e)** $x_1=-12,\ x_2=-2$, **f)** $x_0=\sqrt{2}$. **6.42.** **a)** $|x-1|=4$, **b)** $|x+3|=3$, **c)** $|x+\sqrt{2}|=2$.

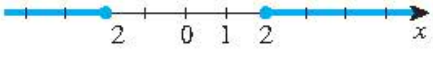
6.43. *Wskazówka.* **a)** Zauważ, że liczby $(1-\sqrt{3})x$ i $(\sqrt{3}-1)x$ są przeciwne.

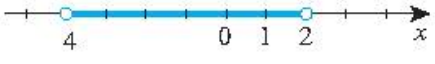
6.45. **a)** $x\in(-2;2)$, **b)** $x\in\langle -3;3\rangle$, **c)** $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, **d)** $x\in(-\infty;-5\rangle\cup\langle 5;+\infty)$, **e)** $x\in\langle -4;4\rangle$, **f)** $x\in(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$.

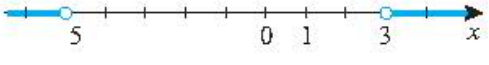
6.46. **a)** $x\neq 0$, **b)** $x\in\mathbf{R}$, **c)** brak rozwiązania, **d)** $x=0$, **e)** $x\in\mathbf{R}$, **f)** brak rozwiązania.

6.47. **a)** $x\in(-1;7)$, **b)** $x\in(-4;2)$, **c)** $x\in(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$, **d)** $x\in(-\infty;1\rangle\cup\langle 7;+\infty)$, **e)** $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$, **f)** $x\in\langle -1-\sqrt{2};\ \sqrt{2}-1\rangle$.

6.48. **a)**


b)


c)


d)


e)


f)


6.49. **a)** $|x|\leq 2$, **b)** $|x|<3$, **c)** $|x|>4$, **d)** $|x-2|<2$, **e)** $|x+2|\leq 2$, **f)** $|x+1|>2$.

6.50. Kolejno: F, F, P. **6.51.** C.

Zestaw powtórkowy

1. A. **2.** D. **3.** D. **4.** C. **5.** A. **6.** C. **7.** C. **8.** Kolejno: F, F, P. **9.** C.

7. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

7.1. $(12, 2)$, $\left(0, \frac{2}{5}\right)$. **7.2.** *Wskazówka.* Narysuj prostą o równaniu: **a)** $x = 5$, **b)** $y = 2x - 1$, **c)** $y = -7$.

7.3. **a)** Np. $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, $(1,1)$, **b)** np. $(-2, 0)$, **c)** prosta.

7.4. **a)** $\begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = -2 \end{cases}$.

7.5. **a)** $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

7.6. **a)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

7.7. **a)** $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} u = \frac{5}{2} \\ v = \frac{5}{2} \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} r = 4 \\ s = 12 \end{cases}$. **7.8.** N – A.

7.9. **a)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$.

7.10. **a)** $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ y = \sqrt{2} + 1 \end{cases}$, **d)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$.

7.11. D.

7.12. **a)** Układ sprzeczny, nie ma rozwiązań, **b)** układ nieoznaczony, ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $\begin{cases} x \in \boldsymbol{R} \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$, **c)** układ sprzeczny, nie ma rozwiązań, **d)** układ nieoznaczony, ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci $\begin{cases} x = 6 - 0{,}6y \\ y \in \boldsymbol{R} \end{cases}$, **e)** układ oznaczony, rozwiązaniem jest para liczb $(1, 2)$, **f)** układ oznaczony, rozwiązaniem jest para liczb $\left(\frac{17}{4}, \frac{9}{2}\right)$.

7.13. **a)** 1 i 6, **b)** np. 1 i –2, **c)** np. 3 i 2. **7.14.** Np. **a)** **1°** $4x + 3y = 0$, **2°** $4x + y = 3$, **3°** $8x + 6y = 10$, **d)** **1°** $y = 3$, **2°** $x = 1$, **3°** $y = 2$. **7.15.** T–B.

7.16. **a)** $\begin{cases} p = \frac{r}{2} + 3 \\ p + r = 18 \end{cases}$, $\begin{cases} p = 8 \\ r = 10 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} m = 0{,}3n \\ m + n = 65 \end{cases}$, $\begin{cases} m = 15 \\ n = 50 \end{cases}$. **7.17.** A i C.

7.18. Za wnioskiem głosowały 232 osoby, przeciw 128 osób. *Wskazówka.* $\begin{cases} x + y = 360 \\ x = y + 104 \end{cases}$, gdzie x – liczba osób głosujących za, y – liczba osób głosujących przeciw.

7.19. Piekarz pracuje 20 lat. *Wskazówka.* $\begin{cases} x = 5y \\ x+4 = 3\cdot(y+4) \end{cases}$, gdzie x – lata praktyki piekarza, y – lata praktyki ucznia. **7.20.** Motorówka 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, nurt 3 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

7.21. Żył 33 lata, panował 12 lat. *Wskazówka.* $\begin{cases} \frac{1}{4}(x-5) = y-5 \\ \frac{1}{2}(x+9) = y+9 \end{cases}$, gdzie x to lata życia Aleksandra, a y to lata jego panowania. **7.22.** 24 litry.

7.23. *Wskazówka.* Przyjmij oznaczenia: x – cena lizaka czerwonego, y – cena lizaka żółtego, z – cena lizaka zielonego. Zapisz układ równań $\begin{cases} 2x = y+z \\ 2y = x+2z \end{cases}$ i uzależnij dwie niewiadome, np. y i z, od niewiadomej x. $\begin{cases} z = 2x-y \\ 2y = x+2(2x-y) \end{cases}$, więc $\begin{cases} z = 2x-y \\ y = \frac{5}{4}x \end{cases}$, skąd $\begin{cases} z = \frac{3}{4}x \\ y = \frac{5}{4}x \end{cases}$.

Wniosek: lizak żółty jest najdroższy, bo $\frac{3}{4}x < x < \frac{5}{4}x$.

7.24. Krzesło kosztowało 450 zł, a stół 2100 zł.

Zestaw powtórkowy

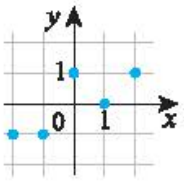
1. B. **2.** D. **3.** D. **4.** F, P. **5.** B. **6.** D. **7.** B. **8.** F, P. **9.** 187 zł. **10.** Nie. Publiczność powinna wskazać odpowiedź B, bo jeżeli układ ma dwa rozwiązania, to ma ich nieskończenie wiele.

8. Funkcja i jej własności

8.1. a)

x	–2	–1	0	1	2
$y = f(x)$	–1	–1	1	0	1

b)



8.2. Z tabelki należy usunąć parę liczb $(-1, 4)$ albo $(-1, 2)$.

8.3.

x	–2	–1	1	2	4
$y = f(x)$	2	1	2	1	3

8.4. C. **8.5.** *Wskazówka.* Sprawdź, czy $f(-1) = 2$.

8.6. a) 5, **b)** 4, 5, 10 i 11, **c)** –1, 0, $\frac{1}{2}$, 4. **8.7.** D. **8.8. a)** 2, **b)** 0, **c)** $1\frac{5}{7}$, **d)** 4, **e)** 16.

8.9. a) $f(x) = -x$, **b)** $f(x) = \frac{1}{x}$, **c)** $f(x) = |x|$.

8.10. a) $f(x) = x-3$

x	–8	–4	0	$\frac{1}{2}$	5
$y = f(x)$	–11	–7	–3	$-2\frac{1}{2}$	2

8.11. **a)** $a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=1,\ a_4=-1,\ a_5=1$, **b)** $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=6,\ a_5=24$,

c) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=6,\ a_4=24,\ a_5=120$, **d)** $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5$.

8.12. **1** $D_f=\{-2,-4,0,5\},\ Y_f=\{0,1,3,7\}$, **2** $D_f=\{a,b,c,d\},\ Y_f=\{1,2\}$,

3 $D_f=\left\{0,\frac{1}{2},1,1\frac{1}{2},2\right\},\ Y_f=\left\{0,\frac{1}{2},1,1\frac{1}{2},2\right\}$, **4** $D_f=\langle -1;3\rangle,\ Y_f=\langle -1;3\rangle$.

8.13. **a)** $D_f=\{-3,-2,-1,1,3,4\},\ Y_f=\{-1,0,2,3,4\}$, **b)** $D_f=\langle -1;4\rangle,\ Y_f=\langle -2;1\rangle$, **c)** $D_f=\langle -4;4\rangle$,

$Y_f=\langle -2;3\rangle$. **8.14.** D. **8.15.** A. **8.16.** $D_f=\{-2,-1,0,2,3,4,5\},\ Y_f=\{-5,3,5\}$.

8.17. **a)** $P(r)=\pi\left(1-r^2\right)$, gdzie $r\in(0;1)$, **b)** $V(a)=10a^2$, gdzie $a>0$. **8.18.** **a)** $x\in\boldsymbol{R}$, **b)** $x\in\boldsymbol{R}$,

c) $x\neq 0$, **d)** $x\neq -8$, **e)** $x>\frac{3}{4}$, **f)** $x\geq -3$. **8.19.** **a)** $Y_f=\{-1,5,8\}$, **b)** $Y_f=\left\{\frac{1}{4},1,4\right\}$.

8.20. **a)** $g(x)=-x^2$, **b)** $g(x)=x^2$, **c)** $g(x)=(x-3)^2$, **d)** $g(x)=x^2-3$, **e)** $g(x)=9x^2$, **f)** $g(x)=x^4$.

8.21. *Wskazówka.* $f(a)=4a,\ f(b)=4b,\ f(a+b)=4(a+b)$. **8.22.** **a)** $x_1=-2,\ x_2=1$,

b) $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=4$. **8.23.** **a)** $x_1=-4,\ x_2=0,\ x_3=5$, **b)** $x_0=2$, **c)** brak miejsc zerowych.

8.24. B. **8.25.** **a)** $x\in\langle -5;13\rangle,\ y\in\langle -3;3\rangle$, **b)** $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=7,\ x_4=12$,

c) $x\in(-1;2)$ lub $x\in(7;12)$. **8.26.** **a)** $x_1=-4,\ x_2=-2,\ x_3=2$, **b)** $f(x)>0$, gdy $x\in(-4;-2)$ lub

$x\in(2;4\rangle$, **c)** $f(x)<0$, gdy $x\in\langle -5;-4)$ lub $x\in(-2;2)$. **8.27.** Kolejno: P, F, F.

8.28. **a)** $(2;5)$, **b)** $\langle 0;2)$ oraz $(5;7\rangle$. **8.30.** **a)** $\langle -1;0\rangle,\ \langle 7;9\rangle$, **b)** $\langle -3;-1\rangle,\ \langle 0;4\rangle$, **c)** $\langle 4;7\rangle$.

8.31. **a)** $\langle 20^{00};6^{00}\rangle$, **b)** $\langle 8^{00};16^{00}\rangle,\ \langle 6^{00};8^{00}\rangle$, **c)** $\langle 16^{00};20^{00}\rangle$.

8.32. **a)** Temperatura rosła w przedziałach $\langle 2^{00};4^{00}\rangle$ i $\langle 9^{00};12^{00}\rangle$, a malała w przedziałach $\langle 1^{00};2^{00}\rangle$

i $\langle 4^{00};9^{00}\rangle$.

8.33. D. **8.35.** **a)** $y_{MIN}=f(-2)=-4,\ y_{MAX}=f(-7)=3$, **b)** $y_{MIN}=f(0)=-2,\ y_{MAX}=f(4)=2$,

c) $y_{MIN}=f(-2)=-4,\ y_{MAX}=f(4)=2$.

8.36. **a)** W 13. dniu ferii temperatura była najniższa, a najwyższa w 5. dniu, **b)** 6 dni, **c)** 3 dni, **d)** 8°C.

8.37. **a)** Od 0°C do 4°C, **b)** od 4°C do 10°C, **c)** $T=4$°C. **8.38.** B i C.

8.39. **a)** 14^{00}, 2°C, **b)** 20^{00}, –5°C, **c)** $\langle 9^{00};14^{00}\rangle,\ \langle 20^{00};24^{00}\rangle$, **d)** $\langle 0^{00};9^{00}\rangle,\ \langle 14^{00};20^{00}\rangle$,

e) $\left(12^{00};17^{00}\right)$, **f)** 12^{00} i 17^{00}.

Zestaw powtórkowy

1. Kolejno: F, P, F, P. **2.** Kolejno: F, F, P, P. **3.** N – A. **4.** N – B.

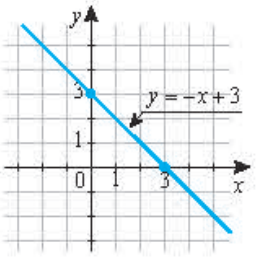
5. **a)** 2,0%, **b)** od 4:00 do 16:00, **c)** o 4:00, **d)** 0,5%. **6.** T – B.

9. Funkcja liniowa i jej własności

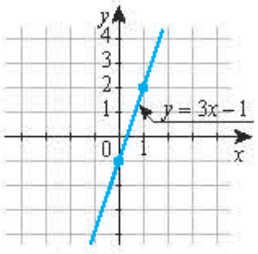
9.1. **a)** $a=\sqrt{2}$, $b=-1$, **b)** $a=4$, $b=0$, **c)** $a=0$, $b=3\frac{1}{2}$, **d)** $a=-2$, $b=3$.

9.2. **a)** $f(x)=2x+5$, **b)** $f(x)=-x+7$, **c)** $f(x)=-4$, **d)** $f(x)=\frac{1}{2}x$.

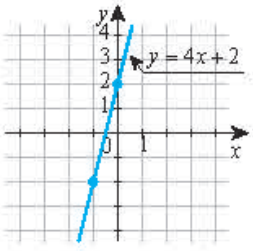
9.3. **a)**



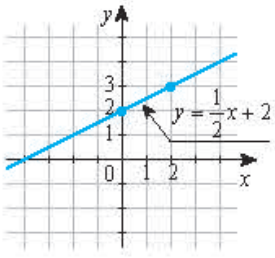
b)



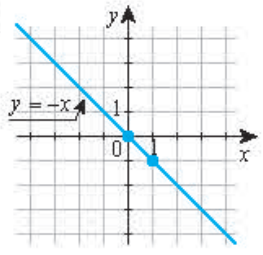
c)



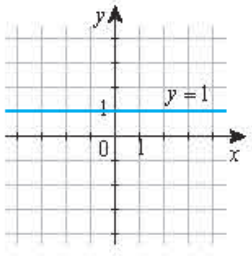
d)



e)



f)



9.4. A. **9.5.** Do wykresu funkcji f należą punkty: **a)** A, **b)** A i B, **c)** A.

9.6. **a)** $(2,-2)$ i $(4,2)$, **b)** $(1,3)$ i $(2,4)$, **c)** $(0,5)$ i $(2,1)$. **9.7.** C.

9.9. *Wskazówka.* Wystarczy obliczyć $f(m)$ i $f(2m)$. **9.10.** Funkcja g określona jest wzorem: **a)** $g(x)=x-4$, **b)** $g(x)=4x$, **c)** $g(x)=2$. *Wskazówka.* **a)** $g(x)=f(x-2)$, **b)** $g(x)=f(-2x)$, **c)** $g(x)=f(2)$. **9.11.** Kolejno: F, P.

9.12. *Wskazówka.* Wykres funkcji przechodzi przez punkty: **a)** $(0,6)$ i $(1,3)$, **b)** $(0,-2)$ i $(1,-4)$, **c)** $(0,-\sqrt{3})$ i $(1,0)$, **d)** $\left(0,1\frac{1}{2}\right)$ i $(1,2)$.

9.13. Funkcja f jest: **a)** rosnąca, **b)** malejąca, **c)** rosnąca, **d)** stała.

9.14. **1**, **3** i **4**, przecinają się w punkcie $(0,3)$; **2**, **5** i **6**, przecinają się w punkcie $(0,-1)$.

9.15. Np. $f(x)=-2$, $f(x)=-3x-2$, $f(x)=\frac{1}{2}x-2$.

9.16. *Wskazówka.* Założenie: $f(x)=ax+b$, teza: $f(x+1)=f(x)+a$.

Dowód: $f(x+1)=a(x+1)+b=ax+a+b=(ax+b)+a=f(x)+a$ *c.n.u.*

9.17. C. *Wskazówka.* $-\frac{1}{3}a+4=4$ i $-\frac{1}{3}\cdot 6+4=b$.

9.18. **a)** 16, **b)** 0, **c)** $\frac{8}{3}$, **d)** 4, **e)** –1, **f)** 2, **g)** –10 000, **h)** 1.

9.19. **a)** $(-10,0)$, **b)** $(2,0)$, **c)** $(0,0)$, **d)** $\left(-\frac{1}{2},0\right)$, **e)** $(-\sqrt{2},0)$, **f)** $(8,0)$. **9.20.** D.

9.21. **a)** $x<2$, **b)** $x>3$, **c)** $x\in R$. **9.22.** **a)** $x<2$, **b)** $x>\frac{4}{3}$, **c)** $x>\frac{1}{10}$, **d)** $x\in R$.

9.23. **a)** $x<0$, **b)** $x>\frac{2}{5}$, **c)** $x<1$, **d)** funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych.

9.24. *Wskazówka.* Zauważ, że $f(x)=-x+\sqrt{2}$. **9.25.** $b>6$. **9.26.** **a)** $b=-3$, **b)** $b=0$, **c)** $b=-4$.

9.27. **a)** $a=4$, **b)** $(0,3)$, $\left(-\frac{3}{4},0\right)$. **9.28.** P, F.

9.29. **a)** $f(x)=\frac{1}{2}x-1$, **b)** $f(x)=\frac{2}{3}x+2$, **c)** $f(x)=6x-3$. *Wskazówka.* $x_0=-\frac{b}{a}$, więc $a=-\frac{b}{x_0}$.

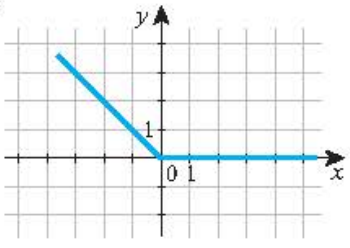
9.30. **a)** $f(x)=2x$, **b)** $f(x)=2$, **c)** $f(x)=\frac{1}{2}x+1$.

9.31. **a)** $f(x)=2x-6$, **b)** $f(x)=3x-4$, **c)** $f(x)=\frac{9}{5}x-\frac{8}{5}$, **d)** $f(x)=x+4$.

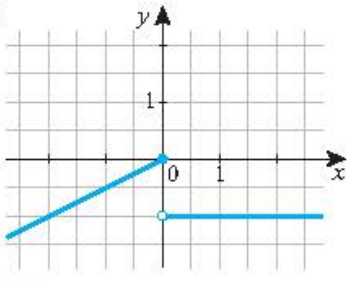
9.32. **a)** $f(x)=-3x$, **b)** $f(x)=-2x+4$, **c)** $f(x)=100x-88$. **9.33.** A. **9.34.** C.

9.35. **a)** $f(x)=3x-6$, **b)** $f(x)=-5$. *Wskazówka.* **a)** $x_0=2$ i $b=-6$.

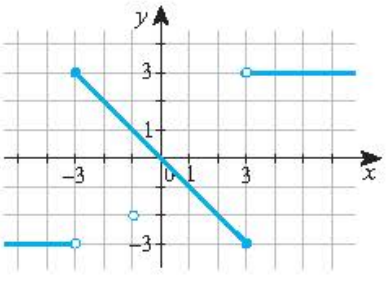
9.36. **a)**



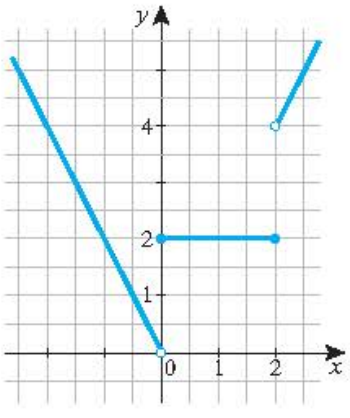
b)



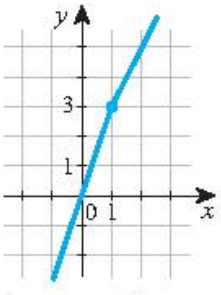
c)



d)

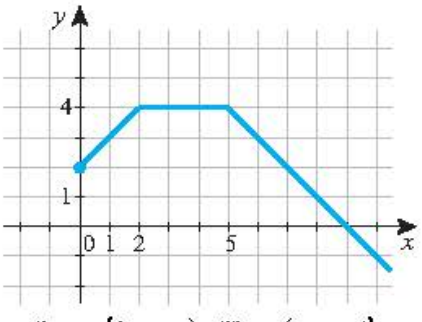


9.37. **a)**



$D_f=\boldsymbol{R}$, $Y_f=\boldsymbol{R}$

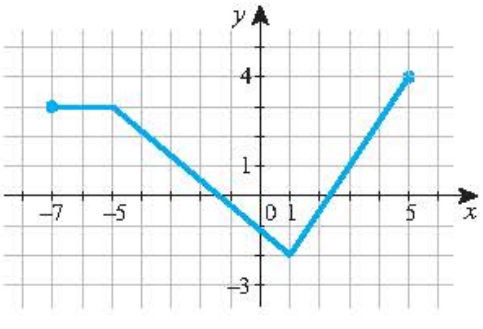
b)



$D_f=\langle 0;+\infty)$, $Y_f=(-\infty;4\rangle$.

9.38. B.

9.39.



$Y_f=\langle -2;4\rangle$

9.40. **a)** $D_f=\langle -5;3\rangle$, $Y_f=\langle 2;5\rangle$, $f(x)=\begin{cases}2, & \text{gdy } -5\le x<0\\ x+2, & \text{gdy } 0\le x\le 3\end{cases}$,

b) $D_f=\langle -4;5)$, $Y_f=\langle 1;5\rangle$, $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x, & \text{gdy } -4\le x<-2\\ x+3, & \text{gdy } -2\le x<2\\ 5, & \text{gdy } 2\le x<5\end{cases}$,

c) $D_f=\langle -5;5\rangle$, $Y_f=\langle -2;4\rangle$, $f(x)=\begin{cases}-x-3, & \text{gdy } x\in\langle -5;-1)\\ 2x, & \text{gdy } x\in\langle -1;2)\\ -x+6, & \text{gdy } x\in\langle 2;5\rangle\end{cases}$,

d) $D_f=(-5;6\rangle$, $Y_f=\langle -3;2\rangle$, $f(x)=\begin{cases}x+3, & \text{gdy } x\in(-5;-1\rangle\\ -2, & \text{gdy } x\in(-1;3\rangle\\ -x+3, & \text{gdy } x\in(3;6\rangle\end{cases}$.

9.41. **a)** $y=1000x$, gdzie x to głębokość, a y to ciśnienie panujące na głębokości x, **b)** tak, bo $\frac{y}{x}=1000$.

9.42. **a)** Robert, **b)** 9 km, **c)** 1,5 h, **d)** Paweł – $2\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Jurek – $5\frac{\text{km}}{\text{h}}$, Robert – $8\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

9.43. **a)** 8 m, **b)** $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$, **c)** $s=6t+8$. **9.44.** **a)** 10°C, **c)** $T=10t+20$, gdy $t\le 8$ i $T=100$, gdy $t\ge 8$.

9.45. $y=2x+6$, gdzie x to liczba przejechanych kilometrów, a y to koszt przejazdu taksówką. **a)** 8 zł, **b)** 16 zł, **c)** 26 zł. **9.46.** $100°\text{C}=373{,}15\text{K}$, $100\,\text{K}=-173{,}15°\text{C}$.

9.47. **a)** $s(t)=\begin{cases}20t, & \text{gdy } 0\le t<\frac{1}{2}\\ 60t-20, & \text{gdy } \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$.

9.48. **a)** 20 minut z prędkością 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **b)** 10 minut, **c)** jedna godzina z prędkością 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **d)** 1,5 godziny, **e)** $66\frac{2}{3}$ kilometrów.

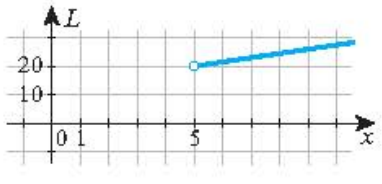
Zestaw powtórkowy

1. C. **2.** D. **3.** D. **4.** B. **5.** Kolejno: P, F, P. **6.** N – B.

7. **a)** $\frac{3}{4}$, **b)** funkcja malejąca, **c)** $x\le\frac{3}{4}$, **d)** $x>-2$. **8.** $f(x)=-3x$.

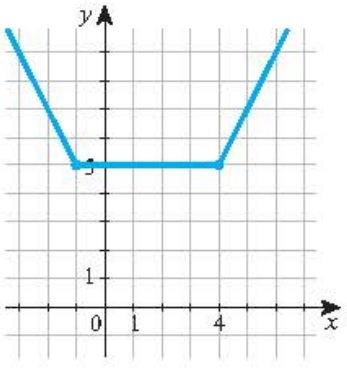
9. **a)** $L(x)=2x+10$, $D_L=(5;+\infty)$,

b)



c) tak, bo $L(495)=1000$, **d)** $Y_L=(20;+\infty)$.

10.



11. **a)** $f(x)=4x+3$, **b)** $f(x)=3x-4$, **c)** $f(x)=5x+2$. *Wskazówka.* Skorzystaj z własności funkcji liniowej. **a)** $f(x+1)-f(x)=a$, **b)** $f(x+2)-f(x)=2a$, **c)** $f(x+3)-f(x)=3a$.

10. Funkcja $f(x)=\frac{a}{x}$ i wielkości odwrotnie proporcjonalne

10.1.

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$y=-\frac{6}{x}$	1	2	3	6	-6	-3	-2	-1

10.2. **a)** $a=\frac{1}{2}$, **b)** $a=-3$, **c)** $a=4$.

10.3. A i G. **10.5.** Ujemne, dodatnie.

10.6. *Wskazówka.* Zauważ, że: **a)** $-5\cdot 1=-\frac{1}{125}\cdot 625=3000\cdot\left(-\frac{1}{600}\right)=-5$.

10.7. A – 2, B – 3, C – 4, D –1. **10.8.** **a)**

x	2	5	4	11
y	3	7,5	6	16,5

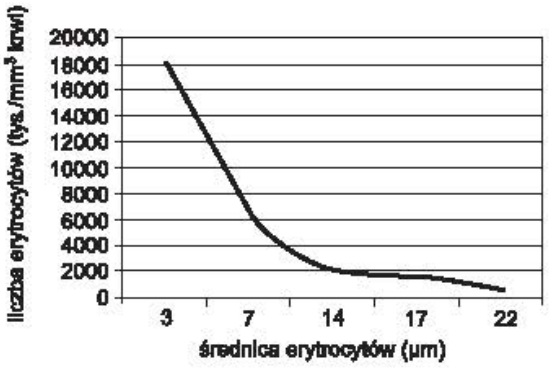
b)

x	1,5	5	6	0,6
y	30	9	7,5	75

10.9. $xy=1600$. **10.10.** **a)** $y=\frac{4}{x}$, **b)**

x	$\sqrt{2}$	4
y	$2\sqrt{2}$	1

10.11. **a)**



b) Zależność odwrotnie proporcjonalna: im mniejsze rozmiary erytrocytów, tym większa ich liczba w 1 mm^3 krwi.

10.12. Kolejno: F, P, F. *Wskazówka.* Zauważ, że pierwsze dwa lata przeżywa tylko 20% ryb.

10.13. 4 h i 24 minuty. *Wskazówka.* $75\cdot t=60\cdot 5{,}5$. **10.14.** 8 osób. **10.15.** 1000 m.

10.16. **a)** Wprost proporcjonalne, **b)** odwrotnie proporcjonalne.

10.17. **a)** $y=\frac{100}{x}$, **b)** $y=\frac{200}{x}$, **c)** $y=\frac{50}{x}$. **10.18.** $k(x)=\frac{60\,000}{x}$. **a)** 10 000 zł,

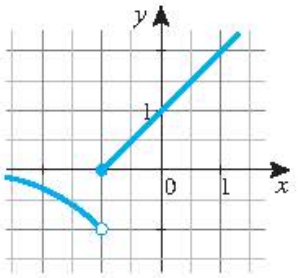
b) 20 lat. *Wskazówka.* $kx=a$, gdzie a to cena zakupu samochodu, czyli $2\cdot 30\,000=a$.

Zestaw powtórkowy

1. C. **2.** C. **3.** B. **4.** D. **5.** C. **6.** Kolejno: P, F, F. **7.** D. **8.** C.

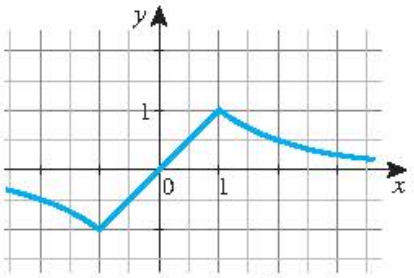
9. 200 ruchów pompki. *Wskazówka.* Prawo Boyle'a i Mariotte'a: $p_1V_1=p_2V_2$, gdzie $p_1=10^5$ Pa, $V_1=x\cdot 0{,}001$ m^3, x – liczba ruchów pompką, $p_2=\left(3{,}5\cdot 10^5-10^5\right)$ Pa $=2{,}5\cdot 10^5$ Pa, $V_2=0{,}08$ m^3.

10. **a)**



$D_f=\mathbf{R}$, $Y_f=(-1;+\infty)$

b)



$D_f=\mathbf{R}$, $Y_f=\langle -1;1\rangle$

11. Równania kwadratowe

11.1. Równania kwadratowe: **1** $-x^2+9=0$ – równanie niezupełne, **2** $3x^2-147=0$ – równanie niezupełne, **4** $19x^2-57x=0$ – równanie niezupełne, **6** $y^2-28y+96=0$, **7** $7y^2+78y-36=0$, **8** $z^2+7z=0$ – równanie niezupełne, **9** $16x^2-64=0$ – równanie niezupełne.

11.2. **a)** $-2, 2$, **b)** żadna z liczb, **c)** -2, **d)** 0 i -2.

11.3. **a)** $\sqrt{2}x^2+x=0$, **b)** $-x^2+x+1=0$, **c)** $-4x^2+\sqrt{3}=0$. **11.4.** B.

11.5. **a)** $x_0=0$, **b)** $x_1=-3,\ x_2=3$, **c)** $x_1=-11,\ x_2=11$, **d)** nie ma rozwiązania, **e)** $x_1=-\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{3}$, **f)** $x_1=-\frac{2}{5},\ x_2=\frac{2}{5}$, **g)** $x_1=-3,\ x_2=3$, **h)** $x_1=-7,\ x_2=7$, **i)** nie ma rozwiązania, **j)** nie ma rozwiązania, **k)** nie ma rozwiązania, **l)** $y_1=-3,\ y_2=3$.

11.6. **a)** $x_1=-4,\ x_2=0$, **b)** $x_1=-8,\ x_2=0$, **c)** $x_1=0,\ x_2=5$, **d)** $x_1=0,\ x_2=5$, **e)** $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=0$, **f)** $x_1=0,\ x_2=\frac{3}{4}$, **g)** $y_1=-\frac{1}{2},\ y_2=0$, **h)** $y_1=0,\ y_2=22$, **i)** $y_1=0,\ y_2=\frac{9}{13}$.

11.7. **a)** $m_1=-3\sqrt{2},\ m_2=3\sqrt{2}$, **b)** $t_1=0,\ t_2=\frac{3}{4}$, **c)** $r_1=-3\sqrt{2},\ r_2=3\sqrt{2}$, **d)** $p_1=-10,\ p_2=10$, **e)** $y_1=0,\ y_2=14$, **f)** nie ma rozwiązania, **g)** $x_0=0$, **h)** nie ma rozwiązania, **i)** $x_1=-1,\ x_2=1$.

11.8. A. **11.9.** **a)** $(x+1)^2-1^2$, **b)** $\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2$, **c)** $(x-5)^2-5^2$, **d)** $\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2$.

11.10. **a)** $x_0=7$, **b)** $x_1=3-4\sqrt{2},\ x_2=3+4\sqrt{2}$, **c)** $x_1=-1\frac{3}{5},\ x_2=-2\frac{2}{5}$, **d)** nie ma rozwiązania, **e)** $x_1=8-\sqrt{5},\ x_2=8+\sqrt{5}$, **f)** $x_1=-2-2\sqrt{3},\ x_2=-2+2\sqrt{3}$. **11.11.** B.

11.12. **a)** $x_0=-8$, **b)** $x_0=7$, **c)** $x_0=10$, **d)** $x_0=\sqrt{2}$, **e)** $x_0=-0{,}5$, **f)** $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.13. **a)** $x_1=2-2\sqrt{5},\ x_2=2+2\sqrt{5}$, **b)** $x_1=-10,\ x_2=2$, **c)** $x_1=-3-\sqrt{6},\ x_2=-3+\sqrt{6}$, **d)** $x_1=-2,\ x_2=1$, **e)** $x_1=\frac{5}{2}-\sqrt{7},\ x_2=\frac{5}{2}+\sqrt{7}$, **f)** $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{15}{2}$, **g)** $x_1=-4,\ x_2=1$, **h)** $x_1=-9{,}5,\ x_2=0{,}5$, **i)** $x_1=-1,\ x_2=\frac{3}{2}$. *Wskazówka.* **a)** $(x-2)^2=20$, **b)** $(x+4)^2=36$, **c)** $(x+3)^2=6$, **d)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, **e)** $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=7$, **f)** $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=16$, **g)** $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$, **h)** $\left(x+\frac{9}{2}\right)^2=25$, **i)** $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$.

11.14. **a)** $x_1=-5,\ x_2=7$, **b)** $x_1=-24,\ x_2=6$, **c)** $x_1=-2,\ x_2=8$, **d)** $x_1=-3-\sqrt{3},\ x_2=3-\sqrt{3}$, **e)** $x_1=-3+2\sqrt{2},\ x_2=3+2\sqrt{2}$, **f)** $x_1=\frac{\sqrt{7}-3}{2},\ x_2=\frac{\sqrt{7}+3}{2}$. *Wskazówka.* **a)** $(x-1)^2=36$, **b)** $(x+9)^2=225$, **c)** $(x+3)^2=25$, **d)** $\left(x+\sqrt{3}\right)^2=9$, **e)** $\left(x-2\sqrt{2}\right)^2=9$, **f)** $\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

11.15. **a)** $x_1=-2,\ x_2=\frac{1}{3}$, **b)** $x_1=-2,\ x_2=0{,}2$, **c)** $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{7}{2}$, **d)** $x_1=-1\frac{1}{4},\ x_2=\frac{3}{4}$, **e)** $x_1=-0{,}7,\ x_2=1{,}3$, **f)** $x_1=-0{,}4,\ x_2=4{,}4$. *Wskazówka.* W pierwszym kroku podziel obie strony równania przez liczbę stojącą przy x^2. Po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia otrzymasz: **a)** $\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{49}{36}$, **b)** $\left(x+\frac{9}{10}\right)^2=\frac{121}{100}$, **c)** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=4$, **d)** $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=1$, **e)** $(x-0{,}3)^2=1$, **f)** $(x-2)^2=5{,}76$.

11.16. **a)** $\Delta=5$, tak, **b)** $\Delta=-3$, nie, **c)** $\Delta=-10$, nie, **d)** $\Delta=25$, tak, **e)** $\Delta=49$, tak, **f)** $\Delta=1$, tak.

11.17. **a)** Dwa, **b)** dwa, **c)** jeden, **d)** zero, **e)** dwa. **11.18.** **a)** $x_1=-1,\ x_2=7$, **b)** $x_0=\frac{1}{2}$, **c)** nie ma rozwiązania, **d)** $x_1=-1,\ x_2=\frac{3}{2}$, **e)** $x_1=-15,\ x_2=-5$, **f)** nie ma rozwiązania.

11.19. **a)** $y_1=\frac{1}{2},\ y_2=\frac{3}{2}$, **b)** $y_0=0{,}1$, **c)** $x_0=0$, **d)** $x_1=0,\ x_2=3$, **e)** $x_1=0,\ x_2=16$, **f)** $x_1=-3,\ x_2=0$.

11.20. **a)** $x_1=0,\ x_2=2$, **b)** $x_1=0,\ x_2=4$, **c)** $y_1=-\frac{25}{3},\ y_2=-\frac{17}{3}$, **d)** $x_1=-4,\ x_2=2$, **e)** $x_1=-2,\ x_2=0$, **f)** $y_1=\frac{1}{3},\ y_2=\frac{5}{3}$. **11.21.** **a)** $x_1=0,\ x_2=1$, **b)** $x_1=0,\ x_2=14$, **c)** $x_0=1$, **d)** równanie nie ma rozwiązania, **e)** $x_1=2,\ x_2=8$, **f)** $x_1=-5,\ x_2=2$. **11.22.** D. **11.23.** B.

11.24. –4 i –6 lub 4 i 6. *Wskazówka.* $x(x+2)=24$, gdzie x to mniejsza z liczb.

11.25. **a)** 3, 4 i 5, **b)** 6, 8, 10. *Wskazówka.* **a)** $n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$, gdzie n to długość najkrótszego boku trójkąta, **b)** $(2n)^2+(2n+2)^2=(2n+4)^2$, gdzie $2n$ to długość najkrótszego boku trójkąta.

11.26. $12\text{ m}\times 15\text{ m}$. *Wskazówka.* $x\cdot(x+3)=180$, gdzie x to krótszy wymiar.

11.27. 100 m. *Wskazówka.* $x^2-4x=9600$.

11.28. Podstawy 30 cm i 14 cm, a ramię $2\sqrt{41}$ cm. *Wskazówka.* $\frac{(x+6+3x+6)\cdot(x+2)}{2}=220$, skąd $x^2+5x-104=0$.

11.29. 1 i 3. *Wskazówka.* $x^2+(x+2)^2=10$, gdzie x to długość boku mniejszego kwadratu.

11.30. 30 cm i 40 cm. *Wskazówka.* $\frac{x\cdot(x+10)}{2}=600$, gdzie x to długość krótszej przekątnej rombu.

11.31. Nie. *Wskazówka.* Zauważ, że rozwiązaniami równania $(2n-1)^2+(2n+1)^2=(2n+3)^2$, gdzie $2n-1$ jest długością najkrótszego boku trójkąta, nie są liczby naturalne.

11.32. $v=4\frac{\text{m}}{\text{s}}$. *Wskazówka.* $E_k=\frac{m\cdot v^2}{2}$. **11.33.** O 2 cm.

11.34. $F_1=10\text{ N},\ F_2=24\text{ N}$.

Zestaw powtórkowy

1. C. **2.** D. **3.** C. **4.** D. **5.** B. **6.** P, P. **7.** D. **8.** N – B.

12. Funkcja kwadratowa

12.1. **a)** $f(x)=3x^2-x+14$, **b)** $f(x)=0{,}2x^2+1$, **c)** $f(x)=-12x^2+11x$, **d)** $f(x)=6x^2$.

12.2. Np.: $f(x)=5x^2+2x-1$ i $f(x)=-3x^2+2x-1$. **12.3.** **a)** A i C, **b)** B, **c)** A, **d)** C.

12.4. **1** – **3**, **2** – **8**, **4** – **6**, **5** – **7**. **12.5.** **a)** $a=2$, **b)** $a=-1$, **c)** $a=4$. **12.6.** D.

12.7. A. **12.8.** B i C. **12.9.** **a)** $a=1$, **b)** $a=-2$, **c)** $a=-\frac{1}{2}$.

12.10. **a)** $f(x)=3x^2-6x-2$, $a=3$, $b=-6$, $c=-2$, **b)** $f(x)=-9x^2-6x-1$, $a=-9$, $b=-6$, $c=-1$,

c) $f(x)=x^2-4x$, $a=1$, $b=-4$, $c=0$, **d)** $f(x)=2x^2+4x-3$, $a=2$, $b=4$, $c=-3$,

e) $f(x)=4x^2-16x+17$, $a=4$, $b=-16$, $c=17$, **f)** $f(x)=-2x^2-16x-35$, $a=-2$, $b=-16$, $c=-35$.

12.11. **a)** $a=-3$, $p=4$, $q=-2$, **b)** $a=1$, $p=-2$, $q=-6$, **c)** $a=-\frac{1}{2}$, $p=q=0$, **d)** $a=-1$, $p=-1$, $q=0$,

e) $a=10$, $p=0$, $q=30$, **f)** $a=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$. **12.12.** **a)** $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2-4$, **b)** $f(x)=4x^2$,

c) $f(x)=-\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+1{,}5$, **d)** $f(x)=x^2-2$. **12.13.** **1** – F, **2** – C, **3** – A, **4** – D, **5** – B, **6** – E.

12.14. **a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak, **d)** tak, **e)** nie, **f)** nie.

12.15. **a)**

x	-2	-1	0
$f(x)=(x+1)^2-2$	-1	-2	-1

b)

x	0	1	2
$f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2-2$	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-2\frac{1}{2}$

c)

x	-1	0	1
$f(x)=-x^2$	-1	0	-1

d)

x	2	3	4
$f(x)=1\frac{1}{2}(x-3)^2+3$	$4\frac{1}{2}$	3	$4\frac{1}{2}$

e)

x	-1	0	1
$f(x)=-2x^2+4$	2	4	2

f)

x	-2	-1	0
$f(x)=5(x+1)^2$	5	0	5

12.16. **a)**

x	-3	-2	-1
$f(x)=-2(x+2)^2-2$	-4	-2	-4

1 $\langle -2;+\infty)$, **2** $y_{MAX}=f(-2)=-2$, **3** $x=-2$.

b)

x	-5	-4	-3
$f(x)=2(x+4)^2+1$	3	1	3

1 $(-\infty;-4\rangle$, **2** $y_{MIN}=f(-4)=1$, **3** $x=-4$.

c)

x	-1	0	1
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$	$4\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$

1 $\langle 0;+\infty)$, **2** $y_{MAX}=f(0)=5$, **3** $x=0$.

d)

x	-6	-5	-4
$f(x)=3(x+5)^2$	3	0	3

1 $(-\infty;-5\rangle$, **2** $y_{MIN}=f(-5)=0$, **3** $x=-5$.

e)

x	-1	0	1
$f(x)=\frac{1}{3}x^2$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

1 $(-\infty;0\rangle$, **2** $y_{MIN}=f(0)=0$, **3** $x=0$.

f)

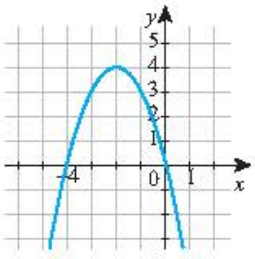
x	1	2	3
$f(x)=-(x-2)^2-1$	-2	-1	-2

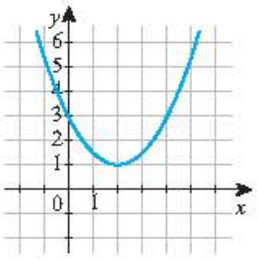
1 $\langle 2;+\infty)$, **2** $y_{MAX}=f(2)=-1$, **3** $x=2$.

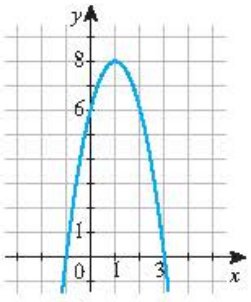
12.17. F, P. **12.18.** **a)** $a<0$, **b)** $a>0$, **c)** $a>0$, **d)** $a<0$, **e)** $x=3$ i $a>0$, **f)** 5 i $a<0$.

12.19. **a)** $(-1,-4)$, **b)** $(-2,-12)$, **c)** $(0,3)$, **d)** $(2,0)$, **e)** $\left(-\frac{5}{8},-\frac{9}{16}\right)$, **f)** $(-3,7)$.

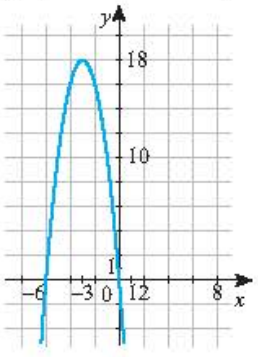
12.20. **a)** $f(x)=-x^2-4x$, **b)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$, **c)** $f(x)=-2x^2+4x+6$,

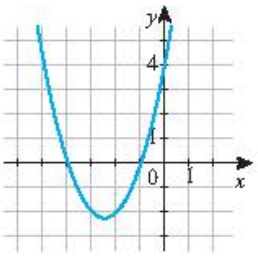


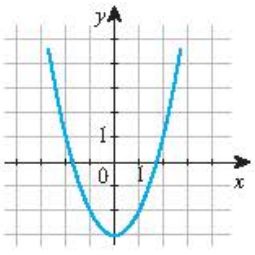




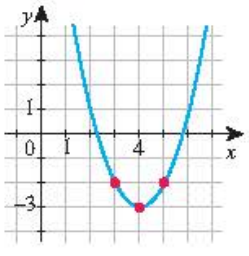
d) $f(x)=-2x^2-12x$, **e)** $f(x)=x^2+5x+4$, **f)** $f(x)=x^2-3$.

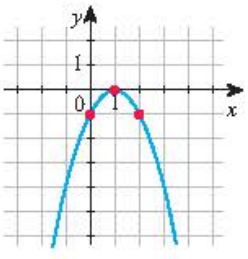


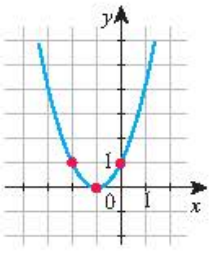




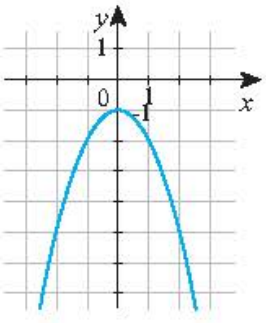
12.21. **a)** $f(x)=(x-4)^2-3$, **b)** $f(x)=-(x-1)^2$, **c)** $f(x)=x^2+2x+1$,

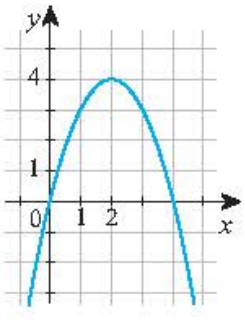


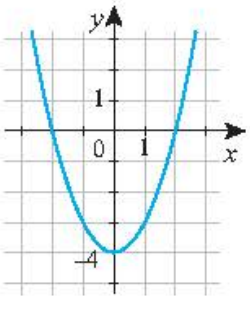




d) $f(x)=-x^2-1$, **e)** $f(x)=-x(x-4)$, **f)** $f(x)=(x+2)(x-2)$.







12.22. **a)** **1** $W=(-1,-4)$, **2** $f(x)=(x+1)^2-4$, **3** $x=-1$, **4** $Y=\langle -4,+\infty)$, **5** dwa miejsca zerowe,

b) **1** $W=(1,2)$, **2** $f(x)=-(x-1)^2+2$, **3** $x=1$, **4** $Y=(-\infty;2\rangle$, **5** dwa miejsca zerowe,

c) **1** $W=(2,-12)$, **2** $f(x)=3(x-2)^2-12$, **3** $x=2$, **4** $Y=\langle -12;+\infty)$, **5** dwa miejsca zerowe,

d) **1** $W=(0,3)$, **2** $f(x)=2x^2+3$, **3** $x=0$, **4** $Y=\langle 3;+\infty)$, **5** brak miejsc zerowych,

e) **1** $W=(0,16)$, **2** $f(x)=-4x^2+16$, **3** $x=0$, **4** $Y=(-\infty;16\rangle$, **5** dwa miejsca zerowe,

f) **1** $W=(-1,-3)$, **2** $f(x)=4(x+1)^2-3$, **3** $x=-1$, **4** $Y=\langle -3;+\infty)$, **5** dwa miejsca zerowe.

12.23. P, F. **12.24.** B. **12.25.** $Y_f=\left\langle -\frac{25}{12};+\infty\right)$. **12.26.** B i C.

12.27. Np.: $f(x)=-3(x-1)^2+2$. *Wskazówka.* Wyznacz współrzędne wierzchołka i określ znak współczynnika a. **12.28.** B. **12.29.** D. **12.30.** **a)** Tak, **b)** nie, **c)** nie, **d)** nie.

12.31. **a)** 0, **b)** 1, **c)** 2. **12.32.** **a)** $x_0=2$, $f(x)=(x-2)^2$, **b)** $x_1=0$, $x_2=3$, $f(x)=-3x(x-3)$,

c) $x_1=-2$, $x_2=2$, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x+2)$, **d)** nie ma miejsc zerowych, nie ma postaci iloczynowej,

e) $x_0=-1$, $f(x)=-2(x+1)^2$, **f)** $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$, $f(x)=-0{,}75\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$.

12.33. **a)** 2, **b)** 1, **c)** 0, **d)** 2.

Wskazówka. **d)** $\Delta=(-3^5)^2-4\cdot(-2)\cdot 3^{10}=3^{10}+8\cdot 3^{10}=3^{10}(1+8)=3^{10}\cdot 3^2=3^{12}$.

12.34. **a)** $x_1=-3$, $x_2=1$, $W=(-1,8)$, **b)** $x_1=-5$, $x_2=0$, $W=\left(-\frac{5}{2},-\frac{75}{4}\right)$, **c)** $x_1=2$, $x_2=4$, $W=(3,-8)$, **d)** $x_1=-3$, $x_2=1$, $W=(-1,16)$. *Wskazówka.* $W=(p,q)$, $p=\frac{x_1+x_2}{2}$, $q=f(p)$.

12.35. Kolejno: F, P, P.

12.36. *Wskazówka.* Wykres funkcji f przechodzi przez punkty o współrzędnych: **a)** $(-3,0)$, $(1,0)$ i $(-1,4)$, **b)** $(3,0)$, $(-1,0)$ i $(1,-8)$, **c)** $(2,0)$, $(-4,0)$ i $\left(-1,-4\frac{1}{2}\right)$, **d)** $(0,0)$, $(1,0)$ i $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

12.37. B. **12.38.** **a)** $\langle -3;0\rangle$, **b)** $\langle 0;5\rangle$, **c)** $\langle -2;0\rangle$.

12.39. **1** **a)** $\langle -3;0\rangle$, **b)** $y_{MAX}=f(-1)=4$, $y_{MIN}=f(-3)=0$,

2 **a)** $\langle -1;1\rangle$, **b)** $y_{MAX}=f(-1)=f(1)=3$, $y_{MIN}=f(0)=2$,

3 **a)** $\langle 1;4\rangle$, **b)** $y_{MAX}=f(4)=0$, $y_{MIN}=f(2)=-4$.

12.40. **a)** $y_{MAX}=f(1)=4$, $y_{MIN}=f(-1)=-6$, **b)** $y_{MAX}=f(-1)=9$, $y_{MIN}=f(0)=4$,

c) $y_{MAX}=f(-2)=f(0)=-9$, $y_{MIN}=f(-1)=12$, **d)** $y_{MAX}=f(-1)=40$, $y_{MIN}=f(-2)=15$,

e) $y_{MAX}=f(0)=12$, $y_{MIN}=f(2)=4$, **f)** $y_{MAX}=f(2)=22$, $y_{MIN}=f(-2)=-2$.

12.41. A. **12.42.** C. **12.43.** P, F. **12.44.** **a)** $f(1)=41$, $f(40)=1601$, **b)** tak, gdy $n=23$.

12.45. $y_{MIN}=f(3)=8$, $y_{MAX}=f(1)=f(5)=20$.

12.46. **a)** $f(x)=0{,}3(x+2)(x-5)$, **b)** $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2$, **c)** $f(x)=x^2+2$.

12.47. **a)** $f(x)=\frac{7}{4}(x-3)^2+2$, **b)** $f(x)=-\frac{4}{5}(x-4)^2+\frac{6}{5}$, **c)** $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-5)^2+\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Wskazówka. **b)** Zauważ, że $p=\frac{2+6}{2}=4$ i skorzystaj z wzoru $f(x)=a(x-4)^2+q$ i z tego, że np. punkty $(2,-1)$ i $(1,-6)$ leżą na wykresie funkcji.

12.48. Kolejno: P, P, F.

12.49. **a)** $f(x)=3x^2-9x-30$, **b)** $f(x)=-x^2+28x-160$, **c)** $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{3}x$.

12.50. **a)** $f(x)=-(x+1)(x-5)$, $W=(2,9)$, **b)** $f(x)=\frac{1}{2}(x+4)(x-6)$, $W=\left(1,-\frac{25}{2}\right)$,

c) $f(x)=-2(x+4)(x-1)$, $W=\left(-\frac{3}{2},\frac{25}{2}\right)$, **d)** $f(x)=100(x+3)(x-1)$, $W=(-1,-400)$.

12.51. **a)** $f(x)=-\frac{1}{4}(x+1)(x-7)$, **b)** $f(x)=\frac{1}{16}(x+1)(x-7)$.

12.52. A. **12.53.** **a)** $f(x)=2(x-3)^2-10$, **b)** $f(x)=-3(x+1)^2+8$.

12.54. **a)** $f(x)=-\frac{5}{9}(x-2)^2+5$, **b)** $f(x)=(x-4)^2-8$, **c)** $f(x)=(x+2)^2-4=x^2+4x$.

12.55. **a)** $f(x)=4x^2-3x+2$, **b)** $f(x)=x^2-5x+5$, **c)** $f(x)=-3x^2+5x$, **d)** $f(x)=-x^2-4$.

12.56. **a)** $a=1$, $b=4$, $c=2$, **b)** $a=2$, $b=-1$, $c=1$, **c)** $a=-1$, $b=1$, $c=3$.

12.57. **a)** 0, **b)** 1, **c)** 2. *Wskazówka.* **a)** $f(x)=-0{,}4\left(x^2-4\right)$, **b)** $f(x)=-0{,}5x(x-4)$,

c) $f(x)=0{,}5x^2+1$. **12.58.** **a)** 580 zł, **b)** 4000 zł, **c)** 97 600 zł.

12.59. **a)** Ciało spadnie na ziemię po 3 sekundach, **b)** $h_{MAX}=11{,}25$m, gdy $t=1{,}5$s.

12.60. **a)** Tak, bo $q=f(0)=3$, **b)** 4 m. **12.61.** **a)** $y=-\frac{2}{3}x^2+3x$, **b)** $y=-\frac{1}{4}x^2+x$.

12.62. **a)** $E(1)=22$, $E(10)=40$, **b)** w szóstym dniu przyjęto 72 chorych, **c)** 12 dni.

12.63. **a)** $f(x)=x^2+(20-x)^2$, $D: x\in\boldsymbol{R}$, **b)** $f(x)=x(x-5)$, $D: x\in\boldsymbol{R}$ lub $f(x)=x(x+5)$,

$D: x\in\boldsymbol{R}$, **c)** $f(x)=x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=3x^2+6x+5$, $D: x\in\boldsymbol{N}$,

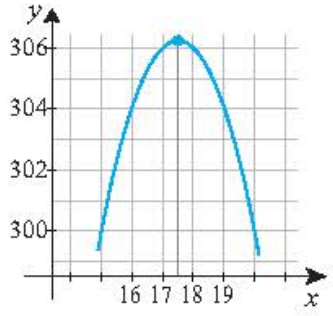
d) $f(x)=(2x)^2+(2x+2)^2=8x^2+8x+4$, $D: x\in\boldsymbol{Z}$, **e)** $f(x)=(2x-1)(2x+1)=4x^2-1$, $D: x\in\boldsymbol{Z}$,

f) $f(x)=(13+x)(19+x)$, $D: x>0$.

12.64. $f(n)=\frac{1}{2}n(n-3)$, $D: n\in\boldsymbol{N}$ i $n\geq 3$, trzydzieści boków.

12.65. a) $f(x)=x(35-x)$, gdzie x jest liczbą naturalną z przedziału $\langle 0;35\rangle$,

b) 17 lub 18 uczniów chorych na grypę, 306 esemesów.



Wskazówka. **b)** Do wykresu funkcji $f(x)=x(35-x)$ należą punkty o współrzędnych naturalnych. Liczba 17,5 nie należy do dziedziny funkcji f.

12.66. $17\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. *Wskazówka.* Średnia prędkość $v_{śr}$ jest ilorazem przyrostu przebytej drogi do przyrostu czasu. Zatem $v_{śr}=\frac{s(7)-s(4)}{7-4}$.

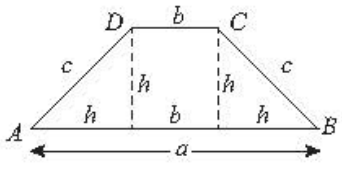
12.67. $36=18+18$. **12.68.** Prostokąt jest kwadratem o boku długości 6 cm.

12.69. Parking powinien mieć kształt kwadratu o boku 78 m. Jego powierzchnia będzie równa $6084\ \text{m}^2$.

12.70. $P_{MAX}=48\sqrt{3}$, gdy $x=8\sqrt{3}$.

12.71. a) $P(h)=-2h^2+12h$, $D: h\in(0;4)$, **b)** $a=9$, $b=3$, $c=3\sqrt{2}$.

Wskazówka. $a=2h+b$.



Zestaw powtórkowy

1. B. **2.** A. **3.** D. **4.** Kolejno P, F, F, P. **5.** B. **6.** T – B. 7. T – B. **8. a)** $1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, **b)** 20 s.

9. a) $f(x)=-(x-1)(x-3)$, **b)** $f(x)=-2(x+2)(x-4)$.

10. a) $a=-\frac{3}{8}$, **b)** $C=\left(3,9\frac{3}{8}\right)$, **c)** $P_{\Delta ABC}=46\frac{7}{8}$.

Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	β [°]
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\alpha$	β [°]
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	0,7660	1,1918	40
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	0,9848	5,6713	10
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	1,0000	–	0

MATEMATYKA PODRĘCZNIK 1

Charakterystyczne cechy podręczników z serii „MATEMATYKA i przykłady jej zastosowań” do kształcenia w zakresie podstawowym

- W każdym rozdziale wszystkich podręczników z serii „MATEMATYKA i przykłady jej zastosowań” podtytuł jest tematem lekcji.
  Każdemu tematowi lekcji są przypisane odpowiednie umiejętności wymienione w podstawie programowej.
- Każda umiejętność wymieniona w podstawie programowej z dnia 30 stycznia 2018 r jest zilustrowana przykładami, ćwiczeniami i zadaniami utrwalającymi.
- Duża liczba ćwiczeń, zadań i zestawów powtórkowych stanowi dobrą bazę przygotowującą do egzaminu maturalnego.
- Do ćwiczeń i zadań utrwalających podane są odpowiedzi, a do niektórych również wskazówki.

ISBN 978-83-65120-82-3

Zakres Podstawowy