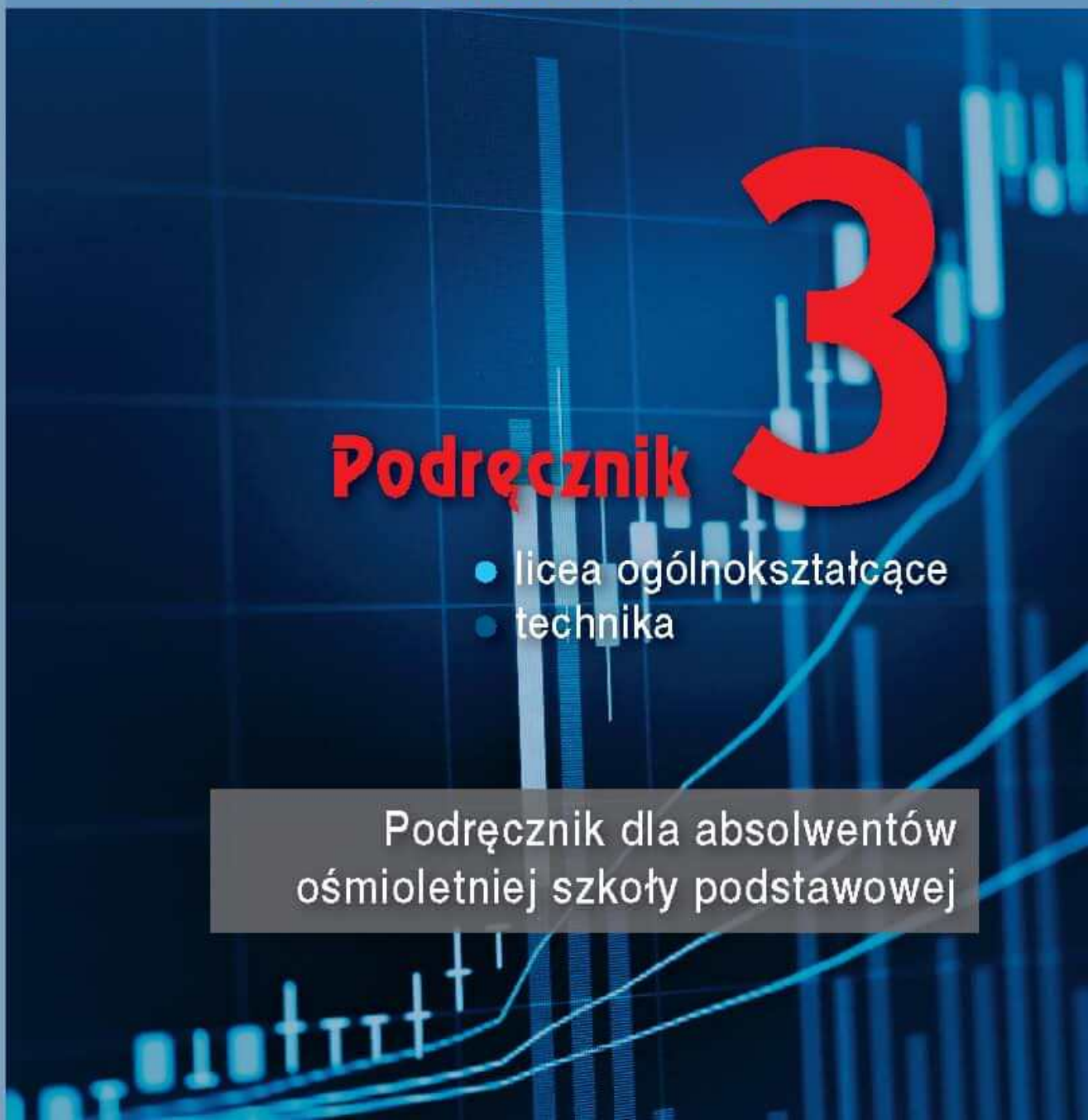
MATEMATYKA

Alicja Cewe • Maria Kruk
Alina Magryś-Walczak • Halina Nahorska

MATEMATYKA
i przykłady jej zastosowań

zakres podstawowy i rozszerzony



Podręcznik 3

- licea ogólnokształcące
- technika

Podręcznik dla absolwentów ośmioletniej szkoły podstawowej

PODKOWA

Alicja Cewe • Maria Kruk
Alina Magryś-Walczak • Halina Nahorska

MATEMATYKA
i przykłady jej zastosowań

zakres podstawowy i rozszerzony

Podręcznik 3

Wydawnictwo PODKOWA sp. j.
Gdańsk

Autorki: Alicja Cewe, Maria Kruk,
Alina Magryś-Walczak, Halina Nahorska

Opracowanie edytorskie i redakcyjne: Alicja Cewe, Halina Nahorska, Alina Magryś-Walczak

Projekt okładki: Alicja Cewe

Skład i ilustracje: Jarosław Mach

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez Ministra Edukacji Narodowej i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców:
dr. Marii Borowskiej, dr. hab. Edwarda Tutaja, dr hab. Jadwigi Bednarek.
Zakres kształcenia: podstawowy i rozszerzony.
Etap edukacyjny: III.
Typ szkoły: szkoły ponadpodstawowe.
Rok dopuszczenia: 2021.

Numer ewidencyjny w wykazie: 1068/3/2021.

Podręcznik zgodny z podstawą programową kształcenia ogólnego w liceach ogólnokształcących i technikach – zakres podstawowy i rozszerzony, określoną w rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz.U. z 2018 r., poz. 467.)

ISBN 978-83-65120-67-0

© Copyright by Wydawnictwo Podkowa
Gdańsk, ul. Paganiniego 17/17

Dystrybucja i zamówienia:

Skr. pocztowa 18, 80-460 Gdańsk 6
tel. 602 211 526 } dział zamówień
tel./fax 585 208 745 } i reklamacji

pinia@podkowa.gda.pl • www.podkowa.gda.pl

Spis treści

Wstęp ... 6

1. Funkcja wykładnicza ... 7

Potęga o wykładniku rzeczywistym ... 7

Funkcja wykładnicza i jej własności ... 14

Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej ... 20

Funkcja wykładnicza w zastosowaniach 27

Zestaw powtórkowy ... 35

2. Funkcja logarytmiczna ... 37

Logarytm i jego własności ... 37

Funkcja logarytmiczna i jej własności ... 43

Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej ... 50

Funkcja logarytmiczna w zastosowaniach ... 54

Zestaw powtórkowy ... 60

3. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta ... 62

Miara łukowa kąta ... 62

Kąt jako miara obrotu ... 64

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta ... 70

Wartości funkcji trygonometrycznych wielokrotności kąta $\frac{\pi}{2}$ ... 75

Znaki wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta ... 76

Wzory redukcyjne ... 79

Okresowość funkcji trygonometrycznych ... 81

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ... 86

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów ... 91

Suma i różnica funkcji trygonometrycznych ... 97

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych ... 99

Wykres funkcji sinus ... 99

Wykres funkcji cosinus ... 101

Wykresy funkcji tangens ... 103

Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych ... 104

Równania trygonometryczne ... 109

Równania trygonometryczne – ciąg dalszy ... 119

Nierówności trygonometryczne ... 124

Zestaw powtórkowy ... 129

4. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów ... 130

Twierdzenie sinusów ... 130

Twierdzenie cosinusów ... 138

Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów ... 146

Zestaw powtórkowy ... 151

5. Obliczanie długości odcinków w trójkątach i ich pól ... 153

Związki miarowe w trójkącie ... 153

Wzory na pola trójkątów i ich zastosowanie ... 158

Zestaw powtórkowy ... 167

6. Obliczanie długości odcinków w czworokątach i ich pól ... 168

Klasyfikacja i pola czworokątów wypukłych ... 168

Prostokąty ... 171

Kwadraty ... 173

Równoległoboki ... 177

Romby ... 181

Trapezy ... 186

Okrąg wpisany w czworokąt ... 194

Okrąg opisany na czworokącie ... 200

Rozwiązywanie zadań optymalizacyjnych z planimetrii 206
Zestaw powtórkowy 210

7. Ciągi liczbowe 212
Pojęcie ciągu liczbowego 212
Przykłady i sposoby określania ciągu .. 215
Ciąg określony rekurencyjnie 222
Monotoniczność ciągu liczbowego 225
Pojęcie ciągu arytmetycznego 229
Własności ciągu arytmetycznego 236
Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 241
Pojęcie ciągu geometrycznego 248
Własności ciągu geometrycznego 253
Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 259
Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zadaniach 265
Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny w bankowości 271
Zestaw powtórkowy 277

8. Granica ciągu liczbowego 279
Ciągi zbieżne do zera i ich własności .. 279
Ciągi zbieżne i ich własności 284
Twierdzenie o trzech ciągach 292
Szereg geometryczny i jego suma 296
Granica niewłaściwa ciągu 303
Zestaw powtórkowy 310

9. Granica i ciągłość funkcji 312
Granica funkcji w punkcie 312
Granice jednostronne funkcji w punkcie 318
Granica niewłaściwa funkcji w punkcie 323
Ciągłość funkcji 328
Własności funkcji ciągłych 334
Granica funkcji w nieskończoności ... 338
Zestaw powtórkowy 342

10. Pochodna funkcji i jej interpretacja . 343
Iloraz różnicowy funkcji i jego interpretacja 343
Pochodna funkcji w punkcie i jej interpretacja 349
Pochodna jako funkcja 353
Funkcja złożona i jej pochodna 359
Zastosowanie interpretacji geometrycznej i fizycznej pochodnej funkcji 364
Związek pochodnej z monotonicznością funkcji 371
Ekstrema lokalne funkcji 378
Związek pochodnej z ekstremum funkcji 381
Najmniejsza i największa wartość funkcji – zastosowania 386
Zestaw powtórkowy 392

Odpowiedzi i wskazówki 393
1. Funkcja wykładnicza 393
2. Funkcja logarytmiczna 397
3. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta 400
4. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów 408
5. Obliczanie odcinków, kątów oraz pól trójkąta 411
6. Obliczanie długości odcinków i pól czworokątów z zastosowaniem trygonometrii 413
7. Ciągi liczbowe 418
8. Granica ciągu liczbowego 426
9. Granica i ciągłość funkcji 428
10. Pochodna funkcji i jej interpretacja 431

Wstęp

Książka „**Podręcznik 3**” z serii **Matematyka i przykłady jej zastosowań – zakres podstawowy i rozszerzony** jest adresowana do uczniów klasy trzeciej liceum ogólnokształcącego i technikum, którzy ukończyli ośmioletnią szkołę podstawową.

Jest w nim wystarczająca liczba zadań i ćwiczeń, by nabyć umiejętności wymienione w podstawie programowej z dnia 30 stycznia 2018 roku (Dz.U. z 2018 r., poz. 467).

W końcowej części każdego realizowanego tematu lekcji zamieszczono zadania pozwalające na utrwalenie wiadomości (zadania utrwalające).

Odpowiedzi do zadań utrwalających znajdują się na ostatnich stronach książki.

Odpowiedzi do ćwiczeń są umieszczone w fioletowej ramce przed każdym zestawem zadań utrwalających.

Prosimy, aby w podręczniku nie umieszczać szkiców rozwiązań oraz odpowiedzi i nie zamieszczać ich w zadaniach zamkniętych.

Każdy rozdział kończy się zestawem powtórkowym, w którym są zadania otwarte i zamknięte.

Przy rozwiązywaniu problemów można korzystać z dostępnych narzędzi, czyli encyklopedii, tablic matematycznych, kalkulatorów i komputerów.

Życzymy powodzenia,

autorki.

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym

Przypomnijmy

W klasie pierwszej poznaliśmy definicje potęg o wykładnikach wymiernych:

- potęga o wykładniku naturalnym $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$, przy czym $a^0 = 1$, gdy $a \neq 0$,
- potęga o wykładniku całkowitym ujemnym $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, gdzie $a \neq 0$ i $n \in N$,
- potęga o wykładniku wymiernym $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, gdzie $a \in R^+$, $n \in N^+$ i $n > 1$, $m \in C$.

W klasie drugiej poznaliśmy działania na wyrażeniach wymiernych, znajomość których pozwala nam udowodnić twierdzenie dotyczące działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych wymiernych wykładników x i y prawdziwe są równości:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

Dowód wzorów: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$, $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

Wprowadzamy oznaczenia $x = \frac{m}{n}$ i $y = \frac{p}{q}$, gdzie $m \in Z$, $p \in Z$, $n \in Z^+$, $q \in Z^+$.

- $a^x \cdot a^y = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} =$

$= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \cdot \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{np} =$

$= \left(a^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np} = a^{\frac{1}{nq} \cdot (mq+np)} =$

$= a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{x+y}$, czyli $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. ***ckd.***

Ułamki $\frac{m}{n}$ i $\frac{p}{q}$ sprowadzamy do wspólnego mianownika nq.

$mq \in Z$, $np \in Z$, więc $z^{mq} \cdot x^{np} = x^{mq+np}$.

- $\left(a^x\right)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} =$

$= \sqrt[qn]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{x\cdot y}$, czyli $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$. **ckd.**

- $(a\cdot b)^x = (a\cdot b)^{\frac{m}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}\cdot m} = \left[(ab)^{\frac{1}{n}}\right]^m = \left(\sqrt[n]{a\cdot b}\right)^m =$

$= \left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} = a^x\cdot b^x$, czyli

$(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x$. **ckd.**

Analogicznie można przeprowadzić dowód pozostałych dwóch wzorów.

Ćwiczenie 1. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych wymiernych wykładników x i y zachodzą równości:

a) $a^x : a^y = a^{x-y}$, **b)** $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Przykład 1. Przedstaw w postaci potęgi liczby $\frac{1}{9}$ wyrażenie $\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}}{\sqrt{3}} = \frac{\left[\left(3^3\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= 3^{-\frac{1}{4}} = \left(3^{-1}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[\left(3^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

Przedstawiamy 3^{-2} w postaci potęgi liczby $\frac{1}{9} = 3^{-2}$.

Ćwiczenie 2. Przedstaw w postaci potęgi liczby 8 wyrażenie $\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}$.

Ćwiczenie 3. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{(-2)^3\cdot(-2)^2\cdot(-2)^5}{(-2)^3\cdot(-2)^6}$, **b)** $\left[\left(3\frac{1}{3}\right)^{-1} - 5^{-1}\right]^{-1}$, **c)** $\frac{\sqrt[3]{25}\cdot 5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}}$, **d)** $\left[\left(64^2\right)^0\right]^{\frac{1}{2}}$.

Ćwiczenie 4. Zastosuj wzory skróconego mnożenia i oblicz wartość wyrażenia:

a) $\left(2^{\frac{1}{2}}-5^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)$, b) $\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$.

Dotychczas obliczaliśmy potęgi o wykładnikach wymiernych.
Obecnie nauczymy się obliczać potęgi o wykładnikach niewymiernych.

Przykład 2. Wskaż kilka kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby $\sqrt{5}$ i odpowiadający im ciąg przybliżeń liczby $3^{\sqrt{5}}$.

Rozwiązanie

z dokładnością do 1: $\sqrt{5}\approx 2$, skąd $3^{\sqrt{5}}\approx 3^{2}$, czyli $3^{\sqrt{5}}\approx 9$,

z dokładnością do 0,1: $\sqrt{5}\approx 2{,}2$, skąd $3^{\sqrt{5}}\approx 3^{2{,}2}$, czyli $3^{\sqrt{5}}\approx 11{,}21$,

z dokładnością do 0,01: $\sqrt{5}\approx 2{,}24$, skąd $3^{\sqrt{5}}\approx 3^{2{,}24}$, czyli $3^{\sqrt{5}}\approx 11{,}72$,

z dokładnością do 0,001: $\sqrt{5}\approx 2{,}236$, skąd $3^{\sqrt{5}}\approx 3^{2{,}236}$, czyli $3^{\sqrt{5}}\approx 11{,}66$,

z dokładnością do 0,0001: $\sqrt{5}\approx 2{,}2361$, skąd $3^{\sqrt{5}}\approx 3^{2{,}2361}$, czyli $3^{\sqrt{5}}\approx 11{,}67$,

. . . . . .

Z kalkulatora odczytujemy, że $3^{\sqrt{5}}\approx 11{,}664753321\ldots$.

Uwaga

Wartość potęgi liczby rzeczywistej dodatniej o wykładniku niewymiernym x szacujemy, wykorzystując potęgi o wykładnikach wymiernych, będących kolejnymi przybliżeniami liczby x.

Przykład 3. Za pomocą kalkulatora wielofunkcyjnego lub komputera oszacuj liczbę 5^{π}, gdy przybliżenie liczby π jest podane z dokładnością do 0,0001.

Rozwiązanie

Z kalkulatora lub tablic odczytujemy, że $\pi=3{,}141592653\ldots$, więc

$3{,}1415<\pi<3{,}1416$,

zatem $5^{3{,}1415}<5^{\pi}<5^{3{,}1416}$,

skąd $156{,}96<5^{\pi}<156{,}99$.

Odp.: $156{,}96<5^{\pi}<156{,}99$.

Ćwiczenie 5. Za pomocą kalkulatora wielofunkcyjnego lub komputera oszacuj liczbę $2^{\sqrt{7}}$, gdy przybliżenie liczby $\sqrt{7}$ jest podane z dokładnością do 0,0001.

Potęgi o dodatnich podstawach i niewymiernych wykładnikach mają te same własności, co potęgi o wykładnikach wymiernych (w tym naturalnych i całkowitych).
Prawdziwe jest twierdzenie o działaniach na potęgach o dodatnich podstawach i rzeczywistych wykładnikach.

Twierdzenie

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b oraz dowolnych rzeczywistych wykładników x i y zachodzą równości:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

Przykład 4. Wykonaj działania: a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$, b) $5^{\sqrt{3}-1} \cdot 5^{1-\sqrt{3}}$, c) $\frac{9^{3\sqrt{2}}}{81^{\sqrt{2}-1}}$.

a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = 5^3 = 125$, $\quad \left(a^x\right)^y = a^{xy}$

b) $5^{\sqrt{3}-1} \cdot 5^{1-\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}-1+1-\sqrt{3}} = 5^0 = 1$, $\quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

c) $\frac{9^{3\sqrt{2}}}{81^{\sqrt{2}-1}} = \frac{9^{3\sqrt{2}}}{\left(9^2\right)^{\sqrt{2}-1}} = \frac{9^{3\sqrt{2}}}{9^{2(\sqrt{2}-1)}} = 9^{3\sqrt{2}-2(\sqrt{2}-1)} = 9^{\sqrt{2}+2}$. $\quad 81 = 9^2$

Ćwiczenie 6. Wykonaj działania:

a) $\left[\left(\sqrt{5}-1\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, b) $\left(3^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}$, c) $\left(\frac{3^{3\sqrt{2}}}{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$.

Przykład 5. Uzasadnij, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy $x = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3$$

Podnosimy obie strony równania do trzeciej potęgi.

$$x^3 = \underbrace{\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^3}_{a^3} - 3 \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^2}_{a^2} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}}_{b} + 3 \cdot \underbrace{\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}}_{a} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^2}_{b^2} - \underbrace{\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3}_{b^3}$$

$$x^3 = 5\sqrt{2}+7-3\cdot\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)^2\cdot\left(5\sqrt{2}-7\right)}+3\cdot\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\cdot\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}-5\sqrt{2}+7$$

$$x^3 = 14-3\cdot\sqrt[3]{\underbrace{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}_{50-49}\left(5\sqrt{2}+7\right)}+3\cdot\sqrt[3]{\underbrace{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}_{50-49}\left(5\sqrt{2}-7\right)}$$

$$x^3 = 14-3\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+3\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

$$x^3 = 14-3\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)}_{x}$$

$$x^3 = 14-3x$$

$$x^3+3x-14=0.$$

Rozwiązujemy równanie $x^3+3x-14=0$.

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:

$$x^3\underbrace{-2x^2+2x^2}_{0}\underbrace{-4x+4x}_{0}+3x-14=0$$

Zauważamy, że liczba 2 jest pierwiastkiem równania $x^3+3x-14=0$, *bo* $8+6-14=0$.

$$x^2(x-2)+2x(x-2)+7(x-2)=0$$

$$(x-2)\left(x^2+2x+7\right)=0$$

Równanie $x^2+2x+7=0$ *nie ma pierwiastków, bo* $\Delta<0$.

$$x-2=0 \text{ lub } x^2+2x+7=0$$

$$x=2, \text{ więc } \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2. \quad \textbf{\textit{c.n.u.}}$$

Ćwiczenie 7. Uzasadnij, że $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

Ćwiczenie 8. Uzasadnij, że $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\sqrt[3]{4}}\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\sqrt[3]{2}}=1$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

2. $8^{\frac{1}{4}}$. **3. a)** -2, **b)** 10, **c)** $\frac{1}{5}$, **d)** 1. **4. a)** -3, **b)** 4. **5.** $6{,}2580<2^{\sqrt{7}}<6{,}2584$.

6. a) $6-2\sqrt{5}$, **b)** $\frac{1}{9}$, **c)** 81. **8.** *Wskazówka.* Zauważ, że $\sqrt[3]{4}-2\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ oraz $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Zadania utrwalające

1.1. Oblicz:

a) $\left(125^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}-3\right)^{\frac{1}{2}}$, **b)** $\left(16^{-\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left[16^{-0{,}25}+\left(\sqrt{3}\right)^{-1}\right]$,

c) $16^{-0,75}+0,125^{\frac{4}{3}}+\left(1\frac{61}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$,

d) $\sqrt{9}\cdot\left[1,5^{-1}+9^{-1,5}\right]-27^{-\frac{2}{3}}$,

e) $\left[\frac{125^{\frac{2}{3}}-0,2^{-1}}{0,5^{-2}}\cdot 0,2^{-3}\right]^{\frac{3}{4}}$,

f) $\sqrt[3]{0,375}\cdot\sqrt[3]{9}+\left(3^{-1}-\sqrt[4]{\frac{16}{81}}\right)^{-2}$.

1.2. Wykonaj działanie:

a) $\left(\frac{1}{2}x^{0,25}+x^{0,75}\right)^2-x^{1,5}\left(1+x^{-0,5}\right)$,

b) $\left(m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(m^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)$,

c) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left[a^{\frac{2}{3}}+(ab)^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right]$,

d) $\left(3^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}\right):\left[3-(3a)^{\frac{1}{2}}+a\right]$.

1.3. W miejsce ▭ wstaw jeden ze znaków: „<”, „=”, „>”, gdy:

a) 81^{10} ▭ 1024^4,

b) $\left(\frac{1}{27\cdot\sqrt[3]{9}}\right)^{-6}$ ▭ $\left(\frac{\sqrt[3]{81}}{9\sqrt[4]{27}}\right)^{-12}$,

c) $\left(\frac{\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[4]{125}}{\sqrt[5]{625}}\right)^{40}$ ▭ $0,2^{-18}$,

d) $\left(4^{-0,25}-2^{0,5}\right)\cdot\left(4^{-0,25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ ▭ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$.

1.4. Wiedząc, że $a>0$, $b>0$ i $x\in\boldsymbol{R}$ oraz stosując prawa działań na potęgach, przedstaw w prostszej postaci wyrażenie:

a) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}$,

b) $a^{-3\sqrt{2}}:a^{\sqrt{2}}$,

c) $3^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$,

d) $\frac{3^x}{2^x}$,

e) $\left(a^{-3}\cdot b^{-2}\right)^{-1}:\left(a^{-2}\cdot b^{-3}\right)^{-1}$,

f) $\frac{a^{19}\cdot\left(b^3\right)^3+\left(a^2\right)^9\cdot b^{13}}{(ab)^9\cdot a+(ab)^9\cdot b^4}$,

g) $\frac{2^{12x+5}}{2^{5x-2}}\cdot\frac{1}{64^{x+1}}$.

1.5. D Uzasadnij, że:

a) $\sqrt[12]{625}=\sqrt[3]{5}$,

b) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^0\right]^{\frac{3}{4}}-7\frac{1}{2}\cdot 4^{-1,5}-2^{-4}+9^{0,5}=3$.

1.6. D Wykaż, że:

a) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$,

b) $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=4$.

1.7. Przedstaw w postaci potęgi liczby 2 wyrażenie:

a) $2^{\sqrt{2}} \cdot 2$, b) $2^{\sqrt{2}} \cdot 2^{\sqrt{2}}$, c) $2^{1-\sqrt{2}} \cdot 2^{1+\sqrt{2}}$, d) $\left(\frac{1}{4} \cdot 2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$,

e) $\frac{2^{\sqrt{2}}}{2}$, f) $2^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$, g) $\frac{8^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}}$, h) $\left(\frac{16}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$.

1.8. Oblicz:

a) $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, b) $\left[\left(\sqrt{3}\right)^{-\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\sqrt{2}}\right]^{1+\sqrt{2}}$,

d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\sqrt{3}}\right]^{1+\sqrt{3}}$, e) $\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{-\sqrt{2}}$, f) $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{12}}$.

1.9. Oblicz:

a) $\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$, b) $\left(2^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, c) $\left(3^{\sqrt{7}-1}\right)^{\sqrt{7}+1}$.

1.10. D Wykaż, że:

a) $\left(8-2\sqrt{7}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(8+2\sqrt{7}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6^{\sqrt{2}}$, b) $\left(12-\sqrt{19}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{3}} \cdot \left(12+\sqrt{19}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 5^{\sqrt{5}}$,

c) $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{2\sqrt{2}-2}\right]^{2\sqrt{2}+2} - \left[\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}+2}\right]^{2\sqrt{5}-4} = -1$.

1.11. Przedstaw w postaci jednej potęgi wyrażenie:

a) $\left(\sqrt{3} \cdot 27^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, b) $\left(\frac{32^{\sqrt{2}} \cdot 0{,}5^{-1}}{8}\right)^{5\sqrt{2}+2}$,

c) $\left[\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3}{36^{\sqrt{2}}}\right]^{1{,}5+2\sqrt{2}}$, d) $\left[\frac{\left(\sqrt[4]{10}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[4]{10}\right)^3}{0{,}01^{\sqrt{5}}}\right]^{1{,}25-2\sqrt{5}}$.

1.12. Oblicz za pomocą kalkulatora wielofunkcyjnego lub komputera i zapisz wynik z dokładnością do 0,1.

a) π^{π}, b) $3^{\sqrt{3}}$, c) $2^{\sqrt{2}}$, d) $\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}}$, e) $5^{\sqrt{5}}$.

1.13. D Wykaż, że jeśli $m = 4^{\sqrt{3}+2}$ i $n = 2^{\sqrt{3}+5}$, to $n = 8\sqrt{m}$.

Funkcja wykładnicza i jej własności

Jeżeli a jest liczbą dodatnią $(a>0)$, to każdej liczbie rzeczywistej x $(x \in R)$ możemy przyporządkować potęgę a^x. Określamy w ten sposób funkcję, którą nazywamy wykładniczą.

Definicja

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x)=a^x$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą oraz a jest liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1.

$f(x)=a^x$, gdzie $x \in R$, $a>0$ i $a \neq 1$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest krzywa wykładnicza o równaniu $y=a^x$.

Przykłady wzorów funkcji wykładniczych:

$$f(x)=2^x, \quad f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x, \quad f(x)=10^x, \quad f(x)=e^x, \quad f(x)=\pi^x.$$

Przykład 6. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem:

a) $f(x)=2^x$, b) $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Rozwiązanie

Sporządzamy tabele wartości funkcji f i g dla wybranych argumentów.

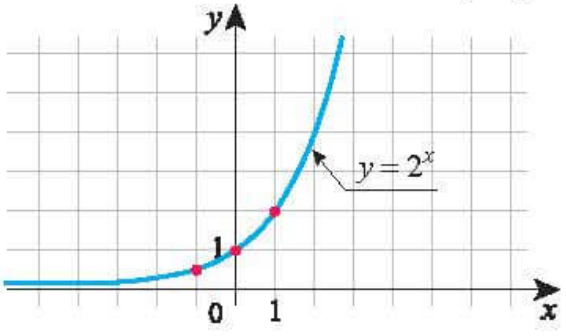
a)

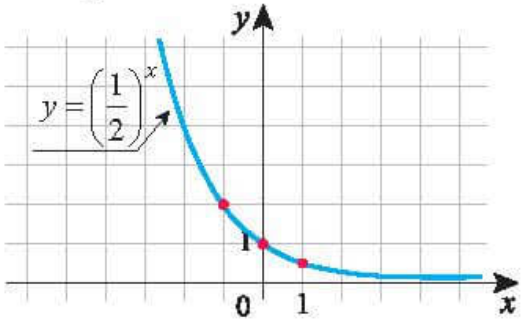
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Szkicujemy wykresy funkcji.





Do naszkicowania wykresu funkcji wykładniczej wystarczą punkty:

$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $(0,1)$, $(1,2)$.

$(-1,2)$, $(0,1)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Ćwiczenie 9. Odczytaj z wykresu funkcji **1** $f(x)=2^x$, **2** $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

a) dziedzinę funkcji, **b)** zbiór wartości funkcji,

c) przedział, w którym funkcja rośnie (maleje),

d) współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią y,

e) miejsca zerowe funkcji, o ile istnieją.

Uwaga

Aby naszkicować wykres funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x)=a^x$, będziemy zaznaczać punkty o współrzędnych $\left(-1,\frac{1}{a}\right)$, $(0,1)$, $(1,a)$.

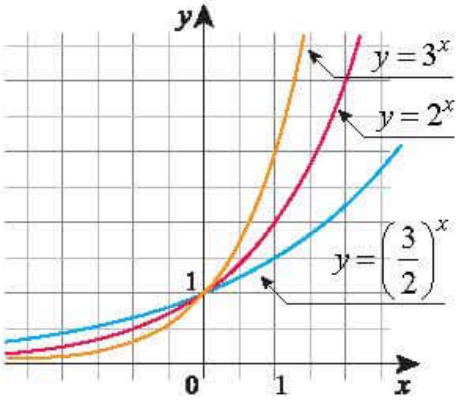
Ćwiczenie 10. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem: **a)** $f(x)=4^x$, **b)** $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Ćwiczenie 11. Do wykresu funkcji wykładniczej określonej wzorem $f(x)=a^x$ należy punkt A. Podaj wartość a i napisz wzór tej funkcji, gdy:

a) $A=(1,4)$, **b)** $A=(-1,5)$, **c)** $A=(1,10)$, **d)** $A=\left(-1,\frac{1}{6}\right)$.

Ćwiczenie 12. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji wykładniczych f, g i h, gdzie:

$f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, $g(x)=2^x$, $h(x)=3^x$.



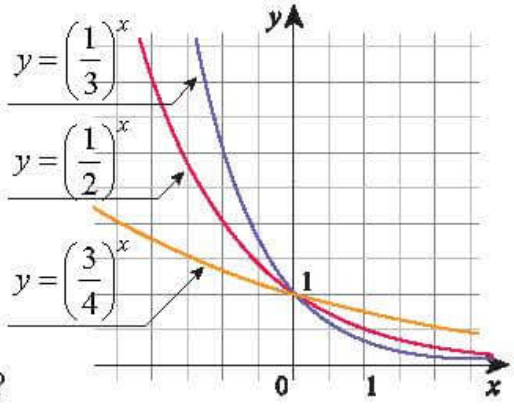
a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią y.

b) Czy funkcje f, g i h są rosnące w przedziale $(-\infty;+\infty)$?

c) Uzasadnij, że funkcje f, g i h nie mają miejsc zerowych.

Ćwiczenie 13. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji wykładniczych f, g i h, gdzie:

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $h(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$.

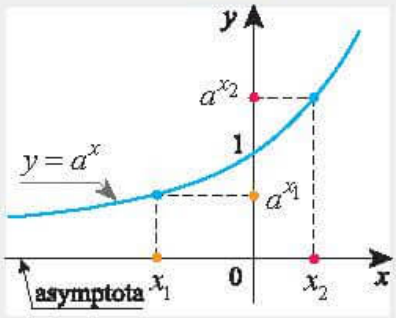


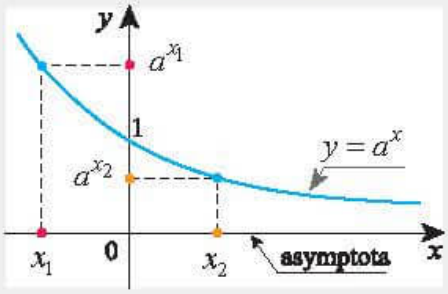
a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią y.

b) Czy funkcje są malejące w przedziale $(-\infty;+\infty)$?

Uwaga

- Zbiorem wartości funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x)=a^x$ jest zbiór $Y_f=R^+$.
- Funkcja wykładnicza jest:
  - rosnąca, gdy $a>1$,
  - malejąca, gdy $0<a<1$.





Jeżeli $x_1<x_2$, to

$a^{x_1}<a^{x_2}$ | $a^{x_1}>a^{x_2}$

- Wykres każdej funkcji wykładniczej o równaniu $y=a^x$ leży nad osią x i przechodzi przez punkt $(0,1)$. Funkcja wykładnicza nie ma miejsc zerowych.
- Prosta o równaniu $y=0$ (oś x) jest asymptotą*) poziomą wykresu funkcji wykładniczej $f(x)=a^x$.

Ćwiczenie 14. Spośród wzorów funkcji: $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$, $f(x)=\frac{1}{4^x}$, $f(x)=\left(2\sqrt{2}\right)^x$, $f(x)=(0,1)^{-x}$, $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, $f(x)=(\log_2 3)^x$ wybierz te, które określają funkcje malejące.

Przykład 7. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej i uporządkuj rosnąco liczby:

a) $2^{3,2}$, $2^{\frac{22}{7}}$, 2^{π}, **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,(73)}$.

Rozwiązanie

a) Podstawą potęg $2^{3,2}$, $2^{\frac{22}{7}}$, 2^{π} jest liczba 2.

Funkcja określona wzorem $f(x)=2^x$ jest rosnąca, więc najmniejszą spośród liczb jest ta, której wykładnik jest najmniejszy.

$\frac{22}{7}=3,1428..$, $\pi=3,1415...$, więc $\pi<\frac{22}{7}<3,2$.

Odp: $2^{\pi}<2^{\frac{22}{7}}<2^{3,2}$.

*) Asymptota – prosta, do której wykres funkcji się „zbliża" i zbliżając się – nie przecina jej.

b) Podstawą potęg $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,(73)}$ jest liczba $\frac{1}{5}$.

Funkcja określona wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ jest malejąca, więc najmniejszą spośród potęg liczby $\frac{1}{5}$ jest ta, której wykładnik jest największy.

$\sqrt{3}=1,73205..$, $1,(73)=1,7373..$, więc $1,(73)>\sqrt{3}>1,7$.

Odp.: $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,(73)}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$.

Ćwiczenie 15. Skorzystaj z własności funkcji wykładniczej i uporządkuj malejąco liczby:

a) $3^{1,5}$, $3^{\sqrt{2}}$, $3^{1,4(6)}$, **b)** $(0,5)^{\pi}$, $(0,5)^{\frac{10}{3}}$, $(0,5)^{\sqrt{9,83}}$.

Uwaga

Jeżeli $f(x)=a^x$ i $x_1\in R$, $x_2\in R$ oraz:

- $0<a<1$ *(funkcja wykładnicza jest malejąca)*, to $a^{x_1}>a^{x_2}$, gdy $x_1<x_2$,
- $a>1$ *(funkcja wykładnicza jest rosnąca)*, to $a^{x_1}<a^{x_2}$, gdy $x_1<x_2$.

Przypomnijmy

Jeżeli $a>0$ i $a\neq 1$, $b>0$, $x\in R$, to $\boldsymbol{a^x=b}$, **gdy** $\boldsymbol{\log_a b=x}$.

Przykład 8. Oblicz, jeśli to możliwe, dla jakiego argumentu x funkcja wykładnicza f określona wzorem $f(x)=3^x$ przyjmuje wartość równą: **a)** 27, **b)** 2, **c)** –3.

Rozwiązanie

Obliczenie argumentu x, dla którego funkcja $f(x)=3^x$ przyjmuje określoną wartość, sprowadza się do rozwiązania równania:

a) $f(x)=27$, czyli $3^x=27$, więc $3^x=3^3$, skąd $x=3$.

b) $f(x)=2$, czyli $3^x=2$, więc $x=\log_3 2$. *Korzystamy z definicji logarytmu.*

c) $f(x)=-3$, czyli $3^x=-3$.

Dla każdej liczby rzeczywistej x każda funkcja wykładnicza przyjmuje tylko wartości dodatnie ($a^x>0$), więc równanie $3^x=-3$ nie ma rozwiązania.

Odp.: **a)** $x=3$, **b)** $x=\log_3 2$, **c)** nie istnieje takie x.

Uwaga

Jeżeli $y = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, $x \in \boldsymbol{R}$, to:

- $a^x > 0$
- $x = \log_a y$.

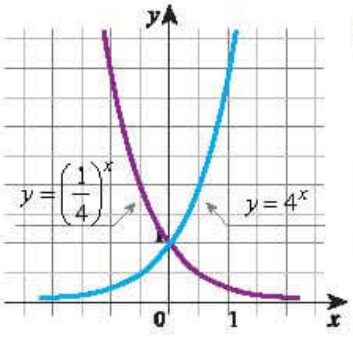
Ćwiczenie 16. Oblicz, jeśli to możliwe, dla jakiego argumentu x funkcja określona wzorem $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość równą:

a) 32, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{1024}$, d) 1, e) 5, f) 0.

Odpowiedzi do ćwiczeń

9. **1** **a)** $D_f = \boldsymbol{R}$, **b)** $Y_f - \boldsymbol{R}^+$, **c)** funkcja f rośnie w przedziale $(-\infty; +\infty)$, **d)** $(0,1)$, **e)** funkcja f nie ma miejsc zerowych, **2** **a)** $D_g = \boldsymbol{R}$, **b)** $Y_g - \boldsymbol{R}^+$, **c)** funkcja g maleje w przedziale $(-\infty; +\infty)$, **d)** $(0,1)$, **e)** funkcja g nie ma miejsc zerowych.

10.



11. **a)** $a = 4$, $f(x) - 4^x$, **b)** $a = \frac{1}{5}$, $f(x) - \left(\frac{1}{5}\right)^x$, **c)** $a = 10$, $f(x) - 10^x$, **d)** $a = 6$, $f(x) - 6^x$.

12. **a)** $D_f = D_g = D_h = \boldsymbol{R}$, $Y_f - Y_g - Y_h - (0; +\infty)$, $(0,1)$, **b)** tak.

13. Dla wszystkich funkcji **a)** $D = \boldsymbol{R}$, $Y - \boldsymbol{R}^+$, $(0,1)$, **b)** tak.

14. $f(x) - \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $f(x) - \frac{1}{4^x}$.

15. **a)** $3^{1,5} > 3^{1,4(6)} > 3^{\sqrt{2}}$, **b)** $(0,5)^{\sqrt{9,83}} > (0,5)^{\pi} > (0,5)^{\frac{10}{3}}$.

16. **a)** 5, **b)** –2, **c)** –10, **d)** 0, **e)** $\log_2 5$, **f)** nie istnieje takie x.

Zadania utrwalające

1.14. Do wykresu funkcji wykładniczej f należą punkty o podanych współrzędnych x: $(-1, ...)$, $(0, ...)$, $(1, ...)$. Oblicz współrzędną y, zaznacz te punkty na płaszczyźnie kartezjańskiej i naszkicuj wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x) = 4^x$, b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, c) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, d) $f(x) = (0,4)^x$.

1.15. Do wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$ należy punkt P. Podaj wartość a i określ, czy funkcja f jest rosnąca czy malejąca, gdy:

a) $P = \left(1, \frac{3}{5}\right)$, b) $P = \left(-1, \frac{3}{5}\right)$, c) $P = \left(1, 1\frac{2}{3}\right)$, d) $P = \left(-1, 1\frac{2}{3}\right)$.

1.16. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g, a następnie z wykresów odczytaj rozwiązanie nierówności:

a) $2^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x$, gdy $f(x)=2^x$ i $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,

b) $3^x \leq 2^x$, gdy $f(x)=3^x$ i $g(x)=2^x$,

c) $4^x > 2^x$, gdy $f(x)=4^x$ i $g(x)=2^x$.

1.17. Uporządkuj rosnąco liczby:

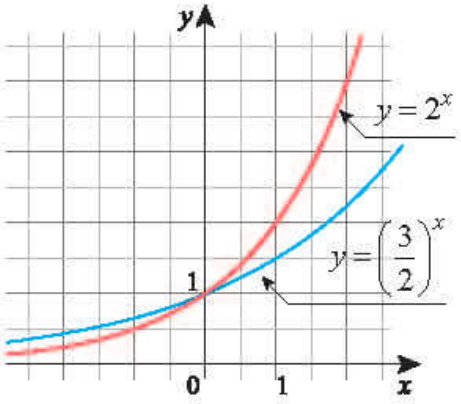
a) $3^{-2\sqrt{2}}$, $3^{-\frac{11}{4}}$, 3^0, $3^{2\pi}$, $\sqrt{3}$,

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{\pi}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$,

c) 6^{-2}, $6^{-\sqrt{6}}$, $6^{\sqrt{6}}$, 6^2, $6^{-\sqrt{3}}$,

d) $(0,2)^{\frac{1}{2}}$, $(0,2)^{-\frac{1}{2}}$, $(0,2)^{-\sqrt{7}}$, $(0,2)^{-4}$.

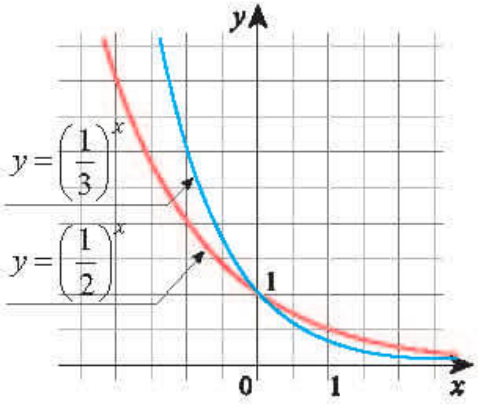
1.18. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ i $g(x)=2^x$.



a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią y.

b) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nierówności: **1** $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 2^x$, **2** $\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 2^x$.

1.19. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ i $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



a) Podaj dla każdej z funkcji dziedzinę, zbiór wartości oraz współrzędne punktu przecięcia się wykresu z osią y.

b) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nierówności: **1** $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^x$, **2** $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

1.20. Oblicz $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, gdy:

a) $f(x)=2^x$, $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=\log_2 5$,

b) $f(x)=3^x$, $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=2\log_3 4$,

c) $f(x)=(0,2)^x$, $x_1=-2$, $x_2=\log_5 3$, $x_3=\log_5 \frac{1}{12}$,

d) $f(x)=4^{-x}$, $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\log_2 3$, $x_3=\log_4 7$.

1.21. Oblicz, dla jakiego argumentu x funkcja wykładnicza f przyjmuje wartość równą b, gdy:

a) $f(x)=2^x$ i $b=16$,

b) $f(x)=3^x$ i $b=\frac{1}{81}$,

c) $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ i $b=\frac{64}{27}$,

d) $f(x)=\left(\sqrt{5}\right)^x$ i $b=125$,

e) $f(x)=2^x$ i $b=24$,

f) $f(x)=3^x$ i $b=405$.

1.22. Rozwiąż równanie:

a) $2^x=2\sqrt{2}$,

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=64$,

c) $\left(\sqrt{2}\right)^x=\sqrt[3]{2}$,

d) $10^x=0,0001$,

e) $10^x=\sqrt{0,001}$,

f) $(0,1)^x=200$.

1.23. Określ, dla jakich wartości parametru m ma rozwiązanie równanie:

a) $3^x=m$,

b) $4^x=m-1$,

c) $5^x=2-m$,

d) $2^x+3=m$,

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^x-5=m$,

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=|m|$.

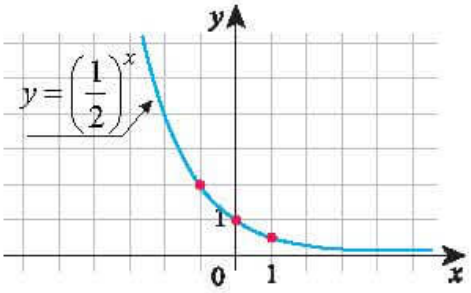
Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej

Przypomnijmy

Wykres funkcji g otrzymujemy z przekształcenia wykresu funkcji f:

• w symetrii względem osi x, gdy	• w symetrii względem osi y, gdy	• w przesunięciu równolegle do osi x o p jednostek ($p>0$), gdy	• w przesunięciu równolegle do osi y o q jednostek ($q>0$), gdy
$g(x)=-f(x)$	$g(x)=f(-x)$	$g(x)=f(x\pm p)$	$g(x)=f(x)\pm q$

Przykład 9. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Naszkicuj wykres funkcji g, gdy:

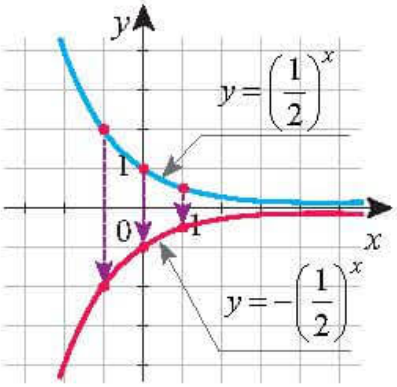
a) $g(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$, **b)** $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$,

c) $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$, **d)** $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$.

Rozwiązanie

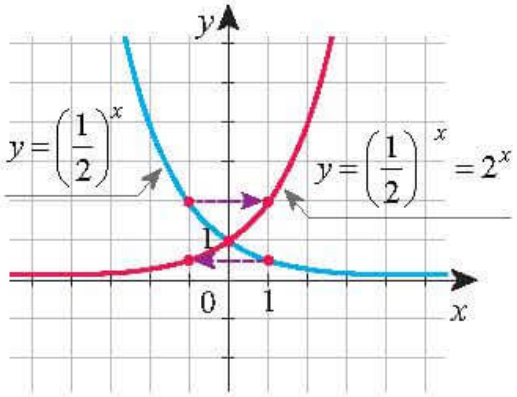
a) Zapis $g(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ oznacza, że $g(x)=-f(x)$.

Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi x.



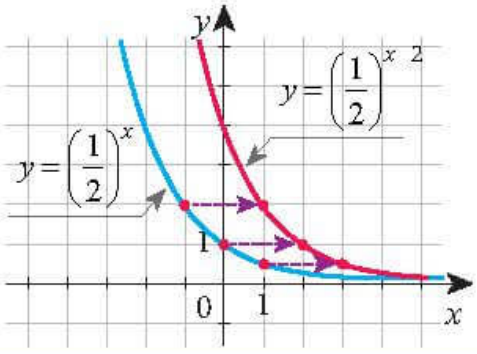
b) Zapis $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ oznacza, że $g(x)=f(-x)$.

Wykres funkcji g jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y.



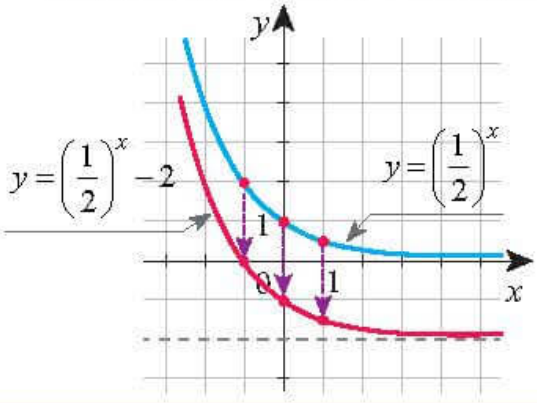
c) Zapis $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ oznacza, że $g(x)=f(x-2)$.

Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji f równolegle do osi x o 2 jednostki w prawo, czyli o wektor [2,0].



d) Zapis $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$ oznacza, że $g(x)=f(x)-2$.

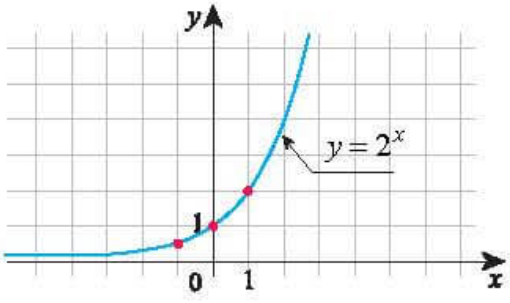
Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji f równolegle do osi y o 2 jednostki w dół, czyli o wektor [0,–2].



Ćwiczenie 17. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=2^x$. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji g, gdy:

a) $g(x)=2^{-x}$, b) $g(x)=-2^x$,

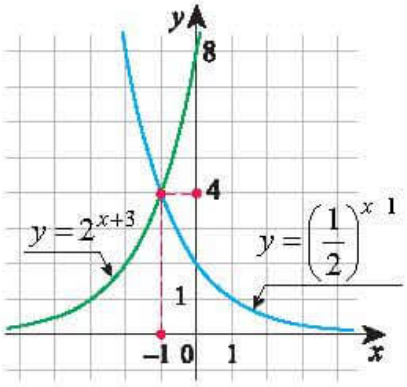
c) $g(x)=2^x+3$, d) $g(x)=2^{x+1}$.



Przykład 10. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g określonych wzorami $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ i $g(x)=2^{x+3}$.

Rozwiązanie

Aby obliczyć współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g, należy rozwiązać równanie $f(x)=g(x)$, którego rozwiązaniem jest odcięta x punktu przecięcia się wykresów.



$\frac{1}{2}=2^{-1}$

$a^x=a^y$, gdy $x=y$, gdzie $a>0$ i $a\neq 1$

$$f(x)=g(x), \text{ gdy } \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=2^{x+3}, \text{ skąd}$$

$$2^{-(x-1)}=2^{x+3}$$

$$-(x-1)=x+3$$

$$x=-1.$$

Rzędną y punktu przecięcia obliczamy, podstawiając do wzoru funkcji f lub g w miejsce x liczbę -1. Zatem $y=g(-1)=2^{-1+3}=2^2=4$.

Odp.: Wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie o współrzędnych $(-1, 4)$.

Ćwiczenie 18. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g, gdy:

a) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$ i $g(x)=3^{x+1}$, b) $f(x)=\left(1\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ i $g(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-3}$.

Uwaga

Jeżeli funkcja f określona jest wzorem $f(x)=a^x$ i $k\in R\setminus\{0\}$ oraz:

- $g(x)=k\cdot f(x)$ i $k=a^t$, to $g(x)=a^{x+t}$, wtedy wykres funkcji g powstaje z przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $[-t, 0]$,
- $h(x)=f(k\cdot x)$, to $h(x)=\left(a^k\right)^x$, czyli wykres funkcji h jest wykresem funkcji wykładniczej o podstawie a^k.

Na przykład:

$g(x)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

$g(x)=27\cdot 3^x=3^{x+3}$

$g(x)=\frac{1}{8}\cdot 2^x=2^{x-3}$

$h(x)=3^{2x}=9^x$

$h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}=8^x$

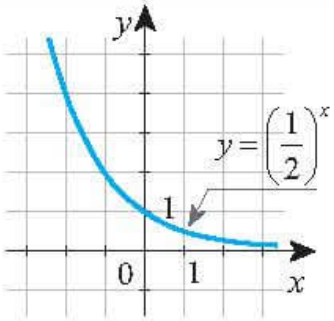
Ćwiczenie 19. Wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=2^x$ przesunięto o wektor $\vec{u}=[p, q]$ i otrzymano wykres funkcji g. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, gdy:

a) $g(x)=2^{x+1}$, **b)** $g(x)=2^{x-1}+3$, **c)** $g(x)=8\cdot 2^x-1$.

Ćwiczenie 20. Wykres funkcji f powstał z przesunięcia wykresu funkcji g o wektor $\vec{u}=[p, q]$. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, gdy:

a) $f(x)=3^x+1$ i $g(x)=3^{x-2}$, **b)** $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}-1$ i $g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}-3$.

Przykład 11. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Naszkicuj wykres funkcji:

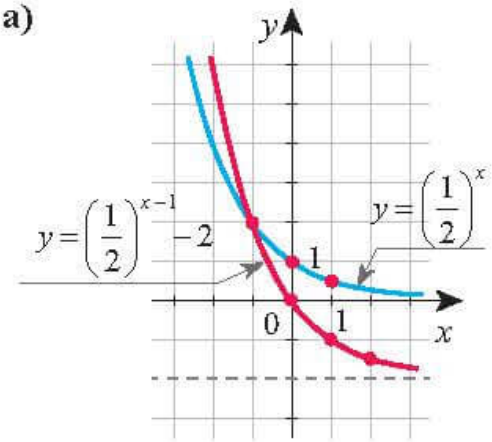


a) g, gdy $g(x)=f(x-1)-2$,

b) h, gdy $h(x)=|g(x)|$.

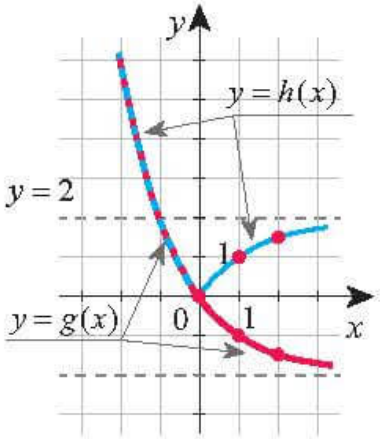
Rozwiązanie

a)



Wykres funkcji g otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji f o wektor $\vec{u}=[1, -2]$.

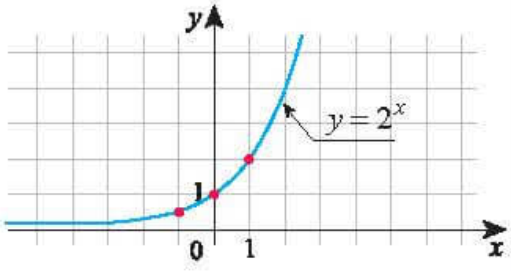
b)



$$h(x)=\begin{cases} g(x), & \text{gdy } g(x)\geq 0 \\ -g(x), & \text{gdy } g(x)<0 \end{cases}$$

Wykres funkcji h pokrywa się z wykresem funkcji g, gdy $g(x)\geq 0$; jest symetryczny do wykresu funkcji g względem osi x, gdy $g(x)<0$.

Ćwiczenie 21. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=2^x$. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji:

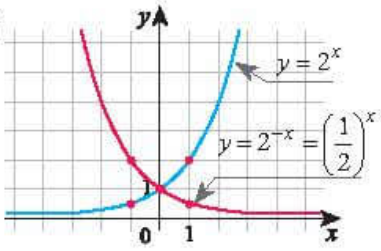


a) g, gdy $g(x)=f(x+1)-2$,

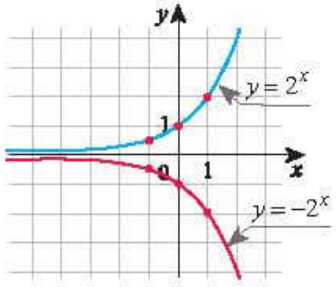
b) h, gdy $h(x)=|g(x)|$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

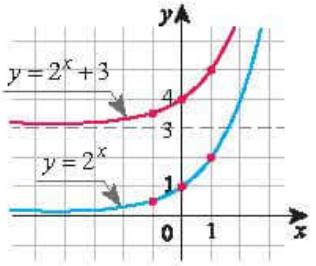
17. a)



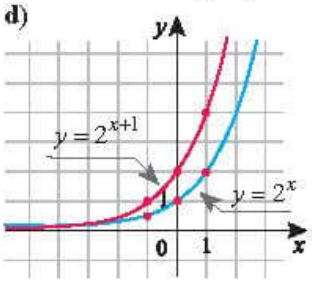
b)



c)



d)



18. a) $(1, 9)$, **b)** $\left(1, 2\frac{7}{9}\right)$.

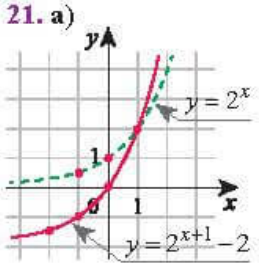
19. a) $\vec{u}=[-1, 0]$,

b) $\vec{u}=[1, 3]$, **c)** $\vec{u}=[-3, -1]$.

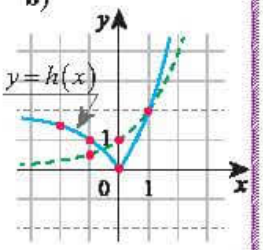
20. a) $\vec{u}=[-2, -1]$,

b) $\vec{u}=[-4, 2]$.

21. a)

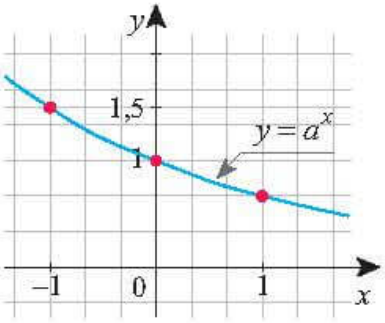


b)



Zadania utrwalające

1.24. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x)=a^x$.



a) Podaj wartość a.

b) Narysuj wykres funkcji g, gdy $g(x)=f(-x)$.

c) Narysuj wykres funkcji h, gdy $h(x)=f(x-2)$.

1.25. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=(1,5)^x$, a następnie narysuj wykres funkcji g i podaj jej zbiór wartości, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$, **b)** $g(x)=f(x)-1$.

1.26. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=4^x$. Narysuj wykres funkcji g i ustal, czy funkcja g jest rosnąca czy malejąca, gdy:

a) $g(x)=-4^x$, **b)** $g(x)=4^{-x}$, **c)** $g(x)=4^{x-1}$, **d)** $g(x)=4^x+2$.

1.27. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2^x-4$.

a) Narysuj wykres funkcji f.

b) Czy funkcja f jest malejąca?

c) Podaj miejsce zerowe funkcji f.

d) Podaj argument x, dla którego $f(x)=-2$.

1.28. Narysuj wykres funkcji f i podaj wartość $f(0)$, gdy:

a) $f(x)=8\cdot\frac{1}{2^x}$, b) $f(x)=16\cdot 2^x$, c) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot(1,5)^x$.

1.29. Wykres funkcji g otrzymano, przekształcając wykres funkcji f. Opisz to przekształcenie, gdy:

a) $f(x)=(0,75)^x$ i $g(x)=\left(1\frac{1}{3}\right)^x$, b) $f(x)=\frac{1}{5^x}$ i $g(x)=5^x$,

c) $f(x)=(2,5)^x$ i $g(x)=(0,4)^x$, d) $f(x)=49\cdot 7^x$ i $g(x)=7^x$.

1.30. Podaj współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g, gdy:

a) $f(x)=2^x$ i $g(x)=4^x$, b) $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ i $g(x)=(0,1)^x$.

1.31. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów funkcji f i g, gdy:

a) $f(x)=2^{x+4}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$, b) $f(x)=3^{x-3}$ i $g(x)=3\cdot\frac{1}{3^x}$.

1.32. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g, a następnie odczytaj argument x, dla którego obie funkcje mają tę samą wartość, gdy:

a) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$ i $g(x)=2^{-x}$, b) $f(x)=8^{x+2}$ i $g(x)=4^{x+3}$.

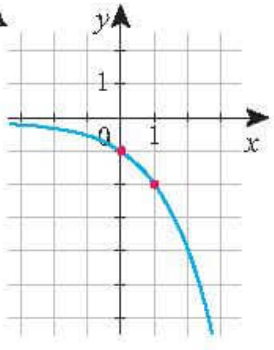
1.33. Oblicz argument x, dla którego funkcje f i g przyjmują tę samą wartość, gdy:

a) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ i $g(x)=4^{x+1}$, b) $f(x)=16^{x+5}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$.

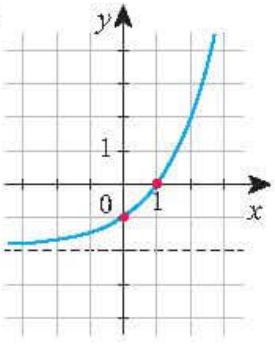
1.34. Do każdego wzoru oznaczonego cyfrą od **1** do **4** dobierz wykres funkcji oznaczony literą A, B, C lub D, który otrzymano, przekształcając wykres funkcji o równaniu $y=2^x$.

1 $y=2^{-x}$, **2** $y=2^{x+1}$, **3** $y=2^x-2$, **4** $y=-2^x$.

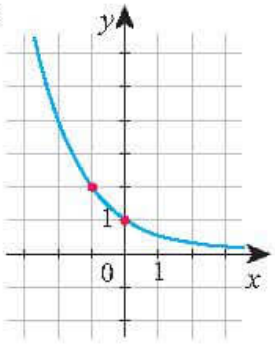
A



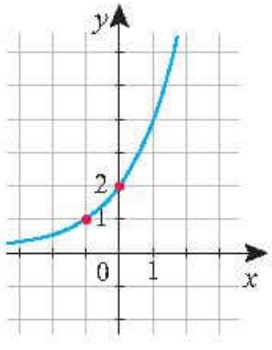
B



C



D



1.35. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, a wykres funkcji g powstaje z przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $\vec{u}=[-1,0]$, **b)** $\vec{u}=[2,-3]$, **c)** $\vec{u}=[-1,-2]$.

1.36. Wykres funkcji g powstaje z przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}=[p,q]$. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, gdy:

a) $g(x)=2^x$ i $f(x)=2^{x-1}+3$, **b)** $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}+1$ i $f(x)=2^{-x}$,

c) $g(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3}-4$ i $f(x)=2{,}5^{-x+1}-2$, **d)** $g(x)=1{,}5^{x-3}+1$ i $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x-3}+1$

1.37. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Naszkicuj wykres funkcji:

a) g, gdy $g(x)=f(x-3)-3$, **b)** h, gdy $h(x)=|f(x-3)-3|$,

c) p, gdy $p(x)=|f(x-3)|-3$.

1.38. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=a^x$. Naszkicuj wykres funkcji g, gdy:

a) $g(x)=4\cdot f(x)$ i $a=\frac{1}{2}$, **b)** $g(x)=16\cdot f(x)$ i $a=4$,

c) $g(x)=f(2x)$ i $a=2$, **d)** $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$ i $a=4$,

e) $g(x)=2\cdot f(x)$ i $a=2$, **f)** $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$ i $a=2$.

1.39. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2^x$. Wykres funkcji f przekształcono symetrycznie względem jednej z osi układu współrzędnych, a następnie przesunięto o wektor $\vec{u}$ i otrzymano wykres funkcji g. Podaj współrzędne wektora $\vec{u}$, gdy:

a) $g(x)=2^{-x-1}$, **b)** $g(x)=-2^{x+1}$, **c)** $g(x)=2^{5-x}$,

d) $g(x)=-2^x-1$, **e)** $g(x)=2^{1-x}-1$, **f)** $g(x)=-2^{x+3}+4$.

1.40. Naszkicuj wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x)=2^{|x|}$, **b)** $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$, **c)** $f(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

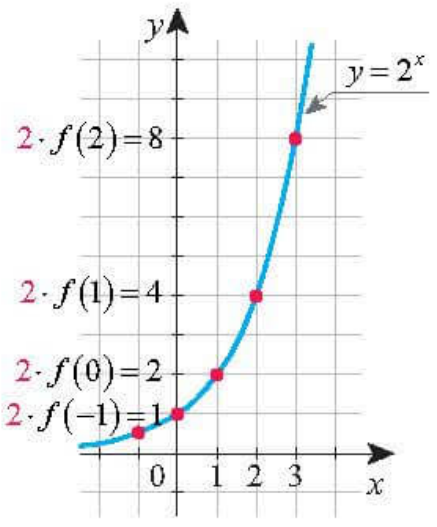
Funkcja wykładnicza w zastosowaniach

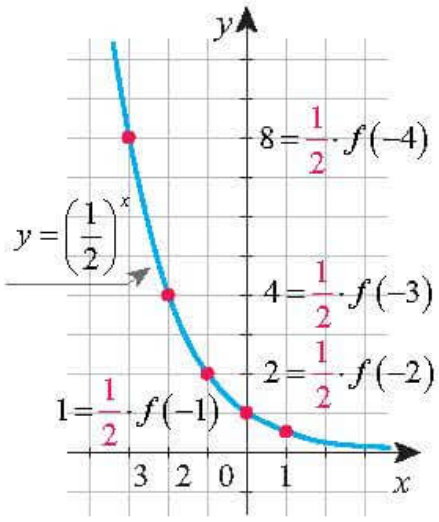
Obserwując określone zjawisko zachodzące w przyrodzie lub społeczeństwie, bada się jego proces zmian w jednostkach czasu (np. co sekundę, co miesiąc, co rok itp.) i szuka się jakiejś prawidłowości, którą można określić wzorem matematycznym.

Zauważono, iż wiele procesów zmienia się wykładniczo. Z własności funkcji wykładniczej wynika, że jeśli:

$$f(x)=a^x, \text{ to } \frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{a^{x+1}}{a^x}=a, \text{ więc } \boldsymbol{f(x+1)=a\cdot f(x)}.$$

Zatem funkcja wykładnicza ma tę szczególną własność, że na równych odcinkach rośnie (maleje) tyle samo razy.





$$\ldots \xrightarrow{\cdot 2} f(-1) \xrightarrow{\cdot 2} f(0) \xrightarrow{\cdot 2} f(1) \xrightarrow{\cdot 2} f(2) \ldots$$

$$\ldots f(-4) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} f(-3) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} f(-2) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} f(-1) \ldots$$

Uwaga

Zmiany są wykładnicze, gdy w każdej jednostce czasu wartość zmiany rośnie (maleje) tyle samo razy.

Wykładniczy proces zmiany opisuje funkcja określona wzorem:

$$\boldsymbol{y=f(t)=y_0\cdot a^t}$$

t – *czas, jaki upłynął od momentu rozpoczęcia obserwacji, czyli czasu* $t_0=0$

a – *stała wielokrotność zmiany, więc* $a^{t_0}=1$

y_0 – *wartość początkowa obserwowanego zjawiska*

Jeżeli $y = f(t)$, to $f(t) = f(t_0) \cdot a^t$, gdzie $f(t_0)$ jest wartością początkową obserwowanego zjawiska, a t_0 jest momentem rozpoczęcia obserwacji. Obserwując proces zmiany zjawiska w czasie, staramy się ustalić wartość a we wzorze $f(t) = f(t_0) \cdot a^t$.

Uwaga

Jeżeli w ciągu określonej jednostki czasu t nastąpiło:

- **podwojenie wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a = 2}$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot 2^t,$$

- **zmniejszenie o połowę wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t,$$

- **zmniejszenie o jedną trzecią wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}}$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t,$$

- **zwiększenie o 6% wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06}$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot (1{,}06)^t,$$

- **zmniejszenie o 10% wartości początkowej** $f(t_0)$, to $\boldsymbol{a = 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9}$,

$$f(t) = f(t_0) \cdot (0{,}9)^t.$$

Ćwiczenie 22. Ustal wartość a i napisz wzór określający zmianę w postaci $f(t) = f(t_0) \cdot a^t$, jeżeli w ciągu określonej jednostki czasu t nastąpiło:

a) potrojenie wartości początkowej $f(t_0)$,

b) trzykrotne zmniejszenie wartości początkowej $f(t_0)$,

c) zwiększenie o 75% wartości początkowej $f(t_0)$,

d) zmniejszenie o 3% wartości początkowej $f(t_0)$.

Ćwiczenie 23. Podaj wartość początkową obserwowanego zjawiska i określ, jaka następuje zmiana w jednostce czasu, jeżeli zmianę tę opisuje wzór:

a) $f(t) = 20 \cdot (0{,}2)^t$, **b)** $f(t) = 3000 \cdot (1{,}04)^t$,

c) $f(t) = 1000 \cdot (0{,}92)^t$, **d)** $f(t) = 1200 \cdot 4^t$.

Przykład 12. Zaobserwowano, że liczba studentów pewnej uczelni w ciągu ostatnich dziesięciu lat powiększała się co roku o 5%. Zakładając, że proces ten w następnych latach nie ulegnie zmianie oraz że obecnie na uczelni studiuje 3000 osób:

a) napisz wzór wyrażający zależność liczby studentów uczelni od liczonego w latach czasu t,

b) oblicz, ilu studentów może być na uczelni za 10 lat.

Rozwiązanie

a) Zauważmy, że liczba studentów uczelni po upływie:

- roku to $3000+0,05\cdot 3000=3000(1+0,05)=$
$=3000\cdot 1,05,$
- dwóch lat to $3000\cdot 1,05+0,05\cdot 3000\cdot 1,05=3000\cdot 1,05(1+0,05)=$
$=3000\cdot(1,05)^2.$

Wzór określający liczbę studentów uczelni ma postać $f(t)=3000(1,05)^t$.

b) $f(10)=3000\cdot(1,05)^{10}$

$(1,05)^{10}\approx 1,628895$, więc $f(10)\approx 4887$.

Odp.: **a)** $f(t)=3000(1,05)^t$, **b)** 4887.

Ćwiczenie 24. Zaobserwowano, że liczba ryb w stawie w ciągu 5 lat powiększała się co roku o 2%. Zakładając, że proces ten w następnych latach nie ulegnie zmianie oraz że obecnie w stawie jest 1200 ryb:

a) napisz wzór wyrażający zależność liczby ryb w stawie od liczonego w latach czasu t,

b) oblicz, ile ryb może być w tym stawie za 5 lat.

Przykład 13. Populacja pewnego małego miasteczka wzrasta wykładniczo. Planiści potrzebują modelu pozwalającego przewidzieć liczbę mieszkańców tego miasteczka w dowolnym momencie w przyszłości. Wiadomo, że w 2016 roku miasteczko liczyło 10 000 mieszkańców, a dwa lata później 10 201.

a) Zbuduj model matematyczny opisujący wzrost liczby mieszkańców miasteczka.

b) Sprawdź poprawność zbudowanego modelu, korzystając z faktu, że w 2020 roku miasteczko liczyło 10 406 mieszkańców.

c) Oblicz, ilu mieszkańców może być w 2026 roku w tym miasteczku.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że $f(t)=y_0\cdot a^t$ jest wzorem funkcji opisującej zmianę mierzoną w latach t liczby mieszkańców miasteczka od roku 2016.

Zatem $f(t)=10\,000\,a^t$, gdzie $a>0$.

a) Obliczamy wartość a z warunku

$f(2)=10\,201$, więc $10\,000\,a^2=10\,201$

$a^2=1{,}0201.$

$a=1{,}01.$

$a=2$

$a=\sqrt{1{,}0201}$

b) Sprawdzamy, czy spełniona jest równość $f(4)=10\,406$.

$(1{,}01)^4=1{,}04060401$, więc

$f(4)=10\,000\cdot 1{,}04060401=10\,406{,}0401$, czyli $f(4)\approx 10\,406$.

c) $f(10)=10\,000\cdot(1{,}01)^{10}$, czyli $f(10)\approx 10\,000\cdot 1{,}10462212539$, więc $f(10)\approx 11\,046$.

Odp.: **a)** $f(t)=10\,000\cdot(1{,}01)^t$, **b)** model jest poprawny, **c)** 11 046.

Ćwiczenie 25. Populacja pewnego miasteczka wzrasta wykładniczo. Wiadomo, że w 2013 roku miasteczko liczyło 12 500 mieszkańców, a dwa lata później 13 520.

a) Zbuduj model matematyczny opisujący wzrost liczby mieszkańców miasteczka.

b) Oblicz, ilu mieszkańców może być w 2023 roku w tym miasteczku.

Uwaga

Zmianę wykładniczą zjawiska, o wartości początkowej y_0, która następuje ze stałą wielokrotnością a razy w każdym z okresów r czasu t, można opisać wzorem

$y=y_0\cdot a^{\frac{t}{r}}$ lub $f(t)=f(t_0)\cdot a^{\frac{t}{r}}$.

Przykłady wzorów stosowanych w różnych dziedzinach wiedzy.

- $m(t)=m_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie:
  - $m(t)$ – masa pierwiastka promieniotwórczego po upływie czasu t,
  - T – okres połowicznego rozpadu pierwiastka mierzony w tych samych jednostkach co czas t,
  - m_0 – masa początkowa pierwiastka promieniotwórczego.

- $N(t)=N_0\cdot e^{k\cdot t}$, gdzie:
  - N – liczba osobników populacji po upływie t lat,
  - N_0 – początkowa liczba osobników populacji,
  - k – stała, charakteryzująca daną populację,
  - $e=2{,}718281828\ldots$.

Przykład 14. Każdy pierwiastek radioaktywny rozpada się z właściwą sobie prędkością. Czas, w którym rozpadnie się połowa atomów, nazywamy okresem połowicznego rozpadu tego pierwiastka. Wiadomo, że pewna odmiana bizmutu ^{214}Bi ma okres połowicznego rozpadu równy 20 minutom. Próbka radioaktywnego bizmutu, którą obserwujesz, waży 1024 gramy.

a) Zbuduj model matematyczny opisujący zmianę ilości radioaktywnego bizmutu w czasie.

b) Po ilu godzinach obserwacji pozostanie tylko 1 gram radioaktywnego bizmutu?

Rozwiązanie

a) Przyjmujemy za jednostkę czasu t godzinę. 20 minut to $\frac{1}{3}$ godziny, więc w ciągu jednej godziny nastąpią 3 rozpady połowiczne atomów bizmutu. Zatem masę m bizmutu po upływie t godzin można określić wzorem

$$m(t)=1024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t:\frac{1}{3}}, \text{ czyli}$$

$m_0=1024,\ a=\frac{1}{2}$

$$m(t)=1024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3t}.$$

b) $m(t)=1$, czyli $\quad 1024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3t}=1 \quad /:1024$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3t}=\frac{1}{1024}$$

$1024=2^{10}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3t}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$3t=10$$

$$t=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}.$$

Odp.: **a)** $m(t)=1024\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, **b)** po 3 godzinach i 20 minutach.

Ćwiczenie 26. Okres połowicznego rozpadu jodu $^{131}\mathrm{J}$ jest równy 8 dniom. Wiedząc, że pewna próbka zawiera 120 g tego jodu, oblicz:

a) masę $^{131}\mathrm{J}$ po upływie 24 dni,

b) liczbę dni, po których masa $^{131}\mathrm{J}$ będzie równa 3,75 g.

W rozważaniach teoretycznych i praktycznych zastosowaniach matematyki wyższej bardzo dużą rolę odgrywają logarytmy, których podstawą jest liczba e*), czyli logarytmy naturalne. Symbolem takiego logarytmu jest **ln**, tzn. $\ln x = \log_e x$.

Przykład 15. Na pustynną wyspę wpuszczono króliki, których liczebność N populacji wzrasta w czasie t miesięcy zgodnie z zależnością $N(t) = 20 \cdot e^{0,1t}$. Oblicz (podaj):

a) liczbę królików wypuszczonych na wyspę,

b) liczbę królików po upływie 20 miesięcy,

c) liczbę miesięcy potrzebną na podwojenie się populacji królików.

W obliczeniach przyjmij $e \approx 2,72$, $e^2 \approx 7,4$, $\ln 2 \approx 0,7$.

Rozwiązanie

a) Z zależności $N(t) = 20 \cdot e^{0,1t}$ odczytujemy, że na wyspę wypuszczono 20 królików.

b) $N(20) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot 20} = 20 \cdot e^2$, skąd

$N(20) = 148$.

c) $N(t) = 2 \cdot 20$, więc

$20 \cdot e^{0,1t} = 40 \quad / : 20$

$e^{0,1t} = 2$

$0,1t = \log_e 2 \quad / \cdot 10$

$t = 10 \cdot \ln 2$

$t = 10 \cdot 0,7$, skąd $t = 7$.

$e^a = b$, *więc* $a = \log_e b$

$\log_e 2 = \ln 2$

Odp.: **a)** 20 królików, **b)** 148 królików, **c)** 7 miesięcy.

Ćwiczenie 27. Wzrost populacji P (w milionach osób) pewnego kraju od 2010 roku określa zależność $P(t) = 18 \cdot e^{0,05t}$. Oblicz (podaj):

a) liczbę ludności (w milionach) tego kraju w 2010 roku,

b) prognozowaną liczbę ludności (w milionach) tego kraju w 2030 roku.

W obliczeniach przyjmij $e \approx 2,7$.

*) e – stała Nepera, $e = 2,718281828...$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

22. Zauważ, że $t_0 = 0$. **a)** $f(t) = f(t_0) \cdot 3^t$, **b)** $f(t) = f(t_0) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^t$, **c)** $f(t) = f(t_0) \cdot (1{,}75)^t$, **d)** $f(t) = f(t_0) \cdot (0{,}97)^t$. **23. a)** 20 i pięciokrotne zmniejszenie, **b)** 3000 i zwiększenie o 4%, **c)** 1000 i zmniejszenie o 8%, **d)** 1200 i czterokrotne zwiększenie.

24. a) $f(t) = 1200 \cdot (1{,}02)^t$, **b)** około 1325 ryb. **25. a)** $f(t) = 12\,500 \cdot (1{,}04)^t$, **b)** około 18 503.

26. a) 15 g, **b)** 40 dni. **27. a)** 18 milionów, **b)** 48,6 milionów.

Zadania utrwalające

1.41. Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednie wielkości.

Nazwa towaru	Obecna cena	Wskaźnik rocznego wzrostu ceny	Cena po t latach
prześcieradło	29 zł	2%	■
samochód	32 000 zł	10%	■
żyrandol	■	■	$270 \cdot (1{,}07)^t$

1.42. Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednie wielkości.

Obecna wielkość populacji	Czas podwojenia populacji	Wartość populacji po t latach
1 000	10 lat	■
1 000 000	25 lat	■
■	■	$250\,000 \cdot 2^{0{,}01t}$

1.43. Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę i w miejsce ■ wpisz odpowiednie wielkości.

Pierwiastek promieniotwórczy	Czas połowicznego rozpadu	Obecna ilość materiału radioaktywnego	Wielkość materiału radioaktywnego po czasie t
ołów: ^{210}Pb	■	■	$10 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{22}}$ lat
polon: ^{210}Po	■	■	$100 \cdot (0{,}5)^{\frac{t}{140}}$ dni
tal: ^{209}Tl	■	■	$500 \cdot (0{,}5)^{0{,}5t}$ minut

1.44. Na początku obserwacji kolonia bakterii liczyła 100 osobników. Bakterie te rozmnażają się przez podział komórki i liczebność ich populacji wzrasta wykładniczo w pierwszych 24 godzinach obserwacji. Wiedząc, że kolonia bakterii podwaja swoją liczebność w ciągu 30 minut, oblicz, ile bakterii będzie liczyła po upływie:

a) godziny, **b)** 5 godzin, **c)** doby.

1.45. Liczba bakterii w pewnej kolonii powiększa się co godzinę o 25%. Kolonia ta o godzinie 15^{00} liczyła 1 000 000 komórek.

a) Napisz wzór opisujący liczbę bakterii kolonii w zależności od czasu t.

b) Oblicz, ile bakterii będzie liczyła kolonia o godzinie 18^{00}.

1.46. Liczebność populacji żuków wzrasta w ciągu miesiąca o 5%. Wiedząc, że na początku było 10 000 żuków, oblicz:

a) liczebność populacji żuków po 3 miesiącach,

b) liczbę miesięcy, po upływie których będzie 11 025 żuków.

1.47. Wartość samochodu maleje w taki sposób, że kiedy ma on t lat, jego wartość W określona jest wzorem $W(t)=30\,000\cdot(0{,}9)^t$.

a) Podaj wartość początkową samochodu.

b) O ile procent rocznie maleje cena tego samochodu?

c) Podaj cenę tego samochodu po upływie dwóch lat.

d) Po ilu latach samochód ten będzie wart 19 683 zł?

1.48. Podgrzewany garnek z zupą gospodarz zdejmuje z palnika i odstawia. Temperatura T garnka, wyrażona w stopniach Celsjusza, jest w procesie stygnięcia opisana wzorem $T(t)=100\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{10}}$, gdzie czas t mierzony jest w minutach.

a) Podaj temperaturę garnka zaraz po zdjęciu z palnika.

b) Oblicz temperaturę garnka po upływie 10 minut.

c) Czy po 30 minutach można podnieść garnek gołymi rękoma, nie dotykając uchwytów?

1.49. Skala chromatyczna to skala złożona z 12 dźwięków w obrębie oktawy, oddalonych od siebie o półton. Skala ta na fortepianie może być grana białymi i czarnymi klawiszami od A do A w kolejności strony od lewej do prawej.



220 Hz 440 Hz

a) Czy dźwięki wydawane przez sąsiednie klawisze A i B różnią się o cały ton czy o półton?

b) Dźwięk wydawany przez pierwszy z lewej strony klawisz A ma częstotliwość 220 herców (Hz), a następny klawisz A ma częstotliwość dwa razy większą (440 Hz). Oblicz, jaką częstotliwość ma dźwięk wydawany przez klawisz C.

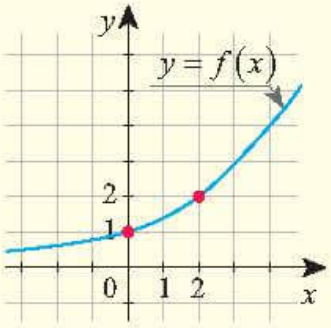
Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartością wyrażenia $\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\sqrt[3]{54}}\right]^{\sqrt[3]{4}}$ jest liczba:

A. 2, **B.** 4, **C.** 6, **D.** 8.

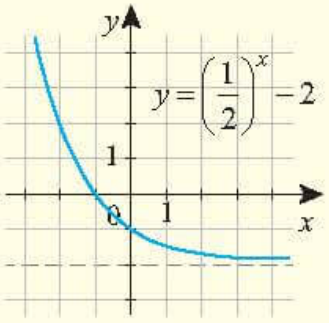
2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x)=a^x$.
Wynika z tego, że:

A. $a=\sqrt{2}$, **B.** $a=2$, **C.** $a=\frac{1}{2}$, **D.** $a=\sqrt{3}$.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*



Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$. Prawdą jest, że:

A. funkcja f nie ma miejsca zerowego,

B. $Y_f=(-2;+\infty)$,

C. do wykresu funkcji f nie należy punkt $(-1,0)$,

D. funkcja f jest funkcją malejącą.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Do wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x)=a^x$ należy punkt $A=\left(-1,\frac{2}{3}\right)$. Punkt B leży na tym samym wykresie, gdy:

A. $B=\left(2,\frac{5}{2}\right)$, **B.** $B=\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, **C.** $B=\left(-2,\frac{4}{9}\right)$, **D.** $B=\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

5. Funkcja wykładnicza f określona jest wzorem $f(x)=a^x$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli $a=5$, to $f(x)=4$, gdy $x=\log_5 4$.	P	F
Jeżeli $a=3$, to $f(x)=\frac{1}{27}$, gdy $x=-3$.	P	F
$a^5>a^4$, gdy $a>1$.	P	F
$a^3>a^7$, gdy $a>1$.	P	F

6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Jeżeli $g(x)=2^{x+3}$ i $f(x)=2^x$, to wykres funkcji g można otrzymać, przesuwając wykres funkcji f wzdłuż osi x o 3 jednostki w prawo.	P	F
Jeżeli $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x)=2^x$, to wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi y.	P	F
Jeżeli $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ i $g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, to wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi x.	P	F

7. Funkcja g określona jest wzorem $g(x)=\frac{64^{\frac{x}{3}}}{4^x}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$. Czy funkcja g jest funkcją wykładniczą?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$g(x)=\frac{64^{\frac{x}{3}}}{4^x}=\frac{\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^x}{4^x}=\left(\frac{\sqrt[3]{64}}{4}\right)^x$, zatem funkcja g nie jest funkcją wykładniczą.
N	**Nie,**		**B.**	$g(x)=\frac{64^{\frac{x}{3}}}{4^x}=\frac{\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^x}{4^x}=\left(\frac{\sqrt[3]{64}}{4}\right)^x$, zatem funkcja g jest funkcją wykładniczą.

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm i jego własności

Przypomnijmy

liczba logarytmowana: $b > 0$

$$\log_a b = c$$

logarytm: $c \in R$

podstawa logarytmu: $a > 0$ i $a \neq 1$

$$c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$$

- Logarytm przy podstawie 10 nazywany **logarytmem dziesiętnym**, zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$ lub $\lg b$.
- Logarytm przy podstawie e (gdzie $e = 2,718281828...$) nazywamy **logarytmem naturalnym**, zamiast $\log_e b$ piszemy $\ln b$.

Bezpośrednio z definicji logarytmu i własności potęg, przeprowadzając dowód nie wprost, można udowodnić, że $\log_2 5$ jest liczbą niewymierną należącą do przedziału $(2;3)$.

Dowód nie wprost

Zakładamy, że $\log_2 5$ jest liczbą wymierną, czyli że

$$\log_2 5 = \frac{m}{n}, \text{ gdzie } m \in N^+,\ n \in N^+ \setminus \{1\} \text{ i } \mathrm{NWD}(m,n) = 1.$$

$\frac{m}{n}$ – *ułamek nieskracalny.*

$$\log_2 5 = \frac{m}{n}, \text{ więc } 5 = 2^{\frac{m}{n}}$$

Korzystamy z definicji logarytmu.

$$5^n = \left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n$$

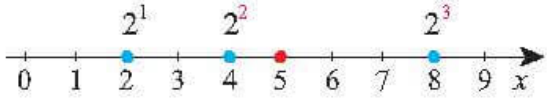
Obustronnie podnosimy równość do potęgi n.

$$5^n = 2^m.$$

$$2^2 < 5 < 2^3$$

$$\log_2 2^2 < \log_2 5 < \log_2 2^3$$

$$2 < \log_2 5 < 3$$



Równość $5^n = 2^m$ jest fałszywa, bo każda dodatnia naturalna potęga liczby 5 jest liczbą nieparzystą, a potęga liczby 2 – liczbą parzystą.

Liczba $\log_2 5$ należy do przedziału $(2;3)$ i nie jest liczbą wymierną. ***c.k.d.***

Ćwiczenie 1. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz:

a) $\log_2 \frac{1}{8}$, **b)** $\log 100$, **c)** $\log_{\frac{1}{3}} 9$, **d)** $\log_{\sqrt{2}} 4$, **e)** $\ln e$.

Ćwiczenie 2. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz x, gdy:

a) $\log_x 8 = 2$, **b)** $\log_x \frac{1}{2} = -1$, **c)** $\log_x 16 = 2$,

d) $\log_x 5 = -1$, **e)** $\log_x 1000 = 3$.

Ćwiczenie 3. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz x, gdy:

a) $\log_2 x = -2$, **b)** $\log_3 x = 3$, **c)** $\log_5 x = -2$,

d) $\log_3 x = 0$, **e)** $\ln x = 1$.

Liczbą logarytmowaną może być również wyrażenie zawierające logarytm. Sposób obliczania wartości takiego wyrażenia pokażemy na przykładach.

Przykład 1. Oblicz: **a)** $\log_{\frac{1}{2}} \left[\log_2 (\log 10\,000)\right]$, **b)** x, gdy $2 \cdot \log_2 (1 + \log_3 x) = 4$.

Rozwiązanie

a) $\log_{\frac{1}{2}} \left[\log_2 \underbrace{(\log 10\,000)}_{4}\right] = \log_{\frac{1}{2}} \underbrace{[\log_2 4]}_{2} = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1.$

obliczamy w pierwszej kolejności — *obliczamy wartość*

b) $2 \cdot \log_2 (1 + \log_3 x) = 4 \quad / : 2$

$\log_2 \underbrace{(1 + \log_3 x)}_{\text{liczba logarytmowana}} = 2$

$1 + \log_3 x = 2^2$ *Korzystamy z definicji logarytmu.*

$\log_3 x = 3$

$x = 27.$

Odp.: **a)** -1, **b)** $x = 27$.

Ćwiczenie 4. Oblicz:

a) $\log_6 \left[5 + \log_5 (\log_3 243)\right]$, **b)** x, gdy $\log_4 \left\{2 \log_3 \left[1 + \log_2 (1 + \log_2 x)\right]\right\} = \frac{1}{2}$.

Przypomnijmy

W klasie pierwszej poznaliście własności logarytmu wynikające bezpośrednio z definicji.

Jeżeli a jest liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1 oraz b liczbą rzeczywistą dodatnią, to:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^k = k$, gdzie $k \in R$
- $\log_{a^p} a^k = \frac{k}{p}$, gdzie $k \in R$, $p \in R$ i $p \neq 0$
- $a^{\log_a b} = b$

Ćwiczenie 5. Oblicz:

a) $\log_{2\sqrt{2}} 1$, **b)** $\log_{0,5} 2^{-1}$, **c)** $\log_7 343$, **d)** $6^{\log_6 3}$.

Przykład 2. Oblicz:

a) $16^{\log_2 3}$, **b)** $\log_{\frac{1}{8}} 16$.

Rozwiązanie

a) $16^{\log_2 3} = \left(2^4\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^4 = 3^4 = 81$. $a^{\log_a b} = b$

b) $\log_{\frac{1}{8}} 16 = \log_{2^{-3}} 2^4 = \frac{4}{-3}$. $\log_{a^p} a^k = \frac{k}{p}$

Odp.: **a)** 81, **b)** $-\frac{4}{3}$.

Ćwiczenie 6. Oblicz: **a)** $27^{\log_3 2}$, **b)** $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$, **c)** $\log_{\sqrt[3]{25}} 0{,}2$.

Przypomnijmy

Pojęcie logarytmu jest związane z pojęciem potęgi, więc z praw działań na potęgach wynikają prawa działań na logarytmach.

Jeśli a, b i c są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$, to:

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, *logarytm iloczynu*
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, *logarytm ilorazu*
- $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$, gdy $m \in R$. *logarytm potęgi*

Ćwiczenie 7. Oblicz:

a) $\log_6 18+\log_6 2$, **b)** $\log_3 108-\log_3 4$, **c)** $\dfrac{\log_4 125}{\log_4 5}$.

Przykład 3. Wykaż, że $16^{\log_2 \sqrt[4]{2}+\log_4 3}=18$.

Rozwiązanie

$\underbrace{16^{\log_2 \sqrt[4]{2}+\log_4 3}}_{L-\text{lewa strona}}=\underbrace{18}_{P-\text{prawa strona}}$

$L=16^{\log_2 \sqrt[4]{2}}\cdot 16^{\log_4 3}=$ $\quad a^{m+n}=a^m\cdot a^n$

$=\left(2^4\right)^{\log_2 \sqrt[4]{2}}\cdot\left(4^2\right)^{\log_4 3}=2^{4\cdot\log_2 \sqrt[4]{2}}\cdot 4^{2\cdot\log_4 3}=$ $\quad m\cdot\log_a b=\log_a b^m$

$=2^{\log_2\left(\sqrt[4]{2}\right)^4}\cdot 4^{\log_4 3^2}=$

$=\left(\sqrt[4]{2}\right)^4\cdot 3^2=$

$=2\cdot 9=18$. Zatem $L=P$.

Ćwiczenie 8. Wykaż, że $4^{\log_2 3+\log_4 \frac{5}{9}}=5$.

Przypomnijmy

W klasie pierwszej poznaliście twierdzenie o zamianie podstaw logarytmu, które pozwala zamienić logarytm o dowolnej podstawie np. na iloraz logarytmów dziesiętnych, których wartości łatwo jest obliczyć przy pomocy kalkulatora.

(zmiana podstawy logarytmu) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$, $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Przykład 4. Porównaj liczby a i b, gdy $a=\log_4\sqrt{5}\cdot\log_{25}8$ i $b=\log 2\cdot\log 50+\log^2 5$.

Rozwiązanie

$a=\log_4\sqrt{5}\cdot\log_{25}8=\dfrac{\log_2\sqrt{5}}{\log_2 4}\cdot\dfrac{\log_2 8}{\log_2 25}=$ $\quad \log_a b=\dfrac{\log_2 b}{\log_2 a}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\log_2 5}{2}\cdot\dfrac{3}{2\cdot\log_2 5}=\dfrac{3}{8}$, czyli $a=\dfrac{3}{8}$. $\quad \log_a b^k=k\cdot\log_a b$, $\log_a a^k=k$

$$b=\log 2\cdot\log 50+\log^2 5=\log 2\cdot\log(2\cdot 25)+\log^2 5= \qquad \log(a\cdot b)=\log a+\log b$$
$$=\log 2\cdot(\log 2+\log 25)+\log^2 5=$$
$$=\log 2\cdot(\log 2+2\log 5)+\log^2 5= \qquad \log 5^2=2\log 5$$
$$=\log^2 2+2\cdot\log 2\cdot\log 5+\log^2 5= \qquad a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$=(\log 2+\log 5)^2=(\log 10)^2=1, \qquad \log a+\log b=\log(a\cdot b)$$

czyli $b=1$.

Odp.: $a<b$.

Ćwiczenie 9. Porównaj liczby a i b, gdy

$a=\log_3 5\cdot\log_5 81$ i $b=(\log_3 36)^2-\log_3 16\cdot\log_3 18$.

Przykład 5. Liczbę $\log_6 16$ wyraź w zależności od a, gdy $a=\log_{12} 27$.

Rozwiązanie

Przedstawiamy liczby $\log_{12} 27$ i $\log_6 16$ w zależności od logarytmu o podstawie 3 albo 2.

$$a=\log_{12} 27=\frac{\log_3 27}{\log_3 12}= \qquad \log_6 16=\frac{\log_3 16}{\log_3 6}= \qquad \log_a b=\frac{\log_3 b}{\log_3 a}$$
$$=\frac{3}{\log_3 4+\log_3 3}= \qquad =\frac{4\cdot\log_3 2}{\log_3 2+\log_3 3}= \qquad \log_a a^k=k$$
$$=\frac{3}{2\log_3 2+1}, \text{ czyli} \qquad =\frac{4\log_3 2}{\log_3 2+1}, \text{ czyli} \qquad \log(a\cdot b)=\log a+\log b$$
$$a=\frac{3}{2\log_3 2+1}. \qquad \log_6 16=\frac{4\log_3 2}{\log_3 2+1}.$$

Z równości $a=\frac{3}{2\log_3 2+1}$ wyznaczamy $\log_3 2$ i podstawiamy do wyrażenia $\frac{4\log_3 2}{\log_3 2+1}$.

$$a=\frac{3}{2\log_3 2+1}, \text{ więc } \log_3 2=\frac{3-a}{2a}.$$

Zatem $\log_6 16=\dfrac{4\cdot\frac{3-a}{2a}}{\frac{3-a}{2a}+1}=\dfrac{4(3-a)}{2a}\cdot\dfrac{2a}{3+a}=\dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

Odp.: $\log_6 16=\dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

Ćwiczenie 10. Liczbę $\log_6 16$ wyraź w zależności od a, gdy $a=\log_{12} 2$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) -3, b) -2, c) 2, d) 4, e) 1. 2. a) $x=2\sqrt{2}$, b) $x=2$, c) $x=4$, d) $x=\frac{1}{5}$, e) $x=10$.
3. a) $x=\frac{1}{4}$, b) $x=27$, c) $x=\frac{1}{25}$, d) $x=1$, e) $x=e$. 4. a) 1, b) $x=8$. 5. a) 0, b) 1, c) 3, d) 3.
6. a) 8, b) 3, c) $-\frac{3}{2}$. 7. a) 2, b) 3, c) 3. 9. $a=b$. 10. $\log_6 16-\frac{4a}{1-a}$.

Zadania utrwalające

2.1. Oblicz:

a) $\log_2 0{,}125$, b) $\log_3 15\cdot\log_{15}243$, c) $\log_{3\sqrt{3}}\left(9\sqrt{3}\right)$,

d) $\log_{625}125$, e) $\log_8 2+\log_8 16$, f) $\frac{\log 18+\log 8}{\log 2+\log 6}$.

2.2. Oblicz:

a) $3^{\log_3 5}\cdot 5^{\log_5 3}$, b) $10^{1+\log 3}$, c) $27^{\log_3 2-\frac{1}{3}}$, d) $2^{5-\frac{1}{3}\log_2 27}$.

2.3. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz x, gdy:

a) $\log_{\frac{2}{3}}\frac{81}{16}=x$, b) $\log_4\left(8\sqrt[4]{2}\right)=x$, c) $\log_{\frac{1}{3}}x=-\frac{1}{2}$,

d) $\log_{2\sqrt{2}}x=-3$, e) $\log_x 2=\frac{1}{3}$, f) $\log_x 64=-3$.

2.4. Skorzystaj z definicji logarytmu i oblicz x, gdy:

a) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\log_5 x\right)=0$, b) $\log_3\left(7+\log_5 x\right)=2$,

c) $\log_5\left[3+\log_4\left(\log_2 x+10\right)\right]=1$, d) $\log_7\left[\log_4\left(\log_3^2 x\right)\right]=0$.

2.5. Przedstaw w postaci jednego logarytmu wyrażenie:

a) $3+\log_3 5$, b) $\log_{0,5}5-1$, c) $1+\log_2 3+\log_4 5$.

2.6. Oblicz x, gdy:

a) $\log x=3\log 2$, b) $\log x=\log_{\sqrt{2}}10+\log_{\sqrt{2}}5-\log_{\sqrt{2}}25$,

c) $\log x=\log_{0,1}4+\log_{0,1}10+\log_{0,1}25$.

2.7. Wiedząc, że $a=\log 2$, wyraź za pomocą a liczbę:

a) $\log 20$, b) $\log 5$, c) $\log 80$, d) $\log\frac{5}{4}$.

2.8. Wyznacz liczby całkowite m i n takie, że $n-m=1$, będące końcami przedziału $(m; n)$, do którego należy liczba:

a) $\log_7 2$, **b)** $\log_5 15$, **c)** $\log_7 120$, **d)** $\log_3 \frac{2}{7}$, **e)** $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5}$.

2.9. D Wykaż, że:

a) $8\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -4$, **b)** $3^{\log_9 16} = 4$, **c)** $\log_2 5 + \log_4 18 = \log_4 450$.

2.10. Wiedząc, że $\log_2 3 = a$ i $\log_2 5 = b$, wyraź w zależności od a i b liczbę:

a) $\log_2 45$, **b)** $\log_2 \frac{3}{25}$, **c)** $\log_8 15$, **d)** $\log_{75} 2$.

2.11. Oblicz:

a) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$,

b) $\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 3^\circ + \log \operatorname{tg} 4^\circ + \ldots + \log \operatorname{tg} 88^\circ + \log \operatorname{tg} 89^\circ$.

2.12. Oceń, czy prawdziwa jest nierówność:

a) $\frac{\log_5 3}{\log_3 5} < 1$, **b)** $\frac{\log_7 12}{\log_{12} 7} < 1$, **c)** $\log_3 2 \cdot \log_4 5 > \log_2 3 \cdot \log_5 4$.

Funkcja logarytmiczna i jej własności

Definicja

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $x > 0$ oraz a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią różną od 1.

- $f(x) = \log_a x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}^+$ i $a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$.
- Wykresem funkcji logarytmicznej jest **krzywa logarytmiczna**.

Ćwiczenie 11. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \log_a x$. Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji f, gdy:

a) $a = 2$ i $P = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$, **b)** $a = 3$ i $P = \left(\frac{1}{9}, 2\right)$,

c) $a = \sqrt{2}$ i $P = (4, 4)$, **d)** $a = \frac{1}{3}$ i $P = (27, -3)$.

Ćwiczenie 12. Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_a x$ należy punkt P.

Oblicz a, gdy: **a)** $P = (4, 2)$, **b)** $P = \left(2, \frac{1}{2}\right)$, **c)** $P = (3, 1)$.

Przykład 6. Naszkicuj wykresy funkcji f i g określonych wzorami $f(x)=\log_2 x$ i $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$. Podaj ich dziedziny i zbiory wartości.

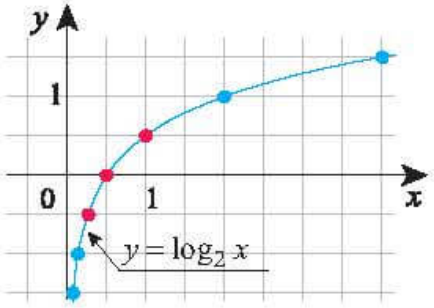
Rozwiązanie

Sporządzamy tabelę wartości funkcji f i g dla wybranych argumentów.

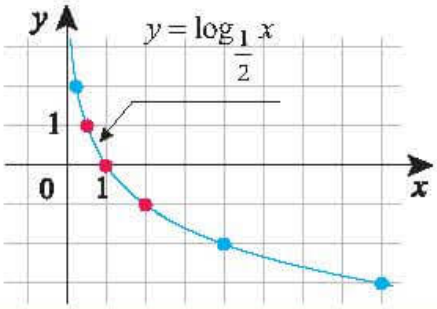
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)=\log_2 x$	−3	−2	−1	0	1	2	3

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	−1	−2	−3

Szkicujemy wykresy funkcji.



$D_f = R^+$,
$Y_f = R$



$D_g = R^+$,
$Y_g = R$

Ćwiczenie 13. Odczytaj z wykresu funkcji **1** $f(x)=\log_2 x$ **2** $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$:

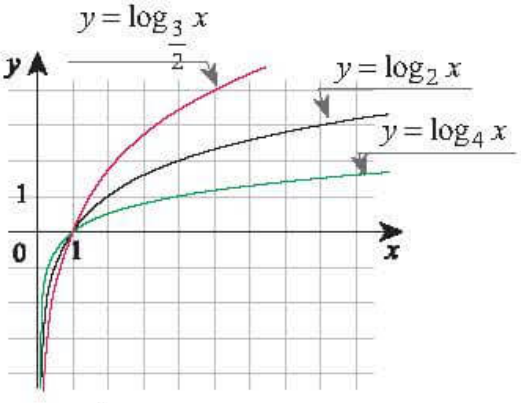
a) przedział, w którym funkcja rośnie (maleje), **b)** miejsce zerowe funkcji,

c) współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią y (o ile istnieją).

Uwaga

Aby naszkicować wykres funkcji logarytmicznej określonej wzorem $y=\log_a x$, zwykle będziemy zaznaczać punkty o współrzędnych: $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$.

Ćwiczenie 14. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji logarytmicznych: $f(x)=\log_{\frac{3}{2}} x$, $g(x)=\log_2 x$, $h(x)=\log_4 x$.

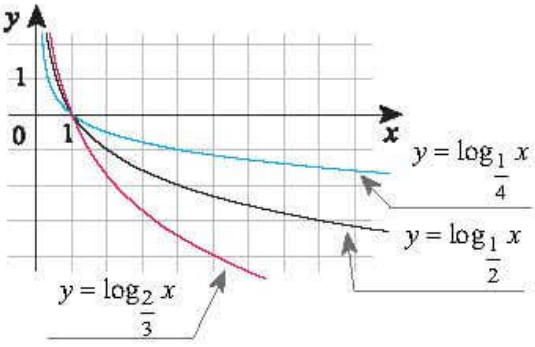


a) Podaj dla każdej funkcji f, g i h jej dziedzinę i zbiór wartości.

b) Czy funkcje f, g i h są rosnące czy malejące?

c) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nierówności: $\log_{\frac{3}{2}} x \geq \log_4 x$, $\log_2 x < \log_4 x$, $\log_2 x \geq \log_{\frac{3}{2}} x$.

Ćwiczenie 15. Na rysunku przedstawione są fragmenty wykresów funkcji logarytmicznych:
$f(x)=\log_{\frac{1}{4}} x,\ g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x,\ h(x)=\log_{\frac{2}{3}} x.$



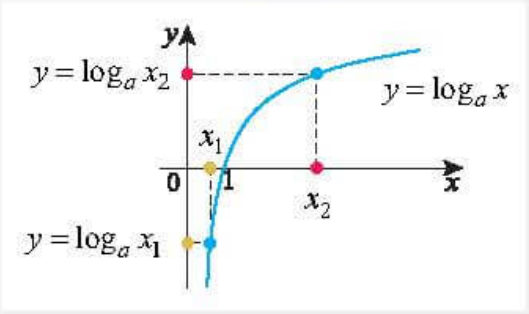
a) Podaj dla każdej funkcji f, g i h jej dziedzinę i zbiór wartości.

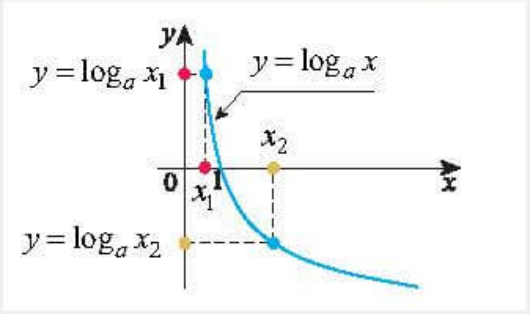
b) Czy funkcje f, g i h są rosnące czy malejące?

c) Określ, dla jakich wartości x spełnione są nierówności: $\log_{\frac{2}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{4}} x$, $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{2}{3}} x$, $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{4}} x$.

Uwaga

- Dziedziną funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x)=\log_a x$ jest zbiór liczby rzeczywistych dodatnich, czyli $D_f = \boldsymbol{R^+}$.
- Prosta o równaniu $x=0$ (oś y) jest asymptotą*) pionową wykresu funkcji logarytmicznej.
- Funkcja logarytmiczna jest:
  - rosnąca, gdy $\boldsymbol{a>1}$,
  - malejąca, gdy $\boldsymbol{0<a<1}$.





Z własności funkcji rosnącej wynika:
$\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 < x_2$,

Z własności funkcji malejącej wynika:
$\log_a x_1 > \log_a x_2 \iff x_1 < x_2$

- Wykres każdej funkcji logarytmicznej o równaniu $y=\log_a x$ przechodzi przez punkt $(1, 0)$.

Ćwiczenie 16. Spośród warunków ponumerowanych od **1** do **6** wskaż te, które są prawdziwe.

1 $\log_2 x > 0 \iff x > 1$,

2 $\log_{\frac{1}{4}} x < 0 \iff x > 1$,

3 $\log_{\frac{3}{2}} x > 0 \iff x > 1$,

4 $\log_{\frac{3}{5}} x < 0 \iff 0 < x < 1$,

5 $\log_2 x > 3 \iff x > 3^2$,

6 $\log_{\frac{1}{3}} x > 4 \iff 0 < x < \left(\frac{1}{3}\right)^4$.

*) Asymptota – prosta, do której wykres funkcji się zbliża i zbliżając się – nie przecina jej.

Ćwiczenie 17. Spośród wzorów funkcji: **1** $f(x)=\log_5 x$, **2** $f(x)=\log_{2\sqrt{2}} x$, **3** $f(x)=\log_{5^{-1}} x$, **4** $f(x)=\log_{(\sqrt{2}-1)} x$, **5** $f(x)=\log_{0{,}01^{-2}} x$ wybierz te, które określają funkcje malejące.

Przykład 7. Uporządkuj rosnąco liczby $\log_4 5$, $\log_2 5$, $\log_3 5$.

Rozwiązanie

$$\log_4 5=\frac{1}{\log_5 4},\quad \log_2 5=\frac{1}{\log_5 2},\quad \log_3 5=\frac{1}{\log_5 3}.$$

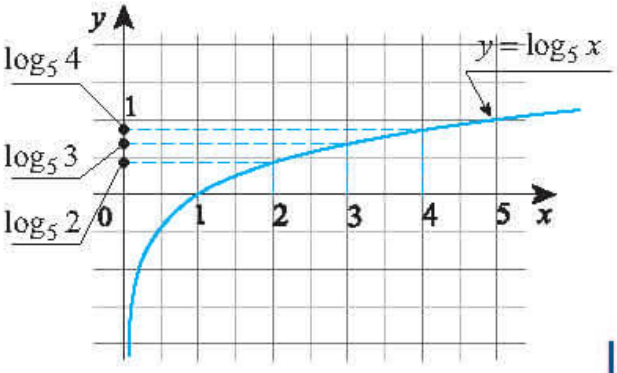
$\log_5 2<\log_5 3<\log_5 4$

(bo funkcja $y=\log_5 x$ jest rosnąca), więc

$$\frac{1}{\log_5 2}>\frac{1}{\log_5 3}>\frac{1}{\log_5 4}.$$

Zatem $\log_4 5<\log_3 5<\log_2 5$.

Odp.: $\log_4 5$, $\log_3 5$, $\log_2 5$.



Ćwiczenie 18. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $\log_3 4$, $\log_3 \frac{1}{4}$, $\log_3 \frac{1}{2}$, $\log_3 2$ **b)** $\log_4 3$, $\log_5 3$, $\log_6 3$, $\log_2 3$.

Przykład 8. Wyznacz dziedzinę funkcji f, gdy $f(x)=\log_{(x-1)}\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Rozwiązanie

Dziedziną D_f jest zbiór tych argumentów x, które spełniają układ warunków:

(liczba logarytmowana jest dodatnia)
(podstawa logarytmu jest liczbą dodatnią i różną od 1)

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}.$$

$\log_a b=c$ ($b>0$, $a>0$ i $a\neq 1$)

Odp.: $D_f=(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Ćwiczenie 19. Wyznacz dziedzinę funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\log_3(4-x)$, **b)** $f(x)=\log_{3(x-2)} 5$, **c)** $f(x)=\log_{(2x-1)} x$.

Ciekawostka

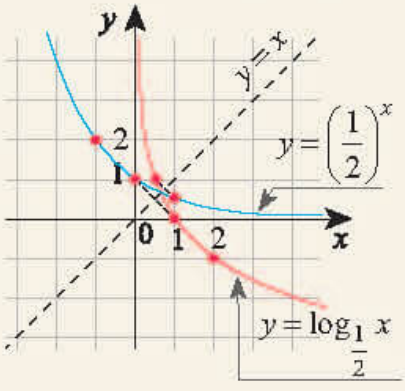
Przykład 9. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

a) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, **b)** $f(x)=2^x$ i $g(x)=\log_2 x$.

Rozwiązanie

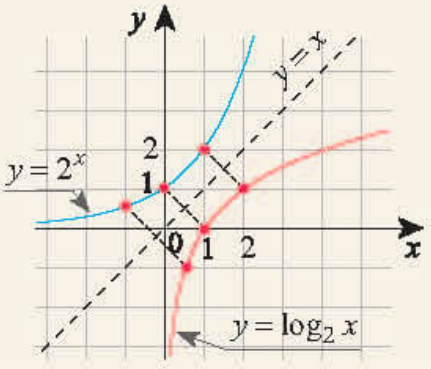
a) Wykres funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ przechodzi przez punkty: $(-1,2)$, $(0,1)$, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Wykres funkcji $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ przechodzi przez punkty: $(2,-1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$.



b) Wykres funkcji $f(x)=2^x$ przechodzi przez punkty: $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$, $(0,1)$, $(1,2)$.

Wykres funkcji $g(x)=\log_2 x$ przechodzi przez punkty: $\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $(1,0)$, $(2,1)$.



Uwaga

Wykresy funkcji wykładniczej f_1 i logarytmicznej f_2 o tych samych podstawach, czyli funkcji określonych wzorami $f_1(x)=a^x$ i $f_2(x)=\log_a x$, są symetryczne względem prostej o równaniu $y=x$.

Funkcje $f_1(x)=a^x$ i $f_2(x)=\log_a x$ nazywamy **funkcjami odwrotnymi**.

Ćwiczenie 20. Wzory funkcji wykładniczych oznaczone są cyframi 1, 2, 3 i 4, a wzory funkcji logarytmicznych literami A, B, C i D.

1 $f_1(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, **2** $f_2(x)=\frac{1}{2^x}$, **3** $f_3(x)=4^{-x}$, **4** $f_4(x)=5^x$,

A $g_1(x)=-\log_{\frac{1}{5}} x$, **B** $g_2(x)=\log_{\frac{1}{4}} x$, **C** $g_3(x)=-\log_{\frac{2}{3}} x$,

D $g_4(x)=-\log_2 x$. Dobierz w pary te wzory funkcji, których wykresy są symetryczne względem prostej o równaniu $y=x$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. **a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak, **d)** tak. **12.** **a)** $a=2$, **b)** $a=4$, **c)** $a=3$.

13. **1** **a)** Funkcja rośnie w przedziale $(0;+\infty)$, **b)** $x_0=1$, **c)** brak, **2** **a)** funkcja maleje w przedziale $(0;+\infty)$, **b)** $x_0=1$, **c)** brak. **14.** **a)** $D_f=D_g=D_h=\boldsymbol{R}^+$, $Y_f=Y_g=Y_h=\boldsymbol{R}$, **b)** funkcje f, g, h są rosnące, **c)** kolejno: $x\in(1;+\infty)$; $x\in(0;1)$; $x\in(0;1\rangle$. **15.** **a)** $D_f=D_g=D_h=\boldsymbol{R}^+$, $Y_f=Y_g=Y_h=\boldsymbol{R}$, **b)** funkcje f, g, h są malejące, **c)** kolejno $x\in(0;1\rangle$, $x\in(0;1)$; $x\in(0;1\rangle$. **16.** **1**, **2**, **3**, **5** i **6**.

17. **3** i **4**. **18.** **a)** $\log_3\frac{1}{4}<\log_3\frac{1}{2}<\log_3 2<\log_3 4$, **b)** $\log_6 3<\log_5 3<\log_4 3<\log_2 3$.

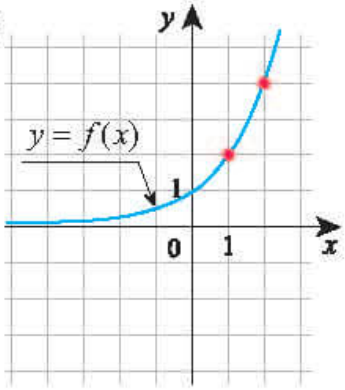
19. **a)** $D_f=(-\infty;4)$, **b)** $D_f=\left(2;2\frac{1}{3}\right)\cup\left(2\frac{1}{3};+\infty\right)$, **c)** $D_f=\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$.

20. **a)** 1 – C, 2 – D, 3 – B, 4 – A.

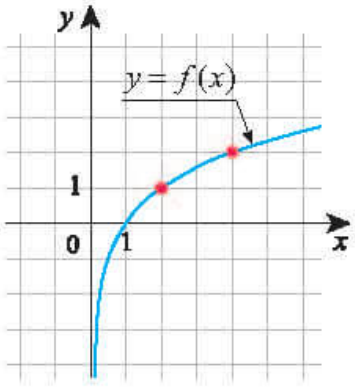
Zadania utrwalające

2.13. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f, która jest albo funkcją wykładniczą określoną wzorem $f(x)=a^x$, albo funkcją logarytmiczną określoną wzorem $f(x)=\log_a x$. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i napisz wzór funkcji f.

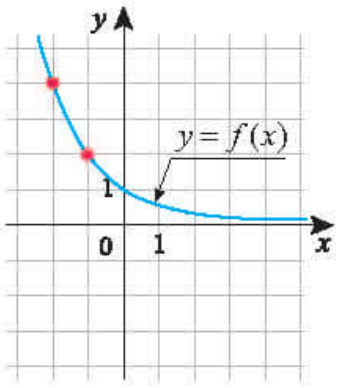
a)



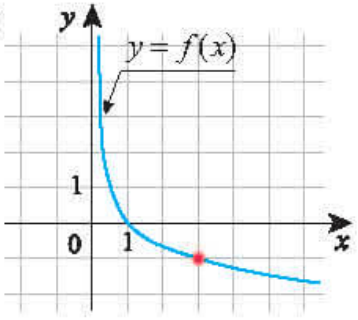
b)



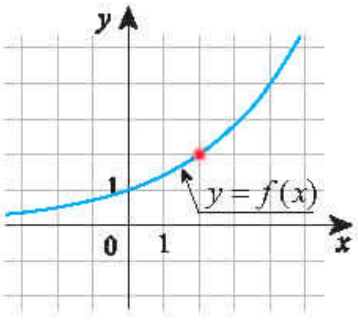
c)



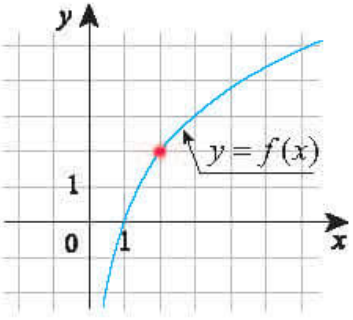
d)



e)



f)



2.14. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\log_a x$. Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji f, gdy:

a) $a=4$ i $P=(0{,}0625,-2)$, **b)** $a=0{,}001$ i $P=\left(10^4,-\frac{4}{3}\right)$, **c)** $a=2\sqrt{2}$ i $P=\left(32,3\frac{1}{3}\right)$.

2.15. Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=\log_a x$ należy punkt P. Oblicz a, gdy:

a) $P=(4,1)$, b) $P=\left(3,\frac{1}{2}\right)$, c) $P=(16,2)$,

d) $P=\left(\frac{1}{2},-1\right)$, e) $P=\left(\sqrt{2},-1\right)$, f) $P=\left(5,\frac{1}{3}\right)$.

2.16. Uporządkuj rosnąco liczby:

a) $\log_4 3$, $\log_4 \frac{1}{3}$, $\log_4 5$, $\log_4 0{,}1$, b) $\log_{\frac{1}{4}} 5$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$, $\log_{\frac{1}{4}} 3$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{3}$,

c) $\log_3 4$, $\log_{\frac{1}{3}} 4$, $\log_5 4$, $\log_{0,1} 4$, d) $\log_5 \frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$, $\log_3 \frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$.

2.17. Podaj współrzędne trzech punktów, które są liczbami wymiernymi i punkty te należą do wykresu funkcji f, gdy:

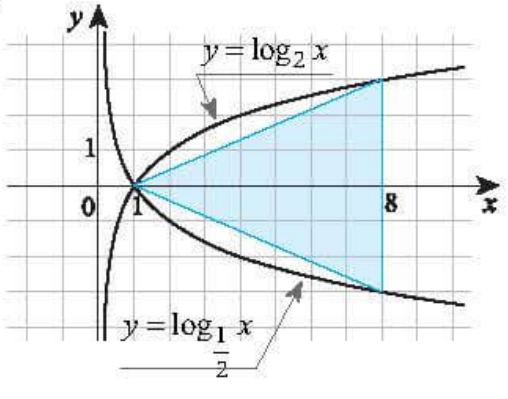
a) $f(x)=\log_{\frac{3}{4}} x$, b) $f(x)=\log_{\sqrt{2}} x$, c) $f(x)=\log_{2\sqrt{3}} x$, d) $f(x)=\log_{\sqrt[3]{2}} x$.

2.18. Określ dziedzinę D_f funkcji f, gdy:

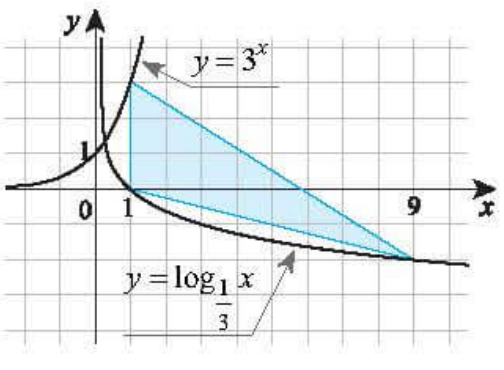
a) $f(x)=\log_2(-x)$, b) $f(x)=\log_3(x+2)$, c) $f(x)=\log(x-5)$.

2.19. Oblicz pole figury zaznaczonej na rysunku kolorem niebieskim.

a)



b)



2.20. Oblicz, dla jakich wartości parametru m funkcja f jest

1 rosnąca, **2** malejąca,

gdy:

a) $f(x)=\log_{(3m-5)} x$, b) $f(x)=\log_{(m^2-1)} x$, c) $f(x)=\log_{\left(\frac{m+1}{m}\right)} x$.

Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

Przykład 10. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

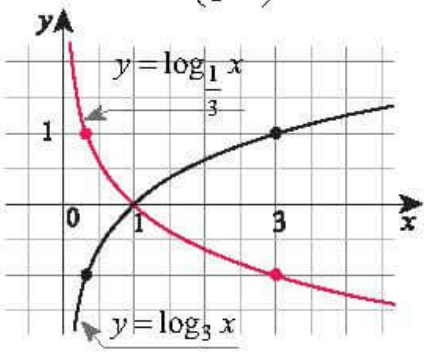
a) $f(x)=\log_3 x$ i $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, **b)** $f(x)=\log_3 x$ i $g(x)=\log_3 \frac{1}{x}$.

Uzasadnij, że gdy $x>0$, to $\log_{\frac{1}{3}} x=-\log_3 x$.

Rozwiązanie

a) Do wykresu funkcji:

- $f(x)=\log_3 x$ należą punkty: $\left(\frac{1}{3},-1\right)$, $(1,0)$, $(3,1)$,
- $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ należą punkty: $(3,-1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{3},1\right)$.



b) Zauważamy, że

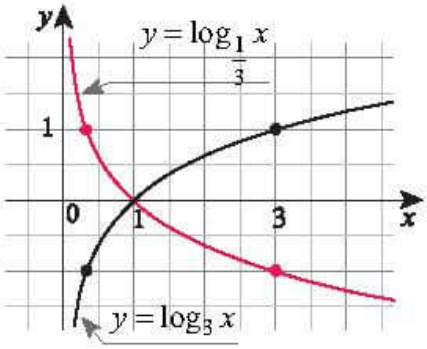
$g(x)=\log_3 \frac{1}{x}=\log x^{-1}=-\log_3 x$,

czyli $g(x)=-f(x)$.

Do wykresu funkcji

$g(x)=-\log_3 x$ należą punkty:

$(3,-1)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1}{3},1\right)$.



Jeżeli $x>0$ oraz:

$$\left.\begin{array}{l} a=\log_{\frac{1}{3}} x, \text{ to } x=\left(\frac{1}{3}\right)^a=3^{-a} \\ b=\log_3 x, \text{ to } x=3^b, \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^a=3^b, \text{ więc } 3^{-a}=3^b, \text{ skąd } -a=b.$$

Zatem $\log_{\frac{1}{3}} x=-\log_3 x$. ***c.n.u.***

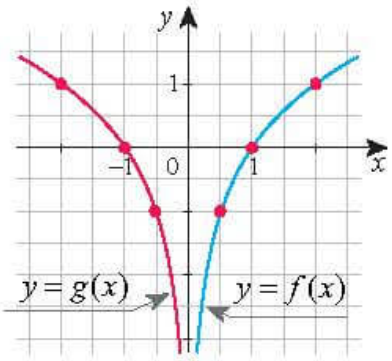
$$\log_{\frac{1}{a}} x=\log_a x$$

Ćwiczenie 21. Naszkicuj wykres funkcji g, który jest obrazem wykresu funkcji f w symetrii względem osi x, gdy:

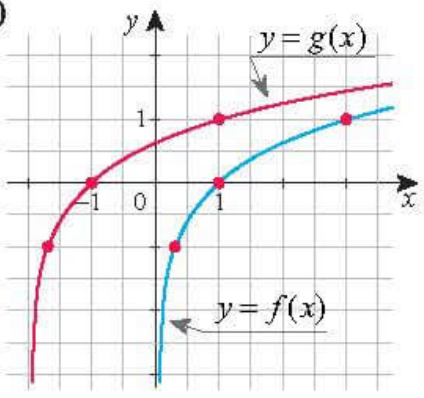
a) $f(x)=\log_2 x$, **b)** $f(x)=\log_2 \frac{1}{x}$. Podaj wzór funkcji g.

Ćwiczenie 22. Na rysunku przedstawione są wykresy funkcji logarytmicznych f i g. Określ, jakie przekształcenie należy wykonać, aby z wykresu funkcji f otrzymać wykres funkcji g. Napisz wzory tych funkcji.

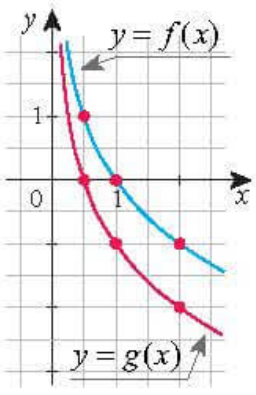
a)



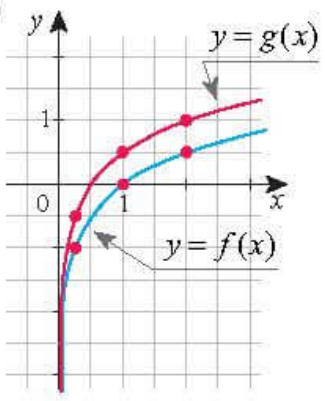
b)



c)



d)



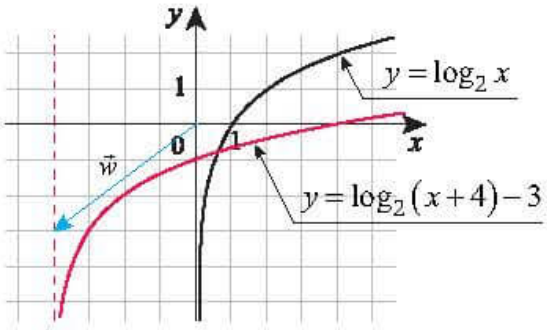
Przykład 11. Wyznacz dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres, gdy:

a) $f(x)=\log_2(x+4)-3$, b) $f(x)=\left|\log_2(x-2)-1\right|$.

Rozwiązanie

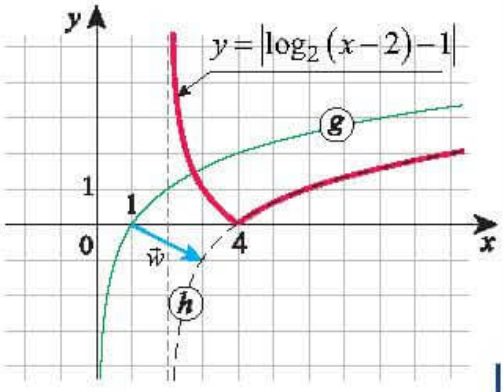
a) $D_f=(-4;+\infty)$

Wykres funkcji f otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji określonej wzorem $g(x)=\log_2 x$ i jego asymptotę o wektor $\vec{w}=[-4,-3]$. Asymptotą wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x=-4$.



b) $D_f=(2;+\infty)$

- Szkicujemy wykres funkcji g, gdzie $g(x)=\log_2 x$.
- Przesuwamy wykres funkcji g o wektor $\vec{w}=[2,-1]$, otrzymując wykres funkcji h, gdzie $h(x)=\log_2(x-2)-1$.
- Szkicujemy wykres funkcji f, gdzie $f(x)=\left|h(x)\right|$.



Ćwiczenie 23. Naszkicuj wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\log_2(x-1)-1$, **b)** $f(x)=\log_2(x+3)+2$.

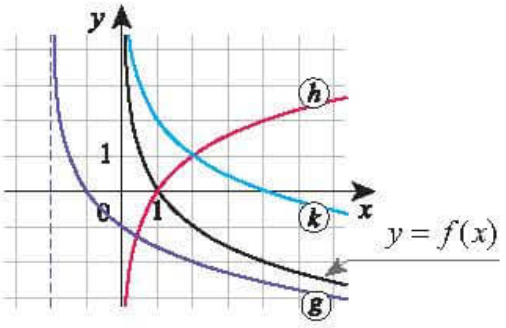
Ćwiczenie 24. Naszkicuj wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\left|\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-1\right|$, **b)** $f(x)=\left|1-\log_2(x+2)\right|$.

Ćwiczenie 25. Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych, gdy:

a) $f(x)=\log_7(x+1)$, **b)** $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+3$, **c)** $f(x)=\log_8(x+4)-2$.

Ćwiczenie 26. Wykresy funkcji g, h, k są figurami przystającymi do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$. Napisz wzór każdej z tych funkcji.



Odpowiedzi do ćwiczeń

21. **a)** $g(x)=-\log_2 x$ lub $g(x)=\log_2\frac{1}{x}$, **b)** $g(x)=-\log_2\frac{1}{x}$ lub $g(x)=\log_2 x$.

22. **a)** $f(x)=\log_2 x$ i $g(x)=\log_2(-x)$, $g(x)=f(-x)$,

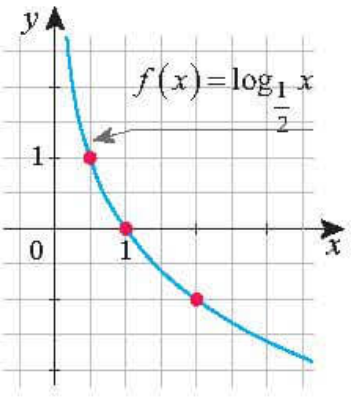
b) $f(x)=\log_3 x$ i $g(x)=\log_3(x+2)$, $g(x)=f(x+2)$, **c)** $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$ i $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x-1$, $g(x)=f(x)-1$,

d) $f(x)=\log_4 x$ i $g(x)=\log_4(2x)$ lub $g(x)=\frac{1}{2}+\log_4 x$, $g(x)=f(2x)$ lub $g(x)=\frac{1}{2}+f(x)$.

25. **a)** $(0,0)$, **b)** $(8,0)$, **c)** $(60,0)$ i $\left(0,-\frac{4}{3}\right)$. **26.** $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$, $h(x)=-\log_{\frac{1}{2}}x=\log_2 x$, $k(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+2$.

Zadania utrwalające

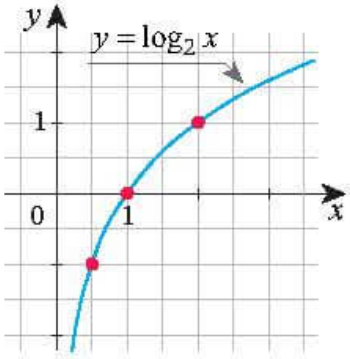
2.21. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji g i określ jej dziedzinę, gdy:



a) $g(x)=f(-x)$, **b)** $g(x)=f(x-1)-1$,

c) $g(x)=\left|f(x)\right|$, **d)** $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$, **e)** $g(x)=f(2x)$.

2.22. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\log_2 x$. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji g, podaj jej zbiór wartości i miejsca zerowe (o ile istnieją), gdy:



a) $g(x)=|f(x)|$, **b)** $g(x)=f(x+1)-1$,

c) $g(x)=|f(x-1)-1|$.

2.23. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $g(x)=\log_2 x$, a następnie, wykonując odpowiednie przekształcenie, naszkicuj wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x)=-\log_2 x$, **b)** $f(x)=\log_2(2x)$, **c)** $f(x)=\log_2\frac{x}{4}$,

d) $f(x)=\log_2(x-1)$, **e)** $f(x)=\log_2(x-2)+3$, **f)** $f(x)=|\log_2(x+2)|$.

2.24. Napisz wzór funkcji f w postaci $f(x)=a\cdot\log_2 x+b$, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty A i B, gdy:

a) $A=(2,4)$ i $B=(8,10)$, **b)** $A=(\sqrt{2},-2)$ i $B=(4\sqrt{2},10)$.

2.25. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ i korzystając z jej wykresu, określ:

a) dziedzinę D_f funkcji f,

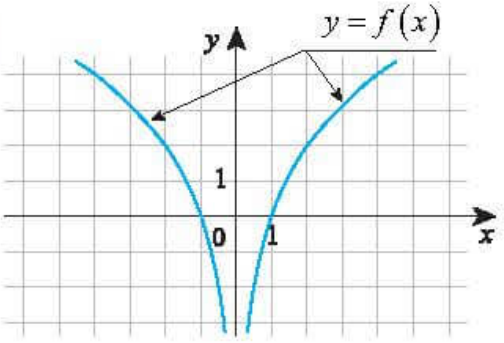
b) zbiór wartości Y_f funkcji f,

c) wartość argumentu x, dla którego wartość funkcji f jest równa -2,

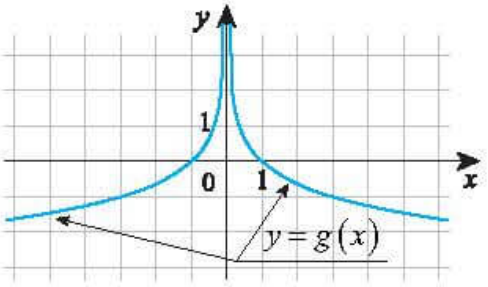
d) wartości argumentów x, dla których wartości funkcji f są większe od -1.

2.26. Na rysunku **1** przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\log_2 x^2$, a na rysunku **2** wykres funkcji g określonej wzorem $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}|x|$.

1



2



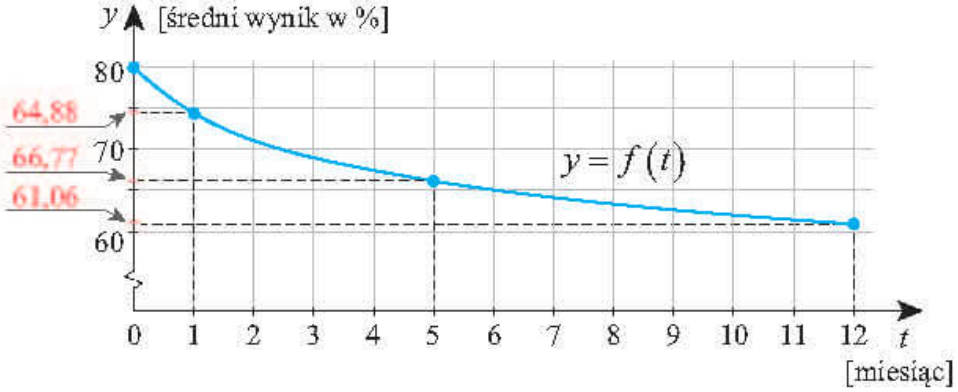
Posługując się wykresami funkcji f i g, podaj rozwiązanie:

a) równania $\log_2 x^2=\log_{\frac{1}{3}}|x|$, **b)** nierówności $\log_2 x^2<\log_{\frac{1}{3}}|x|$.

Funkcja logarytmiczna w zastosowaniach

Wyniki niektórych badań i obserwacji można opisywać wzorami funkcji, w których wykorzystuje się logarytmy. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 12. Studenci matematyki pewnej uczelni, za ich zgodą, zostali poddani eksperymentowi badającemu pamiętanie, którego efektem miał być wzór przedstawiający model ludzkiej pamięci. Studenci napisali egzamin testowy z geometrii analitycznej, a następnie co miesiąc przez najbliższy rok rozwiązywali ten sam test. Po eksperymencie ich średnie procentowe wyniki określono wzorem $f(t)=80-17\cdot\log(t+1)$, gdzie $t\in\langle 0;12\rangle$, i sporządzono wykres.



1 Odczytaj z wykresu, jakim średnim procentem wiedzy z geometrii analitycznej wykazali się studenci:
a) na egzaminie, **b)** na zakończenie eksperymentu.

2 Sprawdź, czy po upływie 50 lat od eksperymentu dawni studenci będą posiadali co najmniej 40% wiedzy z geometrii analitycznej. W obliczeniach przyjmij $\log 613\approx 2,412$.

Rozwiązanie

1 Odczytujemy z wykresu funkcji $f(t)=80-17\cdot\log(t+1)$ wartość funkcji f, gdy:
a) $t=0$, więc $f(0)=80$, **b)** $t=12$, więc $f(12)=61,08$.

2 Obliczamy wartość funkcji f, gdy $t=(50\cdot 12+12)$ miesięcy, czyli $t=612$.

$$f(612)=80-17\cdot\log(612+1)=80-17\cdot\log 613$$
$$f(612)\approx 80-17\cdot 2,412$$
$$f(612)\approx 38,996$$
$$f(612)\approx 39.$$

Odp.: **1** **a)** 80%, **b)** 61,08%. **2** Nie, ponieważ studenci będą pamiętali co najwyżej 39% wiedzy z geometrii analitycznej.

Ćwiczenie 27. Przyjmij dane z przykładu 12. i oblicz:

a) jakim procentem wiedzy z geometrii analitycznej wykazali się studenci po upływie 9 miesięcy od egzaminu,

b) po ilu miesiącach studenci będą pamiętali 46% wiedzy z geometrii analitycznej.

Jeżeli zmiana obserwowanego zjawiska jest wykładnicza i otrzymywane wielkości są bardzo małe, albo wielkie, to zmieniamy skalę na skalę logarytmiczną.
Proces y zmienia się wykładniczo, np. $y = a^x$, to możemy obserwować jego zmianę, wprowadzając **skalę logarytmiczną** (zmianę skali wielkości y).

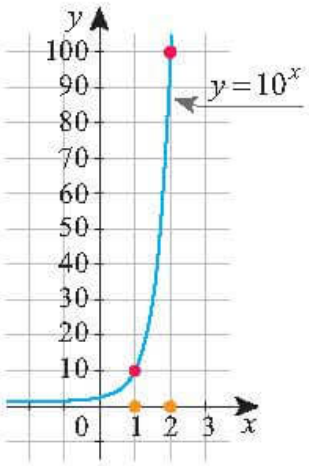
$y = 10^x$ *logarytmujemy* $\log y = \log 10^x$

↓ *zmiana skali*

$y = \log 10^x = x \cdot \log 10 = x$

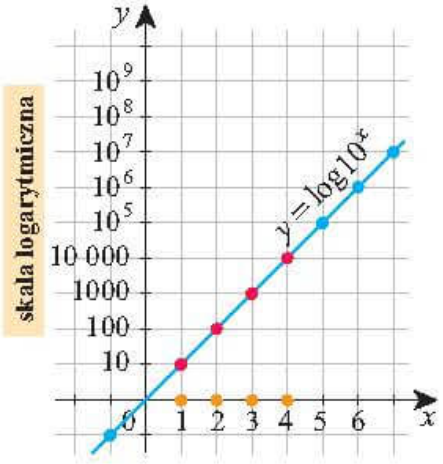
Jeżeli $y = a^x$, to do logarytmowania używamy logarytmu o podstawie a.

Wykres funkcji $y = 10^x$



$y = 10^x$	x	Zmiana skali $y = \log 10^x$
10^1	1	1
10^2	2	2
10^3	3	3
10^4	4	4

Wykres funkcji $y = 10^x$ w skali logarytmicznej

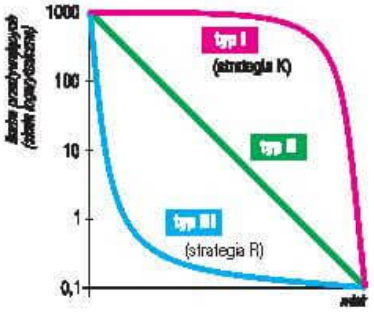


Ćwiczenie 28. Narysuj z użyciem skali logarytmicznej wykres funkcji:

a) $y = 2^x$, **b)** $y = e^x$.

Przykładem zmiany skali na logarytmiczną jest sposób przedstawienia np. modeli krzywych przeżywania populacji, na podstawie których opracowano strategie życiowe tych populacji.

Modele krzywych przeżywania
(wg. Pearl, 1928)

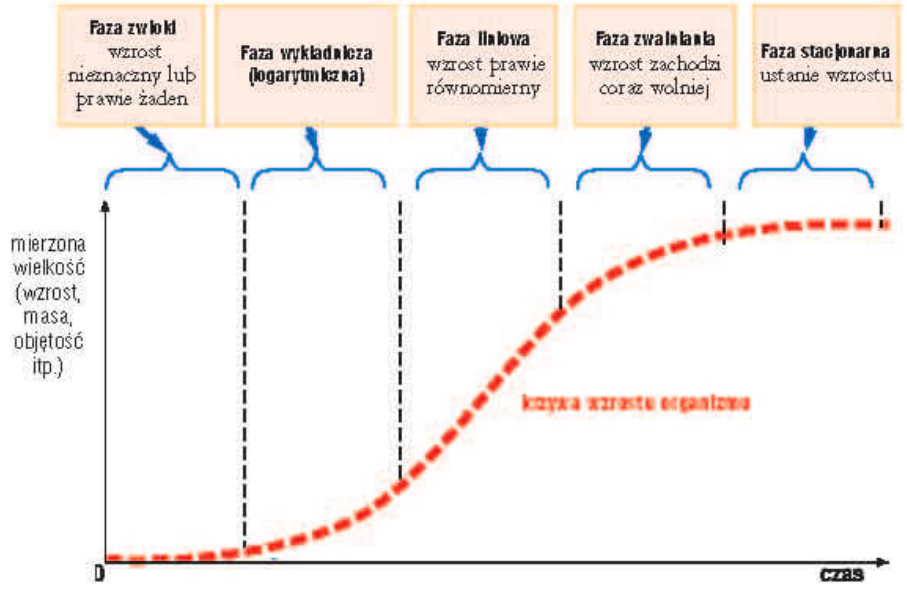


Strategia życiowa to uwarunkowany genetycznie zespół cech osobniczych umożliwiających danemu gatunkowi przetrwanie:

- **strategia K** to stały poziom liczebności populacji – osobniki cechuje długi cykl życiowy, zdolność do wielokrotnego rozrodu w czasie życia, wydawanie nielicznego, zadbanego potomstwa; okres wymierania związany jest najczęściej z procesami starzenia się,
- **strategia R** to zmienny poziom liczebności populacji – osobniki cechuje zdolność do migracji, krótki cykl życiowy, szybki wzrost, wydawanie licznego potomstwa; tylko nieliczne osobniki dożywają późnego wieku.

Zjawiska obserwowane w przyrodzie w większości zmieniają się liniowo albo wykładniczo. Przykładem takich zmian jest krzywa wzrostu organizmu.

Krzywa wzrostu organizmu to linia w kształcie litery S (kształt sigmoidalny) ilustrująca przebieg wzrostu mierzonej wielkości (masy, powierzchni, objętości itp.) w czasie od momentu urodzenia lub poczęcia. Krzywe wzrostu osobników i populacji mają podobny kształt.



Stosowanie skali logarytmicznej ma bardzo szerokie zastosowanie np. w chemii, fizyce i biologii przy opisywaniu zjawisk mierzonych wielkością w. Jeżeli w_0 jest najmniejszą z wartości przyjmowanych przez wielkość w, to przedstawieniem tej wielkości w skali logarytmicznej jest wyrażenie $y = f(w) = k \cdot \log \frac{w}{w_0}$ albo $y = f(w) = k \cdot \ln \frac{w}{w_0}$, gdzie k jest stałą charakterystyczną dla zjawiska mierzonego wielkością w.

Wielu naukowców wyniki swoich doświadczeń i obserwacji opisało wzorami, w których wykorzystano logarytmy. Oto kilka przykładów.

Prawo Webera-Fechnera (psychologia)	Wzór Ciołkowskiego (kosmonautyka)	Skala Richtera (sejsmologia)
$w = k \cdot \ln \frac{B}{B_0}$	$v = \omega \cdot \ln \frac{m_0}{m}$	$R = \log \frac{A}{A_0}$
Wzór opisuje zależność pomiędzy fizyczną miarą bodźca B a reakcją zmysłową (np. wzroku, słuchu, węchu) na jego siłę.	*Wzór opisuje zależność między prędkością v rakiety a jej masą m_0 z paliwem i masą m bez paliwa oraz prędkością ω gazów wylotowych.*	*Wzór określa wielkość trzęsienia ziemi na podstawie amplitudy A drgań wstrząsów sejsmicznych, gdzie $A_0 - 10^{-4}$ [cm].*

Poziom głośności dźwięku L mierzony w decybelach [dB] określono wzorem

$$L = L(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0},$$ gdzie:

I – natężenie dźwięku $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$,

$I_0 = 10^{-12}$ $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$ – natężenie dźwięku odpowiadające progowi słyszalności przez człowieka.

Przykład 13. Oblicz poziom głośności młota pneumatycznego pracującego w odległości metra od ciebie. Młot ten emituje dźwięk o natężeniu równym 10^{-2} $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$.

Rozwiązanie

Stosujemy wzór $L(I) = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$, gdy $I = 10^{-2}$

$$L\left(10^{-2}\right) = 10 \cdot \log \frac{10^{-2}}{10^{-12}} =$$

$$= 10 \cdot \log 10^{10} = 10 \cdot 10 = 100.$$

Odp.: Poziom głośności młota pneumatycznego jest równy 100 decybeli.

Ćwiczenie 29. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

	Dźwięk (odległość od źródła)	Szept (1 m)	Cicha rozmowa (1 m)	Krzyk (1 m)	Orkiestra symfoniczna (5 m)	Startujący odrzutowiec (20 m)
a)	Natężenie dźwięku $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$	10^{-10}		10^{-5}		1
b)	Poziom głośności dźwięku L [dB]		40		80	

Ćwiczenie 30. Oblicz:

a) poziom głośności startującego samolotu, dla którego $I = 10^{-3}$ $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$,

b) ile razy większe natężenie ma grzmot pioruna, dla którego $L = 120$ dB (decybeli), od najcichszego dźwięku, dla którego $L = 0$ dB,

c) ile razy mniejszą siłę ma trzęsienie ziemi o skali Richtera 3 od trzęsienia ziemi o skali Richtera 5.

Ciekawostka

Maksymalna granica słyszalności dźwięków dla ucha ludzkiego jest równa 110-120 decybeli. Przekroczenie o 30 decybeli maksymalnej granicy uszkadza słuch bezpowrotnie. Za próg szkodliwości dla człowieka przyjmuje się poziom głośności równy 65 decybeli. Dźwięków o natężeniu 85 decybeli można słuchać 8 godzin, a o natężeniu 100 decybeli tylko 15 minut.

Logarytmy przez długie lata przed erą kalkulatorów i komputerów służyły do wykonywania niezbędnych obliczeń przy tworzeniu projektów lub opracowywaniu wyników badań naukowych. W tym celu stworzono tablice logarytmów dziesiętnych oraz tablice logarytmów naturalnych. Zastosowanie logarytmów dziesiętnych pokażemy na przykładzie.

Przykład 14. W tabeli przedstawione są przybliżone wartości logarytmów dziesiętnych kilku liczb naturalnych.

Liczba	2	3	4	5	6	7	8	9
Wartość logarytmu	0,3010	0,4171	0,6021	0,6990	0,7782	0,8451	0,9034	0,9542

Skorzystaj z tabeli i przedstaw przybliżoną wartość liczby x w postaci potęgi liczby 10, gdy $x = 3^{128}$.

Rozwiązanie

$$x = 3^{128}$$

$\log x = \log 3^{128}$ — *Logarytmujemy obie strony równości.*

$\log x = 128 \cdot \log 3$ — *Korzystamy z wzoru* $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$.

$\log x \approx 128 \cdot 0{,}4171$ — *Korzystamy z tabeli:* $\log 3 \approx 0{,}4171$.

$\log x \approx 53{,}389$ — *Korzystamy z definicji logarytmu.*

$$x \approx 10^{53}.$$

Ćwiczenie 31. Skorzystaj z tabeli przykładu 14. i przedstaw wartość liczby x w postaci potęgi liczby 10, gdy: **a)** $x = 9^{100}$, **b)** $x = 4^{100}$, **c)** $x = 36^{100}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

27. **a)** 63%, **b)** 99 miesięcy. *Wskazówka.* **a)** $f(9) = 80 - 17 \cdot \log(9+1)$, **b)** $46 = 80 - 17 \cdot \log(t+1)$.

29. Kolejno: natężenie dźwięku 10^{-8}, 10^{-4}, poziom głośności dźwięku: 20, 70, 120.

Wskazówka. Szept: $L\left(10^{-10}\right) = 10 \cdot \log \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^2$; cicha rozmowa: $40 = 10 \cdot \log \frac{10^x}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{x+12}$, skąd $40 = 10 \cdot (x+12)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń – ciąg dalszy

30. **a)** 90 dB, **b)** 10^{12} razy (bilion razy), **c)** 100 razy. *Wskazówka.* Zauważ, że: **a)** $L\left(10^{-3}\right)=10\cdot\log\frac{10^{-3}}{10^{-12}}$.

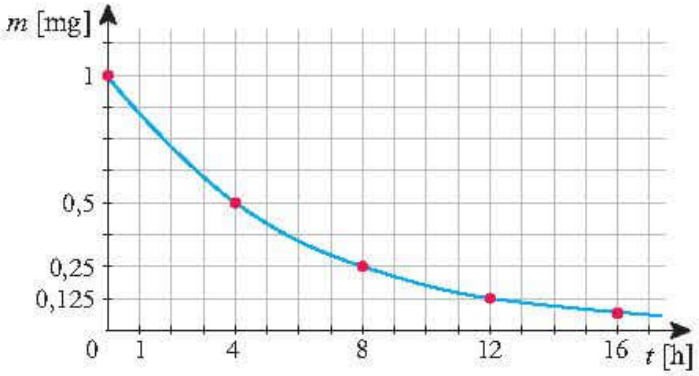
b) $120=L(1)$ i $0=L\left(10^{-12}\right)$, więc $1:10^{-12}=10^{12}$, **c)** $3=R\left(10^{-1}\right)$ i $5=R(10)$, więc $10:10^{-1}=10^{2}$.

31. **a)** $x\approx 10^{95}$, **b)** $x\approx 10^{60}$, **c)** $x\approx 10^{156}$.

Zadania utrwalające

2.27. Choremu podano 1 mg lekarstwa. Lekarstwo to po pewnym czasie jest wydalane z organizmu chorego wraz z moczem. Na diagramie poniżej przedstawiona jest zależność pomiędzy czasem a zawartością lekarstwa w organizmie chorego.

a) Odczytaj z wykresu odpowiednie dane i napisz wzór określający zależność pomiędzy zawartością lekarstwa w organizmie chorego a czasem t wyrażonym w godzinach, który upłynął od chwili jego podania.



b) Oblicz, ile miligramów lekarstwa będzie w organizmie chorego po upływie doby od jego podania.

2.28. Cichy szept to 30 dB (decybeli), głośna rozmowa 60 dB, a intensywny ruch uliczny to 90 dB. Oceń, ile razy od szeptu większe natężenie głośności ma:

a) głośna rozmowa, **b)** ruchliwa ulica?

W obliczeniach zastosuj wzór $L(I)=10\cdot\log\frac{I}{10^{-12}}$, gdzie L to poziom głośności dźwięku, a I to jego natężenie.

2.29. Oblicz amplitudę A trzęsienia ziemi o sile w skali Richtera:

a) 2, **b)** 4, **c)** 4,7 (trzęsienie ziemi w Polsce – 1993 r.),

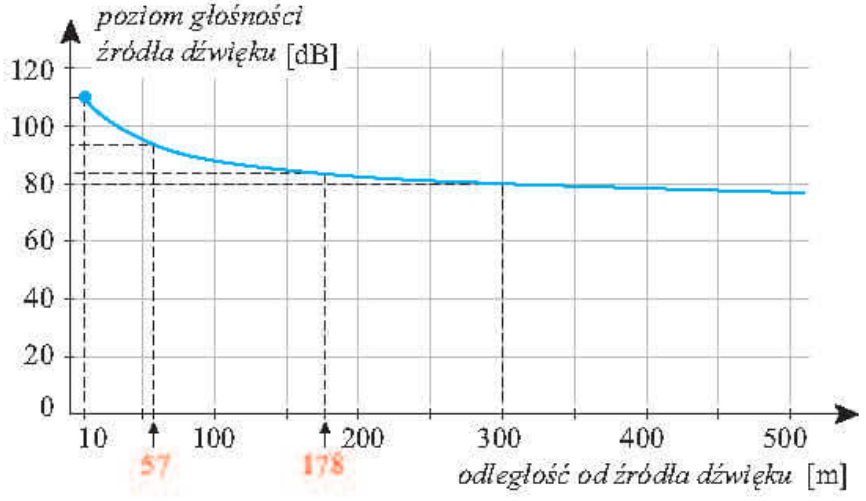
d) 9,5 (najsilniejsze trzęsienie ziemi na świecie – Chile, 1960 r.)

e) 9 (trzęsienie ziemi w Japonii – 2011 r.)

W obliczeniach zastosuj wzór $R(A)=\log\frac{A}{10^{-4}}$.

2.30. O ile wzrośnie głośność dźwięku, gdy jego natężenie wzrośnie trzykrotnie?

2.31. Na rysunku przedstawiony jest wykres poziomu głośności dźwięku L w zależności od odległości x mierzonej w metrach od jego źródła. Zależność ta określona jest wzorem $L(x) = 130 - 20 \cdot \log x$, gdzie $x \geq 10$.



a) Koncert muzyki rockowej emituje hałas rzędu 100-110 decybeli. Odczytaj z wykresu i oceń, czy w odległości 100 metrów od sceny można słuchać tego koncertu bez szkody dla organizmu.

b) Oceń, czy twój krzyk o głośności 65 dB zagłuszy startujący kilometr dalej odrzutowiec.

2.32. Oblicz:

a) pH octu, wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w occie jest równe $1{,}26 \cdot 10^{-3}$ (w obliczeniach przyjmij $\log 1{,}26 \approx 0{,}1$),

b) stężenie jonów wodorowych w mleku, wiedząc, że pH mleka jest równe 6,6.

W obliczeniach zastosuj wzór $\mathrm{pH} = -\log\left[\mathrm{H_3O^+}\right]$.

Zestaw powtórkowy

1. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Wartość wyrażenia $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi}$ jest:

A. mniejsza od 2, **B.** większa od 2.

Prawdziwa jest nierówność:

C. $2^{\log_2 3} < 3^{\log_3 2}$, **D.** $\log_5 3 < \log_2 5$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Wartość wyrażenia $\frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt{8}}$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$, **B.** $\frac{3}{2}$, **C.** $\sqrt{8}$, **D.** 2.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli pkt $P=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ należy do wykresu funkcji $f(x)=\log_a x$, to a jest równe:

A. $-\frac{1}{2}$, **B.** $\frac{1}{2}$, **C.** $\sqrt{2}$, **D.** 2.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Dziedziną D funkcji f określonej wzorem $f(x)=\log_2(x-2)+2$ jest:

A. $D=R^+$, **B.** $D=(2;+\infty)$,

C. $D=(0;2)\cup(2;+\infty)$, **D.** $D=(-2;+\infty)$.

5. *Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.*

Czy prawdziwa jest równość $\log_{\frac{5}{8}}(2-x)=-2$, gdy $x=-\frac{14}{25}$?

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$\log_{\frac{5}{8}}\left(2+\frac{14}{25}\right)=\log_{\frac{5}{8}}\frac{64}{25}=2$ i $2>-2$.
N	**Nie,**		**B.**	$\log_{\frac{5}{8}}\left(2+\frac{14}{25}\right)=\log_{\frac{5}{8}}\frac{64}{25}=-2$ i $-2=-2$.

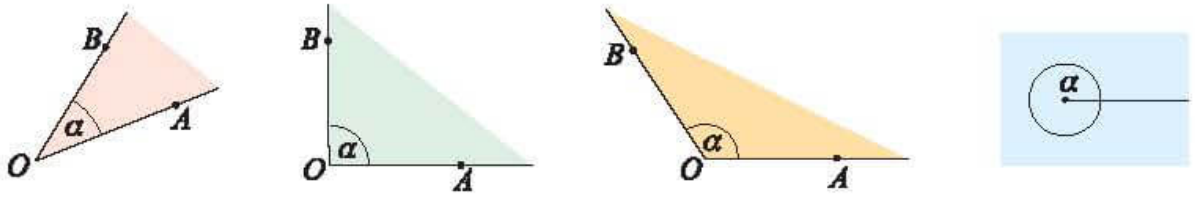
6. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Do wykresu funkcji $f(x)=\log_a x$ należy punkt $P=(81,4)$, gdy $a=3$.	**P**	**F**
Nierówność $\log_5\frac{1}{5}<\log_5 0{,}2$ nie jest prawdziwa.	**P**	**F**
Jeżeli $-2<\log_{\frac{1}{2}} x<0$, to $x\in(1;4)$.	**P**	**F**
Jeżeli $-3<\log_3 x<-1$, to $x\in\left(\frac{1}{81};\frac{1}{27}\right)$.	**P**	**F**

3. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Miara łukowa kąta

Przypomnijmy



kąt ostry α
$0° < \alpha < 90°$

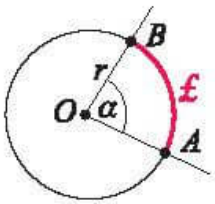
kąt prosty α
$\alpha = 90°$

kąt rozwarty α
$90° < \alpha < 180°$

kąt pełny α
$\alpha = 360°$

Dotychczas kąt mierzyliśmy, podając jego miarę w stopniach. W większości zastosowań matematyki, oprócz geometrii, zamiast miary stopniowej używa się miary łukowej.

Na rysunku kąt AOB jest kątem środkowym w okręgu o środku O i promieniu r opartym na łuku $\overset{\frown}{AB}$ o długości $£$. Stosunek długości łuku $£$ do długości okręgu jest równy stosunkowi miary kąta środkowego α, gdzie $\alpha = |\sphericalangle AOB|$, opartego na tym łuku do miary kąta pełnego, co zapisujemy:



$£ = |\overset{\frown}{AB}|$

$$\frac{£}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360°}, \text{ skąd } £ = \frac{\pi r \alpha}{180°}.$$

Przykład 1. Oblicz długość $£$ łuku okręgu o promieniu r, na którym oparty jest kąt środkowy α. Jaką częścią okręgu jest ten łuk?

a) $\alpha = 90°$, **b)** $\alpha = 30°$, **c)** $\alpha = 150°$.

Rozwiązanie $\frac{£}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360°}$, więc:

a) $\frac{£}{2\pi r} = \frac{90}{360} \Leftrightarrow \frac{£}{2\pi r} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow £ = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r$ $(\frac{1}{4}$ okręgu),

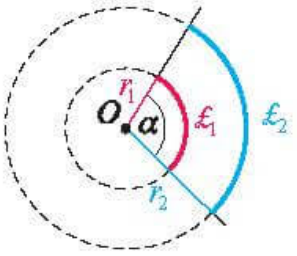
b) $\frac{£}{2\pi r} = \frac{30}{360} \Leftrightarrow \frac{£}{2\pi r} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow £ = \frac{1}{12} \cdot 2\pi r$ $(\frac{1}{12}$ okręgu),

c) $\frac{£}{2\pi r} = \frac{150}{360} \Leftrightarrow \frac{£}{2\pi r} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow £ = \frac{5}{12} \cdot 2\pi r$ $(\frac{5}{12}$ okręgu).

Ćwiczenie 1. W kole o promieniu r kąt środkowy α ma miarę $120°$ i jest oparty na łuku o długości $£$. Oblicz stosunek $\frac{£}{r}$, gdy: **a)** $r=1$, **b)** $r=2$, **c)** $r=3$.

Uwaga

Stosunek długości łuku $£$ odpowiadającego kątowi środkowemu α do promienia okręgu r jest wielkością stałą.

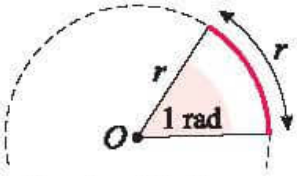


$$\frac{£_1}{r_1}=\frac{£_2}{r_2}$$

Definicja

- Miarą łukową kąta środkowego w kole o promieniu r nazywamy stosunek długości łuku $£$, na którym oparty jest ten kąt, do długości promienia kąta.
- **Radianem** nazywamy miarę kąta środkowego opartego na łuku o długości równej promieniowi r okręgu.

$$\alpha=\frac{£}{r}$$



O – środek okręgu
r – promień okręgu

radian – jednostka miary łukowej kąta,
rad – symbol radiana.

$$\mathbf{1\,rad}=\frac{\mathbf{180^\circ}}{\pi},\quad \mathbf{1\,rad}\approx\mathbf{57^\circ 17' 45''},\quad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\,\mathbf{rad},\quad \pi\,\mathbf{rad}=\mathbf{180^\circ},\quad 2\pi\,\mathbf{rad}=\mathbf{360^\circ}.$$

Np.: 120° to $\frac{2}{3}\pi$ rad, 180° to π rad.

$\alpha=2\pi$ rad *piszemy* $\alpha=2\pi$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$ rad *piszemy* $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

Przykład 2. Wyraź w radianach miary kątów:

a) 30°, **b)** 120°, **c)** 300°, **d)** 360°.

Rozwiązanie

$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ rad, więc:

a) $30^\circ=30\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$, **b)** $120^\circ=120\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{2\pi}{3}$,

c) $300^\circ=300\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{3}$, **d)** $360^\circ=360\cdot\frac{\pi}{180}=2\pi$.

Odp.: **a)** $30^\circ=\frac{\pi}{6}$, **b)** $120^\circ=\frac{2\pi}{3}$, **c)** $300^\circ=\frac{5\pi}{3}$, **d)** $360^\circ=2\pi$.

Ćwiczenie 2. Wyraź w radianach miary kątów: 45°, 270° i 330°.

Przykład 3. Wyraź w stopniach miary łukowe kątów:

a) $\frac{\pi}{3}$ rad, b) $\frac{\pi}{4}$ rad, c) $\frac{3}{4}\pi$ rad, d) $\frac{11}{12}\pi$ rad.

Rozwiązanie $1\text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$, więc:

a) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = 60^\circ$,

b) $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$,

c) $\frac{3}{4}\pi = \frac{3\pi}{4}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = 135^\circ$,

d) $\frac{11}{12}\pi = \frac{11\pi}{12}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} = 165^\circ$.

Odp.: a) $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, b) $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$, c) $\frac{3}{4}\pi = 135^\circ$, d) $\frac{11}{12}\pi = 165^\circ$.

Ćwiczenie 3. Wyraź w stopniach miary łukowe kątów: $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{13}{9}\pi$ i $\frac{17}{9}\pi$.

Kąt jako miara obrotu

Przypomnijmy

Definicja

Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. W kącie skierowanym pierwszą z półprostych nazywamy ramieniem początkowym kąta, drugą – ramieniem końcowym.

Kąt skierowany oznaczamy łukiem zakończonym strzałką, która wskazuje jego ramię końcowe.



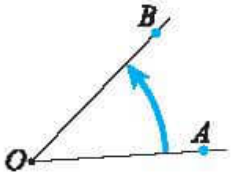
Kąt skierowany AOB



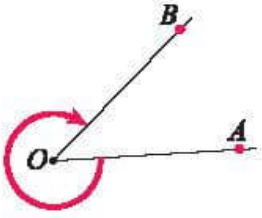
Kąt skierowany AOB

W matematyce przyjęto, że:

- kąt skierowany wskazany łukiem o zwrocie przeciwnym do ruchu wskazówek zegara jest **kątem skierowanym dodatnio**,



- kąt skierowany wskazany łukiem o zwrocie zgodnym z ruchem wskazówek zegara jest **kątem skierowanym ujemnie**.





Na przykład duża wskazówka zegara w ciągu jednej godziny zakreśla kąt o mierze **–360°**, a w ciągu $1\frac{1}{2}$ godziny zakreśla kąt o mierze **–540°**, przy czym $-360° = -1 \cdot 360° + 0°$, $-540° = -2 \cdot 360° + 180°$.

Aby przedstawić miarę kąta β o dowolnej mierze stopniowej w postaci $k \cdot 360° + \alpha$, gdzie $0° \le \alpha < 360°$ i $k \in Z$, dzielimy β przez $360°$ i utożsamiamy kąt β z otrzymaną w tym dzieleniu resztą α.

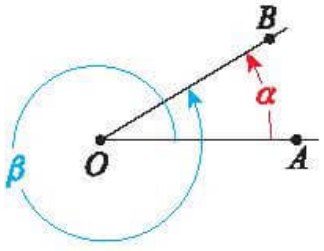
Twierdzenie

Miarę każdego kąta skierowanego możemy przedstawić w postaci:

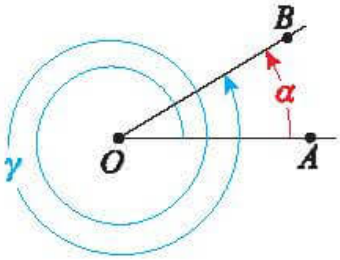
- $k \cdot 360° + \alpha$, gdzie $0° \le \alpha < 360°$ i $k \in Z$, *albo* $k \cdot 2\pi + \alpha$, gdzie $\alpha \in (0; 2\pi)$ i $k \in Z$.

Miarę α nazywamy **miarą główną kąta skierowanego**.

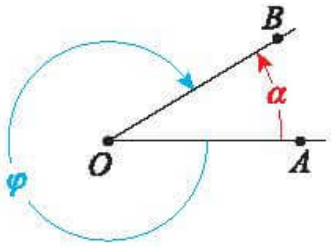
Na rysunkach przedstawiamy kąty skierowane β, γ, φ, których miarą główną jest kąt α.



$\beta = 1 \cdot 360° + \alpha$



$\gamma = 2 \cdot 360° + \alpha$

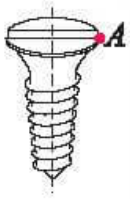


$\varphi = -1 \cdot 360° + \alpha$

Uwaga

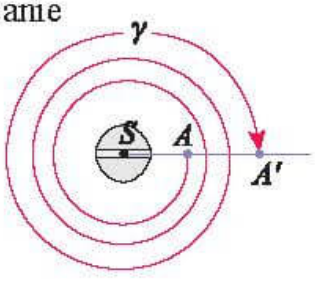
- Jeżeli ramiona kątów skierowanych pokrywają się, to ich miary główne są równe.
- Kąty przeciwne to kąty, których miary są liczbami przeciwnymi.

Przykład 4. Przy wkręcaniu śruba wykonała 3 pełne obroty, a przy wykręcaniu $2\frac{1}{2}$ obrotu. Określ miarę kąta skierowanego, jaki zakreśla punkt A na brzegu „główki" śruby przy jej: **a)** wkręcaniu, **b)** wykręcaniu.

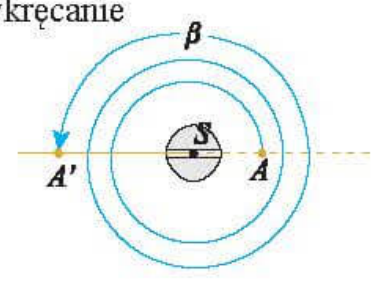


Rozwiązanie

a) wkręcanie



b) wykręcanie



Przy wkręcaniu śruby półprosta SA obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, więc kąt, jaki zakreśla, ma miarę ujemną

$\gamma = 3\cdot(-360^\circ) = -1080^\circ$

$-1080^\circ = -3\cdot 360^\circ + 0^\circ.$

$\alpha = 0^\circ$ – miara główna kąta γ.

Przy wykręcaniu śruby półprosta SA obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, więc kąt, jaki zakreśla, ma miarę dodatnią

$\beta = 2\frac{1}{2}\cdot 360^\circ = 900^\circ$

$900^\circ = 2\cdot 360^\circ + 180^\circ.$

$\alpha = 180^\circ$ – miara główna kąta β.

Ćwiczenie 4. Określ, jaki kąt, dodatni czy ujemny, zakreśla punkt na kierownicy samochodu, gdy kierowca skręca: **a)** w prawo, **b)** w lewo.

Przykład 5. Oblicz miarę główną α kąta skierowanego β, gdy:

a) $\beta = 420^\circ$, **b)** $\beta = -120^\circ$, **c)** $\beta = -600^\circ$, **d)** $\beta = \frac{25}{6}\pi$.

Rozwiązanie

a) $420^\circ = 1\cdot 360^\circ + 60^\circ$, więc $\alpha = 60^\circ$,

b) $-120^\circ = -1\cdot 360^\circ + 240^\circ$, więc $\alpha = 240^\circ$,

c) $-600^\circ = -2\cdot 360^\circ + 120^\circ$, więc $\alpha = 120^\circ$,

d) $\frac{25}{6}\pi = \frac{24}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = 4\pi + \frac{1}{6}\pi = 2\cdot 2\pi + \frac{1}{6}\pi$, więc $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Miara główna każdego kąta jest nieujemna.

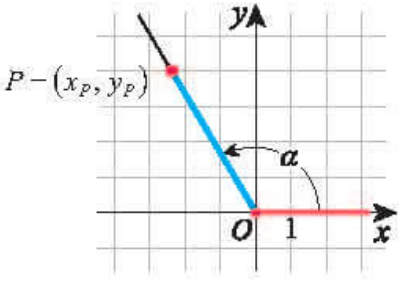
Odp.: **a)** $\alpha = 60^\circ$, **b)** $\alpha = 240^\circ$, **c)** $\alpha = 120^\circ$, **d)** $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Ćwiczenie 5. Oblicz miary główne kątów: 500°, -300°, 1120°, $\frac{25}{6}\pi$, $-\frac{35}{3}\pi$.

Przypomnijmy

Kąty skierowane umieszcza się na płaszczyźnie kartezjańskiej w taki sposób, że:

- wierzchołek kąta pokrywa się z początkiem układu (punktem $O = (0, 0)$),
- ramię początkowe kąta pokrywa się z dodatnią półosią x,
- ramię końcowe kąta umieszcza się w zależności od miary kąta.



$r = |OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$

r – promień wodzący punktu P (odległość punktu P od początku układu współrzędnych)

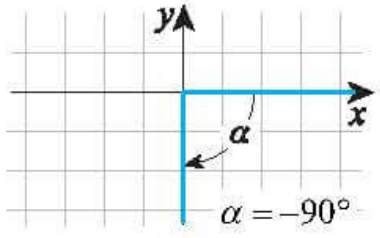
Ćwiczenie 6. Oblicz długość promienia wodzącego punktu P, gdy:

a) $P=(1,3)$, **b)** $P=(-2,4)$, **c)** $P=(-5,-5)$, **d)** $P=(3,-4)$.

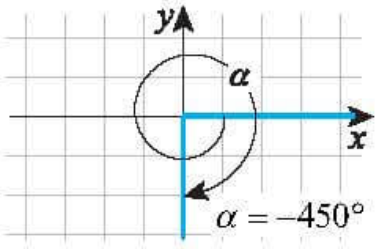
Przykład 6. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej kąt skierowany α, którego miara jest równa: **a)** $-90°$, **b)** $-450°$, **c)** $900°$, **d)** $\frac{5}{4}\pi$, **e)** $\frac{3}{2}\pi$, **f)** $-\frac{7}{6}\pi$.

Rozwiązanie

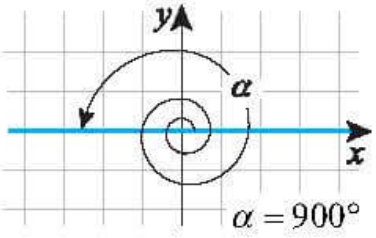
a)



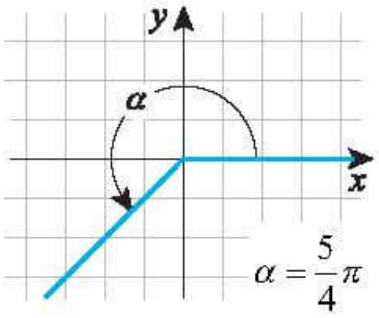
b)



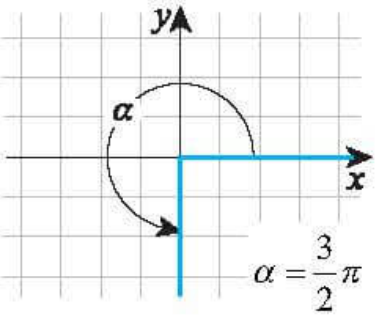
c)



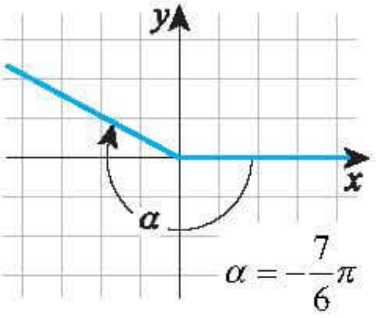
d)



e)



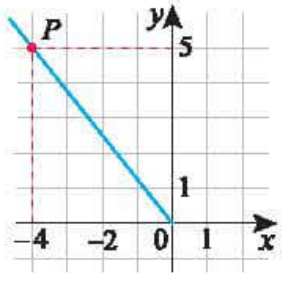
f)



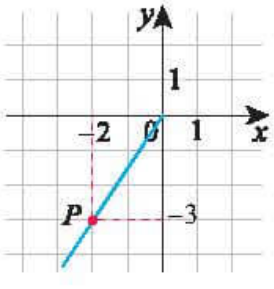
Ćwiczenie 7. Zaznacz na płaszczyźnie kartezjańskiej kąt skierowany α, którego miara jest równa: **a)** $-390°$, **b)** $540°$, **c)** $\frac{3}{4}\pi$, **d)** -3π.

Ćwiczenie 8. Przerysuj rysunek do zeszytu i zaznacz dwa kąty o mierze dodatniej oraz dwa kąty o mierze ujemnej, których ramieniem początkowym jest dodatnia półoś x, a ramieniem końcowym półprosta OP.

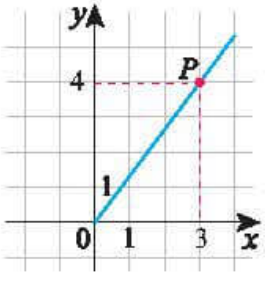
a)



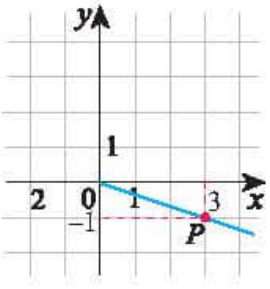
b)



c)



d)

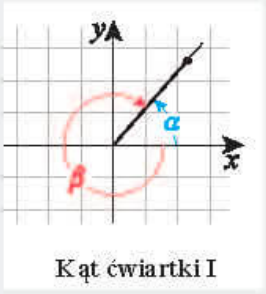


Uwaga

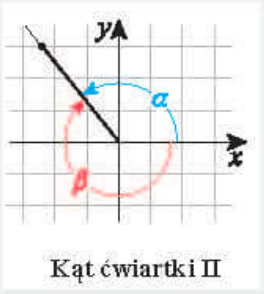
- Kąty ćwiartki I, II, III lub IV to kąty, których miary główne spełniają jeden z warunków:

$0° < \alpha < 90°$, $90° < \alpha < 180°$, $180° < \alpha < 270°$, $270° < \alpha < 360°$

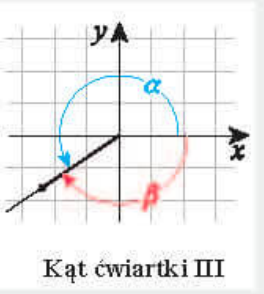
albo $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.



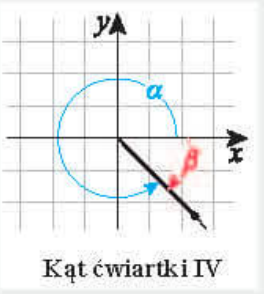
Kąt ćwiartki I



Kąt ćwiartki II



Kąt ćwiartki III



Kąt ćwiartki IV

- Kątów, których miara główna jest wielokrotnością kąta $\frac{\pi}{2}$ (ramię końcowe pokrywa się z jedną z półosi układu współrzędnych), nie zaliczamy do żadnej ćwiartki układu współrzędnych.

Przykład 7. Podaj, do której ćwiarki układu współrzędnych należy końcowe ramię kąta o mierze: **a)** $-50°$, **b)** $-228°$, **c)** $910°$, **d)** $-\frac{23}{6}\pi$.

Rozwiązanie

a) $-50° = -1 \cdot 360° + 310°$ i $270° < 310° < 360°$,
więc kąt -50 jest kątem ćwiartki IV.

b) $-228° = -1 \cdot 360° + 132°$ i $90° < 132° < 180°$,
więc kąt $-228°$ jest kątem ćwiartki II.

c) $910° = 2 \cdot 360° + 190°$ i $180° < 190° < 270°$,
więc kąt $910°$ jest kątem ćwiartki III.

d) $-\frac{23}{6}\pi = \frac{-24+1}{6}\pi = \frac{-24}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = -2 \cdot 2\pi + \frac{1}{6}\pi$ oraz $0 < \frac{1}{6}\pi < \frac{\pi}{2}$,
więc kąt $-\frac{23}{6}\pi$ jest kątem ćwiartki I.

Odp.: **a)** ćwiartka IV, **b)** ćwiartka II, **c)** ćwiartka III, **d)** ćwiartka I.

Ćwiczenie 9. Do której ćwiartki układu współrzędnych należy końcowe ramię kąta o mierze: $-64°$, $1230°$, $-543°$, $\frac{5}{4}\pi$, $-\frac{7}{3}\pi$?

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a), b), c) $\frac{\ell}{r}=\frac{2\pi}{3}$. 2. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$. 3. 210°, 260°, 340°. 4. a) Ujemny, b) dodatni.
5. Kolejno: 140°, 60°, 40°, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$. 6. a) $\sqrt{10}$, b) $2\sqrt{5}$, c) $5\sqrt{2}$, d) 5. 9. Kolejno ćwiartki: IV, II, II, III, IV.

Zadania utrwalające

3.1. Wyraź w radianach miary kątów: 6°, 9°, 12°, 15°, 27°, 36°, 72°, 80°, 105°, 310°.

3.2. Wyraź w stopniach miary kątów:

$\frac{5}{18}\pi$, $\frac{7}{18}\pi$, $\frac{5}{9}\pi$, $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{7}{9}\pi$, $\frac{35}{36}\pi$, $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{8}{5}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{16}{9}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$.

3.3. Przerysuj tabelę do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakującą wielkość.

a)

Miara stopniowa	30°	■	60°	■	■	90°
Miara łukowa	■	$\frac{\pi}{4}$	■	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{12}$	■

b)

Miara stopniowa	120°	■	■	160°	■
Miara łukowa	■	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	■	π

c)

Miara stopniowa	200°	■	■	240°	■	■
Miara łukowa	■	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	■	$\frac{13}{12}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$

d)

Miara stopniowa	300°	■	■	340°	■
Miara łukowa	■	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	■	2π

3.4. Koło wykonuje 320 obrotów w czasie 8 minut, obracając się przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara. Jaki kąt zakreśla koło w czasie jednej sekundy? Podaj jego miarę w radianach.

3.5. Koło zębate ma 48 zębów i obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Podaj miarę kąta odpowiadającego obrotowi koła o:

a) 2 zęby, **b)** 6 zębów, **c)** 30 zębów, **d)** 72 zęby.

3.6. Zegar wskazuje godzinę 8:00. Podaj miarę kąta, jaki zakreśli duża wskazówka zegara przy obrocie do godziny:

a) 8:15, **b)** 8:25, **c)** 9:35, **d)** 10:50.

3.7. Zaznacz w układzie współrzędnych kąt α, taki że:

a) $\alpha = 450°$, **b)** $\alpha = 810°$, **c)** $\alpha = -405°$, **d)** $\alpha = -0{,}75\pi$.

3.8. Oblicz miary główne kątów:

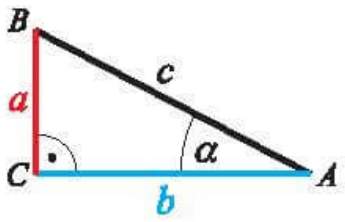
a) $400°,\ 1210°,\ 2000°,\ -600°,\ -1090°,$ **b)** $\frac{11}{3}\pi,\ \frac{21}{2}\pi,\ \frac{35}{4}\pi,\ -\frac{35}{12}\pi.$

3.9. Podaj, w której ćwiartce układu współrzędnych leży końcowe ramię kąta o mierze:

$306°,\ 195°,\ -320°,\ -210°,\ -45°,\ -1240°,\ \frac{5}{9}\pi,\ -\frac{5}{4}\pi,\ 3\pi,\ 10\frac{1}{2}\pi.$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

W pierwszej klasie zapoznaliśmy się z funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, a w drugiej klasie z funkcjami trygonometrycznymi kątów, których ramię końcowe leżało w I lub II ćwiartce. Podobnie określamy funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.

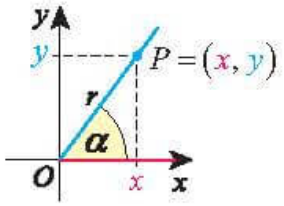


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Kąt ćwiartki I

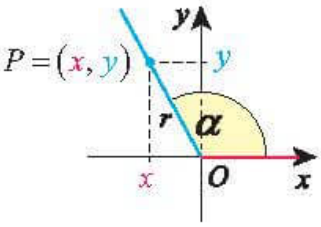


Aby określić wartości funkcji trygonometrycznych kąta umieszczonego w układzie współrzędnych, obieramy na ramieniu końcowym tego kąta dowolny punkt P, różny od punktu $O=(0,0)$, taki że $P=(x,y)$.

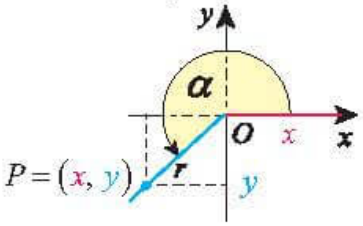
$$r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Odległość punktu P od początku układu współrzędnych (liczbę r) nazywamy promieniem wodzącym punktu P.

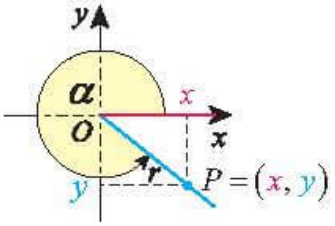
Kąt ćwiartki II



Kąt ćwiartki III



Kąt ćwiartki IV



Definicja

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu należącego do końcowego ramienia kąta do promienia wodzącego tego punktu.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu należącego do końcowego ramienia kąta do promienia wodzącego tego punktu.

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej do odciętej różnej od 0 dowolnego punktu należącego do końcowego ramienia tego kąta.

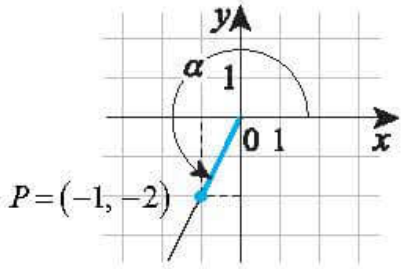
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

Przykład 8. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, gdy do jego końcowego ramienia należy punkt P, taki, że: **a)** $P=(-1,-2)$, **b)** $P=(3,-4)$.

Rozwiązanie

Kąt α i jego końcowe ramię zaznaczamy w układzie współrzędnych.

a)



$P=(-1,-2)$, więc

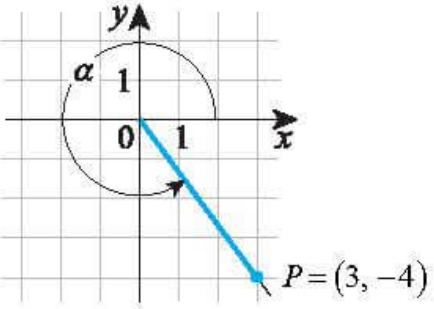
$r=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}.$

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-2}{\sqrt{5}}=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-2}{-1}=2.$

b)



$P=(3,-4)$, więc

$r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5.$

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-4}{5}$

$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-4}{3}.$

Korzystamy z definicji funkcji trygonometrycznych:

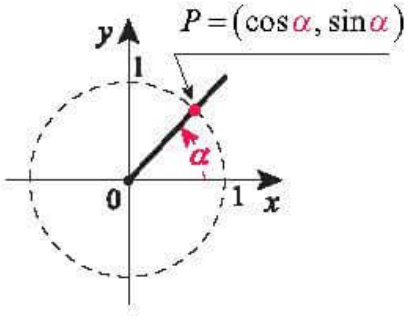
Ćwiczenie 10. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, wiedząc, że do jego końcowego ramienia należy punkt P.

a) $P=(8,-15)$, **b)** $P=(-5,12)$, **c)** $P=\left(-\sqrt{3},-1\right)$.

Ćwiczenie 11. Końcowe ramię kąta β należy do ćwiartki II i zawiera się w prostej o równaniu $y=-3x$. Wyznacz współrzędne dowolnego punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta β oraz oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Sporządź odpowiedni rysunek.

Uwaga

Jeśli punkt P należy do końcowego ramienia kąta α i jego promień wodzący jest równy 1 ($|OP|=1$), to $P=(\cos\alpha,\sin\alpha)$. $\sin\alpha=\frac{y}{1}$ i $\cos\alpha=\frac{x}{1}$.

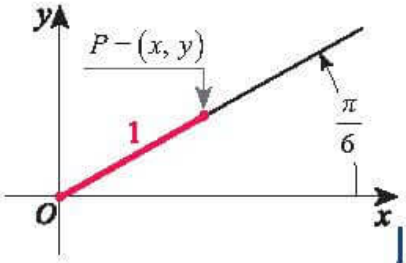


Przykład 9. W układzie współrzędnych półprosta OP jest końcowym ramieniem kąta α, takiego że $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Wyznacz współrzędne punktu P, gdy $|OP| = 1$.

Rozwiązanie

$P = (x, y)$ i $|OP| = 1$, więc $x = \cos\frac{\pi}{6}$ i $y = \sin\frac{\pi}{6}$,

$x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $y = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Zatem $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

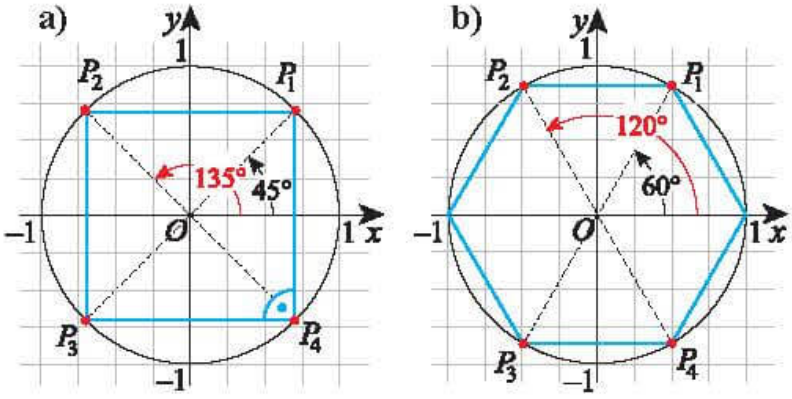


Ćwiczenie 12. Posługując się danymi z tabeli, podaj współrzędne punktu P należącego do końcowego ramienia kąta α, gdy $|OP| = 1$ oraz:

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, **b)** $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów, gdy:			
Funkcja trygonometryczna / α	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

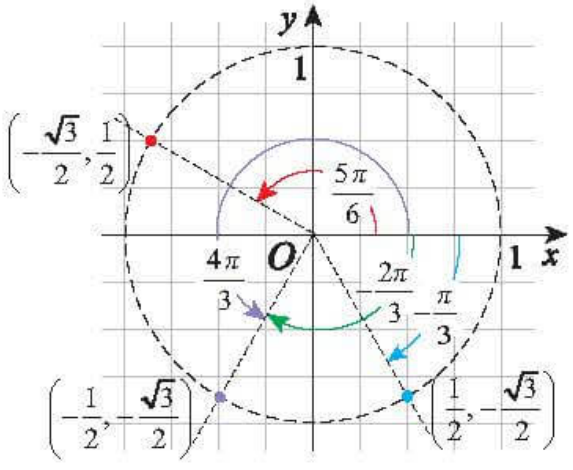
Ćwiczenie 13. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i wyznacz współrzędne punktów: P_1, P_2, P_3, P_4. Podaj miary główne kątów skierowanych, których końcowymi ramionami są półproste OP_3 i OP_4.



Ćwiczenie 14. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i podaj wartości funkcji trygonometrycznych kąta:

a) $-\frac{\pi}{3}$, **b)** $\frac{5\pi}{6}$, **c)** $\frac{4\pi}{3}$,

d) $-\frac{2\pi}{3}$, **e)** $\frac{17\pi}{6}$.



Przykład 10. Narysuj końcowe ramię kąta α i zaznacz ten kąt, gdy:

a) $\operatorname{tg}\alpha = -4$ **b)** $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

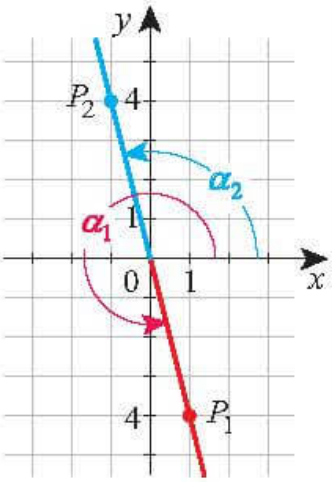
Rozwiązanie

Punkt $P=(x, y)$ należy do końcowego ramienia kąta α.

a) $\operatorname{tg}\alpha = -4$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, więc

$$\frac{y}{x} = -4 = \frac{-4}{1} = \frac{4}{-1} = \ldots$$

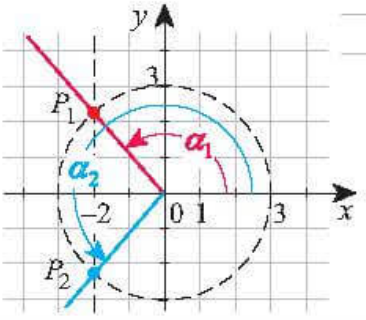
Przyjmujemy, że $P_1=(1, -4)$ lub $P_2=(-1, 4)$.



b) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, więc

$$\frac{x}{r} = \frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \ldots$$

Przyjmujemy, że $x=-2$ i $r=3$.



Ćwiczenie 15. Narysuj końcowe ramię kąta α i zaznacz ten kąt, gdy:

a) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, **b)** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

10. **a)** $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{15}{8}$, **b)** $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$, **c)** $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 11. $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$. 12. **a)** $P=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, **b)** $P=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

13. **a)** $P_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_3=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 225° i 315°,

b) $P_1=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2=\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_3=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_4=\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 240° i 300°.

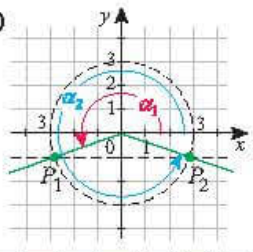
14. **a)** $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, **b) i e)** $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{17}{6}\pi = \frac{1}{2}$,

$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{17}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{17}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

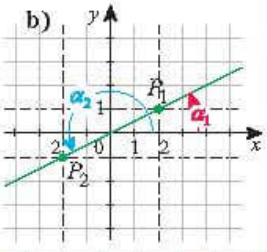
c) i d) $\sin\frac{4}{3}\pi = \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\frac{4}{3}\pi = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{4}{3}\pi = \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{3}$.

15. **a)**



b)



Zadania utrwalające

3.10. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta, wiedząc, że do jego końcowego ramienia należy punkt:

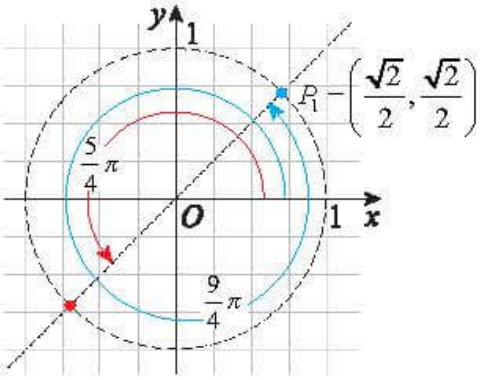
a) $A=(2,-3)$, **b)** $B=(-3,4)$, **c)** $C=(-2,-4)$, **d)** $D=(\sqrt{2},1)$.

3.11. Końcowe ramię kąta α zawiera się w prostej o równaniu $y=ax$, a kąt α jest kątem wskazanej ćwiartki. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, gdy:

a) $a=1$, III ćw., **b)** $a=5$, I ćw., **c)** $a=-1$, II ćw., **d)** $a=-3$, IV ćw.

3.12. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i podaj wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, gdy:

a) $\alpha=\frac{5}{4}\pi$, **b)** $\alpha=\frac{9}{4}\pi$.

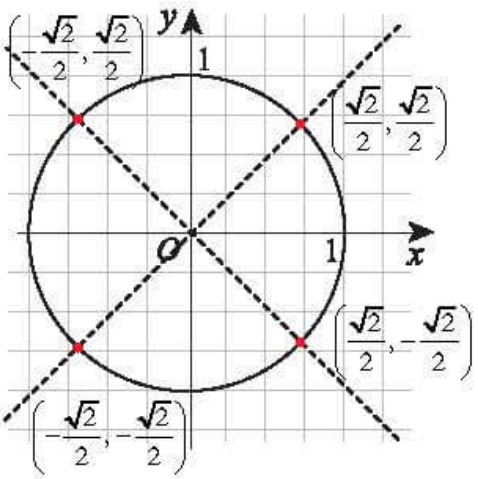


3.13. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin 45^\circ+\sin 225^\circ$, **b)** $\sin\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}$,

c) $\cos 225^\circ+\cos 405^\circ$, **d)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$,

e) $\operatorname{tg}135^\circ-\frac{1}{\operatorname{tg}(-135^\circ)}$, **f)** $\frac{1}{\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.



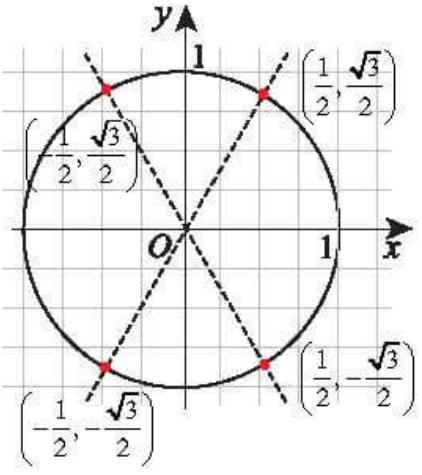
3.14. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin 120^\circ\cdot\cos(-240^\circ)$,

b) $\cos\frac{5\pi}{3}:\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$,

c) $\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}120^\circ\cdot\operatorname{tg}240^\circ\cdot\operatorname{tg}300^\circ\cdot\operatorname{tg}420^\circ$,

d) $2\cdot\sin\frac{\pi}{3}-3\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$.



3.15. Narysuj końcowe ramię kąta α i zaznacz ten kąt, gdy:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, **b)** $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$, **c)** $\cos\alpha = 0,4$,

d) $\cos\alpha = -0,4$, **e)** $\operatorname{tg}\alpha = 0,2$, **f)** $\operatorname{tg}\alpha = -0,2$.

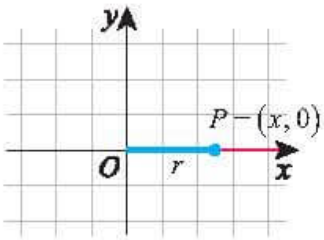
3.16. Narysuj końcowe ramię kąta α i zaznacz ten kąt, gdy:

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, **b)** $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Wartości funkcji trygonometrycznych wielokrotności kąta $\frac{\pi}{2}$

Przykład 11. W układzie współrzędnych zaznacz kąty odpowiednio o miarach 0°, 90°, 270°. Obierz dowolny punkt P ($P \neq O$) należący do końcowego ramienia każdego z nich i oblicz wartości funkcji trygonometrycznych.

Rozwiązanie $P = (x, y)$, $r = |OP|$.

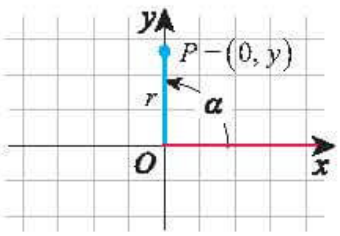


$x > 0$, więc $r = |x| = x$

$\sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{x} = 0$

$\cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{x}{x} = 1$

$\operatorname{tg} 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{x} = 0.$

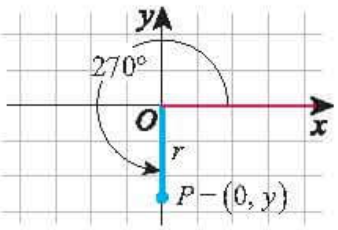


$y > 0$, więc $r = |y| = y$

$\sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{y}{y} = 1$

$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{y} = 0$

$\operatorname{tg} 90°$ – *nie istnieje, bo odcięta punktu P jest równa 0.*



$y < 0$, więc $r = |y| = -y$

$\sin 270° = \frac{y}{r} = \frac{y}{-y} = -1$

$\cos 270° = \frac{x}{r} = \frac{0}{-y} = 0$

$\operatorname{tg} 270°$ – *nie istnieje, bo odcięta punktu P jest równa 0.*

Ćwiczenie 16. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, gdy:

a) $\alpha = 180°$, **b)** $\alpha = 2\pi$.

	Wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha = k \cdot 90°$, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$				
Funkcje trygonometryczne / α	$0° = 0$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = \frac{3\pi}{2}$	$360° = 2\pi$
$\sin\alpha$	0	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	*nie istnieje*	0	*nie istnieje*	0

Ćwiczenie 17. Oblicz:

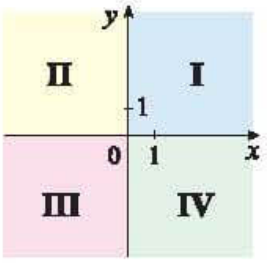
a) $\sin 0° + \sin 90° + \cos 270° - 3\operatorname{tg} 180°$, **b)** $2 \cdot \sin \frac{3\pi}{2} - \operatorname{tg} \pi - \cos 2\pi$.

Znaki wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

Przypomnijmy

Punkt $P = (x, y)$ leży w ćwiartce:

I, gdy $x > 0$ i $y > 0$,
II, gdy $x < 0$ i $y > 0$,
III, gdy $x < 0$ i $y < 0$,
IV, gdy $x > 0$ i $y < 0$.



Przykład 12. Określ znaki wartości funkcji trygonometrycznych kąta α ćwiartki III.

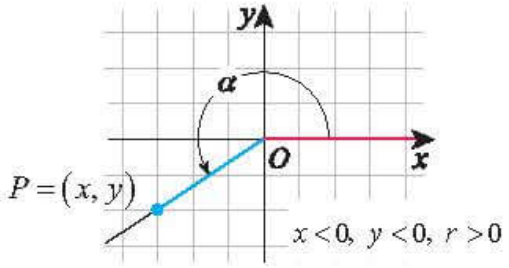
Rozwiązanie

Punkt $P = (x, y)$ leży w ćwiartce III, więc $x < 0$, $y < 0$ i $r > 0$.

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ i $\frac{y}{r} < 0$, więc $\sin\alpha < 0$,

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ i $\frac{x}{r} < 0$, więc $\cos\alpha < 0$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ i $\frac{y}{x} > 0$, więc $\operatorname{tg}\alpha > 0$.



Ćwiczenie 18. Wykaż, że jeżeli końcowe ramię kąta α zawiera się w:

a) II ćwiartce, to: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$,

b) IV ćwiartce, to: $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

	Znaki wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, gdy jego końcowe ramię zawiera się w:			
ćwiartce / **Funkcje trygonometryczne**	**I** $0° < \alpha < 90°$ $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	**II** $90° < \alpha < 180°$ $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	**III** $180° < \alpha < 270°$ $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$	**IV** $270° < \alpha < 360°$ $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−

Ćwiczenie 19. Określ znak wartości wyrażenia: **a)** $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, gdy $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$,

b) $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$, gdy $180^\circ<\alpha<270^\circ$, **c)** $\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha$, gdy $\alpha\in\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$.

Twierdzenie

Dla dowolnego kąta α, dla którego istnieje wartość danej funkcji trygonometrycznej, prawdziwe są równości:

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

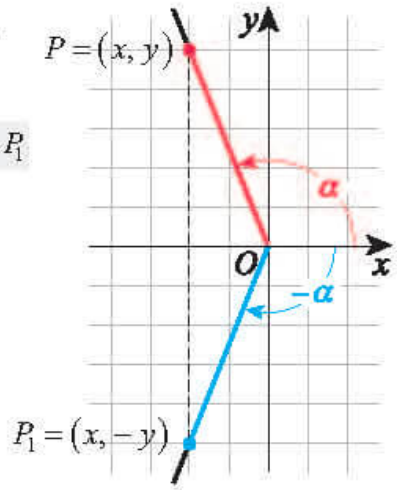
Wykażemy, że $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ i $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

Z (***założenie***): α – dowolny kąt. | *T* (***teza***): $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

Dowód:

Jeżeli punkt $P=(x,y)$ należy do końcowego ramienia kąta α, to punkt $P_1=(x,-y)$ należy do końcowego ramienia kąta $-\alpha$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych: $S_x(P)=P_1$



- $\sin\alpha=\frac{y}{r}$ i $\sin(-\alpha)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}=-\sin\alpha$, więc

  $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$. ***cnw.***

- $\cos\alpha=\frac{x}{r}$ i $\cos(-\alpha)=\frac{x}{r}=\cos\alpha$, więc

  $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$. ***cnw.***

Ćwiczenie 20. Wykaż, że $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

Przykład 13. Oblicz: **a)** $\sin(-60^\circ)$, **b)** $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

Rozwiązanie $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ i $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, więc:

a) $\sin(-60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, **b)** $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\frac{3}{2}\pi=0$.

Odp.: **a)** $\sin(-60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, **b)** $\cos\frac{3}{2}\pi=0$.

Ćwiczenie 21. Oblicz: **a)** $\cos(-60^\circ)$, **b)** $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, **c)** $\operatorname{tg}(-\pi)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

16. Kolejno: a) 0, –1, 0, b) 0, 1, 0. 17. a) 1, b) –3.

19. a) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$, b) $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}<0$, c) $\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha<0$. 21. a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) 0.

Zadania utrwalające

3.17. Podaj wartości funkcji trygonometrycznych dla każdego z kątów:

$2\pi,\ \frac{7}{2}\pi,\ 1000\pi,\ -900^\circ,\ -\frac{3}{2}\pi,\ -180^\circ,\ -\frac{\pi}{2}$.

3.18. Oblicz:

a) $\sin(-180^\circ),\ \cos 630^\circ,\ \operatorname{tg}(-540^\circ)$, b) $\operatorname{tg}5\pi-\sin 5\pi$, c) $\frac{\sin 0-\cos 0}{\sin 0+\cos 0}$,

d) $\sin\pi\cdot\cos\pi\cdot\operatorname{tg}\pi$, e) $\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)$.

3.19. Określ, do której ćwiartki układu współrzędnych należy końcowe ramię kąta α, gdy:

a) $\sin\alpha>0$ i $\cos\alpha>0$, b) $\sin\alpha>0$ i $\operatorname{tg}\alpha>0$, c) $\cos\alpha<0$ i $\operatorname{tg}\alpha<0$,

d) $\sin\alpha<0$ i $\cos\alpha<0$, e) $\sin\alpha<0$ i $\operatorname{tg}\alpha>0$, f) $\operatorname{tg}\alpha<0$ i $\sin\alpha<0$.

3.20. Określ znak wartości funkcji trygonometrycznej:

a) $\sin 241^\circ$, b) $\cos 138^\circ$, c) $\operatorname{tg}190^\circ$, d) $\operatorname{tg}(-287^\circ)$,

e) $\sin(-100^\circ)$, f) $\cos(-270^\circ)$, g) $\operatorname{tg}1050^\circ$, h) $\operatorname{tg}(-1050^\circ)$.

3.21. Określ znak wartości funkcji trygonometrycznej:

a) $\sin\alpha$, gdy $\alpha\in(6{,}5\pi;7\pi)$, b) $\cos\alpha$, gdy $810^\circ<\alpha<900^\circ$,

c) $\sin\alpha$, gdy $-270^\circ<\alpha<-180^\circ$, d) $\operatorname{tg}\alpha$, gdy $\alpha\in(-4\pi;-3{,}5\pi)$.

3.22. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\frac{1}{2}\sin(-\alpha)+2\sin(-\alpha)+\sin(-\alpha)+4\sin\alpha$, b) $\operatorname{tg}(-\alpha)-3\operatorname{tg}(-\alpha)+2\operatorname{tg}\alpha$,

c) $\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)-3\cos\alpha+3\sin(-\alpha)$, d) $2\operatorname{tg}(-\alpha)+3\operatorname{tg}\alpha-4\operatorname{tg}(-\alpha)+4\operatorname{tg}\alpha$.

3.23. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, b) $\frac{2\sin(-45^\circ)+4\cos(-45^\circ)}{\operatorname{tg}^2(-30^\circ)+\operatorname{tg}(-45^\circ)}$,

c) $\sin^2\alpha+\cos^2\beta$, gdy $\alpha=\pi$ i $\beta=\frac{3}{2}\pi$, d) $\sin 2\alpha+\cos^2\alpha$, gdy $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Wzory redukcyjne

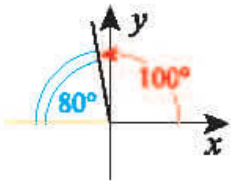
Wzory redukcyjne służą do przedstawiania wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych kąta I ćwiartki.

- Każdy kąt β, którego ramię końcowe należy do ćwiartki II, można przedstawić w postaci:

  $\beta = 180° - \alpha$, gdzie $0° < \alpha < 90°$, albo w postaci

  $\beta = \pi - \alpha$, gdzie $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

  Np. $100° = 180° - 80°$ albo $\frac{5\pi}{9} = \pi - \frac{4\pi}{9}$.

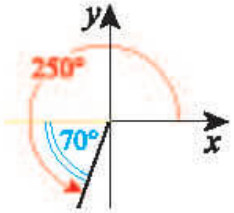


- Każdy kąt β, którego ramię końcowe należy do ćwiartki III, można przedstawić w postaci:

  $\beta = 180° + \alpha$, gdzie $0° < \alpha < 90°$, albo w postaci

  $\beta = \pi + \alpha$, gdzie $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

  Np. $250° = 180° + 70°$ albo $\frac{25\pi}{18} = \pi + \frac{7\pi}{18}$.



Uwaga

Każdy kąt β, który nie jest wielokrotnością kąta prostego, można przedstawić w postaci:

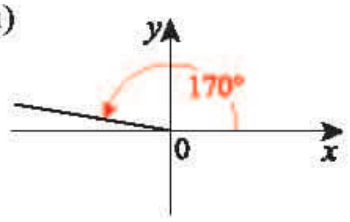
lub

$\beta = \mathbf{180°} \pm \alpha$ albo $\beta = \mathbf{360°} \pm \alpha$, gdzie $0° < \alpha < 90°$

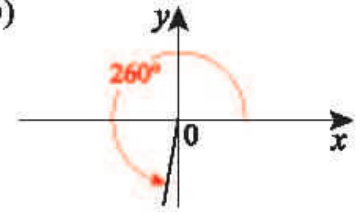
$\beta = \pi \pm \alpha$ albo $\beta = \mathbf{2}\pi \pm \alpha$, gdzie $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ćwiczenie 22. Na rysunku zaznaczony jest kąt skierowany.
Przedstaw ten kąt w postaci $180° \pm \alpha$ lub $360° \pm \alpha$, gdzie $0° < \alpha < 90°$.

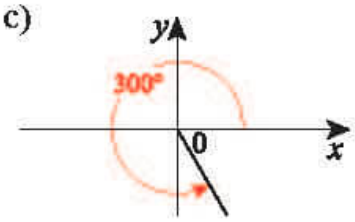
a)



b)



c)



W klasie drugiej poznaliśmy już pierwsze wzory redukcyjne ułatwiające obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów, których ramię końcowe należy do II ćwiartki.

Przypomnijmy

Jeśli kąt α jest kątem ostrym, to:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Ćwiczenie 23. Zapisz poznane wzory redukcyjne w mierze łukowej.

Ćwiczenie 24. Oblicz: **a)** $\sin 135°$, **b)** $\cos\frac{3\pi}{4}$, **c)** $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$.

Ćwiczenie 25. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\dfrac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cdot\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos(180°-\alpha)}$, **b)** $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)-\sin\alpha}{\cos(\pi-\alpha)-\cos\alpha}$.

Poznamy teraz wzory ułatwiające obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy końcowe ramię kąta należy do III albo IV ćwiartki.

Twierdzenie

Dla każdego kąta $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ spełnione są równości zwane wzorami redukcyjnymi.

- $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$
- $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
- $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$
- $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
- $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
- $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$
- $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$

Wykażemy, że $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$, gdy $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

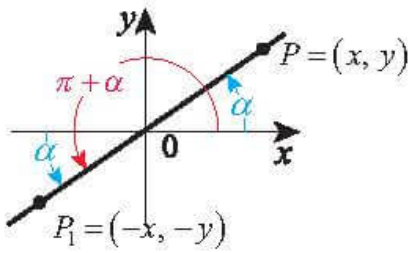
Z (***założenie***): $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. | *T* (***teza***): $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$.

Dowód:

Jeżeli α jest kątem ćwiartki I, to kąt $\pi+\alpha$ jest kątem ćwiartki III.

Punkt $P=(x,y)$ należy do końcowego ramienia kąta α.

Jeżeli $P_1=S_0(P)$*), to $|OP|=|OP_1|=r$ i $P_1=(-x,-y)$.



$$\cos(\pi+\alpha)=\frac{-x}{r}=-\frac{x}{r} \quad \text{i} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}, \quad \text{więc}$$

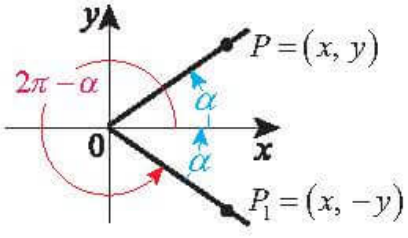
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha. \qquad \textit{cnw.}$$

Ćwiczenie 26. Wykaż, że $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ oraz $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$.

Ćwiczenie 27. Wykaż, że:

a) $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$, **b)** $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$,

c) $\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.



*) $P_1=S_0(P)$ oznacza, że punkt P_1 jest obrazem punktu P w symetrii względem początku układu współrzędnych.

Przykład 14. Zastosuj wzory redukcyjne i oblicz:

a) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$, b) $\operatorname{tg}(-135°)$, c) $\cos(-240°)$, d) $\operatorname{tg}\frac{11}{6}\pi$.

Rozwiązanie

a) $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\sin\frac{2}{3}\pi = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\operatorname{tg}(-135°) = -\operatorname{tg}135° = -\operatorname{tg}(180° - 45°) = -(-\operatorname{tg}45°) = \operatorname{tg}45° = 1$,

c) $\cos(-240°) = \cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$,

d) $\operatorname{tg}\frac{11}{6}\pi = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ćwiczenie 28. Zastosuj wzory redukcyjne i oblicz:

a) $\sin\frac{3}{4}\pi$, b) $\operatorname{tg}225°$, c) $\cos(-315°)$, d) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$.

Uwaga

Jeżeli $\alpha \in \boldsymbol{R}$ i istnieją wartości funkcji trygonometrycznych kąta β, to prawdziwe są zależności:

β	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

Okresowość funkcji trygonometrycznych

Przypomnijmy

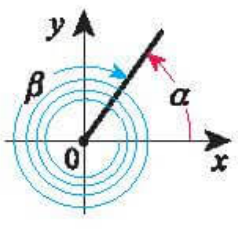
Miarą główną kąta skierowanego β jest kąt α, gdy

$\boldsymbol{\beta = k \cdot 360° + \alpha}$, gdzie $0° \le \alpha < 360°$ i $k \in Z$, *albo*

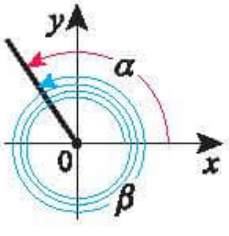
$\boldsymbol{\beta = k \cdot 2\pi + \alpha}$, gdzie $\alpha \in \langle 0; 2\pi)$ i $k \in Z$.

Ćwiczenie 29. Zapisz miarę kąta β przedstawionego na rysunku w postaci $\beta = \alpha + k \cdot 2\pi$, gdzie $k \in Z$.

a)



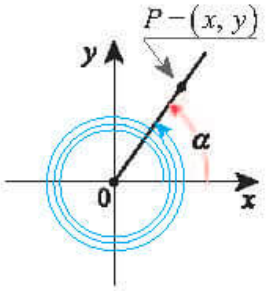
b)



Ćwiczenie 30. Określ, do której ćwiartki układu współrzędnych należy końcowe ramię kąta o mierze:

a) $500°$, **b)** -500, **c)** $\frac{17}{6}\pi$, **d)** $-\frac{17}{6}\pi$, **e)** $1100°$, **f)** $-1100°$.

Zauważamy, że jeśli α jest miarą główną kąta skierowanego i $k \in Z$, to:

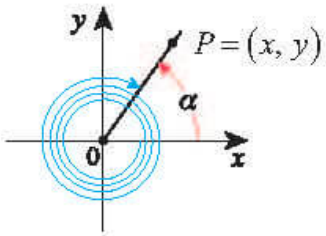


$$\sin\alpha = \sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin(\alpha \pm 2 \cdot 2\pi) =$$

$$= \sin(\alpha \pm 3 \cdot 2\pi) = \ldots = \sin(\alpha \pm k \cdot 2\pi) = \frac{y}{r},$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos(\alpha \pm 2 \cdot 2\pi) =$$

$$= \cos(\alpha \pm 3 \cdot 2\pi) = \ldots = \cos(\alpha \pm k \cdot 2\pi) = \frac{x}{r},$$



gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zatem

$\mathbf{sin}(2k\pi + \alpha) = \mathbf{sin}\,\alpha$, gdzie $k \in Z$,

$\mathbf{cos}(2k\pi + \alpha) = \mathbf{cos}\,\alpha$, gdzie $k \in Z$.

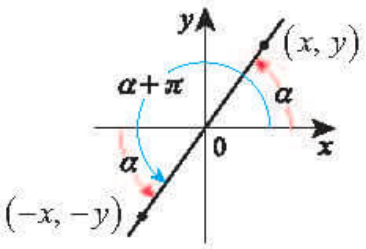
Definicja

Liczbę 2π (360°) dla funkcji sinus i cosinus nazywamy **okresem podstawowym** tych funkcji.

Okres podstawowy funkcji to najmniejsza dodatnia liczba, która dodana do (odjęta od) argumentu funkcji nie zmienia jej wartości, np.

$$\sin 1000° = \sin \underbrace{640°}_{1000°-360°} = \sin \underbrace{1360°}_{1000°+360°} = \sin \underbrace{280°}_{1000°-2\cdot 360°} = \sin \underbrace{(-80°)}_{1000°-3\cdot 360°} = \ldots .$$

Okresem podstawowym dla funkcji tangens jest liczba π, bo



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ i $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$, więc

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}(\alpha \pm 2\pi) = \ldots = \operatorname{tg}(\alpha + k\pi)$.

Zatem $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg}\alpha$, gdzie $k \in Z$.

Definicja

Liczbę π (180°) dla funkcji tangens nazywamy **okresem podstawowym** tej funkcji.

Uwaga

Dla dowolnego kąta α, gdzie $0° \le \alpha < 360°$, dla którego istnieją wartości funkcji trygonometrycznych oraz dla dowolnej liczby całkowitej k prawdziwe są równości:

- $\sin(k\cdot 360° + \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(k\cdot 360° + \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(k\cdot 180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$,
- $\sin(k\cdot 2\pi + \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(k\cdot 2\pi + \alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(k\cdot \pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$.

Przykład 15. Oblicz: **a)** $\sin 750°$, **b)** $\cos 1290°$, **c)** $\operatorname{tg} 855°$, **d)** $\sin\left(-\frac{14}{3}\pi\right)$.

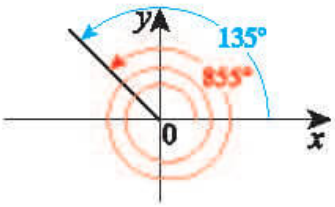
Rozwiązanie

a) $\sin 750° = \sin(2\cdot 360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$,

b) $\cos 1290° = \cos(3\cdot 360° + 210°) = \cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

c) $\operatorname{tg} 855° = \operatorname{tg}(4\cdot 180° + 135°) = \operatorname{tg} 135° =$

$= \operatorname{tg}(180° - 45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1$,



d) $\sin\left(-\frac{14}{3}\pi\right) = -\sin\frac{14}{3}\pi = -\sin\left(4\pi + \frac{2}{3}\pi\right) =$

$= -\sin\frac{2}{3}\pi = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ćwiczenie 31. Oblicz: **a)** $\sin 1035°$, **b)** $\cos 600°$, **c)** $\operatorname{tg}(-900°)$.

Ćwiczenie 32. Oblicz: **a)** $\sin\left(2\frac{5}{6}\pi\right)$, **b)** $\cos\left(-\frac{13}{4}\pi\right)$, **c)** $\operatorname{tg}\left(-5\frac{2}{3}\pi\right)$.

Przykład 16. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\sin\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right)$, **b)** $\sin(\alpha - 2\pi) - \sin(\alpha - 4\pi) - \sin(\alpha - \pi)$.

Rozwiązanie

a) $\sin\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) =$

$= \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] =$ $\quad \sin(\pi + \beta) = -\sin\beta$, gdzie $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$. $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

b) $\sin(\alpha-2\pi)-\sin(\alpha-4\pi)-\sin(\alpha-\pi)=$

$=\sin[-(2\pi-\alpha)]-\sin[-(4\pi-\alpha)]-\sin[-(\pi-\alpha)]=$

$=-\sin(2\pi-\alpha)-[-\sin(4\pi-\alpha)]-[-\sin(\pi-\alpha)]=$

$=\sin\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha=\sin\alpha.$

Odp.: **a)** $-\cos\alpha$, **b)** $\sin\alpha$.

Ćwiczenie 33. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\cos(\alpha-2\pi)-\sin(2\pi-\alpha)$, **b)** $\sin(\alpha-9\pi)+\cos(\alpha-9\pi)$.

Ćwiczenie 34. Wykaż, że: **a)** $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$, **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

22. a) $170°=180°-10°$, b) $260°=180°+80°$, c) $300°=360°-60°$.

23. $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. 24. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $-\sqrt{3}$.

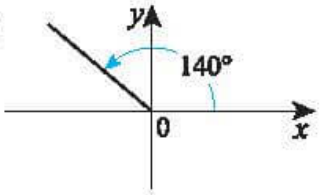
25. a) $\operatorname{tg}\alpha$, b) 0. 28. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) 1, c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $\sqrt{3}$. 29. a) $\beta=\alpha-4\cdot2\pi$, b) $\beta=\alpha+3\cdot2\pi$.

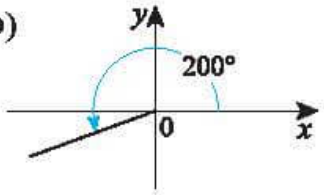
30. Ćwiartka: a) II, b) III, c) II, d) III, e) I, f) IV. 31. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) 0.

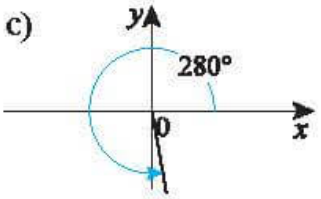
32. a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\sqrt{3}$. 33. a) $\cos\alpha+\sin\alpha$, b) $-\sin\alpha-\cos\alpha$.

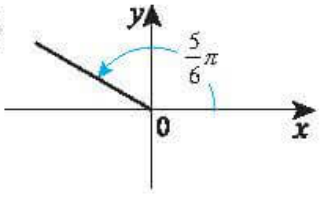
Zadania utrwalające

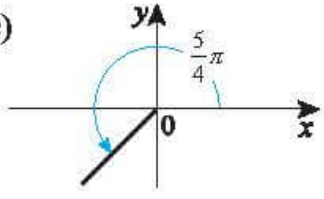
3.24. Przedstaw zaznaczony na rysunku kąt w postaci $\pi\pm\alpha$ albo $180°\pm\alpha$ lub $2\pi-\alpha$ albo $360°\pm\alpha$, gdzie $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

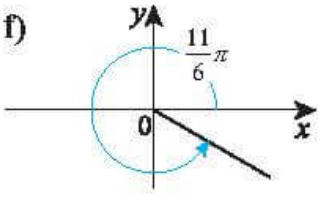
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

3.25. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\operatorname{tg}150°-\cos150°$, **b)** $\sin\frac{2}{3}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi$, **c)** $\sin\frac{5}{4}\pi\cdot\cos\frac{5}{4}\pi\cdot\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi$,

d) $\sin(-210°)+\cos(-240°)+\operatorname{tg}(-210°)$, **e)** $\sin870°+\cos1020°+\operatorname{tg}1200°$.

3.26. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sin 390^\circ + \cos 420^\circ - \operatorname{tg} 405^\circ$,

b) $\sin^2 765^\circ + \cos^2 135^\circ - 2\operatorname{tg} 1485^\circ$,

c) $\dfrac{\cos 750^\circ + \operatorname{tg} 315^\circ}{\operatorname{tg} 765^\circ - \sin 1110^\circ}$,

d) $\sin\dfrac{7}{4}\pi - \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.27. Skorzystaj z wzorów redukcyjnych oraz tablic i oblicz wartość funkcji trygonometrycznej. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

a) $\sin 104^\circ$, **b)** $\cos 166^\circ$, **c)** $\operatorname{tg} 170^\circ$, **d)** $\operatorname{tg}(-146^\circ)$,

e) $\sin(-325^\circ)$, **f)** $\cos 253^\circ$, **g)** $\operatorname{tg}(-834^\circ)$, **h)** $\operatorname{tg} 660^\circ$.

3.28. Podaj dwa kąty dodatnie i dwa kąty ujemne, dla których:

a) $\sin\alpha = \sin 12^\circ$, **b)** $\cos\alpha = \cos(-50^\circ)$, **c)** $\sin\alpha = \cos 70^\circ$,

d) $\sin\alpha = 0{,}342$, **e)** $\cos\alpha = 0{,}682$, **f)** $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}327$.

3.29. Przekształć do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\sin(\pi+\alpha) - \cos(\pi+\alpha)$,

b) $\cos(\pi+\alpha)\sin(\pi-\alpha)$,

c) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$,

d) $\sin(360^\circ-\alpha)\cdot\sin(360^\circ+\alpha)$,

e) $\dfrac{\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}(360^\circ+\alpha)}$,

f) $[1-\cos(360^\circ-\alpha)][1+\cos(360^\circ+\alpha)]$.

3.30. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\sin(\alpha-\pi) - \cos(\alpha+\pi)$,

b) $\cos(\alpha-11\pi) - \cos(\alpha+11\pi)$,

c) $\operatorname{tg}(\alpha-5\pi)\cdot\cos(\alpha-\pi)$,

d) $\dfrac{\sin(\alpha-15\pi)}{\cos(\alpha-21\pi)}$.

3.31. D Wykaż, że:

a) $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\cos\alpha$,

b) $\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\sin\alpha$.

3.32. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)$, **b)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) - \cos(\pi-\alpha)$, **c)** $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

Związki zachodzące między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego są prawdziwe również dla kąta dowolnego.

Twierdzenie

Jeżeli $\alpha \in R$, to:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ *(jedynka trygonometryczna)*
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, gdy $\cos\alpha \neq 0$
- $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, gdy $\sin\alpha \neq 0$ i $\cos\alpha \neq 0$.

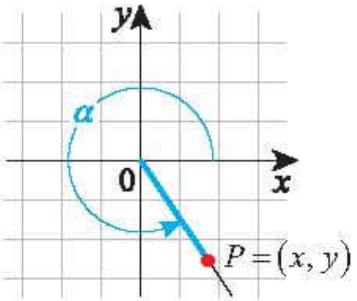
Wykażemy, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest równość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Z (***założenie***): α – dowolny kąt. | *T* (***teza***): $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Dowód:

Jeżeli punkt $P = (x, y)$ różny od punktu O jest punktem należącym do końcowego ramienia kąta α i $|OP| = r$, to:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \text{ i } \cos\alpha = \frac{x}{r}, \text{ gdzie } r^2 = x^2 + y^2.$$



Zatem $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 =$

$$= \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1, \text{ czyli}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. ***cnw.***

Ćwiczenie 35. Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest równość $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, gdy $\cos\alpha \neq 0$.

Ćwiczenie 36. Oblicz:

a) $\operatorname{tg}\alpha$, gdy $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\sin\alpha$, gdy $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$,

c) $\cos\alpha$, gdy $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ i $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$.

Przykład 17. Wiedząc, że $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$, oblicz wartości $\cos\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

Rozwiązanie

$\sin\alpha=-\frac{2}{5}$, więc kąt α jest kątem III lub IV ćwiartki.

I sposób

$$\cos^2\alpha=1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{21}{25} \qquad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\boldsymbol{\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}} \text{ lub } \boldsymbol{\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}} \qquad \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{21}}{5}$$

- $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$, więc $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}}=\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{21}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

- $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}$, więc $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}}=-\frac{2}{\sqrt{21}}=-\frac{2\sqrt{21}}{21}$. $\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

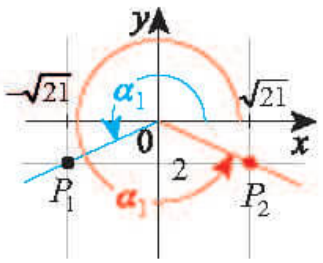
II sposób

$\sin\alpha=-\frac{2}{5}=\frac{-2}{5}=\frac{y}{r}$, czyli $y=-2$, $r=5$ i $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$5=\sqrt{x^2+(-2)^2}$

$25=x^2+4$

$21=x^2$, skąd $x=-\sqrt{21}$ lub $x=\sqrt{21}$.



Punkt $P_1=\left(-\sqrt{21},-2\right)$ należy do III ćwiartki.

Punkt $P_2=\left(\sqrt{21},-2\right)$ należy do IV ćwiartki.

$$\boldsymbol{\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}} \qquad \text{lub} \quad \boldsymbol{\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}}=\frac{2}{\sqrt{21}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{21}}{21}} \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}}=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{21}}{21}}.$$

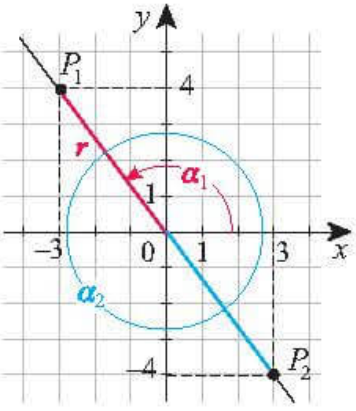
Odp.: $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{21}}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{21}}{21}$ lub $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2\sqrt{21}}{21}$.

Ćwiczenie 37. Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, oblicz wartości $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$.

Przykład 18. Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, oblicz wartości $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

Rozwiązanie

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3} = \frac{-4}{3} = \frac{4}{-3}$, więc α jest kątem II albo IV ćwiartki.



II ćwiartka: $P_1 = (-3, 4)$, $r = 5$, więc

$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \text{ i } \cos\alpha = -\frac{3}{5},$$

IV ćwiartka: $P_2 = (3, -4)$, $r = 5$, więc

$$\sin\alpha = -\frac{4}{5} \text{ i } \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

Odp.: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ lub $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Ćwiczenie 38. Oblicz:

a) $\sin\alpha$, gdy $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, **b)** $\operatorname{tg}\alpha$, gdy $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,

c) $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, gdy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Definicja

Tożsamością trygonometryczną nazywamy każde równanie wyrażające zależności między funkcjami trygonometrycznymi zachodzące dla wszystkich kątów, dla których wartości tych funkcji istnieją.

Przykład 19. Wykaż, że dla każdego kąta α tożsamością jest równość:

a) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

b) $\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right) \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha) = 2 + \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$, gdzie $\sin\alpha \neq 0$ i $\cos\alpha \neq 0$.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia:

L – lewa strona równania, P – prawa strona równania.

a) $L=\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=$ $\quad\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

$=\sin^2\alpha\cdot\underbrace{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)}_{1}+\cos^2\alpha=$ $\quad\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1=P,$ czyli $L=P.$ ***cnw.***

b) $L=\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)=$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha=$

$=1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1=2+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=$ $\quad1-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha},\ 1-\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha}$

$=2+\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2+\dfrac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=P,$ czyli $L=P.$ ***cnw.***

Ćwiczenie 39. Wykaż, że dla każdego kąta α tożsamością jest równość:

a) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1,$

b) $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\operatorname{tg}\alpha.$

Odpowiedzi do ćwiczeń

36. a) $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$, c) $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$.

37. $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ i $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ lub $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ i $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

38. a) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, c) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Zadania utrwalające

3.33. Sprawdź, czy istnieje kąt α, taki że:

a) $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$ i $\cos\alpha=\dfrac{2}{3},$

b) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos\alpha=\dfrac{1}{2},$

c) $\cos\alpha=-\dfrac{2}{7}$ i $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{3\sqrt{5}}{2},$

d) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}005$ i $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=500.$

3.34. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, gdy:

a) $\sin\alpha=0{,}8,$ **b)** $\cos\alpha=-\dfrac{3}{4},$ **c)** $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{2}{3},$ **d)** $\operatorname{tg}\alpha=3.$

3.35. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, gdy:

a) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ i $180° < \alpha < 270°$,

b) $\cos\alpha = 0{,}6$ i $270° < \alpha < 360°$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5}$ i $90° < \alpha < 180°$,

d) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$ i $270° < \alpha < 360°$.

3.36. Przekształć do najprostszej postaci wyrażenie:

a) $(\sin\alpha + 1)(\sin\alpha - 1)$,

b) $\sin^2(-540°) + \cos^2(-540°)$,

c) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$,

d) $(1 - \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha)$,

e) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$,

f) $\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha\right)^2 + \sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha$.

3.37. D Wykaż, że dla każdego kąta α tożsamością jest równość:

a) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 4\sin\alpha\cos\alpha$,

b) $1 - (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) = 2\cos^2\alpha$,

c) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = 2$,

d) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$,

e) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

3.38. Podaj odpowiednie założenia i sprawdź, czy równość jest tożsamością.

a) $\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$,

b) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$,

c) $\cos\alpha \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \sin^2\alpha$,

d) $\frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha}$,

e) $\frac{\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$,

f) $(1 + \sin\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = 0$,

g) $\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right) \cdot \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - 1\right) = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$,

h) $\frac{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów, korzystamy z podanego poniżej twierdzenia.

Twierdzenie

Dla dowolnych kątów α i β:

- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Wykażemy prawdziwość wzoru $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Z (***założenie***): α, β – dowolne kąty skierowane. | ***T*(*teza*)**: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Dowód:

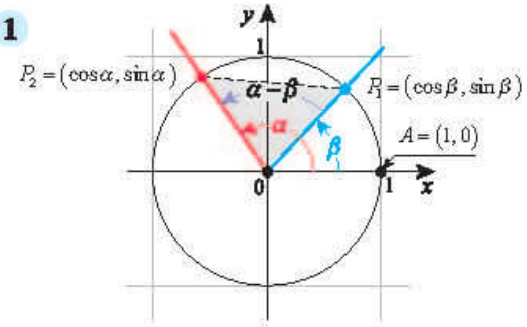
Jeżeli punkty P_2, P_1, które należą do końcowych ramion kątów α i β, są punktami należącymi do okręgu o środku w punkcie O i promieniu 1 (rysunek **1**), to:

$P_1=(\cos\beta,\sin\beta)$, $P_2=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ i $|\sphericalangle P_1OP_2|=\alpha-\beta$.

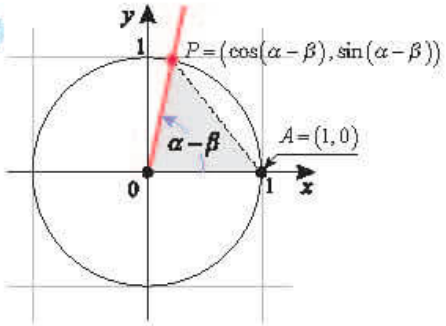
Rysujemy trójkąt AOP, taki że $\Delta OAP\equiv\Delta OP_1P_2$ (rysunek **2**).

Zauważamy, że $P=(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$.

1



2



$|P_1P_2|=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$, $|AP|=\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2}$.

$|P_1P_2|=|AP|$, więc $(|P_1P_2|)^2=(|AP|)^2$, czyli

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2$.

$\underbrace{\cos^2\alpha}-2\cos\alpha\cos\beta+\underbrace{\cos^2\beta+\sin^2\alpha}-2\sin\alpha\sin\beta+\underbrace{\sin^2\beta}-\underbrace{\cos^2(\alpha-\beta)}-2\cos(\alpha-\beta)+1+\underbrace{\sin^2(\alpha-\beta)}$

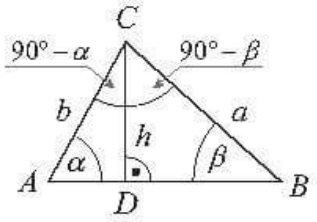
$1-2\cos\alpha\cos\beta+1-2\sin\alpha\sin\beta=1-2\cos(\alpha-\beta)+1$, skąd

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. ***cnw.***

Ćwiczenie 40. Skorzystaj z równości

$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ADC} + P_{\Delta BDC}$ oraz

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin(90° - \alpha + 90° - \beta)$, gdzie



$P_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}bh \cdot \sin(90° - \alpha)$, $P_{\Delta BDC} = \frac{1}{2}ah \cdot \sin(90° - \beta)$

i uzasadnij wzór $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, gdy $0° < \alpha + \beta < 180°$.

Poznane wzory pozwalają nam obliczać wartości funkcji trygonometrycznych niektórych kątów bez użycia tablic i kalkulatora. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 20. Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora, wartość wyrażenia:

a) $\sin 75°$, **b)** $\frac{1}{\operatorname{tg} 15°}$.

Rozwiązanie

a) $\sin 75° = \sin(30° + 45°) =$

$75° = 30° + 45°$

$\sin(30° + 45°) = \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

b) $$\frac{1}{\operatorname{tg} 15°} = \frac{\cos 15°}{\sin 15°} = \frac{\cos(45° - 30°)}{\sin(45° - 30°)} = \frac{\cos 45°\cdot\cos 30° + \sin 45°\sin 30°}{\sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}.$$

Odp.: **a)** $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, **b)** $\frac{1}{\operatorname{tg} 15°} = 2 + \sqrt{3}$.

Ćwiczenie 41. Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora, wartość:

a) $\cos 75°$, **b)** $\sin 105°$, **c)** $\sin(60° - 45°)$.

Poznane wzory na obliczanie funkcji trygonometrycznych sumy kątów pozwalają wyprowadzić wzory na obliczanie funkcji trygonometrycznych podwojonych kątów.

Twierdzenie

Jeżeli α jest dowolnym kątem, to:

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$,
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, gdy $\cos\alpha \neq 0$, $\cos 2\alpha \neq 0$ i $\operatorname{tg}\alpha \neq \pm 1$.

Wykażemy, że dla dowolnego kąta α tożsamością jest równość $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. ***cnw.***

Ćwiczenie 42. Wykaż, że dla każdego kąta α tożsamością jest równość:

a) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, **b)** $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Ćwiczenie 43. Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwy jest związek:

a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, **b)** $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, gdy $\cos\alpha \neq 0$ i $\cos 2\alpha \neq 0$.

Wzory na obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych podwojonych kątów pozwalają obliczać np. wartości:

- funkcji trygonometrycznych połowy kątów,

  np. $\sin\alpha = 2\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$,
- wyrażeń bez użycia tablic i kalkulatora,
- funkcji trygonometrycznych poczwórnych itp. kątów,

  np. $\sin(4\alpha) = \sin(2\cdot 2\alpha) = 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)$.

Pokażemy to na przykładach.

Przykład 21. Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora, wartość $\cos 22{,}5°$.

Rozwiązanie

$\cos 45° = 2\cos^2 22{,}5° - 1$ $\qquad 45° = 2\cdot 22{,}5°$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 22{,}5° - 1 \iff \cos^2 22{,}5° = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$ $\qquad \cos 45° = 2\cos^2 22{,}5° - 1$

$\cos 22{,}5° = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}$ lub $\cos 22{,}5° = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}$.

Kąt $22{,}5°$ jest kątem ćwiartki I, więc $\cos 22{,}5° = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}$.

Ćwiczenie 44. Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora, wartość $\cos 15°$.

Przykład 22. Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora, wartość wyrażenia
$\dfrac{\cos^2 85° - \sin^2 85°}{2\sin 85° \cos 85°} \cdot \operatorname{tg} 170°$.

Rozwiązanie

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\frac{\cos^2 85° - \sin^2 85°}{2\sin 85° \cos 85°} \cdot \operatorname{tg} 170° = \frac{\cos(2\cdot 85°)}{\sin(2\cdot 85°)} \cdot \operatorname{tg} 170° =$$

$$= \frac{\cos 170°}{\sin 170°} \cdot \operatorname{tg} 170° = \frac{\cos 170°}{\sin 170°} \cdot \frac{\sin 170°}{\cos 170°} = 1.$$

Ćwiczenie 45. Oblicz, bez użycia tablic, wartość wyrażenia $\dfrac{2\sin 15° \cos 15°}{\cos^2 15° - \sin^2 15°}$.

Przykład 23. Wiedząc, że $\cos\alpha = -\dfrac{15}{17}$ i $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3}{2}\pi\right)$, oblicz:

a) $\cos 2\alpha$, **b)** $\sin 2\alpha$, **c)** $\sin 3\alpha$.

Rozwiązanie

$$\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right), \text{ więc } \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} \text{ i } \cos\alpha = -\frac{15}{17}, \text{ skąd}$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{15}{17}\right)^2} = -\frac{8}{17}.$$

a) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, więc $\cos 2\alpha = 2\cdot\left(-\dfrac{15}{17}\right)^2 - 1 = \dfrac{161}{289}$,

b) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, więc $\sin 2\alpha = 2\cdot\left(-\dfrac{8}{17}\right)\cdot\left(-\dfrac{15}{17}\right) = \dfrac{240}{289}$,

c) $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) =$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{240}{289}\cdot\left(-\frac{15}{17}\right) + \frac{161}{289}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right) =$$

$$= -\frac{8}{17^3}\cdot(30\cdot 15 - 161) = -\frac{4888}{4913}.$$

Odp.: **a)** $\cos 2\alpha = \dfrac{161}{289}$, **b)** $\sin 2\alpha = \dfrac{240}{289}$, **c)** $\sin 3\alpha = -\dfrac{4888}{4913}$.

Ćwiczenie 46. Wiedząc, że $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$ i $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, oblicz:

a) $\cos 2\alpha$, **b)** $\sin 2\alpha$, **c)** $\operatorname{tg} 2\alpha$, **d)** $\cos 3\alpha$.

Przykład 24. Wykaż, że $\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie

$$\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2}_{1} \cdot \sin 18^\circ \cdot \frac{\cos 18^\circ}{\underbrace{\cos 18^\circ}_{1}} \cdot \cos 36^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} \cdot \cos 36^\circ = \qquad 2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ = \sin 36^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ} \cdot \cos 36^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2}_{1} \cdot \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = \qquad 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ = \sin 72^\circ$$

$$\sin 72^\circ = \cos(90^\circ - 72^\circ)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}. \qquad \textit{cnw.}$$

Ćwiczenie 47. Wykaż, że: **a)** $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$, **b)** $\sin\frac{\pi}{10} \cdot \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

Ćwiczenie 48. Wykaż, że dla każdego kąta α, dla którego istnieje $\operatorname{tg}\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, prawdziwe są związki:

a) $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, **b)** $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, **c)** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$,

d) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, gdy $\sin\alpha \neq 0$, **e)** $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$, **f)** $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

41. a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 44. $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. 45. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

46. a) $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$, b) $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{8}$, c) $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{7}$, d) $\frac{3\sqrt{15}}{16}$.

Zadania utrwalające

3.39. Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora, wartość:

a) $\sin 15°$, **b)** $\cos 105°$, **c)** $\operatorname{tg} 15°$,

d) $\operatorname{tg} 22{,}5°$, **e)** $\sin 7{,}5°$, **f)** $\operatorname{tg} 7{,}5°$.

3.40. Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora, wartość wyrażenia:

a) $\dfrac{2\sin 50°\cos 50°}{\left(\cos^2 50° - \sin^2 50°\right)\cdot \operatorname{tg} 100°}$, **b)** $\dfrac{\sin^2 11° + \cos^2 11°}{2\sin 15°\cos 15°}$,

c) $\sin 20°\cos 40° + \cos 20°\sin 40°$, **d)** $\sin 70°\cos 25° - \cos 70°\sin 25°$.

3.41. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\cos 35°\cos 10° - \sin 35°\sin 10°$, **b)** $\sin 10°\cos 50° + \sin 50°\cos 10°$,

c) $\cos 80°\cos 40° - \sin 80°\sin 40°$, **d)** $\sin 170°\cos 100° + \sin 100°\cos 170°$.

3.42. Oblicz wartość $\sin\alpha$, gdy:

a) $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ i $\cos 2\alpha = -\dfrac{2}{3}$, **b)** $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3}{2}\pi\right)$ i $\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

3.43. Wiedząc, że $\sin\alpha = -\dfrac{1}{2}$ i $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3}{2}\pi\right)$, oblicz:

a) $\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$, **b)** $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$, **c)** $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)$, **d)** $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3.44. Wiedząc, że $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{4}{5}$, $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ i $\beta \in \left(\pi; \dfrac{3}{2}\pi\right)$, oblicz:

a) $\sin(\alpha + \beta)$, **b)** $\cos(\alpha - \beta)$, **c)** $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, **d)** $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$.

3.45. Wiedząc, że $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ i $\alpha \in \left(\dfrac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$, oblicz:

a) $\sin 2\alpha$, **b)** $\cos 2\alpha$, **c)** $\operatorname{tg} 2\alpha$, **d)** $\sin 3\alpha$.

3.46. Sprawdź, czy tożsamością jest równość:

a) $\sin(\alpha + \beta)\cdot\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$,

b) $\cos(\alpha + \beta)\cdot\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$, **d)** $\cos 2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$.

Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

Przedstawienie sumy lub różnicy tych samych funkcji trygonometrycznych w postaci iloczynu jest przydatne np. przy rozwiązywaniu równań i nierówności trygonometrycznych.

Twierdzenie

Jeżeli $\alpha \in R$ i $\beta \in R$, to:

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Wykażemy, że $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Z (***założenie***): $\alpha \in R$ i $\beta \in R$, | *T* (***teza***): $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Dowód:

Wprowadzamy kąty pomocnicze x i y, które spełniają warunki:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} x=\frac{\alpha+\beta}{2} \\ y=\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}.$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin x\cos y, \text{ gdzie } x=\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ i } y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$ ***cnw.***

Ćwiczenie 49. Wykaż, że:

a) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, **b)** $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

c) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Przykład 25. Przedstaw w postaci iloczynu wyrażenie:

a) $\sin 27^\circ + \sin 53^\circ$, **b)** $1+\cos\alpha$, **c)** $1+2\sin\alpha$, **d)** $\sin\alpha+\cos\alpha$.

Rozwiązanie

a) $\sin 27^\circ + \sin 53^\circ = 2\sin\dfrac{27^\circ+53^\circ}{2}\cos\dfrac{27^\circ-53^\circ}{2} =$ $\quad \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$= 2\sin 40^\circ\cos(-13^\circ) = 2\sin 40^\circ\cos 13^\circ.$ $\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$

b) $1+\cos\alpha = \cos 0^\circ + \cos\alpha =$ $\quad 1=\cos 0^\circ$

$= 2\cos\dfrac{0^\circ+\alpha}{2}\cos\dfrac{0^\circ-\alpha}{2} = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}.$ $\quad \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

c) $1+2\sin\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2}+\sin\alpha\right) = 2(\sin 30^\circ+\sin\alpha) =$ $\quad \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

$= 2\cdot 2\sin\dfrac{30^\circ+\alpha}{2}\cos\dfrac{30^\circ-\alpha}{2} = 4\sin\left(15^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right).$

d) $\sin\alpha+\cos\alpha = \sin\alpha+\sin(90^\circ-\alpha) =$ $\quad \cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$

$= 2\cdot\sin\dfrac{\alpha+(90^\circ-\alpha)}{2}\cos\dfrac{\alpha-(90^\circ-\alpha)}{2} =$ $\quad \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$= 2\cdot\sin 45^\circ\cdot\cos(\alpha-45^\circ) = \sqrt{2}\cdot\cos(\alpha-45^\circ).$

Ćwiczenie 50. Przedstaw w postaci iloczynu wyrażenie:

a) $\cos 44^\circ - \cos 46^\circ$, **b)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha$, **c)** $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

50. **a)** $\sqrt{2}\cdot\sin 1^\circ$, **b)** $2\cdot\cos\left(30^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, **c)** $2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)$.

Wskazówka. **c)** $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha = 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)$.

Zadania utrwalające

3.47. Przedstaw w postaci iloczynu wyrażenie:

a) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$, **b)** $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$, **c)** $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$,

d) $\sin^2\alpha-\cos^2\beta$, **e)** $1-\operatorname{tg}^2\alpha$, **f)** $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$,

g) $\cos\alpha-\sin 2\alpha$, **h)** $1+\sin 2\alpha$, **i)** $\sin\alpha-\cos\alpha$.

3.48. Zastosuj wzór na sumę lub różnicę funkcji trygonometrycznych i oblicz:

a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$, **b)** $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$, **c)** $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$, **d)** $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$.

3.49. D Wykaż, że:

a) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$,

b) dla każdego kąta α tę samą wartość mają wyrażenia

$\cos\alpha + \cos(120^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ + \alpha)$ i $\sin\alpha + \sin(120^\circ + \alpha) + \sin(240^\circ + \alpha)$.

3.50. Sprawdź, czy tożsamością jest równość:

a) $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \operatorname{tg}\dfrac{\beta - \alpha}{2}$,

b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}\alpha$,

c) $\dfrac{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$,

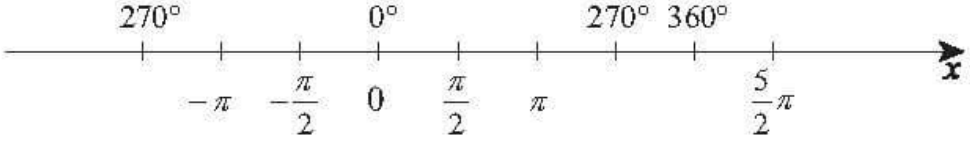
d) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = 1$,

e) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$,

f) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Ćwiczenie 51. Na osi zaznaczono punkty opisane liczbą stopni oraz odpowiadającą im liczbą radianów lub tylko jedną z nich. Przerysuj oś do zeszytu i uzupełnij opisy punktów.



Jeżeli w funkcjach trygonometrycznych kąt α wyrażony w stopniach zamienimy na kąt wyrażony w mierze łukowej, to zdefiniujemy **funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej x** określone wzorami:

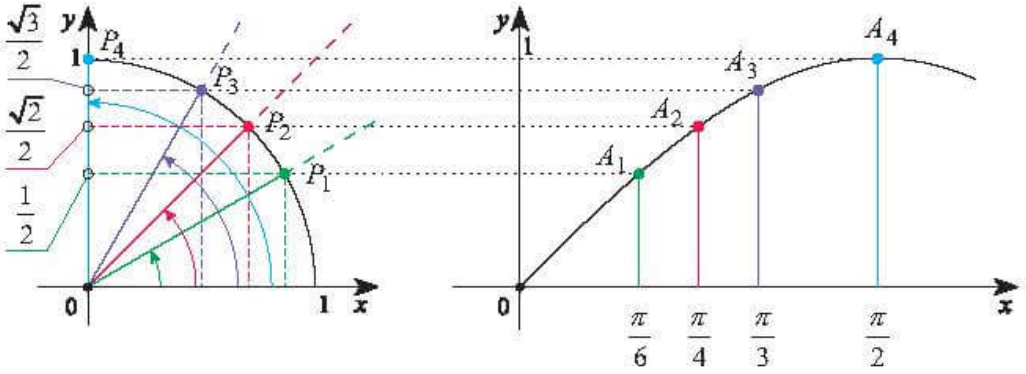
- $f(x) = \sin x$, - $f(x) = \cos x$, - $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Wykres funkcji sinus

Jest kilka metod sporządzania wykresów funkcji trygonometrycznych. Aby narysować wykres funkcji sinus, można korzystać z tzw. koła trygonometrycznego (koła o promieniu 1) albo zaznaczać na płaszczyźnie kartezjańskiej punkty o współrzędnych $(x, \sin x)$ dla wybranych argumentów x.

Punkt A o współrzędnych $(x, \sin x)$ należy do wykresu funkcji określonej wzorem $y = \sin x$. Wartość funkcji sinus jest równa rzędnej punktu P, który jest punktem przecięcia się okręgu o promieniu 1 z końcowym ramieniem kąta o mierze łukowej x.

Np. $\sin\frac{\pi}{6}$ jest równy rzędnej punktu P_1, zatem $A_1=\left(\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}\right)$, czyli $A_1=\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$.

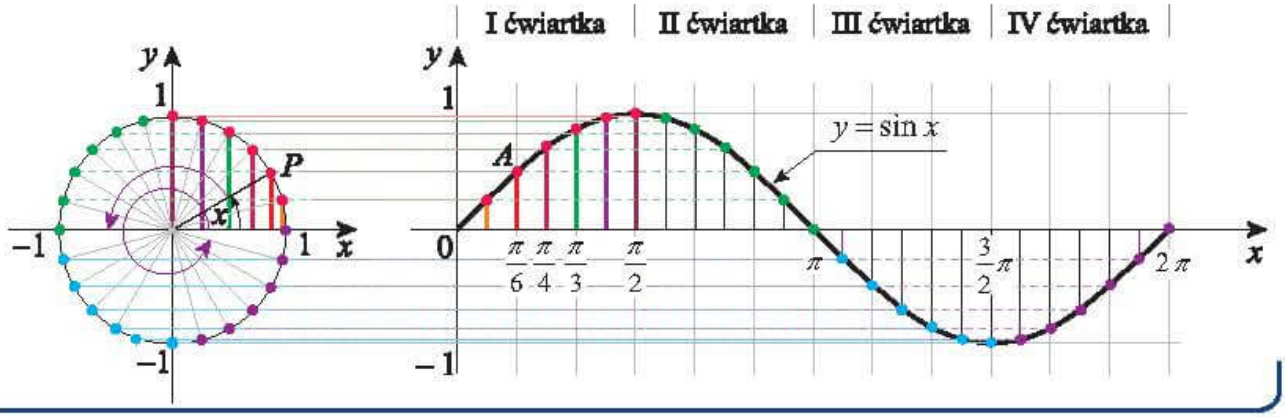


Punkty $A_1=\left(\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $A_2=\left(\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $A_3=\left(\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $A_4=\left(\frac{\pi}{2},\sin\frac{\pi}{2}\right)$ należą do wykresu funkcji $f(x)=\sin x$, gdy $x\in\boldsymbol{R}$.

Przykład 26. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=\sin x$, gdy $x\in\langle 0;2\pi\rangle$.

Rozwiązanie

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$y=\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



Ćwiczenie 52. Skorzystaj z wykresu funkcji $f(x)=\sin x$, gdy $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, i podaj:

a) najmniejszą i największą wartość funkcji w przedziale $\langle 0;2\pi\rangle$,

b) zbiór wartości funkcji, **c)** miejsca zerowe funkcji,

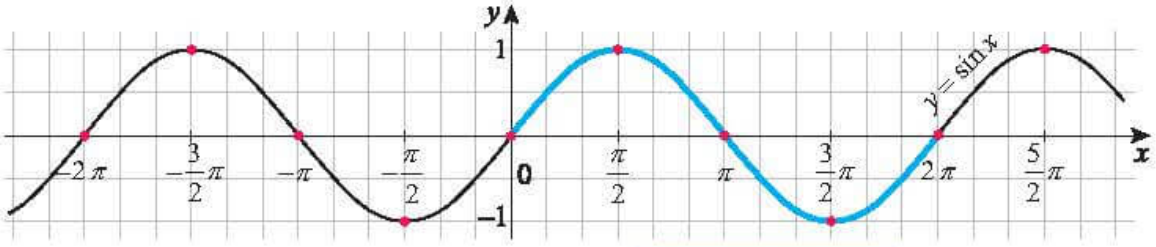
d) współrzędne środka symetrii wykresu funkcji,

e) wartości x, dla których: **1** $\sin x=1$, **2** $\sin x=0$, **3** $\sin x=-1$, **4** $\sin x>0$, **5** $\sin x<0$, **6** $\sin x\le 1$, **7** $\sin x>1$, **8** $\sin x\le -1$.

Liczba 2π jest okresem podstawowym funkcji sinus.

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x, \text{ więc } x\in\langle 0;2\pi\rangle \text{ i } k\in Z.$$

Wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=\sin x$, gdy $x\in R$, nazywamy **sinusoidą**.



Punkt $O=(0,0)$ jest środkiem sinusoidy oraz $\sin(-x)=-\sin x$.

Ćwiczenie 53. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sin x$, gdy $x\in\left\langle -\frac{3}{2}\pi;\frac{5}{2}\pi\right\rangle$, a następnie podaj: **a)** zbiór wartości funkcji,

b) miejsca zerowe funkcji, **c)** przedziały, w których wartości funkcji są dodatnie,

d) argumenty, dla których wartość funkcji jest równa 1,

e) argumenty, dla których wartość funkcji jest równa –1,

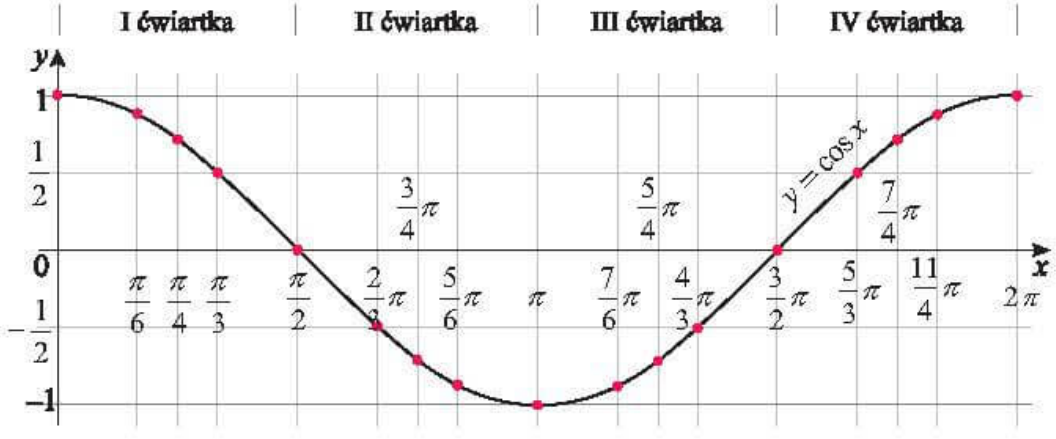
f) maksymalne przedziały, w których funkcja jest malejąca.

Wykres funkcji cosinus

Przykład 27. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\cos x$, gdy $x\in\langle 0;2\pi\rangle$.

Rozwiązanie

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$y=\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Ćwiczenie 54. Skorzystaj z wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=\cos x$, gdy $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, i podaj:

a) najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale:

1 $\langle 0;2\pi\rangle$, **2** $\left\langle \frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right\rangle$, **3** $\langle 0;\pi\rangle$

b) zbiór wartości funkcji f,

c) miejsca zerowe funkcji f,

d) maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca,

e) maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca,

f) równanie osi symetrii wykresu funkcji f.

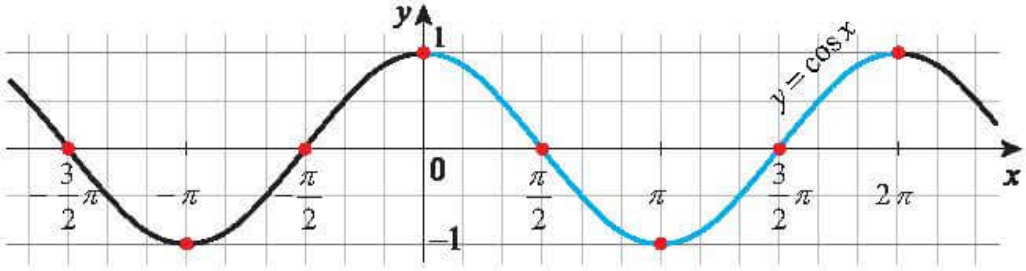
Ćwiczenie 55. Przeanalizuj wykres funkcji cosinus, gdy $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, a następnie podaj miary łukowe kątów x, dla których:

a) $\cos x=1$, **b)** $\cos x=-1$, **c)** $\cos x=0$, **d)** $\cos x<0$, **e)** $\cos x>0$.

Liczba 2π jest okresem podstawowym funkcji cosinus.

$$\cos(x+k\cdot 2\pi)=\cos x, \text{ więc } x\in\langle 0;2\pi\rangle \text{ i } k\in Z.$$

Wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=\cos x$, gdy $x\in R$, nazywamy **cosinusoidą**.



Oś y jest osią symetrii cosinusoidy, więc $\cos(-x)=\cos x$.

Ćwiczenie 56. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\cos x$, gdy $x\in\left\langle -\frac{3}{2}\pi;2\pi\right\rangle$, a następnie podaj:

a) zbiór wartości funkcji f,

b) miejsca zerowe funkcji f,

c) przedziały, w których wartości funkcji f są ujemne,

d) argumenty, dla których wartość funkcji f jest równa 1,

e) argumenty, dla których wartość funkcji f jest równa -1,

f) maksymalne przedziały, w których funkcja f jest rosnąca.

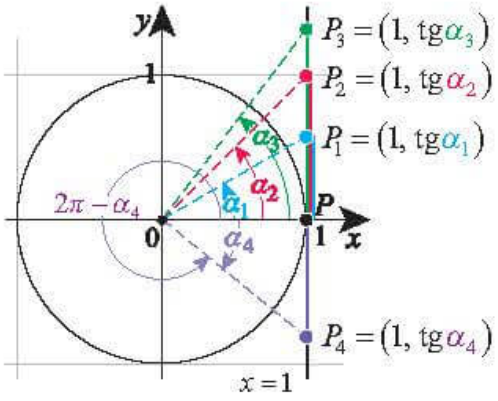
Wykresy funkcji tangens

Wykres funkcji tangens można sporządzić, wykorzystując koło trygonometryczne (koło o promieniu 1).

Końcowe ramię kąta α_1 przecina prostą o równaniu $x=1$ w punkcie P, takim że $P=(1, b)$, gdzie $b=|PP_1|=\operatorname{tg}\alpha_1$ (rysunek obok).

Zatem $\operatorname{tg}\alpha_1=|PP_1|$, $\operatorname{tg}\alpha_2=|PP_2|$, $\operatorname{tg}\alpha_3=|PP_3|$.

Jeżeli końcowe ramię dowolnego kąta α zawiera się w IV ćwiartce, to $\operatorname{tg}\alpha<0$, więc np. $\operatorname{tg}\alpha_4=-|PP_4|$.

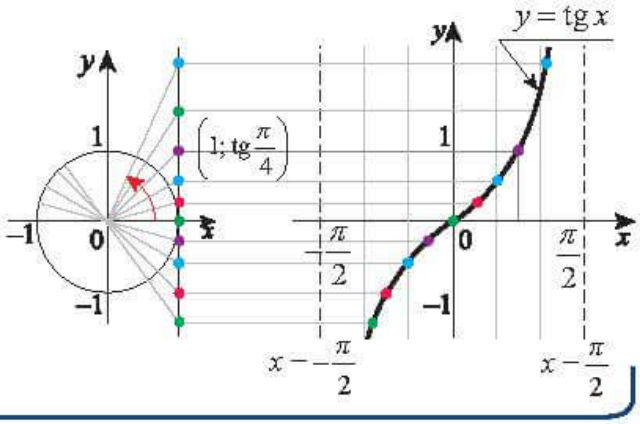


Przykład 28. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\operatorname{tg}x$, gdy $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Rozwiązanie

Wykres funkcji $f(x)=\operatorname{tg}x$ nie ma punktów wspólnych z prostymi o równaniach $x=-\frac{\pi}{2}$ i $x=\frac{\pi}{2}$.

Proste te nazywamy asymptotami pionowymi*) tego wykresu.

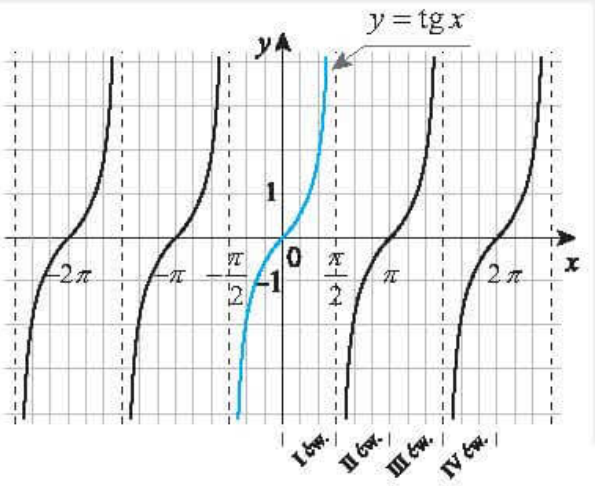


Liczba π jest okresem podstawowym funkcji tangens.

$$\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x,\ \text{gdy}\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\ \text{i}\ k\in Z.$$

Uwaga

- Funkcja tangens **nie jest** określona, gdy $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in Z$.
- Krzywą, która jest wykresem funkcji określonej wzorem $f(x)=\operatorname{tg}x$, gdy $x\in R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, $k\in Z$, nazywamy **tangensoidą**.



*) Prosta o równaniu $x=x_0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f, gdy wykres „zbliża się" do niej i jej nie przecina.

Zauważamy, że aby otrzymać wykres funkcji tangens w przedziałach

$$\ldots, \left(-\frac{3}{2}\pi; -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right), \ldots .$$

należy naszkicować w każdym z tych przedziałów krzywą, którą otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji określonej wzorem $y = \operatorname{tg} x$, gdy $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, kolejno o wektory mające współrzędne:

$$\ldots [-2\pi, 0],\ [-\pi, 0],\ [\pi, 0],\ [2\pi, 0], \ldots .$$

Ćwiczenie 57. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = \operatorname{tg} x$, gdy $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right\rangle$, a następnie podaj:

a) równania prostych, które są asymptotami pionowymi wykresu funkcji,

b) zbiór wartości funkcji,

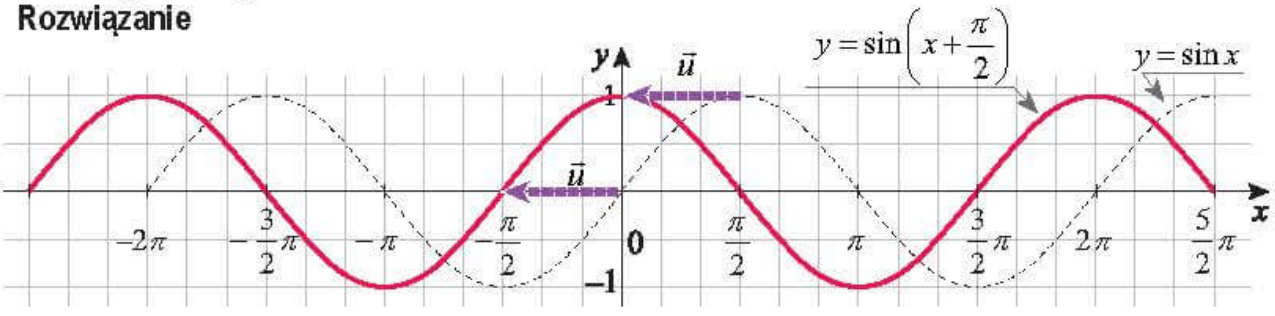
c) miejsca zerowe funkcji,

d) przedziały, w których funkcja jest malejąca.

Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych

Przykład 29. Wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \sin x$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$, przesuń o wektor $\vec{u} = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Porównaj otrzymany wykres z wykresem funkcji cosinus.

Rozwiązanie



Zauważamy, że:

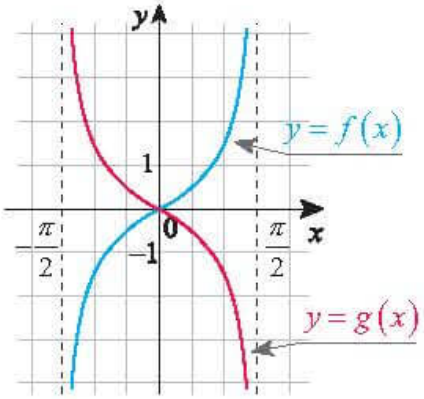
- wykresy i własności funkcji określonych wzorami: $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ i $g(x) = \cos x$ pokrywają się, ponieważ $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$,
- wykres funkcji cosinus powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji sinus o wektor $\vec{u} = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Ćwiczenie 58. Wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=\cos x$, gdy $x\in R$, przesuń o wektor $\vec{v}=[0,1]$. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymałaś/eś, i podaj:
a) zbiór wartości funkcji, **b)** najmniejszą i największą wartość funkcji,
c) miejsca zerowe funkcji.

Przykład 30. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\operatorname{tg}x$, gdy $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.
Naszkicuj wykres funkcji g i podaj zbiór jej wartości, gdy:
a) $g(x)=-f(x)$, **b)** $g(x)=f(-x)$, **c)** $g(x)=-f(-x)$, **d)** $g(x)=|f(x)|$.

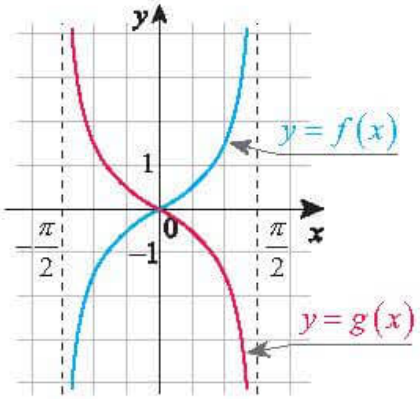
Rozwiązanie

a) $g(x)=-f(x)$,



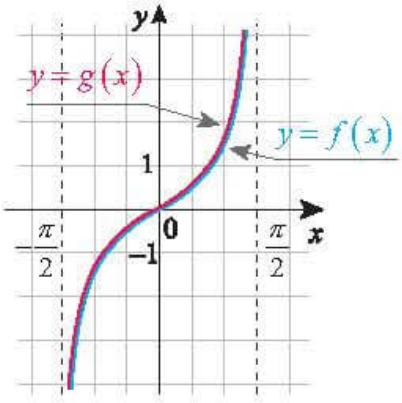
Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi x.

b) $g(x)=f(-x)$

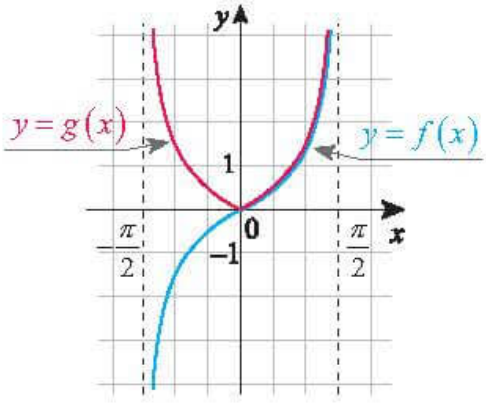


Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi y.

c) $g(x)=-f(-x)$



d) $g(x)=|f(x)|$.



Wykresy funkcji f i g są symetryczne względem względem punktu $(0,0)$.

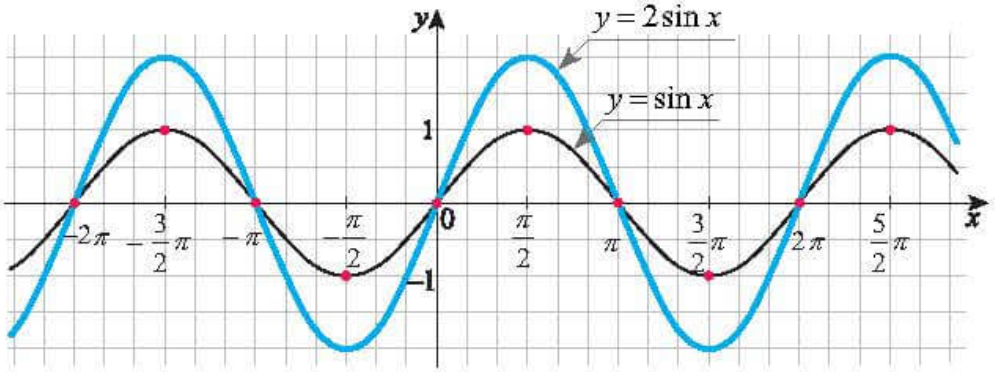
Ćwiczenie 59. Funkcje f i g określone są wzorami $f(x)=\sin x$ i $g(x)=\cos x$, gdy $x\in\langle -2\pi;2\pi\rangle$. Naszkicuj wykres funkcji h i podaj jej miejsca zerowe, gdy:
a) $h(x)=-f(x)$, **b)** $h(x)=g(-x)$, **c)** $h(x)=-g(-x)$, **d)** $h(x)=|f(x)|$.

Przykład 31. Naszkicuj wykres funkcji g określonej wzorem $g(x)=2\sin x$.

Rozwiązanie

1° Sporządzamy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\sin x$.

2° Wartości funkcji g otrzymujemy, mnożąc przez 2 wartości funkcji f, więc $g(x)=2\sin x$.



Ćwiczenie 60. Naszkicuj wykres funkcji f, gdy:

a) $f(x)=3\sin x$, **b)** $f(x)=3\sin x-1$, **c)** $f(x)=3\sin x+1$.

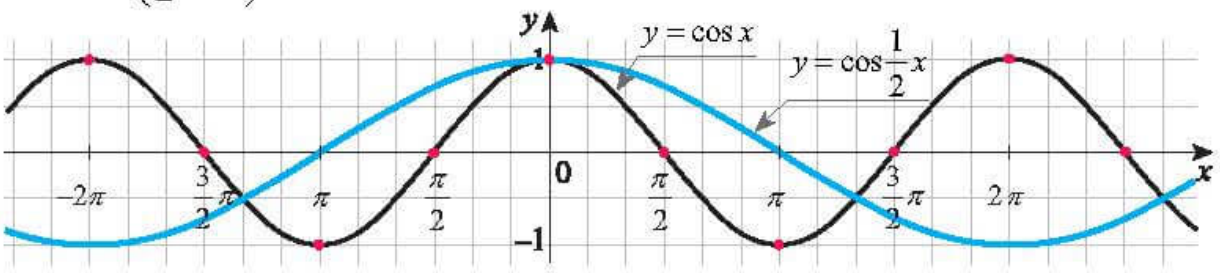
Ćwiczenie 61. Opisz przekształcenie, w którym obrazem wykresu funkcji określonej wzorem $f(x)=\cos x$ jest wykres funkcji g. Określ zbiór wartości funkcji g oraz naszkicuj jej wykres, gdy: **a)** $g(x)=\cos x+1$, **b)** $g(x)=\cos(x-\pi)$, **c)** $g(x)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, **d)** $g(x)=2\cos x$.

Przykład 32. Naszkicuj wykres funkcji g określonej wzorem $g(x)=\cos\frac{1}{2}x$, gdy $x\in\boldsymbol{R}$.

Rozwiązanie

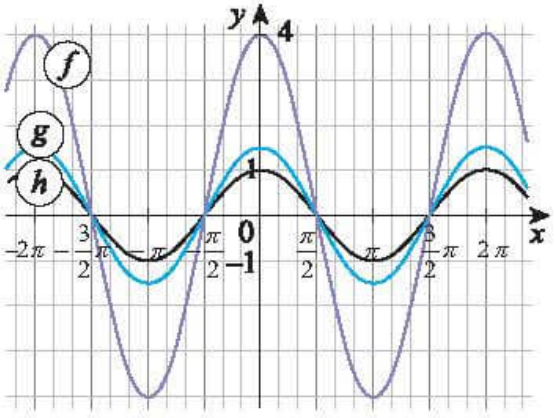
1° Sporządzamy wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\cos x$.

2° Zauważamy, że wartości funkcji g są równe wartościom funkcji f, gdy argumenty funkcji g są dwa razy większe od odpowiednich argumentów funkcji f, np. $\cos\left(\frac{1}{2}\cdot 60^\circ\right)=\cos 30^\circ$.



Ćwiczenie 62. Podaj zbiór wartości funkcji g określonej wzorem $g(x)=\cos\frac{1}{2}x$, gdy $x\in R$.

Ćwiczenie 63. Wykresy funkcji f, g, h są obrazami wykresu funkcji $y=\cos x$ w pewnym przekształceniu. Podaj wzór każdej z tych funkcji.



Odpowiedzi do ćwiczeń

52. a) $y_{MIN}=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$, $y_{MAX}=\sin\frac{\pi}{2}=1$, b) $Y=\langle -1;1\rangle$, c) $x_1=0$, $x_2=\pi$, $x_3=2\pi$, d) $(\pi,0)$,
e) **1** $\frac{\pi}{2}$, **2** $0,\pi,2\pi$, **3** $\frac{3}{2}\pi$, **4** $x\in(0;\pi)$, **5** $(\pi;2\pi)$, **6** $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **7** brak takich x, **8** $\frac{3}{2}\pi$.

53. a) $Y=\langle -1;1\rangle$, b) $-\pi,0,\pi,2\pi$, c) $\left\langle -\frac{3}{2}\pi;-\pi\right\rangle$, $(0;\pi)$, $\left\langle 2\pi;\frac{5}{2}\pi\right\rangle$, d) $-\frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$, e) $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$,
f) $\left\langle -\frac{3}{2}\pi;-\frac{\pi}{2}\right\rangle$, $\left\langle \frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right\rangle$.

54. a) **1** $y_{MIN}=-1$, $y_{MAX}=1$, **2** $y_{MIN}=-1$, $y_{MAX}=0$, **3** $y_{MIN}=-1$, $y_{MAX}=1$, b) $Y=\langle -1;1\rangle$,
c) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, d) $\langle \pi;2\pi\rangle$, e) $\langle 0;\pi\rangle$, f) $x=\pi$.

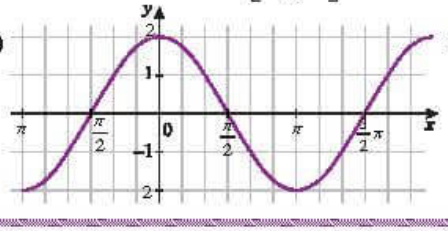
55. a) $x_1=0$, $x_2=2\pi$, b) $x_0=\pi$, c) $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}\pi$, d) $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right)$, e) $x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle\cup\left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right\rangle$.

56. a) $Y=\langle -1;1\rangle$, b) $-\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, c) $\left(-\frac{3}{2}\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right)$, d) $0,2\pi$, e) $-\pi,\pi$, f) $\langle -\pi;0\rangle$, $\langle \pi;2\pi\rangle$.

57. a) $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$, b) $Y=R$, c) $0,\pi,2\pi$, d) nie ma takich przedziałów.

58. a) $g(x)=\cos x+1$, $\langle 0;2\rangle$, b) $Y_{MIN}=0$, $Y_{MAX}=2$, c) $x\in\{\ldots,-\pi,\pi,3\pi,\ldots\}$, czyli $x=\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$.

59. Miejsca zerowe funkcji h: a) -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, b) $-\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, c) $-\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$,
d) -2π, $-\pi$, 0, π, 2π.

61. a) Przesunięcie o wektor $[0,1]$, $Y_g=\langle 0;2\rangle$, b) przesunięcie o wektor $[\pi,0]$, $Y_g=\langle -1;1\rangle$,
c) przesunięcie o wektor $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ i symetria względem osi x, $Y_g=\langle -1;1\rangle$,
d)  $Y_g=\langle -2;2\rangle$.

62. $Y=\langle -1;1\rangle$.

63. $f(x)=4\cos x$, $g(x)=\frac{3}{2}\cos x$, $h(x)=\cos x$.

Zadania utrwalające

3.51. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\sin x$, gdy $x\in\langle -2\pi;2\pi\rangle$. Naszkicuj wykres funkcji g oraz podaj zbiór jej wartości, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$, **b)** $g(x)=f(-x)$, **c)** $g(x)=|f(x)|$,

d) $g(x)=f(x+\pi)$, **e)** $g(x)=f(x)-2$, **f)** $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

3.52. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\cos x$, gdy $x\in\langle -2\pi;2\pi\rangle$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj zbiór jej wartości, gdy:

a) $g(x)=f(-x)$, **b)** $g(x)=-f(x)$, **c)** $g(x)=|f(x)|$,

d) $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, **e)** $g(x)=f(x)+2$, **f)** $g(x)=f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

3.53. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\operatorname{tg}x$, gdy $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj zbiór jej wartości, gdy:

a) $g(x)=-f(x)$, **b)** $g(x)=f(-x)$, **c)** $g(x)=|f(x)|$.

3.54. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=-\sin x$, gdy $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **b)** $f(x)=1-\sin x$, gdy $x\in\langle 0;2\pi\rangle$.

Podaj:

1 miejsca zerowe funkcji f,

2 argumenty x, dla których wartość funkcji f jest najmniejsza,

3 argumenty, dla których wartość funkcji f jest równa $-\frac{1}{2}$.

3.55. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=1+\cos x$, gdy $x\in\left\langle -\frac{1}{2}\pi;\frac{3}{2}\pi\right\rangle$.

Odczytaj z wykresu:

a) zbiór wartości funkcji f,

b) argumenty x, dla których wartość funkcji f jest równa 1,

c) maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

3.56. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=-1+\operatorname{tg}x$, gdy $x\in\left(-\frac{3}{2}\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Odczytaj z wykresu:

a) miejsca zerowe funkcji f,

b) argumenty x, dla których wartość funkcji f jest równa -1,

c) zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

3.57. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=\sin(x+\pi)$, gdy $x\in\langle -\pi;\pi\rangle$,

b) $f(x)=2+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, gdy $x\in\langle -\pi;\pi\rangle$,

c) $f(x)=2\sin x$, gdy $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **d)** $f(x)=-\sin\frac{1}{2}x$, gdy $x\in\langle 0;4\pi\rangle$.

Równania trygonometryczne

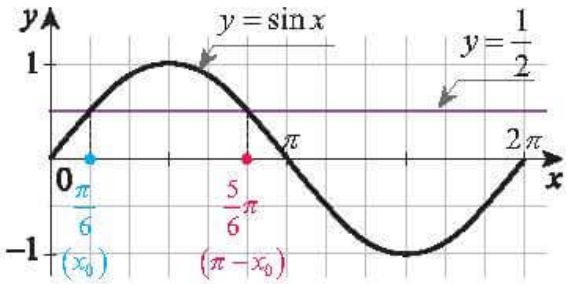
Definicja

Równaniem trygonometrycznym nazywamy równanie, w którym niewiadoma występuje wyłącznie pod znakiem funkcji trygonometrycznych.

Przykład 33. Rozwiąż równanie $\sin x=\frac{1}{2}$, gdy: **a)** $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **b)** $x\in R$.

Rozwiązanie

a) Pierwiastkami równania $\sin x=\frac{1}{2}$, gdy $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, są odcięte punktów przecięcia się wykresu $y=\sin x$ z prostą o równaniu $y=\frac{1}{2}$.

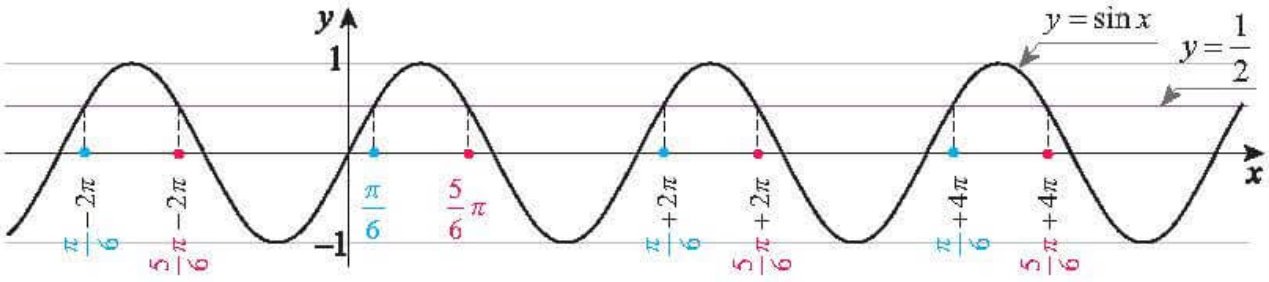


$$\sin x=\frac{1}{2},\ \text{gdy}\ \ \sin x=\sin\frac{\pi}{6}\ \ \text{lub}\ \ \sin x=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$x=\frac{\pi}{6}\qquad\text{lub}\qquad x=\frac{5}{6}\pi.$$

2° Uwzględniamy okresowość funkcji sinus.

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ \text{lub}\ \ x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\ \text{gdzie}\ k\in Z.$$



Odp.: $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$.

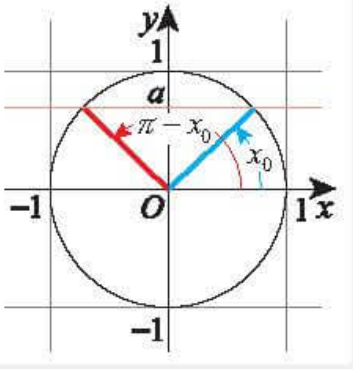
Ćwiczenie 64. Rozwiąż równanie $\sin x=-\frac{1}{2}$, gdy: **a)** $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **b)** $x\in R$.

Uwaga

- **Rozwiązaniami podstawowymi** równania $\sin x = a$, gdy $a \in \langle -1; 1 \rangle$, nazywamy pierwiastki, które należą do dowolnego przedziału o długości 2π.
- Jeżeli x_0 jest jednym z rozwiązań podstawowych równania $\sin x = a$ i $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, to drugim rozwiązaniem jest $\pi - x_0$

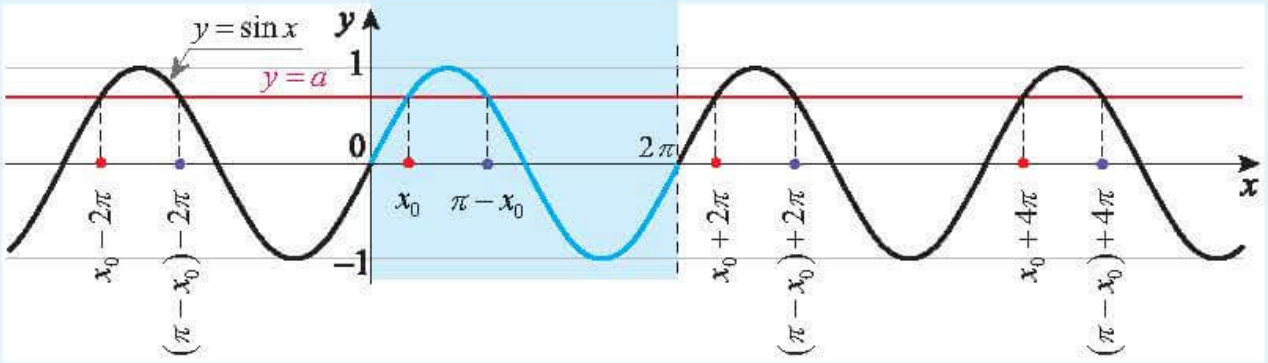
$$\sin x_0 = \sin(\pi - x_0) = a.$$

Jeżeli $a = 0$, to równanie $\sin x = 0$ ma trzy podstawowe pierwiastki: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$.



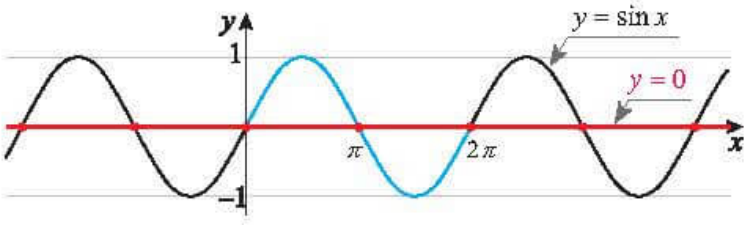
Równanie $\sin x = a$, gdzie $a \in \langle -1; 1 \rangle$ oraz

$x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ jest spełnione (ma rozwiązanie podstawowe), gdy	$x \in \boldsymbol{R}$ jest spełnione (ma rozwiązanie ogólne), gdy
$x = x_0$ lub $x = \pi - x_0$	$x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = (\pi - x_0) + 2k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{C}$

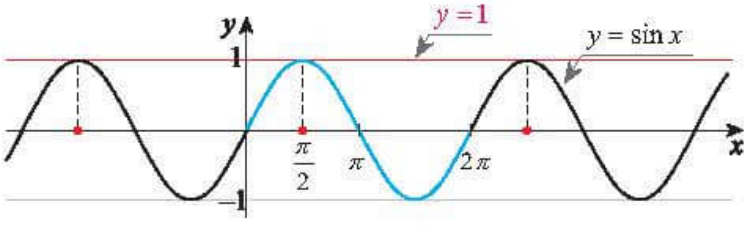


Ćwiczenie 65. Na rysunku przedstawiona jest interpretacja geometryczna równania $\sin x = a$. Odczytaj jego rozwiązanie podstawowe i podaj rozwiązanie ogólne, gdy:

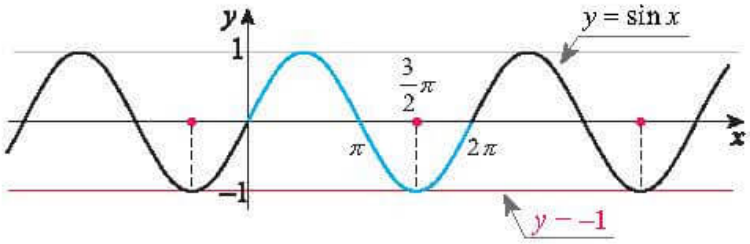
a) $\sin x = 0$



b) $\sin x = 1$



c) $\sin x = -1$



Przykład 34. Dla jakich wartości parametru m równanie $\sin x = \frac{2m+1}{3}$ ma rozwiązanie?

Rozwiązanie

Równanie $\sin x = \frac{2m+1}{3}$ ma rozwiązanie, gdy liczba $\frac{2m+1}{3}$ należy do zbioru wartości funkcji sinus, czyli gdy $\frac{2m+1}{3} \in \langle -1; 1 \rangle$. Zatem

$$-1 \le \frac{2m+1}{3} \le 1 \iff \begin{cases} \frac{2m+1}{3} \ge -1 \\ \frac{2m+1}{3} \le 1 \end{cases} \iff m \in \langle -2; 1 \rangle.$$

Odp. $m \in \langle -2; 1 \rangle$.

Ćwiczenie 66. Dla jakich wartości parametru m równanie $\sin x = 4m - 1$ nie ma rozwiązania?

Ćwiczenie 67. Podaj rozwiązanie ogólne równania $\sin x = a$, gdy jednym z jego rozwiązań podstawowych jest liczba: **a)** $\frac{\pi}{12}$, **b)** $\frac{\pi}{8}$, **c)** $-\frac{\pi}{4}$.

Przykład 35. Rozwiąż równanie $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, gdy:

a) $x \in R$, **b)** $x \in (-2\pi; 4\pi)$ i oblicz sumę pierwiastków.

Rozwiązanie

$\sin x = \sin(\ x)$

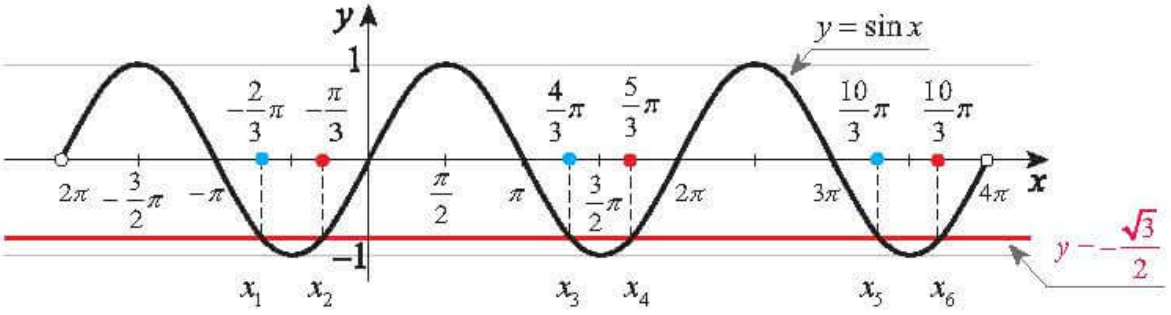
a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $-\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, skąd $\sin(-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zatem $-x_0 = \frac{\pi}{3}$, więc

$x_0 = -\frac{\pi}{3}$ i $\pi - x_0 = \frac{4}{3}\pi$.

$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$.

b) Pierwiastki równania $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, gdy $x \in (-2\pi; 4\pi)$ odczytujemy z wykresu funkcji $f(x) = \sin x$, gdy $x \in (-2\pi; 4\pi)$.



$$x_1 = -\frac{2}{3}\pi,\quad x_2 = -\frac{\pi}{3},\quad x_3 = \frac{4}{3}\pi,\quad x_4 = \frac{5}{3}\pi,\quad x_5 = \frac{10}{3}\pi,\quad x_6 = \frac{11}{3}\pi,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi + \frac{10}{3}\pi + \frac{11}{3}\pi = 9\pi.$$

Odp.: **a)** $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$, **b)** 9π.

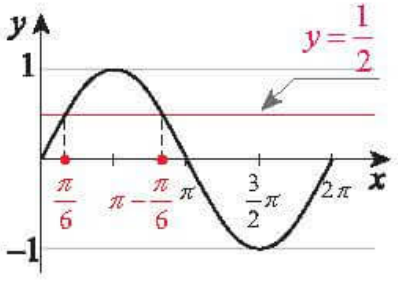
Ćwiczenie 68. Oblicz sumę pierwiastków równania $\sin x = \frac{1}{2}$, gdy $x \in (-\pi; 3\pi)$.

Przykład 36. Rozwiąż równanie $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

$$\sin\underbrace{\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}_{\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$



$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ oraz $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Odp.: $x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$ lub $x = \frac{7}{24}\pi + k\pi$, gdzie $k \in Z$.

Ćwiczenie 69. Rozwiąż równanie: **a)** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Uwaga Z własności funkcji sinus wynika, że

$$\sin\alpha = \sin\beta, \text{ gdy } \alpha = \underbrace{\beta}_{x_0} + 2k\pi \text{ lub } \alpha = \underbrace{\pi - \beta}_{\pi - x_0} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in Z.$$

Przykład 37. Rozwiąż równanie: **a)** $\sin 3x = \sin 5x$, **b)** $\sin 2x + \sin x = 0$.

Rozwiązanie

a) $\sin 3x = \sin 5x$

$3x = 5x + 2k\pi$ lub $3x = (\pi - 5x) + 2k\pi$ $\quad x_0 = 5x$, $\sin x_0 - \sin(\pi - x_0)$

$-2x = 2k\pi$ lub $8x = \pi + 2k\pi$

$x = -k\pi$

$x = k\pi$, bo $k \in Z$. lub $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{4}\pi$, gdzie $k \in Z$. $\quad \sin(-k\pi) - \sin(k\pi) - 0$

b) $\sin 2x + \sin x = 0$

$\sin 2x = -\sin x$ $\quad \sin x = \sin(\ x)$

$\sin 2x = \sin(-x)$

$2x = -x + 2k\pi$ lub $2x = \pi - (-x) + 2k\pi$ $\quad x_0 - -x$, $\sin x_0 - \sin(\pi - x_0)$

$3x = 2k\pi$ lub $x = \pi + 2k\pi$

$x = \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = \pi + 2k\pi$ $\quad \sin(\pi + 2k\pi) - \sin(k\pi) - 0$

$x = \frac{2}{3}k\pi$ lub $x = k\pi$, gdzie $k \in Z$.

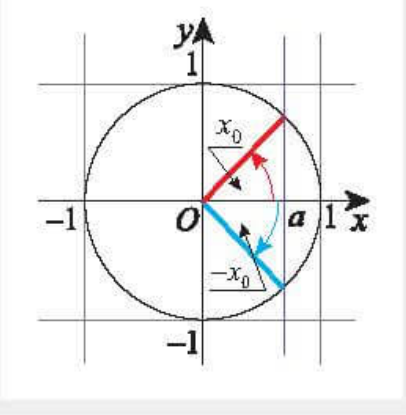
Ćwiczenie 70. Rozwiąż równanie:

a) $\sin 4x = \sin 2x$, **b)** $\sin 3x + \sin x = 0$.

Równanie $\cos x = a$ rozwiązujemy podobnie jak równanie $\sin x = a$, gdy $a \in \langle -1; 1 \rangle$.

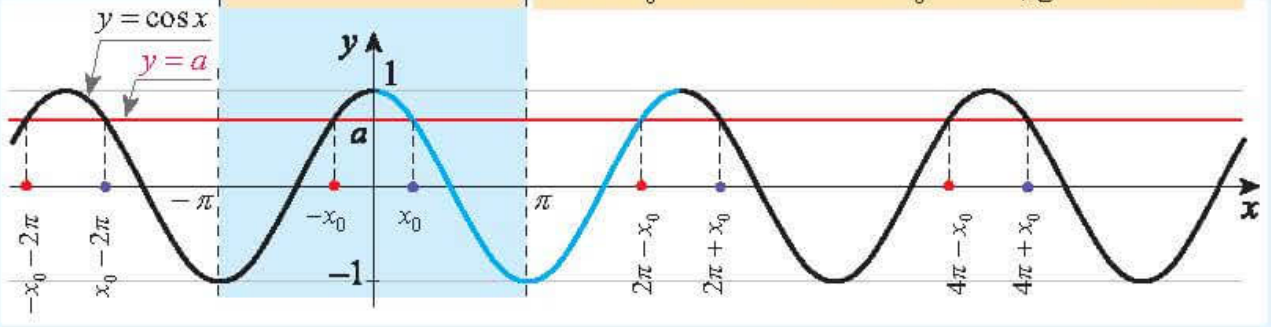
Uwaga

- **Rozwiązaniami podstawowymi** równania $\cos x = a$, gdy $a \in \langle -1; 1 \rangle$, nazywamy pierwiastki, które należą do dowolnego przedziału o długości 2π.
- Jeżeli x_0 jest jednym z rozwiązań podstawowych równania $\cos x = a$ i $x \in \langle -\pi; \pi \rangle$, to drugim rozwiązaniem jest $-x_0$, bo $\cos x_0 = \cos(-x_0) = a$.
- $\cos\alpha = \cos\beta$, gdy $\alpha = \beta + 2k\pi$ lub $\alpha = -\beta + 2k\pi$ gdzie $k \in Z$.



Równanie $\cos x = a$, gdzie $a \in \langle -1; 1 \rangle$ oraz

$x \in \langle -\pi; \pi \rangle$ jest spełnione (ma rozwiązanie podstawowe), gdy	$x \in R$ jest spełnione (ma rozwiązanie ogólne), gdy
$x = x_0$ lub $x = -x_0$	$x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$



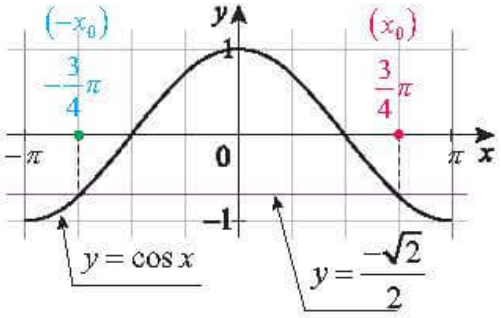
Przykład 38. Rozwiąż równanie: **a)** $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Rozwiązanie

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $x_0 = \frac{3}{4}\pi$, skąd $-x_0 = -\frac{3}{4}\pi$

$x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$,

gdzie $k \in Z$.



b) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\quad x_0 - x + \frac{\pi}{6}$

$3x + \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $3x + \frac{\pi}{6} = -\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ $\quad \cos x_0 - \cos(-x_0)$

$2x = 2k\pi$ lub $4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in Z$.

Odp.: **a)** $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$,

b) $x = k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in Z$.

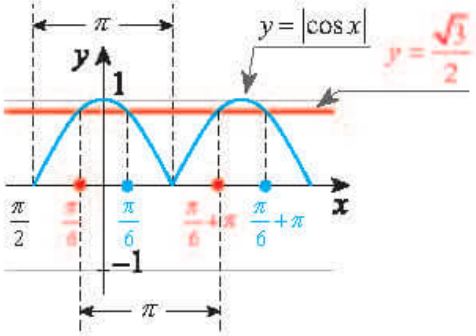
Ćwiczenie 71. Rozwiąż równanie: **a)** $\cos x = \frac{1}{2}$, **b)** $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Przykład 39. Rozwiąż równanie : **a)** $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, **b)** $2\cos^2 x = 1$.

Rozwiązanie

a) $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Okresem podstawowym funkcji $f(x) = |\cos x|$ *jest* π.



$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in Z$.

b) $2\cos^2 x = 1 \quad / : 2$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\qquad \sqrt{a^2} = |a|$

$|\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad x_0 = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, czyli

$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in Z$.

Odp.: **a)** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in Z$, **b)** $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in Z$.

Ćwiczenie 72. Rozwiąż równanie:

a) $|\cos x| = \frac{1}{2}$, **b)** $4\cos^2 x = 3$, **c)** $|\cos 2x| = 1$.

Przykład 40. Rozwiąż równanie $\cos 2x = \frac{1}{2}$, a następnie podaj wszystkie jego pierwiastki należące do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie $\cos 2x = \frac{1}{2}$ $\qquad x_0 = \frac{\pi}{3}$

$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in Z$.

$k=0$, więc $x=\frac{\pi}{6}$ lub $x=-\frac{\pi}{6}$ $\quad -\frac{\pi}{6}\notin(0;2\pi)$

$k=1$, więc $x=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7}{6}\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5}{6}\pi$

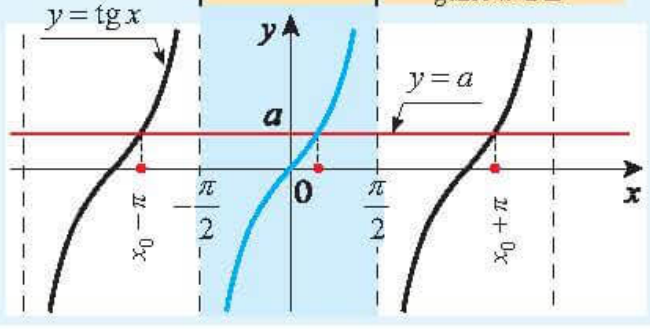
$k=2$, więc $x=\frac{\pi}{6}+2\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11}{6}\pi$. $\quad \left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)\notin(0;2\pi)$

Odp.: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$.

Ćwiczenie 73. Rozwiąż równanie $\cos 3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, a następnie podaj wszystkie jego pierwiastki należące do przedziału $\langle -\pi;\pi\rangle$.

Równanie $\operatorname{tg}x=a$, gdzie $a\in R$ oraz

$x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$x\in R$
jest spełnione (ma rozwiązanie podstawowe), gdy	jest spełnione (ma rozwiązanie ogólne), gdy
$x=x_0$	$x-x_0+k\pi$, gdzie $k\in Z$



Uwaga

Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$, to $\alpha=\beta+k\pi$, gdzie $k\in Z$.

Każda prosta o równaniu $y=a$, gdzie $a\in R$, z wykresem funkcji $y=\operatorname{tg}x$, gdy $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ma jeden punkt wspólny o współrzędnych (x_0,a).

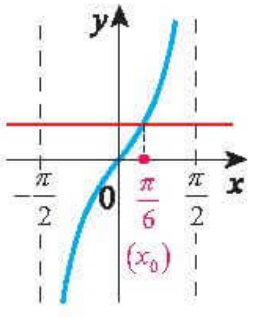
Przykład 41. Rozwiąż równanie:

a) $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}x$, c) $\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Rozwiązanie

a) $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, więc $x_0=\frac{\pi}{6}$.

$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, skąd $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, gdzie $k\in Z$.



b) Określamy dziedzinę D równania $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}x$

$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ i $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, skąd

D: $x\neq\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ i $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$\operatorname{tg}x$ *istnieje, gdy* $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$.

Rozwiązujemy równanie i sprawdzamy, czy jego pierwiastki należą do dziedziny D.

$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}x$

$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=x+k\pi$ $\quad x_0=x$

$-\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{6}+k\pi \quad /\cdot(-2)$

$x=\frac{\pi}{3}-2k\pi$ *Zapis* $x=\frac{\pi}{3}-2k\pi$ *i* $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ *traktujemy równoważnie.*

$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, bo $k\in Z$. i $\frac{\pi}{3}+2k\pi\in D$.

c) Określamy dziedzinę D równania $\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ i $x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, skąd D: $x\neq\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$

$\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$2x=x+\frac{\pi}{4}+k\pi$, skąd $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Liczba $\frac{\pi}{4}+k\pi$ nie należy do dziedziny D, więc równanie nie ma rozwiązania.

Odp.: **a)** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, **b)** $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, **c)** równanie nie ma rozwiązania.

Ćwiczenie 74. Rozwiąż równanie:

a) $\operatorname{tg}x=-1$, **b)** $3\cdot\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$, **c)** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

64. a) $x_1=\frac{7}{6}\pi, x_2=\frac{11}{6}\pi$, **b)** $x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$ lub $x=\frac{11}{6}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$.

Odpowiedzi do ćwiczeń – cd

65. $x_1=0,\ x_2=\pi,\ x_3=2\pi;\ x=k\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x_0=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, gdzie $k\in Z$,
c) $x_0=\frac{3}{2}\pi,\ x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$. 66. $m\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

67. **a)** $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ lub $x=\frac{11}{12}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{8}+2k\pi$ lub $x=\frac{7}{8}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$,
c) $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ lub $x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$. 68. 6π

69. **a)** $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ lub $x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in Z$.

70. **a)** $x=k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k}{3}\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{2}\cdot k$, gdzie $k\in Z$.

71. **a)** $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k\in Z$.

72. **a)** $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, gdzie $k\in Z$,
c) $x=k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, gdzie $k\in Z$.

73. $x=-\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}k\pi,\ x=\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}k\pi$, gdzie $k\in Z$, $-\frac{8}{9}\pi,\ -\frac{4}{9}\pi,\ -\frac{2}{9}\pi,\ \frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{8}{9}\pi$.

74. **a)** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x=k\cdot\frac{\pi}{3}$, gdzie $k\in Z$, **c)** $x=-\frac{\pi}{36}+k\cdot\frac{\pi}{3}$, gdzie $k\in Z$.

Zadania utrwalające

3.58. Rozwiąż równanie:

a) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, **c)** $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, **d)** $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.59. Rozwiąż równanie:

a) $\cos x=1$, **b)** $\cos x=-1$, **c)** $\cos x=-\frac{1}{2}$, **d)** $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.60. Rozwiąż równanie:

a) $\operatorname{tg} x=1$, **b)** $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$, **c)** $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$, **d)** $\operatorname{tg} x=-1$.

3.61. Określ liczbę pierwiastków równania w przedziale $\langle 0;2\pi\rangle$.

a) $\sin x=0$, **b)** $\operatorname{tg} x=0$, **c)** $\cos x=0$, **d)** $\sin x=2$,
e) $\sin x+\cos x=4$, **f)** $\operatorname{tg} x=1000$, **g)** $\sin x\cdot\cos x=2$.

3.62. Rozwiąż równanie $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ i podaj jego pierwiastki należące do przedziału:

a) $\langle 0;2\pi\rangle$, **b)** $\langle -\pi;\pi\rangle$, **c)** $\langle 4\pi;6\pi\rangle$, **d)** $\langle -4\pi;-2\pi\rangle$.

3.63. Rozwiąż równanie:

a) $\sin^2 x=1$, **b)** $\cos^2 x=\frac{1}{2}$, **c)** $\operatorname{tg}^2 x=3$.

3.64. Rozwiąż równanie:

a) $\sin 6x = 0$, b) $\cos 7x = 1$, c) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = -1$,

d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, e) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, f) $7\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4}\right) = -7$.

3.65. Rozwiąż równanie:

a) $\sin 3x = \sin 7x$, b) $\cos 7x = \cos 3x$, c) $\operatorname{tg} 7x = \operatorname{tg} 3x$,

d) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2x$, e) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$, f) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} 2x$.

3.66. Określ, dla jakich wartości parametru m równanie ma rozwiązanie.

a) $\sin 2x = m$, b) $\cos\frac{1}{2}x = 1 - m$, c) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{m}$.

3.67. Określ, w zależności od m, liczbę rozwiązań równania $|\cos x| = m$, gdy $x \in \langle 0; 3\pi \rangle$.

3.68. D Uzasadnij, że równanie $2\cos^2 x + m\cos x = 0$ ma rozwiązanie dla każdej liczby rzeczywistej m.

Równania trygonometryczne – ciąg dalszy

Aby rozwiązać niektóre równania trygonometryczne, trzeba wprowadzić zmienną pomocniczą i rozwiązać w pierwszej kolejności otrzymane równanie.

Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 42. Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Rozwiązanie

$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot(\sin x)^2 - 7\cdot\sin x + 3 = 0$

Wprowadzamy pomocniczą zmienną t.

$\sin x = t$, gdzie $t \in \langle -1; 1 \rangle$ $\quad -1 \le \sin x \le 1$, *więc* $t \in \langle -1; 1 \rangle$.

$2t^2 - 7t + 3 = 0$, $\Delta = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$

$t = \frac{1}{2}$ lub $t = 3$ $\quad \frac{1}{2} \in \langle -1; 1 \rangle$ i $3 \notin \langle -1; 1 \rangle$

$t = \frac{1}{2}$, czyli $\sin x = \frac{1}{2}$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$.

Odp.: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in Z$.

Ćwiczenie 75. Rozwiąż równanie:

a) $\cos^2 x+6\cos x+5=0$, **b)** $3\operatorname{tg}^2 x-4\sqrt{3}\operatorname{tg}x+3=0$, **c)** $\cos 2x+2\sin x+3=0$.

Dotychczas rozwiązywaliśmy takie równania trygonometryczne, w których występowała tylko jedna funkcja trygonometryczna. Zajmiemy się teraz równaniami, w których występuje kilka różnych funkcji trygonometrycznych. Sposoby rozwiązywania tych równań pokażemy na przykładach.

Przykład 43. Rozwiąż równanie:

a) $\sin 2x+\cos x=0$, **b)** $\cos 2x+\sin x=0$, **c)** $\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}=\dfrac{2}{\sin x}$.

Rozwiązanie

a) Rozkładamy lewą stronę równania na czynniki.

$$\sin 2x+\cos x=0 \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$2\sin x\cdot\cos x+\cos x=0$$
$$\cos x\cdot(2\sin x+1)=0 \qquad a\cdot b=0,\ gdy\ a=0\ lub\ b=0$$

Porównujemy czynniki do zera i rozwiązujemy otrzymane równania.

$$\cos x=0 \quad \text{lub} \quad 2\sin x+1=0$$
$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{lub} \quad \sin x=-\frac{1}{2} \qquad \sin(x)=\frac{1}{2},\ więc\ x_0=\frac{\pi}{6}.$$
$$x=x_0\ lub\ x=\pi\ x_0.$$
$$x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \text{lub}\ x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$$
$$x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \text{lub}\ x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi, \text{ gdzie } k\in Z.$$

b) $\cos 2x+\sin x=0$

$$1-2\sin^2 x+\sin x=0 \qquad \cos 2x=1-2\sin^2 x$$
$$2(\sin x)^2-\sin x-1=0$$
$$\sin x=t, \text{ gdzie } t\in\langle -1;1\rangle \qquad 1\le\sin x\le 1,\ więc\ t\in\langle -1;1\rangle.$$
$$2t^2-t-1=0$$
$$t=-\frac{1}{2} \text{ lub } t=1 \qquad -\frac{1}{2}\in\langle -1;1\rangle \text{ i } 1\in\langle -1;1\rangle$$
$$\sin x=-\frac{1}{2} \text{ lub } \sin x=1 \qquad x_0=-\frac{\pi}{6}$$
$$x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \text{lub}\ x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi, \text{ lub } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \text{ gdzie } k\in Z.$$

c) $\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}=\dfrac{2}{\sin x}$, gdzie $\sin x\neq 0$ i $\cos x\neq 0$.

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sin x}\quad /\cdot\sin x\cdot\cos x$$

$\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ i $\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=2\cos x$$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$1=2\cos x$$

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

$\dfrac{1}{2}\neq 0$

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{lub} \quad x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \text{ gdzie } k\in Z.$$

$x_0=\dfrac{\pi}{3}$

Ćwiczenie 76. Rozwiąż równanie: **a)** $\sin 2x+\sin x=0$, **b)** $\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{\operatorname{tg}x}=1$.

Przykład 44. Rozwiąż równanie $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$ do takiej postaci, aby zastosować wzór na funkcję trygonometryczną sumy kątów.

Pokażemy dwa sposoby przekształcenia tego równania.

I sposób

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=1\quad /:2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x+\frac{1}{2}\cdot\sin x=\frac{1}{2}$$

Podstawiamy:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3} \text{ i } \frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3},$$

II sposób

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cos x+\sin x=1$$

$\sqrt{3}=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x+\sin x=1\quad /\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{lub} \quad x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$$

$x_0=\dfrac{\pi}{6}$

$$x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{lub} \quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \text{ gdzie } k\in Z.$$

Ćwiczenie 77. Rozwiąż równanie:

a) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$, **b)** $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, **c)** $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$.

Przykład 45. Rozwiąż równanie $4\cos 2x\cdot\cos 5x=2\cos 7x+1$.

Rozwiązanie

$$4\cos 2x\cdot\cos 5x=2\cdot\cos 7x+1$$

Zauważamy, że $2x+5x=7x$, więc

$$4\cos 2x\cdot\cos 5x=2\cdot\cos(2x+5x)+1 \qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta \quad \sin\alpha\sin\beta$$

$$4\cos 2x\cdot\cos 5x=2\cdot(\cos 2x\cdot\cos 5x-\sin 2x\cdot\sin 5x)+1$$

$$4\cos 2x\cdot\cos 5x-2\cos 2x\cdot\cos 5x+2\sin 2x\cdot\sin 5x=1$$

$$2\cdot(\cos 2x\cdot\cos 5x+\sin 2x\cdot\sin 5x)=1 \quad /:2 \qquad \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha\quad\beta)$$

$$\cos(2x-5x)=\frac{1}{2}$$

$$\cos 3x=\frac{1}{2} \qquad \cos(\ 3x)=\cos(3x)$$

$$3x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{lub} \quad 3x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \quad \text{lub} \quad x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, \text{ gdzie } k\in Z.$$

Ćwiczenie 78. Rozwiąż równanie $4\sin 4x\cos 6x=2\sin 10x+1$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

75. **a)** $x=\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, gdzie $k\in Z$, **c)** $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$.

76. **a)** $x=k\pi$, $x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x=(2k+1)\pi$, gdzie $k\in Z$.

77. **a)** $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, gdzie $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, gdzie $k\in Z$,

c) $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, gdzie $k\in Z$. 78. $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ lub $x=\frac{7}{12}\pi+k\pi$, gdzie $k\in Z$.

Zadania utrwalające

3.69. Rozwiąż równanie:

a) $\operatorname{tg}x\cdot\cos x=0$, **b)** $\operatorname{tg}x\cdot\sin x=0$, **c)** $\sin x\cdot\cos x=0$,

d) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$, **e)** $\cos x(\sin x-1)=0$, **f)** $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot(\operatorname{tg}x+1)=0$.

3.70. Rozwiąż równanie:

a) $4\sin^2 x-4\sin x+1=0$, **b)** $2\cos^2 x-\cos x=1$, **c)** $\sin x+\cos^2 x+1=0$,

d) $2\cos^2 x+3\sin x=0$, **e)** $\sin 2x-2\cos^2 x=0$, **f)** $3\sin x+2\cos 2x=3$,

g) $\cos x-\cos 2x=1$, **h)** $2\cos x-\cos 2x=-3$, **i)** $2\sin^3 x-\cos 2x-\sin x=0$.

3.71. Rozwiąż równanie:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin 2x$, **b)** $\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$,

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, **d)** $\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)=\cos x$,

e) $\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{12}-x\right)$, **f)** $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

3.72. Rozwiąż równanie:

a) $\sin x-\cos x=-1$, **b)** $\sin x=\operatorname{tg} x$, **c)** $2\sin^2 x=\sin x$,

d) $\sin^2 x-\cos^2 x=0$, **e)** $\frac{\sin x+\sin^2 x}{\cos x}=0$, **f)** $\sin^2 x+\cos^2 x=1$,

g) $\sin 2x=\cos x$, **h)** $\operatorname{tg} x\cdot\cos x-\sin 2x=0$, **i)** $\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$.

3.73. Rozwiąż równanie:

a) $3\cos x=\sqrt{3}\sin x$, **b)** $\cos 5x+\cos x=0$,

c) $\sin x+\sin 3x=0$, **d)** $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

3.74. Rozwiąż równanie:

a) $\sin x-\cos(\pi-x)=0$, **b)** $\cos(\pi+x)+\sin(\pi-x)=0$,

c) $\sin(\pi+2x)+\cos(\pi-2x)=0$, **d)** $\operatorname{tg}(\pi-x)+\operatorname{tg}(\pi+x)=0$.

3.75. Oblicz:

a) $\cos\frac{x}{2}$, gdy $\cos x=-\frac{2}{3}$ i $x\in\langle\pi;2\pi\rangle$, **b)** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, gdy $\sin x=\frac{2}{3}$ i $x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$,

c) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, gdy $\sin x=\frac{1}{2}$ i $x\in\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$.

3.76. Rozwiąż równanie:

a) $2\sin 4x\cos 2x=\sin 6x+1$, **b)** $4\sin 5x\cdot\cos 3x=2\sin 8x+1$,

c) $4\sin 2x\cdot\cos 4x=2\sin 6x+\sqrt{2}$, **d)** $2\cos 6x\cdot\cos 3x=\cos 9x+1$,

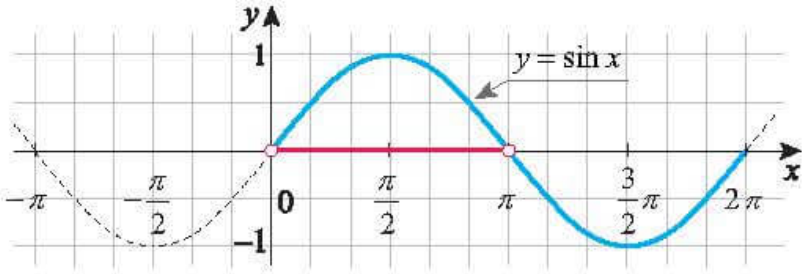
e) $-4\sin 5x\cdot\sin 2x=2\cos 7x-\sqrt{3}$, **f)** $2\sin 7x\cdot\sin 3x+\cos 10x=0$.

Nierówności trygonometryczne

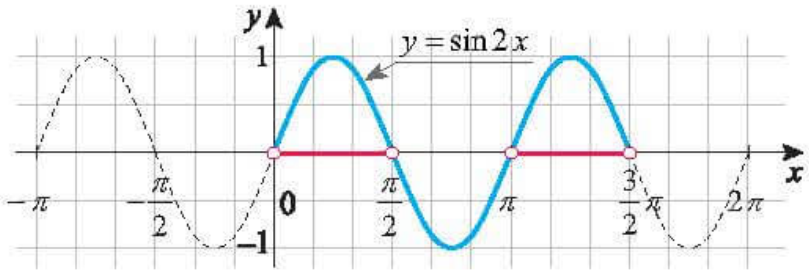
Nierównością trygonometryczną nazywamy taką nierówność, w której niewiadoma występuje tylko pod znakiem funkcji trygonometrycznej. Będziemy się zajmować tylko takimi nierównościami, których odpowiedź można odczytać z wykresu funkcji trygonometrycznej. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 46. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=\sin x$



b) $f(x)=\sin 2x$



Przeanalizuj wykres funkcji f i podaj rozwiązanie nierówności $f(x)>0$, gdy:

1 $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **2** $x\in R$.

Rozwiązanie

a) **1** $x\in\langle 0;2\pi\rangle$

$\sin x>0$, gdy $x\in(0;\pi)$,

2 $x\in R$

$\sin x>0$, gdy $x\in(0+2k\pi;\pi+2k\pi)$, gdzie $k\in Z$.

Uwzględniamy okresowość funkcji $y=\sin x$.

b) **1** $x\in\langle 0;2\pi\rangle$

$\sin 2x>0$, gdy $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$,

2 $x\in R$

$\sin 2x>0$, gdy $x\in\left(0+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, gdzie $k\in Z$.

Uwzględniamy okresowość funkcji $y=\sin 2x$.

Odp.: a) **1** $x\in(0;\pi)$, **2** $x\in(2k\pi;\pi+2k\pi)$, gdzie $k\in Z$,

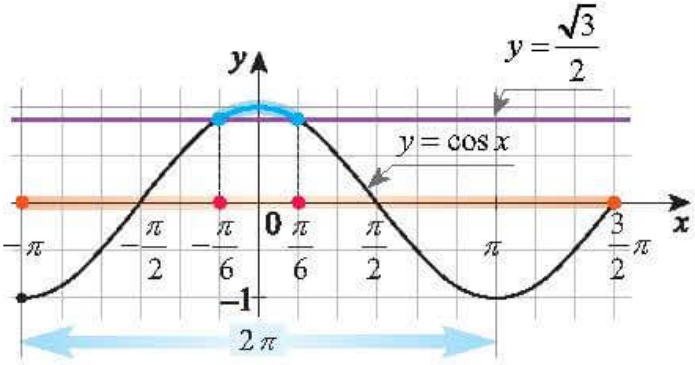
b) **1** $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi;\frac{3}{2}\pi\right)$, **2** $x\in\left(k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, gdzie $k\in Z$.

Ćwiczenie 79. Funkcja f określona jest wzorem: **a)** $f(x)=\sin x$, **b)** $f(x)=\sin 2x$. Podaj rozwiązanie nierówności $f(x)\le 0$, gdy: **1** $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **2** $x\in R$.

Przykład 47. Rozwiąż nierówność $\cos x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$, gdy: **a)** $x\in\left\langle -\pi;\frac{3}{2}\pi\right\rangle$, **b)** $x\in R$.

Rozwiązanie

a) **1°** Szkicujemy fragmenty cosinusoidy i linii prostej, określonych równaniami $y=\cos x$ i $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, gdy $x\in\left\langle -\pi;\frac{3}{2}\pi\right\rangle$.



2° Rozwiązujemy równanie:

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{gdy}\ x\in\left\langle -\pi;\frac{3}{2}\pi\right\rangle,\ \text{skąd}\ x=-\frac{\pi}{6}\ \text{lub}\ x=\frac{\pi}{6}.$$

3° Odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności, gdy $x\in\left\langle -\pi;\frac{3}{2}\pi\right\rangle$:

$$\cos x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\in\left\langle -\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\rangle.$$

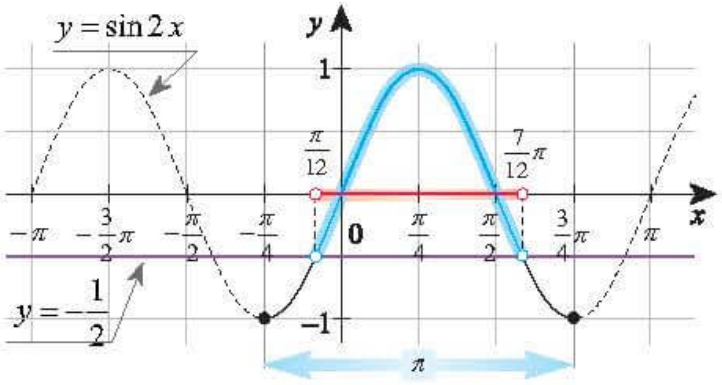
b) Uwzględniamy okresowość funkcji i podajemy rozwiązanie nierówności, gdy $x\in R$;

$$x\in\left\langle -\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\rangle,\ \text{gdzie}\ k\in Z.$$

Okresem funkcji cosinus jest 2π.

Odp.: **a)** $x\in\left\langle -\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\rangle$, **b)** $x\in\left\langle -\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\rangle$, gdzie $k\in Z$.

Ćwiczenie 80. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x)=\sin 2x$ i prosta o równaniu $y=-\frac{1}{2}$. Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności $\sin 2x>-\frac{1}{2}$, gdy $x\in R$.



Ćwiczenie 81. Podaj rozwiązanie nierówności $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, gdy:

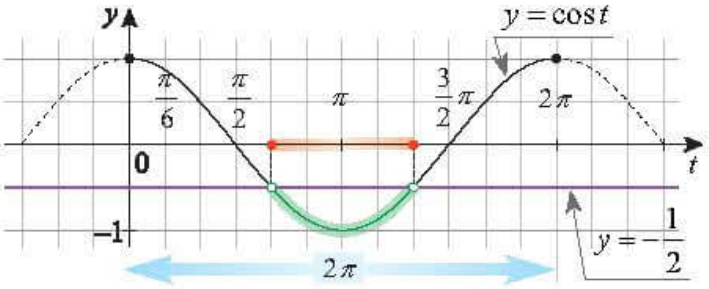
a) $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, b) $x \in \langle -2\pi; 0 \rangle$, c) $x \in \langle 4\pi; 5\pi \rangle$.

Przykład 48. Rozwiąż nierówność $\cos\frac{7}{8}x < -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Wprowadzamy zmienną pomocniczą $t = \frac{7}{8}x$ i rozwiązujemy nierówność $\cos t < -\frac{1}{2}$.

Okresem zasadniczym funkcji $f(x) = \cos t$ jest 2π.



1° $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ i $\cos t = -\frac{1}{2}$

$t = \frac{2}{3}\pi$ lub $t = \frac{4}{3}\pi$.

2° $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$ i $\cos t < -\frac{1}{2}$, to

$\frac{2}{3}\pi < t < \frac{4}{3}\pi$.

3° $t \in R$ i $\cos t < -\frac{1}{2}$, więc $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < t < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$.

4° $t = \frac{7}{8}x$, więc $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < \frac{7}{8}x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \quad / \cdot \frac{8}{7}$

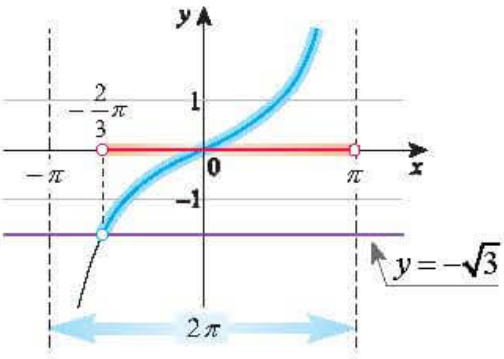
$\frac{16}{21}\pi + \frac{16}{7}k\pi < x < \frac{32}{21}\pi + \frac{16}{7}k\pi$, gdzie $k \in Z$.

Ćwiczenie 82. Rozwiąż nierówność: a) $\sin 4x < -\frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg}\frac{3}{4}x \geq 1$.

Przykład 49. Rozwiąż nierówność $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > -\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Okresem zasadniczym funkcji $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ jest 2π.



1° Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ i prostą $y = -\sqrt{3}$. Wybieramy przedział o długości 2π, w którym znajdujemy rozwiązanie podstawowe równania $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$.

$x \in (-\pi; \pi)$ i $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$

$x_0 - -\frac{\pi}{3}$

$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3}$, skąd $x = -\frac{2}{3}\pi$.

Uwzględniamy okresowość funkcji $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

2° $x \in (-\pi; \pi)$ i $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > -\sqrt{3}$, więc $x \in \left(-\frac{2}{3}\pi; \pi\right)$.

3° $x \in R \setminus \{\pi + 2k\pi\}$ i $\operatorname{tg}\frac{x}{2} > -\sqrt{3}$, więc $x \in \left(-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in Z$.

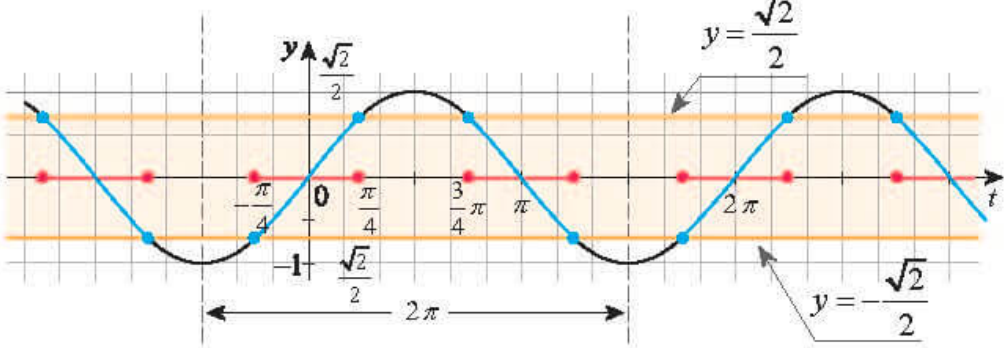
Ćwiczenie 83. Rozwiąż nierówność $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \le -\sqrt{3}$.

Przykład 50. Rozwiąż nierówność $2\sin^2 x \le 1$.

Rozwiązanie

$2\sin^2 x \le 1 \quad / : 2$, więc $\sin^2 x \le \frac{1}{2}$, skąd $|\sin x| \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Odp.: $x \in \left\langle -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \right\rangle$, czyli

$x \in \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in Z$.

Ćwiczenie 84. Rozwiąż nierówność: **a)** $\cos^2 x \ge \frac{3}{4}$, **b)** $3\operatorname{tg}^2 x \le 9$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

79. **a)** **1** $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$, **2** $x \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in Z$, **b)** **1** $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi \right\rangle$,
2 $x \in \left\langle \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k\pi \right\rangle$, gdzie $k \in Z$. 80. $\left(-\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7}{12}\pi + k\pi\right)$, gdzie $k \in Z$.
81. **a)** $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{11}{6}\pi; 2\pi \right\rangle$, **b)** $x \in \left\langle -2\pi; -\frac{11}{6}\pi \right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{6}; 0 \right\rangle$, **c)** $x \in \left\langle 4\pi; \frac{25}{6}\pi \right\rangle$

Odpowiedzi do ćwiczeń – cd.

82. a) $x\in\left(-\frac{5}{24}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2};\ -\frac{1}{24}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, gdzie $k\in Z$, b) $x\in\left\langle\frac{1}{3}\pi+\frac{4}{3}k\pi;\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}k\pi\right\rangle$, gdzie $k\in Z$.

83. $x\in\left\langle-\pi+2k\pi;-\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right\rangle$, gdzie $k\in Z$.

84. a) $\left\langle-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi\right\rangle$, gdzie $k\in Z$, b) $\left\langle-\frac{\pi}{3}+k\pi;\ \frac{\pi}{3}+k\pi\right\rangle$, gdzie $k\in Z$.

Zadania utrwalające

3.77. Rozwiąż nierówność:

a) $\sin x<1$, b) $\sin x\le 1$, c) $\cos x>-1$, d) $\cos x\ge -1$,

gdy: **1** $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **2** $x\in\left\langle-\frac{3}{4}\pi;-\frac{\pi}{4}\right\rangle$, **3** $x\in R$.

3.78. Rozwiąż nierówność:

a) $\sin 3x>0$, b) $\sin 3x<0$, c) $\operatorname{tg}3x>0$,

d) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\ge 0$, e) $\sin\frac{x}{2}\le 0$, f) $\cos\frac{x}{2}\ge 0$.

3.79. Wyznacz rozwiązanie nierówności w podanym obok przedziale:

a) $\sin x\le -1$, $\langle -4\pi;2\pi\rangle$, b) $\sin x\le 0$, $\langle -3\pi;3\pi\rangle$, c) $\cos x\le -1$, $\langle -3\pi;\pi\rangle$,

d) $\cos x>-\frac{1}{2}$, $\langle 0;2\pi\rangle$, e) $\operatorname{tg}x\le\sqrt{3}$, $\left\langle-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right\rangle$, f) $\operatorname{tg}x>-1$, $\langle 0;2\pi\rangle$.

3.80. Podaj zbiór rozwiązań nierówności zawierający się w przedziale podanym obok.

a) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\langle 0;2\pi\rangle$, b) $\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{1}{4}$, $\langle -\pi;\pi\rangle$,

c) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}>1$, $(-\pi;\pi)$, d) $\sqrt{3}\operatorname{tg}3x<1$, $(0;\pi)$.

3.81. Rozwiąż nierówność:

a) $2\sin x\cos x\le\frac{1}{2}$, b) $\cos^2 x-\sin^2 x\ge 1$,

c) $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)<\sqrt{2}$.

3.82. Rozwiąż nierówność:

a) $\sin x>\cos x$, b) $\sin x\le\cos x$.

3.83. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj rozwiązanie nierówności podanej obok.

a) $f(x)=|\sin x|$, $f(x)\ge\frac{1}{2}$, b) $f(x)=|\cos 2x|$, $f(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}$,

c) $f(x)=|\operatorname{tg}x|$, $f(x)\ge 1$.

Zestaw powtórkowy

1. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Miarą główną kąta $-2000°$ jest:

A. $160°$, **B.** $200°$.

Końcowe ramię kąta o mierze $11\frac{2}{3}\pi$ leży w ćwiartce:

C. III, **D.** IV.

2. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jeżeli $\alpha = 250°$, to iloczyn $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ jest:

A. dodatni, **B.** ujemny,

Jeżeli $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, to suma $\sin\alpha + \cos\alpha$ jest:

C. dodatnia, **D.** ujemna.

3. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Wartość wyrażenia $\cos 130°\cos 190° - \sin 130°\sin 190°$ jest równa $-\frac{1}{2}$.	**P**	**F**
Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ jest zbiór $Y_f = \left\langle -\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{5} \right\rangle$.	**P**	**F**
Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}$ jest zbiór $Y_g = \left\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle$.	**P**	**F**

4. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jeżeli $x \in \left\langle -\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi \right\rangle$, to równanie $\cos x = \frac{1}{2}$ ma:

A. dwa rozwiązania, **B.** trzy rozwiązania.

Nie ma rozwiązania nierówność:

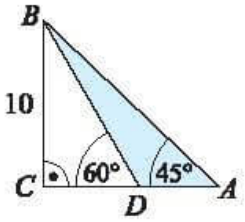
C. $\sin x \leq -1$, **D.** $\sin x < -1$.

4. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów

Twierdzenie sinusów (Snelliusa*)

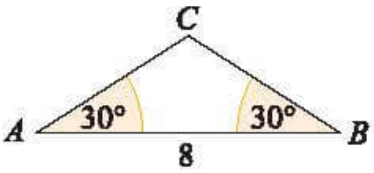
Rozwiązać trójkąt to znaczy obliczyć długości wszystkich jego boków oraz miary wszystkich jego kątów. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów pozwoli nam rozwiązywać dowolne trójkąty.

Ćwiczenie 1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i rozwiąż trójkąt DAB.

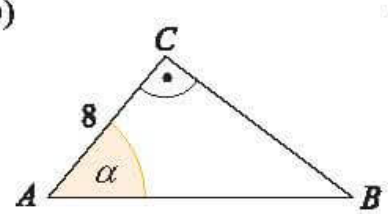


Ćwiczenie 2. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole trójkąta ABC.

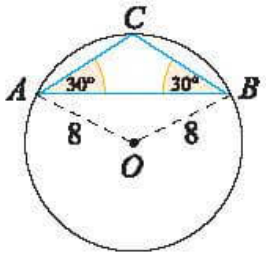
a)



b)



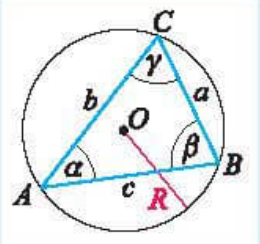
c)



Twierdzenie sinusów

W każdym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta przeciwległego jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R,\qquad \frac{b}{\sin\beta}=2R,\qquad \frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$ gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Z (***założenie***):

a, b, c – długości boków trójkąta,

α, β, γ – miary kątów leżących odpowiednio naprzeciw boków a, b, c,

R – promień okręgu opisanego na danym trójkącie.

T (***teza***):

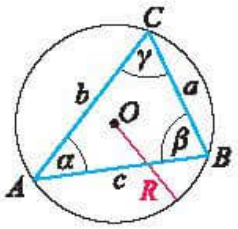
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R.$$

*) Willebrord Snell zwany Snelliusem (1580-1626) – holenderski astronom i matematyk.

***Dowód*:**

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



1 Wykażemy, że $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

Pole P trójkąta można obliczyć, stosując jeden z trzech wzorów:

$P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ lub $P=\frac{1}{2}ac\sin\beta$, lub $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, więc

$\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma \quad /\cdot 2$

$bc\sin\alpha=ac\sin\beta=ab\sin\gamma$, skąd

$bc\sin\alpha=ac\sin\beta$, $ac\sin\beta=ab\sin\gamma$, $bc\sin\alpha=ab\sin\gamma$, więc

$b\sin\alpha=a\sin\beta$, $c\sin\beta=b\sin\gamma$, $c\sin\alpha=a\sin\gamma$.

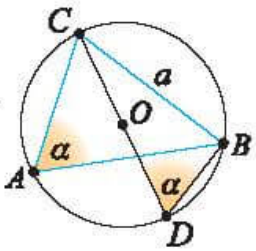
Zapisujemy każdą z powyższych równości w postaci proporcji

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$, skąd $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

2 Wykażemy, że $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, rozważając trzy przypadki:

$0°<\alpha<90°$, $\alpha=90°$, $90°<\alpha<180°$.

$0°<\alpha<90°$

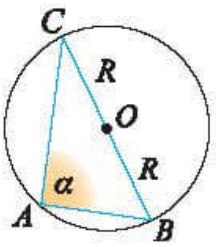


W okręgu prowadzimy średnicę CD i punkt D łączymy z punktem B.
Wtedy $|\sphericalangle CAB|=|\sphericalangle CDB|=\alpha$, $|CD|=2R$, $|\sphericalangle DBC|=90°$.

W trójkącie CDB

$\sin\alpha=\frac{|BC|}{|CD|}$, czyli $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$, skąd $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$.

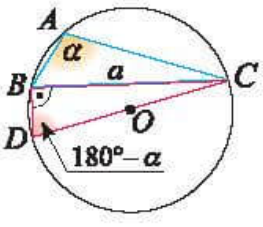
$\alpha=90°$



Zauważamy, że $|CB|=a=2R$. $\sin\alpha=\sin 90°=1$, więc

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin 90°}=\frac{a}{1}=a$, czyli $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$.

$90°<\alpha<180°$



W okręgu prowadzimy średnicę CD i punkt D łączymy z punktem B.
Wtedy $|CD|=2R$, $|\sphericalangle DBC|=90°$.
Kąty BAC i BDC są kątami wpisanymi, opartymi na łukach dopełniających się, więc $|\sphericalangle BAC|+|\sphericalangle BDC|=180°$, czyli $\alpha+|\sphericalangle BDC|=180°$, skąd $|\sphericalangle BDC|=180°-\alpha$.

W trójkącie BDC:

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{|BC|}{|CD|},\ \text{czyli}\ \sin\alpha=\frac{a}{2R},\ \text{skąd}\ \frac{a}{\sin\alpha}=2R. \qquad \textbf{c.n.u.}$$

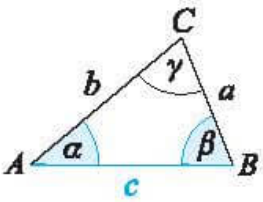
Z rozważań w punkcie 2° wynika, że $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, *zatem punkt 1° dowodu można pominąć.*

Uwaga

W zadaniach dotyczących rozwiązywania trójkątów będziemy zakładać, że w trójkącie ABC boki a, b, c leżą odpowiednio naprzeciw kątów α, β, γ.

Przykład 1. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym miary kątów α i β są odpowiednio równe 40° i 68° oraz długość boku c jest równa 6 dm. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Wynik podaj w przybliżeniu do dwóch miejsc po przecinku.

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $\alpha=40^\circ$, $\beta=68^\circ$, $c=6$ dm. | ***Obliczyć***: a, b, R.

$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, więc $\gamma=180^\circ-(40^\circ+68^\circ)=72^\circ$.

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma},\ \text{więc}\ a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{6\cdot\sin40^\circ}{\sin72^\circ}$$

$$a=\frac{6\cdot0{,}6428}{0{,}9511},\ \text{skąd}\ a\approx4{,}06\ \text{dm},$$

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},\ \text{więc}\ b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{6\cdot\sin68^\circ}{\sin72^\circ}$$

$$b=\frac{6\cdot0{,}9272}{0{,}9511},\ \text{skąd}\ b\approx5{,}85\ \text{dm},$$

$$\frac{c}{\sin\gamma}=2R,\ \text{więc}\ 2R=\frac{6}{\sin72^\circ},\ \text{skąd}\ R\approx3{,}15\ \text{dm}.$$

Odp.: $a\approx4{,}06$ dm, $b\approx5{,}85$ dm, $R\approx3{,}15$ dm.

Uwaga

Zadanie z przykładu 1. możemy rozwiązać także, obliczając w pierwszej kolejności promień R okręgu opisanego na tym trójkącie, a następnie długości boków a i b na podstawie równości $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$ i $\sin\beta=\frac{b}{2R}$.

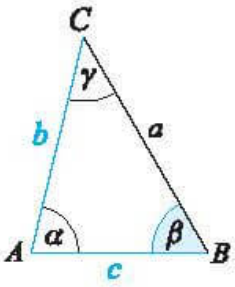
Ćwiczenie 3. Rozwiąż trójkąt ABC i oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie, gdy: **a)** $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $c = 10$, **b)** $\beta = 50°$, $\gamma = 120°$, $a = 8$.

Wynik zaokrąglij do całości.

Ćwiczenie 4. Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, w którym promień okręgu opisanego na nim jest równy 9 cm, a jeden z kątów tego trójkąta ma miarę 150°.

Przykład 2. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym boki b i c mają odpowiednio długości 10 i 8, a kąt β ma miarę 60°. Długość boku podaj w przybliżeniu do 0,1, a miary kątów do 1°.

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $b = 10$, $c = 8$, $\beta = 60°$. | ***Obliczyć***: a, α, γ.

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \text{ skąd } \sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b} = \frac{8\cdot\sin 60°}{10} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

$\sin\gamma \approx 0{,}6928$, więc $\gamma \approx 44°$ lub $\gamma \approx 136°$.

Warunki zadania spełnia tylko kąt o mierze 44°, ponieważ spełnia warunek $\beta + \gamma < 180°$.

Obliczamy miarę kąta α i długość boku a.

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$, czyli $\alpha \approx 76°$.

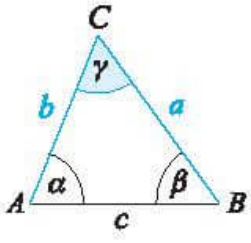
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \text{ skąd } a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{10\cdot\sin 76°}{\sin 60°}, \text{ czyli } a \approx 11{,}2.$$

Odp.: $a \approx 11{,}2$, $\alpha \approx 76°$, $\gamma \approx 44°$.

Ćwiczenie 5. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym $a = 18$, $b = 14$, $\alpha = 62°$. Wyniki zaokrąglij do całości.

Przykład 3. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym boki a i c mają odpowiednio długości 2 i $\sqrt{2}$, a kąt γ ma miarę 30°. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $a = 2$, $c = \sqrt{2}$, $\gamma = 30°$. | ***Obliczyć***: b, α, β.

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \text{ skąd } \sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c} = \frac{2\cdot\sin 30°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ więc}$$

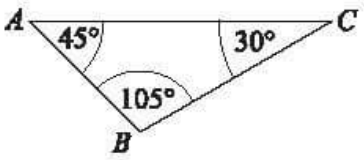
$$\alpha = 45° \quad \text{lub} \quad \alpha = 180° - 45° = 135°.$$

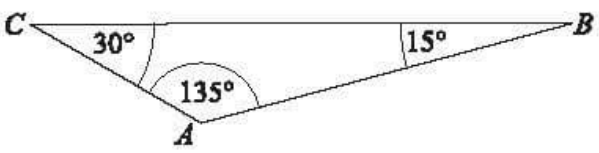
Kąt $\alpha = 45°$ oraz kąt $\alpha = 135°$ spełniają warunki zadania, gdyż $\alpha + \gamma < 180°$.

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$, więc

$\beta = 180° - (45° + 30°) = 105°$ lub $\beta = 180° - (135° + 30°) = 15°$.

Zauważamy, że istnieją dwa trójkąty spełniające warunki zadania.





Dla każdego trójkąta obliczamy długość boku b z wzoru $b = \dfrac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$.

$b = \dfrac{\sqrt{2}\sin 105°}{0{,}5} = \dfrac{\sqrt{2}\sin 75°}{0{,}5}$, skąd $b \approx 2{,}73$.

$b = \dfrac{\sqrt{2}\sin 15°}{0{,}5}$, skąd $b \approx 0{,}73$.

Odp.: $b \approx 2{,}73$, $\alpha = 45°$, $\beta = 105°$ lub $b \approx 0{,}73$, $\alpha = 135°$, $\beta = 15°$.

Ćwiczenie 6. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym boki b i c mają odpowiednio długości 10 i 11, a kąt β ma miarę 30°. Wynik zaokrąglij do całości.

Przykład 4. Uzasadnij, że **nie istnieje** trójkąt ABC, w którym $a = 5$, $b = 16$, $\alpha = 30°$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że gdyby istniał trójkąt spełniający warunki zadania, to spełniona byłaby równość:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \text{ skąd } \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{16 \cdot \sin 30°}{5} = 1{,}6.$$

$\sin\beta \in \langle -1; 1 \rangle$

Nie istnieje kąt β, taki że $\sin\beta > 1$, więc trójkąt ABC nie istnieje. ***c.n.u.***

Ćwiczenie 7. Sprawdź, czy istnieje trójkąt ABC, w którym:

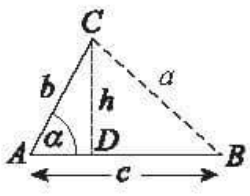
a) $a = 16$, $b = 5$, $\alpha = 30°$, **b)** $c = 10$, $\alpha = 60°$, $\beta = 135°$,

c) $b = 8$, $c = 4$, $\gamma = 60°$, **d)** $a = 1$, $c = 1$, $\gamma = 135°$.

Jeśli trójkąt istnieje, to podaj pozostałe jego wymiary oraz miary kątów.

Ćwiczenie 8. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku. Wyraź wysokość h w zależności od boku b i kąta ostrego α. Sprawdź, czy można zbudować trójkąt o bokach a, b i c, gdy:

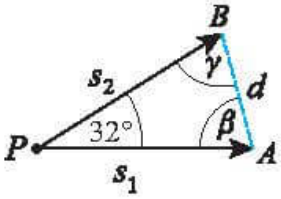
a) $a < h$, **b)** $a = h$, **c)** $h < a < b$, **d)** $a \geq b$.



Przykład 5. Dwa statki, zakotwiczone na redzie obok siebie, wypływają w tym samym czasie. Przyjmujemy, że trasy rejsów odbywają się wzdłuż prostych, które tworzą kąt 32°. Prędkość jednego ze statków jest równa 28 węzłów (28 w), a prędkość drugiego jest większa niż 20 węzłów. Po upływie 3,5 godziny (3,5 h) odległość pomiędzy statkami była równa 72 mile morskie (72 Mm). Przyjmując, że morze jest spokojne, oblicz prędkość drugiego statku. Wynik podaj w przybliżeniu do jednego węzła.



Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

v_1, v_2 – prędkości poruszania się statków,

s_1, s_2 – długości tras, które pokonały statki,

d – odległość między statkami po upływie 3,5 h.

Dane: $v_1 = 28$ w, $t = 3{,}5$ h, $d = 72$ Mm, $\alpha = 32°$. | ***Obliczyć***: v_2, gdy $v_2 > 20$.

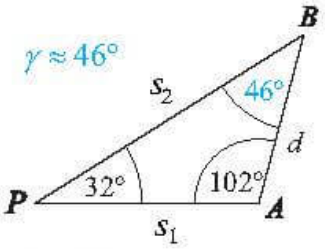
Statki wyruszyły z punktu P, a po upływie 3,5 godziny znalazły się odpowiednio w punktach A i B. Modelem tej sytuacji jest trójkąt PAB.

Z fizyki wiadomo, że droga $s = vt$, zatem

$$s = 28 \cdot 3{,}5 = 98, \text{ czyli } s = 98 \text{ Mm}.$$

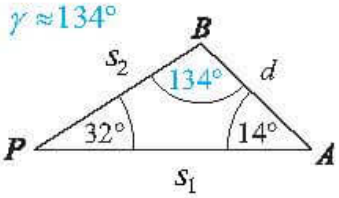
Z twierdzenia sinusów:

- $\dfrac{s_1}{\sin\gamma} = \dfrac{d}{\sin\alpha}$, skąd $\sin\gamma = \dfrac{s_1 \sin\alpha}{d} = \dfrac{98 \cdot \sin 32°}{72}$,



$\sin\gamma = 0{,}7213$, więc $\gamma \approx 46°$ lub $\gamma \approx 134°$

$\beta \approx 102°$ lub $\beta \approx 14°$,



- $\dfrac{s_2}{\sin\beta} = \dfrac{d}{\sin\alpha}$, skąd $s_2 = \dfrac{d \sin\beta}{\sin\alpha}$

$s_2 = \dfrac{72 \cdot \sin 102°}{\sin 32°}$ lub $s_2 = \dfrac{72 \cdot \sin 14°}{\sin 32°}$, więc

$s_2 \approx 132{,}9$ Mm lub $s_2 \approx 32{,}9$ Mm.

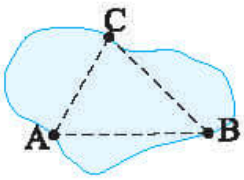
$v_2 = \dfrac{s_2}{t}$, więc $v_2 = \dfrac{132{,}9}{3{,}5}$ lub $v_2 = \dfrac{32{,}9}{3{,}5}$

$v_2 \approx 38$w lub $v_2 = 9{,}4$w.

$38 > 20$
$9{,}4 < 20$

Odp.: Drugi statek płynął z prędkością około 38 węzłów.

Ćwiczenie 9. Nad pewnym jeziorem znajdują się trzy przystanie, oznaczone na rysunku literami A, B i C. Wiedząc, że odległość między przystaniami A i B jest równa 1000 m oraz $|\sphericalangle CAB| = \frac{\pi}{3}$ i $|\sphericalangle ABC| = \frac{\pi}{4}$, oblicz odległość przystani C od przystani A oraz odległość przystani C od przystani B. Wynik zaokrąglij do 1 m.



Ćwiczenie 10. W trójkącie ABC długości boków AC i BC są odpowiednio równe 2 i $\sqrt{2}$, a miara kąta BAC jest 30°. Oblicz długość boku AB.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. $|AB| = 10\sqrt{2}$, $|BD| = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, $|AD| = \frac{10}{3}\cdot(3-\sqrt{3})$, $|\sphericalangle DBA| = 15°$, $|\sphericalangle ADB| = 120°$.

2. a) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$, b) $32\operatorname{tg}\alpha$, c) $16\sqrt{3}$. 3. a) $R \approx 5$, $b \approx 7$, $a \approx 9$, $\gamma = 75°$, b) $R \approx 23$, $c \approx 40$, $b \approx 35$, $\alpha = 10°$.

4. 9 cm. 5. $\beta = 43°$, $\gamma = 75°$, $c \approx 20$. 6. $\gamma_1 \approx 33°$, $\alpha_1 \approx 117°$, $a_1 \approx 18$, $\gamma_2 \approx 147°$, $\alpha_2 \approx 3°$, $a_1 \approx 1$.

7. a) Tak, $c \approx 20$, $\beta \approx 9°$, $\gamma \approx 141°$, b) nie, ponieważ $\alpha + \beta \approx 195° > 180°$, c) nie, ponieważ $\sin\beta \approx \sqrt{3} > 1$, d) nie, ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, a z warunków zadania wynika, że $\alpha = 135°$.

8. $h = b\sin\alpha$, a) nie, ponieważ trójkąt CDB jest prostokątny i a jest przeciwprostokątną, b) tak, trójkąt ABC jest prostokątny i $|\sphericalangle ABC| = 90°$, c) tak, d) tak.

9. $|AC| \approx 732$ m, $|BC| \approx 897$ m.

10. $|AB| = \sqrt{3}+1$ lub $|AB| = \sqrt{3}-1$. *Wskazówka.* Zauważ, że $|\sphericalangle ABC| = 45°$ lub $135°$.

Zadania utrwalające

4.1. Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie, gdy dana jest długość jednego z jego boków i miara kąta leżącego naprzeciw tego boku.

a) $b = 45$ cm, $\beta = 60°$, b) $c = 8$ m, $\gamma = 120°$, c) $a = 72$ dm, $\alpha = 45°$.

4.2. Wyznacz promień R okręgu opisanego na trójkącie, w którym jeden z boków ma długość a, natomiast kąty do niego przyległe mają miary β i γ.

4.3. Rozwiąż trójkąt ABC, znając promień R okręgu opisanego na tym trójkącie i dwa spośród jego kątów α, β, γ. Długości boków podaj w przybliżeniu do jednego miejsca po przecinku.

a) $R = 50$ cm, $\alpha = 80°$, $\beta = 30°$, b) $R = 36$ cm, $\beta = 100°$, $\gamma = 36°$.

4.4. Rozwiąż trójkąt ABC. Długości boków podaj w przybliżeniu do dwóch miejsc po przecinku, a kąty z dokładnością do 1°, gdy:

a) $b = 18$ cm, $\alpha = 32°$, $\beta = 49°$,

b) $c = 7$ m, $\beta = 62°$, $\gamma = 108°$,

c) $a = 14$ cm, $b = 9$ cm, $\alpha = 42°$,

d) $b = 7{,}53$, $c = 5{,}13$, $\gamma = 36°$.

4.5. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 49 cm. Rozwiąż ten trójkąt, wiedząc, że $|AC| = 52$ cm, $|BC| = 40$ cm. Długości boków podaj w przybliżeniu do 0,01 cm.

4.6. W trójkącie równoramiennym ABC odcinek dwusiecznej AD zawarty w tym trójkącie ma długość 6. Wiedząc, że miara kąta ACB jest równa 120°, oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

4.7. Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC, gdy:

a) $|AB| = \sqrt{3}$, $|\sphericalangle BAC| = 110°$, $|\sphericalangle ABC| = 10°$,

b) $|AB| = 4$, $|BC| = 6$, $|AC| = 8$,

c) $|AC| = 9$, $|\sphericalangle CAB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| = \frac{1}{3}|\sphericalangle ACB|$,

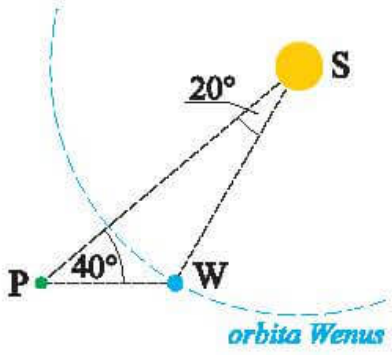
d) $A = (0,0)$, $B = (8,0)$, $C = (3,6)$.

4.8. Z planetoidy*) (P) widać Słońce (S) i planetę Wenus (W) pod kątem 40°, a ze Słońca widać planetoidę i planetę Wenus pod kątem 20°. Odległość planetoidy od Słońca jest równa około $1{,}5 \cdot 10^8$ km.

a) Oblicz odległość planetoidy od planety Wenus.

b) Oblicz promień orbity Wenus.

Wyniki podaj z dokładnością do $0{,}1 \cdot 10^8$ km.



4.9. D Wykaż, że jeśli α, β, γ są kątami pewnego trójkąta i spełniony jest warunek $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\gamma$, to ten trójkąt jest prostokątny.

4.10. D Wykaż, że w trójkącie o bokach długości a, b, c oraz leżących odpowiednio naprzeciw nich kątach o miarach α, β, γ spełniona jest równość $\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\gamma}$.

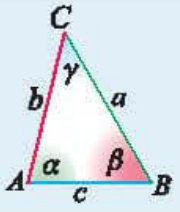
*) Planetoida – niewielkie ciało niebieskie obiegające Słońce po orbicie leżącej między orbitami Marsa i Jowisza.

Twierdzenie cosinusów (Carnota*)

Twierdzenia sinusów nie można zastosować do rozwiązania trójkąta, gdy dane są długości dwóch boków i miara kąta zawartego między nimi albo znane są długości trzech jego boków. Problem ten można rozwiązać, stosując twierdzenie zwane **twierdzeniem cosinusów**.

Twierdzenie cosinusów

W każdym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszony o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Z (***założenie***): a, b, c – długości boków trójkąta ABC.

T (teza): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

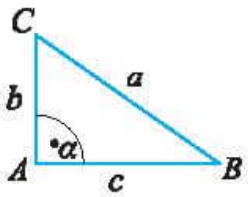
Dowód: Wykażemy, że $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$. Rozważmy trzy przypadki:

1 $\alpha = 90°$, **2** $0° < \alpha < 90°$, **3** $90° < \alpha < 180°$.

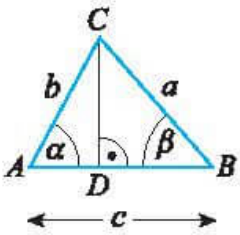
1 $\alpha = 90°$.

Trójkąt ABC jest prostokątny, więc $a^2 = b^2 + c^2$.

Równość $a^2 = b^2 + c^2$ równoważna jest równości $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90°$, ponieważ $\cos 90° = 0$.



2 $0° < \alpha < 90°$ i niech $0° < \beta < 90°$.

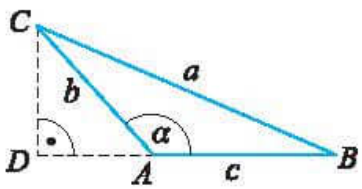


Wysokość CD dzieli bok AB na dwa odcinki AD i DB.

W trójkącie ADC wyznaczamy $|AD| = b\cos\alpha$ i $|DC| = b\sin\alpha$.

$|AD| + |DB| = c$, więc $|DB| = c - b\cos\alpha$.

3 $90° < \alpha < 180°$.



Zauważamy, że spodek D wysokości CD leży na przedłużeniu boku AB i $|\sphericalangle CAD| = 180° - \alpha$.

W trójkącie CDA wyznaczamy:

$|CD| = b\sin(180° - \alpha)$, czyli $|CD| = b\sin\alpha$,

$|DA| = b\cos(180° - \alpha)$, czyli $|DA| = -b\cos\alpha$.

$|DA| + |AB| = |DB|$, więc $|DB| = c - b\cos\alpha$.

*) Lazare Nicolas Marguerite Carnot zwany Wielkim Carnotem (1753-1823) – francuski polityk, matematyk i generał pochodzący z rodziny matematyków, fizyków i polityków Carnot.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBC:

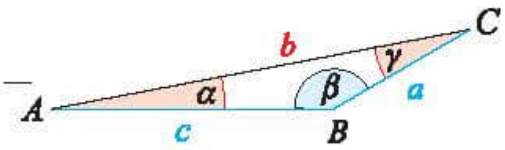
$$|BC|^2 = |DC|^2 + |DB|^2, \text{ czyli } a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2 \cdot \sin^2\alpha + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha. \qquad \textbf{c.n.u.}$$

Podobnie można uzasadnić równości $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$ i $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.

Przykład 6. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym $a = \sqrt{3}$, $c = 3$, $\beta = 150°$.

Rozwiązanie

Dane: $a = \sqrt{3}$, $c = 3$, $\beta = 150°$. | ***Obliczyć***: b, α, γ.



Z twierdzenia cosinusów:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$b^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \cos 150°,$$

czyli $b^2 = 21$, skąd $b = \sqrt{21}$.

Liczba $-\sqrt{21}$ nie może być długością boku.

Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \text{ skąd } \sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}, \text{ czyli } \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}\sin 150°}{\sqrt{21}},$$

$\sin 150° = \frac{1}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{14}, \text{ więc } \sin\alpha \approx 0{,}1890, \text{ skąd}$$
$$\alpha \approx 11° \text{ lub } \alpha \approx 169°.$$

Kąt $169°$ nie spełnia warunków, bo $169° + 150° > 180°$.

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, więc $\gamma \approx 19°$.

Odp.: $b = \sqrt{21}$, $\alpha \approx 11°$, $\gamma \approx 19°$.

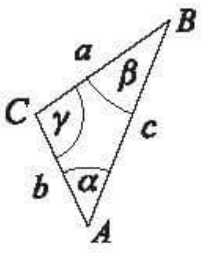
Ćwiczenie 11. Rozwiąż trójkąt ABC, w którym:

a) $a = 8$, $b = 11$, $\gamma = 72°$, **b)** $b = 13{,}2$, $c = 15{,}4$, $\alpha = 106°$.

Wnioski z twierdzenia cosinusów

- W trójkącie ABC:

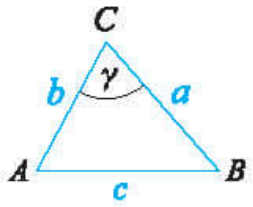
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



- Jeżeli $\cos\alpha > \cos\beta > \cos\gamma$, to $\alpha < \beta < \gamma$ i $a < b < c$.

Przykład 7. Oblicz miarę największego z kątów trójkąta ABC oraz jego pole, gdy $a=2\sqrt{3},\ b=3-\sqrt{3},\ c=3\sqrt{2}$.

Rozwiązanie



Sprawdzamy, która z liczb $2\sqrt{3},\ 3-\sqrt{3},\ 3\sqrt{2}$ jest największa:

$2\sqrt{3}\approx 3{,}46,\quad 3-\sqrt{3}\approx 1{,}27,\quad 3\sqrt{2}\approx 4{,}26,$ więc

$c>a>b$.

Bok c jest najdłuższy, więc kąt γ, leżący naprzeciw boku c, ma największą miarę.

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(3-\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}=\frac{6-6\sqrt{3}}{4\left(3\sqrt{3}-3\right)}=-\frac{1}{2}.$$

$\cos\gamma=-\frac{1}{2}$, więc $90^\circ<\gamma<180^\circ$

$\cos\gamma=-\cos 60^\circ$ $\qquad \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$

$\cos\gamma=\cos(180^\circ-60^\circ)$

$\gamma=120^\circ$.

$$P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot\sin 120^\circ=\frac{3}{2}\left(3-\sqrt{3}\right).$$

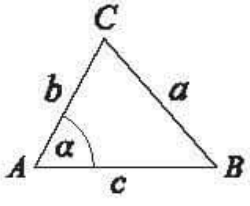
Odp.: $\gamma=120^\circ,\ P=\frac{3}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$.

Ćwiczenie 12. Oblicz miary kątów trójkąta ABC, którego boki a, b, c mają długości: $a=2,\ b=2\sqrt{3},\ c=4$.

Ćwiczenie 13. Sprawdź, czy trójkąt o bokach a, b, c, których długości są odpowiednio równe 6, 7, 8, jest ostrokątny. Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 14. Wykaż, że trójkąt, którego boki mają długości 8, 10, 16, jest trójkątem rozwartokątnym.

Ćwiczenie 15. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i określ, jakim kątem (ostrym, prostym czy rozwartym) jest kąt α, gdy:

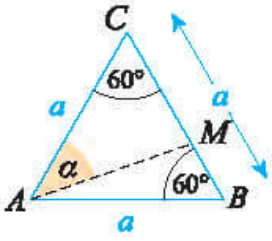


a) $a^2<b^2+c^2$,

b) $a^2=b^2+c^2$,

c) $a^2>b^2+c^2$.

Przykład 8. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC obrano punkt M, taki że $|BM|:|MC|=1:2$. Oblicz sinus kąta CAM.



Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: a – długość boku trójkąta równobocznego ABC, $|BM|=\frac{1}{2}|MC|$. | ***Obliczyć***: $\sin|\sphericalangle CAM|=\sin\alpha$.

Z warunków zadania:

$$|BC|=3|BM|, \text{ skąd } |MC|=\frac{2}{3}|BC|=\frac{2}{3}a \text{ i } |BM|=\frac{1}{3}a.$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta AMC:

$$\frac{|AM|}{\sin 60^\circ}=\frac{\frac{2}{3}a}{\sin\alpha}, \text{ skąd } \sin\alpha=\frac{\frac{2}{3}a\sin 60^\circ}{|AM|}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta AMC:

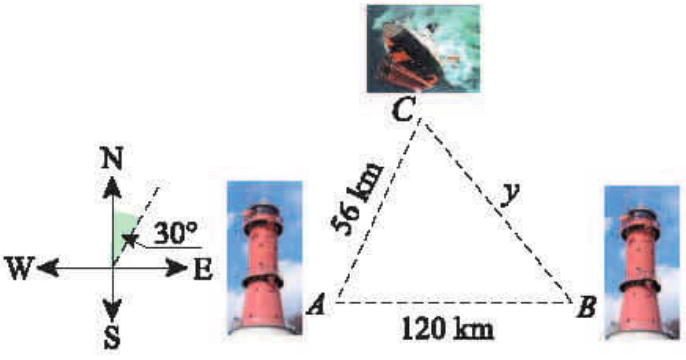
$$|AM|^2=|AC|^2+|MC|^2-2\cdot|AC|\cdot|MC|\cos 60^\circ, \text{ czyli}$$

$$|AM|^2=a^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-2a\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{9}a^2 \text{ i } a>0, \text{ więc } |AM|=\frac{\sqrt{7}}{3}a.$$

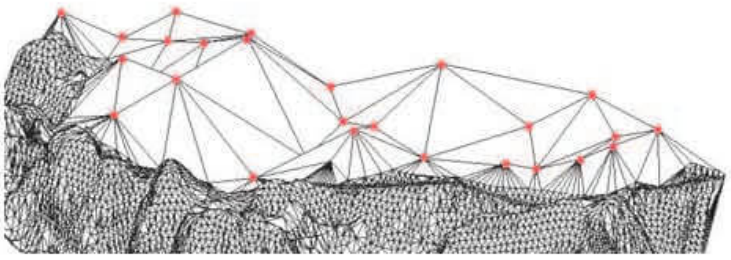
$$\sin\alpha=\frac{\frac{2}{3}a\cdot\sin 60^\circ}{|AM|}, \text{ więc } \sin\alpha=\frac{\frac{2}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{3}a}, \text{ czyli } \sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Odp.: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ćwiczenie 16. Statek płynący po morzu wysłał sygnał SOS, który odebrali dwaj latarnicy w miejscowościach A i B leżących na tej samej szerokości geograficznej i odległych od siebie o 120 km. Latarnik w miejscowości A stwierdził, że statek jest od niego odległy o 56 km i znajduje się w kierunku 30° na północny wschód. Przyjmując, że morze jest spokojne, oblicz, w jakiej odległości był ten statek od latarni morskiej w miejscowości B.



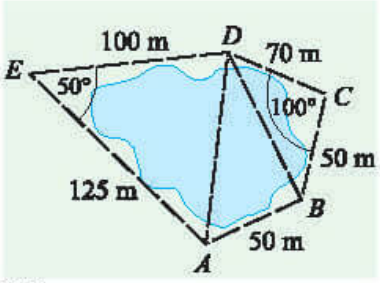
Triangulacja to metoda wyznaczania współrzędnych punktów geodezyjnych w terenie za pomocą układu trójkątów tworzących tzw. sieć triangulacyjną, w której wierzchołkami trójkątów są te punkty geodezyjne.



Fragment łańcucha górskiego; niektóre punkty geodezyjne zaznaczono kolorem czerwonym.

Jest ona jednym z narzędzi geodezji, czyli nauki zajmującej się wyznaczaniem powierzchni i kształtów obszarów w pomiarach lokalnych, np. do obliczenia przybliżonej powierzchni jeziora, działki budowlanej itp.

Przykład 9. Na rysunku przedstawiono wyniki pomiarów geodezyjnych wykonane nad brzegami stawu. Oszacuj pole powierzchni tego stawu. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 ara.



Rozwiązanie

Pole P stawu można określić wzorem $P = P_{\Delta ADE} + P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD}$.

Bez wykonywania dodatkowych pomiarów można obliczyć pola trójkątów ADE i BCD.

$$P_{\Delta ADE} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 125 \cdot \sin 50°, \text{ skąd } P_{\Delta ADE} \approx 4787{,}5\,\text{m}^2,$$

$$P_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 70 \cdot \sin 100°, \text{ skąd } P_{\Delta BCD} \approx 1723{,}4\,\text{m}^2.$$

Z twierdzenia cosinusów obliczamy długości boków AD i BD, a następnie obliczamy pole trójkąta ABD, korzystając np. ze wzoru Herona.

$$|AD|^2 = 100^2 + 125^2 - 2 \cdot 100 \cdot 125 \cdot \cos 50°, \text{ skąd } |AD| \approx 98\,\text{m},$$

$$|BD|^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 100°, \text{ skąd } |BD| \approx 93\,\text{m},$$

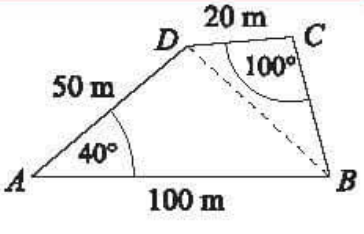
$$P_{\Delta ABD} \approx \sqrt{120(120-50)(120-93)(120-98)}, \text{ skąd } P_{\Delta ABD} \approx 2234\,\text{m}^2.$$

Zatem $P \approx 4787{,}5 + 1723{,}4 + 2234$, czyli $P \approx 8745\,\text{m}^2$.

$1\,\text{ar} = 100\,\text{m}^2$, więc $P \approx 87$ arów.

Odp.: Pole powierzchni stawu jest równe około 87 arów.

Ćwiczenie 17. Na rysunku przedstawiony jest plan działki z naniesionymi na nim pomiarami geodezyjnymi. Oszacuj pole powierzchni tej działki.



Przykład 10. Wykaż, że jeżeli w trójkącie o bokach mających długości a, b, c i kątach mających odpowiednio miary α, β, γ spełniona jest równość $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=2\cos\gamma$, to ten trójkąt jest równoramienny.

Rozwiązanie

Z (***założenie***): $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=2\cos\gamma$, $a>0,\ b>0,\ c>0$.

T (***teza***): Trójkąt jest równoramienny.

Dowód: $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ i $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=2\cos\gamma$, więc

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, *więc* $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

$$\frac{a}{b}=2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad /\cdot ab$$

$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2\ \ c^2}{2ab}$

$a^2=a^2+b^2-c^2 \Leftrightarrow c^2=b^2 \Leftrightarrow c=b.$ ***cnw.***

Ćwiczenie 18. Wykaż, że w trójkącie o bokach a, b, c leżących odpowiednio naprzeciw kątów α, β, γ spełniona jest równość $a=b\cos\gamma+c\cos\beta$.

Uwaga

Aby rozwiązać dowolny trójkąt, stosujemy:

- **twierdzenie sinusów**, gdy dane są:
  - miary dwóch kątów trójkąta i długość jednego boku,
  - długości dwóch boków trójkąta i miara kąta, który nie jest zawarty między tymi bokami,
- **twierdzenie cosinusów**, gdy dane są:
  - długości dwóch boków trójkąta i miara kąta zawartego między tymi bokami,
  - długości trzech boków trójkąta.

Ćwiczenie 19. Długości boków trójkąta ABC są równe 5, 7 i 8. Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. **a)** $c\approx 11{,}43$, $\alpha\approx 42°$, $\beta\approx 66°$, **b)** $a\approx 22{,}88$, $\beta\approx 34°$, $\gamma\approx 40°$. **12.** $\alpha=30°$, $\beta=60°$, $\gamma=90°$.
13. Tak. **14.** Wykaż, że $\cos\gamma<0$, gdzie γ jest kątem leżącym naprzeciw najdłuższego boku.
15. **a)** ostrym, **b)** prostym, **c)** rozwartym. **16.** 104 km. **17.** Około 22 ary.
18. *Wskazówka.* Zapisz $\cos\gamma$ i $\cos\beta$ w zależności od a, b, c. **19.** $R=\frac{7}{3}\sqrt{3}$.

Zadania utrwalające

4.11. W trójkącie ABC znane są długości dwóch jego boków i jeden kąt. Oblicz długość trzeciego boku, gdy:

a) $b=3$ dm, $c=7$ dm, $\alpha=60°$,

b) $b=4$ cm, $c=\left(2+2\sqrt{3}\right)$ cm, $\alpha=30°$,

c) $a=5\sqrt{2}$ cm, $c=8$ cm, $\beta=45°$,

d) $a=4$ cm, $b=7$ cm, $\gamma=120°$.

4.12. Oblicz miary kątów α, β, γ trójkąta ABC o bokach a, b, c, gdy:

a) $a=2$, $b=2$, $c=2\sqrt{3}$,

b) $a=29$, $b=42$, $c=58$,

c) $a=3{,}8$, $b=6{,}6$, $c=6{,}9$,

d) $a=7$, $b=10$, $c=15$.

4.13. Punkty $A=(-2,2)$, $B=(14,4)$, $C=(2,-1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Oblicz miary kątów α, β, γ tego trójkąta.

4.14. Oblicz miarę największego z kątów trójkąta ABC oraz pole P tego trójkąta, gdy:

a) $a=4$, $b=8$, $c=4\sqrt{7}$,

b) $a=2\sqrt{2}$, $b=4$, $c=2+2\sqrt{3}$.

4.15. Sprawdź, czy trójkąt o bokach a, b, c jest ostrokątny, rozwartokątny czy prostokątny, gdy:

a) $a=10$, $b=24$, $c=26$,

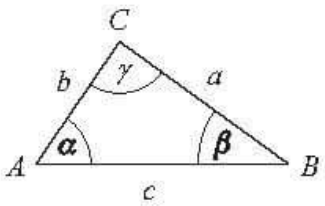
b) $a=8$, $b=10$, $c=16$,

c) $a=4$, $b=5$, $c=6$,

d) $a=\sqrt{29}$, $b=2\sqrt{17}$, $c=5$.

4.16. Przerysuj tabelę do zeszytu, przyjmij oznaczenia boków oraz kątów w trójkącie ABC jak na rysunku i uzupełnij tabelę.

a	b	c	α	β	γ
$\sqrt{3}$	3		30°		
	2	$2\sqrt{2}$		30°	
4			30°		120°
10	8	7			

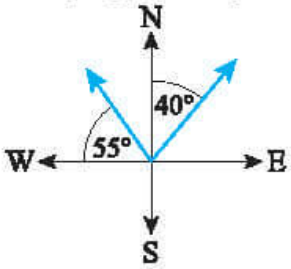


4.17. Oblicz długość boku BC trójkąta ABC, gdy $|AB|=6$, $|AC|=4\sqrt{2}$, $|\sphericalangle ACB|=135°$.

4.18. Pole trójkąta ABC jest równe 24. Oblicz długość boku BC tego trójkąta, wiedząc, że $|AB|=6$, $|AC|=10$ i kąt przy wierzchołku A jest ostry.

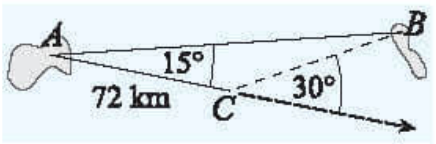
4.19. Pole trójkąta ABC jest równe 270. Oblicz długość boku AC tego trójkąta, wiedząc, że $|AB|=27$, $|BC|=29$.

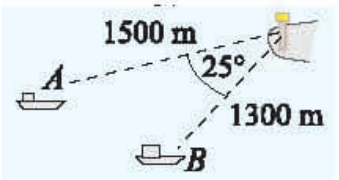
4.20. Dwie grupy harcerzy wyruszyły z tego samego miejsca na wycieczkę w dwóch różnych kierunkach. Grupa młodszych harcerzy szła z prędkością $6\frac{\text{km}}{\text{h}}$ w kierunku północno-wschodnim, tworzącym z kierunkiem północnym kąt 40°, a grupa starszych harcerzy szła z prędkością $7\frac{\text{km}}{\text{h}}$ w kierunku północno-zachodnim, tworzącym z kierunkiem zachodnim kąt 55°. Oblicz, w jakiej odległości d od siebie były grupy po dwóch godzinach marszu. Wynik podaj z dokładnością do 1 m.



4.21. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz odległość między obiektami A i B. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,001 km.

a)



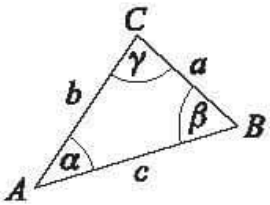


W zadaniach od 4.22 do 4.26 wskaż właściwe odpowiedzi, wpisz je do zeszytu i uzasadnij swój wybór.

4.22. Czy istnieje trójkąt ABC, w którym:

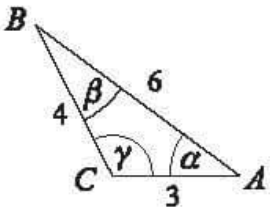
A. $a=4,\ b=16,\ \alpha=45°$, **B.** $a=16,\ b=4,\ \alpha=45°$,

C. $a=4,\ b=16,\ \beta=45°$?



4.23. Boki trójkąta ABC mają długości 3, 4 i 6. Wynika z tego, że:

A. $\cos\alpha=\frac{29}{36}$, **B.** $\cos\beta=\frac{43}{48}$, **C.** $\cos\gamma=-\frac{11}{24}$.



4.24. Pilot samolotu lecącego z miejscowości G do miejscowości H ze stałą prędkością 400 kilometrów na godzinę otrzymał polecenie zmiany kursu i międzylądowania w miejscowości K. Od startu do zmiany kursu (punkt F) upłynęło 90 minut. Uwzględniając dane przedstawione na rysunku, wnioskujemy, że po zmianie kursu do miejscowości K samolot:

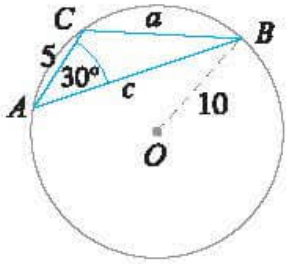


A. ma do pokonania mniej niż 1100 km,

B. będzie leciał dwie godziny z prędkością $400\frac{\text{km}}{\text{h}}$,

C. będzie leciał mniej niż dwie godziny z prędkością $550\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

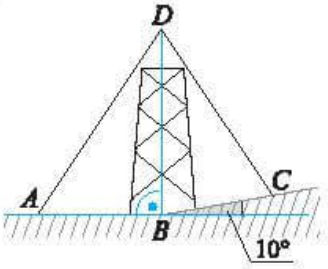
4.25. Na rysunku okrąg o środku O jest opisany na trójkącie ABC. Wynika stąd, że:



A. $a=10$, B. $\sin|\sphericalangle ABC|=\frac{1}{4}$,

C. $135°<|\sphericalangle BCA|<136°$.

4.26. Wieżę stojącą na nierównym gruncie podtrzymują liny AD i CD. Wieża ma wysokość 30 m ($|BD|=30$ m), a końce lin (punkty A i C) są oddalone od niej o 10 metrów ($|AB|=|BC|=10$ m). Wynika z tego, że długości lin AD i CD spełniają warunek:

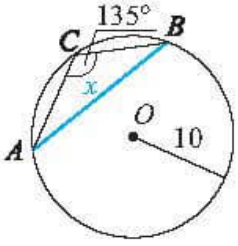


A. $|AD|>|CD|$, B. $|AD|^2-|CD|^2=600\cdot\cos 80°$, C. $|AD|-|CD|\approx 1{,}7$ m.

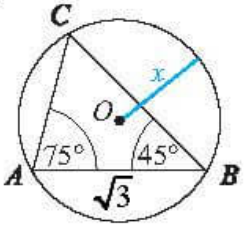
Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów

Ćwiczenie 20. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka x.

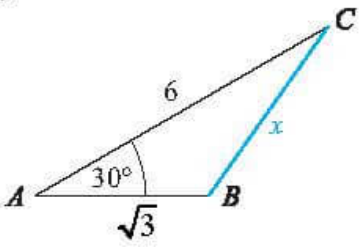
a)



b)

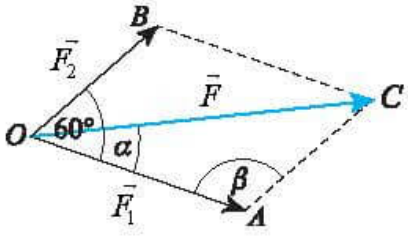


c)



Przykład 11. Kierunki działania sił $\vec{F_1}$ i $\vec{F_2}$, takich że $|\vec{F_1}|=4$ i $|\vec{F_2}|=3$, tworzą kąt 60°. Oblicz długość wypadkowej tych sił i miarę jej kąta nachylenia do siły $\vec{F_1}$.

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku,

gdzie $\vec{F_1}=\vec{OA}$ i $\vec{F_2}=\vec{OB}$.

Siłą wypadkową $\vec{F}$ jest wektor $\vec{OC}$, gdzie

punkty O i C są wierzchołkami równoległoboku $OACB$.

Zauważamy, że $\vec{F_2}=\vec{AC}$, więc

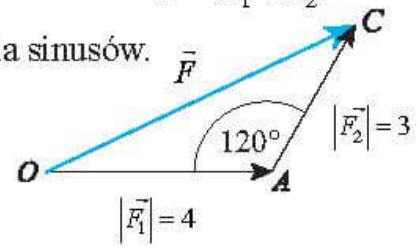
$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$ i $|\sphericalangle OAC|=\beta=180°-60°=120°$ (z własności równoległoboku).

$|\vec{F_1}|=|\vec{OA}|=4$ i $|\vec{F_2}|=|\vec{OB}|=|\vec{AC}|=3$.

W trójkącie OAC:

$$\left|\vec{F}\right|^2 = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos 120^\circ = 37, \text{ skąd } \left|\vec{F}\right| = \sqrt{37}.$$

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$



Kąt nachylenia siły $\vec{F}$ do siły $\vec{F_1}$ obliczamy z twierdzenia sinusów.
W trójkącie OAC:

$$\frac{\left|\vec{F}\right|}{\sin\beta} = \frac{\left|\vec{F_2}\right|}{\sin\alpha}, \text{ skąd}$$

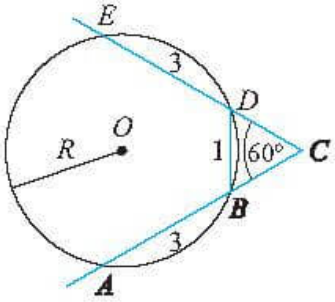
$$\sin\alpha = \frac{\left|\vec{F_2}\right|\sin\beta}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{3\sin 120^\circ}{\sqrt{37}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{37}}, \text{ więc } \sin\alpha \approx 0{,}4271, \text{ czyli}$$

$\alpha \approx 25^\circ$.

Odp.: $\left|\vec{F}\right| = \sqrt{37}$, $\alpha \approx 25^\circ$.

Ćwiczenie 21. Wypadkowa dwóch sił $\vec{F_1}$ i $\vec{F_2}$ ma wartość 10 i tworzy ze składowymi kąty 30° i 45°. Oblicz wartości liczbowe sił składowych.

Przykład 12. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i oblicz promień R okręgu.



Rozwiązanie

Zauważamy, że:

- trójkąt EBD jest wpisany w okrąg o promieniu R,
- trójkąt DBC jest równoboczny, więc $|\sphericalangle EDB| = 120^\circ$.

W trójkącie EBD z twierdzenia cosinusów:

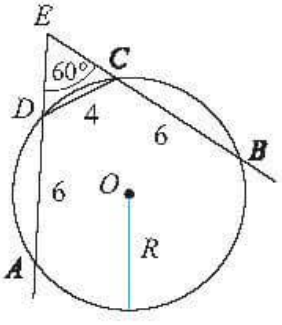
$$|EB|^2 = 3^2 + 1^2 - 2\cdot 3\cdot 1\cdot\cos 120^\circ, \text{ skąd } |EB| = \sqrt{13}.$$

W trójkącie EBD z twierdzenia sinusów:

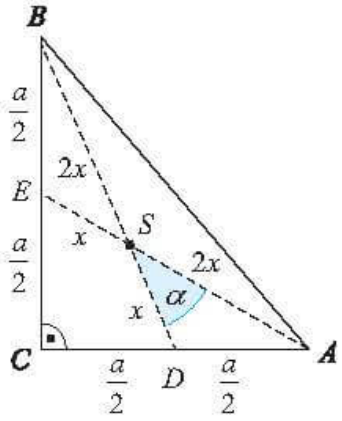
$$\frac{\sqrt{13}}{\sin 120^\circ} = 2R, \text{ skąd } R = \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

Odp.: $R = \frac{\sqrt{39}}{3}$.

Ćwiczenie 22. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i oblicz promień R okręgu.



Przykład 13. Z wierzchołków kątów ostrych równoramiennego trójkąta prostokątnego poprowadzono środkowe. Oblicz cosinus kąta ostrego α zawartego między tymi środkowymi.



Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Zauważamy, że środkowe BD i AE są równej długości i podzielone zostały punktem przecięcia S na dwa odcinki w stosunku 2:1.

W trójkącie prostokątnym BCD:

$$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=(3x)^2$$

$$x^2=\frac{5}{36}a^2$$

$$\frac{5}{4}a^2=9x^2$$

$$x=\frac{\sqrt{5}}{6}a.$$

W trójkącie ADS stosujemy twierdzenie cosinusów:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot 2x\cos\alpha$$

$$2x=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{6}a=\frac{\sqrt{5}a}{3}$$

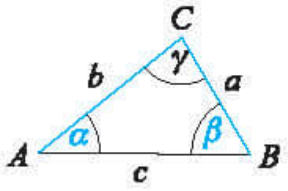
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{6}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}a\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{5}}{6}a\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}a\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}a\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{6}a\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}a}=\frac{4}{5}.$$

Odp.: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

Ćwiczenie 23. Z wierzchołków kątów ostrych trójkąta prostokątnego równoramiennego poprowadzono środkowe. Oblicz cosinus kąta rozwartego β zawartego między tymi środkowymi.

Przykład 14. Uzasadnij, że w dowolnym trójkącie ABC prawdziwa jest równość $\frac{a+b}{b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}$.



Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia: $\underbrace{\frac{a+b}{b}}_{L}=\underbrace{\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}}_{P}$

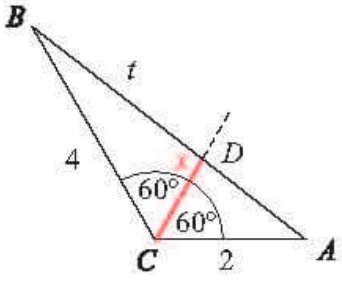
$$L=\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{a}{b}+1$$

Z twierdzenia sinusów $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, więc $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

$$L=\frac{a}{b}+1=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+1=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\underbrace{\frac{\sin\beta}{\sin\beta}}_{1}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}=P. \qquad \textit{c.n.u.}$$

Ćwiczenie 24. Uzasadnij, że jeśli w trójkącie ABC prawdziwa jest równość $\frac{\cos\alpha}{b}=\frac{\cos\beta}{a}$, to trójkąt ten jest równoramienny.

Przykład 15. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka $x=|CD|$ zawartego w dwusiecznej kąta ACB.



Rozwiązanie

Dane: $|BC|=4$, $|AC|=2$, $|\sphericalangle ACB|=120°$. | ***Obliczyć***: $|CD|=x$.

1° Z twierdzenia cosinusów obliczamy długość odcinka AB:

$$|AB|^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cdot\cos120°, \text{ skąd } |AB|=2\sqrt{7}.$$

$\cos120°=\frac{1}{2}$

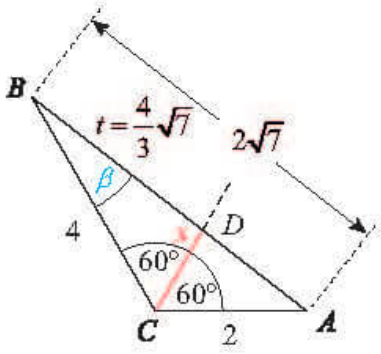
2° Z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie ABC obliczamy długość odcinka $|BD|=t$.

$$\frac{|BD|}{|BC|}=\frac{|AD|}{|AC|}, \quad \text{więc} \quad \frac{t}{4}=\frac{2\sqrt{7}-t}{2}$$

$$t=4\sqrt{7}-2t$$

$$t=\frac{4}{3}\sqrt{7}.$$

3° W trójkącie ABC obliczamy $\cos\beta$ i $\sin\beta$.



$$\cos\beta=\frac{4^2+\left(2\sqrt{7}\right)^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 2\sqrt{7}}$$

$$\cos\beta=\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

4° W trójkącie BCD obliczamy długość odcinka x.

$$\frac{|CD|}{\sin\beta}=\frac{|BD|}{\sin 60^\circ},\ \text{czyli}\ \ \frac{x}{\sin\beta}=\frac{t}{\sin 60^\circ}$$

$$x=\frac{\sin\beta\cdot t}{\sin 60^\circ}$$

$$x=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3}.$$

Ćwiczenie 25. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz długość odcinka zawartego w dwusiecznej kąta prostego.

Odpowiedzi do ćwiczeń

20. a) $x=10\sqrt{2}$, b) $x=1$, c) $x=\sqrt{21}$.

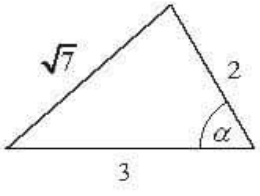
21. $F_1=10\left(\sqrt{3}-1\right)$, $F_2=5\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$. *Wskazówka.* $\sin 105^\circ=\sin 75^\circ=\sin\left(30^\circ+45^\circ\right)$. **22.** $\frac{2\sqrt{57}}{3}$.

23. $\cos\beta=-\frac{4}{5}$. **24.** *Wskazówka.* Skorzystaj z zależności $\frac{a}{b}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ i $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, czyli $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. **25.** $\frac{24\sqrt{2}}{7}$.

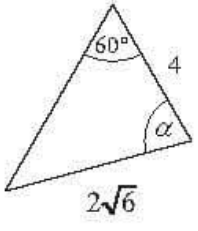
Zadania utrwalające

4.27. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miarę kąta α.

a)



b)

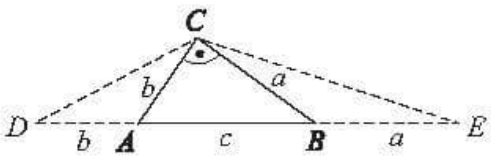


4.28. Na dwóch bokach trójkąta równobocznego ABC, którego bok ma długość 3, zbudowano dwa trójkąty równoramienne prostokątne ACD i BCE. Oblicz długość odcinka DE. Rozważ dwa przypadki.

4.29. W trójkącie równobocznym ABC na boku BC wybrano taki punkt M, że $|BM| = \frac{1}{2}|MC|$. Oblicz sinus kąta CAM.

4.30. D Na boku BC trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt D, że $|CD| : |DB| = 2 : 1$. Uzasadnij, że stosunek długości promieni R_1 i R_2 okręgów opisanych na trójkątach ACD i ABD jest równy 1.

4.31. D Obwód trójkąta prostokątnego ABC jest równy $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące na zewnątrz odcinka AB, takie że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$. Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $\sqrt{2} \cdot p$.



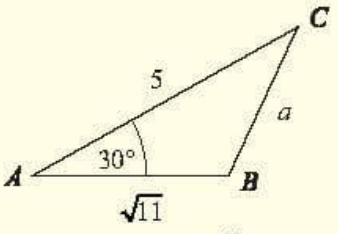
4.32. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku B. Boki AB i AC mają długości odpowiednio równe c i b. Wyznacz długość trzeciego boku.

Zestaw powtórkowy

1. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

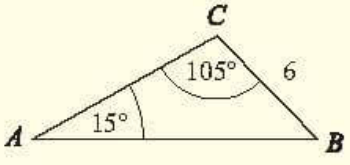
W trójkącie ABC przedstawionym na rysunku długość boku a spełnia warunek:

A. $a > 6$, **B.** $a < 6$.



Rozwiązując trójkąt ABC przedstawiony na rysunku, w pierwszej kolejności stosujemy twierdzenie:

C. sinusów, **D.** cosinusów.



2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

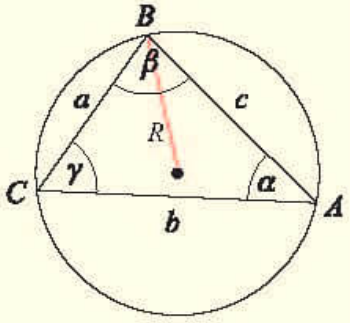
Do rozwiązania dowolnego trójkąta możemy zastosować twierdzenie sinusów, gdy dane są:

A. trzy kąty trójkąta, **B.** dwa boki i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.
C. trzy boki, **D.** dwa boki i promień okręgu opisanego na trójkącie.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*
Do rozwiązania dowolnego trójkąta nie możemy zastosować twierdzenia cosinusów, gdy dane są:

A. dwa boki i kąt między nimi zawarty,
B. trzy kąty i dwa boki,
C. trzy boki i promień okręgu wpisanego w trójkąt,
D. bok i trzy kąty.

4. Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
Prawdą jest, że:

A. $\frac{\sin\beta}{b}=2R$, **B.** $b^2+c^2-a^2=2bc\cos\alpha$.

Nieprawdą jest, że:

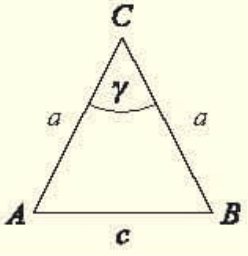
C. $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\gamma}{c}$, **D.** jeśli $a>b$, to $\alpha<\beta$.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*
Trójkątem rozwartokątnym jest trójkąt o bokach długości:
A. 6, 8, 10, **B.** 6, 6, 8, **C.** 12, 13, 15, **D.** 7, 7, 10.

6. Dwa boki trójkąta mają długość 2 i 4, a miara kąta między nimi jest równa $\frac{2}{3}\pi$.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.	P	F
Obwód tego trójkąta jest liczbą większą od 12,2.	P	F

7. Na rysunku dwa boki trójkąta ABC mają długość a.
Jeżeli długość podstawy AB jest liczbą z przedziału $\left(a\sqrt{2};2a\right)$, to:



A. taki trójkąt nie istnieje,
B. $\gamma=90°$,
C. $0°<\gamma<90°$,
D. $90°<\gamma<180°$.

5. Obliczanie długości odcinków i pól trójkątów

Przypomnijmy oznaczenia w trójkącie ABC:

a, b, c – długości boków położonych odpowiednio naprzeciw kątów α, β, γ

h_a, h_b, h_c – długości wysokości trójkąta poprowadzonych odpowiednio na boki a, b, c lub ich przedłużenia

R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie

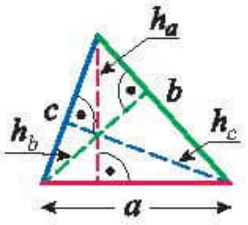
r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt

$P = P_{\Delta ABC}$ – pole trójkąta ABC

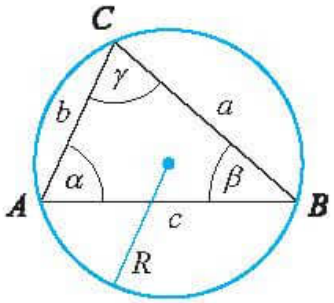
Związki miarowe w trójkącie

Przypomnijmy

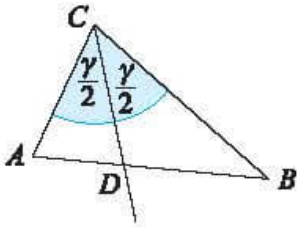
Związki miarowe w dowolnym trójkącie



$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$



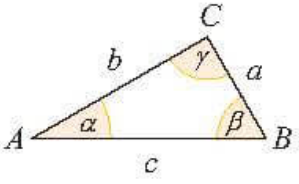
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$$

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



$c^2 < a^2 + b^2$ trójkąt ostrokątny

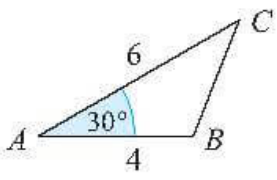
$c^2 = a^2 + b^2$ trójkąt prostokątny

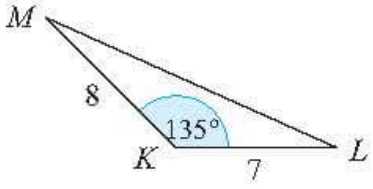
$c^2 > a^2 + b^2$ trójkąt rozwartokątny,

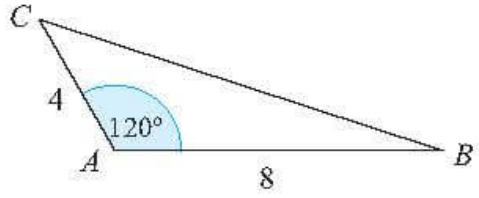
gdzie c to najdłuższy bok trójkąta

$$\gamma > \beta > \alpha \Leftrightarrow c > b > a$$

Ćwiczenie 1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz:
a) pole trójkąta ABC, **b)** długość boku LM, **c)** promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC.

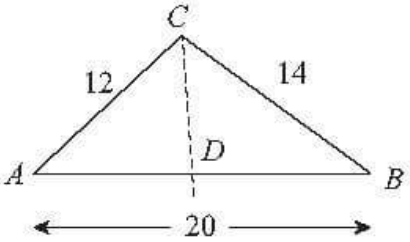




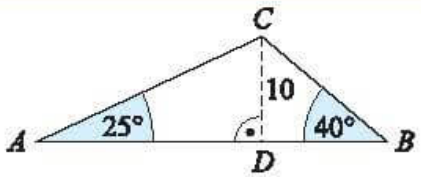


Ćwiczenie 2. Określ ze względu na boki i kąty rodzaj trójkąta ABC, gdy jego boki mają długości: **a)** 5, 7, 8, **b)** 0,1; 0,1; 0,01.

Ćwiczenie 3. W trójkącie ABC dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku C przecięła bok AB w punkcie D. Wiedząc, że $|AB| = 20$, $|BC| = 14$ i $|AC| = 12$, oblicz długość odcinka AD.



Przykład 1. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz obwód trójkąta ABC. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.



Rozwiązanie

Dane: $|\sphericalangle DAC| = 25°$, $|\sphericalangle DBC| = 40°$, $|DC| = h = 10$.

Obliczyć: $L = |AB| + |BC| + |AC|$, gdzie $|AB| = |AD| + |BD|$.

W trójkącie prostokątnym ADC obliczamy długości odcinków AD i AC.

$$\frac{10}{|AD|} = \operatorname{tg} 25°, \text{ skąd } |AD| = \frac{10}{\operatorname{tg} 25°} = \frac{10}{0{,}4663}, \text{ więc } |\boldsymbol{AD}| \approx \mathbf{21{,}4454},$$

$$\frac{10}{|AC|} = \sin 25°, \text{ skąd } |AC| = \frac{10}{\sin 25°} = \frac{10}{0{,}4226}, \text{ więc } |\boldsymbol{AC}| \approx \mathbf{23{,}6630}.$$

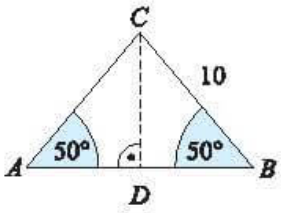
Obliczamy długości odcinków BD i BC. W trójkącie prostokątnym BDC:

$$\frac{10}{|BD|} = \operatorname{tg} 40°, \text{ skąd } |BD| = \frac{10}{\operatorname{tg} 40°} = \frac{10}{0{,}8391}, \text{ więc } |\boldsymbol{BD}| \approx \mathbf{11{,}9175},$$

$$\frac{10}{|BC|} = \sin 40°, \text{ skąd } |BC| = \frac{10}{\sin 40°} = \frac{10}{0{,}6428}, \text{ więc } |\boldsymbol{BC}| \approx \mathbf{15{,}5569}.$$

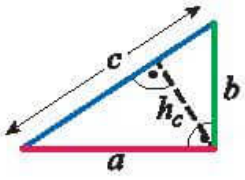
$L = |AD| + |DB| + |BC| + |AC|$, więc $L \approx 72{,}5829$, skąd $L \approx 72{,}58$.

Ćwiczenie 4. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz obwód L trójkąta ABC. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

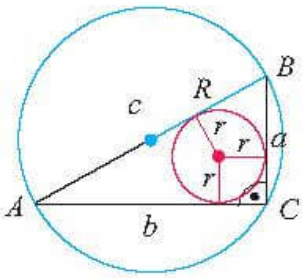


Przypomnijmy

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

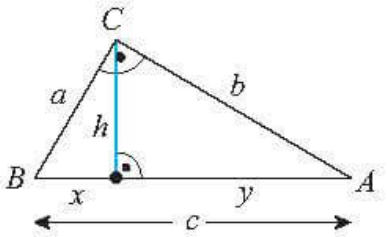


$P = \frac{1}{2}ch_c$, $P = \frac{1}{2}ab$



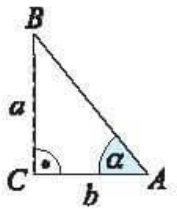
$r = \frac{a+b-c}{2}$, $R = \frac{c}{2}$

$h^2 = xy$, $a^2 + b^2 = c^2$,



$a^2 = c \cdot x$, $b^2 = c \cdot y$

Ćwiczenie 5. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a i b oraz kącie ostrym α prawdziwa jest równość $a \cdot \cos\alpha = b \cdot \sin\alpha$.



Ćwiczenie 6. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 3, a jeden z kątów ostrych ma miarę 40°. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt. W obliczeniach przyjmij $\sin 40° \approx 0{,}6$ i $\cos 40° \approx 0{,}8$.

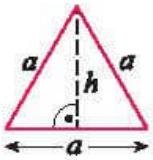
Ćwiczenie 7. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątna ma długość 16, a cosinus kąta leżącego naprzeciw tej przyprostokątnej jest równy 0,6.

Ćwiczenie 8. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość CD poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną w stosunku 1 : 5. Oblicz długość przeciwprostokątnej AB, gdy $|BC| = 4\sqrt{30}$. Rozważ dwa przypadki.

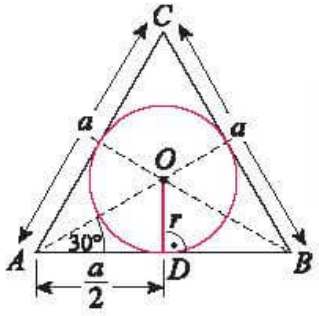
Ćwiczenie 9. W trójkącie prostokątnym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość $2\sqrt{3}$. Wysokość ta podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki, których długości różnią się o 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

Przypomnijmy

Związki miarowe w trójkącie równobocznym



$P=\frac{1}{2}ah$, $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



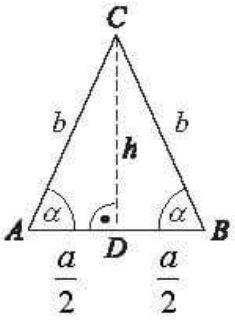
$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Ćwiczenie 10. Wykaż, że promień r okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny określony jest wzorem $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, gdzie a to długość boku trójkąta.

Ćwiczenie 11. Oblicz promień i pole koła wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 12 cm.

Przykład 2. W trójkącie równoramiennym stosunek długości wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta do długości jego ramienia jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Uzasadnij, że jest to trójkąt równoboczny.

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. Zauważamy, że wysokość h trójkąta równoramiennego poprowadzona na podstawę dzieli ten trójkąt na dwa przystające trójkąty prostokątne. W trójkącie prostokątnym ADC:

$$\frac{h}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } \frac{h}{b}=\sin\alpha, \text{ więc}$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ skąd}$$

$$\alpha=60°.$$

$$|\sphericalangle ACB|=180°-2\alpha, \text{ czyli } |\sphericalangle ACB|=60°.$$

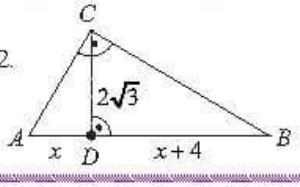
Trójkąt ABC jest równoboczny. ***c.n.u.***

Ćwiczenie 12. Pole trójkąta równobocznego jest równe $9\sqrt{3}$. Oblicz jego obwód.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. **a)** $P_\Delta = 6$, **b)** $|LM| = \sqrt{113 + 56\sqrt{2}}$, **c)** $R = \frac{4\sqrt{21}}{3}$. 2. Trójkąt jest: **a)** ostrokątny i różnoboczny, **b)** ostrokątny i równoramienny. 3. $|AD| = \frac{120}{13}$. 4. $L \approx 32{,}86$. 6. $r = 0{,}6$. 7. $R = 10$. 8. 24 lub $24\sqrt{5}$.

9. $L = 4\left(3 + \sqrt{3}\right)$. *Wskazówka.* $x \cdot (x+4) = \left(2\sqrt{3}\right)^2$, skąd $x = 2$.



11. $r = 2\sqrt{3}$ cm, $P = 12\pi$ cm^2. 12. $L = 18$.

Zadania utrwalające

5.1. W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 2, a kąt przy podstawie miarę 30°. Oblicz promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

5.2. D Boki trójkąta mają długości 12, 16, 21. Uzasadnij, że jest to trójkąt rozwartokątny.

5.3. Boki trójkąta mają długości 4, 5, 7. Oblicz długość jego najdłuższej wysokości.

5.4. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokość CD o długości 5 tworzy z bokiem AC kąt 20°, a z bokiem BC 40°. Oblicz pole trójkąta ABC. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

5.5. Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 4 i kącie ostrym 30° rozcięto na dwa trójkąty równoramienne. Oblicz obwody otrzymanych trójkątów.

5.6. W okrąg o promieniu 5 wpisano taki trójkąt prostokątny, którego cosinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{3}$. Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.

5.7. D Uzasadnij, że jeżeli na trójkącie prostokątnym ABC o przyprostokątnych a i b opisano okrąg o promieniu R i wpisano w niego okrąg o promieniu r, to $2r + 2R = a + b$.

5.8. W trójkącie równoramiennym stosunek długości ramienia do długości podstawy jest równy $1 : \sqrt{2}$. Oblicz kąty tego trójkąta.

5.9. D Uzasadnij, że jeżeli α, β i γ są kątami trójkąta ABC i $\frac{\sin\alpha}{2\sin\beta} = \cos\gamma$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

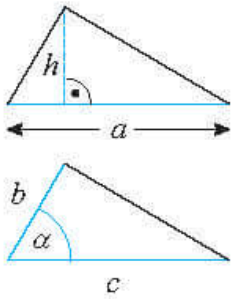
5.10. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 10. Sinusy dwóch kątów tego trójkąta są równe 0,25 i 0,4. Oblicz pole trójkąta ABC.

5.11. D Uzasadnij, że trójkąt o bokach długości 4, 5, 7 jest podobny do trójkąta, którego cosinusy kątów są równe $-\frac{1}{5}$, $\frac{5}{7}$ i $\frac{29}{35}$.

Wzory na pola trójkątów i ich zastosowanie

Poznaliśmy już wzory na obliczanie pól trójkątów, gdy dane były długości:

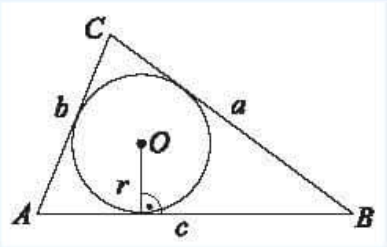
- boku i wysokości poprowadzonej na ten bok lub jego przedłużenie,
- dwóch boków i miara kąta zawartego między nimi.



Obecnie poznamy wzory pozwalające obliczyć pole trójkąta przy innych danych.

Twierdzenie

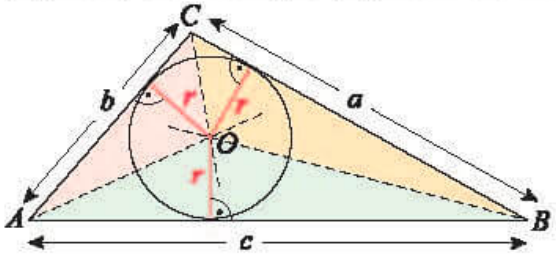
Jeżeli a, b i c są długościami boków trójkąta opisanego na okręgu o promieniu r, to jego pole P określone jest wzorem $P = \frac{a+b+c}{2}r = pr$, gdzie p to połowa obwodu trójkąta.



Z (***założenie***): a, b, c – długości boków trójkąta ABC,
r – promień okręgu wpisanego w dany trójkąt.

T (***teza***): $P_\Delta = pr$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Dowód: Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. Odcinki AO, BO, CO, gdzie O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, dzielą ten trójkąt na trzy trójkąty.



Wysokość każdego z tych trójkątów, poprowadzona z punktu O, jest równa promieniowi r okręgu wpisanego, zatem

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CAO} + P_{\Delta ABO},$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{a}{2}r + \frac{b}{2}r + \frac{c}{2}r = \frac{a+b+c}{2}r. \qquad \textit{c.n.u.}$$

Ćwiczenie 13. Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt, którego pole jest równe $10\sqrt{3}$ i boki mają długości 5, 7, 8.

Ćwiczenie 14. Pole trójkąta równoramiennego jest równe 12, a jego ramiona mają długość 5. Oblicz długość podstawy tego trójkąta, gdy promień okręgu wpisanego jest równy 1,5.

Twierdzenie – Wzór Herona*)

Pole P trójkąta, którego boki mają długości a, b, c określone jest wzorem

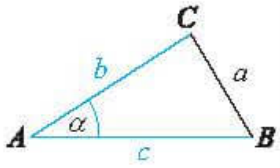
$$P_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie p jest połową jego obwodu, czyli $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Z (***założenie***):	*T* (***teza***):
a, b, c – długości boków trójkąta, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ – połowa obwodu trójkąta,	$P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Dowód:

W dowodzie skorzystamy z wzoru $P=\dfrac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha$, do którego w miejsce $\sin\alpha$ podstawimy otrzymane wyrażenie.



1° Obliczamy $\sin^2\alpha$ z jedynki trygonometrycznej oraz twierdzenia cosinusów i przekształcamy otrzymane wyrażenie za pomocą wzorów skróconego mnożenia do postaci iloczynowej.

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=$$

$$=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=$$

Stosujemy wzór na różnicę kwadratów.

$$=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=$$

Sprowadzamy wyrażenia w nawiasach do wspólnego mianownika.

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=$$

Stosujemy wzory: $2bc+b^2+c^2=(b+c)^2$, $2bc\quad b^2\quad c^2=\quad(b\quad c)^2$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=$$

Do każdego z liczników stosujemy wzór na różnicę kwadratów.

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}\cdot\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

2° Zauważamy, że:

$$b+c+a=2p$$

$$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a)$$

$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b).$$

*) Heron z Aleksandrii (ok. 10 - ok. 70) – starożytny grecki matematyk, fizyk, mechanik, wynalazca i konstruktor.

3° Otrzymane wyrażenia podstawiamy do $\sin^2\alpha$.

$$\sin^2\alpha=\frac{2p\cdot 2\cdot(p-a)}{2bc}\cdot\frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2bc}=$$

Skracamy i mnożymy ułamki.

$$=\frac{4\cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2\cdot c^2}$$

4° Obliczamy $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha=\frac{2}{b\cdot c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Jeżeli $\sin^2\alpha=t^2$, *to* $\sin\alpha=|t|$, *bo* $0<\alpha<180°$.

5° Podstawiamy otrzymane wyrażenie do wzoru $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

$$P=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$ ***c.n.u.***

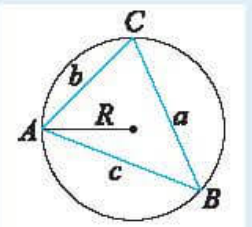
Ćwiczenie 15. Oblicz pole trójkąta:

a) o bokach długości 7, 8, 13,

b) o wierzchołkach A, B, C, gdy $A=(1,3)$, $B=(5,0)$, $C=(-3,0)$.

Twierdzenie

Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu R, to jego pole P_Δ określone jest wzorem $\boldsymbol{P_\Delta=\frac{abc}{4R}}$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.



Z (***założenie***):	*T* (***teza***):
a, b, c – długości boków trójkąta ABC, R – promień okręgu opisanego na trójkącie ABC, γ – kąt zawarty między bokami a i b	$P_\Delta=\frac{abc}{4R}$

Dowód:

$$P_\Delta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Z twierdzenia sinusów $\frac{c}{\sin\gamma}=2R$, *więc* $\sin\gamma=\frac{c}{2R}$.

$$P_\Delta=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R},\ \text{więc}\ P_\Delta=\frac{abc}{4R}.$$ ***c.n.u.***

Przykład 3. Boki trójkąta mają długości 4, 5 i 7. Oblicz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz promień R okręgu opisanego na nim.

Rozwiązanie

Aby obliczyć promienie r i R, skorzystamy ze wzorów:

$$r=\frac{P_\Delta}{p}=\frac{2P_\Delta}{a+b+c} \quad \text{oraz} \quad R=\frac{abc}{4P_\Delta}.$$

$P_\Delta = r\cdot p,\ P_\Delta = \dfrac{abc}{4R}$

Obliczamy pole P_Δ trójkąta z wzoru Herona.

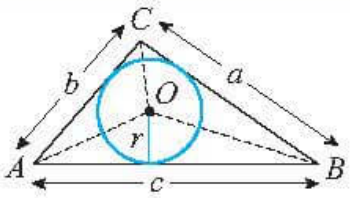
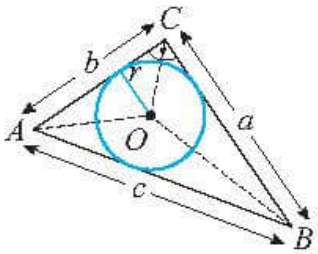
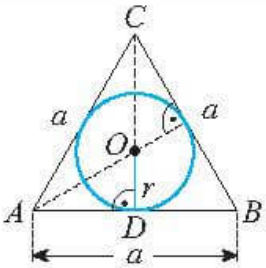
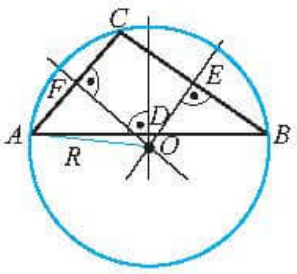
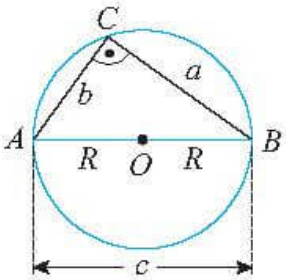
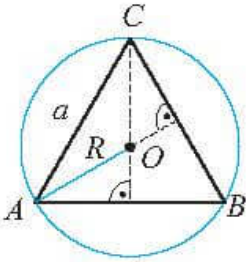
$$P_\Delta=\sqrt{8\cdot(8-4)(8-5)(8-7)}=4\sqrt{6}.$$

$P_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdy $p=\dfrac{4+5+7}{2}=8$

$$r=\frac{2\cdot 4\sqrt{6}}{16}=\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{i} \quad R=\frac{4\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 4\sqrt{6}}=\frac{35}{24}\sqrt{6}.$$

Ćwiczenie 16. Boki trójkąta mają długość 5, 6, 9. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 17. Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt i promień R okręgu opisanego na trójkącie o bokach długości 6, 10, 12.

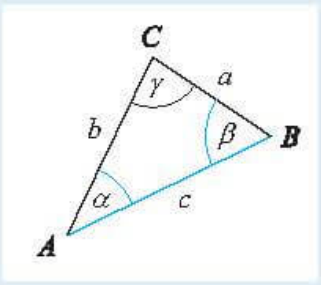
	Trójkąt różnoboczny	Trójkąt prostokątny	Trójkąt równoboczny
Okrąg wpisany w trójkąt	 $r=\dfrac{P_\Delta}{p}$, gdzie $p=\dfrac{a+b+c}{2}$	 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$	 $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$
Okrąg opisany na trójkącie	 $\lvert BC\rvert=a,\ \lvert AC\rvert=b,$ $\lvert AB\rvert=c,\ R=\dfrac{abc}{4P_\Delta}$	 $R=\dfrac{1}{2}c$	 $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Twierdzenie

Jeżeli w trójkącie ABC dana jest długość jednego boku i dwa kąty, to pole P trójkąta można określić wzorem:

1 $P=\frac{1}{2}c^2\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$, **2** $P=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$,

3 $P=\frac{1}{2}b^2\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}$,



Udowodnimy wzór **1** i w jego uzasadnieniu skorzystamy z wzoru $P=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$ oraz twierdzenia sinusów.

Z (***założenie***):
c – długość boku AB trójkąta ABC,
α, β – kąty trójkąta ABC

T (***teza***):
$P=\frac{1}{2}c^2\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$.

Dowód:

$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$

$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, więc $b=c\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$,

$P=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$, więc $P=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c\cdot\sin\alpha$,

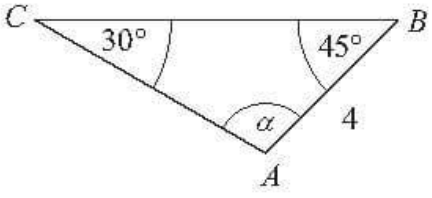
$P=\frac{1}{2}c^2\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$. ***c.n.u.***

Ćwiczenie 18. Uzasadnij wzory:

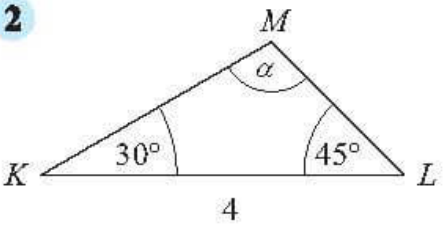
2 $P=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$ i **3** $P=\frac{1}{2}b^2\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}$.

Przykład 4. Przyjmij oznaczenia jak na rysunkach **1** oraz **2** i oblicz pola trójkątów ABC i KLM.

1

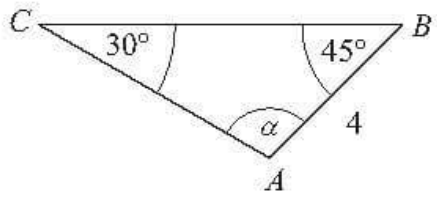


2

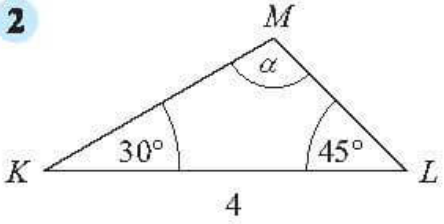


Rozwiązanie

1



2



Korzystamy z wzoru:

1 $P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$

2 $P_{\Delta KLM}=\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\sin 30^\circ\cdot\sin 45^\circ}{\sin\alpha}$,

gdzie

$$\sin\alpha=\sin\left[180^\circ-(30^\circ+45^\circ)\right]=\sin(30^\circ+45^\circ)=$$
$$=\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

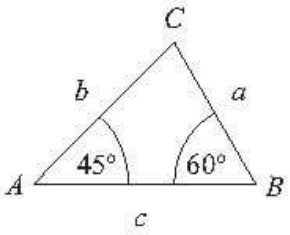
$$P_{\Delta ABC}=4\left(\sqrt{3}+1\right).$$

$$P_{\Delta KLM}=\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

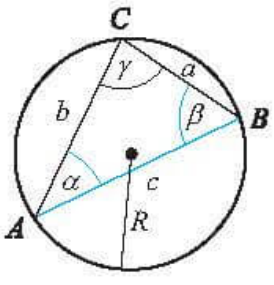
$$P_{\Delta KLM}=4\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Odp.: $P_{\Delta ABC}=4\left(\sqrt{3}+1\right)$, $P_{\Delta KLM}=4\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Ćwiczenie 19. Oblicz pole trójkąta, w którym jeden z boków ma długość 2 oraz dwa jego kąty mają miary 45° i 60°. Rozpatrz wszystkie możliwe przypadki.



Ćwiczenie 20. Uzasadnij, że **pole *P* trójkąta**, gdy dany jest promień *R* okręgu opisanego na nim i dwa jego kąty, określone jest wzorem $\boldsymbol{P=2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}$.



Ćwiczenie 21. Skorzystaj z wzoru $P=2R^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$ i oblicz pole trójkąta ABC, gdy $R=1$ oraz:

a) $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$, **b)** $\beta=2\alpha$ i $\gamma=3\alpha$.

Przykład 5. Oblicz pole trójkąta ABC, gdy $A=(-2,-1)$, $B=(6,0)$ i $C=(2,4)$.

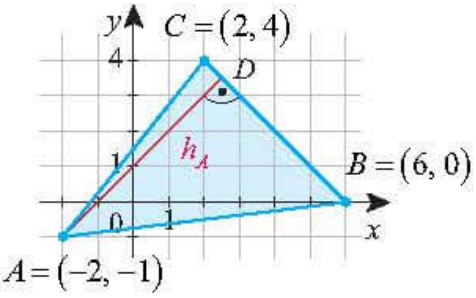
Rozwiązanie

I sposób

Piszemy równanie prostej zawierającej bok BC.

$$y-0=\frac{4-0}{2-6}(x-6), \text{ skąd } y=-x+6,$$

czyli $x+y-6=0$.



$P=\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|BC|$, więc obliczamy długość boku BC oraz długość wysokości AD trójkąta ABC.

$B=(6,0)$ i $C=(2,4)$, więc $|BC|=\sqrt{(2-6)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$.

Obliczamy długość wysokości AD trójkąta ABC.

Piszemy równanie prostej AD zawierającej wysokość trójkąta ABC, czyli prostej prostopadłej do prostej BC.

$y-y_A=a_{AD}(x-x_A)$,

$y+1=x+2$, skąd $y=x+1$.

Obliczamy współrzędne punktu D.

$$\begin{cases} y=-x+6 \\ y=x+1 \end{cases}, \text{ skąd } D=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$$

$$|AD|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+2\right)^2+\left(\frac{7}{2}+1\right)^2}=\frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

Obliczamy odległość wierzchołka A od prostej BC, czyli długość wysokości AD.

BC: $x+y-6=0$ i $A=(-2,-1)$,

więc $|AD|=\frac{|-2-1-6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$.

$$P=\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{2}\cdot 4\sqrt{2}=18.$$

II sposób

Korzystamy z wzoru $P=\frac{1}{2}\cdot\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\right|$.

$$P=\frac{1}{2}\cdot|(6+2)(4+1)-(2+2)(0+1)|=\frac{1}{2}\cdot 36=18.$$

Odp.: 18.

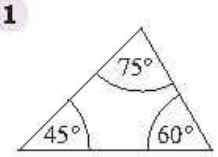
Ćwiczenie 22. Oblicz pole trójkąta ABC, gdy $A=(5,5)$, $B=(-2,4)$ i $C=(-1,-3)$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

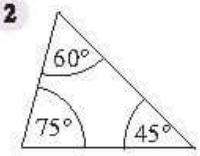
13. $r=\sqrt{3}$. 14. 6. 15. a) $P=14\sqrt{3}$, b) $P=12$. 16. $R=\frac{27\sqrt{2}}{8}$. 17. $r=\frac{4\sqrt{14}}{7}$, $R=\frac{45\sqrt{14}}{28}$.

19. $P=3-\sqrt{3}$ lub $P=\frac{\sqrt{3}+3}{3}$, lub $P=\frac{\sqrt{3}+3}{2}$. *Wskazówka.* Możliwe są 3 przypadki:

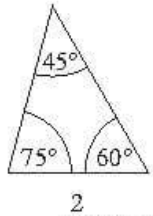
1



2



3



$P=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\sin 45^\circ\cdot\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$, $P=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\sin 75^\circ\cdot\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$, $P=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\sin 75^\circ\cdot\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$.

20. *Wskazówka.* Skorzystaj z wzoru $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ oraz z twierdzenia sinusów. 21. a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 22. 25.

Zadania utrwalające

5.12. Boki trójkąta mają długości 25, 39, 56. Oblicz:

a) pole trójkąta, **b)** długość najkrótszej wysokości,

c) promień r okręgu wpisanego w trójkąt.

5.13. Dwa boki trójkąta mają długości 17 i 25, jego pole jest równe 210, a jego promień r okręgu wpisanego jest równy 6. Oblicz:

a) długość trzeciego boku, **b)** promień R okręgu opisanego,

c) cosinus największego kąta.

5.14. W trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC|=|BC|$ i $|\sphericalangle ACB|=120^\circ$ wpisano okrąg o promieniu 3. Oblicz:

a) długości boków tego trójkąta, **b)** promień R okręgu opisanego na trójkącie,

c) pole trójkąta.

5.15. Długości boków trójkąta równoramiennego ABC są liczbami naturalnymi i $|BC|=7$ oraz $|AB|+|AC|=13$. Oblicz promień okręgu:

a) wpisanego w trójkąt ABC, **b)** opisanego na trójkącie ABC.

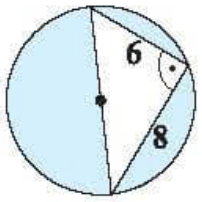
5.16. W trójkącie prostokątnym środek okręgu wpisanego dzieli odcinek dwusiecznej w stosunku $\sqrt{3}:\sqrt{2}$, licząc od wierzchołka kąta prostego. Oblicz kąty ostre tego trójkąta.

5.17. Oblicz promień r okręgu wpisanego w trójkąt i promień R okręgu opisanego na trójkącie, wiedząc, że boki tego trójkąta mają długości:

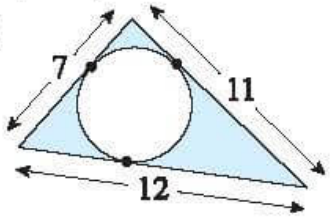
a) 6, 10, 14, **b)** 7, 8, 9, **c)** 12, 12, 22, **d)** 12, 16, 20.

5.18. Oblicz pole figury wyróżnionej na rysunku kolorem niebieskim.

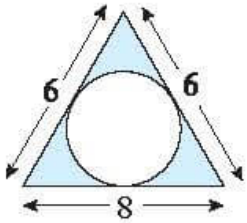
a)



b)



c)



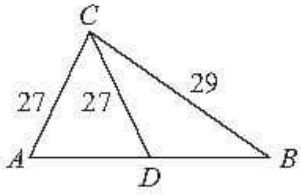
5.19. W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt równoramienny ABC, taki że $|\sphericalangle ACB| = 120°$ i $|AC| = |BC| = 5$. Oblicz promień R tego okręgu.

5.20. Oblicz pole P figury ograniczonej okręgiem opisanym na trójkącie ABC i okręgiem wpisanym w trójkąt ABC, gdy:

a) $|AB| = 14$, $|BC| = 12$, $|AC| = 10$, **b)** $A = (-5, 5)$, $B = (5, -5)$, $C = (5, 5)$,

c) trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym, którego podstawa AB ma długość 12, a wysokość h_c (poprowadzona z wierzchołka C) ma długość 8.

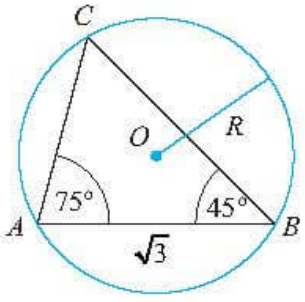
5.21. Na rysunku odcinek CD jest środkową trójkąta ABC. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole P trójkąta.



5.22. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz:

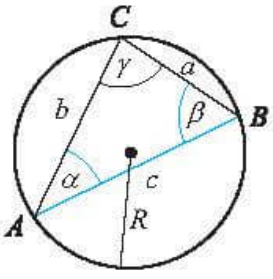
a) promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC,

b) pole tego trójkąta.



5.23. D W trójkącie ABC boki a, b oraz kąty α i β spełniają warunek $\frac{\cos\alpha}{b} = \frac{\cos\beta}{a}$.

Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoramienny.



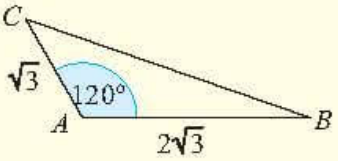
5.24. D Kąty trójkąta mają miary 30°, 70° i 80°. Czy boki tego trójkąta mogą mieć długości 5, 9, 13? Odpowiedź uzasadnij.

5.25. Zbadaj, dla jakich wartości m pole trójkąta o wierzchołkach $A = (3, -1)$, $B = (m+1, -2)$, $C = (-1, m-3)$ jest równe 2.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Pole trójkąta ABC przedstawionego na rysunku jest równe:



A. 3 **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

2. Boki trójkąta mają długości 6, $6\sqrt{3}$ i 12.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli α jest miarą największego kąta trójkąta, to:

A. $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ **B.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\sin\alpha=1$

3. Boki trójkąta mają długości 3, 5 i $\sqrt{19}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta ma miarę 60°.	P	F
Pole tego trójkąta wynosi $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.	P	F

4. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Obwód trójkąta jest równy 500 cm, a jego pole 500 cm^2. Promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

A. 20 cm **B.** 2 cm

Rozwartokątnym nie jest trójkąt, którego boki mają długości:

C. 4, 5, 7 **D.** 4, 5, 6

5. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jeżeli liczby 5, 5, 6 są długościami boków trójkąta, to:

A. jego pole jest równe 15

B. promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy $\frac{3}{2}$

W trójkącie ABC boki mają długości $a=14$, $b=15$, $c=13$. Pole trójkąta jest równe:

C. 84 **D.** 92

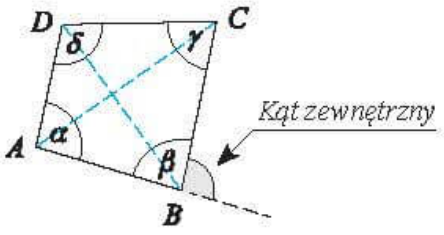
6. Obliczanie długości odcinków i pól czworokątów

Przypomnijmy

Czworokąt to wielokąt, który ma cztery boki.
W czworokącie $ABCD$:

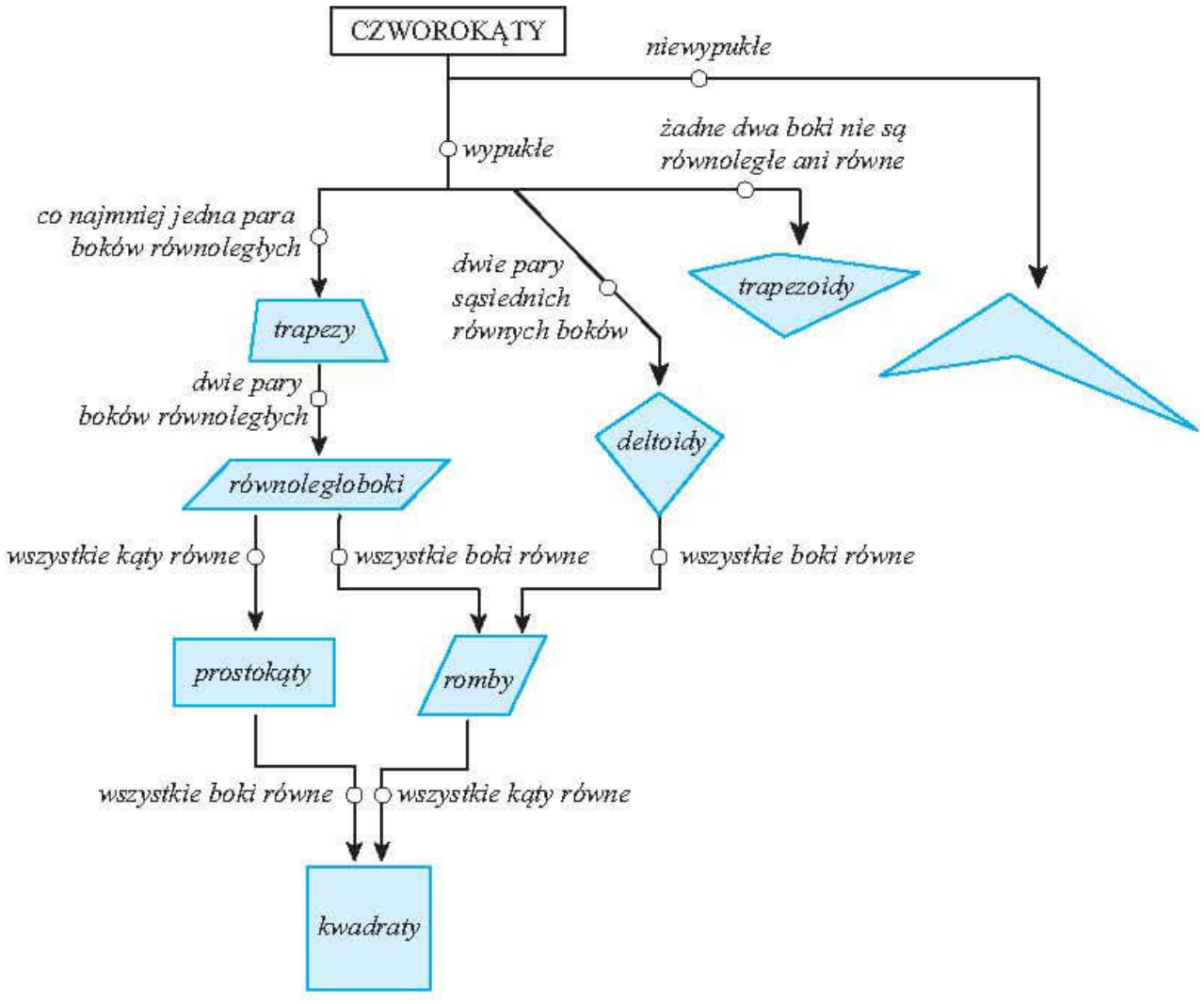
- boki AB i DC oraz AD i BC nazywamy przeciwległymi,
- kąty α i γ oraz β i δ nazywamy przeciwległymi,
- odcinki AC i BD to przekątne czworokąta.

- Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360°.



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Klasyfikacja i pola czworokątów wypukłych



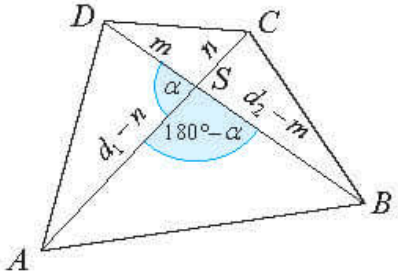
Jeżeli znamy długości przekątnych czworokąta i kąt ich przecięcia, to możemy obliczyć pole każdego czworokąta wypukłego.

Twierdzenie

Jeżeli przekątne czworokąta wypukłego mają długości d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem α, to pole P tego czworokąta określone jest wzorem $\boldsymbol{P=\frac{1}{2}d_1d_2\cdot\sin\alpha}$.

Z (***założenie***):	*T* (***teza***):
d_1, d_2 – długości przekątnych czworokąta wypukłego, α – miara kąta przecięcia się przekątnych.	$P=\frac{1}{2}d_1d_2\cdot\sin\alpha$.

Dowód: Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku,



gdzie $|AC|=d_1$, $|BD|=d_2$, $|\sphericalangle ASD|=\alpha$, $|SC|=n$,

$|AS|=d_1-n$, $|SD|=m$, $|BS|=d_2-m$.

Zauważamy, że $P_{ABCD}=P_{\Delta BCS}+P_{\Delta CDS}+P_{\Delta ADS}+P_{\Delta ABS}$,

gdzie

$$P_{\Delta BCS}=\frac{1}{2}(d_2-m)\cdot n\cdot\sin\alpha,$$

$$P_{\Delta CDS}=\frac{1}{2}\cdot n\cdot m\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot m\cdot\sin\alpha,$$

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

$$P_{\Delta ADS}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot(d_1-n)\cdot\sin\alpha,$$

$$P_{\Delta ABS}=\frac{1}{2}(d_1-n)\cdot(d_2-m)\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}(d_1-n)\cdot(d_2-m)\cdot\sin\alpha.$$

Zatem $P_{ABCD}=\frac{1}{2}\sin\alpha\left[(d_1-n)(d_2-m)+n(d_2-m)+nm+m(d_1-n)\right]=$

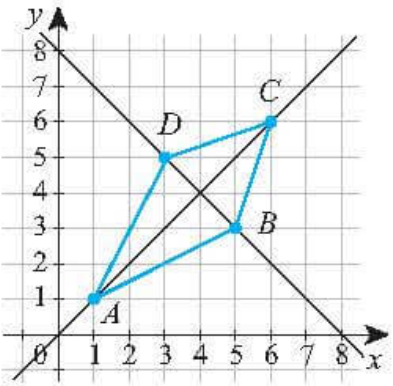
$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\left(d_1d_2-d_1m-d_2n+nm+d_2n-mn+mn+d_1m-mn\right)=$$

$$=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$ ***c.n.u.***

Ćwiczenie 1. Przekątne d_1 i d_2 czworokąta wypukłego przecinają się pod kątem α. Oblicz pole tego czworokąta, gdy:

a) $d_1=6$, $d_2=10$, $\alpha=60^\circ$, **b)** $d_1=6$, $d_2=12$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Przykład 1. Punkty $A=(1,1)$, $B=(5,3)$, $C=(6,6)$ i $D=(3,5)$ są wierzchołkami czworokąta wypukłego.



a) Uzasadnij, że przekątne AC i BD czworokąta są prostopadłe.

b) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Rozwiązanie

a) Obliczamy współczynniki kierunkowe m_{AC} i m_{BD} prostych AC oraz BD i sprawdzamy, czy $m_{AC}\cdot m_{BD}=-1$.

$$m_{AC}=\frac{y_C\ \ y_A}{x_C\ \ x_A},\quad m_{BD}=\frac{y_D\ \ y_B}{x_D\ \ x_B}$$

$$m_{AC}=\frac{6-1}{6-1}=1,\quad m_{BD}=\frac{5-3}{3-5}=-1$$

$m_{AC}\cdot m_{BD}=1\cdot(-1)=-1$, więc $AC\perp BD$. ***c.n.u.***

b) Przekątne AC i BD czworokąta przecinają się pod kątem 90°, więc pole

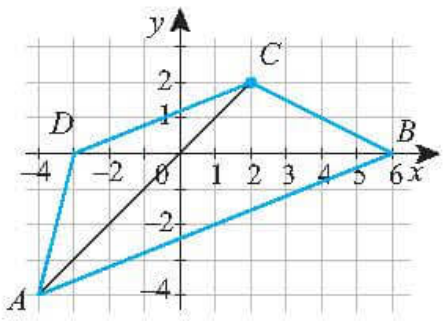
$$P=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin 90°.$$

$$|AC|=\sqrt{(6-1)^2+(6-1)^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$$

$$|DB|=\sqrt{(3-5)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

$$P=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1=10.$$

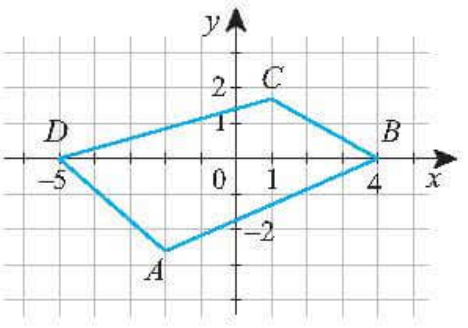
Ćwiczenie 2. Punkty $A=(-4,-4)$, $B=(6,0)$, $C=(2,2)$, $D=(-3,0)$ są wierzchołkami czworokąta wypukłego.



a) Uzasadnij, że przekątne AC i BD przecinają się pod kątem 45°.

b) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

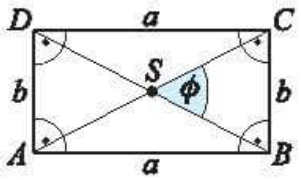
Ćwiczenie 3. Punkty $A=\left(-2,-2\sqrt{3}\right)$, $B=(4,0)$, $C=\left(1,\sqrt{3}\right)$, $D=(-5,0)$ są wierzchołkami czworokąta wypukłego. Oblicz jego pole.



Prostokąty

Przypomnijmy

Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste.

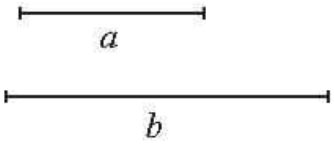
	Rysunek	Pole P i obwód L
a, b – długości boków prostokąta ϕ – kąt przecięcia się przekątnych prostokąta S – punkt przecięcia się przekątnych prostokąta AC, BD – przekątne prostokąta d – długość przekątnej prostokąta	 $\|AC\| = \|BD\| = d$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$	$P = ab$ $P = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin\phi$ $L = 2a + 2b$

- Prostokąt jest równoległobokiem oraz trapezem równoramiennym.
- W każdym prostokącie przekątne mają równe długości (przekątne są równe) i przecinają się w punkcie, który jest środkiem każdej z nich.
- Punkt przecięcia się przekątnych prostokąta jest jego środkiem symetrii.

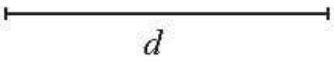
Ćwiczenie 4. Uzasadnij, że przekątne prostokąta mają równe długości.

Ćwiczenie 5.

a) Skonstruuj prostokąt, którego bokami są odcinki a i b przedstawione na rysunku.



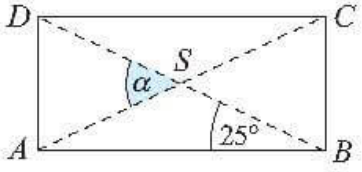
b) Skonstruuj prostokąt, którego przekątną jest odcinek d przedstawiony na rysunku, i którego przekątne przecinają się pod kątem 45°.



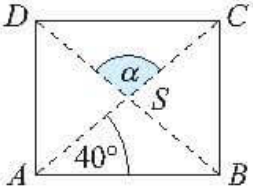
Ćwiczenie 6. Uzasadnij, że przekątne prostokąta dzielą go na cztery trójkąty parami przystające.

Ćwiczenie 7. Oblicz miarę kąta α, pod którym przecinają się przekątne prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.

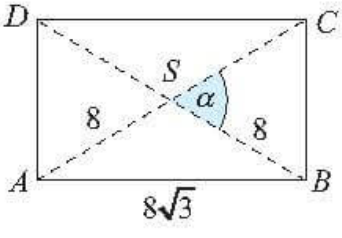
a)



b)



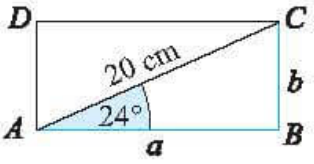
c)



Przykład 2. W prostokącie przekątna ma długość 20 cm i tworzy z dłuższym bokiem kąt o mierze 24°. Oblicz pole tego prostokąta. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Dane: $|AC| = 20$ cm, $|\sphericalangle CAB| = 24°$.

Obliczyć: a, b, $P = a \cdot b$, $L = 2a + 2b$.

I sposób

W trójkącie ABC:

$\frac{b}{20} = \sin 24°$, skąd $b \approx 8{,}134$,

$\frac{a}{20} = \cos 24°$, skąd $a \approx 18{,}2700$.

$P = a \cdot b$, więc $P \approx 148{,}6$.

Odp.: $P \approx 148{,}6$ cm^2.

II sposób

Przekątne AC i BD przecinają się pod kątem 48°.

$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin 48°$

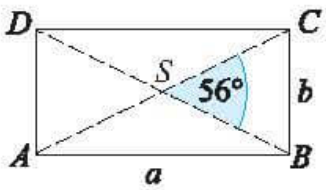
$P \approx \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot 0{,}7431$,

$P \approx 148{,}6$.

Ćwiczenie 8. Przekątna prostokąta ma długość 10 cm i tworzy z krótszym bokiem kąt o mierze 75°. Oblicz pole tego prostokąta.

Przykład 3. Oblicz długości boków prostokąta, którego przekątne o długości 10 cm przecinają się pod kątem 56°. Wyniki podaj z dokładnością do 0,1 cm.

Rozwiązanie Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



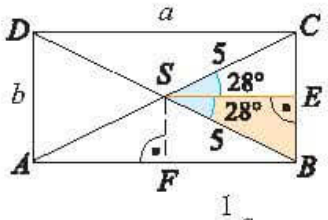
Dane: $d = |AC| = |BD| = 10$ cm, $|\sphericalangle BSC| = 56°$.

Obliczyć: a, b.

Trójkąt BCS to trójkąt równoramienny, w którym

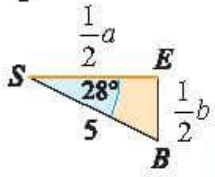
$|BS| = |CS| = 0{,}5d$, czyli $|BS| = |CS| = 5$ cm.

W trójkącie BES:



$\frac{0{,}5b}{5} = \sin 28°$, skąd $b = 10 \cdot \sin 28°$, $\sin 28° \approx 0{,}4695$

$\frac{0{,}5a}{5} = \cos 28°$, skąd $a = 10 \cdot \cos 28°$. $\cos 28° \approx 0{,}8829$



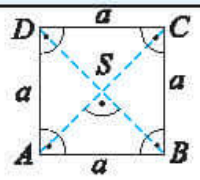
Odp.: 8,8 cm i 4,7 cm.

Ćwiczenie 9. Przekątne prostokąta mają długość 40 cm i przecinają się pod kątem 38°. Oblicz długości boków tego prostokąta. Wyniki zaokrąglij do 0,1 cm.

Kwadraty

Przypomnijmy

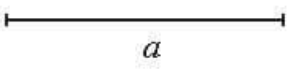
Kwadrat to czworokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste.

	Rysunek	Pole P i obwód L
AB, BC, CD, AD – boki kwadratu *AC, BD – przekątne kwadratu* *a – długość boku kwadratu* *d – długość przekątnej kwadratu*	 $\lvert AC\rvert = \lvert BD\rvert = d, \quad AC \perp BD,$ $d = a\sqrt{2}$	$P = a^2$ $P = \frac{1}{2}d^2$ $L = 4a$

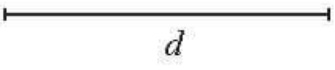
- Każdy kwadrat jest prostokątem, równoległobokiem, trapezem równoramiennym oraz rombem.
- W kwadracie:
  - przekątne mają równe długości
  - przekątne przecinają się pod kątem prostym, a punkt ich przecięcia jest środkiem każdej z nich
  - każda przekątna tworzy z bokiem kąt o mierze 45°.

Ćwiczenie 10.

a) Skonstruuj kwadrat, w którym odcinek a przedstawiony na rysunku jest jego bokiem.



b) Skonstruuj kwadrat, w którym odcinek d przedstawiony na rysunku jest jego przekątną.



Ćwiczenie 11. Oblicz:

a) długość boku kwadratu, którego pole jest równe 289 cm^2,

b) pole kwadratu, którego obwód jest równy 100 cm,

c) długość boku kwadratu, którego przekątna ma długość $6\sqrt{2}$.

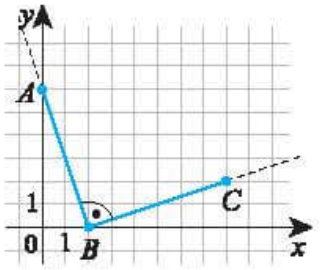
Ćwiczenie 12. Uzasadnij, że jeżeli przekątna kwadratu ma długość równą d, to jego pole P określone jest wzorem $P = \frac{1}{2} \cdot d^2$.

Przykład 4. Punkty A, B, C, gdzie $A=(0,6)$, $B=(2,0)$, $C=(8,2)$, są kolejnymi wierzchołkami czworokąta. Sprawdź, czy istnieje kwadrat, którego są one wierzchołkami.

Rozwiązanie

Punkty A, B, C są wierzchołkami kwadratu, gdy odcinki AB i BC leżą na prostych prostopadłych i mają równe długości (lub gdy środek M odcinka AC spełnia warunek $|MA|=|MB|$, lub gdy $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$).

Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych AB i BC.



$$a_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-6}{2-0}=-3,$$

$$a_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{2-0}{8-2}=\frac{1}{3}.$$

$a_{AB}\cdot a_{BC}=-3\cdot\frac{1}{3}=-1$, więc $AB\perp BC$.

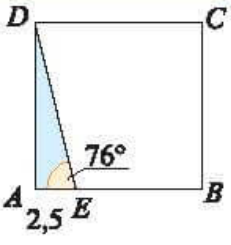
Obliczamy długości odcinków AB i BC.

$$\left.\begin{aligned}|AB|&=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(0-6)^2}=\sqrt{40}\\ |BC|&=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(8-2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{40}\end{aligned}\right\},\ \text{więc } |AB|=|BC|.$$

Odp.: Punkty A, B, C są wierzchołkami kwadratu, bo $AB\perp BC$ i $|AB|=|BC|$.

Ćwiczenie 13. Punkty $A=(10,-4)$, $B=(4,2)$ i $C=(0,-2)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta. Sprawdź, czy istnieje kwadrat, którego są one wierzchołkami.

Przykład 5. Z płytki ceramicznej w kształcie kwadratu kafelkarz odciął trójkątny klin. Tarczę tnącą ustawił pod kątem 76° w stosunku do boku płytki. Najkrótszy bok klinu AED miał długość 2,5 cm, jak na rysunku. Oblicz długość boku płytki. Wynik zaokrąglij do 1 cm.



Rozwiązanie

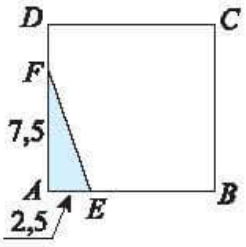
W trójkącie prostokątnym AED przyprostokątna AD jest bokiem płytki, zatem

$$\frac{|AD|}{|AE|}=\operatorname{tg}76°,\ \text{więc}\ |AD|=|AE|\cdot\operatorname{tg}76°,\ \text{czyli}\ |AD|=2{,}5\cdot 4{,}0108,$$

skąd $|AD|=10{,}027$, zatem $|AD|\approx 10$.

Odp.: 10 cm.

Ćwiczenie 14. Z płytki ceramicznej w kształcie kwadratu o boku 10 cm kafelkarz ma odciąć trójkątny klin o wymiarach podanych na rysunku. Oblicz, pod jakim kątem ma on ustawić tarczę w stosunku do boku płytki.



Odpowiedzi do ćwiczeń

1. **a)** $15\sqrt{3}$, **b)** 27. 2. **b)** 27. 3. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$. *Wskazówka.* Proste AC i DB przecinają się pod kątem 60°.
4. *Wskazówka.* Wskaż trójkąty przystające w prostokącie $ABCD$ o przekątnych AC i BD.
7. **a)** $\alpha = 50°$, **b)** $\alpha = 100°$, **c)** $\alpha = 60°$. 8. $P = 25$ cm^2. 9. 13,0 cm i 37,8 cm.
11. **a)** 17 cm, **b)** 625 cm^2, **c)** 6. 13. Nie, bo $|AB| \neq |BC|$. 14. 18° albo 72°.

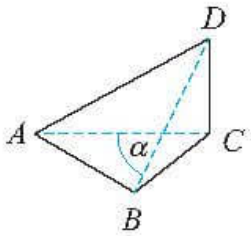
Zadania utrwalające

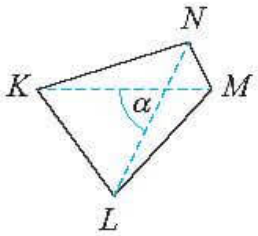
6.1. Przekątne d_1 i d_2 czworokąta wypukłego przecinają się pod kątem α. Oblicz pole tego czworokąta, gdy:

a) $d_1 = d_2 = 8$ i $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$,

b) $d_1 = 2\sqrt{2}$, $d_2 = 6$ i $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

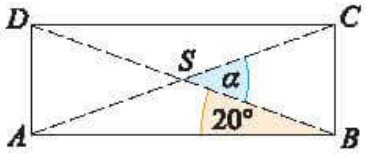
6.2. D Przekątne czworokątów $ABCD$ i $KLMN$ są parami równe i równoległe. Uzasadnij, że pola tych czworokątów są równe.



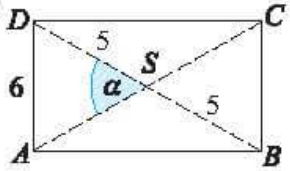


6.3. Oblicz miarę kąta α, pod którym przecinają się przekątne prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.

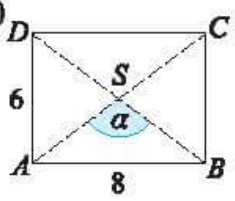
a)



b)

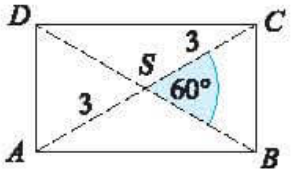


c)

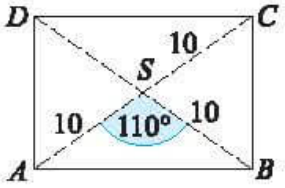


6.4. Oblicz długości boków prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.

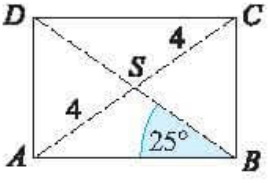
a)



b)



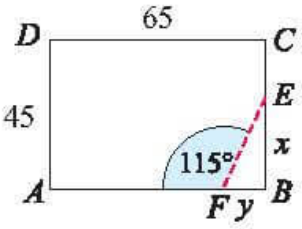
c)



Wyniki zaokrąglij do 0,01.

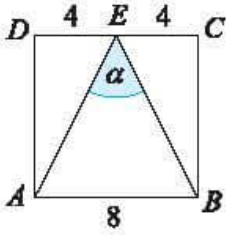
6.5. Przekątne prostokąta mają długość 14 cm i przecinają się pod kątem 48°. Oblicz pole i obwód tego prostokąta. Wyniki zaokrąglij odpowiednio do 1 cm^2 i 1 cm.

6.6. Stolarz odcina naroże z deski prostokątnej o wymiarach 65 cm × 45 cm, tak jak na rysunku. Długość cięcia EF jest równa 30 cm. Oblicz obwód deski (figura $AFECD$) po odcięciu naroża i podaj wynik zaokrąglony do 1 cm.

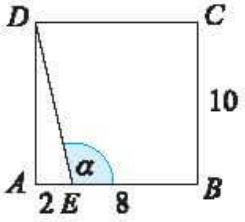


6.7. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest kwadratem. Oblicz miarę kąta α.

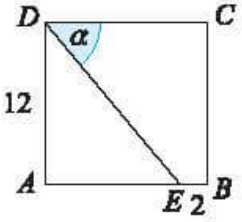
a)



b)



c)

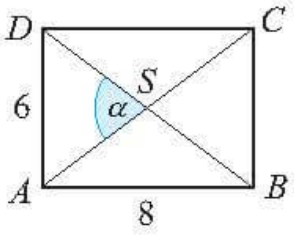


6.8. Przekątna prostokąta o długości 12 dzieli jego kąt w stosunku 2 : 3. Oblicz obwód L i pole P tego prostokąta. Wyniki zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

6.9. D Przekątne prostokąta $ABCD$ o bokach długości 6 i 8 przecinają się pod kątem α. Uzasadnij, że:

a) pola trójkątów ASD, DSC, CSB i BSA są równe,

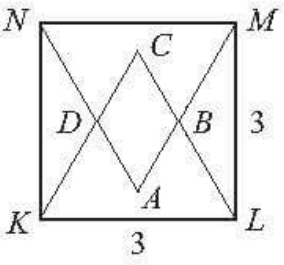
b) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$.



6.10. D W kwadrat $KLMN$, którego bok ma długość 3, wpisano dwa trójkąty równoboczne w sposób pokazany na rysunku. Uzasadnij, że:

a) czworokąt $ABCD$ jest rombem,

b) $|AC| = 3\left(\sqrt{3}-1\right)$ i $|DB| = 3-\sqrt{3}$.



6.11. W kwadrat, którego bok ma długość 1, wpisano drugi kwadrat tak, że jego boki tworzą z bokami danego kwadratu odpowiednio kąty o miarach 30° i 60°. Oblicz pole wpisanego kwadratu.

6.12. Skonstruuj kwadrat, w którym dwa dane punkty M i N są:

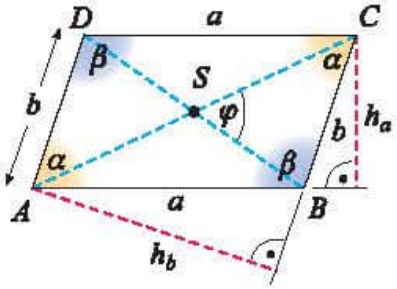
a) środkami dwóch przeciwległych boków tego kwadratu,

b) środkami dwóch sąsiednich boków tego kwadratu.

Równoległoboki

Przypomnijmy

Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

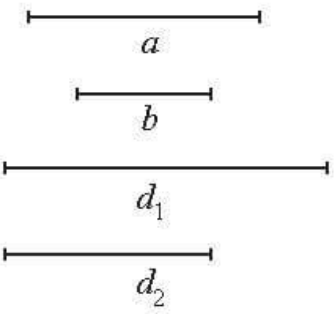
	Rysunek	Pole P i obwód L
a, b – długości boków równoległoboku h_a, h_b – wysokości równoległoboku AC, BD – przekątne równoległoboku $\lvert AC\rvert = d_1$, $\lvert BD\rvert = d_2$ α, β – miary kątów wewnętrznych równoległoboku ϕ – kąt przecięcia się przekątnych równoległoboku	 $\alpha + \beta = 180°$	$P = bh_b$ $P = ah_a$ $L = 2a + 2b$

- Każdy równoległobok jest trapezem równoramiennym.
- W każdym równoległoboku:
  - pary boków równoległych mają tę samą długość,
  - punkt przecięcia się przekątnych dzieli każdą z przekątnych na połowy,
  - przeciwległe kąty wewnętrzne są przystające (mają równe miary),
  - suma miar dwóch kolejnych kątów wewnętrznych jest równa 180°,
  - punkt przecięcia się przekątnych jest środkiem symetrii tego równoległoboku.

Ćwiczenie 15.

a) Skonstruuj równoległobok, w którym odcinki a i b przedstawione na rysunku są bokami równoległoboku oraz jego kąt ostry ma miarę 30°.

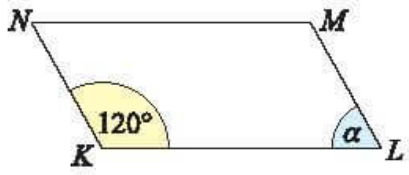
b) Skonstruuj równoległobok, w którym odcinki d_1 i d_2 przedstawione na rysunku są jego przekątnymi i przecinają się pod kątem 45°.



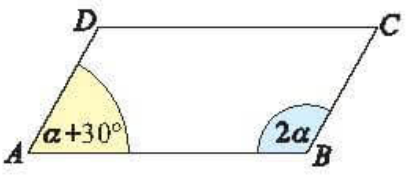
Ćwiczenie 16.

Uwzględnij dane przedstawione na rysunkach i oblicz miary kątów równoległoboku.

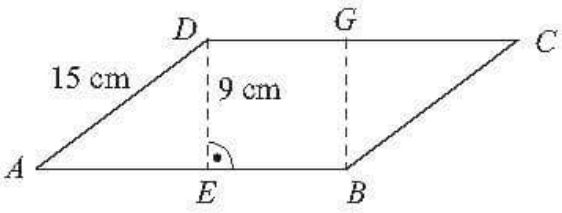
a)



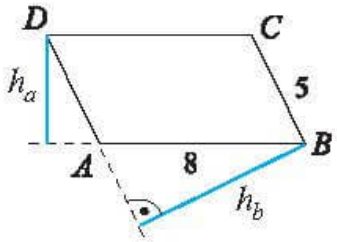
b)



Ćwiczenie 17. Pole prostokąta $DEBG$ jest równe $162\ \text{cm}^2$.
Oblicz pole równoległoboku $ABCD$.



Ćwiczenie 18. Pole równoległoboku $ABCD$ o bokach długości 8 i 5 jest równe 24.
Oblicz długości wysokości tego równoległoboku.

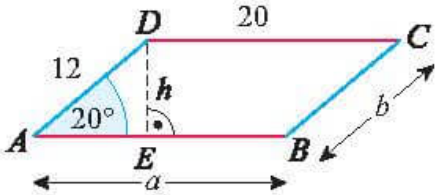


Przykład 6. Boki równoległoboku mają długości 20 cm i 12 cm, a kąt między nimi zawarty ma miarę 20°. Oblicz pole tego równoległoboku. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $a = 20$ cm, $b = 12$ cm, $|\sphericalangle DAB| = 20°$. | ***Obliczyć***: h, $P = a \cdot h$.



W trójkącie prostokątnym AED:

$$\frac{h}{12} = \sin 20°, \text{ skąd}$$

$h = 12 \cdot \sin 20°$, więc $h \approx 4{,}104$.

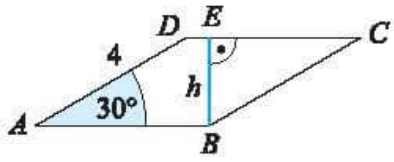
$P = a \cdot h$, czyli

$P = 20 \cdot 4{,}104$, więc $P \approx 82{,}08$.

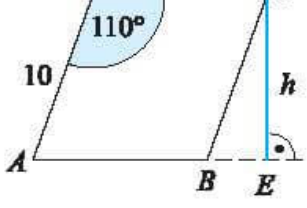
Odp.: $P \approx 82{,}08\ \text{cm}^2$.

Ćwiczenie 19. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, i oblicz długość jego wysokości h. Wynik zaokrąglij do 0,1.

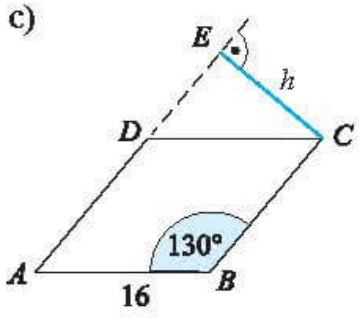
a)



b)

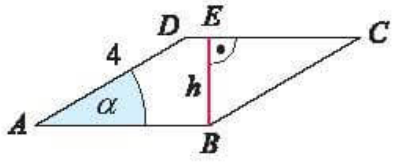


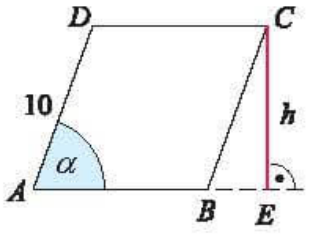
c)

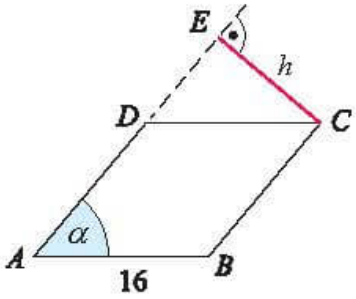


Ćwiczenie 20. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, i oblicz długość jego wysokości h, gdy:

a) $\sin\alpha = 0{,}4$, **b)** $\sin\alpha = 0{,}7$, **c)** $\sin\alpha = 0{,}5$.

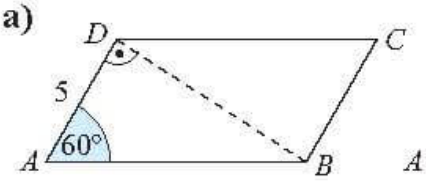




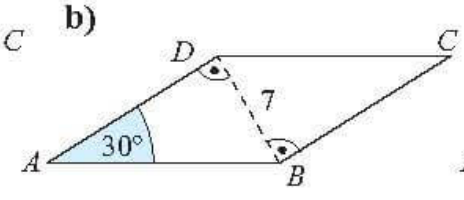


Ćwiczenie 21. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

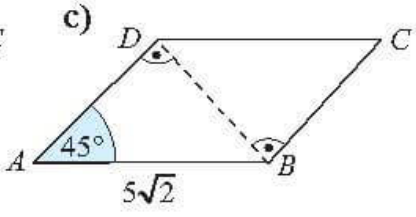
a)



b)



c)



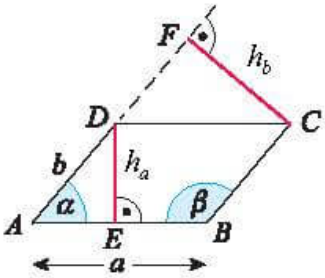
Przykład 7. Boki równoległoboku mają długości 8 i 10, a jego pole jest równe 60. Oblicz:

a) długości wysokości tego równoległoboku,

b) miary kątów równoległoboku.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Dane: $P = 60$, $a = 10$, $b = 8$. | ***Obliczyć***: h_a, h_b, α, β.

a) $P = a \cdot h_a$, więc $h_a = \dfrac{P}{a}$, czyli $h_a = \dfrac{60}{10} = 6$,

$P = b \cdot h_b$, więc $h_b = \dfrac{P}{b}$, czyli $h_b = \dfrac{60}{8} = 7{,}5$.

b) W trójkącie prostokątnym AED:

$\dfrac{h_a}{b} = \sin\alpha$, więc $\sin\alpha = \dfrac{6}{8} = 0{,}75$, skąd $\alpha \approx 49°$.

$\beta = 180° - \alpha$, więc $\beta \approx 131°$.

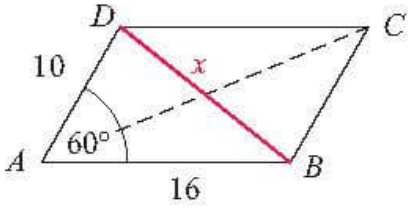
Odp.: **a)** 6 i 7,5, **b)** 49° i 131°.

Ćwiczenie 22. Boki równoległoboku mają długości 16 i 32, a jego pole jest równe 128. Oblicz miary kątów równoległoboku.

Przykład 8. Boki równoległoboku mają długości 16 i 10, a kąt między nimi zawarty ma miarę 60°. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Dane: $|AB|=16$, $|AD|=10$, $|\sphericalangle BAD|=60°$.

Obliczyć: $|BD|=x$, $|AC|=y$.

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABD:

$$x^2=|AB|^2+|AD|^2-2\cdot|AB|\cdot|AD|\cdot\cos(\sphericalangle BAD)$$

$$x^2=16^2+10^2-2\cdot16\cdot10\cdot\cos60°=196,\ \text{skąd}\ \ x=16.$$

Zauważamy, że $|\sphericalangle ABC|=180°-60°=120°$.

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABC:

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos(\sphericalangle ABC)$$

$$y^2=16^2+10^2-2\cdot16\cdot10\cdot\cos120°$$

$\cos120°=\cos60°=\frac{1}{2}$

$$y^2=516,\ \text{skąd}\ \ y=2\sqrt{129}$$

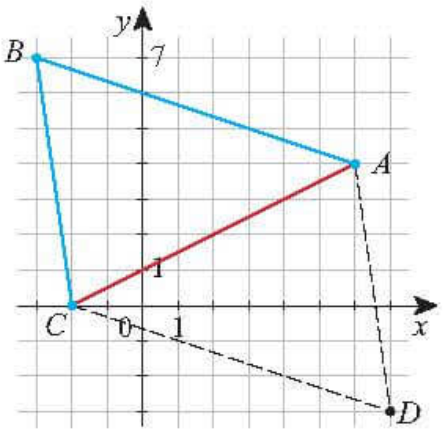
Odp.: 14 i $2\sqrt{129}$.

Ćwiczenie 23. Boki równoległoboku mają długości 5 i 8, a kąt między nimi zawarty ma miarę 135°. Oblicz sumę kwadratów długości przekątnych tego równoległoboku.

Przykład 9. Punkty $A=(6,4)$, $B=(-3,7)$, $C=(-2,0)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz pole tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Zauważamy, że przekątna AC dzieli równoległobok na dwa przystające trójkąty: ABC i ADC.



$$P_{\square ABCD}=2\cdot P_{\triangle ABC}.$$

Korzystamy z wzoru

$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|(x_B-x_A)\cdot(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\right|.$$

$$P_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|(-3-6)\cdot(0-4)-(-2-6)(7-4)\right|=30.$$

Zatem $P_{\square ABCD}=2\cdot30=60$.

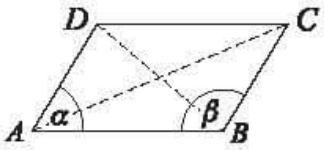
Odp.: 60.

Ćwiczenie 24. Punkty $A=(-1,1)$, $B=(3,-2)$, $C=(2,3)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz jego pole.

Przykład 10. Wykaż, że w równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Z (***założenie***): Odcinki AC, BD – przekątne równoległoboku $ABCD$.

T (***teza***): $|AC|^2+|BD|^2=2|AB|^2+2|BC|^2$.

Dowód: W trójkącie ABC:

$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB|\cdot|BC|\cos\beta$, gdzie $\beta=180^\circ-\alpha$, więc

1° $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2+2|AB|\cdot|BC|\cos\alpha$. $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$

W trójkącie DAB:

$|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2-2|AB|\cdot|AD|\cos\alpha$, gdzie $|AD|=|BC|$, więc

2° $|BD|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB|\cdot|BC|\cos\alpha$.

Dodając stronami równości 1° i 2°, mamy:

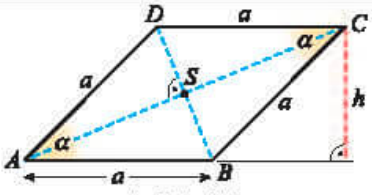
$|AC|^2+|BD|^2=2|AB|^2+2|BC|^2$. ***c.n.u.***

Ćwiczenie 25. W równoległoboku przekątne mają długości 10 i $6\sqrt{2}$. Oblicz sumę kwadratów długości dwóch różnych boków tego równoległoboku.

Romby

Przypomnijmy

Romb to czworokąt, którego wszystkie boki są równe.

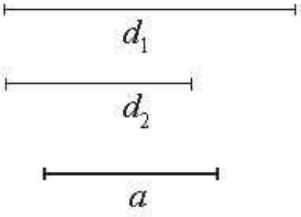
	Rysunek	Pole P i obwód L
a – długość boku rombu h – wysokość rombu d_1, d_2 – długości przekątnych rombu ($\|AC\|=d_1$, $\|BD\|=d_2$) α – miara kąta ostrego rombu.	 $AC\perp BD$	$P=ah$ $P=\frac{1}{2}d_1d_2$ $L=4a$

- Każdy romb jest równoległobokiem.
- W każdym rombie:
  - przekątne przecinają się pod kątem prostym, a punkt przecięcia jest środkiem każdej z nich,
  - przekątne dzielą romb na cztery przystające trójkąty prostokątne,
  - przekątne dzielą kąty na połowy.

Ćwiczenie 26.

a) Skonstruuj romb, w którym odcinki d_1 i d_2 przedstawione na rysunku są jego przekątnymi.

b) Skonstruuj romb, w którym odcinek a przedstawiony na rysunku jest jego bokiem, a kąt ostry tego rombu ma miarę 60°.



Ćwiczenie 27. Krótsza przekątna rombu ma taką samą długość jak jego bok.

a) Podaj miary kątów wewnętrznych tego rombu.

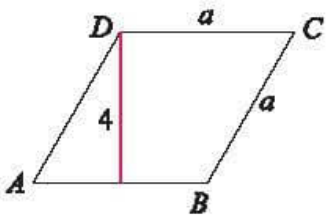
b) Podaj miarę kąta, jaki tworzy dłuższa przekątna tego rombu z jego bokiem.

Przykład 11. Wysokość h rombu jest równa 4 cm, a obwód L rombu jest równy 24 cm. Oblicz pole P rombu.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $h=4,\ L=24.$ | ***Obliczyć***: $P.$



$L=4a$ i $L=24$, więc $4a=24$, skąd $a=6.$

$P=a\cdot h=6\cdot 4=24.$

Odp. $P=24.$

Ćwiczenie 28. Bok rombu ma długość 5 cm, a kąt ostry miarę 60°. Oblicz pole tego rombu.

Przykład 12. Przekątne rombu mają długości równe 6 i 8. Oblicz:

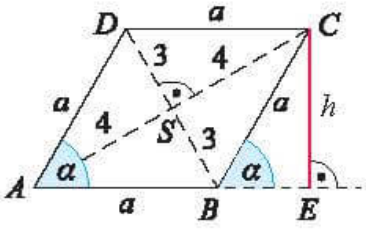
a) długość boku rombu, **b)** długość wysokości rombu,

c) miarę kąta ostrego rombu.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $d_1=|BD|=6,$ $d_2=|AC|=8.$ | ***Obliczyć***: $a,\ h,\ \alpha.$



a) Punkt S przecięcia się przekątnych rombu dzieli każdą z nich na połowę, więc $|AS|=|SC|=4$ i $|BS|=|SD|=3.$

W trójkącie prostokątnym ASD:

$a^2=4^2+3^2,$ więc $a^2=25,$ skąd $a=5.$

b) $P=\dfrac{d_1\cdot d_2}{2}$ i $P=a\cdot h$

$$a\cdot h=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$$

$$5h=\frac{6\cdot 8}{2},\ \text{skąd}\ \ h=4{,}8.$$

c) W trójkącie prostokątnym BEC:

$$\frac{h}{a}=\sin\alpha,\ \text{więc}$$

$$\sin\alpha=\frac{4{,}8}{5}=0{,}96,\ \text{skąd}$$

$$\alpha\approx 74^\circ.$$

Odp.: **a)** 5, **b)** 4,8, **c)** 74°.

Ćwiczenie 29. Przekątne rombu mają długości równe 10 i 20. Oblicz:

a) długość boku rombu, **b)** długość wysokości rombu, **c)** miarę kąta ostrego rombu.

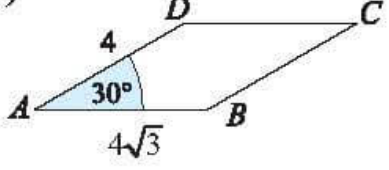
Odpowiedzi do ćwiczeń

16. **a)** 60° i 120°, **b)** 80° i 100°. **17.** 270 cm^2. **18.** $h_a=3$, $h_b=4{,}8$. **19.** **a)** 2, **b)** 9,4, **c)** 12,3.
20. **a)** $h=1{,}6$, **b)** $h=7$, **c)** $h=8$. **21.** **a)** $25\sqrt{3}$, **b)** $49\sqrt{3}$, **c)** 25. **22.** 15° i 165°. **23.** 178.
24. 17. **25.** 86. **27.** **a)** 60° i 120°, **b)** 30°. **28.** $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$. **29.** **a)** $5\sqrt{5}$, **b)** $4\sqrt{5}$, **c)** 54°.

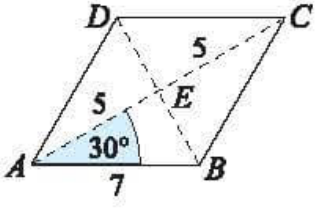
Zadania utrwalające

6.13. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole równoległoboku $ABCD$.

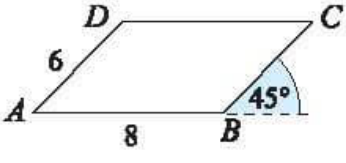
a)



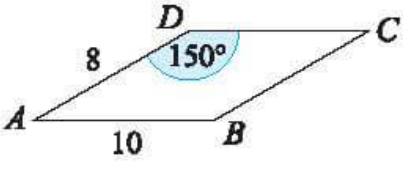
b)



c)



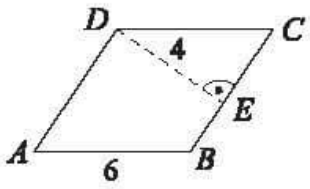
6.14. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole równoległoboku $ABCD$.



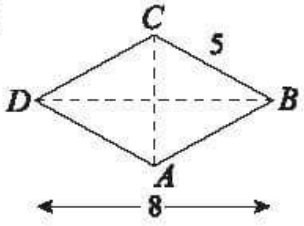
6.15. Oblicz długości przekątnych równoległoboku, w którym boki mają długości 4 i $3\sqrt{2}$, a kąt ostry ma miarę 45°.

6.16. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole rombu $ABCD$.

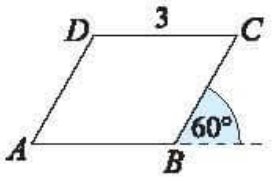
a)



b)



c)

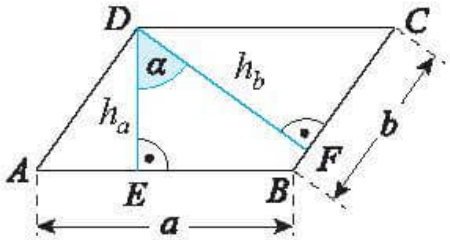


6.17. Wysokość równoległoboku poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego tworzy z jego bokiem kąt o mierze 50°. Oblicz miary kątów tego równoległoboku. Wyniki zaokrąglij do 1°.

6.18. W równoległoboku boki mają długości 4 i 3, a kąt ostry ma miarę 42°. Oblicz pole tego równoległoboku. Wynik zaokrąglij do 0,1.

6.19. Pole rombu, którego bok ma długość $2\sqrt{3}$, jest równe $6\sqrt{2}$. Oblicz miarę kąta ostrego tego rombu.

6.20. D W równoległoboku $ABCD$ z punktu D poprowadzono dwie wysokości: h_a, h_b, tworzące kąt α. Uzasadnij, że kąt ostry równoległoboku też ma miarę równą α.



6.21. Wysokość h rombu dzieli jeden z jego boków na odcinki o długościach 5 i 10. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu. Rozważ dwa przypadki.

6.22. Oblicz:

a) obwód równoległoboku, którego pole jest równe 70, a jego wysokości mają długości 5 i 7,

b) pole równoległoboku, w którym przekątne o długościach 17 i 26 przecinają się pod kątem 30°.

6.23. Przekątne równoległoboku mają długości 12 i 16, a jego pole jest równe $48\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta przecięcia się przekątnych tego równoległoboku.

6.24. Kąt ostry równoległoboku ma miarę 30°. Przekątne równoległoboku przecinają się w punkcie S oddalonym od jego boków odpowiednio o 4 cm i 12 cm. Oblicz długość krótszej przekątnej równoległoboku.

6.25. Bok rombu ma długość 4. Suma długości jego przekątnych jest równa 10. Oblicz pole P tego rombu.

6.26. Romb o boku długości 9 i kącie ostrym 60° podzielono na trzy części o równych polach odcinkami mającymi wspólny początek w wierzchołku kąta ostrego. Oblicz długości tych odcinków.

6.27. D Udowodnij, że jeżeli każda przekątna czworokąta wypukłego dzieli go na trójkąty o równych polach, to jest on równoległobokiem.

6.28. W rombie $ABCD$ bok AB ma długość 13, a przekątna AC ma długość 24.

a) Oblicz długość przekątnej BD.

b) Oblicz pole rombu.

c) Oblicz sinus kąta DAB.

d) Oblicz cosinus kąta ADC.

6.29. D Pole rombu jest równe 7,5, a długości jego przekątnych różnią się o 2. Wykaż, że tangens połowy kąta rozwartego tego rombu jest równy $\frac{5}{3}$.

6.30. D W rombie przekątne mają długości d_1 i d_2 a miara jednego z kątów wewnętrznych tego rombu jest równa 150°. Uzasadnij, że długość boku a rombu określona jest wzorem $a=\sqrt{d_1 \cdot d_2}$.

6.31. Punkty $A=(1,1)$ i $C=(3,5)$ są końcami przekątnej rombu $ABCD$, którego pole jest równe 20. Oblicz:

a) długość przekątnej AC,

b) długość przekątnej BD,

c) długość boku rombu,

d) sinus kąta ostrego rombu.

6.32. Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ jest rombem. Jeśli tak, to oblicz jego pole, gdy:

a) $A=(0,-2)$, $B=(2,1)$, $C=(5,3)$, $D=(3,0)$,

b) $A=(-4,-2)$, $B=(2,0)$, $C=(0,4)$, $D=(-6,2)$.

6.33. Sprawdź, czy punkt D jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$, gdy:

a) $A=(-2,3)$, $B=(2,5)$, $C=(0,7)$, $D=(-4,5)$,

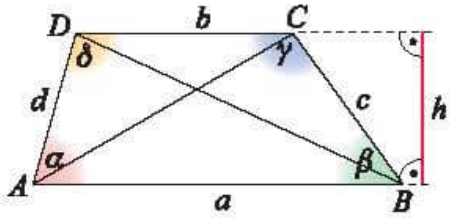
b) $A=(-1,-1)$, $B=(2,-3)$, $C=(7,-1)$, $D=(4,1)$,

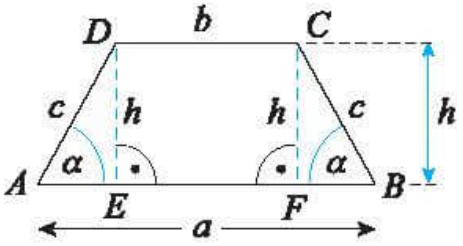
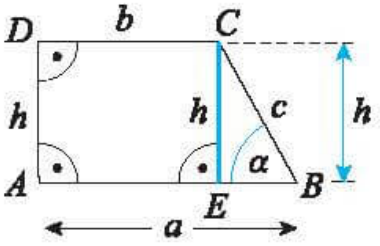
c) $A=(-2,1)$, $B=(1,3)$, $C=(6,1)$, $D=(5,-1)$.

Trapezy

Przypomnijmy

Trapezem nazywamy czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych. Parę boków równoległych trapezu nazywa się **podstawami**, a odległość między nimi jest równa wysokości trapezu. Pozostałe dwa boki trapezu nazywa się **ramionami**.

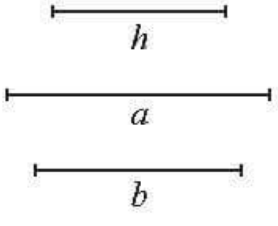
	Rysunek	Pole P i obwód L
a, b – długości podstaw trapezu c, d – długości ramion trapezu h – wysokość trapezu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – miary kątów wewnętrznych trapezu	 $\alpha+\delta=180°,\ \beta+\gamma=180°$	$P=\frac{1}{2}(a+b)h$ $L=a+b+c+d$

Trapez równoramienny	Trapez prostokątny
 $\lvert AD\rvert=\lvert BC\rvert=c,\ \lvert AE\rvert=\lvert FB\rvert=\frac{a-b}{2}$.	 $AD\perp AB,\ AD\perp DC,\ \lvert EB\rvert=a-b$

- Każdy prostokąt, kwadrat, równoległobok i romb jest trapezem równoramiennym.
- Każdy kwadrat i prostokąt jest trapezem prostokątnym.

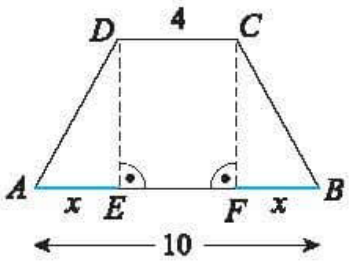
Ćwiczenie 30. Odcinki h, a i b przedstawione na rysunku są odpowiednio wysokością i podstawami trapezu. Skonstruuj:

a) trapez prostokątny, **b)** trapez równoramienny.

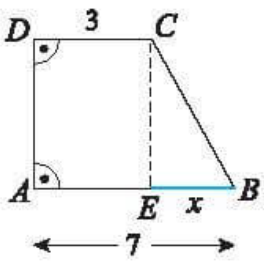


Ćwiczenie 31. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz długość odcinka x.

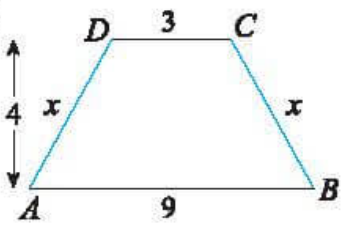
a)



b)

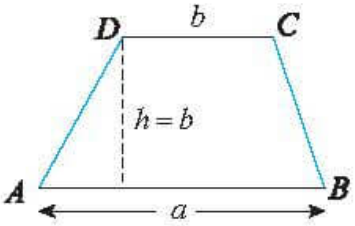


c)



Przykład 13. Pole trapezu jest równe 54 dm^2. Jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej, a wysokość jest równa krótszej podstawie. Oblicz długości podstaw i wysokość tego trapezu.

Rozwiązanie



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Dane: $P = 54,\ h = b,\ a = 2b.$ | ***Obliczyć***: $a, b, h.$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h, \text{ więc}$$

$$54 = \frac{2b+b}{2} \cdot b$$

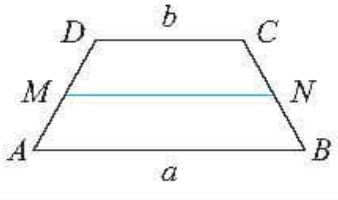
$$\frac{3b}{2} \cdot b = 54, \text{ skąd } b^2 = 36$$

$$b = 6, \text{ więc } a = 12 \text{ i } h = 6.$$

Ćwiczenie 32. Pole trapezu jest równe 360 cm^2. Wysokość ma długość 12 cm, a długość jednej z podstaw jest o 4 cm większa od drugiej. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

Uwaga

Odcinek MN łączący środki ramion dowolnego trapezu jest równoległy do jego podstaw AB i DC oraz $|MN| = \frac{|AB|+|DC|}{2}$, czyli $|MN| = \frac{a+b}{2}$.



Odcinek MN nazywamy **linią środkową trapezu**.

Ćwiczenie 33. Uzasadnij, że jeśli MN jest linią środkową trapezu, to:

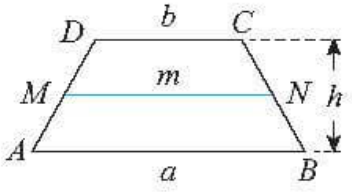
a) pole tego trapezu określone jest wzorem $P = |MN| \cdot h$, gdzie h to wysokość trapezu,

b) $|MN| = \frac{a+b}{2}$, gdzie a i b to podstawy trapezu.

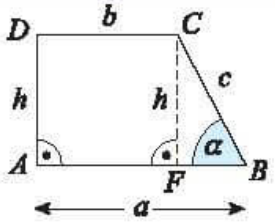
Ćwiczenie 34. Na rysunku przedstawiony jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i DC oraz linii środkowej MN. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i oblicz:

a) m, gdy $a=12$ i $b=8$,

b) pole P trapezu, gdy $m=4$ i $h=2$.



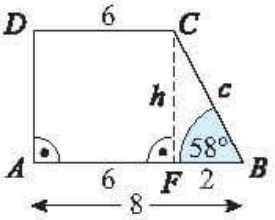
Przykład 14. W trapezie prostokątnym, przedstawionym na rysunku, długości podstaw są równe 8 cm i 6 cm, a kąt ostry ma miarę 58°. Oblicz obwód i pole tego trapezu. Wyniki zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.



Rozwiązanie

Dane: $a=8,\ b=6,$ $\alpha=58°.$

Obliczyć: $L=a+b+c+h,$ $P=\dfrac{a+b}{2}\cdot h.$



Zauważamy, że $|FB|=a-b=8-6=2.$

Obliczamy długości odcinków h i c w trójkącie CFB.

$$\frac{h}{2}=\operatorname{tg}58°,\ \text{skąd}\ h=2\cdot\operatorname{tg}58°,\ \text{czyli}\ h\approx 3{,}2006,$$

$$\frac{2}{c}=\cos 58°,\ \text{skąd}\ c=\frac{2}{\cos 58°},\ \text{czyli}\ c\approx 3{,}7743.$$

Zatem

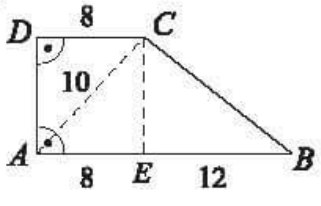
$$L=8+6+3{,}2006+3{,}7743=20{,}9749,\ \text{więc}\ L\approx 20{,}97.$$

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h,\ \text{czyli}\ P\approx\frac{8+6}{2}\cdot 3{,}2006,\ \text{skąd}\ P\approx 22{,}4042.$$

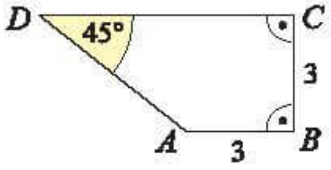
Odp.: $L\approx 20{,}97$ cm, $P\approx 22{,}40\ \text{cm}^2$.

Ćwiczenie 35. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym. Oblicz pole tego trapezu i jego obwód.

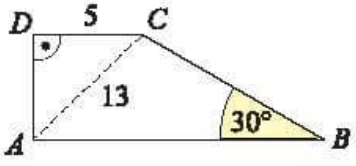
a)



b)

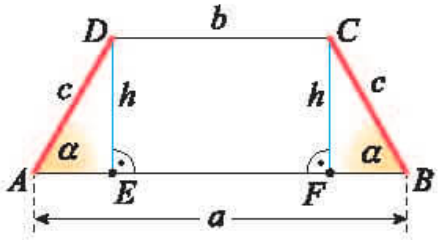


c)



Ćwiczenie 36. Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, i uzasadnij, że:

a) $|AE| = |BF| = \frac{a-b}{2}$, b) $|AF| = |BE| = \frac{a+b}{2}$.

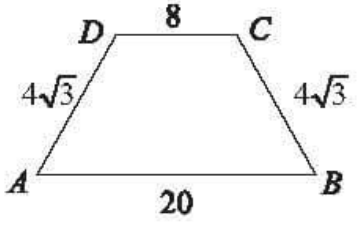


Przykład 15. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Oblicz:

a) miarę kąta między ramieniem a dłuższą podstawą,

b) długość wysokości trapezu,

c) długość przekątnej trapezu.

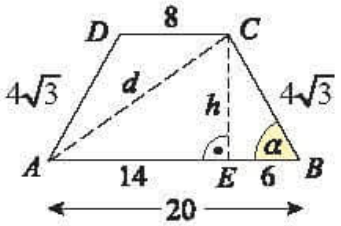


Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. Zauważamy, że trapez $ABCD$ jest równoramienny. Obliczamy długości odcinków EB i AE.

$$|EB| = \frac{|AB| - |DC|}{2} = \frac{20-8}{2} = 6,$$

$$|AE| = |AB| - |EB| = 20 - 6 = 14.$$



W trójkącie prostokątnym EBC:

a) $\cos\alpha = \frac{6}{4\sqrt{3}}$, skąd $\cos\alpha = \frac{6}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zatem $\alpha = 30°$.

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{h}{4\sqrt{3}} = \sin 30°$, skąd $h = 4\sqrt{3} \cdot \sin 30° = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$.

Zatem $h = 2\sqrt{3}$.

c) W trójkącie prostokątnym AEC:

$|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2$, czyli $d^2 = 14^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$, skąd $d^2 = 208$, więc

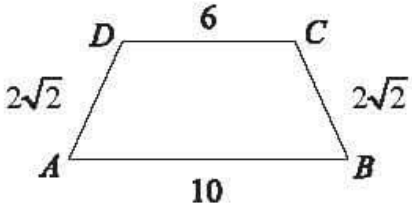
$d = \sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13}$, zatem $d = 4\sqrt{13}$.

Odp.: a) $30°$, b) $2\sqrt{3}$, c) $4\sqrt{13}$.

Ćwiczenie 37. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem. Oblicz:

a) miarę kąta ostrego tego trapezu,

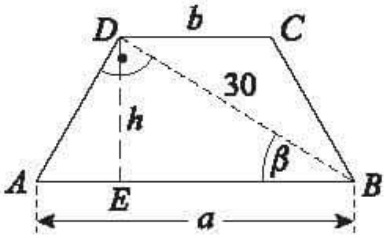
b) tangens kąta, jaki tworzy przekątna trapezu z jego dłuższą podstawą.



Przykład 16. Przekątna trapezu ma długość 30 i tworzy z jednym z jego ramion kąt prosty, a z dłuższą podstawą trapezu kąt, którego sinus jest równy $\frac{8}{17}$. Pole tego trapezu jest równe 360. Oblicz długości podstaw trapezu.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Dane: $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $|BD|=30$, $P=360$. | ***Obliczyć***: a, b – długości podstaw.

Obliczamy długość przeciwprostokątnej AB, czyli długość a dłuższej podstawy trapezu. W trójkącie prostokątnym ABD:

$$\frac{|BD|}{|AB|}=\cos\beta,\ \text{czyli}\ \frac{30}{a}=\cos\beta,\ \text{więc}\ a=\frac{30}{\cos\beta}.$$

$\sin\beta=\frac{8}{17}$ i $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}$, skąd $\quad \sin^2\beta+\cos^2\beta=1$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2},\ \text{czyli}\ \cos\beta=\frac{15}{17}.\ \text{Zatem}\ a=30:\frac{15}{17}=34.$$

Obliczamy długość wysokości h trapezu. W trójkącie prostokątnym DEB:

$$\frac{|ED|}{|BD|}=\sin\beta,\ \text{czyli}\ \frac{h}{30}=\frac{8}{17},\ \text{skąd}\ h=\frac{240}{17}.$$

Obliczamy długość b krótszej podstawy trapezu.

$$P=\frac{(a+b)h}{2},\ \text{więc}\ 360=\frac{(34+b)\frac{240}{17}}{2},\ \text{skąd}\ b=17.$$

Odp.: $a=34$, $b=17$.

Ćwiczenie 38. Przekątna trapezu ma długość 24 i tworzy z jednym z jego ramion kąt prosty, a z dłuższą podstawą trapezu kąt, którego cosinus jest równy $\frac{12}{13}$. Pole tego trapezu jest równe 180. Oblicz długości podstaw trapezu.

Przykład 17. Punkty $A=(-1,4)$, $B=(5,-2)$, $C=(7,3)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym jedną z podstaw jest odcinek AB. Oblicz współrzędne wierzchołka D.

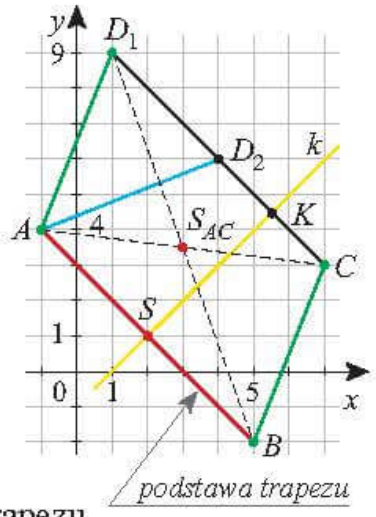
Rozwiązanie Trapez jest równoramienny, gdy jego ramiona mają taką samą długość, więc możliwe są dwa przypadki:

1. trapez jest równoległobokiem,
2. trapez jest równoramienny, ale nie jest równoległobokiem.

Ad 1 Środek przekątnej AC jest również środkiem przekątnej BD.

$$S_{AC}=\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)=\left(3,\frac{7}{2}\right),$$

$$\begin{cases}\dfrac{x_B+x_{D_1}}{2}=x_S\\[2mm]\dfrac{y_B+y_{D_1}}{2}=y_S\end{cases}, \text{ więc } \begin{cases}\dfrac{5+x_{D_1}}{2}=3\\[2mm]\dfrac{-2+y_{D_1}}{2}=\dfrac{7}{2}\end{cases}, \text{ skąd } D_1=(1,9).$$



Ad 2 Jest kilka sposobów obliczenia współrzędnych wierzchołka D_2. Pokażemy jeden z nich.

Piszemy równanie prostej k, która jest prostopadła do prostej AB i przechodzi przez środek S podstawy AB trapezu.

$$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=(2,1),\ a_{AB}=\frac{-2-4}{5+1}=-1, \text{ więc } a=1. \qquad a\cdot a_{AB}=-1$$

k: $y-y_S=a\cdot(x-x_S)$, czyli $y-1=1\cdot(x-2)$, skąd $y=x-1$.

Piszemy równanie prostej CD_2, która jest równoległa do prostej AB.

CD_2: $y-y_C=a_{AB}(x-x_C)$, czyli $y-3=-(x-7)$, skąd $y=-x+10$. $\qquad a_{CD_2}=a_{AB}$

Obliczamy współrzędne punktu K, rozwiązując układ równań.

$$\begin{cases}y=x-1\\y=-x+10\end{cases}, \text{ skąd } K=\left(\frac{11}{2},\frac{9}{2}\right). \qquad \begin{cases}\text{równanie prostej } k\\\text{równanie prostej } CD_2\end{cases}$$

Obliczamy współrzędne wierzchołka D_2, korzystając z tego, że punkt K jest środkiem odcinka CD_2, albo z tego, że $\vec{CK}=\vec{KD_2}$.

$$\begin{cases}\dfrac{x_C+x_{D_2}}{2}=x_K\\[2mm]\dfrac{y_C+y_{D_2}}{2}=y_K\end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases}\dfrac{7+x_{D_2}}{2}=\dfrac{11}{2}\\[2mm]\dfrac{3+y_{D_2}}{2}=\dfrac{9}{2}\end{cases}, \text{ skąd } D_2=(4,6).$$

Odp.: $D_1=(1,9)$, $D_2=(4,6)$.

Ćwiczenie 39. Punkty $A=(-4,-1)$, $B=(2,-3)$, $C=(6,4)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym jedną z podstaw jest odcinek AB. Oblicz współrzędne wierzchołka D.

Odpowiedzi do ćwiczeń

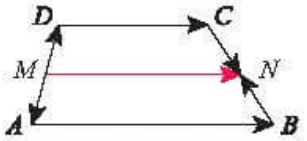
31. a) $x=3$, b) $x=4$, c) $x=5$. **32.** 28 cm i 32 cm.

34. a) 10, b) 8. **35.** a) $P=84$, $L=34+6\sqrt{5}$,

b) $P=\frac{27}{2}$, $L=12+3\sqrt{2}$, c) $P=12\left(5+6\sqrt{3}\right)$, $L=46+12\sqrt{3}$.

37. a) 45°, b) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$. **38.** 26 i 13. **39.** $D=(0,6)$ lub $D=(12,2)$.

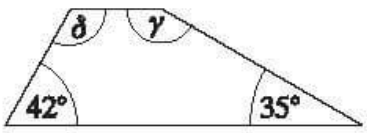
33. *Wskazówka.* Zauważ, że $\begin{cases}\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AB}+\vec{BN}\\ \vec{MN}=\vec{MD}+\vec{DC}+\vec{CN}\end{cases}$.



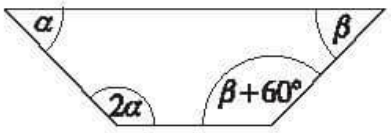
Zadania utrwalające

6.34. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miary kątów wewnętrznych trapezu.

a)

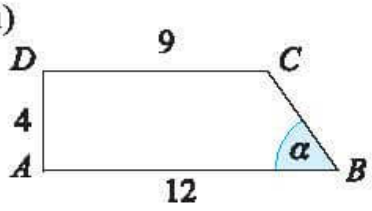


b)

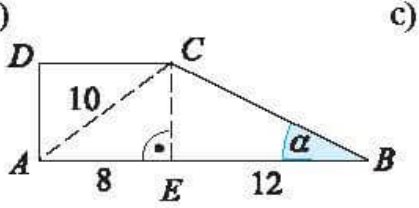


6.35. Na rysunku czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miarę kąta α.

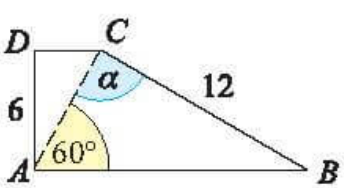
a)



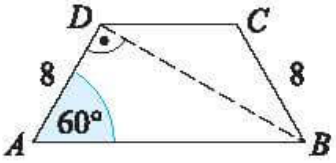
b)



c)

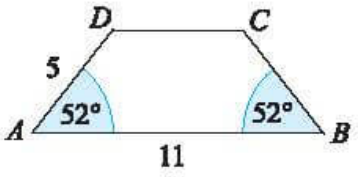


6.36. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym, i oblicz długości podstaw tego trapezu.

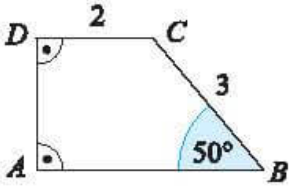


6.37. Oblicz pole trapezu $ABCD$ przedstawionego na rysunku. Wynik zaokrąglij do 0,1.

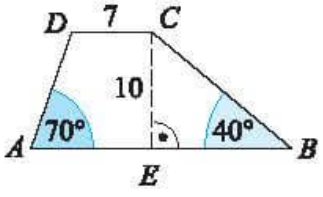
a)



b)



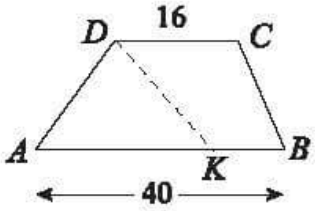
c)



6.38. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawy AB i CD mają odpowiednio długości $5\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$, a kąt ostry tego trapezu ma miarę $60°$.

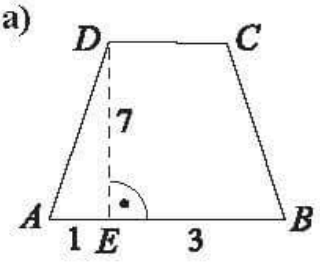
a) Oblicz długość wysokości trapezu. **b)** Oblicz pole trapezu.

6.39. Odcinki AB i CD, gdzie $|AB|=40$ i $|CD|=16$, są podstawami trapezu $ABCD$. Punkt K położony na boku AB ma tę własność, że odcinek DK dzieli trapez na dwa wielokąty o równych polach. Oblicz długość odcinka AK.

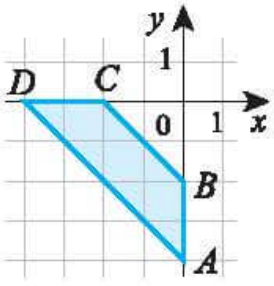


6.40. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz pole tego trapezu.

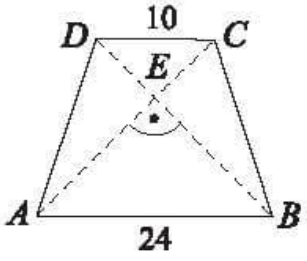
a)



b)



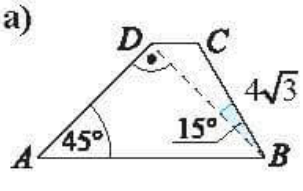
c)



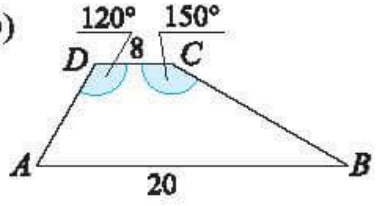
6.41. Nierównoległe boki AD i BC trapezu $ABCD$ zawierają się w prostych prostopadłych. Wiedząc, że $|AD|=|DC|=8$, $|\sphericalangle ABC|=30°$, oblicz pole P i obwód L tego trapezu.

6.42. Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o danych przedstawionych na rysunku jest trapezem. Jeśli tak, to oblicz jego pole P.

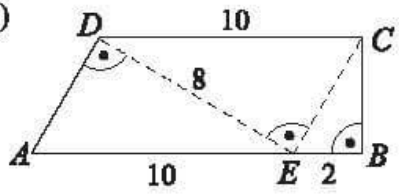
a)



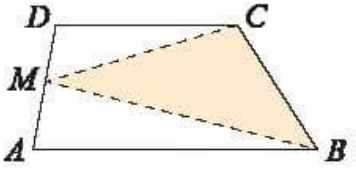
b)



c)



6.43. D W trapezie $ABCD$ połączono środek M ramienia AD z końcami ramienia BC, jak na rysunku. Wykaż, że pole trójkąta MBC jest równe połowie pola tego trapezu.



6.44. Odcinek o końcach $A=(3,2)$ i $B=(2,-1)$ jest krótszą podstawą trapezu $ABCD$. Wiedząc, że punkt $M=(1,1)$ jest środkiem dłuższej podstawy oraz, że $|CD|=2|AB|$ oblicz współrzędne wierzchołków C i D.

6.45. D Wykaż, że prosta zawierająca środki przekątnych trapezu $ABCD$ jest równoległa do podstaw AB i CD, gdy:

a) $A=(-4,0)$, $B=(14,-6)$, $C=(8,4)$, $D=(2,6)$,

b) $A=(-6,4)$, $B=(6,0)$, $C=(4,4)$, $D=(-2,6)$.

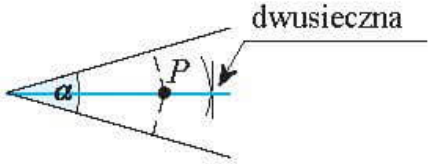
6.46. Punkty $A=(2,-3)$ i $C=(5,1)$ są wierzchołkami trapezu $ABCD$. Wiedząc, że prosta zawierająca podstawę CD trapezu ma równanie $x+2y-7=0$, a prosta zawierająca odcinek łączący wierzchołek A ze środkiem podstawy CD ma równanie $5x-y-13=0$, oblicz współrzędne wierzchołka D trapezu.

R

Okrąg wpisany w czworokąt

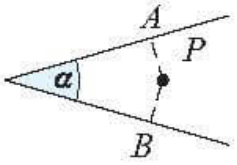
Przypomnijmy

Jeżeli punkt P należy do dwusiecznej kąta,



to jego odległości od ramion kąta są równe.

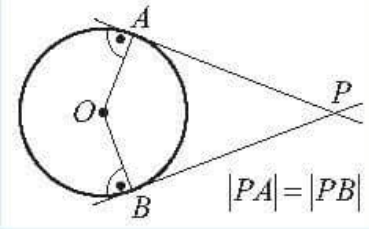
Jeżeli odległości punktu P od ramion kąta są równe, czyli $|PA|=|PB|$,



to punkt P należy do dwusiecznej kąta.

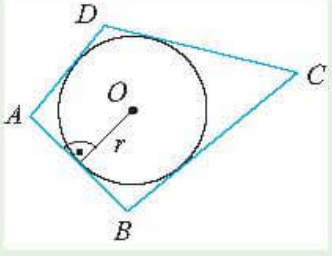
Twierdzenie o odcinkach stycznych

Odcinki dwóch stycznych poprowadzone do okręgu z punktu zewnętrznego wyznaczone przez ten punkt i punkty styczności mają równe długości.



Definicja

Okrąg nazywamy wpisanym w czworokąt, jeżeli jest on styczny do wszystkich jego boków.

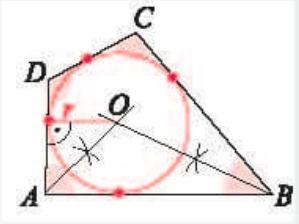


R

Okrąg wpisany w czworokąt oznacza to samo, co czworokąt opisany na okręgu.

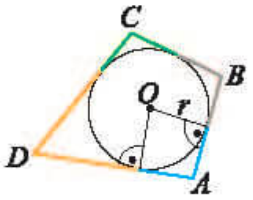
Uwaga

- Środek okręgu wpisanego w czworokąt jest punktem jednakowo odległym od jego boków, zatem jest on punktem przecięcia się dwusiecznych wszystkich jego kątów wewnętrznych.
- Okrąg można wpisać tylko w czworokąt wypukły.



Twierdzenie

Jeżeli okrąg jest wpisany w czworokąt wypukły, to sumy długości przeciwległych jego boków są równe.

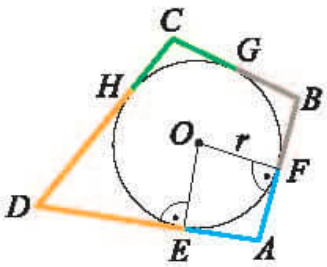


$$|AD|+|BC|=|AB|+|DC|$$

Z (***założenie***): Okrąg jest styczny do każdego z boków czworokąta wypukłego.

T (***teza***): $|AD|+|BC|=|AB|+|DC|$.

Dowód: Oznaczamy literami E, F, G, H punkty styczności okręgu odpowiednio do boków AD, AB, BC, CD.



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że:

$$|AE|=|AF|,\quad |ED|=|DH|,\quad |CG|=|CH|,\quad |BG|=|BF|.$$

Dodając powyższe równości stronami, otrzymujemy:

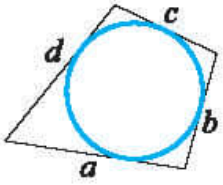
$$\underbrace{|AE|+|ED|}_{|AD|}+\underbrace{|BG|+|GC|}_{|BC|}=\underbrace{|AF|+|FB|}_{|AB|}+\underbrace{|DH|+|HC|}_{|DC|}.$$

Zatem $|AD|+|BC|=|AB|+|DC|$. ***c.n.u.***

Ćwiczenie 40. Sformułuj twierdzenie odwrotne do twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt wypukły.

Przykład 18. Czworokąt o bokach a, b, c, d jest opisany na okręgu. Wiedząc, że trzy jego boki mają długości równe 13 cm, 10 cm i 7 cm, oblicz długość czwartego boku.

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku. Jeżeli czworokąt o bokach a, b, c, d jest opisany na okręgu, to $a+c=b+d$, skąd $d=a+c-b$.

Gdy:

1° $b=10$ i ($a=13$ i $c=7$ lub $a=7$ i $c=13$), to $d=13+7-10=10$,

2° $b=7$ i ($a=10$ i $c=13$ lub $a=13$ i $c=10$), to $d=10+13-7=16$,

3° $b=13$ i ($a=7$ i $c=10$ lub $a=10$ i $c=7$), to $d=7+10-13=4$.

Odp.: Czwarty bok czworokąta może mieć długość: 10 cm lub 16 cm, lub 4 cm.

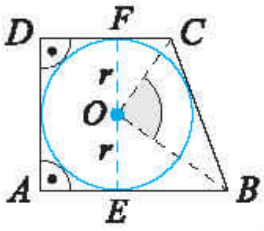
Ćwiczenie 41. Spośród czworokątów wymienionych poniżej wskaż te, w które można wpisać okrąg:

1 romb, który nie jest kwadratem, **2** równoległobok, który nie jest prostokątem,

3 prostokąt, który nie jest kwadratem, **4** kwadrat, **5** deltoid, który nie jest rombem.

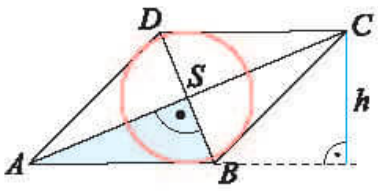
Ćwiczenie 42. Wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$ są punkty $A=(-4,-1)$, $B=(8,-1)$, $C=(5,3)$, $D=(-1,3)$. Sprawdź, czy w ten trapez można wpisać okrąg.

Ćwiczenie 43. Trapez prostokątny $ABCD$ opisano na okręgu o środku O i promieniu r. Wykaż, że $|\sphericalangle BOC|=90°$.



Przykład 19. Długości przekątnych rombu są równe 60 cm i 32 cm. Oblicz długość boku, pole rombu oraz promień okręgu wpisanego w ten romb.

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

W trójkącie prostokątnym BSA:

$|AB|^2=|AS|^2+|BS|^2$, gdzie $|AS|=30\text{cm}$, $|BS|=16\text{cm}$,

$|AB|^2=30^2+16^2$, skąd $|AB|=34$.

Obliczamy pole rombu:

$$P=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|, \text{ czyli } P=\frac{60\cdot 32}{2}=960.$$

$P=|AB|h$ oraz $r=\frac{1}{2}h$, więc

$$r=\frac{P}{2|AB|}, \text{ czyli } r=\frac{960}{2\cdot 34}, \text{ więc } r=14\frac{2}{17}.$$

Odp.: Bok rombu ma długość 34 cm, pole rombu jest równe 960 cm^2, promień okręgu wpisanego w romb jest równy $14\frac{2}{17}$ cm.

Ćwiczenie 44. Bok rombu ma długość 5, a jego kąt ostry ma miarę 60°. Oblicz pole rombu i promień okręgu wpisanego w ten romb.

Przykład 20. W trapez równoramienny, którego ramię ma długość 14 cm, wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu wpisanego w trapez dzieli jego ramię w stosunku 4 : 3. Oblicz promień tego okręgu.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, gdzie punkt O jest środkiem okręgu.

Dane: $|AD|=14$ cm,
K – punkt styczności okręgu do boku AD,
$|AK|:|KD|=4:3$.

Obliczyć: r – promień okręgu wpisanego.

Zauważmy, że

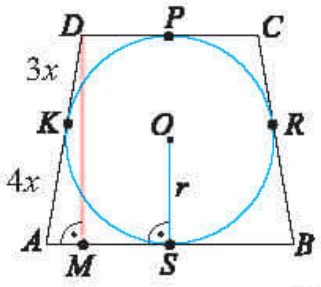
$$|AD|=|AK|+|KD|,\quad \frac{|AK|}{|KD|}=\frac{4}{3}\ \text{ i }\ |AK|+|KD|=14.$$

Możemy przyjąć, że

$|AK|=4x$ i $|KD|=3x$, więc

$4x+3x=14$, skąd

$|AK|=8$ i $|KD|=6$.



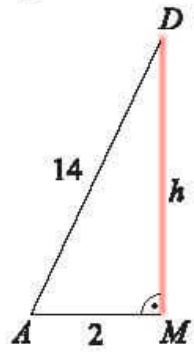
Trapez $ABCD$ jest równoramienny i opisany na okręgu, więc

$$|AK|=|AS|=8\ \text{ i }\ |KD|=|DP|=6.$$

Punkty P i S są środkami podstaw trapezu, więc

$$|AB|=16\ \text{ i }\ |DC|=12,$$

$$|AM|=\frac{16-12}{2}=2\ \text{ i }\ |DM|=h=2r.$$



W trójkącie prostokątnym AMD:

$$h^2+|AM|^2=|AD|^2,\ \text{skąd}\ \ h^2=|AD|^2-|AM|^2,\ \text{więc}$$

$$h=\sqrt{14^2-2^2}=\sqrt{192}=8\sqrt{3},$$

$$h=2r,\ \text{czyli}\ \ r=4\sqrt{3}.$$

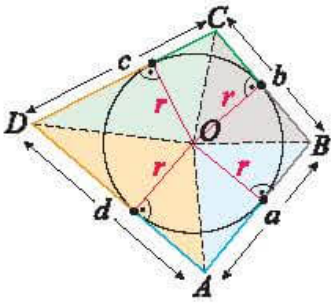
Odp.: Promień okręgu wpisanego w trapez jest równy $4\sqrt{3}$ cm.

Ćwiczenie 45. W trapez równoramienny, którego ramię ma długość 24 cm, wpisano okrąg. Punkt styczności okręgu wpisanego w ten trapez dzieli jego ramię w stosunku 5 : 3. Oblicz promień tego okręgu.

Twierdzenie

Pole P czworokąta wypukłego o bokach długości a, b, c, d opisanego na okręgu o promieniu r określone jest wzorem

$$P = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r .$$



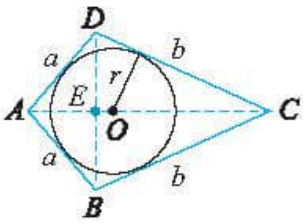
$P = p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

Ćwiczenie 46. Udowodnij wyżej sformułowane twierdzenie.

Ćwiczenie 47. W trapezie równoramiennym opisanym na okręgu o promieniu 3 dolna podstawa jest trzy razy dłuższa niż górna. Oblicz:
a) długość górnej podstawy trapezu, **b)** pole trapezu.

Ćwiczenie 48. Długości kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu o promieniu 10 podano w postaci wyrażeń: $x+4,\ 2x+7,\ 3x+10,\ 4x+5$. Oblicz pole tego czworokąta.

Ćwiczenie 49. **a)** Uzasadnij, że jeżeli boki deltoidu mają długości a i b, a jego pole jest równe P, to promień r okręgu wpisanego w ten deltoid określony jest wzorem $r = \frac{P}{a+b}$.



b) Oblicz pole P i promień r koła wpisanego w deltoid $ABCD$, gdy $A=(1,-4),\ B=(3,-1),\ C=(1,3),\ D=(-1,-1)$.

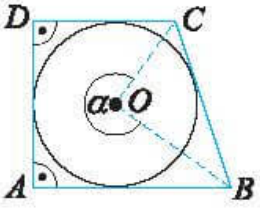
Odpowiedzi do ćwiczeń

41. **1**, **4**, **5**. 42. Nie. 43. *Wskazówka.* Zauważ, że $|\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle ABC| = 180°$ (dlaczego?) oraz środek okręgu wpisanego w czworokąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych jego kątów wewnętrznych.
44. $P = \frac{25\sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{5\sqrt{3}}{4}$. 45. $3\sqrt{15}$. 46. *Wskazówka.* Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia o trójkącie.
47. **a)** $2\sqrt{3}$, **b)** $24\sqrt{3}$. 48. $P = 180$. 49. **b)** $P = 14$, $r = 2\left(2\sqrt{5} - \sqrt{13}\right)$. *Wskazówka.* Zauważ, że przekątne deltoidu przecinają się pod kątem prostym, bo trójkąty BAD i DCB są równoramienne o podstawie BD i dwusieczne kątów BAD i BCD zawierają ich wysokości AE i CE.

Zadania utrwalające

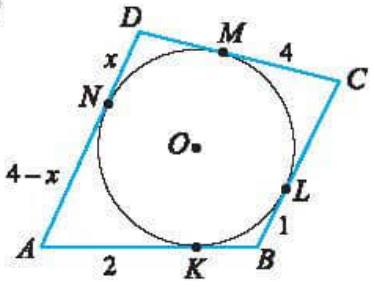
6.47. Obwód czworokąta wypukłego jest równy 26. Zaproponuj długości boków tego czworokąta tak, by można było w ten czworokąt wpisać okrąg.

6.48. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu wpisanego w trapez, i oblicz miarę kąta środkowego α.

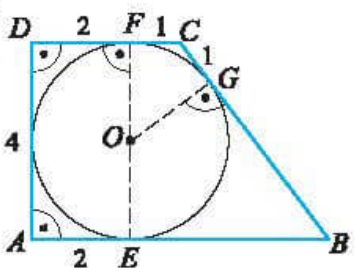


6.49. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$, i oblicz długości boków tego czworokąta.

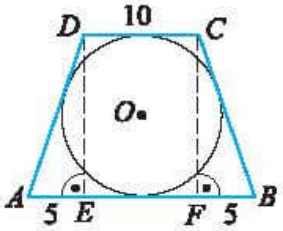
a)



b)



c)



6.50. Stosunek długości trzech kolejnych boków czworokąta opisanego na okręgu jest równy 3 : 2 : 1. Oblicz długości wszystkich boków czworokąta, wiedząc, że jego obwód jest równy 56 cm.

6.51. Trapez jest opisany na okręgu o promieniu 5. Suma długości jego ramion jest równa 25. Oblicz pole tego trapezu.

6.52. D W trapezie równoramiennym jedna podstawa jest trzy razy dłuższa od drugiej, a długość drugiej podstawy jest połową długości ramienia. Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.

6.53. Przekątna kwadratu ma długość $10\sqrt{2}$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten kwadrat.

6.54. Na kole opisano trapez o kątach przy podstawie równych $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{\pi}{3}$. Oblicz stosunek obwodu tego trapezu do długości jego wysokości.

6.55. Oblicz promień okręgu wpisanego w romb, w którym:

a) długości przekątnych są równe 24 i 18,

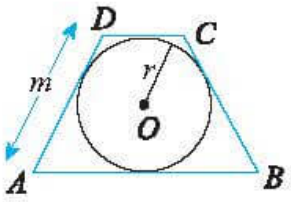
b) bok ma długość 10 i kąt ostry ma miarę 45°,

c) bok ma długość 13 i jedna z przekątnych ma długość 24.

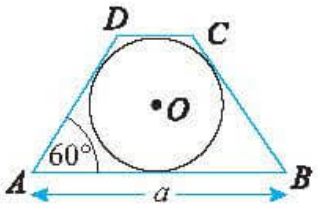
6.56. D W rombie przekątne mają długości p i q. Uzasadnij, że promień r okręgu wpisanego w ten romb określony jest wzorem $r = \frac{p \cdot q}{2\sqrt{p^2 + q^2}}$.

6.57. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu wpisanego w trapez równoramienny, i oblicz pole tego trapezu.

a)



b)

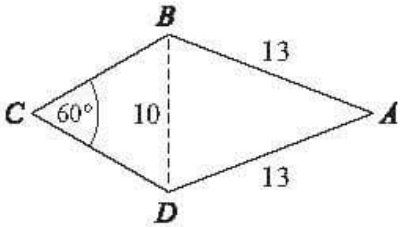


6.58. W trapezie równoramiennym podstawy mają długości a i b. Wykaż, że jeżeli w ten trapez można wpisać okrąg, to długość wysokości tego trapezu określona jest wzorem $h=\sqrt{a\cdot b}$.

6.59. Przekątne czworokąta mają tę samą długość równą 6. Przekątne te przecinają się pod kątem prostym. Punkt przecięcia się przekątnych jest środkiem jednej z nich, a drugą dzieli w stosunku 1 : 2. Określ rodzaj tego czworokąta. Oblicz jego pole, obwód i promień okręgu wpisanego w ten czworokąt.

6.60. W deltoid o polu 51 cm^2 wpisano okrąg o promieniu 3 cm. Oblicz obwód deltoidu.

6.61. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz promień okręgu wpisanego w deltoid $ABCD$.



6.62. Wierzchołkami czworokąta $ABCD$ są punkty $A=(1,3)$, $B=(2,1)$, $C=(3,3)$, $D=(2,5)$.

a) Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ jest rombem.

b) Napisz równanie okręgu wpisanego w ten czworokąt.

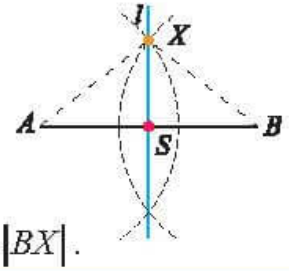
6.63. Punkty $A=(2,1)$, $B=(0,7)$ są kolejnymi wierzchołkami rombu $ABCD$, a punkt $S=\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ jest jego środkiem symetrii. Napisz równanie okręgu wpisanego w ten romb.

Okrąg opisany na czworokącie

Przypomnijmy

Definicja

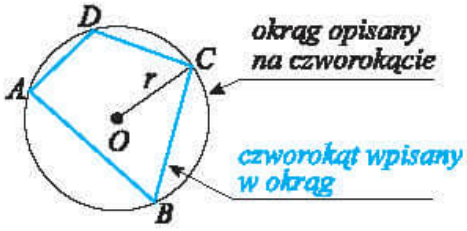
Symetralną odcinka nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka, która dzieli go na połowy.



- Środek odcinka należy do jego symetralnej.
- Jeżeli punkt X należy do symetralnej odcinka AB, to $|AX|=|BX|$.

Definicja

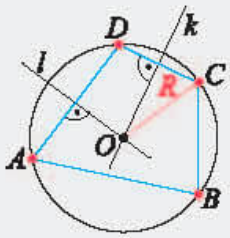
Okrąg nazywamy opisanym na czworokącie, gdy wszystkie wierzchołki czworokąta leżą na okręgu.



Okrąg opisany na czworokącie oznacza to samo, co czworokąt wpisany w okrąg.

Uwaga

- Środek okręgu opisanego na czworokącie jest punktem jednakowo odległym od jego wierzchołków. Jest on punktem przecięcia się symetralnych wszystkich jego boków.
- Okrąg można opisać tylko na czworokącie wypukłym.

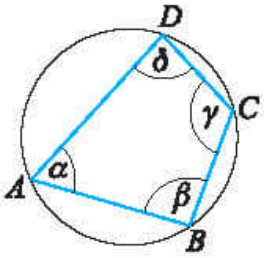


l, k – symetralne boków

Twierdzenie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych jest równa 180°.

$$\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$$

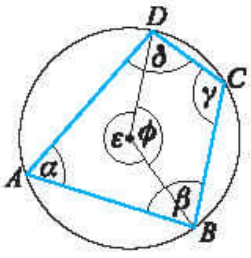


Uzasadnimy, że gdy na czworokącie o kolejnych kątach wewnętrznych α, β, γ, δ opisano okrąg, to $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$.

Z (***założenie***): Na czworokącie *ABCD* opisano okrąg. | *T* (***teza***): $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$.

Dowód:

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, gdzie ε i ϕ są kątami środkowymi i uwzględniając, że kąt wpisany w okrąg jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku:



$$\alpha=\frac{1}{2}\phi \text{ i } \gamma=\frac{1}{2}\varepsilon, \text{ skąd } \phi=2\alpha \text{ i } \varepsilon=2\gamma.$$

$$\phi+\varepsilon=360^\circ, \text{ więc}$$

$$2\alpha+2\gamma=360^\circ, \text{ skąd}$$

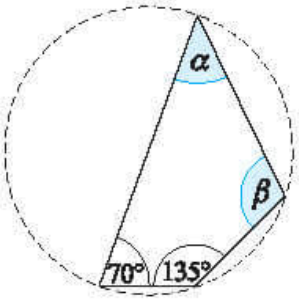
$$\alpha+\gamma=180^\circ.$$

Zatem $\beta+\delta=360^\circ-(\alpha+\gamma)=180^\circ$. ***c.n.u.***

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Przykład 21. Wiedząc, że dwa kąty czworokąta wpisanego w okrąg mają miary równe 70° i 135°, oblicz miary pozostałych kątów.

Rozwiązanie



Kąty o miarach 70° i 135° nie mogą być kątami przeciwległymi, bo $70°+135°=205°$ $(205°\neq 180°)$.

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

$\alpha+135°=180°$ i $\beta+70°=180°$, skąd

$\alpha=45°$ i $\beta=110°$.

Odp.: Kątem przeciwległym do kąta o mierze 70° jest kąt o mierze 110°, a kątem przeciwległym do kąta o mierze 135° jest kąt o mierze 45°.

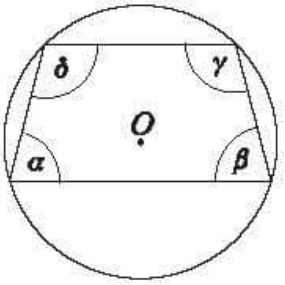
Ćwiczenie 50. Sprawdź, czy na czworokącie można opisać okrąg, gdy miary trzech jego kątów wewnętrznych są równe: **a)** 102°, 62°, 78°, **b)** 116°, 100°, 74°.

Ćwiczenie 51. Sprawdź, czy na czworokącie o podanych kolejnych kątach, gdzie $\alpha>0$, można opisać okrąg.

a) α, 2α, 3α, 4α, **b)** 2α, α, 4α, 5α, **c)** 3α, 4α, 3α, 2α.

Przykład 22. Jeden z kątów trapezu wpisanego w okrąg o środku O ma miarę 60°. Oblicz miary pozostałych kątów tego trapezu. Jaki to rodzaj trapezu?

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg:

$\alpha+\gamma=180°$ i $\beta+\delta=180°$.

Jeśli $\alpha=60°$, to $\gamma=180°-60°=120°$.

Zauważamy, że $\left.\begin{array}{l}\alpha+\delta=180°\\ \beta+\gamma=180°\end{array}\right\}$ *jako suma kątów przyległych do tego samego ramienia*

stąd $\delta=180°-60°=120°$,

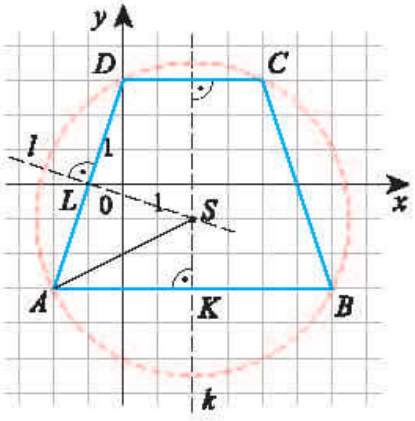
$\beta=180°-\gamma=60°$.

Odp.: $\alpha=60°$, $\beta=60°$, $\delta=120°$, $\gamma=120°$. Jest to trapez równoramienny.

Ćwiczenie 52. Trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD, takich że $|AB|=20$, $|CD|=12$, wpisano w okrąg o średnicy AB. Oblicz długość ramion tego trapezu.

Ćwiczenie 53. Na trapezie $ABCD$ opisano okrąg o promieniu 4. Oblicz długości przekątnych tego trapezu, wiedząc, że jeden z jego kątów ma miarę $60°$, a jedna z podstaw tego trapezu jest średnicą okręgu.

Przykład 23. Punkty A, B, C, D, gdzie $A=(-2,-3)$, $B=(6,-3)$, $C=(4,3)$, $D=(0,3)$, są wierzchołkami trapezu równoramiennego. Oblicz współrzędne środka okręgu opisanego na tym trapezie i napisz jego równanie.



Rozwiązanie

Zauważamy, że środek S okręgu o promieniu R, opisanego na trapezie $ABCD$, jest punktem przecięcia się symetralnych jego boków, np. boków AB i AD.

- Symetralna k boku AB jest prostopadła do osi x oraz przechodzi przez punkt K, gdzie $K=(2,-3)$, więc jej równanie ma postać $x=2$.
- Symetralna l boku AD przechodzi przez jego środek L, gdzie $L=(-1,0)$, i jest prostopadła do prostej AD.
- Z warunku $m_l \cdot m_{AD}=-1$, gdzie $m_{AD}=\dfrac{y_D-y_A}{x_D-x_A}=3$, wynika, że $m_l=-\dfrac{1}{3}$.

  Zatem $y-y_L=m_l(x-x_L)$, czyli $y-0=-\dfrac{1}{3}(x+1)$, więc $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$.
- Obliczamy współrzędne środka S okręgu:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}.$$

- Obliczamy promień R okręgu:

$$R=|AS|=\sqrt{(x_S-x_A)^2+(y_S-y_A)^2}=\sqrt{(2+2)^2+(-1+3)^2}=2\sqrt{5}.$$

Odp.: $S=(2,1)$, $R=2\sqrt{5}$, $(x-2)^2+(y+1)^2=20$.

Ćwiczenie 54. Punkty $A=(-1,-2)$, $B=(3,-2)$, $C=(5,2)$ i $D=(-3,2)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Sprawdź, czy czworokąt ten jest trapezem oraz czy można wpisać go w okrąg. Jeśli tak, to oblicz współrzędne środka i promień okręgu opisanego na tym czworokącie oraz napisz równanie tego okręgu.

Ćwiczenie 55. Spośród czworokątów oznaczonych cyframi od **1** do **8** wskaż te, na których można opisać okrąg.

1 prostokąt, który nie jest kwadratem, **2** kwadrat,
3 romb, który nie jest kwadratem,
4 równoległobok, który nie jest prostokątem, **5** trapez nierównoramienny,
6 trapez równoramienny, który nie jest równoległobokiem, **7** trapez prostokątny.

Uwaga

- Na każdym prostokącie i kwadracie można opisać okrąg.
- Promień R okręgu opisanego na prostokącie i kwadracie określony jest wzorem $R=\frac{1}{2}d$, gdzie d to długość przekątnej.

Ćwiczenie 56. Oblicz promień okręgu opisanego na prostokącie $ABCD$ o bokach $|AB|=20$ oraz $|AD|=10$.

Ćwiczenie 57. Punkty $A=(2,3)$ i $B=(4,-1)$ są kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym kwadracie.

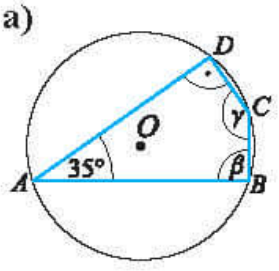
Ćwiczenie 58. Skonstruuj dowolny trapez równoramienny i opisz na nim okrąg.

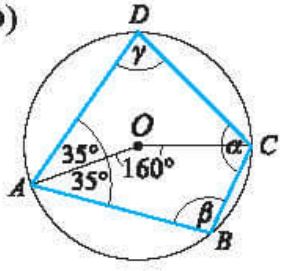
Odpowiedzi do ćwiczeń

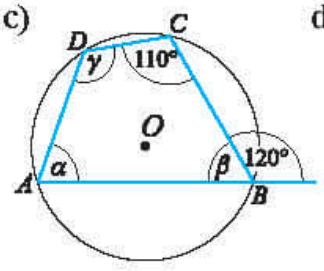
50. **a)** Tak, gdy czwarty kąt ma miarę 118°, **b)** nie. 51. **a)** Nie, **b)** tak, **c)** tak. 52. $4\sqrt{5}$. 53. $4\sqrt{3}$.
54. $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{65}{4}$. 55. **1**, **2**, **6**. 56. $5\sqrt{5}$. 57. $\sqrt{10}$.

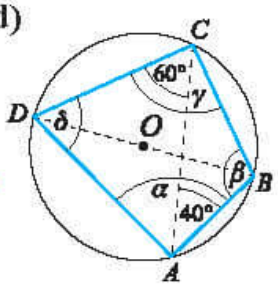
Zadania utrwalające

6.64. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku i oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O.

a)


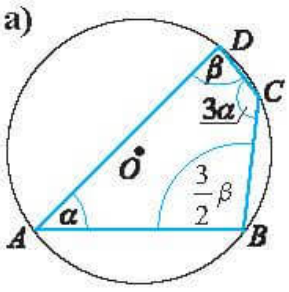
b)


c)


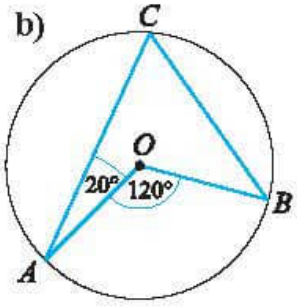
d)


6.65. Uwzględnij dane przedstawione na rysunku, gdzie O jest środkiem okręgu, i określ, czy czworokąt jest wpisany w okrąg. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego czworokąta.

a)



b)



6.66. Rozstrzygnij, czy czworokąt można wpisać w okrąg, jeśli stosunek miar jego kolejnych kątów wewnętrznych jest równy:

a) $7:10:11:8$, **b)** $16:13:2:5$, **c)** $1:4:7:6$.

6.67. D Wiedząc, że w czworokącie $ABCD$ kolejne kąty to: $2\alpha+20°$, $3\alpha+10°$, $\alpha+80°$, $\alpha+40°$, oblicz ich miary. Sprawdź, czy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Odpowiedź uzasadnij.

6.68. Oblicz różnicę między długością okręgu o promieniu 1 m a obwodem kwadratu wpisanego w ten okrąg. W obliczeniach przyjmij: $\sqrt{2}\approx 1{,}4142$, $\pi\approx 3{,}1416$. Wynik podaj w przybliżeniu do 1 mm.

6.69. Obwód prostokąta $ABCD$ jest równy 20 m, a jego pole jest równe 24 m^2. Podobny do niego prostokąt $A_1B_1C_1D_1$ ma obwód 100 m. Oblicz promień okręgu opisanego na prostokącie $A_1B_1C_1D_1$.

6.70. D Punkty $A=(-4,2)$, $B=(2,-4)$, $C=(3,1)$ i $D=(1,3)$ są wierzchołkami trapezu $ABCD$.

a) Uzasadnij, że na trapezie $ABCD$ można opisać okrąg.

b) Napisz równanie okręgu opisanego na trapezie $ABCD$.

6.71. Na prostokącie opisano okrąg o promieniu R. Oblicz sumę kwadratów odległości dowolnego punktu tego okręgu od wszystkich prostych, w których zawierają się boki prostokąta.

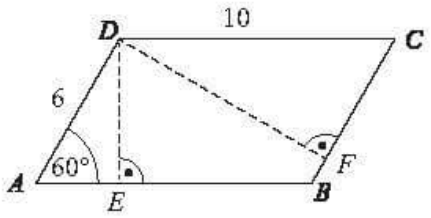
6.72. Oblicz promień R okręgu opisanego na prostokącie $ABCD$, gdy:

a) $|AB|=3$ i przekątne prostokąta przecinają się pod kątem 60°,

b) $|AB|=10$ i odległość wierzchołka D od przekątnej AC jest równa 6,

c) $\dfrac{|AB|}{|BC|}=\dfrac{4}{3}$ i $|AC|=10\cdot\sin\alpha$, gdzie $\alpha=|\sphericalangle CAB|$.

R D **6.73.** Boki równoległoboku $ABCD$ mają długości 6 i 10, a kąt ostry ma miarę $60°$. Punkty E i F są spodkami wysokości równoległoboku poprowadzonymi z wierzchołka D.



a) Uzasadnij, że na czworokącie $EBFD$ można opisać okrąg.

b) Oblicz promień R okręgu opisanego na czworokącie $EBFD$.

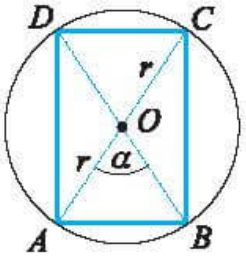
R D **6.74.** Wierzchołki czworokąta $ABCD$, którego boki mają długości a, b, c i d, leżą na okręgu o promieniu R. Jeden kąt tego czworokąta jest prosty. Udowodnij, że jeszcze co najmniej jeden kąt tego czworokąta jest prosty oraz że $a^2+b^2+c^2+d^2=8R^2$.

Rozwiązywanie zadań optymalizacyjnych z planimetrii*)

Optymalizacja to wyznaczenie spośród dopuszczalnych rozwiązań danego problemu takiego rozwiązania, które jest najlepsze ze względu na przyjęte kryterium.

Przykład 24. Uzasadnij, że spośród prostokątów wpisanych w okrąg o promieniu r największe pole ma kwadrat.

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku, gdzie $0°<\alpha<180°$.

Pole P prostokąta $ABCD$ można określić wzorem:

$$P=P_{\Delta AOB}+P_{\Delta BOC}+P_{\Delta COD}+P_{\Delta DOA}.$$

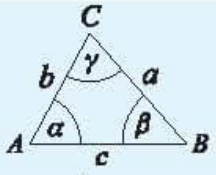
Zatem

$$P=\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}r^2\cdot\sin(180°-\alpha)+\frac{1}{2}r^2\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}r^2\cdot\sin(180°-\alpha),$$

czyli $P=2r^2\sin\alpha$.

Analizując otrzymany wzór $P=2r^2\sin\alpha$, zauważamy, że pole P prostokąta zależy tylko od wartości sinusa kąta α. Wartość $\sin\alpha$ jest największa, gdy $\alpha=90°$, więc pole P prostokąta $ABCD$ jest największe, gdy jego przekątne przecinają się pod kątem prostym. Prostokątem jest więc kwadrat o przekątnej $2r$ i boku $r\sqrt{2}$.

Prostokąt wpisany w okrąg o promieniu r ma największe pole, gdy jest kwadratem. ***c.n.u.***



$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$

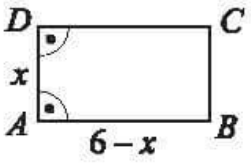
$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$

*) Planimetria – geometria na płaszczyźnie.

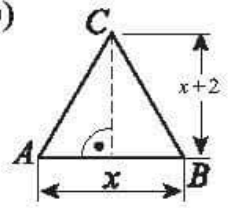
W klasie pierwszej obliczaliśmy optymalne (największe albo najmniejsze) wartości funkcji w ograniczonym przedziale. Obecnie zajmiemy się obliczaniem najmniejszych lub największych wymiarów figur płaskich poprzez tworzenie funkcji, której zmienną będzie jeden z wymiarów figury.

Ćwiczenie 59. Przyjmując oznaczenia i dane, jak na rysunku poniżej, wyraź pole P figury jako funkcję zmiennej x i określ jej dziedzinę.

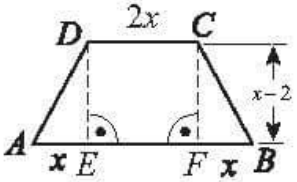
a)



b)

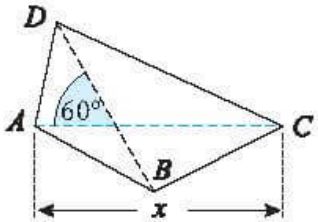


c)



Przykład 25. Suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest równa 10. Przekątne te przecinają się pod kątem 60°. Jakie powinny być długości tych przekątnych, by pole czworokąta było największe? Czy taki czworokąt jest tylko jeden?

Rozwiązanie



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku,

gdzie $|AC| = x$ i $|BD| = 10 - x$.

Zatem $P = \frac{1}{2} \cdot x(10-x) \cdot \sin 60°$

$P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha$

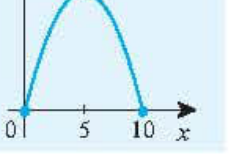
$$P(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x(10-x), \text{ gdzie } x \in (0;10).$$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pole P jest funkcją kwadratową zmiennej x o ujemnym współczynniku przy x^2, której wzór podany jest w postaci iloczynowej, gdzie $x_1 = 0$ i $x_2 = 10$.

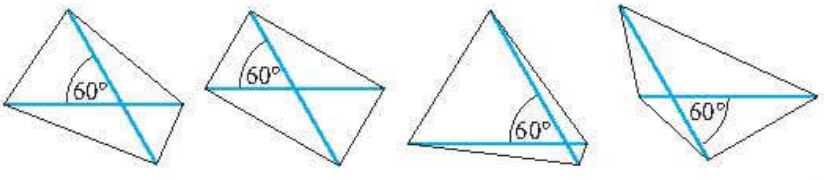
Funkcja P przyjmuje zatem największą wartość, gdy x jest równe współrzędnej x_W wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji P.

$P = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2}x$



$x_W = \frac{x_1 + x_2}{2} = 5$ i $5 \in (0;10)$, więc przekątne czworokąta mają długości $|AC| = |BD| = 5$.

Zauważamy, że czworokątów spełniających warunki zadania jest nieskończenie wiele. Oto przykłady kilku z nich.



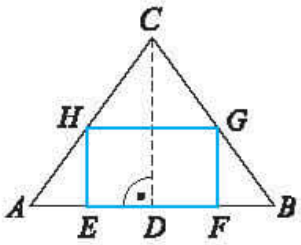
Ćwiczenie 60. Suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest równa 40. Przekątne te przecinają się pod kątem 30°. Oblicz, dla jakich długości przekątnych pole tego czworokąta jest największe, a następnie oblicz wartość tego największego pola.

Przykład 26. W trójkąt równoboczny, którego bok ma długość 8, wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na jednym boku trójkąta. Oblicz, jakie powinny być długości boków prostokąta, aby jego pole było największe.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku,
gdzie $|HE|=x$, $|EF|=y$ i $0<|HE|<|CD|$.

Odcinek CD jest wysokością trójkąta równobocznego ABC,
więc $|CD|=4\sqrt{3}$. Zatem $x\in\left(0;4\sqrt{3}\right)$.



Dane: $|AB|=|BC|=|AC|=8$. | ***Obliczyć***: wymiary prostokąta $EFGH$, którego pole jest największe.

$|AD|=\frac{1}{2}|AB|=4$, $|AE|=4-\frac{1}{2}y$ i $\Delta ADC\sim\Delta AEH$ (kkk),

więc $\frac{|CD|}{|AD|}=\frac{|HE|}{|AE|}$, czyli $\frac{4\sqrt{3}}{4}=\frac{x}{4-\frac{1}{2}y}$, skąd $y=8-\frac{2x}{\sqrt{3}}$.

Obliczamy pole P prostokąta $EFGH$.

$$P=xy=x\left(8-\frac{2}{\sqrt{3}}x\right),\ \text{gdzie}\ \ x\in\left(0;4\sqrt{3}\right).$$

Pole P jest funkcją zmiennej x, czyli $P(x)=x\left(8-\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}x^2+8x$.

Zauważamy, że P jest funkcją kwadratową o ujemnym współczynniku przy x^2, zatem funkcja P przyjmuje wartość największą, gdy

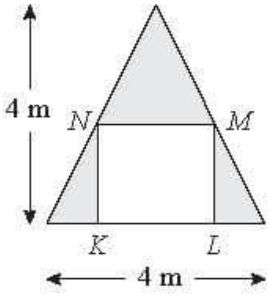
$$x_w=\frac{-8}{2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}=2\sqrt{3}\ \ \text{i}\ \ 2\sqrt{3}\in\left(0;4\sqrt{3}\right).$$

$x_w=-\frac{b}{2a}$

Gdy $x=2\sqrt{3}$, to $y=8-\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4$.

Odp.: Największe pole ma prostokąt, którego boki mają długości $2\sqrt{3}$ i 4.

Ćwiczenie 61. Szczytowa ściana strychu ma kształt trójkąta równoramiennego o podstawie 4 m i wysokości 4 m. Architekt dbając o to, by strych był dobrze oświetlony, zaprojektował okno w kształcie prostokąta, umieszczone w tej ścianie w sposób przedstawiony na rysunku. Podaj wymiary okna, które będzie przepuszczało najwięcej światła.



Odpowiedzi do ćwiczeń

59. a) $P(x)=x\cdot(6-x)$, $x\in(0;6)$, b) $P(x)=\frac{1}{2}x\cdot(x+2)$, $x\in(0;+\infty)$, c) $P(x)=3x\cdot(x-2)$, $x\in(2;+\infty)$.

60. Przekątne mają taką samą długość, równą 20, $P=100$. 61. Okno ma kształt kwadratu o boku 2 m.

Zadania utrwalające

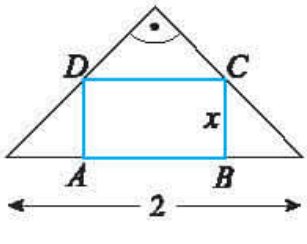
6.75. Z drutu o długości 4 dm wykonano prostokątną ramkę. Jakie powinny być wymiary ramki, aby pole obszaru ograniczonego ramką było największe?

6.76. Szyba w oknie ma kształt prostokąta o obwodzie 6 m. Jakie są jej wymiary, jeśli wiadomo, że szyba przepuszcza maksymalną ilość światła? Oblicz powierzchnię szyby w oknie.

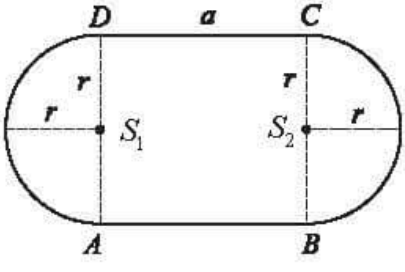
6.77. Ogródek w kształcie prostokąta, przylegający do płotu, jest z trzech stron ogrodzony siatką o długości 36 m. Jakie są wymiary ogródka, jeśli wiadomo, że jego pole powierzchni jest największe?

6.78. W prostokącie o wymiarach $20\,\text{cm}\times 30\,\text{cm}$ pierwszy wymiar zwiększono o x cm, a drugi zmniejszono o x cm. Oblicz, dla jakiej wartości x pole otrzymanego prostokąta jest największe. Oblicz to największe pole.

6.79. W trójkąt równoramienny prostokątny o przeciwprostokątnej długości 2 dm wpisano prostokąt $ABCD$, którego bok AB zawiera się w przeciwprostokątnej, natomiast punkty C i D należą do przyprostokątnych tego trójkąta. Oblicz wymiary tego prostokąta o największym polu.



6.80. Kształt projektowanego stadionu o obwodzie 1 400 m przedstawiono na rysunku. Wyznacz takie wymiary r i a, dla których powierzchnia prostokątnej części stadionu będzie największa.



6.81. Drut o długości 100 cm przecięto na dwie części. Pierwszą część wygięto tak, że utworzyła ramkę w kształcie kwadratu, z drugiej części utworzono ramkę w kształcie prostokąta, w którym jeden bok jest cztery razy dłuższy od drugiego. Oblicz długość każdej z części drutu, jeśli wiadomo, że suma pól powstałych figur ograniczonych ramkami jest minimalna.

6.82. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 45°, a suma długości wysokości i dłuższej podstawy jest równa 12. Oblicz długości boków tego trapezu, wiedząc, że jego pole ma największą z możliwych wartości.

6.83. Suma przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 6. Oblicz najmniejszą długość przeciwprostokątnej, jaką może mieć ten trójkąt.

Zestaw powtórkowy

1. W rombie przekątne mają długość 8 i 12.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość boku tego rombu jest równa:

A. $\sqrt{13}$, **B.** $2\sqrt{13}$, **C.** $3\sqrt{13}$, **D.** $4\sqrt{13}$.

2. Boki równoległoboku mają długości 5 i 7, a wysokość poprowadzona na dłuższy bok ma długość 3.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Druga wysokość tego równoległoboku jest równa:

A. 2,1, **B.** 4,1, **C.** 4,2, **D.** 6,2.

3. Kolejne boki czworokąta wypukłego $ABCD$ mają długości $|AB|=1$, $|BC|=2$, $|CD|=3$, $|AD|=4$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

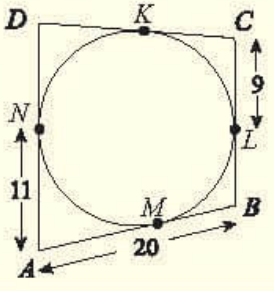
Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.	P	F
Równe pola mają okręgi opisane na trójkątach ABD i BCD.	P	F

4. Obwód czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku jest równy 70.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość boku DC jest równa:

A. 6, **B.** 11, **C.** 15, **D.** 20.

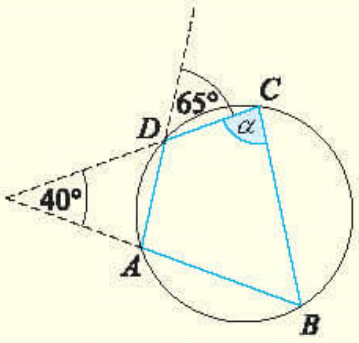


5. Czworokąt $ABCD$ przedstawiony na rysunku jest wpisany w okrąg.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

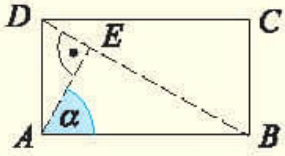
Miara kąta α jest równa:

A. 65°, **B.** 70°, **C.** 75°, **D.** 105°.



6. W prostokącie $ABCD$ przekątna BD jest dwa razy dłuższa niż bok AD. Miara kąta α jest równa

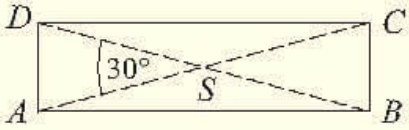
A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°



7. W prostokącie $ABCD$ przekątne mają długość 12.

Czy pole tego prostokąta jest równe $18\left(1+\sqrt{3}\right)$?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.



T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$P_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12\cdot \sin 30^\circ = 36.$
N	**Nie,**		**B.**	$P_{\Delta ASD}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot \sin 30^\circ = 9$ i $P_{\Delta DSC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot 150^\circ = 9\sqrt{3}$, więc $P_{ABCD}=2\cdot 9+2\cdot 9\sqrt{3}=18\left(1+\sqrt{3}\right).$

8. W równoległoboku $ABCD$ przekątna DB ma długość 7. Wiedząc, że obwód równoległoboku wynosi 26, $\left|\sphericalangle ABC\right|=120^\circ$. Czy boki a i b równoległoboku $ABCD$ mają długość 8 i 5?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$a+b=13$ i $\left\|\sphericalangle BAD\right\|=60^\circ$. $49=a^2+(13-a)^2-2a(13-a)\cdot\cos 60^\circ$, skąd $a\neq 8$ i $a\neq 5$.
N	**Nie,**		**B.**	$a+b=13$ i $\left\|\sphericalangle BAD\right\|=60^\circ$. $49=a^2+(13-a)^2-2a(13-a)\cdot\cos 60^\circ$, skąd $a=8$ i $b=5$ lub $a=5$ i $b=8$.

7. Ciągi liczbowe

Pojęcie ciągu liczbowego

Ustawienie uczniów w szeregu według pewnej zasady (np. wg wzrostu) ustala ich kolejność w tym szeregu. Na przykład: „Pięciu najwyższych uczniów z klasy wytypowano do szkolnej reprezentacji koszykówki. Wzrost poszczególnych uczniów podany w centymetrach to:

190,5; 176,3; 184; 180; 178".

Ustawiono ich od najwyższego do najniższego, co ilustruje poniższa tabelka.

Numer miejsca, na którym stał uczeń (n)	1	2	3	4	5
Wzrost w cm (a_n)	190,5	184	180	178	176,3

Określono w ten sposób funkcję a, która liczbom naturalnym zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ przyporządkowuje liczby rzeczywiste.

$1 \rightarrow 190{,}5$ *co zapisujemy* $a_1 = a(1) = 190{,}5$

$2 \rightarrow 184$ *co zapisujemy* $a_2 = a(2) = 184$

$3 \rightarrow 180$ *co zapisujemy* $a_3 = a(3) = 180$

$4 \rightarrow 178$ *co zapisujemy* $a_4 = a(4) = 178$

$5 \rightarrow 176{,}3$ *co zapisujemy* $a_5 = a(5) = 176{,}3.$

Liczby wyrażające wzrost poszczególnych uczniów ustawionych na kolejnych miejscach, nazywamy wyrazami ciągu i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

Definicja

Ciągiem liczbowym skończonym nazywamy funkcję określoną w zbiorze liczb naturalnych dodatnich $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.

Najczęściej funkcje będące ciągami oznaczamy małymi literami alfabetu a, b, c, d.

Zapisy $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$, $d(n)$ oznaczają funkcje a, b, c i d zmiennej n, gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią.

Przyjęto następujące oznaczenia dla opisu funkcji będących ciągami:

$a(n) = a_n$ – oznacza, że $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$, ..., $a(n) = a_n$,

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – oznacza wartości funkcji nazywane **wyrazami ciągu liczbowego**,

$a_n = a(n)$ – oznacza wzór na n-ty wyraz ciągu lub wyraz ogólny ciągu,

$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ lub (a_n) – oznacza ciąg a_n.

Na przykład kolejne liczby naturalne dwucyfrowe 10, 11, …, 99 tworzą skończony ciąg liczbowy $(10, 11, \ldots, 99)$, w którym

$a_1 = 10,\ a_2 = 11,\ \ldots,\ a_{90} = 99$, czyli $a_n = n + 9$, gdzie $n \in \{1, 2, \ldots, 90\}$.

Ćwiczenie 1. Podaj pięć początkowych wyrazów i ostatni wyraz ciągu, który tworzą kolejne lata XX wieku.

Przykład 1. Liczbom naturalnym dodatnim przyporządkuj kolejne przybliżenia dziesiętne wartości ilorazu 1:3. Rozpocznij od przybliżenia $\frac{1}{3} = 0{,}3$.

Rozwiązanie

Numer kolejnego (n) przybliżenia	1	2	3	4	…
Wartość kolejnego a_n przybliżenia	0,3	0,33	0,333	0,3333	…

$1 \rightarrow 0{,}3$ *co zapisujemy* $a_1 = 0{,}3$

$2 \rightarrow 0{,}33$ *co zapisujemy* $a_2 = 0{,}33$

$3 \rightarrow 0{,}333$ *co zapisujemy* $a_3 = 0{,}333$.

. . . . . .

Określiliśmy funkcję a, taką że $a: \boldsymbol{N}^+ \rightarrow \boldsymbol{R}$, której argumentami są kolejne dodatnie liczby naturalne, a jej wartościami kolejne przybliżenia dziesiętne ilorazu 1 : 3.

Wartości funkcji a dla kolejnych argumentów nazywamy wyrazami ciągu, które oznaczamy $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, gdzie $a_n = 0,\underbrace{333\ldots3}_{n \text{ cyfr}}$.

Definicja

Ciągiem liczbowym nieskończonym nazywamy funkcję a określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich N^+, o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$ i oznaczamy (a_n) lub $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.

- $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – kolejne wyrazy ciągu (a_n),
- a_n – n-ty wyraz ciągu (a_n).

Na przykład kolejne liczby naturalne dodatnie 1, 2, 3, … tworzą nieskończony ciąg liczbowy (a_n), w którym n-ty wyraz ciągu a_n określony jest wzorem $a_n = n$.

Ćwiczenie 2. Podaj cztery początkowe wyrazy ciągu, w którym wyraz a_1 jest równy:

a) 5, a każdy następny wyraz jest trzykrotnie większy niż poprzedni,

b) –8, a każdy następny wyraz jest o 2 większy od poprzedniego,

c) $\frac{1}{2}$, a każdy następny wyraz jest dwukrotnie mniejszy od poprzedniego.

Przykład 2. Pitagoras i jego uczniowie obliczali kolejne przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ według pewnej reguły.

$$p_1 = \frac{3}{2}$$

$$p_2 = \frac{3+2\cdot 2}{3+2} = \frac{7}{5}$$

$$p_3 = \frac{7+2\cdot 5}{7+5} = \frac{17}{12}$$

$$p_4 = \frac{17+2\cdot 12}{17+12} = \frac{41}{29}$$

. . . . . .

$$p_n = \frac{l_{n-1}+2\cdot m_{n-1}}{l_{n-1}+m_{n-1}},$$ gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – kolejne przybliżenia liczby $\sqrt{2}$,

l_{n-1} – licznik przybliżenia p_{n-1},

m_{n-1} – mianownik przybliżenia p_{n-1}.

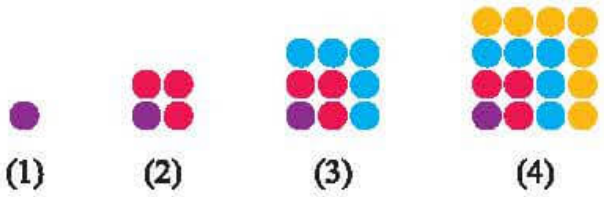
Wynik z kalkulatora

$\sqrt{2}=$	1,414213562373095048801688724209 7
$p_1=$	1,5
$p_2=$	1,4
$p_3=$	1,41666666666666666666666666666667
$p_4=$	1,41379310344827586206896551724 14
$p_5=$	1,41428571428571428571428571428 57
$p_6=$	1,41420118343195266272189349112 43

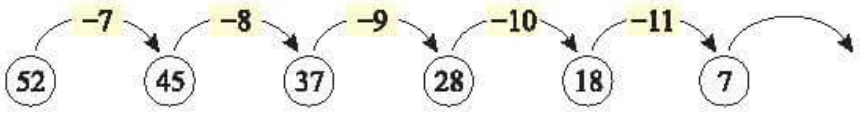
Ćwiczenie 3. Skorzystaj z danych zawartych w powyższym przykładzie i oblicz przybliżenia p_5, p_6, p_7 liczby $\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 4. Figury przedstawione na rysunku składają się z kół. Ustal regułę tworzenia tych figur i dorysuj dwie następne figury według tej reguły.

Określ funkcję f, która każdej liczbie naturalnej dodatniej n przyporządkowuje liczbę kół potrzebnych do narysowania figury (n).



Ćwiczenie 5. Poniższy graf ilustruje sposób wyznaczania kolejnych wyrazów pewnego ciągu liczbowego (a_n).



Wyznacz wyrazy ciągu (a_n) od siódmego do jedenastego.

Przykłady i sposoby określania ciągu

Ciąg liczbowy można określić tak jak każdą funkcję. Ciąg uważa się za określony, jeżeli znamy przepis, według którego można wyznaczyć jego kolejne wyrazy. Prawo, według którego tworzymy wyrazy ciągu, podajemy w postaci przepisu słownego lub wzoru. Różne sposoby określania ciągu liczbowego omówimy na przykładach.

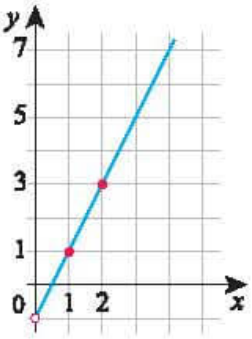
Przykład 3. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=2x-1$:

a) gdy $x \in R^+$, **b)** $x \in N^+$.

Który z wykresów funkcji jest wykresem ciągu?

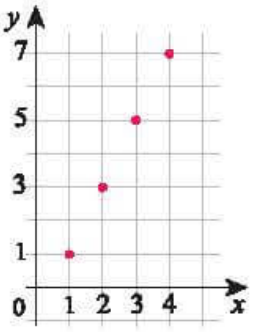
Rozwiązanie

a)



Wykresem funkcji f, gdy $x \in R^+$, jest półprosta bez początku.

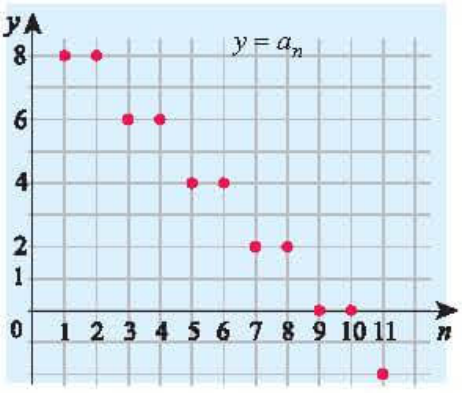
b)

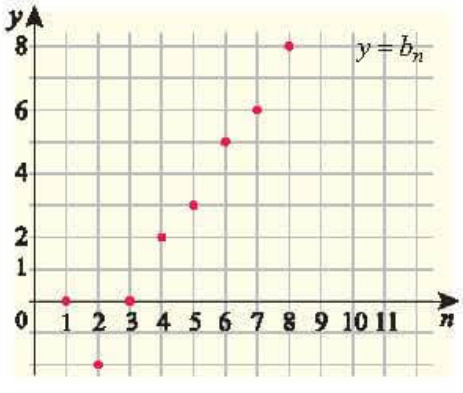


Wykresem funkcji f, gdy $x \in N^+$, jest zbiór punktów, których odcięte są liczbami naturalnymi dodatnimi.

Odp.: Wykresem ciągu jest wykres funkcji f z przykładu b).

Przykład 4. Na rysunku przedstawione są wykresy skończonych ciągów liczbowych (a_n) i (b_n).





a) Podaj dziedzinę D_a ciągu (a_n) oraz dziedzinę D_b ciągu (b_n).

b) Określ ciągi przez wypisanie ich kolejnych wyrazów.

Rozwiązanie

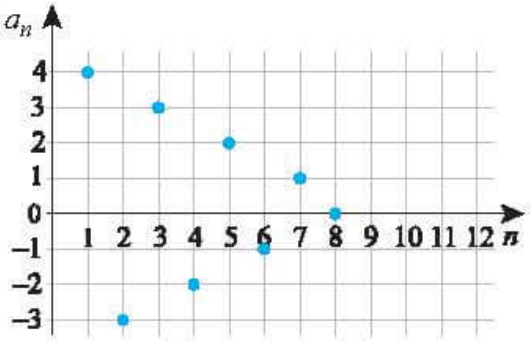
a) Dziedziną każdego ciągu jest podzbiór zbioru N^+.

$D_a=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $D_b=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

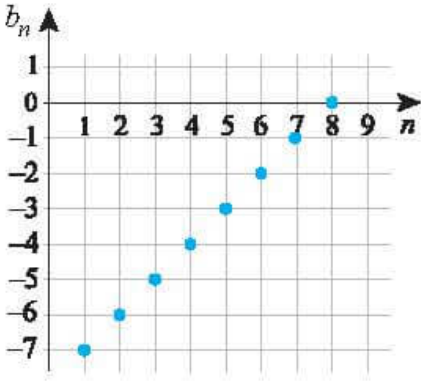
b) $(8, 8, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 0, 0, -2)$, $(0, -2, 0, 2, 3, 5, 6, 8)$.

Ćwiczenie 6. Na rysunkach **1** i **2** przedstawione są wykresy ciągów (a_n) i (b_n).

1



2



a) Podaj dziedzinę D_a ciągu (a_n) oraz dziedzinę D_b ciągu (b_n).

b) Określ ciągi poprzez wypisanie ich kolejnych wyrazów.

Przykład 5. Napisz pięć początkowych wyrazów ciągu, jeżeli jego n-ty wyraz określony jest wzorem:

a) $a_n = 3n-2$, **b)** $b_n = (-1)^n$, **c)** $c_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Rozwiązanie

a)

n	$a_n = 3n-2$
1	$a_1 = 3\cdot 1-2 = 1$
2	$a_2 = 3\cdot 2-2 = 4$
3	$a_3 = 3\cdot 3-2 = 7$
4	$a_4 = 3\cdot 4-2 = 10$
5	$a_5 = 3\cdot 5-2 = 13$

b)

n	$b_n = (-1)^n$
1	$b_1 = (-1)^1 = -1$
2	$b_2 = (-1)^2 = 1$
3	$b_3 = (-1)^3 = -1$
4	$b_4 = (-1)^4 = 1$
5	$b_5 = (-1)^5 = -1$

c)

n	$c_n = \dfrac{n}{n+1}$
1	$c_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$
2	$c_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$
3	$c_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$
4	$c_4 = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$
5	$c_5 = \dfrac{5}{5+1} = \dfrac{5}{6}$

Ćwiczenie 7. Wypisz pięć początkowych wyrazów ciągu, jeżeli jego n-ty wyraz określony jest wzorem:

a) $a_n = -n^2+1$, **b)** $b_n = 2\cdot(-1)^n$, **c)** $c_n = \dfrac{1}{n^2+2n+1}$.

Przykład 6. Ustal regułę wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu (a_n) i zachowując ją, podaj wzór na n-ty wyraz tego ciągu. Oblicz wyrazy a_{10} i a_{19} ciągu (a_n) o początkowych wyrazach: **a)** 1, 3, 5, 7, 9, …, **b)** 1, –1, 1, –1, 1, …, **c)** 2, 2, 2, … .

Rozwiązanie

Zauważmy, że kolejnymi wyrazami ciągu są:

a) liczby nieparzyste, **b)** potęgi liczby –1, **c)** liczby 2.

n	$(a_n)=(1,3,5,7,\ldots)$
1	$a_1=1=2\cdot 1-1$
2	$a_2=3=2\cdot 2-1$
3	$a_3=5=2\cdot 3-1$
4	$a_4=7=2\cdot 4-1$
..	.....
n	$a_n=2\cdot n-1$

n	$(a_n)=(1,-1,1,-1,\ldots)$
1	$a_1=1=(-1)^{1+1}$
2	$a_2=-1=(-1)^{2+1}$
3	$a_3=1=(-1)^{3+1}$
4	$a_4=-1=(-1)^{4+1}$
..	.....
n	$a_n=(-1)^{n+1}$

n	$(a_n)=(2,2,2,\ldots)$
1	$a_1=2$
2	$a_2=2$
3	$a_3=2$
..	.....
n	$a_n=2$

$a_{10}=2\cdot 10-1=19$
$a_{19}=2\cdot 19-1=37$

$a_{10}=(-1)^{10+1}=-1$
$a_{19}=(-1)^{19+1}=(-1)^{20}=1$

$a_{10}=2$
$a_{19}=2.$

Ćwiczenie 8. Ustal regułę wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu (a_n) i zachowując ją, podaj wzór na n-ty wyraz tego ciągu. Oblicz wyrazy a_8 i a_{20} ciągu (a_n) o początkowych wyrazach:

a) 2, 4, 6, 8, 10, … , **b)** $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$, **c)** $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots$.

Przykład 7. Wyznacz wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} ciągu a_n, gdy:

a) $a_n=-3n+6$, **b)** $a_n=n^2-4n$.

Rozwiązanie

a) $a_n=-3n+6$

$a_{n-1}=-3(n-1)+6=-3n+9$

$a_{n+1}=-3(n+1)+6=-3n+3,$

b) $a_n=n^2-4n$

$a_{n-1}=(n-1)^2-4(n-1)=n^2-6n+5$

$a_{n+1}=(n+1)^2-4(n+1)=n^2-2n-3.$

Ćwiczenie 9. Wyznacz wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n=-3$, **b)** $a_n=4n-1$, **c)** $a_n=-n^2+n$.

Ciąg liczbowy (a_n) możemy wyznaczyć, gdy znany jest wzór na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

Definicja

Sumą n początkowych wyrazów ciągu (a_n) nazywamy wyrażenie $\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n}$, gdzie $n \in N^+$.

$S_1 = a_1$	$a_1 = S_1$
$S_2 = \underbrace{a_1}_{S_1} + a_2 = S_1 + a_2$	$a_2 = S_2 - S_1$
$S_3 = \underbrace{a_1 + a_2}_{S_2} + a_3 = S_2 + a_3$	$a_3 = S_3 - S_2$
.....	.....
$S_{n-1} = \underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}}_{S_{n-2}} + a_{n-1} = S_{n-2} + a_{n-1}$	$a_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2}$
$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n = S_{n-1} + a_n$	$\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}$, gdy $n \geq 2$.

Przykład 8. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona jest wzorem $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) Oblicz wyrazy a_1, a_2, a_{20} ciągu (a_n).

b) Oblicz sumę $a_{10} + a_{11} + a_{12} + ... + a_{20}$ wyrazów tego ciągu (a_n).

c) Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu (a_n).

Rozwiązanie

a) $a_1 = S_1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)(2+1)}{6} = 1,$

$a_2 = S_2 - S_1 = \dfrac{2(2+1)(4+1)}{6} - \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = 4,$

$a_{20} = S_{20} - S_{19} = \dfrac{20(20+1)(2 \cdot 20+1)}{6} - \dfrac{19 \cdot (19+1) \cdot (2 \cdot 19+1)}{6} = 400.$

b) $a_{10} + a_{11} + a_{12} + ... + a_{20} = \underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_{20}}_{S_{20}} - \underbrace{(a_1 + a_2 + ... + a_9)}_{S_9} = S_{20} - S_9 =$

$= \dfrac{20(20+1)(2 \cdot 20+1)}{6} - \dfrac{9(9+1)(2 \cdot 9+1)}{6} = 2870 - 285 = 2585.$

c) $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)\cdot(n-1+1)[2(n-1)+1]}{6} = \frac{6n^2}{6} = n^2,$

czyli $a_n = n^2$, gdy $n \geq 2$.

Odp.: **a)** $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{20} = 400$, **b)** 2585, **c)** $a_n = n^2$.

Ćwiczenie 10. Oblicz wyrazy $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ ciągu (a_n), w którym suma n początkowych jego wyrazów określona jest wzorem:

a) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, **b)** $S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, **c)** $S_n = n^2 + n$.

Uwaga

Ciąg można określić między innymi poprzez:

- podanie wzoru ogólnego na n-ty wyraz ciągu,
- podanie wszystkich wyrazów ciągu, jeżeli jest to ciąg skończony,
- podanie wzoru na sumę jego n początkowych wyrazów,
- podanie jego pierwszego wyrazu lub kilku początkowych wyrazów i reguły wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu w zależności od poprzednich, czyli podanie wzoru rekurencyjnego ciągu.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, ..., 2000. **2.** **a)** 5, 15, 45, 135, **b)** –8, –6, –4, –2,

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$. **3.** $p_5 = \frac{99}{70},\ p_6 = \frac{239}{169},\ p_7 = \frac{577}{408}$. **4.** $f(n) = n^2$, gdzie $n \in \mathbf{N}^+$.

5. $a_7 = -5,\ a_8 = -18,\ a_9 = -32,\ a_{10} = -47,\ a_{11} = -63$. **6.** **a)** $D_a = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = D_b$,

b) $(a_n) = (4, -3, 3, -2, 2, -1, 1, 0),\ (b_n) = (-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0)$.

7. **a)** 0, –3, –8, –15, –24, **b)** –2, 2, –2, 2, –2, **c)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}$. **8.** **a)** $a_n = 2n,\ a_8 = 16,\ a_{20} = 40$,

b) $a_n = \frac{1}{n^2},\ a_8 = \frac{1}{64},\ a_{20} = \frac{1}{400}$, **c)** $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1},\ a_8 = -\frac{1}{15},\ a_{20} = -\frac{1}{39}$.

9. **a)** $a_{n-1} = -3,\ a_{n+1} = -3$, **b)** $a_{n-1} = 4n - 5,\ a_{n+1} = 4n + 3$, **c)** $a_{n-1} = -n^2 + 3n - 2,\ a_{n+1} = -n^2 - n$.

10. **a)** 1, 2, 3, 4, 5, **b)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, **c)** 2, 4, 6, 8, 10.

Zadania utrwalające

7.1. Wszystkie wyrazy ciągu tworzy się według pewnej reguły. Ustal przykładową regułę tworzenia kolejnych wyrazów ciągu i zachowując ją, podaj dwa następne jego wyrazy, gdy:

a) 1024, 512, 256, 128, ... ,

b) 52, 48, 44, 40, ... ,

c) –3, 6, –12, 24, ... ,

d) 21, 25, 28, 30, ...

7.2. Ustal przykładową regułę tworzenia kolejnych wyrazów ciągu i zachowując ją, podaj liczby, które należy wpisać w nawiasy:

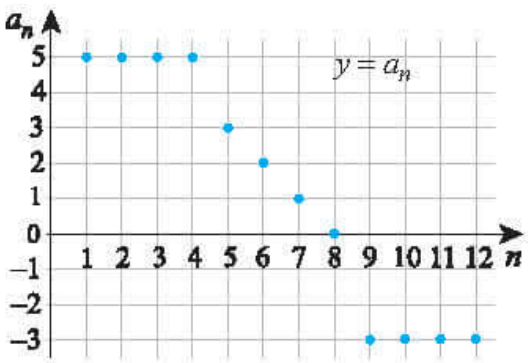
a) 21, 25, 28, (...), (...), 31, 30,

b) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, (...), (...), $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$.

7.3. Na rysunku przedstawiono wykres skończonego ciągu (a_n).

a) Podaj dziedzinę D_a tego ciągu.

b) Określ ciąg przez wypisanie jego kolejnych wyrazów.



7.4. Wyrazy ciągu (31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31) są liczbami dni poszczególnych miesięcy roku nieprzestępnego (zwykłego).

a) Czy kwartały w roku zwykłym i w roku przestępnym mają równe liczby dni?

b) Czy półrocza w roku zwykłym i w roku przestępnym mają równe liczby dni?

c) Którym dniem roku jest dzień 1 września w roku zwykłym, a którym w roku przestępnym?

7.5. Podaj pięć początkowych wyrazów ciągu, jeżeli jego wyraz a_n określony jest wzorem:

a) $a_n = n^2 - 1$,

b) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$,

c) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

d) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{2n}$,

e) $a_n = \frac{1}{(-2)^n}$,

f) $a_n = (-1)^n (n^2 + 1)$.

7.6. Podaj cztery początkowe wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), który jest funkcją przyporządkowującą liczbie naturalnej dodatniej:

a) jej kwadrat, **b)** jej sześcian.

Napisz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

7.7. Dla ciągu o początkowych wyrazach $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$, którego wszystkie wyrazy tworzy się według określonej reguły, ustal regułę wyznaczania kolejnych jego wyrazów i zachowując ją, podaj wzór na n-ty wyraz ciągu.

7.8. Rozstrzygnij, czy liczba 100 jest wyrazem nieskończonego ciągu (a_n) określonego wzorem:

a) $a_n = 2n-1$, **b)** $a_n = 4n+4$, **c)** $a_n = 2^n$,

d) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, **e)** $a_n = 2n(12n+1)$, **f)** $a_n = (n+1)^4$.

7.9. D Rozstrzygnij, czy w ciągu (a_n) określonym wzorem $a_n = 4n^2 + 15n - 1$, gdzie $n \in N^+$, wszystkie wyrazy są liczbami podzielnymi przez 9. Odpowiedź uzasadnij.

7.10. Określ, które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne, gdy:

a) $a_n = n^2 - 9$, **b)** $a_n = n^2 - 6n$, **c)** $a_n = 3n^2 - 4n + 5$,

d) $a_n = -2n^2 - 4$, **e)** $a_n = 2n^2 - 16$, **f)** $a_n = 16 - n^2$.

7.11. D Uzasadnij, że wykresy ciągów (a_n) i (b_n) nie mają punktów wspólnych, gdy:

a) $a_n = -n^2 - 5n$, $b_n = n$, **b)** $a_n = 2n^3$, $b_n = 2n^2 - n$.

7.12. Określ, które wyrazy ciągu (a_n) są równe zero, gdy:

a) $a_n = 2n(n-4)$, **b)** $a_n = 4n^2(n^2+1)$,

c) $a_n = n^2 + 4n + 4$, **d)** $a_n = n^3 - 4n^2 + 4n$.

7.13. Wyznacz wyrazy ciągu (a_n), które są liczbami całkowitymi, gdy:

a) $a_n = \frac{n+3}{n}$, **b)** $a_n = \frac{n^2-1}{n}$, **c)** $a_n = \frac{100-n^2}{n^2}$.

7.14. Napisz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n), którego suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem:

a) $S_n = \frac{(3n-1)\cdot n}{2}$, **b)** $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, **c)** $S_n = (9-n)\cdot n$.

7.15. Oblicz dwunasty wyraz ciągu (a_n), wiedząc, że suma n jego początkowych wyrazów określona jest wzorem $S_n = (-1)^n \cdot n^2$.

Ciąg określony rekurencyjnie

Jednym ze sposobów przedstawienia ciągu jest określenie go na podstawie definicji rekurencyjnej, tj. poprzez podanie jego pierwszego wyrazu lub kilku początkowych i reguły wyznaczania kolejnych wyrazów ciągu w zależności od wartości wyrazów poprzednich.

Przykład 9. Wypisz pięć początkowych wyrazów nieskończonego ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie w następujący sposób

a) $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = b_{n-1} + n, \text{ gdy } n \geq 2 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 4 \\ c_n = \dfrac{c_{n-2} + c_{n-1}}{2}, \text{ gdy } n \geq 3 \end{cases}$.

Rozwiązanie

a)

n	$b_n = b_{n-1} + n$, gdy $n \geq 2$
1	$b_1 = 1$
2	$b_2 = b_1 + 2 = 3$
3	$b_3 = b_2 + 3 = 6$
4	$b_4 = b_3 + 4 = 10$
5	$b_5 = b_4 + 5 = 15$

b)

n	$c_n = \dfrac{c_{n-2} + c_{n-1}}{2}$, gdy $n \geq 3$
1	$c_1 = 2$
2	$c_2 = 4$
3	$c_3 = \dfrac{c_1 + c_2}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$
4	$c_4 = \dfrac{c_2 + c_3}{2} = \dfrac{4+3}{2} = \dfrac{7}{2}$
5	$c_5 = \dfrac{c_3 + c_4}{2} = \dfrac{13}{4}$

Odp.: **a)** $(b_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$, **b)** $(c_n) = \left(2, 4, 3, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \ldots\right)$.

Ćwiczenie 11. Wypisz pięć początkowych wyrazów ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie:

a) $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n - 3, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = b_n - n^2 + 3, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{4} \\ c_{n+1} = 4(c_n)^2, \text{ gdy } n \geq 1 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = 2 \\ d_n = \dfrac{d_{n-1}}{d_{n-2}}, \text{ gdy } n \geq 3 \end{cases}$.

Przykład 10. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie w następujący sposób $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie

Wypisujemy kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) oraz staramy się odkryć zależność między n i wartością a_n.

Zauważamy, że $a_n = 7 + (n-1)\cdot 4 = 4n + 3$.

Odp.: $a_n = 4n + 3$.

n	$a_{n+1} = a_n + 4$
	$a_1 = 7$
1	$a_2 = a_1 + 4 = 7 + (2-1)\cdot 4$
2	$a_3 = a_2 + 4 = 7 + (3-1)\cdot 4$
3	$a_4 = a_3 + 4 = 7 + (4-1)\cdot 4$
4	$a_5 = a_4 + 4 = 7 + (5-1)\cdot 4$

Ćwiczenie 12. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu określonego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1 = -10 \\ a_{n+1} = a_n + 9 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$.

Przykład 11. Ciąg (a_n) jest określony wzorem ogólnym $a_n = n^2 - 2$. Określ ten ciąg wzorem rekurencyjnym.

Rozwiązanie

$a_1 = 1^2 - 2 = -1$.

Wyznaczamy wyraz a_{n+1}:

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 2 = n^2 + 2n + 1 - 2$$

$$a_{n+1} = \underbrace{n^2 - 2}_{a_n} + 2n + 1 .$$

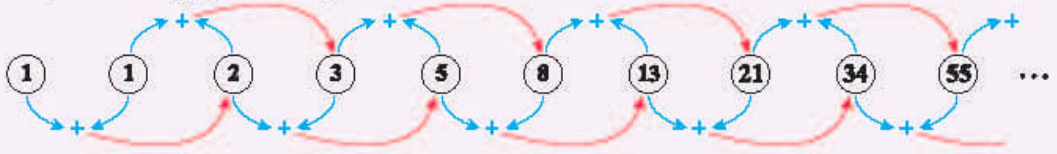
Wyraz a_{n+1} zapisujemy w zależności od wyrazu a_n:

$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$.

Odp.: Wzór rekurencyjny ciągu (a_n) ma postać $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \text{ gdy } n \in N^+ \end{cases}$.

Ćwiczenie 13. Ciąg (a_n) jest określony wzorem ogólnym. Określ ten ciąg wzorem rekurencyjnym, gdy: **a)** $a_n = 4n + 2$, **b)** $a_n = 3^{n-1}$.

Ćwiczenie 14. Włoski uczony Fibonacci opisał ciąg liczbowy nieskończony (1, 1, 2, 3, 5, ...), nazywany ciągiem Fibonacciego. Kolejne wyrazy tego ciągu można wyznaczyć według poniższego schematu:



Odszukaj w literaturze lub w Internecie informacje o Fibonaccim i opisanym przez niego ciągu. Podaj przykłady zjawisk ze świata przyrody, które opisuje ten ciąg.

Odpowiedzi do ćwiczeń

11. a) $(a_n)=(7,4,1,-2,-5,\ldots)$, b) $(b_n)=(5,7,6,0,-13,\ldots)$, c) $(c_n)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\ldots\right)$, d) $(d_n)=\left(1,2,2,1,\frac{1}{2},\ldots\right)$. **12.** a) $a_n=9n-19$, b) $b_n=2^n$.

13. a) $\begin{cases} a_1=6 \\ a_{n+1}=a_n+4, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$, b) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=3a_n, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$.

Zadania utrwalające

7.16. Wypisz pięć początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) zdefiniowanego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=-\frac{1}{a_n}, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$,

b) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=n\cdot a_n, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$,

c) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=(n+1)\cdot a_n, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$,

d) $\begin{cases} a_1=\frac{3}{4} \\ a_{n+1}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)a_n, \text{ gdy } n\in N^+ \end{cases}$.

7.17. Zapisz wzór rekurencyjny ciągu (a_n) określonego za pomocą opisu słownego i oblicz wyraz piąty.

a) Pierwszy wyraz ciągu jest równy –2. Każdy kolejny wyraz jest równy różnicy kwadratu wyrazu poprzedniego i liczby 4.

b) Pierwszy wyraz ciągu jest równy $\sqrt{2}$. Każdy kolejny wyraz jest o połowę mniejszy od poprzedniego.

c) Pierwszy wyraz ciągu jest równy 0, a drugi wyraz 1. Każdy kolejny wyraz jest podwojoną sumą dwóch poprzednich wyrazów.

7.18. Oblicz $a_3 + a_4 + a_5$, gdy $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$.

7.19. Ciąg (p_n) jest ciągiem pól kwadratów o boku n, gdzie $n \in N^+$. Określ ten ciąg:
a) wzorem ogólnym, **b)** wzorem rekurencyjnym.

7.20. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu ($n \in N^+$) określonego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 10 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{5} \\ a_{n+1} = a_n \cdot (-1) \end{cases}$, **e)** $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{-1}{a_n} \end{cases}$, **f)** $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^3 \end{cases}$.

7.21. Ciąg (a_n), gdzie $n \in N^+$, jest określony wzorem ogólnym. Określ ten ciąg wzorem rekurencyjnym, gdy:
a) $a_n = 5n$, **b)** $a_n = 3 - 4n$, **c)** $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

Monotoniczność ciągu liczbowego

Każdy **ciąg liczbowy jest funkcją**, której dziedziną jest zbiór lub podzbiór zbioru liczb naturalnych dodatnich.

Definicje określające monotoniczność funkcji odnoszą się również do ciągów liczbowych.

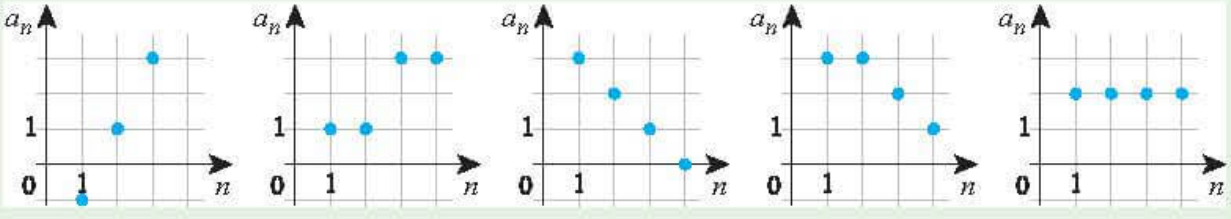
Wśród ciągów liczbowych można wyróżnić ciągi: rosnące, niemalejące, malejące, nierosnące oraz ciągi stałe. O takich ciągach mówimy, że są **monotoniczne**.

Monotoniczność ciągu (a_n) określamy, badając znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.

Definicja

Dla każdej liczby naturalnej dodatniej n ($n \in N^+$) ciąg (a_n) nazywamy:

rosnącym, gdy	niemalejącym, gdy	malejącym, gdy	nierosnącym, gdy	stałym, gdy
$a_{n+1} - a_n > 0$,	$a_{n+1} - a_n \geq 0$,	$a_{n+1} - a_n < 0$,	$a_{n+1} - a_n \leq 0$,	$a_{n+1} - a_n = 0$.



Ćwiczenie 15. Ciąg (a_n) ma pięć wyrazów. Narysuj wykres ciągu (a_n) i określ, czy ciąg ten jest rosnący lub niemalejący, malejący lub nierosnący czy też stały, gdy:

a) $a_n = \frac{12}{n}$, **b)** $a_n = n^2 - 4$, **c)** $a_n = \sqrt{2}$.

Przykład 12. Zbadaj monotoniczność ciągu określonego wzorem ogólnym:

a) $a_n = \frac{5n+2}{n+3}$, dla $n \in N^+$, **b)** $b_n = \frac{1}{2^n}$, dla $n \in N^+$.

Rozwiązanie

Aby określić monotoniczność ciągu, badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.

a) $a_{n+1} = \frac{5(n+1)+2}{(n+1)+3} = \frac{5n+7}{n+4}$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5n+7}{n+4} - \frac{5n+2}{n+3} = \frac{(5n+7)(n+3)-(5n+2)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{13}{(n+4)(n+3)}.$$

$(n+4)(n+3) > 0$, więc $\frac{13}{(n+4)(n+3)} > 0$, czyli $a_{n+1} - a_n > 0$.

Ciąg (a_n) jest rosnący.

b) $b_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2 \cdot 2^n}$,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2 \cdot 2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{1-2}{2 \cdot 2^n} = -\frac{1}{2 \cdot 2^n} = -\frac{1}{2^{n+1}}.$$

$-\frac{1}{2^{n+1}} < 0$, czyli $b_{n+1} - b_n < 0$.

Ciąg (b_n) jest malejący.

Odp.: **a)** (a_n) jest ciągiem rosnącym, **b)** (b_n) jest ciągiem malejącym.

Ćwiczenie 16. Zbadaj monotoniczność ciągu określonego wzorem ogólnym:

a) $a_n = \frac{3n+2}{n+1}$, dla $n \in N^+$, **b)** $b_n = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}$, dla $n \in N^+$.

Przykład 13. Oblicz sześć początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = \frac{(-2)^n}{n}$ i zaznacz je w układzie współrzędnych.

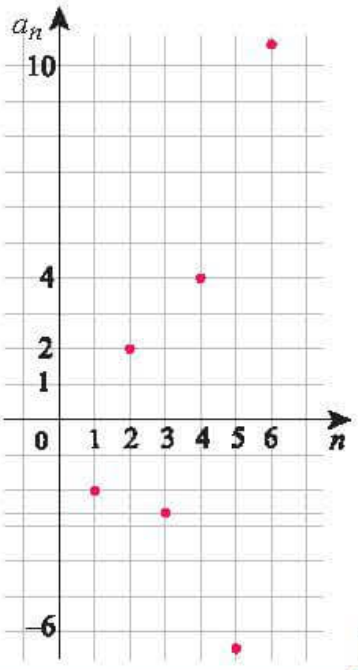
Czy jest to ciąg monotoniczny?

Rozwiązanie

$$a_1 = \frac{(-2)^1}{1} = -2, \qquad a_2 = \frac{(-2)^2}{2} = 2,$$

$$a_3 = \frac{(-2)^3}{3} = -2\frac{2}{3}. \qquad a_4 = \frac{(-2)^4}{4} = 4,$$

$$a_5 = \frac{(-2)^5}{5} = -6\frac{2}{5}, \qquad a_6 = \frac{(-2)^6}{6} = 10\frac{2}{3}.$$



Zauważamy, że $a_1 < a_2$ ale $a_2 > a_3$, zatem żaden z warunków monotoniczności ciągu nie jest spełniony.

Odp.: Ciąg (a_n) nie jest ciągiem monotonicznym.

Ćwiczenie 17. Sporządź wykres ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(-3)^n}{n+1}$, gdy $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Określ, czy ciąg jest monotoniczny. Odpowiedź uzasadnij.

Przykład 14. Uzasadnij, że ciąg określony wzorem ogólnym $a_n = (-1)^n$ nie jest monotoniczny.

Rozwiązanie

I sposób

Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1} = -1 \cdot (-1)^n,$$

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n = (-1)^n \cdot (-1-1) = -2 \cdot (-1)^n.$$

Zauważamy, że $-2 \cdot (-1)^n = \begin{cases} 2, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ -2, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases}$,

więc ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

II sposób

Zauważamy, że $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$, ...

Kolejne wyrazy ciągu na przemian są różnych znaków, więc ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

Ćwiczenie 18. Uzasadnij, że nie jest monotoniczny ciąg o wzorze ogólnym:

a) $a_n = (-1)^{n+1}$, **b)** $a_n = 5 \cdot (-1)^n$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. Ciąg (a_n) jest: **a)** malejący, **b)** rosnący, **c)** stały.
16. Ciąg (a_n) jest: **a)** rosnący, **b)** malejący.
17. Ciąg (a_n) nie jest monotoniczny (ciąg naprzemienny).
18. *Wskazówka.* Zauważ, że ciąg (a_n) ma wyrazy: **a)** 1, –1, 1, –1, ..., **b)** –5, 5, –5, 5, ...

Zadania utrwalające

7.22. Sporządź wykres ciągu określonego wzorem $a_n=(-1)^n\cdot n+n$, gdy $n\in\{1,2,...,6\}$. Czy jest to ciąg monotoniczny?

7.23. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n=n^2-1$, **b)** $a_n=2n^2-n$, **c)** $a_n=\frac{3n}{n+1}$,

d) $a_n=3n-n^2$, **e)** $a_n=\frac{2-3n}{n+1}$, **f)** $a_n=\frac{1-n^2}{2n^2}$.

7.24. Zbadaj monotoniczność ciągu określonego wzorem:

a) $a_n=2-5n$, **b)** $a_n=n^2+n$, **c)** $a_n=n^2+3n+1$, **d)** $a_n=\frac{n-1}{n+1}$.

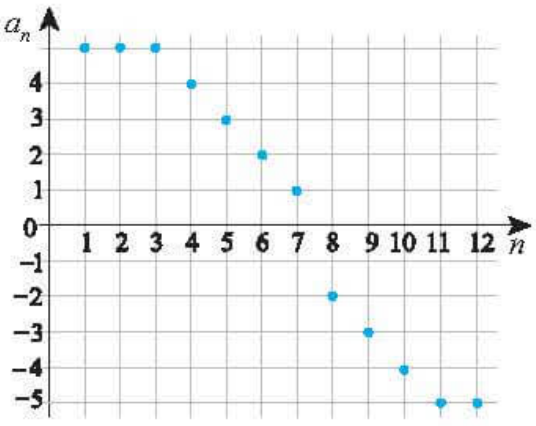
7.25. Ciąg (a_n) określony jest wzorem

$$a_n=\begin{cases}3n, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą naturalną parzystą}\\ 2n+1, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą naturalną nieparzystą}\end{cases}.$$

a) Podaj 10 początkowych wyrazów ciągu (a_n).

b) Czy ciąg (a_n) jest ciągiem monotonicznym? Odpowiedź uzasadnij.

7.26. D Na rysunku przedstawiono wykres skończonego ciągu (a_n).



a) Określ ten ciąg przez wypisanie jego wyrazów.

b) Czy ciąg ten jest ciągiem monotonicznym? Odpowiedź uzasadnij.

7.27. D Wykaż, że ciąg (a_n) jest monotoniczny:

a) $a_n=n^2-4$, **b)** $a_n=n^2-2n$, **c)** $a_n=n^2+4n$,

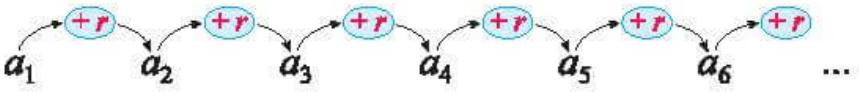
d) $a_n=\frac{n}{2n-1}$, **e)** $a_n=\frac{2n}{n+2}$, **f)** $a_n=\frac{n^2}{n+1}$.

Pojęcie ciągu arytmetycznego

Wśród ciągów liczbowych wyróżniamy ciągi arytmetyczne i geometryczne.

Definicja

Ciągiem arytmetycznym (a_n) nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu.



Ćwiczenie 19. Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest grafem. Przepisz przykłady do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakujące liczby. Podaj wyraz a_1 i różnicę r.

a) ■ ■ ■ 100 88 ■ ...

b) ■ ■ ■ ■ 1 0,75 ...

c) +3 +3 +3 ■ ■ 20 ...

d) ■ ■ ■ 60 ■ 0 ...

Ćwiczenie 20. Podaj różnicę r ciągu arytmetycznego, gdy:

a) $\left(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \ldots\right)$, b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \ldots\right)$, c) $(1{,}95; 1{,}82; 1{,}69; \ldots)$.

Przykład 15. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 3n - 2$.

a) Oblicz wyrazy: a_1, a_2, a_3, a_5, a_6.

b) Oblicz różnice: $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_6 - a_5$, $a_{20} - a_{19}$.

c) Wyznacz różnicę $a_{n+1} - a_n$.

d) Czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym?

Rozwiązanie

a) $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$
$a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$
$a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$
$a_5 = 3 \cdot 5 - 2 = 13$
$a_6 = 3 \cdot 6 - 2 = 16$.

b) $a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$
$a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3$
$a_6 - a_5 = 16 - 13 = 3$
$a_{20} - a_{19} = 3 \cdot 20 - 2 - (3 \cdot 19 - 2) = 3$.

c) $a_{n+1} - a_n = 3 \cdot (n+1) - 2 - (3n - 2) = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3$.

d) Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3n - 2$ jest ciągiem arytmetycznym, bo $a_{n+1} - a_n = 3$, gdy $n \in N^+$.

Ćwiczenie 21. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 3 - 2n$.

a) Oblicz wyrazy: a_1, a_2, a_6, a_{20}, a_{161}.

b) Wyznacz wyrazy: a_{n+1}, a_{n-1}, a_{2n}, a_{n+4}.

c) Wyznacz różnicę $a_{n+1} - a_n$.

Czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym?

Uwaga

- W ciągu arytmetycznym (a_n) różnica r określona jest wzorem

$$r = a_{n+1} - a_n, \text{ gdzie } n \in N^+.$$

- Ciąg arytmetyczny można określić wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r, \text{ gdy } n \in N^+ \end{cases},$$

gdzie a – pierwszy wyraz ciągu,
r – różnica ciągu arytmetycznego.

Przykład 16. Oblicz różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) oraz podaj trzy następne jego wyrazy, wiedząc, że dwa początkowe wyrazy tego ciągu to:

a) 0 i 0,25, **b)** 10 i 7.

Rozwiązanie

Z warunków zadania:

a) $a_1 = 0$ i $a_2 = 0,25$

$r = a_2 - a_1 = 0,25 - 0 = 0,25$

$a_3 = a_2 + r = 0,25 + 0,25 = 0,50$

$a_4 = a_3 + r = 0,5 + 0,25 = 0,75$

$a_5 = a_4 + r = 0,75 + 0,25 = 1.$

b) $a_1 = 10$ i $a_2 = 7$

$r = a_2 - a_1 = 7 - 10 = -3$

$a_3 = a_2 + r = 7 - 3 = 4$

$a_4 = a_3 + r = 4 - 3 = 1$

$a_5 = a_4 + r = 1 - 3 = -2.$

Ćwiczenie 22. Oblicz różnicę r i podaj trzy następne wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n), gdy jego kolejne początkowe wyrazy to liczby:

a) 7, 12, 17, ... , **b)** 4, 4, 4, 4, ... , **c)** 1; 0,9; 0,8; 0,7; ... .

Ćwiczenie 23. Zapisz w postaci rekurencyjnej ciąg arytmetyczny (a_n), gdy:

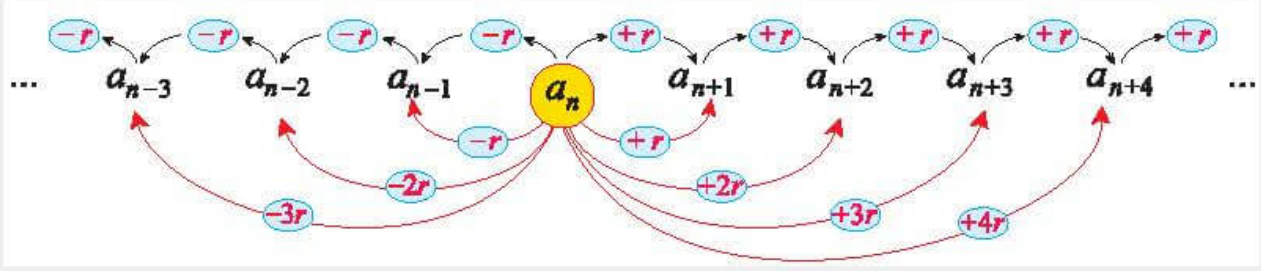
a) $a_n = 2n - 1$, **b)** $a_n = 3n + 2$, **c)** $a_n = -5n + \sqrt{2}$.

Uwaga

Z definicji ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r wynika, że:

$$a_n + r = a_{n+1}, \quad a_n + 2r = a_{n+2}, \quad \ldots, \quad a_n + kr = a_{n+k},$$
$$a_n - r = a_{n-1}, \quad a_n - 2r = a_{n-2}, \quad \ldots, \quad a_n - kr = a_{n-k}.$$

Ilustruje to poniższy graf.



Ćwiczenie 24. Oblicz, który wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r otrzymamy, gdy do jego pięćdziesiątego wyrazu dodamy:

a) r, **b)** $7r$, **c)** $-7r$, **d)** $15r$, **e)** $-46r$, **f)** $-49r$.

Przykład 17. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r i pierwszym wyrazie a_1.

Rozwiązanie

Z definicji ciągu arytmetycznego:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r = a_1 + (2-1)\cdot r \\ a_3 &= a_2 + r = \underbrace{a_1 + r}_{a_2} + r = a_1 + 2\cdot r = a_1 + (3-1)\cdot r \\ a_4 &= a_3 + r = \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3} + r = a_1 + 3\cdot r = a_1 + (4-1)\cdot r \\ a_5 &= a_4 + r = \underbrace{a_1 + 3r}_{a_4} + r = a_1 + 4\cdot r = a_1 + (5-1)\cdot r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Odp.: $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Twierdzenie

Jeżeli w ciągu arytmetycznym (a_n) wyrazem pierwszym jest a_1 i różnicą jest r, to ciąg ten określony jest wzorem $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r}$.

Ćwiczenie 25. Oblicz wyrazy: a_7, a_{20}, a_{43}, a_{100}, a_n ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r, w którym:

a) $a_1 = 4,\ r = 2,$ **b)** $a_1 = 0,\ r = -3,$ **c)** $a_1 = 5,\ r = 0,$

d) $a_2 = 5,\ r = -1,$ **e)** $a_3 = 5,\ r = 4,$ **f)** $a_{60} = 60,\ r = -2.$

Uwaga

Liczby naturalne a_n, gdzie $n \in N^+$, które przy dzieleniu przez dodatnią liczbę naturalną k dają resztę p, tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = p + k(n-1)$.

Na przykład, jeżeli: $a_n = 1 + 3(n-1)$, to $(a_n) = (1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \ldots)$,

$a_n = 3 + 4(n-1)$, to $(a_n) = (3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ \ldots)$.

Ćwiczenie 26. Podaj własność, jaką mają liczby tworzące ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem: **a)** $a_n = 2n + 1$, **b)** $a_n = 2n - 1$, **c)** $a_n = 5n + 3$, **d)** $a_n = 5n - 2$. Podaj trzy początkowe wyrazy tego ciągu.

Ćwiczenie 27. Napisz ogólną postać wszystkich liczb naturalnych, które:

a) dzielą się przez 5 bez reszty, **b)** przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2,

c) przy dzieleniu przez 8 dają resztę 7, **d)** przy dzieleniu przez 4 dają resztę 2.

Przykład 18. W 1582 roku papież Grzegorz XIII w wyniku odkryć astronomów epoki renesansu wprowadził reformę kalendarza. Ustalono, że lata podzielne przez 4 będą przestępne, z wyjątkiem tych lat, które kończą się cyframi 00 i nie są podzielne przez 400. Pozostałe lata to lata zwykłe.

a) Wypisz te lata zwykłe, które minęły od czasu powstania kalendarza gregoriańskiego i które kończyły się cyframi 00. Czy tworzą one ciąg arytmetyczny?

b) Który rok był setnym rokiem przestępnym, licząc od czasu powstania kalendarza gregoriańskiego?

Rozwiązanie

a) Lata: 1700, 1800, 1900, tj. liczby 1700, 1800, 1900, tworzą trójwyrazowy ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 1700$ i $r = 100$.

b) Zauważamy, że lata przestępne są liczbami naturalnymi większymi od 1582 i podzielnymi przez 4. Zatem liczby wyrażające lata podzielne przez 4 od roku 1584 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = 1584$ oraz $r = 4$. Wyraz a_{100+3} (bo lata 1700, 1800 i 1900 nie były przestępne) jest setnym rokiem przestępnym, czyli

$$a_{103} = a_1 + 102r = 1584 + 102 \cdot 4 = 1992.$$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

Odp.: Rok 1992 był setnym rokiem przestępnym od czasu powstania kalendarza gregoriańskiego.

Ćwiczenie 28. Ile było lat przestępnych od czasu powstania kalendarza gregoriańskiego do końca XIX wieku? Pamiętaj, że lata 1700, 1800 i 1900 nie były przestępne.

Przykład 19. Ile jest liczb naturalnych dodatnich podzielnych przez 7 i mniejszych niż 1000?

Rozwiązanie

Zauważamy, że liczby naturalne dodatnie podzielne przez 7 i mniejsze niż 1000 tworzą skończony ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r, w którym

$$a_1 = 7,\ r = 7.$$

Największą liczbą naturalną mniejszą niż 1000 i podzielną przez 7 jest 994, więc

$$a_n = 994.$$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

Zatem $994 = 7 + (n-1)\cdot 7$, skąd $n = 142$.

Odp.: Liczb naturalnych dodatnich podzielnych przez 7 i mniejszych niż 1000 jest 142.

Ćwiczenie 29. Oblicz, ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez:
a) 2, **b)** 3, **c)** 4, **d)** 6, **e)** 11, **f)** 7.

Odpowiedzi do ćwiczeń

19. **a)** $a_1 = 100,\ r = -12$, **b)** $a_1 = 1{,}25,\ r = -0{,}25$, **c)** $a_1 = 14,\ r = 3$, **d)** $a_1 = 60,\ r = -30$.

20. $r = \sqrt{2}$, **b)** $r = \frac{1}{2}$, **c)** $r = 0{,}13$. **21.** **a)** $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_6 = -9,\ a_{20} = -37,\ a_{161} = -319$,

b) $a_{n+1} = 1 - 2n,\ a_{n-1} = 5 - 2n,\ a_{2n} = 3 - 4n,\ a_{n+4} = -5 - 2n$, **c)** $a_{n+1} - a_n = -2$, tak.

22. **a)** $r = 5$, 22, 27, 32, **b)** $r = 0$, 4, 4, 4, **c)** $r = -0{,}1$; 0,6; 0,5; 0,4.

23. **a)** $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} - 5 \\ a_{n+1} = a_n - 5 \end{cases}$. **24.** **a)** a_{51}, **b)** a_{57}, **c)** a_{43}, **d)** a_{65}, **e)** a_4, **f)** a_1.

25. **a)** $a_7 = 16,\ a_{20} = 42,\ a_{43} = 88,\ a_{100} = 202,\ a_n = 2n + 2$,

b) $a_7 = -18,\ a_{20} = -57,\ a_{43} = -126,\ a_{100} = -297,\ a_n = -3n + 3$, **c)** $a_7 = a_{20} = a_{43} = a_{100} = a_n = 5$,

d) $a_7 = 0,\ a_{20} = -13,\ a_{43} = -36,\ a_{100} = -93,\ a_n = -n + 7$,

e) $a_7 = 21,\ a_{20} = 73,\ a_{43} = 165,\ a_{100} = 393,\ a_n = 4n - 7$,

f) $a_7 = 166,\ a_{20} = 140,\ a_{43} = 94,\ a_{100} = -20,\ a_n = -2n + 180$.

26. **a)** Liczby, które przy dzieleniu przez 2 dają resztę 1; 3, 5, 7, **b)** liczby, które przy dzieleniu przez 2 dają resztę 1; 1, 3, 5, **c)** liczby, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3; 8, 13, 18, **d)** liczby, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3; 3, 8, 13.

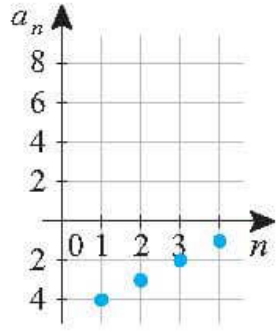
27. **a)** $a_n = 5n$, **b)** $a_n = 5n - 3$, **c)** $a_n = 8n - 1$, **d)** $a_n = 4n - 2$. **28.** 77.

29. **a)** 45, **b)** 30, **c)** 22, **d)** 15, **e)** 9, **f)** 13.

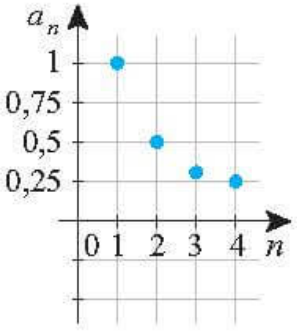
Zadania utrwalające

7.28. Na rysunku przedstawiony jest wykres ciągu. Czy jest to ciąg arytmetyczny?

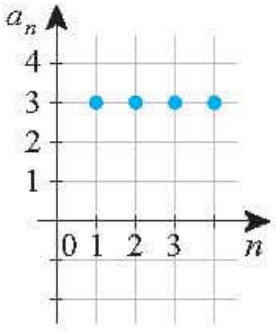
a)



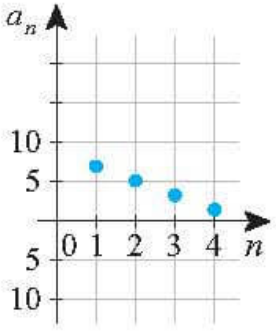
b)



c)



d)



7.29. Przepisz przykład do zeszytu i wiedząc, że ciąg arytmetyczny ma pięć wyrazów, w miejsce ■ wpisz brakujące liczby.

a) (1, 5, 9, ■, ■),

b) (–6, ■, –34, ■, –62),

c) (■, 9, ■, 1, ■),

d) (■, 0, ■, $\frac{4}{5}$, ■).

7.30. Napisz wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego, którego dwoma początkowymi wyrazami są liczby:

a) 5, 9,

b) 10, 3,

c) $-\sqrt{2}$, 0,

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 0.

7.31. Oblicz wyraz pierwszy a_1 i różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = 15n - 12$,

b) $a_n = 3 - 14n$,

c) $a_n = 8 - 6n$,

d) $a_n = 4 + 3n$.

7.32. Przerysuj tabelę do zeszytu i wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę.

a_1	r	n	a_n
3	2	20	■
63	$-2\frac{1}{3}$	■	28
■	8	15	–88
0,5	■	21	10,5

7.33. Oblicz wyrazy a_1 i a_8 ciągu arytmetycznego (a_n), gdy $a_5 = 3$, $r = 2$.

7.34. Sprawdź, czy ciąg określony podanym wzorem jest arytmetyczny.

a) $a_n = 3n - 2$,

b) $b_n = 3n^2 - 2$,

c) $c_n = \frac{1}{n}$,

d) $d_n = 2^{n-2}$,

e) $e_n = -n - 1$,

f) $f_n = (n+2)^2 - n^2$,

g) $h_n = g_{n+1} - g_n$, gdzie $g_n = n^2 + 1$.

7.35. Podaj, który wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r otrzymamy, gdy do jego:

a) dwudziestego wyrazu dodamy jednomian $-12 \cdot r$,

b) trzydziestego wyrazu dodamy jednomian $113 \cdot r$,

c) setnego wyrazu dodamy jednomian $-98 \cdot r$.

7.36. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r. Oblicz:

a) a_6 i a_{12}, gdy $a_1 = -3$ i $r = 3$,

b) a_{20} i a_{40}, gdy $a_{11} = 30$ i $a_{21} = 20$,

c) a_1 i a_{100}, gdy $a_5 = 8$ i $r = -2$,

d) a_5 i a_{10}, gdy $a_7 = 0$ i $r = \log 2$.

7.37. Przepisz przykład do zeszytu i wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę.

a) $a_1 = 5$, $a_5 = 1$, $a_9 =$ ■,

b) $a_7 = 11$, $a_{11} = 7$, $a_{20} =$ ■,

c) $a_1 = 4$, $a_4 = 19$, $a_{10} =$ ■,

d) $a_1 =$ ■, $a_8 = 32$, $a_{20} = 92$.

7.38. Podaj własność, jaką mają liczby tworzące ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem:

a) $a_n = 7n - 6$,

b) $a_n = 6n + 3$,

c) $a_n = 6n - 3$,

d) $a_n = 9n + 7$,

e) $a_n = 9n - 2$,

f) $a_n = 8n + 5$.

7.39. Czy liczba 1000 jest wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n), gdy:

a) $a_n = 3n + 1$,

b) $a_n = 5n - 4$,

c) $a_n = 15n + 10$.

7.40. Liczby 2 i 7 są dwoma początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego. Które wyrazy tego ciągu należą do przedziału (500; 520)?

7.41. D Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$, gdzie $n \in N^+$.

Wykaż, że ciąg (a_n) może być określony wzorem $a_n = 2n + 8$.

7.42. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$. Sprawdź, czy jego wyrazy a_7, a_{21}, a_{24} w podanej kolejności tworzą trzywyrazowy ciąg arytmetyczny.

7.43. D Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, gdy:

a) $a_n = n - 5$,

b) $a_n = 2 - 3n$,

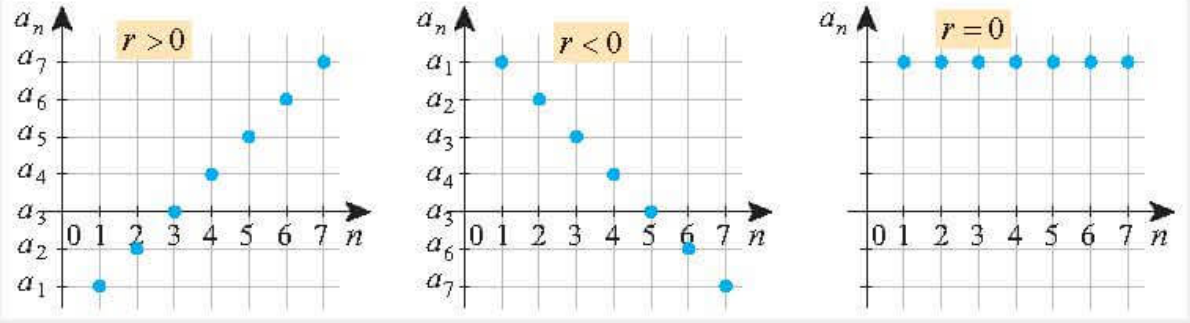
c) $a_n = (n+3)^2 - n^2$.

Własności ciągu arytmetycznego

Monotoniczność ciągu arytmetycznego zależy od różnicy r tego ciągu.

Uwaga

- Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest:
  - **rosnący** wtedy i tylko wtedy, gdy $r > 0$,
  - **malejący** wtedy i tylko wtedy, gdy $r < 0$,
  - **stały** wtedy i tylko wtedy, gdy $r = 0$.



- Wykresem ciągu arytmetycznego (a_n) jest zbiór odosobnionych punktów (n, a_n), gdzie $n \in N^+$, leżących na prostej o równaniu $y = a_n$.

Przykład 20. Oblicz różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) i podaj, czy jest to ciąg rosnący, malejący czy stały, gdy jest on określony wzorem: **a)** $a_n = 7n + 3$, **b)** $b_n = 7 - 3n$.

Rozwiązanie

a) $r = a_{n+1} - a_n = \underbrace{7(n+1)+3}_{a_{n+1}} - \underbrace{(7n+3)}_{a_n} = 7$, $r = 7$ i $r > 0$.

b) $r = b_{n+1} - b_n = \underbrace{7-3(n+1)}_{b_{n+1}} - \underbrace{(7-3n)}_{b_n} = -3$, $r = -3$, $r < 0$.

Odp.: **a)** $r = 7$, (a_n) jest ciągiem rosnącym, **b)** $r = -3$, (b_n) jest ciągiem malejącym.

Ćwiczenie 30. Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem:

a) $a_n = 3n - 1$, **b)** $a_n = 4 - 5n$, **c)** $a_n = 7$, **d)** $a_n = \dfrac{\sqrt{7}n - 2}{3}$.

Ćwiczenie 31. Określ, czy nieskończony ciąg jest ciągiem arytmetycznym, gdy jego wyrazy spełniają warunek:

a) $a_{n+1} - a_n = 2$, **b)** $b_{n+2} - b_n = -8$, **c)** $c_{n+1} - c_n = 6$,

d) $d_{n+1} - d_n = n$, **e)** $e_{n+3} - e_{n+1} = -10$, **f)** $f_{n+1} - f_n = 2x$.

Twierdzenie

W ciągu arytmetycznym (a_n) każde trzy kolejne wyrazy a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, gdzie $n \geq 2$, spełniają warunek $\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$.

***Z* (*założenie*)**: (a_n) – ciąg arytmetyczny o różnicy r, $n \in N^+$ i $n \geq 2$ | ***T* (*teza*)**: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Dowód: $a_{n-1} + a_{n+1} = \underbrace{a_n - r}_{a_{n-1}} + \underbrace{a_n + r}_{a_{n+1}} = 2a_n$

$a_n - r = a_{n-1}$

$a_n + r = a_{n+1}$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \qquad \textbf{c.n.w.}$$

Uwaga

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz, oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Przykład 21. Czy liczby $\sqrt{3}$, 2, $4-\sqrt{3}$, w podanej kolejności, są wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego?

Rozwiązanie

$a_{n-1} = \sqrt{3}$
$a_n = 2$
$a_{n+1} = 4 - \sqrt{3}$.

$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 4 - \sqrt{3}}{2} = 2$, czyli
$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$.

Odp.: Liczby $\sqrt{3}$, 2, $4-\sqrt{3}$ są trzema kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego, ponieważ $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$.

Ćwiczenie 32. Sprawdź, czy trzy liczby w podanej kolejności, są wyrazami tego samego ciągu arytmetycznego.

a) $2-3\sqrt{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$, $2+\sqrt{3}$, **b)** $74-\sqrt{37}$, 37, $\sqrt{37}$, **c)** $\sqrt{3}$, 4, $\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 33. Dla jakiej wartości x liczby w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego? **a)** 3, x, 12, **b)** $2x-1$, 4, 7, **c)** 2, $4x+1$, $2x^2$, **d)** 2, x^2+1, $2x^2$.

Przykład 22. Wyznacz różnicę dwóch różnych dowolnych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ i wyraź jego różnicę r w zależności od tych wyrazów.

Rozwiązanie

Niech a_k i a_m będą różnymi wyrazami $(k \neq m)$ ciągu (a_n), wtedy:

$$a_k - a_m = \underbrace{a_1 + (k-1)\cdot r}_{a_k} - \underbrace{\left[a_1 + (m-1)\cdot r\right]}_{a_m} = kr - mr,$$

zatem $a_k - a_m = (k-m)\cdot r$, czyli $r = \dfrac{a_k - a_m}{k-m}$.

Przykład 23. Między liczby 16 i 4 wstaw pięć liczb takich, żeby łącznie z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie

Niech (a_n) będzie szukanym ciągiem arytmetycznym, w którym $a_1 = 16$ i $a_7 = 4$.

I sposób

$a_7 = a_1 + 6r$

$4 = 16 + 6r$

$r = -2$

II sposób

16, ●, ●, ●, ●, ●, 4

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7

$$r = \frac{a_7 - a_1}{7-1} = \frac{4-16}{7-1} = -2$$

$r = \dfrac{a_k - a_m}{k-m}$

Mając dane $a_1 = 16$ i $r = -2$, znajdujemy $a_2 = 14$, $a_3 = 12$, $a_4 = 10$, $a_5 = 8$, $a_6 = 6$.

Odp.: Należy wstawić liczby: 14, 12, 10, 8, 6.

Ćwiczenie 34. Między dwie liczby a i b wstaw takie trzy liczby, aby łącznie z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny, gdy:

a) $a=3$ i $b=251$, **b)** $a=304$ i $b=80$.

Przykład 24. Oblicz wyraz pierwszy a_1 i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_7 = 132$ i $a_{15} = 196$.

Rozwiązanie

I sposób

$$\begin{cases} a_7 = 132 \\ a_{15} = 196 \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} a_1 + 6r = 132 \\ a_1 + 14r = 196 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} a_1 = 84 \\ r = 8 \end{cases}.$$

II sposób $r=\dfrac{a_{15}-a_7}{15-7}=\dfrac{196-132}{8}=8,$

$a_7=a_1+6r,$ czyli $132=a_1+6\cdot 8,$ skąd $a_1=132-48=84.$

Odp.: $a_1=84,\ r=8.$

Ćwiczenie 35. Oblicz wyraz pierwszy a_1 i różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n), w którym: **a)** $a_5=-13$ i $a_{11}=-31$, **b)** $a_3=7$ i $a_5=11$, **c)** $a_4=-1$ i $a_8=15$.

Uwaga

Wyznaczyć ciąg arytmetyczny (a_n), to znaczy znaleźć jego wyraz pierwszy a_1 i różnicę r.

Odpowiedzi do ćwiczeń

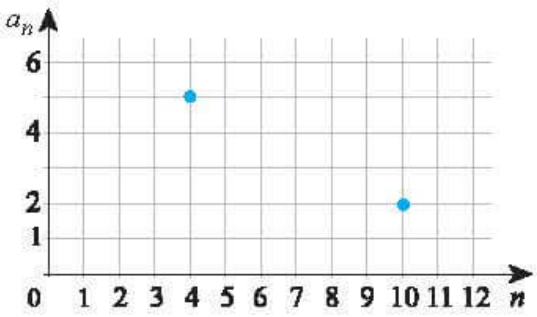
30. Ciąg: **a)** rosnący, **b)** malejący, **c)** stały, **d)** rosnący. **31.** **a)** Tak, **b)** tak, **c)** tak, **d)** nie, **e)** tak, **f)** tak.

32. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** nie. **33.** **a)** $x=7{,}5$, **b)** $x=1$, **c)** $x_1=0,\ x_2=4$, **d)** $x\in R$.

34. **a)** 65, 127, 189, **b)** 248, 192, 136. **35.** **a)** $a_1=-1,\ r=-3$, **b)** $a_1=3,\ r=2$, **c)** $a_1=-13,\ r=4$.

Zadania utrwalające

7.44. (D) Na wykresie zaznaczono dwa punkty należące do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n). Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest malejący.



7.45. Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1=3$ i $a_7=3a_5$.

7.46. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n), w którym:

a) $\begin{cases} a_5=10 \\ a_9=-6 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} a_6=7 \\ a_3+a_7=15 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} a_3+a_{12}=-10 \\ a_8+a_{10}=-4 \end{cases}$.

7.47. Między liczby 1 i 15 wstaw:

a) pięć innych liczb, **b)** sześć innych liczb,

takich żeby łącznie z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny.

7.48. Oblicz x, wiedząc, że kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego są:

a) $7,\ x,\ 2$, **b)** $3x+2,\ 4x-1,\ 5x-4$, **c)** $x^2+1,\ x^3,\ x^2-1$,

d) $\dfrac{1}{x},\ 3,\ \dfrac{1}{2x}$, **e)** $x+4,\ 4x,\ x^2+8$, **f)** $x^2-10,\ 10x,\ x^2+60$.

7.49. D Uzasadnij, że trzy liczby w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego.

a) $-4,\ 0,\ 4,$ **b)** $3{,}9;\ 3{,}3;\ 2{,}7,$

c) $\sqrt{2}-1,\ 2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}+1,$ **d)** $2\sqrt{3}-3,\ \sqrt{3}+1,\ 5,$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}-1},\ 2\sqrt{2}+1,\ \frac{17}{3\sqrt{2}-1},$ **f)** $\frac{3}{\sqrt{5}-2},\ \frac{12}{\sqrt{5}-1}+1,\ 3\sqrt{5}+2,$

g) $\log_2 4,\ 8\log_4 2,\ 2\log_2 8,$ **h)** $20\cdot 10^4,\ 5\cdot 10^5,\ 0{,}8\cdot 10^6.$

7.50. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz:

a) $a_5 + a_{13}$, jeśli $a_1 + a_{17} = 5$,

b) $a_2 + a_5 + a_7 + a_{10}$, jeśli $a_6 = 3$,

c) $a_5 + a_8 + a_{11}$, jeśli $a_7 + a_9 = 10$,

d) $a_4 + a_7 + a_9 + a_{12}$, jeśli $a_3 + a_8 + a_{10} + a_{11} = 4$.

7.51. Na autostradzie kierowca utrzymuje stałą prędkość równą 120 kilometrów na godzinę. Co trzy minuty sprawdza na liczniku liczbę przejechanych kilometrów. Jeśli pierwszy odczyt z licznika był równy 7115, to jakie liczby powinien odczytać ten kierowca w ciągu najbliższego kwadransa?

7.52. Rok słoneczny jest równy 365,2422 dni, a rok gregoriański 365,2425 dni. Kalendarz papieża Grzegorza XIII wyprzedza więc przyrodę o 0,0003 dnia na rok. Po ilu latach kalendarz gregoriański wyprzedzi przyrodę o jeden dzień?

7.53. D Wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, wykaż, że również ciągiem arytmetycznym jest ciąg (b_n), gdy:

a) $b_n = 2a_n$, **b)** $b_n = a_n + 3$, **c)** $b_n = a_n - 4$,

d) $b_n = 4a_n - 5$, **e)** $b_n = a_{n+1} - 3a_n$, **f)** $b_n = 2a_{n+2} + a_{n+1}$.

7.54. Długości boków trójkąta są liczbami naturalnymi i tworzą ciąg arytmetyczny, którego suma jest równa 12. Wyznacz te długości.

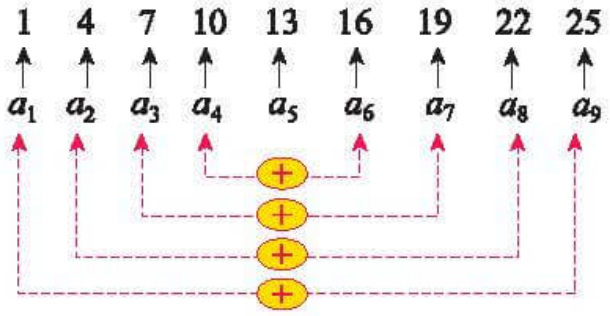
7.55. W ciągu arytmetycznym (a_n) suma czterech początkowych wyrazów jest trzykrotnie większa od sumy czterech następnych wyrazów. Oblicz różnicę r tego ciągu, jeśli $a_1 = 1$.

7.56. D Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Wykaż, że różnica tego ciągu jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Przykład 25. Kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są liczby: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25. Oblicz sumę wyrazów $a_k + a_{10-k}$, gdy $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Rozwiązanie



$k = 1$, więc $a_1 + a_9 = 1 + 25 = 26$

$k = 2$, więc $a_2 + a_8 = 4 + 22 = 26$

$k = 3$, więc $a_3 + a_7 = 7 + 19 = 26$

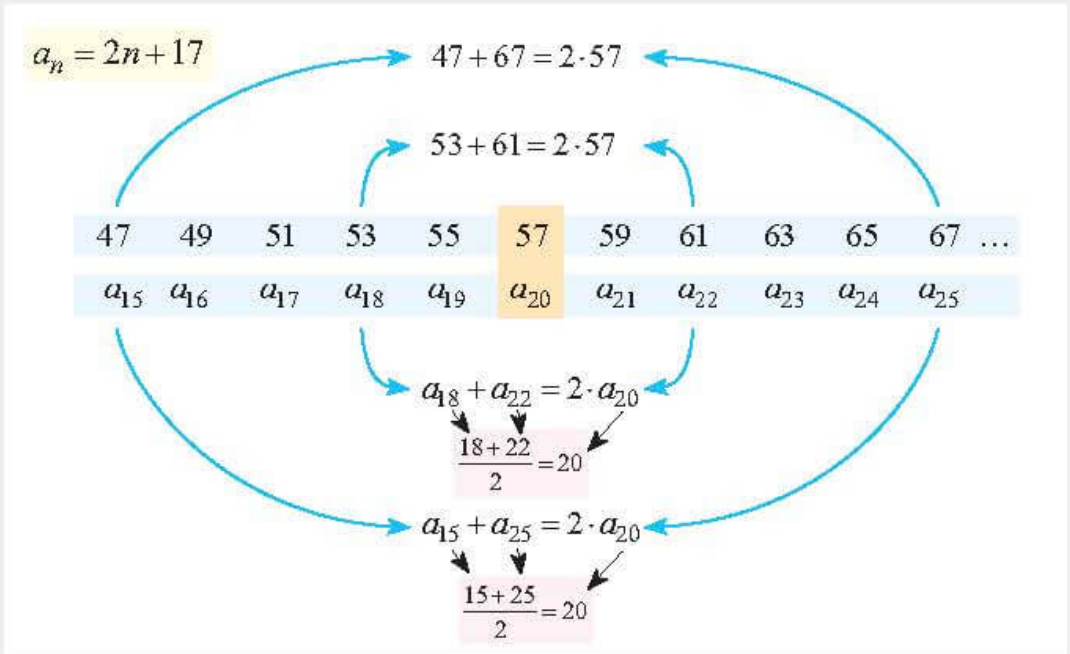
$k = 4$, więc $a_4 + a_6 = 10 + 16 = 26$

$k = 5$, więc $a_5 + a_5 = 13 + 13 = 26$.

Odp.: $a_k + a_{10-k} = 26$.

Uwaga Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to:

- $a_1 + a_n = a_k + a_{n+1-k}$, gdzie $0 < k \leq n$,
- $a_{n-k} + a_{n+k} = 2 \cdot a_n$, gdzie $0 < k < n$.



Ćwiczenie 36. Skorzystaj z podanej własności i wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, oblicz:

a) $a_2 + a_6$, jeśli $a_4 = 3$, **b)** $a_{20} + a_{42}$, jeśli $a_{31} = -1$, **c)** $a_3 + a_7$, jeśli $a_2 + a_8 = 12$,

d) $a_{12} + a_{20}$, jeśli $a_2 + a_{30} = -4$, **e)** $a_5 + a_9 + a_{21} + a_{25}$, jeśli $a_{15} = \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 37. Oblicz sumę:

a) dziewięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_5 = 0$,

b) sześćdziesięciu jeden początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_{31} = 1$.

Twierdzenie

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określona jest wzorem $\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$.

Z (*założenie*): (a_n) – ciąg arytmetyczny | T (*teza*): $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Dowód:

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

n składników równych $(a_1 + a_n)$

$2S_n = n(a_1 + a_n)$, skąd $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ ***cnd.***

$a_1 + a_n = a_k + a_{n+1-k}$

Wniosek: $\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} n}$

Ćwiczenie 38. Carl Friedrich Gauss (1777–1855) obliczył (będąc dzieckiem) sumę n początkowych wyrazów pewnego skończonego ciągu arytmetycznego, nie dodając wyrazu po wyrazie. Poszukaj w literaturze lub w Internecie informacji o życiu i odkryciach matematycznych tego uczonego.

Przykład 26. Oblicz sumę trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), gdy $a_1 = 5$ i $r = -2$.

Rozwiązanie

Dane: $a_1 = 5$, $r = -2$, $n = 30$ | *Obliczyć*: S_{30}

$$S_{30} = \frac{2 \cdot 5 + (30-1) \cdot (-2)}{2} \cdot 30 = -720$$

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

Odp.: $S_{30} = -720$.

Ćwiczenie 39. Oblicz sumę pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1 = -49$ i $r = 2$.

Przykład 27. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 3.

Rozwiązanie

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 3 to liczby: 102, 105,..., 996, 999.

Tworzą one n wyrazowy ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = 102$, $a_n = 999$ i różnica $r = 3$. Obliczamy n:

$a_n = 999$, gdzie $a_n = 102 + (n-1)\cdot 3$ $\quad a_n = a_1 + (n-1)r$

$102 + (n-1)\cdot 3 = 999$, skąd $n = 300$. $\quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$

Zatem $a_{300} = 999$, więc $S_{300} = \frac{(a_1 + a_{300})\cdot 300}{2} = \frac{(102 + 999)\cdot 300}{2} = 165\,150$.

Odp.: Suma wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 3 jest równa 165 150.

Ćwiczenie 40. Oblicz:

a) sumę wszystkich liczb naturalnych od 1 do 1000,

b) średnią arytmetyczną liczb naturalnych od 1 do 1000, nie znajdując ich sumy.

Przykład 28. W teatrze letnim krzesła dla widzów ustawiono w następujący sposób: w rzędzie najbliższym sceny ustawiono 24 krzesła, w każdym następnym o 4 krzesła więcej od poprzedniego. W ostatnim rzędzie ustawiono 80 krzeseł.

a) W ilu rzędach ustawiono krzesła?

b) Ile jest miejsc siedzących w tym teatrze?

Rozwiązanie

Zauważamy, że liczby krzeseł w kolejnych rzędach tworzą n wyrazowy ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach $a_1 = 24$, $a_n = 80$ i różnicy $r = 4$.

a) $80 = 24 + (n-1)\cdot 4$, skąd $n = 15$. $\quad a_n = a_1 + (n-1)r$

b) $S_{15} = \frac{24 + 80}{2}\cdot 15$, skąd $S_{15} = 780$. $\quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$

Odp.: **a)** 15 rzędów krzeseł, **b)** 780 miejsc siedzących.

Ćwiczenie 41. Rowerzysta w ciągu pierwszej godziny przejechał 18 km, a w ciągu każdej następnej godziny odcinek o 0,8 km krótszy od poprzedniego. W ciągu ostatniej godziny przejechał 14 km.

a) Ile czasu trwała podróż?

b) Ile kilometrów przejechał rowerzysta?

Przykład 29. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz pierwszy a_1 jest równy –3, a różnica r jest równa 3. Oblicz sumę S jego wyrazów od dziesiątego do dwudziestego.

Rozwiązanie

$$\underbrace{\underbrace{a_1+\ldots+a_9}_{S_9}+\underbrace{a_{10}+\ldots+a_{20}}_{S}}_{S_{20}}, \text{ czyli } S=S_{20}-S_9.$$

$$S_9=\frac{2a_1+8r}{2}\cdot 9=\frac{2\cdot(-3)+8\cdot 3}{2}\cdot 9=81$$

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n$$

$$S_{20}=\frac{2a_1+19r}{2}\cdot 20=\frac{2\cdot(-3)+19\cdot 3}{2}\cdot 20=510,$$

$$S=S_{20}-S_9=510-81=429.$$

Odp.: $S=429$.

Ćwiczenie 42. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz pierwszy a_1 jest równy 10, a różnica r jest równa –2. Oblicz sumę S jego wyrazów od piętnastego do trzydziestego.

Przykład 30. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n), którego suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem $S_n=\frac{7}{2}n^2-\frac{1}{2}n$. Podaj wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

I sposób

$a_n=S_n-S_{n-1}$, gdy $n\geq 2$,

$$a_n=\frac{7}{2}n^2-\frac{1}{2}n-\left[\frac{7}{2}(n-1)^2-\frac{1}{2}(n-1)\right],$$

$$a_n=7n-4.$$

II sposób

$$a_1=S_1=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3,$$

$$a_2=S_2-S_1=\frac{7}{2}\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 2-3=10,$$

więc $r=a_2-a_1=7$.

Zatem $a_n=3+(n-1)\cdot 7=7n-4$.

Odp.: $a_n=7n-4$.

Ćwiczenie 43. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), którego suma n początkowych wyrazów określona jest wzorem:

a) $S_n=n^2$, **b)** $S_n=n^2+2n$.

Przykład 31. Wyraź w zależności od n sumę $5+9+13+...+(4n+1)$. Oblicz, ile składników ma suma $5+9+13+...+2001$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że składniki sumy, czyli liczby

$$5,\ 9,\ 13,\ ...,\ (4n+1),$$

$5+9+...+(4n+1)$
$a_1 \ldots\ldots\ldots a_n$

tworzą ciąg arytmetyczny (a_n), w którym

$$a_1=5,\ a_2=9,\ \ldots,\ a_n=4n+1.$$

Zatem $r=a_2-a_1=4$.

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(5+4n+1)n}{2}=(3+2n)n=2n^2+3n.$$

Zauważmy, że $2001=4n+1$, skąd $n=500$.

Odp.: $5+9+13+...+(4n+1)=2n^2+3n$. Suma $5+9+13+...+2001$ ma 500 składników.

Ćwiczenie 44. Wyraź w zależności od n sumę $1+4+7+...+(3n-2)$. Oblicz, ile składników ma suma $1+4+7+...+1045$.

Przykład 32. Rozwiąż równanie $2+7+12+...+x=245$, którego lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie

Z warunków zadania: $a_1=2,\ a_2=7,\ \ldots,\ a_n=x$, zatem $r=a_2-a_1=5$.

$a_n=a_1+(n-1)r$, więc $x=2+(n-1)\cdot 5$, gdzie $n\in N^+$.

Obliczamy sumę S_n wyrazów ciągu 2, 7, ..., x.

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2},\ \text{więc}\ 245=\frac{(2+x)n}{2},$$

zatem $\begin{cases} x=2+(n-1)\cdot 5 \\ 245=\dfrac{(2+x)n}{2} \end{cases}$, skąd $\begin{cases} x=5n-3 \\ 5n^2-n-490=0 \end{cases}$.

$\Delta=9801,\ \sqrt{\Delta}=99,\ n_1=-9{,}8,\ n_2=10$

$n\in N^+$, więc $n=10$, zatem $x=5\cdot 10-3$.

Odp.: $x=47$.

Ćwiczenie 45. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest sumą kolejnych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego, gdy:

a) $1+2+3+...+x=78$, **b)** $1+3+5+...+x=81$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

36. a) 6, b) –2, c) 12, d) –4, e) $4\sqrt{2}$. **37.** a) 0, b) 61. **39.** $S_{50}=0$. **40.** a) 500 500, b) 500,5.
41. a) 6 h, b) 96 km. **42.** $S=-528$. **43.** a) $a_n=2n-1$, b) $a_n=2n+1$.
44. $S_n=\frac{1}{2}\cdot\left(3n^2-n\right)$, 349 składników. **45.** a) 12, b) 17.

Zadania utrwalające

7.57. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz:

a) a_5+a_{21}, jeśli $a_{13}=-1$,

b) $a_{14}+a_{20}+a_{10}+a_{24}$, jeśli $a_{17}=\sqrt{2}$,

c) $a_{11}+a_{17}+a_{23}+a_{29}$, jeśli $a_{10}+a_{30}=6$.

7.58. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych:

a) podzielnych przez 3, b) podzielnych przez 4, c) podzielnych przez 12,

d) które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 4,

e) które przy dzieleniu przez 11 dają resztę 7.

7.59. Oblicz sumę wyrazów ciągu arytmetycznego:

a) $7+7{,}5+8+\ldots+192{,}5$,

b) $\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}+\ldots+99\sqrt{2}$,

c) $-8{,}3-8-7{,}7+\ldots+21{,}4$,

d) $13{,}4+12{,}9+12{,}4+\ldots+(-21{,}1)$.

7.60. Wyraź w zależności od n sumę:

a) $1+6+11+\ldots+(5n-4)$,

b) $3+8+13+\ldots+(5n-2)$,

c) $7+11+15+\ldots+(4n+3)$,

d) $10+21+32+\ldots+(11n-1)$.

7.61. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz:

a) S_7, jeśli $a_4=0$,

b) S_5, jeśli $a_3=2$,

c) S_{23}, jeśli $a_{12}=4$,

d) S_{29}, jeśli $a_{15}=15$,

e) S_{43}, jeśli $a_{22}=5$,

f) S_{2n-1}, jeśli $a_n=x$.

7.62. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n), w którym:

a) $a_1=16$ i $S_9=0$,

b) $r=-2$ i $S_{23}=-598$,

c) $a_1=4$ i $S_{32}=-616$,

d) $a_1=-200$ i $S_{40}=-2540$,

e) $S_1=5$ i $S_2=8$,

f) $S_2=9$ i $S_3=15$.

7.63. Wyznacz ciąg arytmetyczny (a_n), w którym:

a) $a_8 = 23$ i $S_7 = 105$, **b)** $a_{15} = 47$ i $S_{15} = 390$, **c)** $S_5 = 35$ i $S_7 = 70$,

d) $a_6 = 7$ i $S_{11} = 77$, **e)** $a_1 = 2$, $a_n = 50$ i $S_n = 442$, **f)** $S_6 = 3$ i $S_{20} = -130$.

7.64. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), którego suma S_n początkowych wyrazów określona jest wzorem:

a) $S_n = 6n - 3n^2$, **b)** $S_n = 2n^2 + 3n$, **c)** $S_n = \frac{3n^2}{2}$, **d)** $S_n = \frac{1}{2}\left(7n^2 - 5n\right)$.

7.65. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Sprawdź, czy istnieje takie n, że $S_n = n$, gdy:

a) $a_n = 3n - 50$, **b)** $a_n = 4n - 30$, **c)** $a_n = 104 - 6n$.

7.66. Składniki podanej sumy są wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n). Wyraź wyraz x w zależności od n.

a) $-2 + 1 + 4 + \ldots + x$, **b)** $7 + 5 + 3 + \ldots + x$, **c)** $-0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}9 + \ldots + x$,

7.67. Rozwiąż równanie z niewiadomą n:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 3n$, **b)** $3 + 9 + 15 + \ldots + (6n - 3) = 363$,

c) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = 153$, **d)** $-5 - 1 + 3 + \ldots + (4n - 9) = 4650$,

e) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \ldots + \frac{n}{3} = 26$, **f)** $3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = 2n^2 - 899$.

7.68. Wiedząc, że składniki występujące po lewej stronie równania są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, rozwiąż równanie:

a) $3 + 9 + 15 + \ldots + x = 363$,

b) $(1 + 2x) + (4 + 2x) + (7 + 2x) + \ldots + (28 + 2x) = 155$,

c) $(1 + x) + (2 + 3x) + (3 + 5x) + \ldots + (50 + 99x) = 275$.

7.69. Z ciągu liczb naturalnych dodatnich wynotowano sto takich kolejnych liczb, dających w sumie 17 950, z których każda ma tę własność, że jeśli podzielimy ją przez 3, to uzyskamy resztę 1. Znajdź najmniejszą i największą z wynotowanych liczb.

7.70. Miary kątów wewnętrznych wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny. Najmniejszy z kątów ma 119°, a największy 169°. Wiedząc, że suma S_n miar kątów n-kąta określona jest wzorem $S_n = (n - 2) \cdot 180°$, wyznacz liczbę boków tego wielokąta.

7.71. Oblicz długości boków i pole trójkąta prostokątnego, wiedząc, że długości jego boków tworzą ciąg arytmetyczny, a jego obwód jest równy 120 cm.

Pojęcie ciągu geometrycznego

Przykład 33. Oblicz, ile maksymalnie każdy z nas mógł mieć biologicznych prapraprapraprapraprzodków.

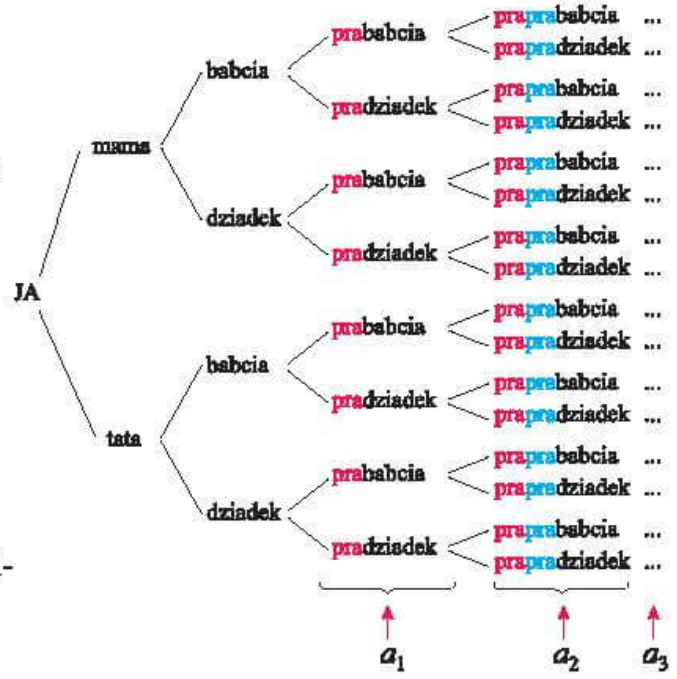
Rozwiązanie

Analizując schemat przedstawiony na rysunku, zauważamy, że liczby naszych praprzodków tworzą ciąg, w którym:

$$\underset{a_1}{8},\ \underset{a_2}{16},\ \underset{a_3}{32},\ \underset{a_4}{64},\ \underset{a_5}{128},\ \ldots$$

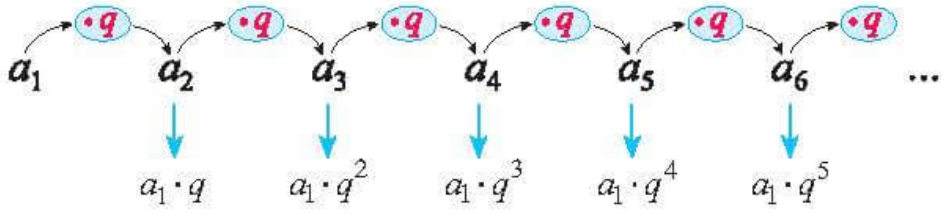
Szukamy wyrazu a_5, gdyż pięć razy przedrostek *pra-* występuje przed wyrazem przodek.

Odp.: Każdy z nas mógł mieć maksymalnie 128 prapraprapraprapraprzodków.



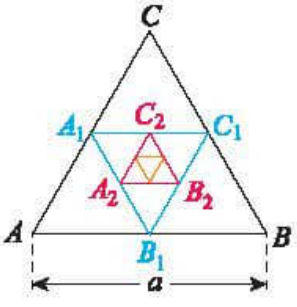
Definicja

Ciągiem geometrycznym (a_n) nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trójwyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje z pomnożenia wyrazu poprzedniego przez liczbę q, zwaną ilorazem ciągu geometrycznego.



$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_6}{a_5} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ćwiczenie 46. Łącząc środki boków trójkąta równobocznego ABC o boku a, wpisano w niego trójkąt $A_1B_1C_1$ w sposób przedstawiony na rysunku. Analogicznie w trójkąt $A_1B_1C_1$ wpisano trójkąt $A_2B_2C_2$ itd. Oblicz pola trójkątów: ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$. Czy pola kolejnych trójkątów tworzą ciąg geometryczny?



Ćwiczenie 47. Podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz q tego ciągu.

a) $9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \ldots,$ **b)** $-5,\ -0{,}5,\ -0{,}05,\ -0{,}005,\ \ldots,$

c) $-\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ 4,\ \ldots,$ **d)** $1+\sqrt{2},\ \sqrt{2}+2,\ 2+2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}+4,\ \ldots.$

Przykład 34. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n=\frac{3}{2}\cdot 2^n$.

Oblicz: **a)** $a_1,\ a_2,\ a_5,\ a_6,$ **b)** $a_{n+1}:a_n.$ Czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym?

Rozwiązanie

a) $a_1=\frac{3}{2}\cdot 2^1=3,\quad a_2=\frac{3}{2}\cdot 2^2=6,$

$a_5=\frac{3}{2}\cdot 2^5=48,\quad a_6=\frac{3}{2}\cdot 2^6=96.$

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{3}{2}\cdot 2^{n+1}}{\frac{3}{2}\cdot 2^n}=2^{n+1-n}=2.$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$

Odp.: **a)** $a_1=3,\ a_2=6,\ a_5=48,\ a_6=96,$ **b)** $a_{n+1}:a_n=2.$

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

Ćwiczenie 48. Określ, czy ciąg (a_n) jest geometryczny, gdy:

a) $a_n=3^n,$ **b)** $a_n=3\cdot 2^{-n}.$

Przykład 35. Wyznacz wyraz a_n ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym a_1 i ilorazie q.

Rozwiązanie

Z definicji ciągu geometrycznego wynika, że:

$a_2=a_1\cdot q=a_1\cdot q^{2-1}$

$a_3=a_2\cdot q=\underbrace{a_1\cdot q}_{a_2}\cdot q=a_1\cdot q^2=a_1\cdot q^{3-1}$

$a_4=a_3\cdot q=\underbrace{a_1\cdot q^2}_{a_3}\cdot q=a_1\cdot q^3=a_1\cdot q^{4-1}$

. . . . . .

$a_n=a_{n-1}\cdot q=a_1\cdot q^{n-1}.$

Twierdzenie

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to n-ty wyraz ciągu określony jest wzorem $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$.

Ćwiczenie 49. Napisz wzór ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, gdy:

a) $a_1 = 3$ i $q = 4$, **b)** $a_1 = 2$ i $q = 2$, **c)** $a_1 = 3$ i $q = \frac{1}{3}$.

Uwaga

Ciąg geometryczny (a_n) można określić wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q, \text{ gdy } n \in N^+ \end{cases}$$

gdzie a – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego,
q – iloraz ciągu geometrycznego.

Przykład 36. Wyraz a_n ciągu geometrycznego przedstaw w postaci $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ i podaj a_1 oraz q, gdy: **a)** $a_n = 5 \cdot 3^{-n}$, **b)** $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

Rozwiązanie

a) $a_n = 5 \cdot 3^{-n} = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$3^{-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

więc $a_1 = 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ i $q = \frac{1}{3}$.

b) *I sposób*

$a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$, więc

$a_1 = \frac{2^1}{3^{1+1}} = \frac{2}{9}$,

$a_2 = \frac{2^2}{3^{2+1}} = \frac{4}{27}$.

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{27} : \frac{2}{9} = \frac{4}{27} \cdot \frac{9}{2} = \frac{2}{3}$.

Zatem $a_n = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

II sposób

$a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3 \cdot 3^n} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} =$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$= \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, więc

$a_1 = \frac{2}{9}$ i $q = \frac{2}{3}$.

Ćwiczenie 50. Wyraz a_n ciągu geometrycznego przedstaw w postaci $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ i podaj a_1 oraz q, gdy:

a) $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$, **b)** $a_n = (-2)^n$, **c)** $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$, **d)** $a_n = 2 \cdot 2^{-n}$, **e)** $a_n = 1{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-n}$.

Przykład 37. Oblicz iloraz q ciągu geometrycznego i podaj dwa następne jego wyrazy, wiedząc, że trzema początkowymi wyrazami tego ciągu są liczby:

a) 4, 0, 0, ..., **b)** 0, 0, 0, ...

Rozwiązanie

Z definicji ciągu geometrycznego: $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q$, ...

Jeżeli: • $a_1 \neq 0$, to $q = \frac{a_2}{a_1}$,

• $a_1 = 0$, to $a_2 = a_3 = ... = 0$, więc q może być dowolną liczbą rzeczywistą.

a) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0}{4} = 0$, $a_4 = a_5 = 0$.

b) $q \in R$, $a_4 = a_5 = 0$.

Jeżeli w ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q:

- $\boldsymbol{a_1 \neq 0}$ **i** $\boldsymbol{q \neq 0}$, to $\boldsymbol{q = \frac{a_{n+1}}{a_n}}$,
- $\boldsymbol{a_1 \neq 0}$ **i** $\boldsymbol{q = 0}$, to $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ..., $a_n = 0$,
- $\boldsymbol{a_1 = 0}$ **i** $\boldsymbol{q \in R}$, to $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, ..., $a_n = 0$.

Ćwiczenie 51.

a) Który z ciągów: (3, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 3, 0) nie jest ciągiem geometrycznym?

b) Czy jeżeli $a_n = (0, 0, 0, 0)$, to iloraz q może być równy 0?

c) Czy każdy ciąg geometryczny, którego iloraz q jest równy 0, jest ciągiem stałym?

Odpowiedzi do ćwiczeń

46. $P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $P_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$, $P_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{64}$, $P_{\Delta A_3B_3C_3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{256}$, tak.

47. a) $\frac{1}{3}$, **b)** 0,1, **c)** -2, **d)** $\sqrt{2}$. **48. a)** Tak, **b)** tak. **49. a)** $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, **b)** $a_n = 2^n$, **c)** $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

50. a) $a_1 = 3$, $q = 5$, **b)** $a_n = -2 \cdot (-2)^{n-1}$, $a_1 = q = -2$, **c)** $a_n = \frac{16}{25} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, $a_1 = \frac{16}{25}$, $q = \frac{4}{5}$,

d) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, **e)** $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $a_1 = 1$, $q = \frac{3}{2}$. **51. a)** Ciąg (0, 3, 0), **b)** tak, **c)** nie.

Zadania utrwalające

7.72. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, w którym:

a) $a_1=-1,\ q=0{,}1$,
b) $a_1=5,\ q=-1$,
c) $a_1=-\sqrt{3},\ q=-\sqrt{3}$,
d) $a_1=10^{10},\ q=10^{-1}$.

7.73. Oblicz wyrazy:

a) a_7 i a_{14} ciągu geometrycznego (a_n) o początkowych wyrazach $\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ 3\sqrt{2},\ \ldots$,
b) a_5 i a_7 ciągu geometrycznego (a_n) o początkowych wyrazach $\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \ldots$,
c) a_4 i a_8 ciągu geometrycznego (a_n) o początkowych wyrazach $\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ \sqrt{2},\ \ldots$.

7.74. W ciągu geometrycznym (a_n) spośród wielkości: $a_1,\ q,\ n,\ a_n$ dane są trzy. Oblicz czwartą wielkość, gdy:

a) $a_1=\frac{1}{2},\ q=\frac{4}{3},\ n=4$,
b) $a_1=2,\ n=6,\ a_n=64$,
c) $a_1=-\frac{3}{2},\ q=\frac{1}{3},\ a_n=-\frac{1}{54}$,
d) $q=\frac{\sqrt{2}}{2},\ n=7,\ a_n=-\frac{\sqrt{2}}{8}$.

7.75. D Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, gdy:

a) $a_n=4^n$,
b) $a_n=2\cdot 3^{n-1}$,
c) $a_n=-2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^n$,
d) $a_n=-\frac{2}{3}\cdot(1{,}5)^{n+2}$,
e) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$,
f) $a_n=4^{n+1}-4^{n-1}$.

7.76. D Uzasadnij, że ciąg (b_n) nie jest ciągiem geometrycznym, gdy:

a) $b_n=2^{n^2}$,
b) $b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2-1}$.

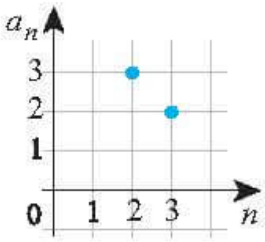
7.77. Napisz wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), w którym:

a) $a_1=4$ i $q=-1$,
b) $a_1=1$ i $q=-1$,
c) $a_1=64$ i $q=2$,
d) $a_1=\frac{1}{216}$ i $q=6$,
e) $a_2=\frac{1}{4}$ i $a_3=-\frac{3}{4}$,
f) $a_1=\frac{1}{64}$ i $a_3=\frac{1}{16}$.

7.78. Wyraz a_n ciągu geometrycznego przedstaw w postaci $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$, gdy:

a) $a_n=4^n$,
b) $a_n=5^{n+2}$,
c) $a_n=6^{n-2}$,
d) $a_n=(-2)^n$,
e) $a_n=(-3)^{n+2}$,
f) $a_n=(-10)^{n+1}$,
g) $a_n=3^{-n}$,
h) $a_n=2^{1-n}$.

7.79. Na wykresie zaznaczono dwa punkty należące do wykresu nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n).



a) Wyznacz ten ciąg.

b) Podaj wzór na wyraz ogólny ciągu.

7.80. W ciągu geometrycznym (a_n) wyrazem piątym jest liczba 2. Oblicz iloczyn wyrazów $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_9$.

Własności ciągu geometrycznego

Monotoniczność ciągu geometrycznego zależy od wyrazu pierwszego a_1 oraz ilorazu q.

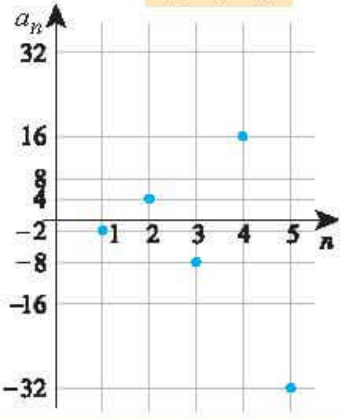
Przykład 38. Podaj pięć początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) i naszkicuj jego wykres, gdy: **a)** $q=-2$, $a_1=-2$, **b)** $q=-2$, $a_1=2$, **c)** $q=-1$, $a_1=3$.

Rozwiązanie

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu.

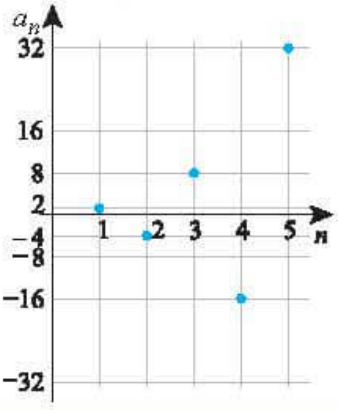
a) $a_1=-2$, $a_2=4$, $a_3=-8$, $a_4=16$, $a_5=-32$.

$a_n=(-2)^n$



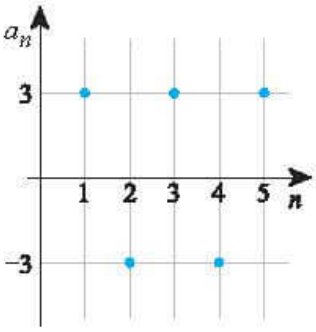
b) $a_1=2$, $a_2=-4$, $a_3=8$, $a_4=-16$, $a_5=32$.

$a_n=2\cdot(-2)^{n-1}$



c) $a_1=3$, $a_2=-3$, $a_3=3$, $a_4=-3$, $a_5=3$.

$a_n=3\cdot(-1)^{n-1}$



Zauważamy, że w ciągach określonych w punktach a), b), c) iloraz q ma wartość ujemną, a wyraz pierwszy a_1 ma wartość dodatnią lub ujemną. Ciągi te są naprzemienne.

Uwaga

Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q, w którym $a_1 \neq 0$ i $q<0$, **jest ciągiem naprzemiennym**, gdy jego kolejne wyrazy są na przemian dodatnie i ujemne, czyli gdy każde dwa kolejne wyrazy mają przeciwne znaki.

Ćwiczenie 52. Określ, czy naprzemienny jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem:

a) $a_n=(-1)^n$, **b)** $a_n=(-1)^{n-1}$, **c)** $a_n=(-1)^{n+1}$, **d)** $a_n=(-1)^{2n}$, **e)** $a_n=(-1)^{2n-1}$.

Przykład 39. Wykaż, że gdy $q\in(0;1)$ i $a_1>0$ lub $q>1$ i $a_1<0$, to ciąg geometryczny (a_n), określony wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$, jest malejący.

Rozwiązanie

Wyznaczamy różnicę wyrazów a_{n+1} i a_n.

$$a_{n+1}-a_n=a_1q^{n+1-1}-a_1q^{n-1}=a_1q^n-a_1q^{n-1}=a_1q^{n-1}(q-1).$$

1° Gdy $\begin{cases}q\in(0;1)\\a_1>0\end{cases}$, to $\left.\begin{array}{l}q-1>0\\q^{n-1}>0\\a_1<0\end{array}\right\}$, więc $a_1q^{n-1}(q-1)<0$, czyli $a_{n+1}-a_n<0$.

Gdy $q\in(0;1)$ i $a_1>0$, to ciąg geometryczny (a_n) jest malejący.

2° Gdy $\begin{cases}q>1\\a_1<0\end{cases}$, to $\left.\begin{array}{l}q-1>0\\q^{n-1}>0\\a_1<0\end{array}\right\}$, więc $a_1q^{n-1}(q-1)<0$, czyli $a_{n+1}-a_n<0$.

Gdy $q>1$ i $a_1<0$, to ciąg geometryczny $a_1<0$ jest malejący. ***cnw.***

Ćwiczenie 53. Wykaż, że ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$:

a) jest rosnący, gdy $q\in(0;1)$ i $a_1<0$ lub $q>1$ i $a_1>0$,

b) jest stały, gdy $q=1$ i $a_1\in R$ lub $a_1=0$ i $q\in R$.

Uwaga

Ciąg geometryczny jest:			
naprzemienny, gdy	**malejący, gdy**	**rosnący, gdy**	**stały, gdy**
$\begin{cases}q<0\\a_1\neq0\end{cases}$	$\begin{cases}q\in(0;1)\\a_1>0\end{cases}$ lub $\begin{cases}q>1\\a_1<0\end{cases}$	$\begin{cases}q\in(0;1)\\a_1<0\end{cases}$ lub $\begin{cases}q>1\\a_1>0\end{cases}$	$\begin{cases}q=1\\a_1\in R\end{cases}$ lub $\begin{cases}a_1=0\\q\in R\end{cases}$

Ćwiczenie 54. Zbadaj monotoniczność ciągu geometrycznego określonego wzorem ogólnym:

a) $a_n=2^n$, **b)** $b_n=(-1)^{n-1}\cdot3$, **c)** $c_n=\dfrac{3}{2^{n-1}}$.

Ćwiczenie 55. Określ monotoniczność ciągu geometrycznego, którego trzema początkowymi wyrazami są liczby:

a) $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{3}{2}$, ..., **b)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, -1, $-\sqrt{3}$, ..., **c)** -100, $-100\sqrt[10]{10}$, $-100\sqrt[10]{100}$, ...

Przykład 40. Między liczby 100 i 0,01 wstaw takie trzy inne, by łącznie z danymi tworzyły ciąg geometryczny.

Rozwiązanie

Przyjmujemy, że $a_1 = 100$ i $a_5 = 0{,}01$. $100,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ 0{,}01$

$a_5 = 0{,}01$ i $a_5 = a_1 \cdot q^4$, więc $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$100 \cdot q^4 = 0{,}01$, skąd

$q^4 = 0{,}0001$ *Jeżeli* $a > 0$, *to* $x^4 = a$, *gdy* $x = \sqrt[4]{a}$ *lub* $x = -\sqrt[4]{a}$.

$q = 0{,}1$ lub $q = -0{,}1$.

Zatem istnieją dwa ciągi spełniające warunki przykładu:

100, 10, 1, 0,1, 0,01 lub 100, -10, 1, $-0{,}1$, 0,01.

Odp.: 10; 1; 0,1 lub -10; 1; $-0{,}1$.

Ćwiczenie 56. Między liczby:

a) 1 i 27 wstaw takie dwie liczby, by łącznie z danymi tworzyły ciąg geometryczny,

b) $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{128}$ wstaw pięć takich liczb, by łącznie z danymi tworzyły ciąg geometryczny.

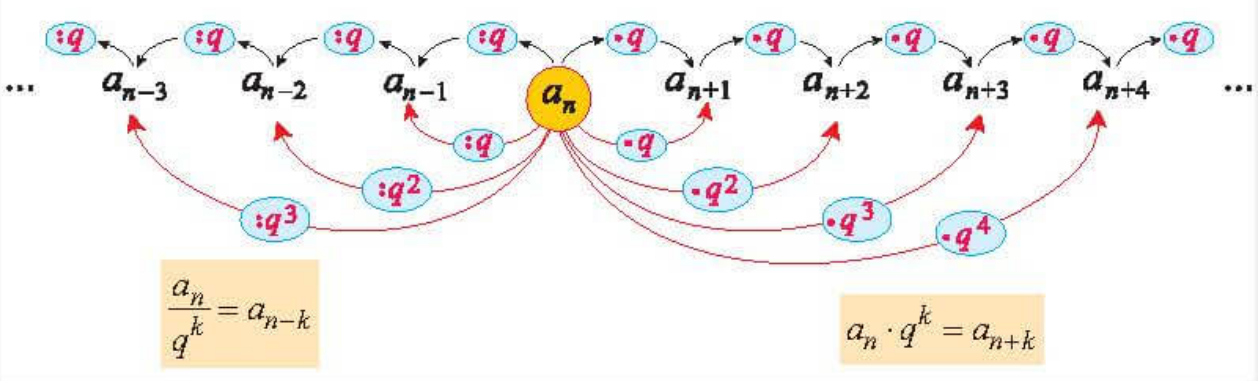
Uwaga

Z definicji ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wynika, że:

$a_n \cdot q = a_{n+1}$, $a_n \cdot q^2 = a_{n+2}$, ..., $a_n \cdot q^k = a_{n+k}$,

$\frac{a_n}{q} = a_{n-1}$, $\frac{a_n}{q^2} = a_{n-2}$, ..., $\frac{a_n}{q^k} = a_{n-k}$.

Ilustruje to poniższy graf.



Ćwiczenie 57. Podaj, który wyraz ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q opisuje wyrażenie: **a)** $\frac{a_{20}}{q^5}$, **b)** $\frac{a_{31}}{q^{14}}$, **c)** $\frac{a_{100}}{q^{75}}$, **d)** $a_{99}\cdot q^{13}$.

Ćwiczenie 58. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę. **a)** $\frac{a_{14}}{q^{\blacksquare}}=a_6$, **b)** $\frac{a_{20}}{a_{10}}=q^{\blacksquare}$, **c)** $a_{11}\cdot q^{\blacksquare}=a_{31}$, **d)** $\frac{a_{13}}{a_{\blacksquare}}=q^5$, **e)** $a_{21}\cdot q^9=a_{\blacksquare}$, **f)** $\frac{a_{\blacksquare}}{a_{14}}=q^8$.

Uwaga

Wyznaczyć ciąg geometryczny (a_n), to znaczy znaleźć jego pierwszy wyraz a_1 i iloraz q.

Przykład 41. Wyznacz ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_5=16$ i $a_9=81$.

Rozwiązanie

I sposób

Jeśli $a_5=16$ i $a_9=81$, to

$\frac{a_9}{a_5}=q^4$

$q^4=81:16=\frac{81}{16}$, więc

Jeżeli $a>0$, to $x^4=a$, gdy $x=\sqrt[4]{a}$ lub $x=-\sqrt[4]{a}$.

$q=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ lub $q=-\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$

$q=\frac{3}{2}$ lub $q=-\frac{3}{2}$.

$a_5=a_1\cdot q^4$

Zatem $16=a_1\cdot\frac{81}{16}$, skąd $a_1=\frac{256}{81}$.

II sposób

Wartość q^4 możemy otrzymać, dzieląc stronami równania układu

$\begin{cases}a_1q^4=16\\ a_1q^8=81\end{cases}$

$a_5=16$ i $a_9=81$

Zatem $\frac{a_1q^4}{a_1q^8}=\frac{16}{81}$, skąd $q^4=\frac{81}{16}$, więc $q=\frac{3}{2}$ lub $q=-\frac{3}{2}$.

$a_1\neq 0$ i $q\neq 0$

Odp.: $a_1=\frac{256}{81}$ i $q=\frac{3}{2}$ lub $a_1=\frac{256}{81}$ i $q=-\frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 59. Wyznacz ciąg geometryczny (a_n), w którym:

a) $a_3 = 18$ i $a_5 = 162$, **b)** $a_2 = 125$ i $a_5 = 64$.

Twierdzenie

Ciąg (a_n), gdzie $n \in N^+$, jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, gdzie $n \geq 2$.

Udowodnimy twierdzenie: Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

***Z* (*założenie*):** (a_n) – ciąg geometryczny, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in N^+$, $n \geq 2$ | ***T* (*teza*):** $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

***Dowód*:**

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1-1}}_{a_{n-1}} \cdot \underbrace{a_1 \cdot q^{n+1-1}}_{a_{n+1}} = a_1^2 \cdot q^{n-2+n} = \left(\underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n}\right)^2$$

Zatem $a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n^2$ ***c.n.u.***

Uwaga

W ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich każdy wyraz a_n, oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego, jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich, czyli wyrazu poprzedniego a_{n-1} i następnego a_{n+1}. $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Ćwiczenie 60. Sprawdź, czy trzema kolejnymi wyrazami tego samego ciągu geometrycznego są liczby:

a) $3, 15, 75$, **b)** $240\sqrt{5}, 600, 300\sqrt{5}$, **c)** $6-2\sqrt{5}, 16-8\sqrt{5}, 56-24\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 61. Oblicz x, wiedząc, że kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego są:

a) $-6, 15, \frac{x}{2}$, **b)** $-2, x+1, -50$, **c)** $x-1, x+2, 3x$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

52. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** tak, **d)** nie, **e)** nie. **54.** Ciąg: **a)** rosnący, **b)** naprzemienny, nie jest monotoniczny, **c)** malejący. **55.** Ciąg: **a)** rosnący, **b)** malejący, **c)** malejący.

56. **a)** 3 i 9, **b)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ lub $-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{64}$. **57.** **a)** a_{15}, **b)** a_{17}, **c)** a_{25}, **d)** a_{112}.

58. **a)** 8, **b)** 10, **c)** 20, **d)** 8, **e)** 30, **f)** 22. **59.** **a)** $a_1 = 2$ i $q = 3$ lub $a_1 = 2$ i $q = -3$, **b)** $a_1 = \frac{625}{4}$ i $q = \frac{4}{5}$.

60. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** tak. **61.** **a)** $x = -75$, **b)** $x = -11$ lub $x = 9$, **c)** $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 4$.

Zadania utrwalające

7.81. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij, podając przykłady ciągów geometrycznych spełniających podane warunki. Określ monotoniczność podanego ciągu.

q	$a_1 < 0$	$a_1 > 0$
$q < 0$		1, –3, 9, –27, ... ciąg niemonotoniczny
$q = 0$	–5, 0, 0, 0, ... ciąg niemalejący	
$0 < q < 1$		
$q > 1$		

7.82. Między liczby 16 i 1024 wstaw:

a) takie dwie liczby, **b)** takich pięć liczb,

by łącznie z danymi tworzyły ciąg geometryczny.

7.83. Wyznacz ciąg geometryczny (a_n), w którym:

a) $a_2 = \frac{5}{7}$ i $a_5 = \frac{49}{25}$, **b)** $a_5 = 1000$ i $a_8 = 0{,}001$,

c) $a_3 = 4$ i $a_5 = 1$, **d)** $a_5 = 1$ i $a_9 = 1296$.

7.84. Sprawdź, czy trzema kolejnymi wyrazami tego samego ciągu geometrycznego są liczby:

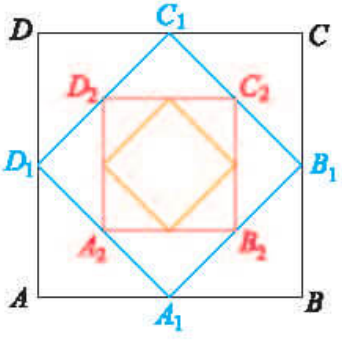
a) 3, 4,5, 6,75, **b)** $\sqrt{3} - \sqrt{5}$, -2, $-\sqrt{20} - \sqrt{12}$, **c)** $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[4]{7^3}$.

7.85. Oblicz x i podaj wyrazy ciągu geometrycznego, wiedząc, że kolejnymi jego wyrazami są:

a) $1, x, 1\frac{9}{16}$, **b)** $x, 4, \frac{16}{3}$, **c)** $\frac{1}{9}, x-1, 4$,

d) $2(x+1), x+1, x-1$, **e)** $x+4, 5x+2, 16x+1$.

7.86. Łącząc środki boków kwadratu $ABCD$ o boku a, wpisano kwadrat $A_1B_1C_1D_1$ w sposób przedstawiony na rysunku. Analogicznie w kwadrat $A_1B_1C_1D_1$ wpisano kwadrat $A_2B_2C_2D_2$ itd. Oblicz pola kwadratów: $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$. Czy pola tych kwadratów tworzą ciąg geometryczny? Jeśli tak, to podaj pole dziesiątego kwadratu.



7.87. Uzasadnij, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, gdy:

D

a) $a_n = 3 \cdot 2^{4n+1}$, **b)** $a_n = 3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n$.

7.88. Ktoś w ciągu godziny przekazał plotkę 10 osobom. Następnie każda z nowo powiadomionych osób w ciągu godziny przekazała plotkę 10 innym osobom, które jej jeszcze nie słyszały itd.

a) Ile osób znało plotkę po upływie: **1** 2 godzin, **2** 3 godzin, **3** 4 godzin?

b) Po ilu godzinach plotkę znaliby wszyscy ludzie żyjący na Ziemi? Przyjmij, że na Ziemi żyje $6 \cdot 10^9$ ludzi.

7.89. Liczby $3-2\sqrt{2}$, $10-7\sqrt{2}$, $34-24\sqrt{2}$ są trzecim, czwartym i piątym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n).

a) Oblicz iloraz q tego ciągu.

b) Oblicz wyraz pierwszy ciągu.

c) Oblicz różnicę wyrazów siódmego i piątego.

7.90. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Oblicz:

a) a_3, gdy $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = 243$,

b) a_7, gdy $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 5$,

c) a_{15}, gdy $a_{13} \cdot a_{14} \cdot a_{15} \cdot a_{16} \cdot a_{17} = 32$,

d) a_{10}, gdy $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{14} = 1$.

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Zapis

$$S_n = a_1 + \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3} + \ldots + \underbrace{a_1 \cdot q^{n-2}}_{a_{n-1}} + \underbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}_{a_n}$$

oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n).

Po wyłączeniu wyrazu a_1 przed nawias otrzymamy:

$$\underbrace{S_n}_{\substack{\text{suma } n \text{ wyrazów} \\ \text{ciągu geo-} \\ \text{metrycz-} \\ \text{nego}}} = \underbrace{a_1}_{\substack{\text{wyraz} \\ \text{pierwszy} \\ \text{ciągu geo-} \\ \text{metrycz-} \\ \text{nego}}} \cdot \underbrace{\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}\right)}_{\substack{\text{suma kolejnych potęg} \\ \text{ilorazu } q, \\ \text{gdy } n \in N^+}}.$$

Twierdzenie

W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q suma n początkowych wyrazów ciągu określona jest wzorem:

- $\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$, gdy $q \neq 1$,
- $\boldsymbol{S_n = n \cdot a_1}$, gdy $q = 1$.

***Z* (*założenie*)**: (a_n) – ciąg geometryczny o ilorazie q, gdzie $q \neq 1$. | ***T*(*teza*)**: $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

Dowód:

$$S_n = a_1 \cdot \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}\right) \quad / \cdot q$$

Mnożymy obie strony równości przez q.

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot \left(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n\right)$$

Obliczamy wartość wyrażenia $q \cdot S_n - S_n$

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot \left(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n\right) - a_1 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}\right) =$$

$$= a_1 \left(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n - 1 - q - q^2 - \ldots - q^{n-2} - q^{n-1}\right).$$

Zatem $q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)$

$$S_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot \left(q^n - 1\right) \quad / : (q-1)$$

Z założenia $q \neq 1$.

$\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$, czyli $S_n = a_1 \cdot \frac{-\left(-q^n + 1\right)}{-(-q+1)}$, zatem $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ ***c.n.u.***

Uwaga

Postacie wzoru na sumę S_n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego stosujemy w zależności od łatwości wykonywania obliczeń. Wygodniej jest stosować wzór:

- $\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$, gdy $\boldsymbol{-1 < q < 1}$,
- $\boldsymbol{S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$, gdy $\boldsymbol{q < -1}$ lub $\boldsymbol{q > 1}$.

Ćwiczenie 62. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Uzasadnij, że suma S_n początkowych wyrazów tego ciągu określona jest wzorem:

a) $S_n = a_1$, gdy $q = 0$, **b)** $S_n = n \cdot a_1$, gdy $q = 1$.

Przykład 42. Oblicz sumę:

a) pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 4$ i $q = -2$,

b) sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) określonego wzorem $b_n = \frac{6}{3^n}$,

c) dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (c_n) o wyrazach początkowych $\frac{5}{341}, \frac{10}{341}, \frac{20}{341}, \ldots$.

Rozwiązanie

a) $n = 5$, $a_1 = 4$, i $q = -2$, więc

$S_5 = 4 \cdot \frac{1-(-2)^5}{1-(-2)}$, skąd $S_5 = 44$.

$S_5 = a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q}$

b) $n = 6$ i $b_n = \frac{6}{3^n}$, więc

$b_1 = 2$, $b_2 = \frac{2}{3}$, skąd $q = \frac{1}{3}$.

$q = \frac{b_2}{b_1}$

Zatem $S_6 = 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\frac{1}{3}}$, skąd $S_6 = \frac{3^6-1}{3^5} = \frac{728}{243}$.

$S_6 = a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q}$

c) $n = 10$, $c_1 = \frac{5}{341}$, $c_2 = \frac{10}{341}$, skąd $q = 2$.

$q = \frac{c_2}{c_1}$

Zatem $S_{10} = \frac{5}{341} \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1}$, skąd $S_{10} = \frac{5}{341} \cdot 1023 = 15$.

$S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1}$

Odp.: **a)** $S_5 = 44$, **b)** $S_6 = \frac{728}{243}$, **c)** $S_{10} = 15$.

Ćwiczenie 63. Oblicz sumę: **a)** czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 2{,}7$ i $q = \frac{1}{3}$, **b)** ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) określonego wzorem $b_n = \frac{3}{2^n}$, **c)** pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (c_n) o wyrazach początkowych $4, 12, 36, \ldots$.

Przykład 43. Wiedząc, że składniki sumy są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, oblicz sumę $40-20+10-\ldots+\frac{5}{8}$.

Rozwiązanie

$$\underbrace{40}_{a_1}\ \underbrace{-\ 20}_{a_2}+10-\ldots+\underbrace{\frac{5}{8}}_{a_n}$$

(a_n) – ciąg geometryczny

$a_1=40,\ a_2=-20,$ więc $q=-\frac{1}{2}$.

$\frac{a_2}{a_1}=q$

$a_n=\frac{5}{8},$ więc $\quad 40\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{5}{8}\ /:40$

$a_1\cdot q^{n-1}=a_n$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{64}$$

$\frac{1}{64}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6,\ \text{zatem}$$

Jeżeli $a^k=a^m$, to $k=m$, gdzie $a>0$ i $a\neq 1$.

$n-1=6,$ skąd $n=7$.

$$S_7=40\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=40\cdot\frac{1+\frac{1}{2^7}}{1+\frac{1}{2}},\ \text{więc}$$

$S_7=a_1\cdot\frac{1-q^7}{1-q}$

$$S_7=\frac{215}{8}.$$

Odp.: $40-20+10-\ldots+\frac{5}{8}=\frac{215}{8}$.

Ćwiczenie 64. Wiedząc, że składniki sumy są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, oblicz sumę: **a)** $2+6+18+\ldots+2\cdot 3^6$, **b)** $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1-\ldots+16$.

Uwaga

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q i S_n jest sumą n początkowych jego wyrazów, to $\boldsymbol{q=\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}}$, gdzie $n>1$.

Ćwiczenie 65. Wykaż, że w ciągu geometrycznym (a_n) prawdziwa jest równość $\frac{S_n-a_1}{S_n-a_n}=q$, gdzie $n>1$.

Przykład 44. Kwotę 4 650 zł rozdzielono na pewną liczbę nagród. Kwoty nagród tworzą malejący ciąg geometryczny. Oblicz wartości nagród, wiedząc, że największa z nich była równa 2 400 zł, a najmniejsza 150 zł.

Rozwiązanie

Kwoty nagród tworzą ciąg geometryczny $(a_1, a_2, ..., a_n)$, w którym:

$S_n = 4\,650, \quad a_1 = 2\,400, \quad a_n = 150.$

$q = \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n} = \frac{4\,650 - 2\,400}{4\,650 - 150} = \frac{2\,250}{4\,500} = \frac{1}{2}$, więc

$a_2 = 2\,400 \cdot \frac{1}{2} = 1\,200, \quad a_3 = 1\,200 \cdot \frac{1}{2} = 600, \quad a_4 = 600 \cdot \frac{1}{2} = 300, \quad a_5 = 300 \cdot \frac{1}{2} = 150.$

Odp.: Wartości nagród: 2 400 zł, 1 200 zł, 600 zł, 300 zł, 150 zł.

Ćwiczenie 66. Kwotę 4 375 zł rozdziel na pewną liczbę nagród, których wartości tworzą malejący ciąg geometryczny $(a_1, ..., a_n)$, gdzie $a_1 = 1\,600$ i $a_n = 675$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

63. a) $S_4 = 4$, b) $S_8 = \frac{765}{256}$, c) $S_5 = 484$. 64. a) $S_7 = 3^7 - 1 = 2186$, b) $S_7 = \frac{43}{4}$.

65. *Wskazówka.* $S_n - a_1 = a_1 \cdot q \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$ i $S_n - a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$. 66. 1 600 zł, 1 200 zł, 900 zł, 675 zł.

Zadania utrwalające

7.91. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym:

a) $a_1 = \frac{2}{3}, \ a_2 = 1,$ b) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ a_2 = 1,$ c) $a_2 = 1$ i $a_5 = \frac{125}{8}.$

7.92. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), gdy:

a) $a_n = 2^n,$ b) $a_n = (-0{,}8)^n,$ c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$

d) $a_n = -35 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^n,$ e) $a_n = \frac{1}{124} \cdot 2^{n-1},$ f) $a_n = 3^{2-n}.$

7.93. Wiedząc, że składniki są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, oblicz sumę:

a) $1 + 2 + ... + 512,$ b) $2 - 4 + ... - 1024,$ c) $1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{16},$

d) $10^6 - 10^5 + ... - 10,$ e) $50 - 10 + 2 - ... + \frac{2}{25},$ f) $-1 - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} - ... - \frac{243}{32},$

g) $1 + \sqrt{3} + 3 + ... + 27,$ h) $1 - \sqrt{2} + 2 - ... + 4.$

7.94. Przerysuj tabelę do zeszytu i wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, w miejsca ■ wpisz brakujące liczby.

a_1	q	n	S_n
■	$\frac{1}{2}$	10	$4-\frac{1}{2^8}$
–5	0,1	4	■
3	■	2	5
4	3	■	13 120

7.95. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Oblicz:

a) S_8, gdy $a_3=5{,}2$ i $a_6=41{,}6$,

b) S_7, gdy $a_2=0{,}6$ i $a_6=\frac{3}{80}$,

c) S_4, gdy $a_6=\frac{1}{36}$ i $a_7=\frac{1}{108}$,

d) a_1 i q, gdy $S_5=242$ i $\frac{a_1+a_3}{a_3}=1\frac{1}{9}$.

7.96. Według znanej legendy wynalazca szachów na pytanie swojego władcy, jaką nagrodę pragnie otrzymać, odpowiedział:

– Na pierwszym polu szachownicy połóż, Panie, jedno ziarno pszenicy, na drugim – dwa ziarna, na trzecim – cztery ziarna, na czwartym – osiem ziaren, i tak dalej.

Ile ziaren pszenicy zażądał wynalazca szachów?

7.97. Wyznacz wszystkie trójwyrazowe ciągi geometryczne, w których $a_1\in N^+$, $q\in N^+$ i $S_3=21$.

7.98. D W dziesięciowyrazowym ciągu geometrycznym (a_n) iloraz q jest równy $\frac{2}{3}$ i wyraz pierwszy jest równy $\frac{2}{3}$. Czy suma wyrazów o numerach parzystych jest większa od sumy wyrazów o numerach nieparzystych? Odpowiedź uzasadnij.

7.99. Ciąg geometryczny jest dwunastowyrazowy. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu wiedząc, że jego środkowe wyrazy to $\frac{1}{36}$ i $\frac{1}{108}$.

7.100. Wyznacz ciąg geometryczny, który spełnia warunki $\frac{a_1+a_5}{a_3}=\frac{82}{9}$ oraz $S_5=242$.

7.101. W ciągu geometrycznym stosunek sumy czterech początkowych wyrazów do sumy ośmiu początkowych wyrazów jest równy 1:17. Oblicz iloraz q tego ciągu.

7.102. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu, którego wyrazy są kolejnymi naturalnymi potęgami liczby 3.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zadaniach

Przypomnijmy

Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to:

- $a_n = a_1 + (n-1)r$,
- $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot r}{2}\cdot n$
- $r = \frac{a_k - a_m}{k-m}$, gdzie $k \neq m$,
- $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, gdzie $n > 1$,
- $a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_n$, gdzie $k < n$.



Ćwiczenie 67. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę.

a) $a_{\blacksquare} = a_1 + 15r$, **b)** $a_{18} = a_1 + \blacksquare \cdot r$, **c)** $a_{\blacksquare} = \frac{a_{13} + a_{15}}{2}$,

d) $a_{16} + a_{20} = 2 \cdot a_{\blacksquare}$, **e)** $a_{32} + a_{\blacksquare} = 2a_{66}$, **f)** $r = \frac{a_{15} - a_{\blacksquare}}{7}$,

g) $r = \frac{a_{\blacksquare} - a_{17}}{4}$, **h)** $S_{\blacksquare} = \frac{(a_1 + a_{23})\cdot \blacksquare}{2}$, **i)** $S_{\blacksquare} = \frac{2a_1 + 35r}{2}\cdot \blacksquare$.

Przypomnijmy

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to:

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,
- $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$, gdzie $q \neq 1$,
- $\frac{a_n}{a_{n-k}} = q^k$, gdzie $k < n$,
- $S_n = n \cdot a_1$, gdzie $q = 1$,
- $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$,
- $a_n \cdot q^k = a_{n+k}$, gdzie $k \in N^+$,
- $q = \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n}$.



Ćwiczenie 68. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ■ wpisz brakującą liczbę.

a) $a_{23} = a_1 \cdot q^{\blacksquare}$, **b)** $a_{\blacksquare} = a_1 \cdot q^8$, **c)** $\frac{a_7}{a_{\blacksquare}} = q^2$, **d)** $a_{\blacksquare} \cdot q^7 = a_{16}$, **e)** $S_{\blacksquare} = 15a_1$,

f) $a_{\blacksquare}^2 = a_{17} \cdot a_{19}$, **g)** $a_{33}^2 = a_{\blacksquare} \cdot a_{\blacksquare}$, **h)** $\frac{S_{\blacksquare} - a_1}{S_{\blacksquare} - a_{15}} = q$, **i)** $S_{\blacksquare} = a_1 \cdot \frac{q^7 - 1}{q-1}$.

Przykład 45. Określ warunek, jaki powinny spełnić liczby a, b, c, aby jednocześnie tworzyły one ciąg arytmetyczny i geometryczny.

Rozwiązanie

Załóżmy, że r jest różnicą ciągu arytmetycznego (a, b, c).

Wtedy $b = a + r$ i $c = a + 2r$. Zatem kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego są liczby: a, $a + r$, $a + 2r$. Liczby te tworzą ciąg geometryczny, gdy:

$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

$$(a+r)^2 = a \cdot (a+2r)$$
$$a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + 2ar$$
$$r^2 = 0, \text{ więc } r = 0.$$

Jeżeli $r = 0$, to $b = a$ i $c = a$, więc $a = b = c$.

Odp.: Liczby a, b, c tworzą jednocześnie ciąg arytmetyczny i geometryczny, gdy $a = b = c$.

Uwaga

Każdy stały ciąg co najmniej trójwyrazowy jest jednocześnie ciągiem arytmetycznym i geometrycznym.

Ćwiczenie 69. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Określ, czy ciąg (a_n) może być arytmetyczny, gdy: **a)** $q = 1$, **b)** $q = -1$, **c)** $q = 0$.

Przykład 46. Liczby 144, a, b, c, 9 w podanej kolejności są wyrazami ciągu:

a) geometrycznego, **b)** arytmetycznego.

Oblicz a, b, c.

Rozwiązanie

a) $(144, a, b, c, 9)$ – pięciowyrazowy ciąg geometryczny (b_n) o ilorazie q.

$b_1 = 144$, $b_5 = 9$, więc $q^4 = \frac{9}{144} = \frac{1}{16}$

$q^4 = \frac{b_5}{b_1}$

$$q = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \text{ lub } q = -\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$$
$$q = \frac{1}{2} \text{ lub } q = -\frac{1}{2}.$$

Jeżeli $q = \frac{1}{2}$, to $a = 144 \cdot \frac{1}{2} = 72$, $b = 72 \cdot \frac{1}{2} = 36$, $c = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$.

Jeżeli $q = -\frac{1}{2}$, to $a = 144 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -72$, $b = -72 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 36$, $c = 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -18$.

b) $(144, a, b, c, 9)$ – pięciowyrazowy ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r.

$a_1 = 144$, $a_5 = 9$, więc $r = \frac{9-144}{5-1}$, skąd $r = -33,75$. $r = \frac{a_5 - a_1}{5-1}$

$a = 144 - 33,75 = 110,25$, $b = 110,25 - 33,75 = 76,5$, $c = 76,5 - 33,75 = 42,75$.

Odp.: **a)** $a = 72$, $b = 36$, $c = 18$ lub $a = -72$, $b = 36$, $c = -18$,

b) $a = 110,25$, $b = 76,5$, $c = 42,75$.

Ćwiczenie 70. Liczby 16, a, b, c, 81 w podanej kolejności są wyrazami ciągu:
a) arytmetycznego, **b)** geometrycznego.
Oblicz a, b, c.

Przykład 47. Liczby a, b, 1 w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego. Te same liczby w kolejności 1, a, b są wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz a i b.

Rozwiązanie

$(a, b, 1)$ – trójwyrazowy ciąg arytmetyczny (a_n), więc

$b = \frac{a+1}{2}$, skąd $2b = a + 1$. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

$(1, a, b)$ – trójwyrazowy ciąg geometryczny (b_n), więc

$a^2 = 1 \cdot b$, czyli $b = a^2$. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

$\begin{cases} 2b = a + 1 \\ b = a^2 \end{cases}$, więc $2a^2 = a + 1$.

$\Delta = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$

$2a^2 - a - 1 = 0$, skąd $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 1$.

Jeżeli $a = -\frac{1}{2}$, to $b = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Jeżeli $a = 1$, to $b = 1^2 = 1$.

Odp.: $a = -\frac{1}{2}$ i $b = \frac{1}{4}$ lub $a = 1$ i $b = 1$.

Ćwiczenie 71. Liczby a, b, 8 w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego. Te same liczby w kolejności 8, a, b są wyrazami ciągu geometrycznego. Oblicz a i b.

Ćwiczenie 72. Liczby a, 10, b w podanej kolejności są wyrazami ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego. Oblicz a i b.

Przykład 48. Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi i siódmy wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Rozwiązanie

Liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, liczby a_1, a_2, a_7 są wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a=a_1$, $b=a_2=a_1+r$, $c=a_7=a_1+6r$.

$$\begin{cases} a_1+a_1+r+a_1+6r=93 \\ (a_1+r)^2=a_1\cdot(a_1+6r) \end{cases}$$

$a_n=a_1+(n-1)\cdot r$

$a+b+c=93$

$b^2=ac$ – własność ciągu geometrycznego.

1 $\begin{cases} 3a_1+7r=93 \\ r^2-4a_1r=0 \end{cases}$

2 $r^2-4a_1r=0$

$r(r-4a_1)=0$

$r=0$ lub $r=4a_1$

$3a_1+7\cdot 0=93$ lub $3a_1+7\cdot 4a_1=93$

$a_1=31$ $a_1=3$, więc $r=12$.

Obliczamy wyrazy ciągu a, b, c.

$a=31$	$a=3$
$b=31$	$b=3+12=15$
$c=31$	$c=3+6\cdot 12=75$

Odp.: 31, 31, 31 lub 3, 15, 75.

Ćwiczenie 73. Trzy różne liczby, których suma jest równa 63, są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Te same liczby stanowią pierwszy, czwarty i szesnasty wyraz ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Odpowiedzi do ćwiczeń

67. **a)** 16, **b)** 17, **c)** 14, **d)** 18, **e)** 100, **f)** 8, **g)** 21, **h)** 23 i 23, **i)** 36 i 36.

68. **a)** 22, **b)** 9, **c)** 5, **d)** 9, **e)** 15, **f)** 18, **g)** 32 i 34, **h)** 15 i 15, **i)** 7.

69. **a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak, gdy $a_1=0$; nie, gdy $a_1\neq 0$.

70. **a)** $a=32{,}25$, $b=48{,}5$, $c=64{,}75$, **b)** $a=24$, $b=36$, $c=54$ lub $a=-24$, $b=36$, $c=-54$.

71. $a=-4$ i $b=2$ lub $a=8$ i $b=8$. **72.** $a=10$ i $b=10$. **73.** 3, 12, 48.

Zadania utrwalające

7.103. Podane liczby są pięcioma początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) albo ciągu geometrycznego (b_n). Napisz wzór tego ciągu:

a) $-1, 1, -1, 1, -1,$ **b)** $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{11}{6}, \frac{7}{3},$ **c)** $486, 162, 54, 18, 6,$

d) $5\frac{1}{2}, 8\frac{3}{4}, 12, 15\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2},$ **e)** $-3, -1, 1, 3, 5,$ **f)** $64, 80, 100, 125, 156\frac{1}{4}.$

7.104. Wiedząc, że składniki sumy są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego albo ciągu geometrycznego, oblicz sumę:

a) $1+3+5+\ldots+99+101,$ **b)** $8-2+\frac{1}{2}-\ldots+\frac{1}{512},$

c) $12+4+1\frac{1}{3}+\ldots+\frac{4}{243},$ **d)** $18+5{,}4+1{,}62+\ldots+0{,}1458,$

e) $\frac{4}{5}+1{,}1+1\frac{2}{5}+\ldots+2\frac{3}{10},$ **f)** $\frac{3}{4}+1+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{64}{27}.$

7.105. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{1+2+3+\ldots+1000}{2002},$ **b)** $\frac{3+5+7+\ldots+101}{2+4+6+\ldots+102},$ **c)** $\frac{-1+3+7+\ldots+235}{-8-3+2+\ldots+287},$

d) $\frac{16+8+4+\ldots+\frac{1}{2}}{96+48+24+\ldots+3},$ **e)** $\frac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+3n},$ **f)** $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)\cdot\frac{3^n}{3^n-1}.$

7.106. Ciągi (a_n), (b_n) i (c_n) określone są wzorami: $a_n=1+3+5+\ldots+(2n-1)$,

$b_n=1+4+7+\ldots+(3n-2)$, $c_n=\frac{a_n}{b_n}$.

a) Wypisz trzy początkowe wyrazy ciągów (a_n), (b_n) i (c_n).

b) Przedstaw wzory ciągów (a_n), (b_n), (c_n) w innej postaci.

c) Oblicz wyrazy a_{12}, b_{30} i c_{100}.

7.107. D Liczby a, aq, aq^2 są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wykaż, że jeśli:

a) $q>0$, $a>0$ i $a\neq 1$, to liczby $\log_a a$, $\log_a(aq)$, $\log_a\left(aq^2\right)$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego,

b) $a>0$, $q>0$ i $q\neq 1$, to liczby $\log_q a$, $\log_q(aq)$, $\log_q\left(aq^2\right)$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

7.108. Liczby 1, 5, 9 w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n), a liczby 7, 12, 17 w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (b_k).

a) Podaj najmniejszą liczbę, która jest jednocześnie wyrazem ciągu (a_n) i (b_k).

b) Podaj najmniejszą liczbę większą od 2000, która jest jednocześnie wyrazem ciągu (a_n) i (b_k).

7.109. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_1 = 1$, $n = 9$ i $S_n = 369$. Wyrazy b_1 i b_9 ciągu geometrycznego (b_n) spełniają warunki $b_1 = a_1$ i $b_9 = a_9$. Oblicz b_7.

7.110. Oblicz sumę:

a) $10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + ... + 2^2 - 1^2$, **b)** $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1^2$,

c) $1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + ... + 2^2 - 1^2$.

7.111. Liczby x, y, 1 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby x, y, $x + y + 1$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu geometrycznego.

7.112. Trzy liczby, których suma jest równa 28, tworzą ciąg geometryczny. Liczby te są również pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz te liczby.

7.113. D Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a i b, średnia arytmetyczna tych liczb jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, czyli $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

7.114. D Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego spełniony jest warunek $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

7.115. D Ogólny wyraz ciągu (a_n) określony jest wzorem $a_n = \left(\frac{2-p}{2+p}\right)^{2n-3}$.

a) Uzasadnij, że jest to ciąg geometryczny.

b) Dla jakich wartości parametru p ciąg ten jest malejący?

7.116. D Uzasadnij, że liczby $\sin^2\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny, gdy $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

7.117. D Wykaż, że:

a) każdy ciąg arytmetyczne jest ciągiem monotonicznym.

b) jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = 2^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym.

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny w bankowości

Procent prosty

Przypomnijmy

Jeden **procent** (1%) pewnej liczby a (lub innej wielkości) to setna część tej liczby (tej wielkości).

1% liczby a jest równe $\frac{1}{100}\cdot a$, **p% liczby a** jest równe $\frac{p}{100}\cdot a$.

- Aby obliczyć, ile procent p wielkości a stanowi wielkość b, możemy:
  - ułożyć równanie $\frac{b}{a}\cdot 100 = p$
  - ułożyć proporcję $\begin{array}{lll} a & \text{to} & 100\% \\ b & \text{to} & p\% \end{array}$.
- Aby obliczyć liczbę a, gdy $p\%$ tej liczby jest równy b, możemy:
  - ułożyć równanie $\frac{p}{100}\cdot a = b$, skąd $a = b\cdot\frac{100}{p}$,
  - ułożyć proporcję $\begin{array}{lll} a & \text{to} & 100\% \\ b & \text{to} & p\% \end{array}$, skąd $\frac{a}{b} = \frac{100}{p}$.
- Jeżeli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, to $a = \frac{b\cdot c}{d}$, $b = \frac{a\cdot d}{c}$, $c = \frac{a\cdot d}{b}$, $d = \frac{b\cdot c}{a}$.

Ćwiczenie 74. W czasie wakacji Franek zarobił 650 zł, ale z tej kwoty potrącono mu 20% na podatek. Jaką kwotę otrzymał?

Ćwiczenie 75. Znajdź liczbę, której:

a) 20% jest równe 16,

b) 8,5% jest równe 0,85,

c) $3\frac{1}{3}\%$ jest równe 120,

d) $33\frac{1}{3}\%$ jest równe $1\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 76. Roztwór solny zawiera 2% soli. W ilu kilogramach tego roztworu jest 0,5 kg soli?

Ćwiczenie 77. Buty kosztują 120 zł. Oblicz, przez jaką liczbę należy pomnożyć cenę butów, by móc obliczyć ich nową cenę po:

a) obniżce o 25%, **b)** podwyżce o 8%, **c)** obniżce o 20%.

Zakładając konto w banku, decydujesz się na określone oprocentowanie tego rachunku. Zależy ono między innymi od czasu, w jakim zobowiązujesz się nie naruszać stanu konta, czyli tzw. lokaty terminowej, oraz od sposobu kapitalizacji odsetek i od oprocentowania w stosunku rocznym.

Definicja

Procent prosty to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego K (*kapitał początkowy*) polegający na tym, że dochód w postaci odsetek nie jest doliczany do wkładu i nie procentuje wraz z nim w następnym okresie oszczędzania.

W przypadku stosowania procentu prostego odsetki nie są doliczane do kapitału na następny okres, czyli w następnym okresie nadal oprocentowaniu podlega tylko sam wkład pieniężny.

Przykład 49. Adam wpłacił do banku 100 zł i założył lokatę na 3 lata na procent prosty. Roczna stopa oprocentowania była równa 6% i miała być stała przez cały okres lokaty. Oblicz, jaki będzie stan konta Adama po upływie 3 lat.

Rozwiązanie

Stan konta Adama po upływie:

$$100+\frac{6}{100}\cdot 100-100\cdot 1{,}06$$

1 roku: 100 zł *plus* 6% z 100 zł,

2 lat: (100 zł *plus* 6% z 100 zł) *plus* 6% z 100 zł,

3 lat: [(100 zł *plus* 6% z 100 zł) *plus* 6% z 100 zł] *plus* 6% z 100 zł.

Skąd $100+3\cdot\frac{6}{100}\cdot 100=100+18=118.$

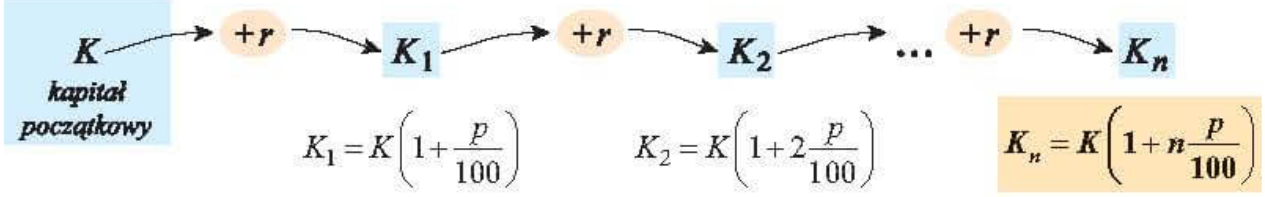
$$100+3\cdot\frac{6}{100}\cdot 100-100\left(1+3\cdot\frac{6}{100}\right)$$

Odp.: Po upływie 3 lat Adam będzie miał na koncie 118 zł.

Uwaga

Procent prosty jest przykładem ciągu arytmetycznego.

Jeżeli liczby $K_1, K_2, \ldots, K_n$ są wartościami kapitału początkowego K po upływie n ($n\in N^+$) okresów oszczędzania, to liczby $K, K_1, K_2, \ldots, K_n$ są wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy r, takiej że $r=\frac{p}{100}K$, gdzie p to stopa oprocentowania w każdym z okresów.



$$K_1=K\left(1+\frac{p}{100}\right) \qquad K_2=K\left(1+2\frac{p}{100}\right) \qquad K_n=K\left(1+n\frac{p}{100}\right)$$

Ćwiczenie 78. Piotr założył w banku na 5 lat lokatę w kwocie 500 euro na procent prosty. Roczna stopa procentowa była równa 2,4% i miała być stała przez cały czas lokaty. Oblicz, jaki będzie stan konta Piotra po upływie 5 lat.

Przykład 50. Pan Marek wpłacił do banku kwotę K równą 200 zł, która będzie oprocentowana 6% w stosunku rocznym, bez kapitalizacji odsetek. Podaj, jaką kwotę K_n będzie mógł pan Marek wypłacić z banku po upływie:

a) jednego roku, **b)** dwóch lat, **c)** n lat.

Rozwiązanie

a) $K_1 = 200 + \frac{6}{100} \cdot 200 = 200\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 212$,

b) $K_2 = 200 + 2 \cdot \frac{6}{100} \cdot 200 = 200\left(1 + 2 \cdot \frac{6}{100}\right) = 224$,

c) $K_n = 200 + n \cdot \frac{6}{100} \cdot 200 = 200\left(1 + n \cdot \frac{6}{100}\right) = 200 + 12n$.

Odp.: **a)** 212 zł, **b)** 224 zł, **c)** $K_n = (200 + 12n)$ zł.

Ćwiczenie 79. Pani Ala wpłaciła do banku kwotę K równą 500 zł, która będzie oprocentowana 4% w stosunku rocznym, bez kapitalizacji odsetek. Podaj, jaką kwotę K_n będzie mogła pani Ala wypłacić z banku po upływie:

a) jednego roku, **b)** trzech lat, **c)** n lat.

Ćwiczenie 80. Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy podana informacja jest prawdziwa. *Jeżeli założysz w banku lokatę na 10 lat w kwocie 100 zł na procent prosty przy rocznej stopie procentowej równej 10%, to podwoisz swój kapitał.*

Uwaga

	jednego roku	m miesięcy	t dni
Odsetki za okres:	$\frac{p \cdot K}{100}$	$\frac{p \cdot K \cdot m}{100 \cdot 12}$	$\frac{p \cdot K \cdot t}{100 \cdot 365}$ *365 – liczba dni w roku.*

K – kapitał złożony w banku, p – oprocentowanie (stopa procentowa).

Ćwiczenie 81. W banku A na procencie prostym stopa oprocentowania w stosunku rocznym jest równa 10%. W banku tym można wypłacić należne odsetki w każdej chwili. Wpłacasz do tego banku kwotę 1000 zł. Oblicz, jaką kwotę odsetek będzie można wypłacić po upływie: **a)** jednego roku, **b)** pięciu miesięcy, **c)** osiemdziesięciu dni.

Procent składany

Definicja

Procent składany to sposób oprocentowania kapitału polegający na tym, że odsetki po roku (lub innym okresie) oszczędzania, w którym obowiązuje ustalona stopa procentowa, dopisywane są do kapitału i procentują wraz z nim w następnym okresie oszczędzania.

Proces dopisywania odsetek nazywa się **kapitalizacją odsetek**.

Przykład 51. Andrzej złożył w banku swoje oszczędności w kwocie 1000 zł na okres 3 lat z kapitalizacją odsetek po roku. Bank oferuje roczną stopę procentowa równą 5%. Oblicz stan konta Andrzeja po upływie okresu oszczędzania. Wynik zaokrąglij do 0,01 zł.

Rozwiązanie

Stan konta Andrzeja po upływie:

1 roku: $1000 + 0{,}05 \cdot 1000 = 1050$ zł, $1000 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right) - 1000 \cdot 1{,}05$

2 lat: $1050 + 0{,}05 \cdot 1050 = 1102{,}50$ zł, $1000 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^2 - 1000 \cdot (1{,}05)^2$

3 lat: $1102{,}50 + 0{,}05 \cdot 1102{,}50 = 1157{,}63$ zł. $1000 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^3 - 1000 \cdot (1{,}05)^3$

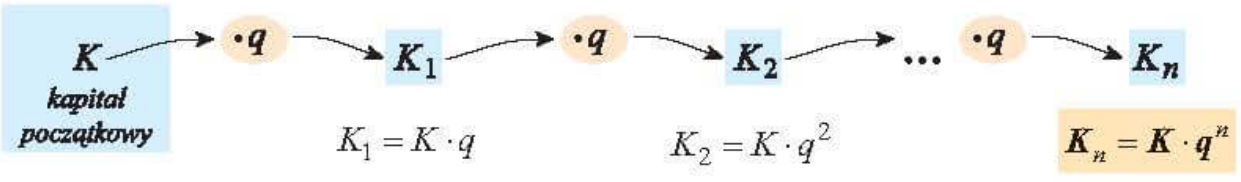
Odp. Andrzej po upływie 3 lat będzie miał na koncie 1157,63 zł.

Ćwiczenie 82. Marcin złożył 500 zł w banku i założył lokatę na okres 4 lat. Bank oferuje roczną stopę procentową równą 6% z kapitalizacją odsetek po roku. Oblicz stan konta Marcina po upływie okresu oszczędzania. Wynik zaokrąglij do 0,01 zł.

Uwaga

Procent składany jest przykładem ciągu geometrycznego.

Jeżeli liczby $K_1, K_2, \ldots, K_n$ są wartościami kapitału K po upływie n ($n \in N^+$) okresów oszczędzania przy stopie procentowej p w każdym z okresów, to liczby te są wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q = 1 + \frac{p}{100}$.



Uwaga. Jeżeli kapitał K wpłacimy do banku na n okresów przy danym oprocentowaniu $p\%$ w każdym z okresów oraz gdy odsetki będą kapitalizowane po każdym z n okresów, to kapitał K_n na zakończenie okresu lokaty będzie równy

$$K_n = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Banki z reguły preferują zmienne stopy procentowe wkładów i kredytów.
Pokażemy na przykładzie, jak wtedy obliczamy kwoty po n latach.

Przykład 52. Lokujesz 100 zł na rachunku bankowym na okres czterech lat z kapitalizacją odsetek po roku. W ciągu tego okresu nastąpiły zmiany rocznej stopy procentowej, które były odpowiednio równe: 5%, 4%, 3%, 2%. Jaka była wartość twojej lokaty na koniec okresu oszczędzania? (Nie uwzględniaj podatku dochodowego)

Rozwiązanie

Kapitał początkowy $K = 100$ zł. Stopa procentowa w banku zmieniała się:

1° Po pierwszym roku oszczędzania kapitał

$$K_1 = K \cdot q_1, \text{ gdzie } q_1 = 1+\frac{5}{100}.$$

2° Po drugim roku oszczędzania kapitał

$$K_2 = K_1 \cdot q_2 = K \cdot q_1 \cdot q_2, \text{ gdzie } q_2 = 1+\frac{4}{100}.$$

3° Po trzecim roku oszczędzania kapitał

$$K_3 = K_2 \cdot q_3 = K \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3, \text{ gdzie } q_3 = 1+\frac{3}{100}.$$

4° Po czwartym roku oszczędzania kapitał

$$K_4 = K_3 \cdot q_4 = K \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4, \text{ gdzie } q_4 = 1+\frac{2}{100}.$$

Zatem $K_4 = 1000 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right) =$

$= 100 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02$, czyli $K_4 = 114{,}73$ zł.

Odp. Na koniec okresu oszczędzania kapitał $K_4 = 114{,}73$ zł.

Ćwiczenie 83. Oblicz wartość lokaty rocznej równej 200 zł, po okresie oszczędzania trzech lat, z kapitalizacją odsetek po roku, jeżeli w tym okresie stopy procentowe były odpowiednio równe 6%, 3% i 5%.

Uwaga

Jeżeli kapitał K umieścimy na koncie na n okresów, przy zmiennej stopie procentowej p_i, gdy $i \in \{1, ..., n\}$, to kapitał końcowy K_n po upływie n okresów dany jest wzorem

$$K_n = K\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right),$$

gdzie $1+\frac{p_1}{100}=q_1$, $1+\frac{p_2}{100}=q_2$, ..., $1+\frac{p_n}{100}=q_n$, to zmienne czynniki procentowe.

Odpowiedzi do ćwiczeń

74. 520 zł. 75. **a)** 80, **b)** 10, **c)** 3600, **d)** 4,5. 76. 25 kg. 77. **a)** 0,75, **b)** 1,08, **c)** 0,8.
78. 560 euro. 79. **a)** 520 zł, **b)** 560 zł, **c)** $500+20n$. 80. Tak.
81. **a)** 100 zł, **b)** 41,67 zł, **c)** 21,92 zł. 82. 631,24 zł. 83. 229,28 zł.

Zadania utrwalające

7.118. Właściciel lokaty złożył kapitał na procent prosty. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ▭ wpisz odpowiednią liczbę.

Właściciel lokaty	Kapitał początkowy [zł]	Roczna stopa procentowa [%]	Liczba n lat lokaty	Odsetki po upływie n lat [zł]	Stan konta po upływie n lat [zł]
Ala	3000	4	10	▭	▭
Beata	▭	5	5	250	▭
Robert	100	1	▭	99	▭

7.119. Bank A oferuje dopisanie po roku 100 zł do 1000 zł złożonych u nich na lokacie. W banku B można założyć lokatę na rok przy stopie procentowej równej 10%. Czy oferty banków się różnią? Odpowiedź uzasadnij.

7.120. Trzy banki podają różne informacje o stopie oprocentowania procentu prostego. W banku A oprocentowanie roczne jest równe 12%, w banku B oprocentowanie półroczne jest równe 6%, a w banku C oprocentowanie kwartalne to 4%. Czy oferty banków się różnią? Odpowiedź uzasadnij.

7.121. Wpłacasz do banku na procent prosty kwotę 100 zł, oprocentowaną 12% w stosunku rocznym. Oblicz kwotę dochodu, którą przyniesie Ci ta lokata po upływie:

a) jednego dnia, **b)** jednego miesiąca, **c)** jednego kwartału.

7.122. Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy podana niżej informacja jest prawdziwa.

a) Jeżeli ulokujesz 100 zł na procent prosty w banku A i równocześnie 100 zł na procent składany w banku B, a obie stopy procentowe w obu bankach będą równe, to po upływie dwóch lat twój stan konta w banku A będzie większy niż w banku B.

b) Podwoisz swój stan posiadania w okresie krótszym niż 10 lat, jeżeli ulokujesz swój kapitał w banku na procent składany przy rocznej stopie procentowej równej 10%.

7.123. Właściciel lokaty złożył kapitał na procent składany. Przerysuj do zeszytu tabelę i w miejsce ▭ wpisz odpowiednią liczbę po zaokrągleniu jej do 0,01 zł.

Właściciel lokaty	Kapitał początkowy [zł]	Roczna stopa procentowa [%]	Liczba n lat lokaty	Stan konta po upływie n lat [zł]
Bogdan	300	8	3	▭
Czesław	400	5	4	▭
Damian	200	10	2	▭

7.124. W gablocie pewnego banku wywieszono tabelę z trzema (I, II, III) rodzajami ofert dotyczących lokat terminowych.

Rodzaj oferty	Stopa procentowa (w stosunku rocznym)	Kapitalizacja odsetek
I	2,4%	kwartalna
II	2,8%	półroczna
III	3,2%	roczna

Którą z wymienionych lokat (tabela powyżej) należy wybrać, by zysk z ulokowanej kwoty 10 000 zł po upływie jednego roku był największy? Odpowiedź uzasadnij.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, gdy $n \in N^+$. Wynika z tego, że:

A. $a_k = \frac{k-1}{k}$, **B.** $a_{2n+1} = \frac{2n}{n+1}$, **C.** $a_{100-n} = \frac{99-n}{101-n}$, **D.** $a_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Szósty wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = 2^n - n + 1$ jest równy:

A. 16, **B.** 27, **C.** 28, **D.** 59.

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

W ciągu arytmetycznym $(1, 5, 9, ..., 401)$ liczba wyrazów jest równa:

A. 99, **B.** 100, **C.** 101, **D.** 102.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q określony jest wzorem $a_n = (-2)^{n+2}$. Zatem:

A. $a_1 = -2$ i $q = -2$, **B.** $a_1 = -6$ i $q = -2$,

C. $a_1 = 8$ i $q = -2$, **D.** $a_1 = -8$ i $q = -2$.

5. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 6 dają resztę 1, tworzą ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = 6n - 5$.	**P**	**F**
Jeżeli ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n + 1$, to do przedziału $(200; 300)$ należy pięćdziesiąt wyrazów tego ciągu.	**P**	**F**
W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz pierwszy jest równy 1, a wyraz setny jest równy 397. Zatem $S_{100} = 398 \cdot 50$.	**P**	**F**
Jeżeli ciąg (a_n) o ilorazie q określony jest wzorem $a_n = 1\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, to $a_1 = \frac{1}{2}$ i $q = \frac{2}{3}$.	**P**	**F**
Jeżeli liczby $\frac{32}{63}, \frac{16}{63}, \frac{8}{63}, \ldots$ są początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego (a_n), to: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1$.	**P**	**F**
Jeżeli liczby $25, a, 36$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to $a = 25 \cdot 36$.	**P**	**F**

6. Czy suma wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które przy dzieleniu przez 10 dają resztę 3, jest równa 477?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$a_1 = 13$ i $a_n = 93$, więc $n = 9$. Zatem $S_9 = 477$.
N	**Nie,**		**B.**	$a_1 = 13$ i $r = 10$, więc $a_n = 10n + 3$, skąd $n = 10$. Zatem $S_{10} = 580$.

8. Granica ciągu liczbowego

Ciągi zbieżne do zera i ich własności

W matematyce używa się sformułowania „**prawie wszystkie**". Sens tego wyrażenia wyjaśnimy wyłącznie w odniesieniu do ciągu liczbowego.

Uwaga

Wyrażenie „**prawie wszystkie wyrazy ciągu**" oznacza „wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego oprócz co najwyżej skończonej, początkowej liczby wyrazów".

Zamiast mówić, że tylko skończona liczba wyrazów nie ma danej własności, mówimy, że prawie wszystkie wyrazy ciągu mają tę własność.

Wypiszmy kolejne wyrazy ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \frac{6}{n} \cdot (-1)^n$.

prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $(-1;1)$ oprócz sześciu początkowych wyrazów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i a_6, czyli $a_n \in (-1;1)$, gdy $n > 6$, więc $n_0 = 6$.

$$(a_n) = \left(-6,\ 3,\ -2,\ \frac{3}{2},\ -\frac{6}{5},\ 1,\ -\frac{6}{7},\ \frac{3}{4},\ -\frac{2}{3},\ \ldots\right)$$

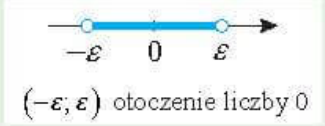
prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $(-2;2)$ oprócz trzech początkowych wyrazów a_1, a_2 i a_3, czyli $a_n \in (-2;2)$, gdy $n > 3$, więc $n_0 = 3$.

Ćwiczenie 1. Wypisz dziesięć początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \frac{1}{n}$. Wskaż te wyrazy ciągu (a_n), które należą do przedziału:

a) $(-2;2)$, b) $(-1;1)$, c) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, d) $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$, e) $\left(-\frac{1}{8};\frac{1}{8}\right)$.

Definicja

Każdy przedział otwarty, którego środkiem jest liczba 0, nazywamy **otoczeniem liczby 0**.

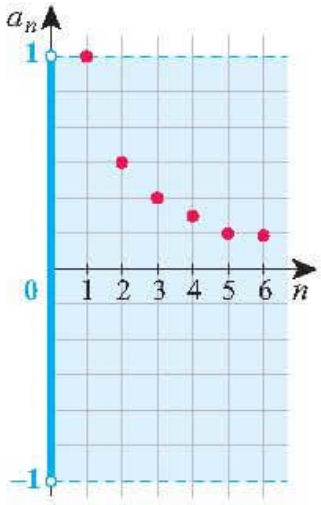


$(-\varepsilon;\varepsilon)$ otoczenie liczby 0

Istnieją takie ciągi, których **prawie wszystkie wyrazy** należą do dowolnego otoczenia liczby 0, na przykład ciąg (a_n), określony wzorem $a_n = \frac{1}{n}$.

$(a_n)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10},\ldots\right)$, gdzie $a_n=\frac{1}{n}$.

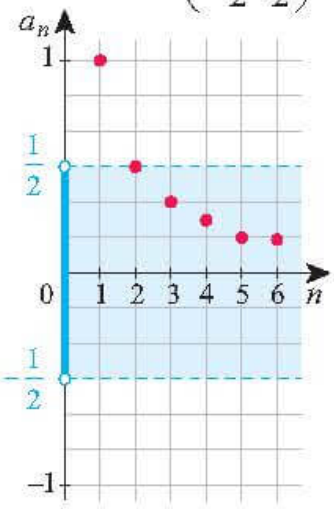
$a_n \in (-1;1)$



$-1<\frac{1}{n}<1$, gdy $n\geq 2$

Do otoczenia $(-1;1)$ należą prawie wszystkie wyrazy ciągu, tzn. wszystkie oprócz wyrazu a_1, czyli $n_0=1$.

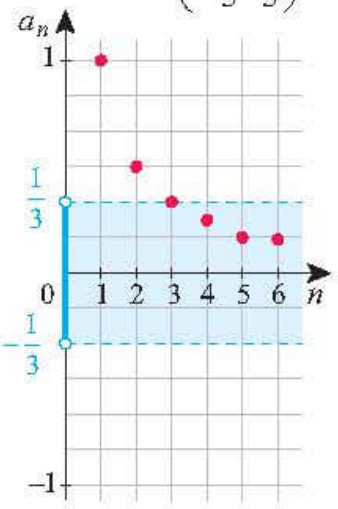
$a_n \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$



$-\frac{1}{2}<\frac{1}{n}<\frac{1}{2}$, gdy $n\geq 3$

Do otoczenia $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ należą prawie wszystkie wyrazy ciągu, tzn. wszystkie oprócz wyrazów a_1 i a_2, czyli $n_0=2$.

$a_n \in \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$



$-\frac{1}{3}<\frac{1}{n}<\frac{1}{3}$, gdy $n\geq 4$

Do otoczenia $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ należą prawie wszystkie wyrazy ciągu, tzn. wszystkie oprócz wyrazów a_1, a_2 i a_3, czyli $n_0=3$.

Ćwiczenie 2. Podaj te wyrazy ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n=\frac{1}{n}$, które spełniają warunek: **a)** $|a_n|<\frac{1}{4}$, **b)** $|a_n|<\frac{1}{100}$, **c)** $|a_n|<10^{-4}$, **d)** $|a_n|<\frac{2}{3}$.

Uwaga

Jeżeli do każdego otoczenia liczby 0 należą prawie wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), to mówimy, że liczba 0 jest granicą tego ciągu, co zapisujemy

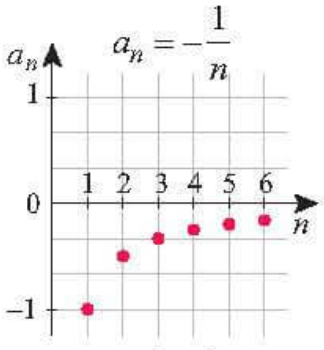
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ *inny zapis* $a_n\to 0$.

- **lim** *czytamy* **limes**,
- $n\to+\infty$ *czytamy* **n dąży do plus nieskończoności**,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ *czytamy* **przy n dążącym do plus nieskończoności ciąg (a_n) jest zbieżny do zera** lub **ciąg (a_n) ma granicę równą 0**.

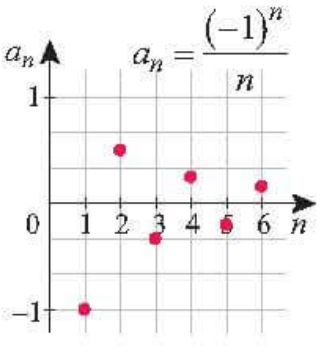
Definicja

Liczba 0 jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej dodatniej liczby ε istnieje taka liczba n_0, że dla każdej liczby naturalnej n większej od n_0 jest spełniona nierówność $|a_n| < \varepsilon$ (ε – czytaj *epsilon*).

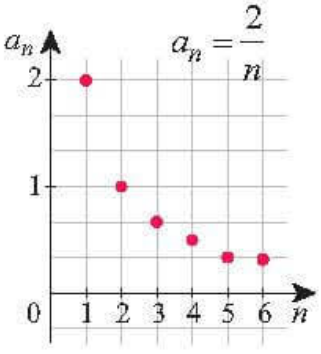
Przykłady innych ciągów zbieżnych do zera.



$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$$



$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$$



$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$$

Twierdzenie

Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i $k \in R$, to $\lim\limits_{n\to+\infty}(k\cdot a_n)=0$.

***Z* (*założenie*):**	***T* (*teza*):**
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $k \in R$, czyli $\lvert a_n\rvert < \varepsilon_1$ i $\varepsilon_1 > 0$.	$\lim\limits_{n\to+\infty} k\cdot a_n = 0$, czyli $\lvert k\cdot a_n\rvert < \varepsilon$.

***Dowód*:**

Aby udowodnić, że liczba 0 jest granicą ciągu (b_n), określonego wzorem $b_n = k\cdot a_n$, gdzie $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, wystarczy udowodnić, że w każdym otoczeniu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ liczby 0 znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (b_n), czyli $|b_n| < \varepsilon$.

Rozpatrujemy dwa przypadki **1** i **2**.

1 $k = 0$: Nierówność $|0\cdot a_n| < \varepsilon$ jest z założenia spełniona, bo $\varepsilon > 0$.

2 $k \neq 0$: Nierówność $|k\cdot a_n| < \varepsilon$ będzie spełniona, gdy $|a_n| < \frac{\varepsilon}{|k|}$.

Nierówność $|a_n| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ jest spełniona, bo $\frac{\varepsilon}{|k|} > 0$, czyli $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|k|}$.

$$|k\cdot a_n| < \varepsilon$$
$$|k|\cdot|a_n| < \varepsilon$$
$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

c.n.u.

Przykład 1. Wiedząc, że $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, oblicz: **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{5}{n}\right)$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{4n}$.

Rozwiązanie

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{5}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(-5)\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-5\cdot 0=0,$ $k=5$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{4n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{4}\cdot 0=0.$ $k=\frac{3}{4}$

Ćwiczenie 3. Oblicz: **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2n}$.

Niektóre ciągi geometryczne są zbieżne do zera. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 2. W ciągu geometrycznym (a_n) wyraz $a_1=-\frac{1}{2}$ i iloraz $q=-\frac{1}{2}$. Wskaż, które wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $\left(-\frac{1}{1000};\frac{1}{1000}\right)$.

Rozwiązanie

$a_1=-\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$ i $a_n=a_1q^{n-1}$, $n\in N^+$, więc

$a_n=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ oraz

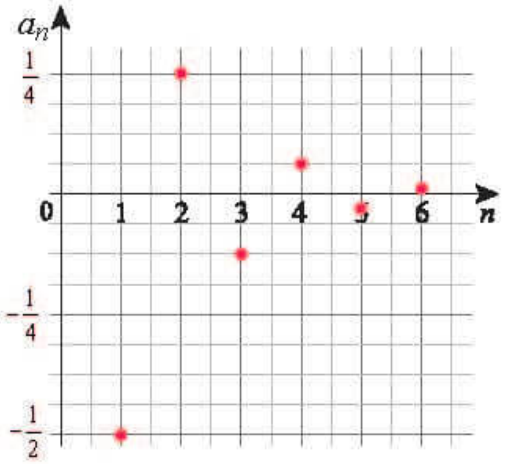
$|a_n|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}.$

$a_n\in\left(-\frac{1}{1000};\frac{1}{1000}\right)$, więc $|a_n|<\frac{1}{1000}$.

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|<\frac{1}{1000}$$

$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1000}$, skąd $2^n>1000$.

$2^9=512$ i $2^{10}=1024$, więc $2^{10}>1000$.



Odp.: Prawie wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), poczynając od wyrazu a_{10}, $(n_0=9)$ należą do przedziału $\left(-\frac{1}{1000};\frac{1}{1000}\right)$.

Postępując analogicznie, możemy wykazać, że dla dowolnie wybranej dodatniej liczby ε prawie wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego, określonego wzorem $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, należą do otoczenia liczby 0, więc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$.

Twierdzenie

Jeżeli iloraz q ciągu geometrycznego (a_n) określonego wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$ spełnia warunek $|q|<1$, czyli gdy $q\in(-1;1)$, to ciąg ten jest zbieżny do zera.

$$\lim_{n\to+\infty} a_1q^{n-1}=0, \text{ gdy } |q|<1.$$

Ćwiczenie 4. Spośród ciągów geometrycznych wskaż te, które są zbieżne do zera:

$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $b_n=(-3)^n$, $c_n=\left(\frac{4}{5}\right)^n$, $d_n=\left(-\frac{7}{4}\right)^n$, $e_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, $f_n=2^n$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ **a)** Wszystkie wyrazy, **b)** wszystkie wyrazy oprócz wyrazu a_1, **c)** wszystkie wyrazy oprócz wyrazów a_1 i a_2, **d)** wszystkie wyrazy oprócz wyrazów a_1, a_2, a_3 i a_4, **e)** wszystkie wyrazy oprócz wyrazów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 i a_8.
2. **a)** $a_5, a_6, \ldots$, **b)** $a_{101}, a_{102}, \ldots$, **c)** $a_{10\,001}, a_{10\,002}, \ldots$, **d)** $a_2, a_3, \ldots$. 3. **a)** 0, **b)** 0. 4. a_n, c_n, e_n.

Zadania utrwalające

8.1. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n=\frac{-9}{4n}$. Określ liczbę wyrazów ciągu (a_n), które nie należą do przedziału $(-\varepsilon;\varepsilon)$, gdy:

a) $\varepsilon=0{,}1$, **b)** $\varepsilon=0{,}01$.

8.2. Spośród ciągów geometrycznych określonych wzorami: $a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$, $b_n=-2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^n$, $c_n=\left(\frac{9}{5}\right)^{n-1}$, $d_n=\frac{21}{4}\cdot(0{,}7)^n$, $e_n=\sqrt{3}\cdot(1{,}1)^n$ wskaż te, których granicą jest liczba 0.

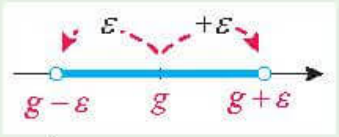
8.3. D Uzasadnij, że $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$, gdy:

a) $a_n=\frac{2}{3^n}$, **b)** $a_n=(-0{,}6)^n$, **c)** $a_n=2\cdot4^{2-n}$.

Ciągi zbieżne i ich własności

Definicja

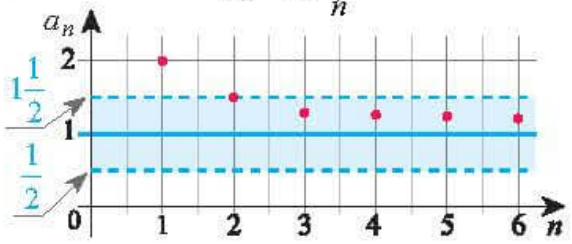
Każdy przedział otwarty, którego środkiem jest liczba g, nazywamy **otoczeniem liczby g**.



$(g-\varepsilon; g+\varepsilon)$ – otoczenie liczby g, gdzie $\varepsilon > 0$

Przykłady ciągów, których prawie wszystkie wyrazy należą do każdego otoczenia liczby g różnej od 0.

1 $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

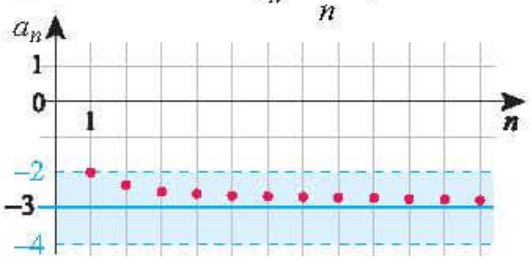


$(a_n) = \left(2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, \ldots\right)$

$a_n \in \left(\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$, gdy $n \geq 3$.

Do otoczenia liczby 1 należą prawie wszystkie wyrazy ciągu.

2 $a_n = \frac{1}{n} - 3$

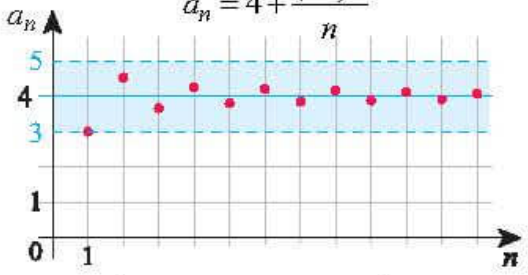


$(a_n) = \left(-2, -2\frac{1}{2}, -2\frac{2}{3}, -2\frac{3}{4}, \ldots\right)$

$a_n \in (-4; -2)$, gdy $n \geq 2$.

Do otoczenia liczby −3 należą prawie wszystkie wyrazy ciągu.

3 $a_n = 4 + \frac{(-1)^n}{n}$

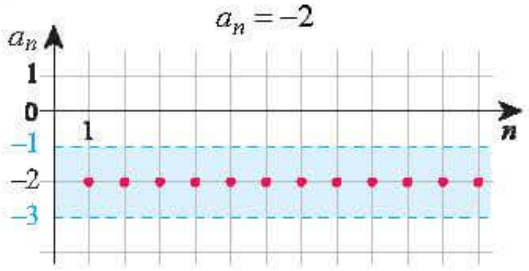


$(a_n) = \left(3, 4\frac{1}{2}, 3\frac{2}{3}, 4\frac{1}{4}, \ldots\right)$

$a_n \in (3; 5)$, gdy $n \geq 2$.

Do otoczenia liczby 4 należą prawie wszystkie wyrazy ciągu.

4 $a_n = -2$



$(a_n) = (-2, -2, -2, -2, \ldots)$

$a_n \in (-3; -1)$, gdy $n \in N^+$.

Do każdego otoczenia liczby −2 należą wszystkie wyrazy ciągu.

Zauważamy też, że w każdym z omówionych przykładów, jeśli zmniejszymy otoczenie liczby g, to nie zmniejsza się liczba wyrazów nienależących do tego otoczenia, jednak nadal prawie wszystkie wyrazy ciągu pozostaną w tym otoczeniu.

Uwaga

Jeżeli do każdego otoczenia liczby g należą prawie wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), to mówimy, że liczba g jest granicą tego ciągu, co zapisujemy

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = g \quad \textit{inny zapis} \quad a_n \to g.$$

1 $a_n = 1+\frac{1}{n}$, to $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$,

2 $a_n = \frac{1}{n}-3$, to $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-3\right)=-3$,

3 $a_n = 4+\frac{(-1)^n}{n}$, to $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\frac{(-1)^n}{n}\right)=4$,

4 $a_n = -2$, to $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2)=-2$.

Powyższa definicja jest równoważna definicji sformułowanej następująco.

Definicja

Liczba g jest granicą nieskończonego ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy granicą ciągu $(a_n - g)$ jest liczba zero.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = g \iff \lim_{n\to+\infty}(a_n - g) = 0$$

Przykład 3. Wykaż, że granicą ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \frac{2n+1}{n}$ jest liczba 2.

Rozwiązanie

Tworzymy ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n - 2$.

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}(a_n-2) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{n}-2\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1-2n}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-2)=0$, więc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$.

Ćwiczenie 5. Wykaż, że granicą ciągu określonego wzorem $a_n = \frac{1-3n}{n}$ jest liczba -3.

Ćwiczenie 6. Podaj przykład ciągu, którego granicą jest liczba g, gdy:

a) $g=-3$, b) $g=\frac{1}{4}$, c) $g=1000$.

Uwaga

- Ciąg liczbowy, który ma granicę g, nazywamy **ciągiem zbieżnym**.
- Liczbę g nazywamy **granicą właściwą** tego ciągu.

Uwaga

Jeżeli $a_n = k$, gdzie $k \in R$ i $n \in N^+$, to $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} k = k$.

Granica ciągu stałego jest równa tej stałej.

Na przykład:

- $a_n = 3$, to $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 = 3$,
- $a_n = -1$, to $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1) = -1$.

Do obliczania granic ciągów korzystamy z następujących twierdzeń o działaniach na granicach właściwych ciągów.

Twierdzenie

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, czyli $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b$, to:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = a + b$ *(granica sumy ciągów jest równa sumie granic)*
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = a - b$ *(granica różnicy ciągów jest równa różnicy granic)*
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ *(granica iloczynu ciągów jest równa iloczynowi granic)*
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = k \cdot a$, gdzie $k \in R$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, gdy $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ *(granica ilorazu ciągów jest równa ilorazowi granic).*

Na przykład:

$a_n = \frac{2}{n}$, więc $a_n = 2 \cdot \frac{1}{n}$, zatem $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{n}\right) = 2 \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0$,

$b_n = \frac{1}{n^2}$, więc $b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$, zatem $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$,

$c_n = \frac{n-1}{n}$, więc $c_n = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, zatem $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$,

$d_n = \frac{n^2 + 5}{n^2}$, więc $d_n = \frac{n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2} = 1 + \frac{5}{n^2}$, zatem

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = \lim_{n \to +\infty} 1 + \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{n^2} = 1 + \lim_{n \to +\infty} \left(5 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \lim_{n \to +\infty} 5 \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1.$$

Przy obliczaniu granicy ciągu przekształcany jest jego wzór tak, by nowy wzór był wyrażony za pomocą działań na ciągach zbieżnych do zera i ciągach stałych.
Pokażemy to na przykładach.

Przykład 4. Oblicz granicę ciągu (a_n) określonego wzorem:

a) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2-3n}$, b) $a_n = \dfrac{5n^2-n}{n^3+n+1}$.

Rozwiązanie

a) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{n^2-3n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)} =$$

Z licznika i mianownika wyłączamy przed nawias najwyższą potęgę n występującą w mianowniku.

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}2+\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to+\infty}1-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}} = \frac{2+0}{1-0} = 2,$$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^2-n}{n^3+n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} =$$

Z licznika i mianownika wyłączamy przed nawias najwyższą potęgę n występującą w mianowniku.

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\overset{0}{\frac{5}{n}}-\overset{0}{\frac{1}{n^2}}}{1+\underset{0}{\frac{1}{n^2}}+\underset{0}{\frac{1}{n^3}}} = \frac{0-0}{1+0+0} = 0.$$

Ćwiczenie 7. Oblicz: a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4}{2n+3}$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+5820}{5n-3200}$, c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^6-n^4+7}{n^7+2n+5}$.

Uwaga

Jeżeli wzór ciągu jest wyrażeniem wymiernym, to aby obliczyć granicę tego ciągu:

- z licznika i mianownika wyłączamy przed nawias najwyższą potęgę n mianownika,
- korzystamy z tego, że $\dfrac{1}{n}\to 0$, $\dfrac{1}{n^2}\to 0$, ... ,
- korzystamy z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów zbieżnych.

Przykład 5. Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n-5\cdot 2^n}{2\cdot 3^n+2^n}$.

Rozwiązanie

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n-5\cdot 2^n}{2\cdot 3^n+2^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\left(1-5\cdot\dfrac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(2+\dfrac{2^n}{3^n}\right)}=$$

Wyłączamy z licznika i mianownika przed nawias potęgę o największej podstawie.

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-5\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=\frac{1-5\cdot 0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

($\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$)

$\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$, gdy $|q|<1$

Ćwiczenie 8. Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^n+3\cdot 2^n}{7\cdot 5^n-4\cdot 2^n}$.

Przykład 6. Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

Rozwiązanie

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{n^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{n^2+1}\right)\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{n^2-4n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-4n}+\sqrt{n^2+1}}}_{1}=$$

$(a-b)\cdot\dfrac{a+b}{a+b}=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-4n}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2}{\sqrt{n^2-4n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-4n-n^2-1}{\sqrt{n^2\left(1-\dfrac{4}{n}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(-4-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1-\dfrac{4}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-4-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{-4-0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}}=-2.$$

($-4-\frac{1}{n}\to -4$, $\sqrt{1-\frac{4}{n}}\to 1$, $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\to 1$)

$\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{4}{n}\to 0$, $\frac{1}{n^2}\to 0$

Ćwiczenie 9. Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+6n}-\sqrt{n^2+2}\right)$.

Przykład 7. Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(3n-5)(n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że suma $1+2+3+\ldots+n$ jest sumą n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_1=1$ i $a_n=n$.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2}.$$

$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n-5)(n-1)}{1+2+3+\ldots+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-8n+5}{\frac{n^2+n}{2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\left(3n^2-8n+5\right)}{n^2+n}=$$

$$=2\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(3-\frac{8}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=2\cdot\frac{3-0+0}{1+0}=2\cdot3=6.$$

Ćwiczenie 10. Oblicz $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{(n-2)(n+3)}$.

Przykład 8. Granicą ciągu (a_n) jest liczba 3. Oblicz granicę ciągu (b_n), gdy:

a) $(b_n)=\dfrac{1}{(a_n)^2-2}$, **b)** $b_n=\dfrac{(a_n)^2-2a_n-3}{a_n-3}$.

Rozwiązanie

Z warunków zadania: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=3$.

a) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(a_n)^2-2}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n^2-2}=\frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\right)^2-2}=\frac{1}{3^2-2}=\frac{1}{7},$$

$(a_n)^2-2a_n-3=0$
$\Delta=16,\ \sqrt{\Delta}=4$
$a_n=-1$ lub $a_n=3$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{(a_n)^2-2a_n-3}{a_n-3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(a_n-3)(a_n+1)}{a_n-3}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(a_n+1)=3+1=4.$$

Ćwiczenie 11. Granicą ciągu (a_n) jest liczba 2. Oblicz granicę ciągu (b_n), gdy:

a) $b_n = 7(a_n)^2 + 3a_n - 1$, **b)** $b_n = \dfrac{(a_n)^2 + a_n - 6}{a_n - 2}$.

Przykład 9. Dla jakich wartości parametru k, gdzie $k \neq -4$, granicą ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \dfrac{kn^2 + 4}{(k+4)n^2 - 2n + 3}$ jest liczba $-\dfrac{1}{3}$?

Rozwiązanie

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{kn^2 + 4}{(k+4)n^2 - 2n + 3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(k + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left[(k+4) - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right]} =$$

$\frac{4}{n^2} \to 0,\ \frac{2}{n} \to 0,\ \frac{3}{n^2} \to 0,\ k \to k,\ (k+4) \to (k+4)$

$$= \frac{k+0}{k+4-0+0} = \frac{k}{k+4}.$$

Z warunków zadania mamy: gdy $k \neq -4$, to

$\dfrac{k}{k+4} = -\dfrac{1}{3}$, skąd $k = -1$.

Ćwiczenie 12. Dla jakich wartości parametru k, gdzie $k \in R \setminus \{0, 1\}$, spełniona jest równość $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(k-1)n^2 + 2}{kn^2 - 1} = \dfrac{1}{2}$?

Odpowiedzi do ćwiczeń

6. Np.: **a)** $a_n = -3$, **b)** $a_n = \dfrac{4+n}{4n+1}$, **c)** $a_n = \dfrac{1}{n^2} + 1000$. **7.** **a)** 0, **b)** $\dfrac{3}{5}$, **c)** 0. **8.** $\dfrac{1}{7}$.

9. 3. **10.** 1. **11.** **a)** 33, **b)** 5. **12.** $k = 2$.

Zadania utrwalające

8.4. Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 - \dfrac{1}{n}\right)$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n} - 2\right)$, **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{4}{n^2}\right]$, **e)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n}$, **f)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n+2}$.

8.5. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \dfrac{3n-4}{2-n}$, **b)** $a_n = \dfrac{2n-4}{3n^2+1}$, **c)** $a_n = \dfrac{2n^2-3n}{n^2-4n}$,

d) $a_n = \dfrac{3-n-n^2}{n^2-2n+5}$, **e)** $a_n = \dfrac{1-n^4}{1+n^4}$, **f)** $a_n = \dfrac{(n-1)(n+5)(3n+4)}{(n-3)(n^2-4)}$.

8.6. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$, **b)** $a_n = \dfrac{2^n-3\cdot 5^n}{1-2\cdot 5^n}$, **c)** $a_n = \dfrac{5\cdot 2^n+7^n}{4^n-2\cdot 7^n}$,

d) $a_n = \dfrac{5\cdot 3^n-7\cdot 2^n}{7\cdot 3^n+5\cdot 2^n}$, **e)** $a_n = \dfrac{4^{n+1}+5\cdot 3^n}{5\cdot 4^{n-1}+2\cdot 3^{n+3}}$, **f)** $a_n = \dfrac{11\cdot 5^{n+7}-5\cdot 3^{n+2}}{7^{n-3}-3\cdot 4^{n+4}}$.

8.7. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{4+n^2}$, **b)** $a_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{(n+2)(n+7)}$,

c) $a_n = \dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$, **d)** $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

8.8. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{3-\dfrac{2}{n}}}$, **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-3n+2}}{n-1}$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3+\sqrt{n+3}}{\sqrt{9n-8}}$, **e)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)$, **f)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

8.9. Określ, dla jakich wartości parametru k granicą ciągu (a_n) jest liczba g, gdy:

a) $a_n = \dfrac{(k+2)n-4}{kn+1}$, $g=\dfrac{1}{3}$ i $k \in \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$,

b) $a_n = \dfrac{kn^2+(k-1)n+5}{(k-1)n^2-4n+1}$, $g=\dfrac{2}{3}$ i $k \in \boldsymbol{R}\setminus\{1\}$,

c) $a_n = \dfrac{(k+3)n+2}{k^2\cdot n+4}$, $g=\dfrac{1}{4}$ i $k \in \boldsymbol{R}\setminus\{\aleph\}$,

d) $a_n = \dfrac{4n^2-1}{(k-2)n^2+2n-1}$, $g=2$ i $k \in \boldsymbol{R}\setminus\{2\}$.

8.10. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{3n-1}{n}$. Oblicz granicę ciągu (b_n), gdy:

a) $b_n = 3a_n + 1$,

b) $b_n = -5a_n - 2$,

c) $b_n = \frac{2a_n - 1}{a_n}$,

d) $b_n = \frac{(a_n)^2 - 2a_n + 6}{a_n + 2}$.

8.11. Podaj przykład dwóch ciągów (a_n) i (b_n), takich że $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ oraz:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = -2$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Twierdzenie o trzech ciągach

Dotychczas obliczaliśmy granice ciągów, korzystając ze znajomości ciągów zbieżnych do zera i ciągów stałych. Znajomość granic tych ciągów nie zawsze wystarcza.
W niektórych przypadkach będziemy korzystać z twierdzenia o trzech ciągach i granic ciągów $\sqrt[n]{a}$ oraz $\sqrt[n]{a^n}$, gdy $a > 0$.

Twierdzenie

Jeżeli $a > 0$, to:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n} = a$.

Zauważamy, że:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1,$$

($\frac{1}{n} \to 0$)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} a^{n\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} a = a.$$

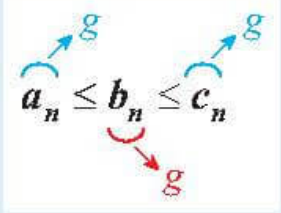
Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki 1° i 2°:

1° $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = g$,

2° $a_n \le b_n \le c_n$ dla prawie wszystkich n,

to $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = g$.



Z założenia:

1° $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = g$, więc $g-\varepsilon < a_n < g+\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = g$, więc $g-\varepsilon < c_n < g+\varepsilon$

$|a_n - g| < \varepsilon$ i $|c_n - g| < \varepsilon$, więc $\varepsilon < a_n - g < \varepsilon$ i $\varepsilon < c_n - g < \varepsilon$

2° $a_n \le b_n \le c_n$, więc

$g-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < g+\varepsilon$, czyli

$g-\varepsilon \le b_n \le g+\varepsilon$.

Zatem $|b_n - \varepsilon| < g$, czyli $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = g$. ***c.n.u.***

Stosując twierdzenie o trzech ciągach, można także uzasadniać zbieżność niektórych ciągów, których granice już znamy.

Na przykład, jeżeli:

$a_n = \frac{1}{n^2}$, to

$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$, ($0 \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,

$a_n = \frac{3n+(-1)^n}{n+4}$, to

$\frac{3n-1}{n+4} < \frac{3n+(-1)^n}{n+4} < \frac{3n+1}{n+4}$, ($3 \to 3$, $\frac{3n+(-1)^n}{n+4} \to 3$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n+(-1)^n}{n+4} = 3$.

Przykład 10. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$, **b)** $a_n = \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 5\cdot 7^n}$.

Rozwiązanie

a) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$

$\sqrt[n]{5^n} \le \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} \le \sqrt[n]{5^n + 5^n + 5^n}$

$\sqrt[n]{5^n} \le \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 5^n}$

$\sqrt[n]{5^n} \le \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} \le \sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{5^n}$ ($5 \to 5$, $\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{5^n} \to 5$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 5$.

Wybieramy pod znakiem $\sqrt[n]{\ }$ wyrażenie, które dla każdego n ma największą wartość spośród wyrażeń występujących pod tym pierwiastkiem i zastępujemy te wyrażenia działaniem na tym największym wyrażeniu.

b) $a_n = \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 5\cdot 7^n}$

$$\sqrt[n]{5\cdot 7^n} \le \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 5\cdot 7^n} \le \sqrt[n]{5\cdot 7^n + 5\cdot 7^n}$$

$$\sqrt[n]{5\cdot 7^n} \le \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 5\cdot 7^n} \le \sqrt[n]{10\cdot 7^n}$$

$$\overset{1}{\sqrt[n]{5}}\cdot\overset{7}{\sqrt[n]{7^n}} \le \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 5\cdot 7^n} \le \overset{1}{\sqrt[n]{10}}\cdot\overset{7}{\sqrt[n]{7^n}}$$

$\sqrt[n]{2\cdot 3^n + 5\cdot 7^n} \to 7$. Zatem $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 7$.

Ćwiczenie 13. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$, **b)** $a_n = \sqrt[n]{3\cdot 2^n + 6\cdot 3^n}$.

Przykład 11. Oblicz granicę ciągu (x_n), gdy $x_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$.

Rozwiązanie

Korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach

$$\frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \le x_n \le \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$$

Zauważamy, że

$$\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+n} < \frac{n}{n^2}$$

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n} \le x_n \le \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$$

$$1+2+\ldots+n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$$

$$\frac{(1+n)n}{2(n^2+n)} \le x_n \le \frac{(1+n)n}{2n^2}$$

$$\overset{\frac{1}{2}}{\frac{n+n^2}{2n^2+2n}} \le x_n \le \overset{\frac{1}{2}}{\frac{n+n^2}{2n^2}}$$

$x_n \to \frac{1}{2}$

Odp.: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

Ćwiczenie 14. Oblicz granicę ciągu (x_n), gdy $x_n = \dfrac{3}{n^2+3} + \dfrac{5}{n^2+5} + \ldots + \dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

13. **a)** 5, **b)** 3. 14. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Zadania utrwalające

8.12. Przepisz przykład do zeszytu i w miejsce ▭ wpisz wzór takiego ciągu, by prawdziwa była nierówność:

a) $\square < \frac{1}{2n} < \square$,

b) $\square < \frac{4n+(-1)^n}{2n+3} < \square$,

c) $\square < \frac{1}{n+2} < \square$,

d) $\square < \frac{3n^2+n+(-1)^n}{4n^2+n} < \square$.

8.13. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 6 \cdot 8^n}$,

b) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n + 10^n}$,

c) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 4 \cdot 10^n}$,

d) $a_n = \sqrt[n]{2 \cdot 2^n + 7 \cdot 11^n}$,

e) $a_n = \sqrt[n]{5 \cdot 3^n + 6 \cdot 8^n}$,

f) $a_n = \sqrt[n]{4^n + 2 \cdot 5^n + 3 \cdot 6^n}$.

8.14. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{4}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{9}\right)^n}$,

b) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$,

c) $a_n = \sqrt[n]{\frac{8^n + 9^n}{12^n}}$,

d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{4^n + 12^n}{16^n}}$,

e) $a_n = \sqrt[n]{2^n - 4^n + 6 \cdot 8^n}$,

f) $a_n = \sqrt[n]{\frac{2^n + 3 \cdot 4^n + 5 \cdot 6^n}{7 \cdot 8^n}}$.

8.15. Oblicz granicę ciągu (x_n), gdy:

a) $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{5}{n^2+5} + \frac{9}{n^2+9} + \ldots + \frac{4n-3}{n^2+4n-3}$,

b) $x_n = \frac{3}{n^2+3} + \frac{9}{n^2+9} + \ldots + \frac{6n-5}{n^2+6n-5}$,

c) $x_n = \frac{-5}{n^2-5} + \frac{-1}{n^2-1} + \frac{3}{n^2+3} + \ldots + \frac{4n-9}{n^2+4n-9}$,

d) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Szereg geometryczny i jego suma

Definicja

Ciąg nieskończony (S_n) o wyrazach:

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$,

. . . . . .

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}$

nazywamy **ciągiem sum częściowych** ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q.

Przykład 12. Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym, w którym $a_1 = 2$ i iloraz q jest równy $\frac{1}{2}$.

a) Podaj wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n) oraz wzór na n-ty wyraz ciągu sum częściowych (S_n).

b) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Rozwiązanie

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

a) $a_n = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\quad S_n = \dfrac{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 4\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = 0$, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 4-0 = 4$.

Odp.: **a)** $a_n = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $S_n = 4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 4$.

Definicja

Sumę $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n + \ldots$ wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q nazywamy **szeregiem geometrycznym**. Wyrazy ciągu (a_n) nazywamy wyrazami tego szeregu, a liczbę q nazywamy jego ilorazem.

Ćwiczenie 15. Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, gdy: **a)** $a_1=9,\ q=\frac{1}{3}$, **b)** $a_1=100,\ q=-\frac{1}{10}$.

Twierdzenie

Ciąg sum częściowych (S_n) nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q jest zbieżny i ma granicę S wtedy i tylko wtedy, gdy $|q|<1$ lub $a_1=0$.

$$\boldsymbol{S=\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}},\ \text{gdy } \boldsymbol{|q|<1} \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{S=0},\ \text{gdy } \boldsymbol{a_1=0}.$$

Z (***założenie***): (a_n) – ciąg geometryczny, $|q|<1$ | T (***teza***): $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=S=\frac{a_1}{1-q}$

Dowód: Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, więc

$$S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}\left(1-q^n\right)=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1q^n}{1-q}.$$ Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1q^n}{1-q}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1}{1-q}-\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-0=\frac{a_1}{1-q}.$$ ***c.n.u.***

Uwaga

Jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) ciągu geometrycznego (a_n) jest zbieżny ($|q|<1$) i jego granicą jest $S=\frac{a_1}{1-q}$, to granicę S nazywamy **sumą szeregu geometrycznego** $a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots$, co zapisujemy $a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots=\frac{a_1}{1-q}$.

Przykład 13. Oblicz sumę szeregu geometrycznego:

a) $9+3+1+\frac{1}{3}+\ldots$, **b)** $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}+\ldots$, **c)** $1-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}-2}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\ldots$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że dany szereg jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, w którym:

a) $a_1=9,\ q=\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{3}\in(-1;1)$, $q\in(-1;1)$

$$9+3+1+\frac{1}{3}+\ldots=\frac{9}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{\frac{2}{3}}=\frac{27}{2}.$$ $S=\frac{a_1}{1-q}$

b) $a_1=\sqrt{2},\ q=-\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}\in(-1;1)$, $q\in(-1;1)$

$$\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}+\ldots=\frac{\sqrt{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$ $S-\frac{a_1}{1-q}$

c) $a_1=1-\sqrt{2},\ a_2=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$, więc

$$q=\frac{\sqrt{2}-2}{2}:\left(1-\sqrt{2}\right)$$

$$q=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ i }\ \frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1;1)$$

$$1-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}-2}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\ldots=\frac{1-\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}.$$

Odp.: **a)** $9+3+1+\frac{1}{3}+\ldots=13,5$, **b)** $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}+\ldots=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

c) $1-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}-2}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\ldots=-\sqrt{2}$.

Ćwiczenie 16. Oblicz sumę szeregu geometrycznego:

a) $16+8+4+2+\ldots$, **b)** $3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots$, **c)** $2-\sqrt{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\ldots$.

Przykład 14. Ułamek okresowy $0,2(7)$ zamień na ułamek zwykły.

Rozwiązanie

$$0,2(7)=0,27777\ldots=0,2+0,07+0,007+0,0007+\ldots.$$

Liczba $0,2(7)$ jest sumą liczby $0,2$ i liczby $0,07+0,007+0,0007+\ldots$.

$a_1=0,07$, $q=0,1$, $S-\frac{a_1}{1-q}$

$$0,07+0,007+0,0007+\ldots=\frac{0,07}{1-0,1}=\frac{0,07}{0,9}=\frac{7}{90},\ \text{więc}$$

$$0,2(7)=0,2+\frac{7}{90}=\frac{2}{10}+\frac{7}{90}=\frac{18}{90}+\frac{7}{90}=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}.$$

Odp.: $0,2(7)=\frac{5}{18}$.

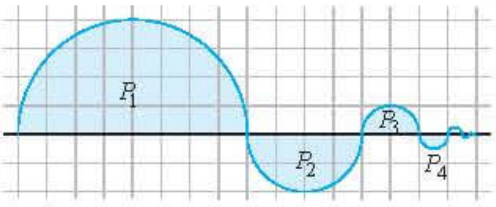
Ćwiczenie 17. Liczbę p przedstaw w postaci ułamka zwykłego, gdy:

a) $p=0,(351)$, **b)** $p=3,12(03)$, **c)** $p=0,(18)+3,(6)$.

Ćwiczenie 18. Liczbę k przedstaw w postaci szeregu o ilorazie q, gdy:

a) $k=\sqrt{2}$, $q=\frac{1}{2}$, **b)** $k=3$, $q=\frac{2}{3}$.

Przykład 15. Figura F przedstawiona na rysunku jest sumą figur, z których każda jest półkolem. Promień największego półkola jest równy 4, a każdego następnego półkola jest dwa razy mniejszy od poprzedniego. Oblicz pole figury F.



Rozwiązanie

Zauważamy, że pole P_F figury F jest równe $P_F=P_1+P_2+P_3+\ldots$,

gdzie $P_1=\frac{1}{2}\pi\cdot 4^2=8\pi$, $P_2=\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=2\pi$,

$P_3=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{2}$, $P_4=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}$, $\ldots$,

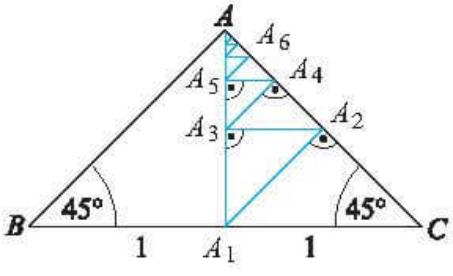
$P_F=8\pi+2\pi+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{8}\pi+\ldots$.

Prawa strona równości jest szeregiem geometrycznym, w którym pierwszy wyraz $a_1=8\pi$ i iloraz $q=\frac{1}{4}$, więc szereg ten jest zbieżny ($|q|<1$) i $P_F=\frac{a_1}{1-q}$.

Zatem $P_F=\frac{8\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\cdot 8\pi=\frac{32}{3}\pi$.

Odp.: Pole figury F jest równe $\frac{32}{3}\pi$.

Ćwiczenie 19. Przyjmij oznaczenia i dane jak na rysunku. Oblicz długość linii $AA_1A_2A_3A_4\ldots$, która jest sumą odcinków AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, $\ldots$.



Przykład 16. Dla jakich wartości x szereg geometryczny $1+(3-x)+(3-x)^2+(3-x)^3+\ldots$ jest zbieżny? Wyznacz jego sumę.

Rozwiązanie

Zauważamy, że wyrazy szeregu geometrycznego $1+(3-x)+(3-x)^2+(3-x)^3+\ldots$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego określonego wzorem $a_n=a_1q^{n-1}$, w którym $a_1=1$ i $q=3-x$.

Szereg geometryczny jest zbieżny, jeśli $|q|<1$, czyli gdy

$$|3-x|<1 \iff -1<3-x<1 \iff -4<-x<-2 \iff 2<x<4.$$

Jeżeli $x\in(2;4)$, to $S=\dfrac{1}{1-(3-x)}=\dfrac{1}{x-2}$.

$S=\dfrac{a_1}{1-q}$

Ćwiczenie 20. Dla jakich wartości x szereg geometryczny $1+(x-2)^2+(x-2)^4+\ldots$ jest zbieżny? Wyznacz jego sumę.

Przykład 17. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest zbieżnym szeregiem geometrycznym $x+2+\dfrac{4}{x}+\ldots=\dfrac{5x+3}{2}$.

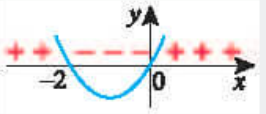
Rozwiązanie

Zauważamy, że w szeregu geometrycznym $x+2+\dfrac{4}{x}+\ldots$ pierwszy wyraz $a_1=x$ i iloraz $q=\dfrac{2}{x}$. Szereg ten jest zbieżny, więc $|q|<1$ i $S=\dfrac{a_1}{1-q}$.

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2}{x}\right|<1\\ \dfrac{x}{1-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{5x+3}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}-1<\dfrac{2}{x}<1\\ \dfrac{x}{\dfrac{x-2}{x}}=\dfrac{5x+3}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}\dfrac{2}{x}+1>0\\ \dfrac{2}{x}-1<0\\ \dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{5x+3}{2}\end{cases}\iff$$

$x(2+x)>0$

$x_1=-2,\quad x_2=0$

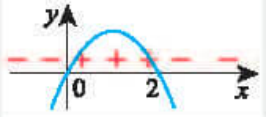


$x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

$$\iff\begin{cases}x(2+x)>0\\ x(2-x)<0\\ 3x^2-7x-6=0\end{cases}\iff\begin{cases}x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)\\ x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)\\ x\in\left\{-\dfrac{2}{3},3\right\}\end{cases}\iff x=3.$$

$x(2-x)<0$

$x_1=0,\quad x_2=2$



$x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Odp.: Rozwiązaniem równania jest liczba 3.

Ćwiczenie 21. Rozwiąż:

a) równanie $x^2+2x^3+4x^4+\ldots=\frac{1}{3}$, którego lewa strona jest zbieżnym szeregiem geometrycznym,

b) nierówność $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\ldots<\frac{3x+1}{3}$, której lewa strona jest zbieżnym szeregiem geometrycznym.

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. a) $a_n\to 0$, $S_n\to\frac{27}{2}$, **b)** $a_n\to 0$, $S_n\to\frac{1000}{11}$. **16. a)** 32, **b)** $\frac{9}{2}$, **c)** $2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

17. a) $\frac{13}{37}$, **b)** $3\frac{397}{3300}$, **c)** $3\frac{28}{33}$. **18. a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}+\ldots$, **b)** $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\ldots$. **19.** $2+\sqrt{2}$.

20. $S-\frac{1}{-x^2+4x-3}$, gdy $x\in(1;2)\cup(2;3)$. **21. a)** $x_0=\frac{1}{3}$, **b)** $x\in\left(-1;\frac{2}{3}\right)$.

Zadania utrwalające

8.16. Napisz szereg geometryczny, którego wyrazami są wyrazy nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q, gdy:

a) $a_1=3,\ q=2$, **b)** $a_1=4,\ q=\frac{1}{2}$, **c)** $a_1=-3,\ q=-\frac{1}{3}$,

d) $a_1=1,\ q=x-1$, **e)** $a_1=x,\ q=x$, **f)** $a_1=0{,}17,\ q=0{,}01$.

8.17. Liczbę S przedstaw w postaci szeregu geometrycznego o ilorazie q i wyrazie pierwszym a_1, gdy:

a) $S=-15$ i $a_1=-5$, **b)** $S=\frac{30}{7}$ i $a_1=3$, **c)** $S=5$ i $q=-\frac{2}{5}$.

8.18. Oblicz sumę szeregu geometrycznego:

a) $2+1+\frac{1}{2}+\ldots$, **b)** $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\ldots$,

c) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}-3}+\ldots$, **d)** $\left(3\sqrt{3}-3\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)+\frac{\sqrt{3}-1}{3}+\ldots$.

8.19. Ułamek okresowy p przedstaw w postaci ułamka zwykłego, gdy:

a) $p=0,(23)$, **b)** $p=1,(13)$, **c)** $p=0,0(17)$,

d) $p=2,0(31)$, **e)** $p=0,42(3)$, **f)** $p=1,12(21)$.

R

8.20. Spośród podanych nieskończonych sum wybierz te, które są szeregami geometrycznymi zbieżnymi i oblicz ich sumy.

1 $\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+\ldots$,

2 $\sqrt{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$,

3 $-27+9-3+1-\frac{1}{3}+\ldots$,

4 $1-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{27}{8}+\ldots$,

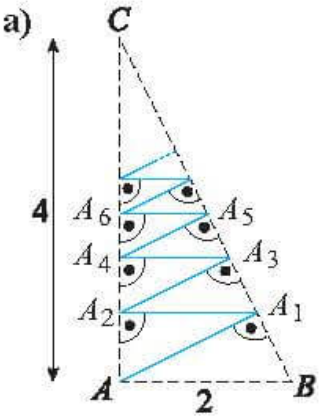
5 $-5-2-\frac{4}{5}-\frac{8}{25}-\ldots$,

6 $\left(\sqrt{3}+1\right)+1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\ldots$.

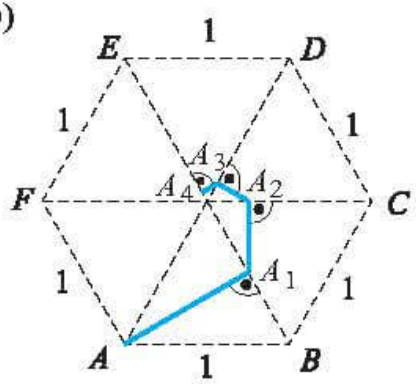
8.21. D Uczeń obliczył sumę szeregu geometrycznego $1+1{,}01+1{,}0201+1{,}030301+\ldots$ i otrzymał liczbę -100. Czy uczeń wykonał poprawnie swoje obliczenia? Odpowiedź uzasadnij.

8.22. Przyjmij dane i oznaczenia jak na rysunku. Oblicz długość linii $AA_1A_2A_3A_4\ldots$, która jest sumą odcinków AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ...

a)



b)



8.23. W trójkącie równobocznym, którego bok ma długość 6, połączono środki boków i otrzymano drugi trójkąt, w którym ponownie połączono środki boków i utworzono trzeci trójkąt itd. Oblicz sumę pól wszystkich utworzonych w ten sposób trójkątów.

8.24. W kwadrat o boku o długości a wpisano drugi kwadrat w ten sposób, że jego wierzchołki leżą na bokach kwadratu poprzedniego i dzielą go na dwie części w stosunku 4 : 3. W ten drugi kwadrat wpisano analogicznie kwadrat trzeci itd. Oblicz sumę pól wszystkich utworzonych w ten sposób kwadratów.

8.25. W kwadrat o boku długości a wpisano koło, następnie w to koło wpisano kwadrat, w otrzymany kwadrat wpisano koło itd.

a) Oblicz sumę obwodów wszystkich utworzonych w ten sposób kół.

b) Oblicz sumę pól wszystkich kolejnych kół.

8.26. Dla jakich wartości x zbieżny jest szereg geometryczny:

R

a) $1+\left(x^2-3x+1\right)+\left(x^2-3x+1\right)^2+\ldots$, **b)** $x^2+\frac{x^2}{x-2}+\frac{x^2}{(x-2)^2}+\ldots$.

8.27. Rozwiąż równanie, którego lewa strona jest zbieżnym szeregiem geometrycznym.

a) $x+4x^2+16x^3+\ldots=2$,

b) $x^2+2x+4+\ldots=x^2+2x+3$,

c) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots=\frac{x-1}{2}$,

d) $x-\frac{1}{2x}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8x}+\ldots=1$.

8.28. Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest zbieżnym szeregiem geometrycznym.

a) $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\ldots<x^2-3x$,

b) $1+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\ldots>2$,

c) $\frac{x}{x+2}+\left(\frac{x}{x+2}\right)^2+\left(\frac{x}{x+2}\right)^3+\ldots\le\frac{x^2-3}{4}$,

d) $4x+2x^2+x^3+\ldots<4x+0,(6)$.

8.29. D Uzasadnij, że w nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym, w którym $a_1q\neq 0$, stosunek dowolnego wyrazu do sumy wszystkich następnych wyrazów jest stały.

Granica niewłaściwa ciągu

Dotychczas obliczaliśmy granice ciągów zbieżnych, których granica była liczbą rzeczywistą. O takich ciągach mówimy, że mają granicę właściwą. Jeżeli ciąg nie ma granicy właściwej (nie jest zbieżny), to mówimy, że ciąg jest rozbieżny.

Przykład 18. Sporządź fragment wykresu ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n=(-1)^n$. Czy ma on granicę?

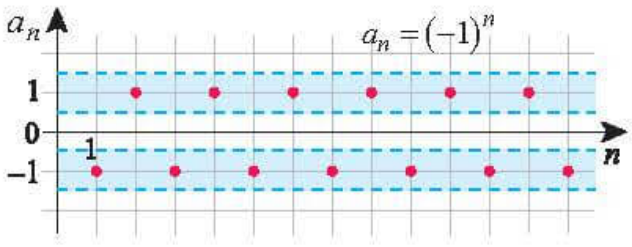
Rozwiązanie

1° Wyznaczamy kolejne wyrazy ciągu $(a_n)=(-1)^n$:

$a_1=-1,\ a_2=1,\ a_3=-1,\ a_4=1,\ \ldots$, czyli

$(a_n)=(-1,1,-1,1,-1,\ldots)$.

2° Szkicujemy fragment wykresu ciągu (a_n).

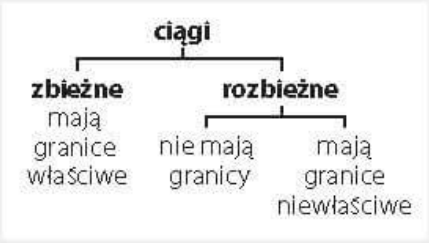


3° Liczba 1 nie jest granicą ciągu (a_n). Istnieje otoczenie liczby 1 (np. $\left(\frac{1}{2};1\frac{1}{2}\right)$), do którego nie należą prawie wszystkie wyrazy ciągu, gdyż nieskończenie wiele jego wyrazów leży poza tym otoczeniem.

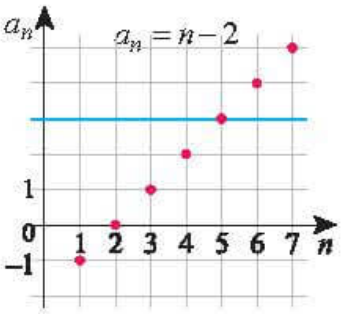
Analogicznie uzasadniamy, że liczba –1 nie jest granicą tego ciągu.

Uwaga

- Ciąg, który nie ma granicy właściwej, nazywamy ciągiem rozbieżnym.
- Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy ciągi rozbieżne do $+\infty$ i ciągi rozbieżne do $-\infty$.
- O ciągach rozbieżnych do $+\infty$ lub $-\infty$ mówimy, że mają **granice niewłaściwe**.



Przykład 19. Sporządź fragment wykresu ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = n-2$. Podaj wyrazy ciągu (a_n), które są większe od liczby 3.



Rozwiązanie

$(a_n) = (-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$

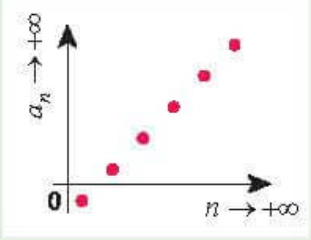
$a_n > 3$, gdy $n-2>3$, więc $n>5$, czyli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są większe od liczby 3.

Ćwiczenie 22. Podaj wyrazy ciągu $a_n = n-2$, które są większe od liczby M, gdy:
a) $M=1$, **b)** $M=10$, **c)** $M=100$.

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy **rozbieżnym do $+\infty$** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M prawie wszystkie wyrazy ciągu są większe od M.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ *inny zapis* $a_n \to +\infty$.

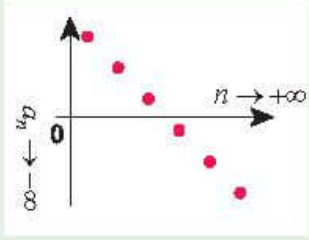


Ćwiczenie 23. Podaj wyrazy ciągu (a_n), które spełniają warunek $a_n \geq M$, gdy:
a) $a_n = 3n+1$, $M=15$, **b)** $a_n = 2^n$, $M=100$.

Definicja

Ciąg (a_n) nazywamy **rozbieżnym do $-\infty$** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M prawie wszystkie wyrazy ciągu są mniejsze od M.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ *inny zapis* $a_n \to -\infty$.



Ćwiczenie 24. Podaj wyrazy ciągu (a_n), które spełniają warunek $a_n \le M$, gdy:
a) $a_n = 4-n$, $M=-6$, **b)** $a_n = -2n+10$, $M=-100$.

Obliczając granice niewłaściwe ciągów, będziemy wykonywać różne działania na nieskończonościach. Niektóre z tych działań w matematyce przyjmuje się jako symbole oznaczone, a niektóre jako symbole nieoznaczone.

Symbole oznaczone			Symbole nieoznaczone
Jeżeli $a \in R^+$, to:			
• $+\infty+\infty=+\infty$	• $-\infty-\infty=-\infty$		• $+\infty-\infty$
• $+\infty-a=+\infty$	• $-\infty+a=-\infty$		
• $+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$	• $-\infty\cdot(-\infty)=+\infty$	• $-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$	• $0\cdot(+\infty)$ • $0\cdot(-\infty)$
• $a\cdot(+\infty)=+\infty$	• $a\cdot(-\infty)=-\infty$	• $-a\cdot(-\infty)=+\infty$	• 0^0 • ∞^0 • 1^∞
• $\frac{a}{+\infty}=0$	• $\frac{a}{-\infty}=0$		• $\frac{+\infty}{+\infty}$ • $\frac{+\infty}{-\infty}$ • $\frac{-\infty}{+\infty}$ • $\frac{0}{0}$

Ćwiczenie 25. Podaj wynik działania: **a)** $\frac{+\infty}{2}$, **b)** $\frac{-\infty}{-1}$, **c)** $-\infty-3$, **d)** $-2\cdot(+\infty)$.

Przykład 20. Oblicz:
a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4n^2-3n+2\right)$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-2n^2-n^3\right)$.

Rozwiązanie

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4n^2-3n+2\right)=\underbrace{+\infty-\infty+2}_{\text{symbol nieoznaczony}}{}^{*)}=$

Po podstawieniu otrzymujemy symbol nieoznaczony $+\infty-\infty$.

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n^2\left(4-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\right]=\underbrace{+\infty\cdot 4}_{\text{symbol oznaczony}}=+\infty.$

($\frac{3}{n}\to 0$, $\frac{2}{n^2}\to 0$)

Przekształcamy wzór ciągu tak, aby po podstawieniu nie było symbolu nieoznaczonego.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-2n^2-n^3\right)=1-\infty-\infty=1-2\cdot(-\infty)=-\infty.$

symbol oznaczony

Ćwiczenie 26. Oblicz:
a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+2n-1\right)$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5-6n^2-n^4\right)$, **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^3-6n+1\right)$.

*) Zapisy na żółtej plamce nie oznaczają działań w sensie arytmetyki i można je pominąć.

Uwaga

Jeżeli obliczamy granicę ciągu i po podstawieniu do jego wzoru w miejsce zmiennej n symbolu „$+\infty$” otrzymujemy symbol nieoznaczony, to tak przekształcamy ten wzór, by po ponownym podstawieniu otrzymać symbol oznaczony.

Przykład 21. Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-2}{n+1}$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-n^3}{n^2+n+1}$.

Rozwiązanie

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-2}{n+1}=\underbrace{\dfrac{+\infty}{+\infty}}_{\text{symbol nieoznaczony}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(n-\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=$

Wyłączamy z licznika i mianownika najwyższą potęgę n występującą w mianowniku.

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\left[\frac{+\infty-0}{1+0}\right]=\left[\frac{+\infty}{1}\right]=+\infty,$$

($n\to+\infty$, $\frac{2}{n}\to 0$, $\frac{1}{n}\to 0$)

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-n^3}{n^2+n+1}=\underbrace{\dfrac{-\infty}{+\infty}}_{\text{symbol nieoznaczony}}=$

Stosujemy wzór skróconego mnożenia $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(1-n)(n^2+n+1)}{n^2+n+1}=\lim_{n\to+\infty}(1-n)=1-\infty=-\infty$$

Odp.: **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-2}{n+1}=+\infty$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-n^3}{n^2+n+1}=-\infty$.

Ćwiczenie 27. Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-n\right)$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2-4}{3n-2}$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{3-2n}$, **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5-n+n^2-2n^3}{3-n^2}$.

Uwaga

Jeżeli $a_n = \dfrac{W(n)}{P(n)}$, gdzie

$$W(n) = b_k \cdot n^k + \ldots + b_0, \quad P(n) = c_l \cdot n^l + \ldots + c_0, \quad b_k \neq 0 \text{ i } c_l \neq 0, \text{ to:}$$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{b_k}{c_l}$, gdy $k = l$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, gdy $k < l$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ lub $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$, gdy $k > l$.

Ćwiczenie 28. Nie obliczając granicy ciągu, ustal, czy ciąg jest zbieżny, gdy:

a) $a_n = \dfrac{n}{1-n}$, b) $b_n = \dfrac{1}{2n+3}$, c) $c_n = \dfrac{(5-n)^2(4+3n)}{n^3-1}$,

d) $d_n = \dfrac{1-n^5}{(n^2+3)(n^2+4)}$, e) $e_n = \dfrac{(5-n)^2(2-n)^3}{4n^2-5n^5}$, f) $f_n = \dfrac{(n^3-2)^2}{-n(n^2+1)(1-n^2)}$.

Przykład 22. Oblicz $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{2n^2-1} \right)$.

Rozwiązanie

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{2n^2-1} \right) = \underbrace{+\infty - \infty}_{\text{symbol nieoznaczony}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{2n^2-1} \right) \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{2n^2-1}}{\sqrt{n^2-1} + \sqrt{2n^2-1}}}_{1} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - 1 - 2n^2 + 1}{n\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}} \right)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-n}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}} = \left[\frac{-1 \cdot (+\infty)}{1 + \sqrt{2}} \right] = -\infty.$$

Odp.: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{2n^2-1} \right) = -\infty$.

Ćwiczenie 29. Oblicz $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{3n^2+2} - \sqrt{n^2+2} \right)$.

Ciekawostka

W matematyce i innych dziedzinach wiedzy szczególną i ważną rolę odgrywa liczba niewymierna e.

$e = 2,7182818284904...$

Jest ona granicą ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Zatem $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Przykład 23. Oblicz granicę: a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Rozwiązanie

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} - e$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n} - e$

Ćwiczenie 30. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{6}{n}\right)^{2n}$, e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3n}$, f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-n}\right)^{n+1}$.

Ćwiczenie 31. Poszukaj w literaturze lub w Internecie informacji o liczbie e i podaj przykłady jej zastosowań w różnych dziedzinach wiedzy.

Odpowiedzi do ćwiczeń

22. a) $n>3$, b) $n>12$, c) $n>102$. 23. a) a_5, a_6, ..., b) a_7, a_8, ... 24. a) $n\geq 10$, b) $n\geq 55$.
25. a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) $-\infty$, d) $-\infty$. 26. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$. 27. a) $-\infty$, b) $+\infty$, c) $-\infty$, d) $+\infty$.
28. a) Tak, b) tak, c) tak, d) nie, e) tak, f) nie. 29. $+\infty$.
30. a) e^5, b) e, c) e^{-2}, d) e^{-12}, e) e^{-3}, f) e.

Zadania utrwalające

8.30. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = n+2$, **b)** $a_n = 3-5n$, **c)** $a_n = 3n^2 - 4n$,

d) $a_n = 2+4n-3n^2$, **e)** $a_n = 2n^3 - 5n - 7$, **f)** $a_n = 1-2n-n^3$.

8.31. Oblicz granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \dfrac{3n^2+2n-1}{n-5}$, **b)** $a_n = \dfrac{4-3n-n^2}{3n+2}$,

c) $a_n = \dfrac{n^3-2n^2+n-3}{4n+1}$, **d)** $a_n = \dfrac{3-4n^5}{2n^3+3n-2}$,

e) $a_n = \dfrac{1+5+9+\ldots+(4n-3)}{n+5}$, **f)** $a_n = \dfrac{2n^7+12n^2+5}{(2n^2+1)^2(3n-7)}$.

8.32. Nie obliczając granicy ciągu, ustal, który z ciągów o podanym wzorze jest rozbieżny.

a) $a_n = \dfrac{1}{2n} - n$, **b)** $b_n = \dfrac{4n^2+1}{2n+3}$, **c)** $c_n = \left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^3$, **d)** $d_n = \dfrac{(4n-1)(n+2)^2}{n^2+1}$.

8.33. Nie wykonując obliczeń, podaj granicę ciągu (a_n), gdy:

a) $a_n = \dfrac{n^7-2n^3+3n}{1+4n^3+5n^4+6n^7}$, **b)** $a_n = \dfrac{n^8-2n^3+3n}{12+5n^4+6n^5}$,

c) $a_n = \dfrac{-2n^3+3n}{1+2n+3n^2+4n^5}$, **d)** $a_n = \dfrac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}$,

e) $a_n = \left(\dfrac{1-n}{3+2n}\right)^3$, **f)** $a_n = \left(\dfrac{3+n}{3-n}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2n-2}{n+3}\right)^5$.

8.34. Wiedząc, że $a_n = \dfrac{3}{n}$ i $b_n = \dfrac{n+2}{n+1}$, oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)$, **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, **e)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$.

8.35. Wiedząc, że $a_n = n^2-1$ i $b_n = \dfrac{n-1}{n}$, oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)$, **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$, **e)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n\cdot b_n}$.

8.36. Oblicz:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4^n-1}{2^n}$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{5n}+2^n-1}{8^n}$, **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n-1}{\sqrt{n}}$, **d)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-n^3}{\sqrt{n}+2}$.

8.37. Określ, dla jakich wartości parametru k ciąg (a_n), gdzie $a_n=\frac{kn+1}{(k-1)n-2}$, jest:

a) zbieżny do liczby 2, **b)** zbieżny do liczby $\frac{1}{2}$,

c) rozbieżny do $-\infty$, **d)** rozbieżny do $+\infty$.

8.38. Podaj przykłady ciągów (a_n) i (b_n), takich że $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=+\infty$ oraz:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=4$, **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$, **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=+\infty$.

Zestaw powtórkowy

1. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Granicą ciągu $a_n=\frac{3+2n-n^2}{3n^2+2n-3}$ jest liczba:

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** 1

Rozbieżny do $+\infty$ jest ciąg:

C. $a_n=\frac{3}{n}-n$ **D.** $b_n=\frac{3}{n}+n$

2. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Spośród ciągów określonych wzorami $a_n=\frac{n-100}{n+100}$, $b_n=1+\frac{(-1)^n}{2n}$, $c_n=(-2)^n$, $d_n=n+\frac{1}{n}$ zbieżne są tylko ciągi:

A. a_n, b_n i d_n **B.** a_n i b_n **C.** a_n i c_n **D.** b_n i c_n

3. *Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.*

Jeżeli w ciągu geometrycznym (a_n) iloraz $q=\frac{2}{3}$ i $a_1=-3$, to:

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\frac{-3}{1-\frac{2}{3}}$ **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$

Suma $0,6(9)+0,7$ jest równa:

C. 1,39 **D.** 1,4

4. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=-\infty$, to $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=0$.	**P**	**F**
Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=2$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$, to $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$.	**P**	**F**

5. Jeżeli $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(k^2-4)n^2+3}{(k+2)n^2+4n-1}=8$, to czy k może być liczbą różną od 10?

Wybierz odpowiedź T albo N i jej uzasadnienie spośród A i B.

T	**Tak,**	ponieważ	**A.**	$\frac{k^2-4}{k+2}=8$, więc $k^2-8k-20=0$, skąd $k=-2$ lub $k=10$.
N	**Nie,**		**B.**	$\frac{k^2-4}{k+2}=8$, więc $k-2=0$, skąd $k=10$.

6. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli $a_n=\sqrt{n^2+n}-n$, to:

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ **C.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\frac{1}{2}$ **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-\infty$.

7. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Granicą ciągu $a_n=\sqrt[n]{3\cdot 2^n+2\cdot 4^n+3\cdot 8^n}$ jest:

A. 2, **B.** 4, **C.** 8, **D.** $+\infty$.

9. Granica i ciągłość funkcji

Granica funkcji w punkcie

Do obliczania granic funkcji niezbędna jest umiejętność obliczania granic ciągów.
Mówiąc o granicy dowolnej funkcji w ustalonym punkcie x_0, zakładamy zawsze, że istnieje co najmniej jeden ciąg argumentów (x_n) funkcji zbieżny do x_0 o wyrazach różnych od x_0.
Na przykład, jeżeli chcemy obliczyć granicę funkcji $f(x)=x^2$ w punkcie $x_0=2$, to ciąg x_n może mieć wzór $x_n=2+\frac{1}{n}$ (wystarczy do liczby x_0 dopisać ciąg zbieżny do 0).
Tworzymy ciąg wartości (y_n) funkcji f, taki że $y_n=f(n)$.

n	$x_n=2+\frac{1}{n}$	$y_n=f(x_n)=(x_n)^2$
1	$x_1=2+1=3$	$y_1=f(x_1)=f(3)=3^2=9$
2	$x_2=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$	$y_2=f(x_2)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$
3	$x_3=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	$y_3=f(x_3)=f\left(\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}=5\frac{4}{9}$
4	$x_4=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$	$y_4=f(x_4)=f\left(\frac{9}{4}\right)=\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{16}=5\frac{1}{16}$
...	.....	.....
n	$x_n=2+\frac{1}{n}$	$y_n=f(x_n)=f\left(2+\frac{1}{n}\right)=\left(2+\frac{1}{n}\right)^2$

$$(y_n)=\left(9,\ 6\frac{1}{4},\ 5\frac{4}{9},\ 5\frac{1}{16},\ 4\frac{21}{25},\ \ldots,\ \left(2+\frac{1}{n}\right)^2\right).$$

Obliczamy granicę ciągu (y_n) określonego wzorem $y_n=\left(2+\frac{1}{n}\right)^2$.

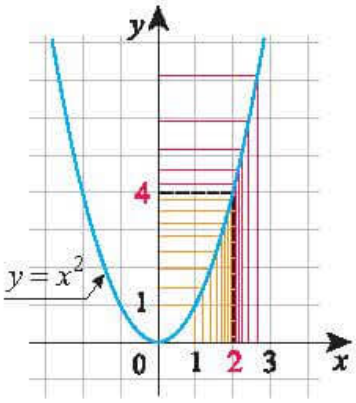
$$\lim_{n\to+\infty} y_n=\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^2=(2+0)^2=2^2=4.$$

Ćwiczenie 1. Utwórz ciąg wartości (y_n) funkcji $f(x)=x^2$ dla ciągu argumentów (x_n) określonego wzorem: **a)** $x_n=2-\frac{1}{n}$, **b)** $x_n=2+\frac{(-1)^n}{n}$.

Uwaga

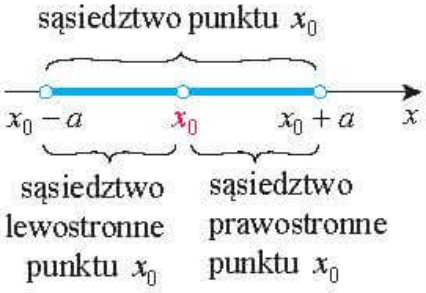
Dla każdego ciągu argumentów (x_n) o wyrazach $x_n \neq 2$ i zbieżnego do liczby 2 odpowiedni ciąg wartości funkcji (y_n), gdzie $y_n=x_n^2$, jest zbieżny do liczby 4.

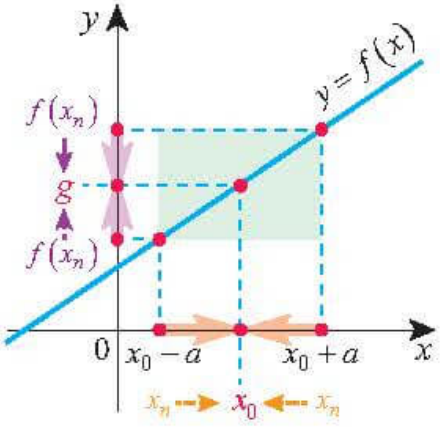
Liczba 4 jest granicą funkcji $f(x)=x^2$ w punkcie 2, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$.



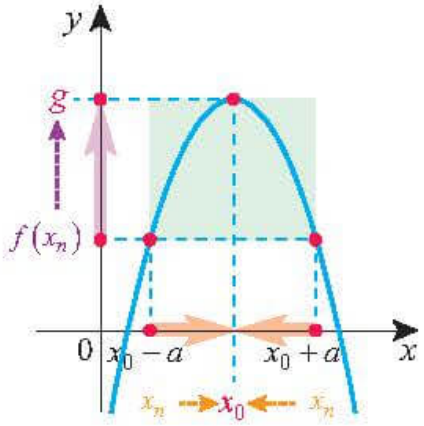
Sumę przedziałów $(x_0-a;\ x_0)\cup(x_0;\ x_0+a)$, gdzie $a\in R^+$, nazywamy **sąsiedztwem** punktu x_0:

- przedział $(x_0-a;\ x_0)$ nazywamy **sąsiedztwem lewostronnym** punktu x_0,
- przedział $(x_0;\ x_0+a)$ nazywamy **sąsiedztwem prawostronnym** punktu x_0.





$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g$



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g$

Definicja granicy funkcji w punkcie według Heinego*)

Funkcja f określona w sumie przedziałów $(x_0-a;\ x_0)\cup(x_0;\ x_0+a)$, gdzie $a\in R^+$, ma w punkcie x_0 granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0, takiego że $x_n\in D_f$ i $x_n\neq x_0$, ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ jest zbieżny do g, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g$.

*) Heine Eduard (1821–1881), matematyk niemiecki.

Przykład 1. Oblicz granicę funkcji f w punkcie x_0 i sprawdź, czy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, gdy:

a) $f(x)=4-5x^2$, $x_0=-3$, **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+2}$, $x_0=1$.

Rozwiązanie

a) $D_f=\boldsymbol{R}$

Dla każdego ciągu (x_n), takiego że $x_n\in\boldsymbol{R}$ oraz $x_n\neq -3$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-3$, mamy

$$\lim_{n\to+\infty} y_n=\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(4-5\cdot x_n^2\right)=4-5\cdot(-3)^2=-41.$$

Wobec dowolności ciągu (x_n) z definicji granicy funkcji wynika, że

$$\lim_{x\to-3}\left(4-5x^2\right)=-41.$$

$f(-3)=4-5\cdot(-3)^2=-41$, więc $\lim\limits_{x\to-3}\left(4-5x^2\right)=f(-3)$.

b) $D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{-2\}$

Dla każdego ciągu (x_n), takiego że $x_n\in\boldsymbol{R}\setminus\{-2\}$ oraz $x_n\neq 1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$, mamy

$$\lim_{n\to+\infty} y_n=\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2+3x_n}{x_n+2}=\frac{1^2+3\cdot 1}{1+2}=\frac{4}{3}.$$

Wobec dowolności ciągu (x_n) z definicji granicy funkcji wynika, że

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x}{x+2}=\frac{4}{3}.$$

$f(1)=\dfrac{1^2+3\cdot 1}{1+2}=\dfrac{4}{3}$, więc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x}{x+2}=f(1)$.

Ćwiczenie 2. Oblicz granicę funkcji f w punkcie x_0 i sprawdź, czy

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, gdy: **a)** $f(x)=3-x^2$, $x_0=4$, **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$, $x_0=3$.

Z definicji granicy funkcji f w punkcie x_0 wynika, że wyznaczenie granicy funkcji sprowadza się do wyznaczania granic ciągów wartości ($f(x_n)$).

Możemy zatem przy wyznaczaniu granicy funkcji wykorzystywać wszystkie twierdzenia dotyczące granic ciągów.

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji

Jeżeli funkcje f i g mają w punkcie x_0 granice

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \text{ oraz } \lim_{x\to x_0} g(x)=b,$$

to:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=a\pm b$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=a\cdot b$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$, gdy $b\neq 0$.

Jeżeli $c\in R$, to:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c\pm f(x)\right]=c\pm\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c\cdot f(x)\right]=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{c}{f(x)}=\dfrac{c}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, gdy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$.

Udowodnimy, że $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=a+b$.

***Z* (*założenie*):**	***T* (*teza*):**
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=a+b$

***Dowód*:**

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[f(x_n)+g(x_n)\right],$$

gdzie (x_n) jest dowolnie ustalonym ciągiem zbieżnym do x_0, o wyrazach różnych od x_0.

Z twierdzenia o działaniach na granicach ciągów:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[f(x_n)+g(x_n)\right]=\lim_{n\to+\infty} f(x_n)+\lim_{n\to+\infty} g(x_n).$$

Zatem wobec dowolności ciągu (x_n) otrzymujemy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)+\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)=a+b$.

c.n.u.

Ćwiczenie 3. Uzasadnij, że jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, to:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=a-b$,

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=a\cdot b$.

W praktyce przy obliczaniu granicy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ do wzoru funkcji f w miejsce zmiennej x podstawiamy x_0. Możemy wtedy otrzymać wyrażenie arytmetyczne, którego wartość potrafimy obliczyć, albo symbol nieoznaczony. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 2. Oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+x^2-x\right)$, **b)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.

Rozwiązanie

a) $-1\in D_f$, gdzie $f(x)=x^3+x^2-x$.

W miejsce x do wzoru x^3+x^2-x podstawiamy liczbę -1.

$$\lim_{x\to -1}\left(x^3+x^2-x\right)=(-1)^3+(-1)^2-(-1)=1.$$

b) $-2\in D_f$, gdzie $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.

W miejsce x do wzoru $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ podstawiamy liczbę -2.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2-1}=\frac{(-2)^2-4}{(-2)^2-1}=\frac{0}{3}=0.$$

Odp.: **a)** $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+x^2-x\right)=1$, **b)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

Ćwiczenie 4. Oblicz: **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-6}{x^2+x-2}$, **b)** $\lim\limits_{x\to -3}\left[3(x+1)(x+2)\right]$.

Przykład 3. Oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+9}-3}{x}$.

Rozwiązanie

a) $1\notin D_f$, gdzie $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

Po podstawieniu do wzoru $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ w miejsce x liczby 1 otrzymujemy symbol nieoznaczony $\dfrac{0}{0}$. W takim przypadku staramy się przekształcić wzór tak, by móc podstawić liczbę 1 i obliczyć wartość.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=3\cdot 1=3.$$

b) $0 \notin D_f$, gdzie $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+9}-3}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+9}-3}{x}=$$

Po podstawieniu w miejsce x do wzoru $\dfrac{\sqrt{4x+9}-3}{x}$ *liczby 0 otrzymujemy symbol nieoznaczony* $\dfrac{0}{0}$.

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{4x+9}-3}{x}\cdot\frac{\sqrt{4x+9}+3}{\sqrt{4x+9}+3}\right]=$$

$1-\dfrac{\sqrt{4x+9}+3}{\sqrt{4x+9}+3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x\cdot\left(\sqrt{4x+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{4x+9}+3}=\frac{4}{3+3}=\frac{2}{3}.$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Odp.: **a)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=3$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+9}-3}{x}=\dfrac{2}{3}$.

Ćwiczenie 5. Oblicz: **a)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}-2}{x}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. a) $(x_n)=\left(1,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{4},\ldots\right)$, $(y_n)=\left(1,\frac{9}{4},\frac{25}{9},\frac{49}{16},\ldots\right)$, **b)** $(x_n)=\left(1,\frac{5}{2},\frac{5}{3},\frac{9}{4},\ldots\right)$, $(y_n)=\left(1,\frac{25}{4},\frac{25}{9},\frac{81}{16},\ldots\right)$.

2. a) $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=-13$, $f(4)=-13$, **b)** $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=6$, $f(3)=6$. **4. a)** 3, **b)** 6 **5. a)** $\frac{4}{5}$, **b)** $\frac{3}{4}$.

Zadania utrwalające

9.1. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej granicę w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x)=x+3$, $x_0=0$, **b)** $f(x)=-x^2+2$, $x_0=-1$, **c)** $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$, $x_0=2$.

9.2. Oblicz granicę funkcji f w punkcie x_0 i sprawdź, czy $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, gdy:

a) $f(x)=4x-2$, $x_0=1$,

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$, $x_0=-1$,

c) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$, $x_0=0$,

d) $f(x)=\dfrac{4x+2}{x^2-1}$, $x_0=-\dfrac{1}{2}$.

9.3. Oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to -1}3x^2$,

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+3x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-1}{x+5}$,

e) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^3-2x^2+4}$,

f) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+8}$.

9.4. Oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-x}$, b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$, c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4x+3}$.

9.5. Oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16x+9}-3}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$, e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

Granice jednostronne funkcji w punkcie

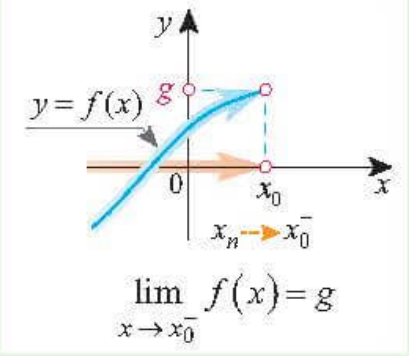
Przy ustalaniu granicy prawostronnej (lewostronnej) dowolnej funkcji w punkcie x_0, zawsze zakładamy istnienie przynajmniej jednego zbieżnego do x_0 ciągu argumentów tej funkcji o wyrazach większych albo mniejszych od x_0.

Jeżeli wyrazy dowolnie ustalonego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 będą należały tylko do przedziału $(x_0-a; x_0)$ albo tylko do przedziału $(x_0; x_0+a)$, to mówimy wtedy o zbieżności lewostronnej, albo prawostronnej funkcji w punkcie x_0.

Definicja

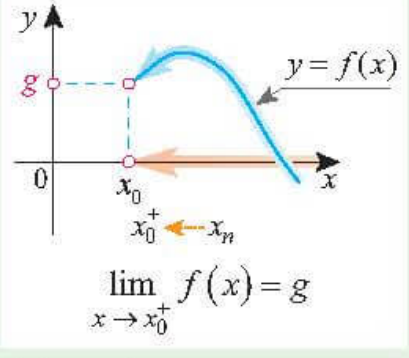
Liczba g jest granicą:

- **lewostronną funkcji f w punkcie x_0**, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in D_f$ i $x_n < x_0$ zbieżnego do x_0 ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do g, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=g$.



$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=g$

- **prawostronną funkcji f w punkcie x_0**, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in D_f$ i $x_n > x_0$ zbieżnego do x_0 ciąg wartości $f(x_n)$ jest zbieżny do g, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=g$.



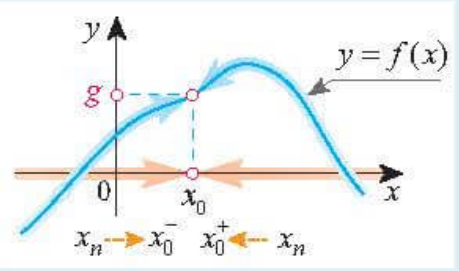
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=g$

Zapis $x\to x_0^-$ *czytamy* x dąży do x_0 przez wartości mniejsze od x_0.

Zapis $x\to x_0^+$ *czytamy* x dąży do x_0 przez wartości większe od x_0.

Twierdzenie

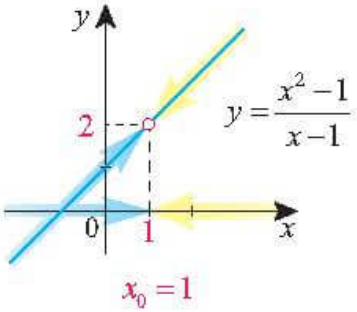
Funkcja f ma granicę g w punkcie x_0, gdy $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.



Z wykresu funkcji możemy odczytywać wartości jej granic w określonych punktach należących bądź nie do jej dziedziny.

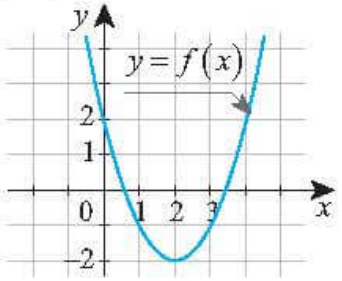
Na przykład, z wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$, której $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, odczytujemy, że gdy $x_0 = 1$, to

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$, więc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

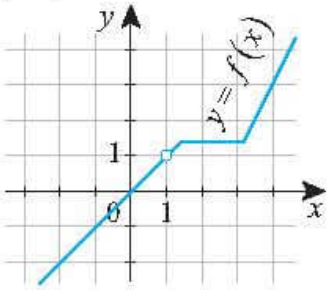


Ćwiczenie 6. Odczytaj z rysunku granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0 i określ, czy ma ona w tym punkcie granicę.

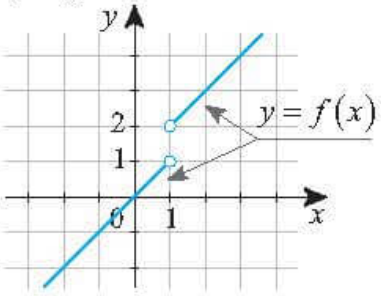
a) $x_0 = 2$



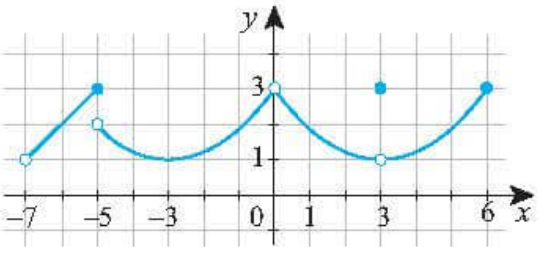
b) $x_0 = 1$



c) $x_0 = 1$



Ćwiczenie 7. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Przepisz równania do zeszytu i w miejsce ■ wpisz liczbę, a w miejsce ● wpisz „istnieje” albo „nie istnieje”.



a) $\lim\limits_{x \to -7^-} f(x)$ ●, $\lim\limits_{x \to -7^+} f(x) =$ ■,

b) $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) =$ ■, $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) =$ ■, $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ ●, $f(-5) =$ ■,

c) $f(0)$ ●, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ ■, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ ■, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ●,

d) $f(3) =$ ■, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$ ■, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) =$ ■, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ●.

Ćwiczenie 8. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj granice jednostronne w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{gdy} \quad x<-1 \\ -1, & \text{gdy} \quad x>-1 \end{cases}$, $x_0=-1$, b) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{gdy} \quad x<0 \\ x+2, & \text{gdy} \quad x\geq 0 \end{cases}$, $x_0=0$.

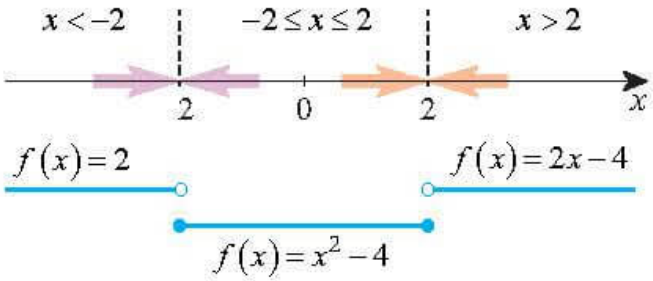
Granice jednostronne funkcji najczęściej obliczamy, gdy funkcja ta podana jest w różnych przedziałach różnymi wzorami. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 4. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{gdy} \quad x<-2 \\ x^2-4, & \text{gdy} \quad -2\leq x\leq 2 \\ 2x-4, & \text{gdy} \quad x>2 \end{cases}$.

Zbadaj, czy funkcja f ma granice w punktach -2 oraz 2.

Rozwiązanie

Warunki $x<-2$, $-2\leq x\leq 2$, $x>2$ dzielą oś liczbową na przedziały $(-\infty;-2)$, $\langle -2;2\rangle$, $(2;+\infty)$.



$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-} 2 = 2 \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+} \left(x^2-4\right) = (-2)^2-4=0 \end{aligned}\right\} \quad \lim_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim_{x\to -2^+} f(x),$$

więc funkcja f w punkcie -2 nie ma granicy.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \left(x^2-4\right) = 2^2-4=0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} (2x-4) = 2\cdot 2-4=0 \end{aligned}\right\} \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x),$$

więc funkcja f w punkcie 2 ma granicę równą 0.

Odp.: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ nie istnieje, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$.

Ćwiczenie 9. Zbadaj, czy funkcja f ma granicę w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{gdy } x<-1 \\ x^2-1, & \text{gdy } x\geq -1 \end{cases}$, $x_0=-1$, **b)** $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{gdy } x<0 \\ x+1, & \text{gdy } x\geq 0 \end{cases}$, $x_0=0$.

Ćwiczenie 10. Z fizyki wiadomo, że 1 g wody w temperaturze 4°C ma objętość 1 cm^3. Objętość V wody zmienia się w zależności od temperatury t [$V=V(t)$]. Poszukaj w literaturze lub w Internecie wiadomości na temat anomalnej rozszerzalności wody i przedstaw w postaci wykresu zmianę objętości 1 cm^3 wody o temperaturze 0°C w zależności od temperatury t, gdzie $-4°C\leq t\leq 7°C$. Podaj $\lim\limits_{t\to 0^-} V(t)$ i $\lim\limits_{t\to 0^+} V(t)$.

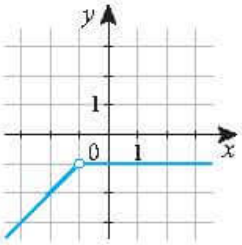
Jakie znaczenie ma to zjawisko dla zwierząt żyjących w środowisku wodnym?

Odpowiedzi do ćwiczeń

6. a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-2$, **b)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, **c)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$, **funkcja f nie ma granicy w punkcie $x_0=1$.**

7. Kolejno: **a) nie istnieje, 1, b) 3, 2, nie istnieje, 3, c) nie istnieje, 3, 3, istnieje, d) 3, 1, 1, istnieje.**

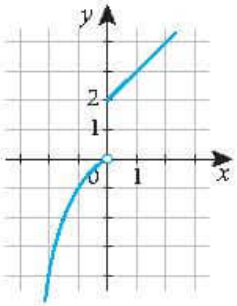
8. a)



$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$,

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1$,

b)



$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$.

9. a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **nie istnieje, b)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Zadania utrwalające

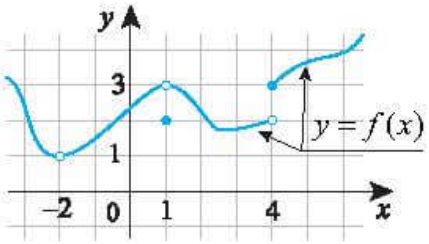
9.6. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj granicę lewostronną oraz prawostronną tej funkcji w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & \text{gdy } x<-1 \\ 3x+2, & \text{gdy } x>-1 \end{cases}$, $x_0=-1$, **b)** $f(x)=\begin{cases} x^2+3, & \text{gdy } x<0 \\ x^2-3, & \text{gdy } x>0 \end{cases}$, $x_0=0$,

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x}, & \text{gdy } x>4 \\ \dfrac{5}{x-5}, & \text{gdy } x<4 \end{cases}$, $x_0=4$, **d)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x}, & \text{gdy } x<0 \\ 1, & \text{gdy } x>0 \end{cases}$, $x_0=0$.

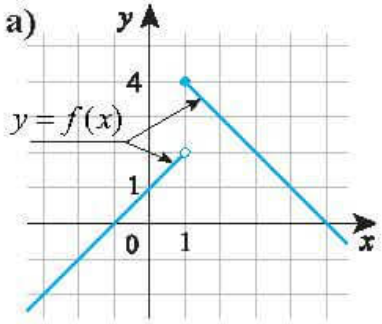
9.7. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji f. Podaj granicę (jeśli istnieje) funkcji f w punkcie x_0, gdy:

a) $x_0 = -2$, b) $x_0 = 1$, c) $x_0 = 4$.

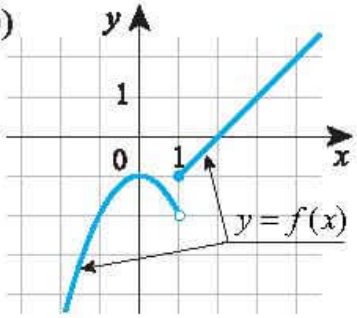


9.8. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji f. Podaj punkt, w którym funkcja f nie ma granicy oraz wartości granic jednostronnych w tym punkcie.

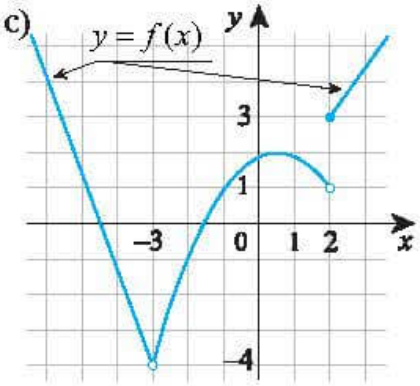
a)



b)



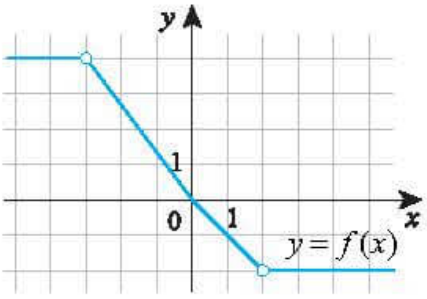
c)



9.9. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji f. Podaj wartość granicy:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$,

c) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$, d) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$.



9.10. Zbadaj, czy funkcja f ma granicę w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{gdy } x < 1 \\ 4 - 2x, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$,

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{gdy } x \geq -2 \\ -x^3 + 2, & \text{gdy } x < -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$,

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}, & \text{gdy } x > 2 \\ \dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2}, & \text{gdy } x < 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$,

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3}{x+1}, & \text{gdy } x > 0 \\ \dfrac{x^2+3}{x-1}, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

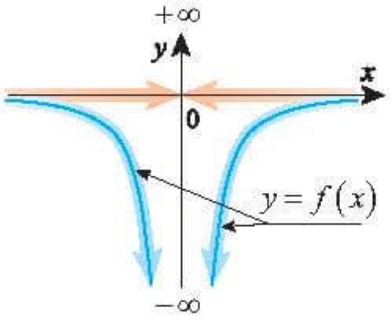
9.11. Określ, dla jakich wartości parametru m funkcja f ma granicę w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x) = \begin{cases} mx + 3, & \text{gdy } x > 1 \\ x^2 + 2m, & \text{gdy } x < 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$, b) $f(x) = \begin{cases} mx + 1, & \text{gdy } x < 2 \\ 2x - m^2, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$.

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f, do której dziedziny nie należy liczba 0.

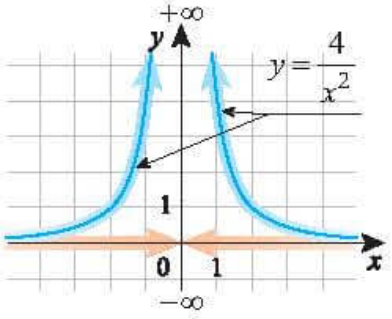
Zauważamy, że jeżeli ciąg argumentów (x_n) tej funkcji jest zbieżny do 0, to odpowiadający mu ciąg wartości $f(x_n)$ jest rozbieżny do $-\infty$.



Definicja

Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $+\infty$ $(-\infty)$, jeśli dla każdego ciągu (x_n) argumentów funkcji f zbieżnego do x_0, o wyrazach różnych od x_0, odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$ $(-\infty)$.

Przykład 5. Naszkicuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{4}{x^2}$ i zbadaj, czy funkcja ma granicę w punkcie $x_0=0$.



Rozwiązanie

$D_f = \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$. Wyznaczamy granice

1 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ oraz **2** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

1 Jeżeli $x_n \in (-\infty; 0)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = 0$, to

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{x_n^2} = +\infty, \text{ czyli } \lim_{x\to 0^-} \frac{4}{x^2} = +\infty.$$

2 Jeżeli $x_n \in (0; +\infty)$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, to

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{x_n^2} = +\infty, \text{ czyli } \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{x^2} = +\infty.$$

Z **1** i **2** wnioskujemy, że funkcja $f(x)=\frac{4}{x^2}$ nie ma granicy właściwej w punkcie $x_0=0$, natomiast ma ona granicę niewłaściwą $+\infty$, bo $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{4}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4}{x^2} = +\infty$.

Ćwiczenie 11. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x}, & \text{gdy } x<0\\ -\frac{3}{x}, & \text{gdy } x>0\end{cases}$.

Sprawdź, czy $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Uwaga

Jeżeli:

- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty\right)$,

  to funkcja f w punkcie x_0 ma **granicę niewłaściwą lewostronną** $-\infty$ $(+\infty)$.

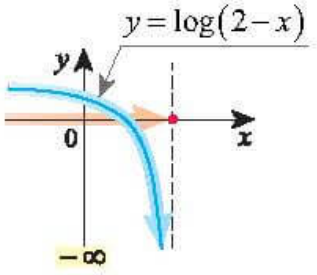
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty\right)$,

  to funkcja f w punkcie x_0 ma **granicę niewłaściwą prawostronną** $-\infty$ $(+\infty)$.

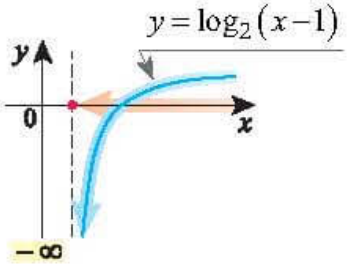
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty\right)$,

  to funkcja f w punkcie x_0 ma **granicę niewłaściwą** $-\infty$ $(+\infty)$.

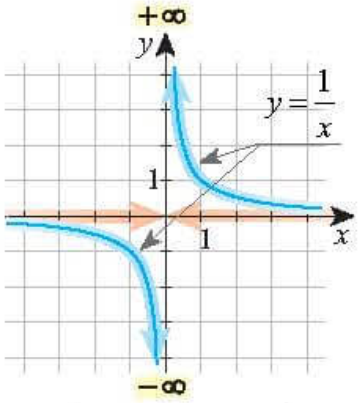
Funkcja może mieć granicę niewłaściwą w punkcie x_0, gdy ten punkt nie należy do jej dziedziny. Wartości granic niewłaściwych, granic niewłaściwych lewo- lub prawostronnych można odczytać z wykresów funkcji.



$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$



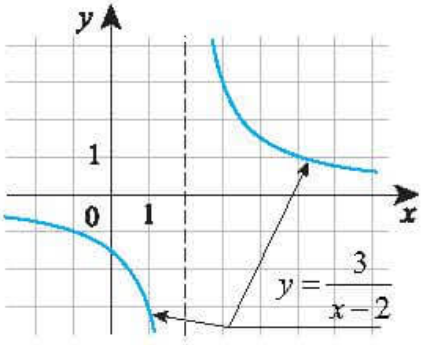
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ – nie istnieje

Ćwiczenie 12. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{x-2}$. Podaj granice:

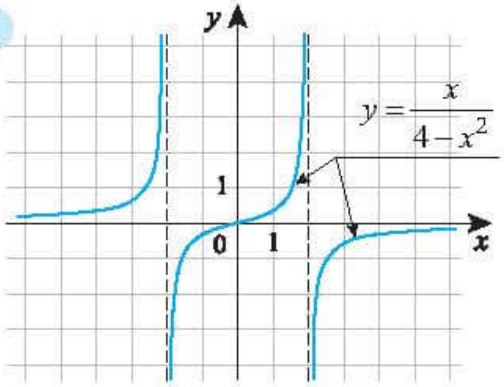
a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2}$, b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{3}{x-2}$.

Czy funkcja f ma granicę niewłaściwą w punkcie 2?



Ćwiczenie 13. Na rysunkach **1** i **2** przedstawiono fragmenty wykresów funkcji f. Podaj wartości granic zapisanych pod rysunkami i odpowiedź uzasadnij.

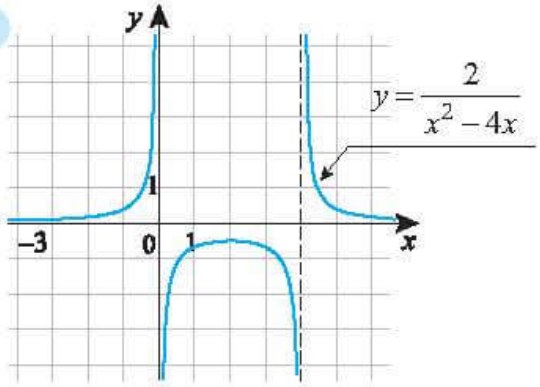
1



a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$,

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

2



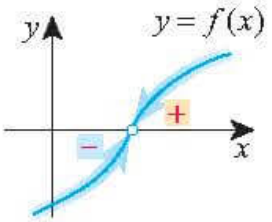
a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

c) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$, d) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$.

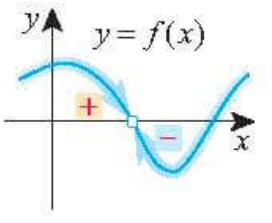
Przyjmujemy oznaczenia.

Jeżeli $x_0 \notin D_f$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, to zapis:

- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=0^-$ oznacza, że wartości funkcji f zbliżają się do 0 przez wartości ujemne,
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=0^+$ oznacza, że wartości funkcji f zbliżają się do 0 przez wartości dodatnie,



- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=0^+$ oznacza, że wartości funkcji f zbliżają się do 0 przez wartości dodatnie,
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=0^-$ oznacza, że wartości funkcji f zbliżają się do 0 przez wartości ujemne.



Twierdzenie

Jeżeli $a>0$, $x_0 \notin D_f$ i $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=0^-$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=0^+$, to:

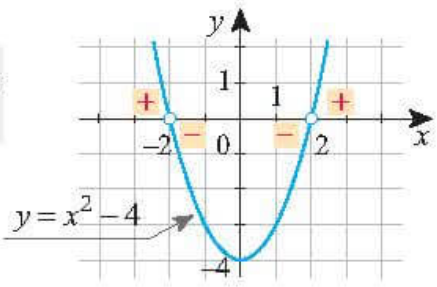
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{a}{f(x)}=\left[\frac{a}{0^-}\right]=-\infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{a}{f(x)}=\left[\frac{a}{0^+}\right]=+\infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{-a}{f(x)}=\left[\frac{-a}{0^-}\right]=+\infty$,
- $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{-a}{f(x)}=\left[\frac{-a}{0^+}\right]=-\infty$.

Przykład 6. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$. Oblicz granice jednostronne funkcji f w punktach nienależących do jej dziedziny.

Rozwiązanie

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-4},$$
$$D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{-2,2\}.$$

$x^2-4=0$, gdy $x_1=-2$, $x_2=2$



Liczby -2 i 2 są miejscami zerowymi mianownika, czyli funkcji $g(x)=x^2-4$.

1 $x_0=-2$ oraz $\lim\limits_{x\to-2^-}\left(x^2-4\right)=0^+$, co oznacza, że gdy $x\to-2^-$, to $x^2-4>0$,

$\lim\limits_{x\to-2^+}\left(x^2-4\right)=0^-$, co oznacza, że gdy $x\to-2^+$, to $x^2-4<0$.

Zatem $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x-1}{x^2-4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to-2^-}(x-1)}{\lim\limits_{x\to-2^-}\left(x^2-4\right)}=\left[\dfrac{-3}{0^+}\right]=-\infty$

$\left[\dfrac{-3}{0^+}\right]$ – *zapis nieformalny, można go pominąć.*

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{\lim\limits_{x\to-2^+}(x-1)}{\lim\limits_{x\to-2^+}\left(x^2-4\right)}=\left[\frac{-3}{0^-}\right]=+\infty.$$

2 $x_0=2$ oraz $\lim\limits_{x\to2^-}\left(x^2-4\right)=0^-$, co oznacza, że gdy $x\to2^-$, to $x^2-4<0$,

$\lim\limits_{x\to2^+}\left(x^2-4\right)=0^+$, co oznacza, że gdy $x\to2^+$, to $x^2-4>0$.

Zatem $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-1}{x^2-4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2^-}(x-1)}{\lim\limits_{x\to2^-}\left(x^2-4\right)}=\left[\dfrac{1}{0^-}\right]=-\infty$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{\lim\limits_{x\to2^+}(x-1)}{\lim\limits_{x\to2^+}\left(x^2-4\right)}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty.$$

Odp.: $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$.

Ćwiczenie 14. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\dfrac{5-x}{x^2-9}$. Oblicz granice jednostronne funkcji f w punktach nienależących do jej dziedziny.

Uwaga

Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$, to prostą o równaniu $x=x_0$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji f.

Ćwiczenie 15. Oblicz odpowiednie granice i podaj równanie asymptoty pionowej wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$.

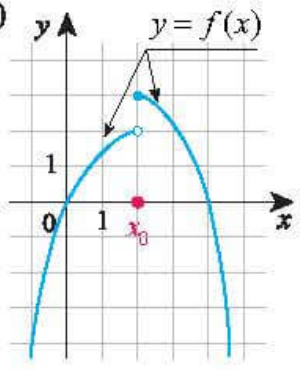
Odpowiedzi do ćwiczeń

11. Tak. **12.** **a)** $-\infty$, **b)** $+\infty$, nie. **13.** **1** **a)** $+\infty$, **b)** $-\infty$, **c)** $+\infty$, **d)** $-\infty$, **2** **a)** $+\infty$, **b)** $-\infty$, **c)** $-\infty$, **d)** $+\infty$. **14.** $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$. **15.** $x=-1$.

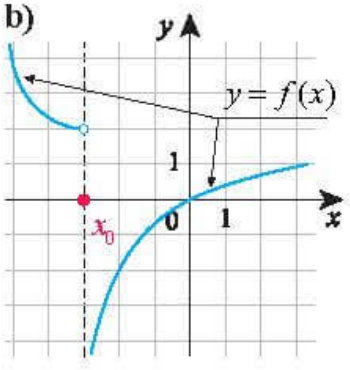
Zadania utrwalające

9.12. Na rysunku, na którym wyróżniono punkt x_0, przedstawiony jest fragment wykresu funkcji f. Podaj $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

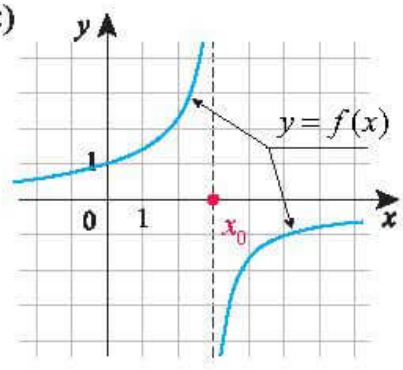
a)



b)



c)



9.13. Oblicz granice jednostronne:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-4}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x+1}$, e) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x+1}$, f) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}$.

9.14. Oblicz granice jednostronne:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3-x}{x^2}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-x}{x^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-2}{x^2-x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+6x}{3-x}$, e) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{3-x^2}{4-x^2}$, f) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$.

9.15. Oblicz granice jednostronne funkcji f w punktach nienależących do jej dziedziny, gdy:

a) $f(x)=\dfrac{x^3+3}{x-1}$, b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+4}$, c) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{8-x}$,

d) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{2-x}$, e) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$, f) $f(x)=\dfrac{4-x}{x^2-9}$.

9.16. Oblicz granice funkcji f w punktach nienależących do jej dziedziny, gdy:

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$, b) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2-4}$, c) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$,

d) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$, e) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$, f) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

9.17. Oblicz granice:

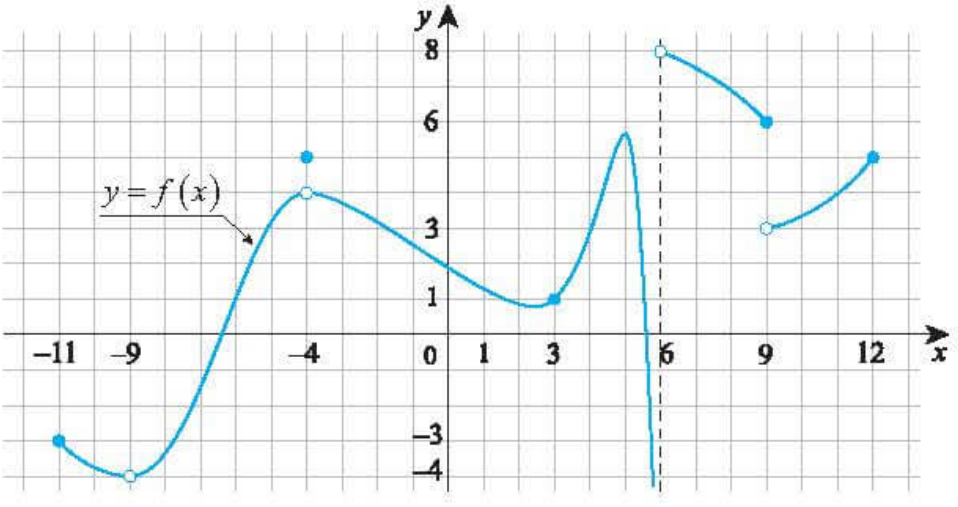
a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$, c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2-x}+\dfrac{3}{x^3-x^2}\right)$.

9.18. D Uzasadnij, że nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x}{x+4}$.

Ciągłość funkcji

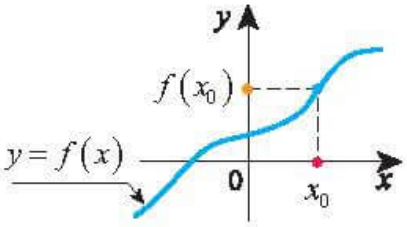
Ćwiczenie 16. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Określ dziedzinę funkcji f i odczytaj z wykresu wartość funkcji $f(x_0)$ (jeśli istnieje), następnie określ granicę $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ oraz porównaj wartość $f(x_0)$ z wartością granicy funkcji w punkcie x_0 (jeśli istnieje), gdy:

a) $x_0=-9$, b) $x_0=-4$, c) $x_0=3$, d) $x_0=6$, e) $x_0=9$.



Definicja

Funkcję f, określoną w otoczeniu punktu x_0, gdzie $x_0 \in D_f$, nazywamy funkcją ciągłą w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



Uwaga

Ciągłość funkcji f w punkcie x_0, gdy $x_0 \in D_f$, badamy:

1° obliczając

$f(x_0)$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

2° sprawdzając, czy

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

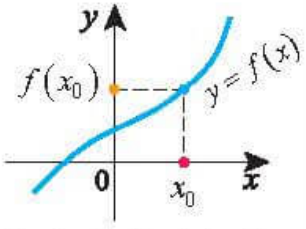
albo

1° obliczając

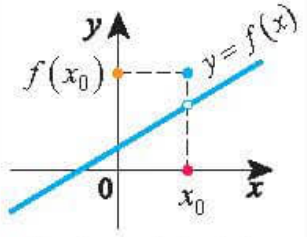
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$,

2° sprawdzając, czy

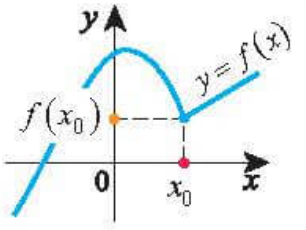
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.



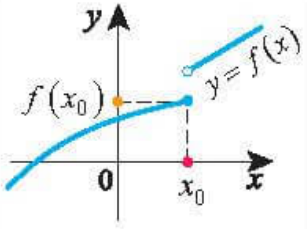
Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.



Funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0.



Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.



Funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0.

Przykład 7. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{gdy } x \neq 2 \\ 4, & \text{gdy } x = 2 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

Rozwiązanie $D_f = R$, więc $2 \in D_f$.

1° $f(x_0) = f(2) = 4$,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 2+2 = 4.$$

2° $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, więc funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

Ćwiczenie 17. Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{gdy } x\neq 3\\ 6, & \text{gdy } x=3\end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0=3$.

Uwaga

Funkcję f uważamy za nieciągłą w punkcie x_0, gdy x_0 należy do dziedziny funkcji f i nie jest spełniony warunek ciągłości, tzn. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, to mówimy, że funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0.
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, to mówimy, że funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie x_0.

Przykład 8. Zbadaj ciągłość funkcji f określonej wzorem $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{gdy } x<1\\ x^2-1, & \text{gdy } x\geq 1\end{cases}$ w punkcie $x_0=1$.

Rozwiązanie

$D_f=\boldsymbol{R}$, więc $1\in D_f$, $f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{gdy } x\in(-\infty,1)\\ x^2-1, & \text{gdy } x\in\langle 1;+\infty)\end{cases}$.

1° $f(x_0)=f(1)=1^2-1=0$, $\quad 1\in\langle 1;+\infty)$, *więc* $f(x)=x^2-1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$, $\quad 1\notin(-\infty;1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)=1^2-1=0$. $\quad 1\in\langle 1;+\infty)$

2° $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$, czyli $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, więc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Odp.: Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0=1$.

Ćwiczenie 18. Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{gdy } x\leq 1\\ x-1, & \text{gdy } x>1\end{cases}$, $x_0=1$,

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x}{x-5}, & \text{gdy } x\neq 5\\ 2, & \text{gdy } x=5\end{cases}$, $x_0=5$.

Przykład 9. Określ, dla jakiej wartości parametru m funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 3$, gdy $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, & \text{gdy } x \neq 3 \\ m, & \text{gdy } x = 3 \end{cases}$.

Rozwiązanie $D_f = R$.

1° $3 \in D_f$ i $f(3) = m$,

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-2) = 3-2 = 1,$$

$| x^2-5x+6=0$
$|\Delta=1,\ \sqrt{\Delta}=1$
$| x_1=2,\ x_2=3$

2° $f(3) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x+3} \Leftrightarrow m = 1.$

$f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Odp.: Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 = 3$, gdy $m = 1$.

Ćwiczenie 19. Określ, dla jakiej wartości parametru m funkcja f określona wzorem $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8-x^3}{x-2}, & \text{gdy } x \neq 2 \\ m, & \text{gdy } x = 2 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 2$.

Uwaga

Funkcję f nazywamy funkcją ciągłą w przedziale $(a; b)$ (zbiorze), jeżeli jest ona ciągła w każdym punkcie tego przedziału (zbioru).

Przykładami funkcji ciągłych w całej swojej dziedzinie są:

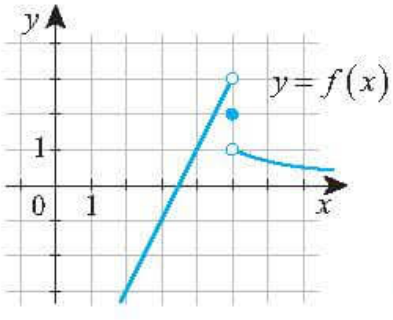
- funkcje liniowe,
- funkcje kwadratowe,
- funkcje wielomianowe,
- funkcje wymierne,
- funkcje wykładnicze,
- funkcje logarytmiczne.

Przykład 10. Zbadaj ciągłość funkcji f w zbiorze R, gdy $f(x) = \begin{cases} 2x-7, & \text{gdy } x < 5 \\ 2, & \text{gdy } x = 5. \\ \dfrac{2}{x-3}, & \text{gdy } x > 5 \end{cases}$

Rozwiązanie $D_f = R$.

1° W przedziale $(-\infty; 5)$ funkcja f jest funkcją ciągłą jako funkcja liniowa $y = 2x - 7$.

2° W przedziale $(5; +\infty)$ funkcja f ma wzór $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ i jest ciągła, bo $3 \notin (5; +\infty)$.



3° Sprawdzamy ciągłość funkcji f w punkcie $x_0 = 5$.

$$f(5) = 2, \quad \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (2x - 7) = 3, \quad \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{2}{x-3} = 1.$$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$, więc granica $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ nie istnieje.

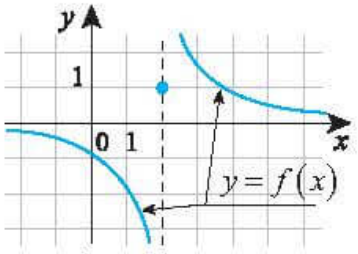
Funkcja f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = 5$.

Odp.: Funkcja f nie jest ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Funkcja jest ciągła w zbiorze $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

Ćwiczenie 20. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2, & \text{gdy } x < 3 \\ 4 - x, & \text{gdy } x \geq 3 \end{cases}$ w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

Ćwiczenie 21. Przeanalizuj wykres funkcji f przedstawiony na rysunku i określ ciągłość funkcji f w zbiorze $\boldsymbol{R}$, gdy

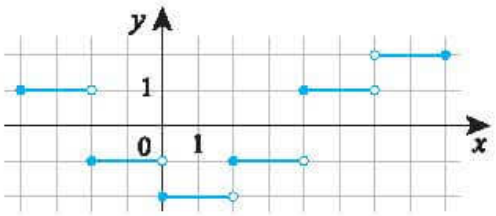
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & \text{gdy } x \neq 2 \\ 1, & \text{gdy } x = 2 \end{cases}.$$



Definicja

Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, gdy jest ciągła w przedziale $(a; b)$ oraz $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ i $f(b) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.

Ćwiczenie 22. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Podaj: **a)** dziedzinę D_f funkcji f,
b) punkty, w których funkcja nie jest ciągła,
c) zbiór, w którym funkcja f jest ciągła.



Odpowiedzi do ćwiczeń

16. $D_f = \langle -11; 6) \cup (6; 12\rangle$, **a)** $f(-9)$ – nie istnieje, $\lim\limits_{x \to -9^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -9^+} f(x) = -4$,

b) $f(-4) = 5$, $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = 4$, $f(-4) \neq 4$, **c)** $f(3) = \lim\limits_{x \to +3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to +3^+} f(x) = 1$,

d) $f(6)$ – nie istnieje, $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = 8$,

e) $f(9) = 6$, $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = 6$, $\lim\limits_{x \to 9^+} f(x) = 3$, $f(9) \neq \lim\limits_{x \to 9^+} f(x)$.

18. a) W punkcie $x_0 = 1$ funkcja f jest ciągła, **b)** w punkcie $x_0 = 5$ funkcja f nie jest ciągła. **19.** $m = -12$.

20. Funkcja f jest ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$. **21.** Funkcja jest ciągła w zbiorze $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

22. a) $D_f = \langle -4; 8\rangle \setminus \{6\}$, **b)** –2, 0, 2, 4, **c)** $\langle -4; 8\rangle \setminus \{-2, 0, 2, 4, 6\}$.

Zadania utrwalające

9.19. Zbadaj ciągłość funkcji f w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x)=\begin{cases}4x+5, & \text{gdy } x\le -1\\ 5x-4, & \text{gdy } x>-1\end{cases}$, $x_0=-1$, **b)** $f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & \text{gdy } x<0\\ 0, & \text{gdy } x=0\\ x^2, & \text{gdy } x>0\end{cases}$, $x_0=0$,

c) $f(x)=\begin{cases}5, & \text{gdy } x=1\\ \dfrac{6x}{x^2+1}, & \text{gdy } x\ne 1\end{cases}$, $x_0=1$, **d)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & \text{gdy } x\ne 0\\ 1, & \text{gdy } x=0\end{cases}$, $x_0=0$.

9.20. Określ, dla jakich wartości parametru m funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}, & \text{gdy } x\ne 3\\ m, & \text{gdy } x=3\end{cases}$, $x_0=3$, **b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x-1}, & \text{gdy } x\ne 1\\ 2m^2+4m, & \text{gdy } x=1\end{cases}$, $x_0=1$,

c) $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{gdy } x<0\\ mx^2+1, & \text{gdy } x\ge 0\end{cases}$, $x_0=0$, **d)** $f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{gdy } x\ge -2\\ x^2-m^2, & \text{gdy } x<-2\end{cases}$, $x_0=-2$.

9.21. Naszkicuj wykres funkcji f i zbadaj jej ciągłość w zbiorze R, gdy:

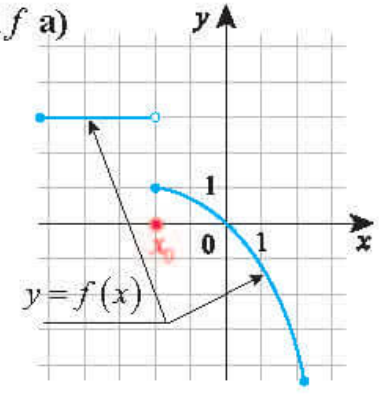
a) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{gdy } x<0\\ x^2, & \text{gdy } 0\le x\le 1\\ 2x-1, & \text{gdy } x>1\end{cases}$, **b)** $f(x)=\begin{cases}x, & \text{gdy } x<0\\ 1-x^2, & \text{gdy } 0\le x\le 1\\ x^2-1, & \text{gdy } x>1\end{cases}$.

9.22. Sprawdź, czy funkcja f jest ciągła w przedziale $(-10;10)$, gdy:

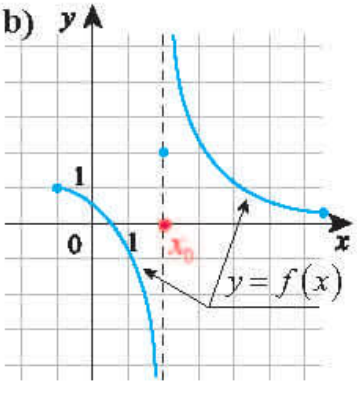
a) $f(x)=\begin{cases}x^2-100, & \text{gdy } x<1\\ x^2+100, & \text{gdy } x\ge 1\end{cases}$, **b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+10x}{x}, & \text{gdy } x\ne 0\\ 10, & \text{gdy } x=0\end{cases}$.

9.23. Przeanalizuj wykres funkcji f i uzasadnij, że nie jest ona ciągła w punkcie x_0.

a)



b)



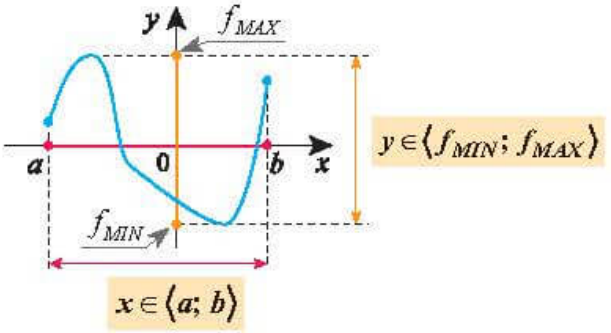
9.24. Punkt $x_0 = 1$ nie należy do dziedziny funkcji f określonej wzorem $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 1}$.

Uzupełnij wzór funkcji f tak, aby ta „nowo otrzymana" funkcja była ciągła w przedziale $(-\infty; +\infty)$.

Własności funkcji ciągłych

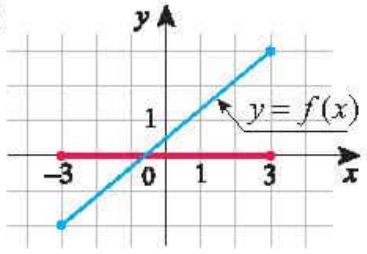
Twierdzenie

Funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b\rangle$ ma w tym przedziale wartość najmniejszą f_{MIN} oraz wartość największą f_{MAX}.

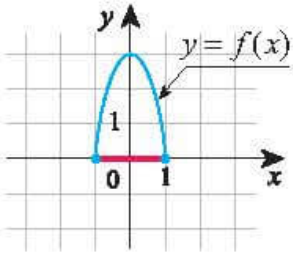


Ćwiczenie 23. Z wykresu funkcji f określonej w przedziale $\langle a; b\rangle$ (wyróżnionym na osi x kolorem czerwonym) odczytaj wartości funkcji: $f(a)$, $f(b)$, f_{MIN} i f_{MAX}, a następnie uporządkuj je rosnąco.

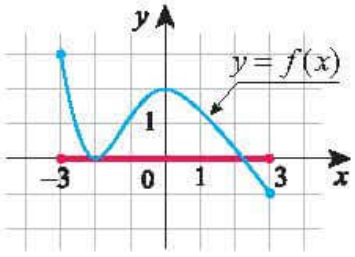
a)



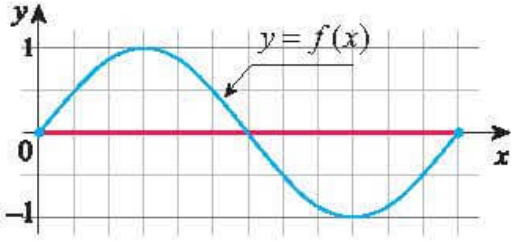
b)



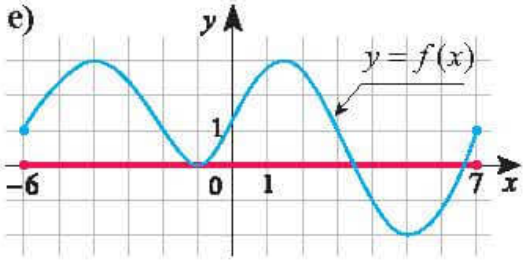
c)



d)

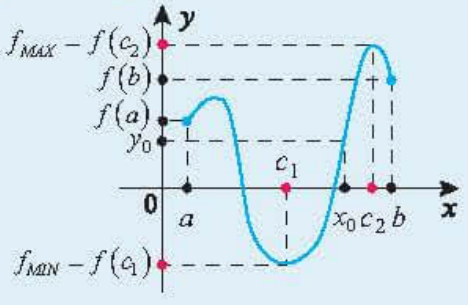


e)



Twierdzenie Darboux*) (o przyjmowaniu wartości pośredniej)

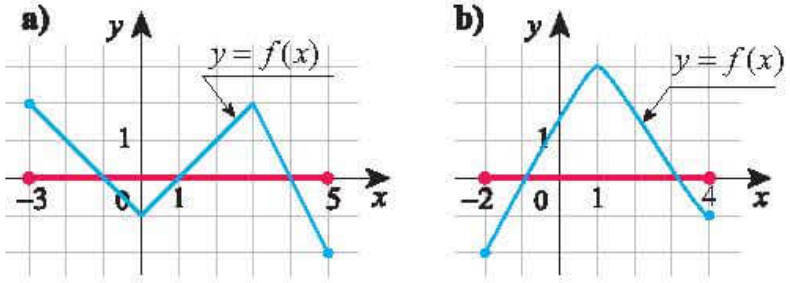
Funkcja f ciągła w przedziale $\langle a; b\rangle$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między wartością najmniejszą f_{MIN} i największą f_{MAX} tej funkcji w przedziale $\langle a; b\rangle$.



*) Darboux – czytaj *Darbu*.

Ćwiczenie 24. Poszukaj w literaturze lub w Internecie informacji o dziedzinach matematyki, którymi zajmował się Jean-Gaston Darboux.

Ćwiczenie 25. Z wykresu funkcji f określonej w przedziale $\langle a; b\rangle$ (wyróżnionym na osi x kolorem czerwonym) odczytaj miejsca zerowe funkcji f oraz określ znak wyrażenia $f(a)\cdot f(b)$.



Twierdzenie

Jeżeli funkcja f ciągła w przedziale $\langle a; b\rangle$ przyjmuje na końcach przedziału wartości o różnych znakach ($f(a)\cdot f(b)<0$), to w tym przedziale funkcja ta **ma co najmniej jedno miejsce zerowe**.

Przykład 11. Wykaż, że równanie $x^3-2x^2+2=0$ ma co najmniej jeden pierwiastek należący do przedziału $(-1; 0)$.

Rozwiązanie

Wielomian jest funkcją ciągłą w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Obliczamy wartości wielomianu W, gdzie $W(x)=x^3-2x^2+2$, na końcach przedziału $(-1; 0)$:

$$W(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2+2=-1,\quad W(0)=0^3-2\cdot 0^2+2=2.$$

$W(-1)\cdot W(0)<0$, więc wielomian W ma co najmniej jeden pierwiastek należący do przedziału $(-1; 0)$.

Ćwiczenie 26. Wykaż, że równanie $x^3-5x-38=0$ ma w przedziale $(3; 4)$ co najmniej jeden pierwiastek.

Uwaga

Jeżeli funkcja ciągła nie ma miejsc zerowych w przedziale $(a; b)$, to jej wartości w tym przedziale są dodatnie albo ujemne.

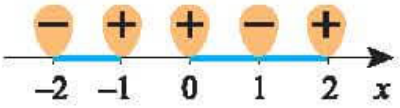
Przykład 12. Wykaż, że równanie $x^3-3x+1=0$ ma trzy pierwiastki.

Rozwiązanie

Lewa strona równania jest funkcją $f(x)=x^3-3x+1$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$, więc jako wielomian jest funkcją ciągłą.

Wielomian f może mieć co najwyżej trzy miejsca zerowe, bo jest wielomianem trzeciego stopnia. Szukamy zatem trzech przedziałów, na końcach których funkcja f ma wartości o różnych znakach, tzn. „+” i „–” albo „–” i „+”.

Często, by wyznaczyć te przedziały, obliczamy wartości wielomianu f dla liczby 0 oraz dla liczb położonych na osi liczbowej symetrycznie względem liczby 0.

$f(0)=1$	Znak $f(x)$	
$f(1)=-1$		
$f(-1)=3$	$f(-2)\cdot f(-1)<0$	$f(-2)$ – –1 i $f(-1)$ – 3
$f(2)=3$	$f(0)\cdot f(1)<0$	$f(0)$ – 1 i $f(1)$ – –1
$f(-2)=-1$	$f(1)\cdot f(2)<0$	$f(1)$ – –1 i $f(2)$ – 3

W każdym z przedziałów $(-2;-1)$, $(0;1)$ i $(1;2)$ funkcja $f(x)=x^3-3x+1$ ma jedno miejsce zerowe. Równanie $x^3-3x+1=0$ ma trzy pierwiastki i są to wszystkie jego pierwiastki (wielomian trzeciego stopnia ma co najwyżej 3 pierwiastki).

Ćwiczenie 27. Wykaż, że równanie $x^3-4x^2+1=0$ ma trzy pierwiastki.

Przykład 13. Wiedząc, że pierwiastek wielomianu $f(x)=x^3-3x+1$ należy do przedziału $(0;1)$, wyznacz przybliżoną wartość tego pierwiastka z dokładnością do 0,1.

Rozwiązanie

Możemy wyznaczyć wartość pierwiastka, obliczając kolejno wartości wielomianu f dla argumentów rosnących o 0,1, poczynając od 0,1 do 0,9. Kończymy obliczenia, gdy zmienia się znak wartości funkcji.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$f(x)$	0,701	0,408	0,127	–0,136	–	–	–	–	–

Z tabeli odczytujemy, że pierwiastek równania $x^3-3x+1=0$ należy do przedziału $\left(\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$. Za pierwiastek przyjmujemy ten z końców przedziału, dla którego wartość funkcji jest bliższa zeru, czyli $x_0\approx 0{,}3$.

Ćwiczenie 28. Wiedząc, że pierwiastek wielomianu $f(x)=x^3-3x+1$ należy do przedziału $(1;2)$, wyznacz przybliżoną wartość tego pierwiastka z dokładnością do 0,1.

Ćwiczenie 29. Poszukaj w literaturze lub w Internecie innych metod wyznaczania przybliżonych wartości pierwiastków wielomianu jednej zmiennej.

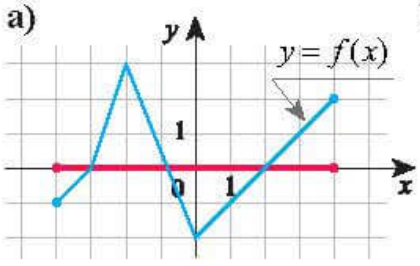
Odpowiedzi do ćwiczeń

23. a) $f(a)=f_{MIN}=-2$, $f(b)=f_{MAX}=3$, b) $f(a)=f(b)=f_{MIN}=0$, $f_{MAX}=3$,
c) $f(b)=f_{MIN}=-1$, $f(a)=f_{MAX}=3$, d) $f_{MIN}=-1$, $f(a)=f(b)=0$, $f_{MAX}=1$,
e) $f_{MIN}=-2$, $f(a)=f(b)=1$, $f_{MAX}=3$.
25. a) $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=4$, $f(-3)\cdot f(5)<0$, b) $x_1=-1$, $x_2=3$, $f(-2)\cdot f(4)>0$.
26. $W(3)\cdot W(4)<0$. 27. W każdym z przedziałów $(-1;0)$, $(0;1)$ i $(3;4)$ równanie ma pierwiastek. 28. $x_0\approx 1{,}5$.

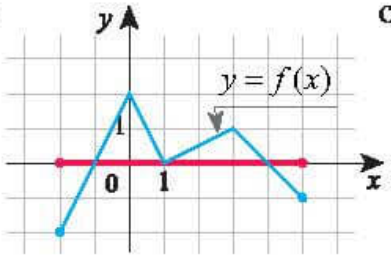
Zadania utrwalające

9.25. Z wykresu funkcji f określonej w przedziale $\langle a;b\rangle$ (wyróżnionym na osi x kolorem czerwonym) odczytaj miejsce zerowe funkcji f oraz określ znak wyrażenia $f(a)\cdot f(b)$.

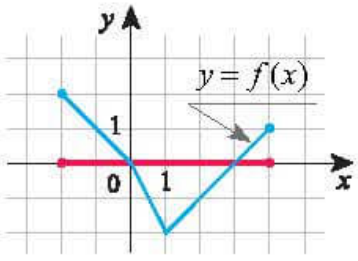
a)



b)



c)



9.26. Funkcja ciągła f jest określona w przedziale $\langle a;b\rangle$. Określ wartość f_{MIN} i f_{MAX}, jeśli dla każdego argumentu x, gdzie $x\in(a;b)$, spełniony jest warunek:

a) $f(a)<f(x)<f(b)$, b) $f(b)<f(x)<f(a)$.

9.27. a) Funkcja $f(x)=|x|$ w punktach -1 i 1 przyjmuje wartości dodatnie. Czy z tego wynika, że funkcja f nie ma miejsc zerowych w przedziale $(-1;1)$? Odpowiedź uzasadnij.

b) Funkcja $f(x)=\frac{1}{x}$ w punktach -1 i 1 przyjmuje wartości o różnych znakach. Czy z tego wynika, że funkcja f ma w przedziale $(-1;1)$ miejsce zerowe? Odpowiedź uzasadnij.

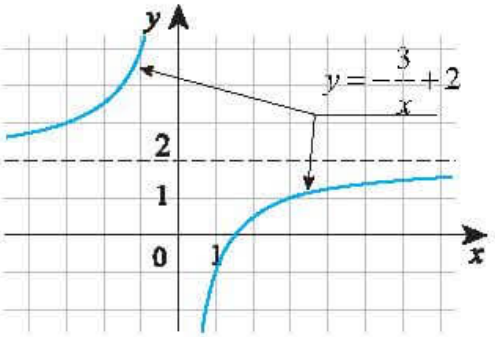
9.28. Wykaż, że równanie $2x^3-9x^2+12x-4{,}5=0$ ma trzy pierwiastki należące do przedziału $\langle 0;3\rangle$.

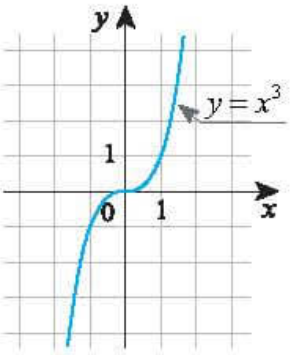
9.29. Wyznacz z dokładnością do 0,1 przybliżoną wartość pierwiastka równania $x^5-4x-2=0$ należącego do przedziału $(-1;0)$.

Granica funkcji w nieskończoności

Przykład 14. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji określonej wzorem

1 $f(x)=-\frac{3}{x}+2$, **2** $f(x)=x^3$.





Oblicz granicę funkcji f, gdy ciąg argumentów (x_n) jest rozbieżny:

a) do $+\infty$, **b)** do $-\infty$.

Rozwiązanie

Ciąg argumentów (x_n) jest ciągiem rozbieżnym:

a) do $+\infty$, więc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$,

b) do $-\infty$, więc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=-\infty$.

1 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{x_n}+2\right)=0+2=2$,

czyli $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}+2\right)=2$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{x_n}+2\right)=0+2=2$,

czyli $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x}+2\right)=2$.

2 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^3=\left[(+\infty)^3\right]=+\infty$.

czyli $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^3=\left[(-\infty)^3\right]=-\infty$, czyli $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

Ćwiczenie 30. Funkcja f określona jest wzorem: **1** $f(x)=2x+3$, **2** $f(x)=-x^2$.

Oblicz granice funkcji f, gdy ciąg argumentów (x_n) jest rozbieżny:

a) do $-\infty$, **b)** do $+\infty$.

Definicja

Jeżeli dla każdego ciągu (x_n), takiego że $x_n \in (a; +\infty)$ i $(a; +\infty) \subset D_f$, i $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ oraz:

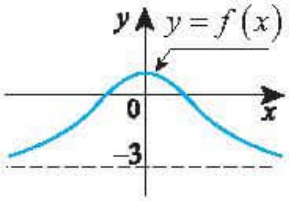
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = g$, to funkcja f ma w $+\infty$ granicę g, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$, to funkcja f ma w $+\infty$ granicę niewłaściwą $+\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$, to funkcja f ma w $+\infty$ granicę niewłaściwą $-\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Analogicznie określamy granicę funkcji f w minus nieskończoności $(-\infty)$, gdy $x_n \in (-\infty; a)$ i $(-\infty; a) \subset D_f$.

Uwaga

- Jeżeli $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$, to prosta $y = g$ jest asymptotą poziomą prawostronną (w plus nieskończoności) wykresu funkcji f.
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$, to prosta $y = g$ jest asymptotą poziomą lewostronną (w minus nieskończoności) wykresu funkcji f.

Ćwiczenie 31. Wiedząc, że prosta zaznaczona na rysunku linią przerywaną jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f, gdy $x \in R$, podaj wartości granic $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.



Obliczając granicę funkcji w plus (minus) nieskończoności, postępujemy podobnie jak przy obliczaniu granic ciągów. Stosujemy te same wzory co przy obliczaniu granic funkcji w ustalonym punkcie x_0 (*patrz* strona 315).

Uwaga

Jeżeli $n \in N^+$, to badając zachowanie funkcji w $-\infty$ oraz w $+\infty$, korzystamy z wzorów:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą} \\ -\infty, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$, gdy n jest liczbą nieparzystą

Ćwiczenie 32. Oblicz granicę: **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{25}$, **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\left(-x^3\right)^2}{x^5}$, **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x}$, **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

Przykład 15. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-x+2x^3\right)$, **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-x^4\right)$, **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x}{x^2-6}$, **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}$.

Rozwiązanie

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-x+2x^3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^2}+2\right)\right]=\left[-\infty\cdot(0-0+2)\right]=-\infty,$

($x^3\to-\infty$, $\frac{4}{x^3}\to 0$, $\frac{1}{x^2}\to 0$)

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-x^4\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^4\left(\frac{2}{x^3}-1\right)\right]=\left[+\infty\cdot(0-1)\right]=-\infty,$

($x^4\to+\infty$, $\frac{2}{x^3}\to 0$)

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x}{x^2-6}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{6}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{6}{x^2}}=\left[\frac{3+0}{1-0}\right]=3,$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}}{x}=$ $\quad \sqrt{x^2}=|x|$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}{x}=$ $\quad |x|=\begin{cases}-x, \text{gdy } x<0\\ x, \text{ gdy } x\geq 0\end{cases}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x}{x}\cdot\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}=$ $\quad x<0, \text{ to } \frac{|x|}{x}=-\frac{x}{x}=-1$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}\right)=-\sqrt{0+1}=-1.$

($\frac{4}{x^2}\to 0$)

Ćwiczenie 33. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-3x-6x^3\right)$, **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-2x^6\right)$, **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4+5}{\left(x^2+2\right)^2}$, **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

30. **1** a) $-\infty$, b) $+\infty$, **2** a) $-\infty$, b) $-\infty$.

31. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -3$.

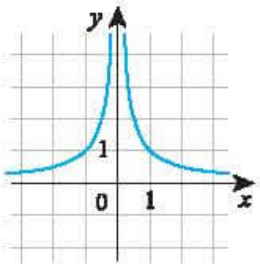
32. a) $-\infty$, b) $-\infty$, c) 0, d) $+\infty$.

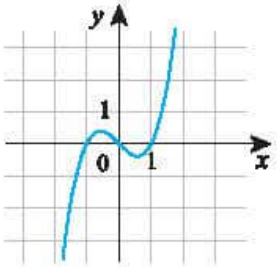
33. a) $-\infty$, b) $-\infty$, c) 1, d) -2.

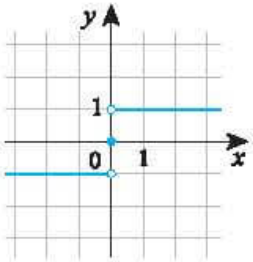
Zadania utrwalające

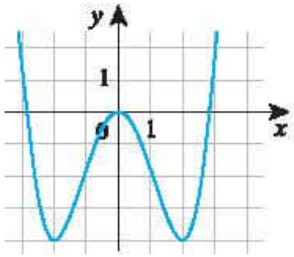
9.30. Podaj wartości granic $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ funkcji, której wzór i fragment wykresu przedstawiono poniżej.

a) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$, b) $f(x)=x^3-x$, c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{gdy } x\neq 0\\ 0, & \text{gdy } x=0\end{cases}$, d) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2$.









9.31. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x^2)$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x^3)$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-x-x^2-x^3)$, e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{1-x^3}$, f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+1}$.

9.32. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{1-x}$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-25}{x+5}$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-2x^2+2}{x^4-3x+1}$,

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+2x}{4x^3+3x+1}$, e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x^2+4}}{2x}$, f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{8x^2-2}}{x}$.

9.33. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{x+2}$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-4x\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{1}{x}\right)$, e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}\right)$.

9.34. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\dfrac{kx^2-3x}{(k-1)x^2-2}$, gdzie $k \in \boldsymbol{R}$. Ustal te wartości parametru k, dla których:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$, **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

9.35. D

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\dfrac{3x+1}{kx^2-(2k-1)x-2}$.

Uzasadnij, że $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, gdy $k\neq 0$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, gdy $k=0$.

Zestaw powtórkowy

1. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Wykres funkcji f ma asymptotę pionową o równaniu $x=2$.	P	F
Wykres funkcji f ma asymptotę poziomą o równaniu $y=1$.	P	F

2. *Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.*

Granica $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^3+x^2-4x-4}$ nie istnieje.	P	F
Granica $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-2}{x-x^2}=+\infty$.	P	F

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Równanie $x^3+x-3=0$ ma jeden pierwiastek należący do przedziału:

A. $(-2;-1)$, **B.** $(-1;0)$, **C.** $(0;1)$, **D.** $(1;2)$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Funkcja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}, & \text{gdy } x\neq 2\\ a, & \text{gdy } x=2\end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x_0=2$, gdy:

A. $a=-4$, **B.** $a=-2$, **C.** $a=0$, **D.** $a=2$.

10. Pochodna funkcji i jej interpretacja

Iloraz różnicowy funkcji i jego interpretacja

Przykład 1. Dla każdej z funkcji f i g, określonych wzorami $f(x)=x^2$ i $g(x)=3x$, oblicz stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu wartości argumentu od $x_1=1$ do $x_2=3$ i porównaj te ilorazy.

Rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia:

$\Delta x = x_2 - x_1$ – **przyrost argumentu funkcji** f (funkcji g) od x_1 do x_2,

$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ – **przyrost wartości funkcji** f, gdy przyrost argumentu jest równy Δx,

$\Delta g = g(x_2) - g(x_1)$ – **przyrost wartości funkcji** g, gdy przyrost jej argumentu jest równy Δx.

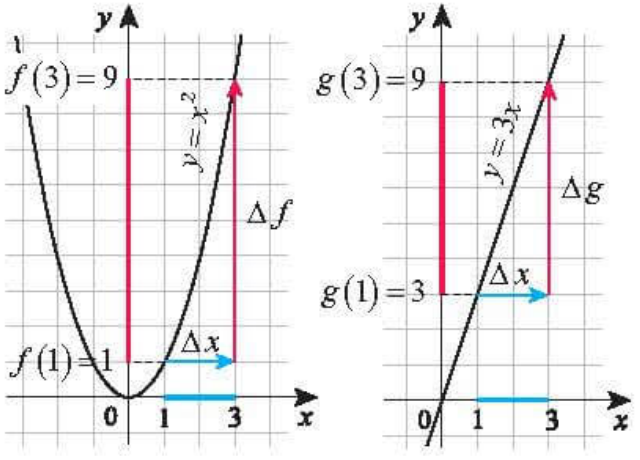
Zatem:

$\Delta x = 3-1=2$

$\Delta f = f(3)-f(1)=9-1=8$

$\Delta g = g(3)-g(1)=9-3=6$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{8}{2}=4, \quad \frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{6}{2}=3.$



Odp.: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=4, \ \frac{\Delta g}{\Delta x}=3, \ \frac{\Delta f}{\Delta x}>\frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Ćwiczenie 1. Dla każdej z funkcji f i g, określonych wzorami $f(x)=2^x$ i $g(x)=\log_2 x$, oblicz stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu od $x_1=1$ do $x_2=4$ i porównaj te ilorazy.

Definicja

Jeżeli funkcja f jest określona w przedziale $(a;b)$ oraz $x_0 \in (a;b)$ i $x_0+\Delta x \in (a;b)$, gdzie $\Delta x \neq 0$, to iloraz $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ nazywamy **ilorazem różnicowym** funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu Δx zmiennej x.

Uwaga

- Oznaczenia ilorazu różnicowego: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- Iloraz różnicowy nie zależy od porządku argumentów w nim występujących, tzn. $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$.

Przykład 2. Oblicz iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x)=x^2-4x$ w punkcie $x_0=-1$, gdy: **a)** $\Delta x=2$, **b)** $\Delta x=-1$.

Rozwiązanie

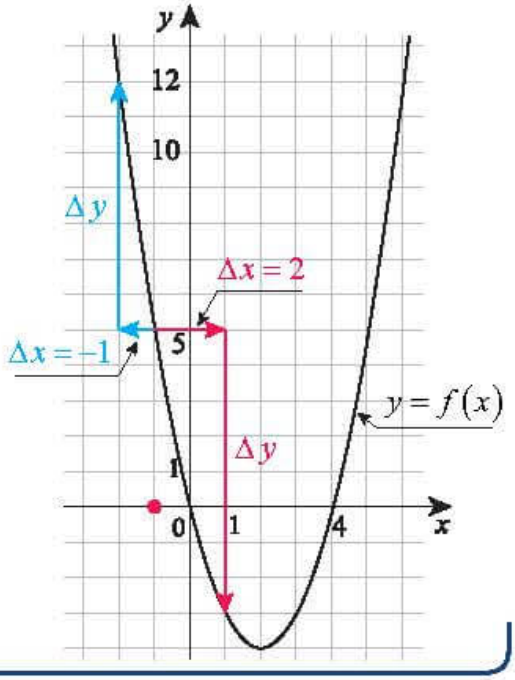
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1+2)-f(-1)}{2} =$

$= \frac{f(1)-f(-1)}{2} = \frac{-3-5}{2} = -4,$

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1-1)-f(-1)}{-1} =$

$= \frac{f(-2)-f(-1)}{-1} = \frac{12-5}{-1} = -7.$

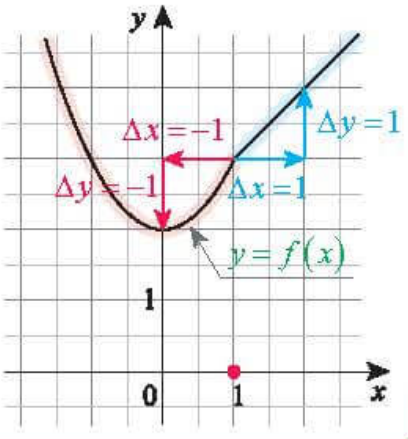


Ćwiczenie 2. Oblicz iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem $f(x)=-x^2+3x$ w punkcie $x_0=5$, gdy: **a)** $\Delta x=2$, **b)** $\Delta x=-2$.

Przykład 3. Oblicz iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2, & \text{gdy } x\le 1 \\ x+2, & \text{gdy } x>1 \end{cases}$$ w punkcie $x_0=1$, gdy:

a) $\Delta x=-1$, **b)** $\Delta x=1$.



Rozwiązanie

a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0)-f(1)}{-1} = \frac{0^2+2-(1^2+2)}{-1} = 1,$

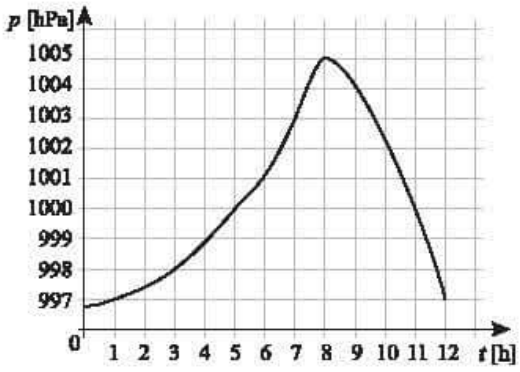
b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(1)}{1} = \frac{2+2-(1^2+2)}{1} = 1.$

Ćwiczenie 3. Oblicz iloraz różnicowy funkcji określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{gdy } x<-3 \\ -x^2+5, & \text{gdy } x\geq -3 \end{cases}$$ w punkcie $x_0=-3$, gdy: **a)** $\Delta x=-2$, **b)** $\Delta x=2$.

Ćwiczenie 4. Oblicz iloraz różnicowy funkcji f określonej wzorem $f(x)=|x|$ w punkcie $x_0=0$, gdy: **a)** $\Delta x=-3$, **b)** $\Delta x=3$.

Przykład 4. W Instytucie Badań Meteorologicznych obserwowano zmiany ciśnienia atmosferycznego w ciągu 12 godzin, a wyniki przedstawiono w postaci diagramu liniowego.



Jednostką ciśnienia jest paskal. Ciśnienie mierzymy w hektopaskalach [hPa].

a) Oblicz przyrost ciśnienia przypadającego na jedną godzinę, czyli średni przyrost ciśnienia w godzinach od 3^{00} do 6^{00} oraz od 6^{00} do 8^{00}.

b) Oblicz średni przyrost ciśnienia w godzinach od 8^{00} do 12^{00}.

Rozwiązanie

Aby porównać szybkość wzrastania ciśnienia w czasie, należy obliczyć przyrost tego ciśnienia przypadający na jednostkę czasu.

Ciśnienie p jest funkcją czasu t, co możemy zapisać $p=p(t)$.

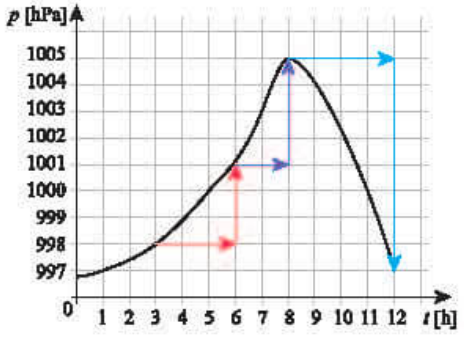
a) W godzinach od 3^{00} do 6^{00}: $p_{śr}=\dfrac{p(6)-p(3)}{6-3}=\dfrac{1001-998}{3}=\dfrac{3}{3}=1$,

w godzinach od 6^{00} do 8^{00}: $p_{śr}=\dfrac{p(8)-p(6)}{8-6}=\dfrac{1005-1001}{8-6}=\dfrac{4}{2}=2$.

Ciśnienie wzrastało szybciej w godzinach od 6^{00} do 8^{00} niż w godzinach od 3^{00} do 6^{00}.

b) W godzinach od 8^{00} do 12^{00}: $p_{śr}=\dfrac{p(12)-p(8)}{12-8}=\dfrac{997-1005}{4}=-\dfrac{8}{4}=-2$.

W godzinach od 6^{00} do 8^{00} ciśnienie wzrastało przeciętnie o 2 hPa na godzinę, a w godzinach od 8^{00} do 12^{00} malało o 2 hPa na godzinę. Szybkość zmian ciśnienia jest taka sama.



Ćwiczenie 5. Drogę s (w km) przebytą przez pociąg w czasie t (w min) opisano wzorem $s(t)=5t-0,1t^2$. Oblicz średnią prędkość pociągu (w km/min) między chwilą t_0 i $t_0+\Delta t$, gdy: **a)** $t_0=0,\ \Delta t=25$, **b)** $t_0=25,\ \Delta t=25$.

Uwaga

- Każdy iloraz różnicowy funkcji rosnącej w przedziale $(a;b)$ ma w każdym punkcie tego przedziału wartość dodatnią.
- Każdy iloraz różnicowy funkcji malejącej w przedziale $(a;b)$ ma w każdym punkcie tego przedziału wartość ujemną.

Ćwiczenie 6. Uzasadnij, że iloraz różnicowy funkcji stałej $f(x)=m$, gdzie $m\in R$, w przedziale $(-\infty;+\infty)$ jest równy 0.

Przykłady zastosowań ilorazów różnicowych w fizyce:

- **średnia prędkość $v_{śr}$** poruszającego się punktu na drodze s w przedziale czasu Δt

$$v_{śr}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

- **średnia moc $P_{śr}$** wykonanej pracy W w przedziale czasu Δt

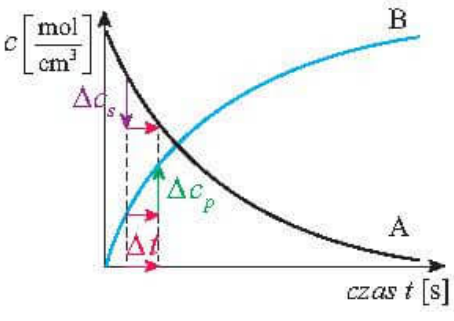
$$P_{śr}=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{W(t_0+\Delta t)-W(t_0)}{\Delta t}$$

- **średnie przyspieszenie $a_{śr}$** poruszającego się punktu z prędkością v w przedziale czasu Δt: $a_{śr}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$.

Przykłady zastosowań ilorazów różnicowych w chemii:

- **szybkość reakcji chemicznej υ** to ubytek stężenia substratu (Δc_s) lub przyrost stężenia produktu (Δc_p) w bardzo małym odstępie czasu Δt

$$\upsilon=-\frac{\Delta c_s}{\Delta t},\quad \upsilon=+\frac{\Delta c_p}{\Delta t}.$$

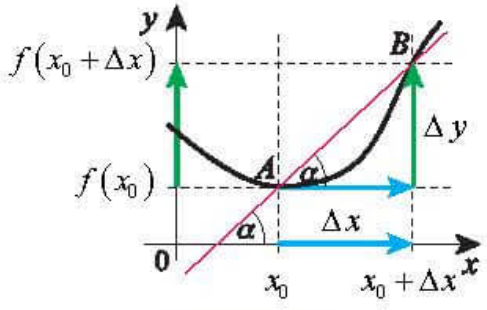


Zmiana stężenia podczas przebiegu reakcji chemicznej ($A\rightarrow B$), w której 1 mol substancji A przekształca się w 1 mol substancji B.

Ćwiczenie 7. Wyszukaj w literaturze lub w internecie przykłady innych zależności opisujących zjawiska zachodzące w przyrodzie, których tempo (szybkość) zmian można opisać ilorazem różnicowym.

Uwaga

- Geometrycznie iloraz różnicowy
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
jest równy tangensowi kąta, jaki z osią x tworzy prosta przechodząca przez punkty $A=(x_0, f(x_0))$ i $B=(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$.
- Prostą AB nazywamy **sieczną wykresu** funkcji f. Jej współczynnik kierunkowy jest równy ilorazowi różnicowemu.



$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Przykład 5. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{3}{x}$. Oblicz kąt α nachylenia siecznej wykresu funkcji f, która przechodzi przez punkty o odciętych $x_0=-3$ i $x_1=-1$.

Rozwiązanie

Obliczamy:

$$\Delta x=x_1-x_0=-1+3=2,$$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(-3+2)-f(-3)=f(-1)-f(-3)=-3+1=-2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{2}=-1, \text{ skąd } \alpha=135°.$$

Odp.: $\alpha=135°$.

Ćwiczenie 8. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=-3x^2$. Oblicz kąt α nachylenia siecznej wykresu funkcji f, która przechodzi przez punkty o odciętych $x_0=-\frac{1}{3}$ i $x_1=0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

1. $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{14}{3}$, $\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{2}{3}$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}>\frac{\Delta g}{\Delta x}$. *Wskazówka.* $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2^4-2^1}{4-1}$ i $\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{\log_2 4-\log_2 2}{4-1}$. **2. a)** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-9$, **b)** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-5$. **3. a)** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, **b)** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=4$. **4. a)** –1, **b)** 1. **5. a)** $2{,}5\frac{\text{km}}{\text{min}}$, tzn., że pociąg przyśpiesza, **b)** $-2{,}5\frac{\text{km}}{\text{min}}$, tzn., że pociąg zwalnia. **6.** *Wskazówka.* $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=m-m$. **8.** 45°.

Zadania utrwalające

10.1. Oblicz przyrost wartości Δf funkcji f odpowiadający przyrostowi Δx argumentu od x_0 do x_1, gdy:

a) $f(x)=3x-2,\ x_0=-2,\ x_1=3,$ **b)** $f(x)=2x^2-3,\ x_0=1,\ x_1=2,$

c) $f(x)=\sqrt{x+1},\ x_0=3,\ \Delta x=5,$ **d)** $f(x)=\dfrac{2x}{x-1},\ x_0=2,\ \Delta x=7.$

10.2. Oblicz iloraz różnicowy funkcji f, gdy:

a) $f(x)=-x^2+2x+3,\ x_0=-1,\ x_1=2,$ **b)** $f(x)=x^3-2,\ x_0=1,\ h=-2,$

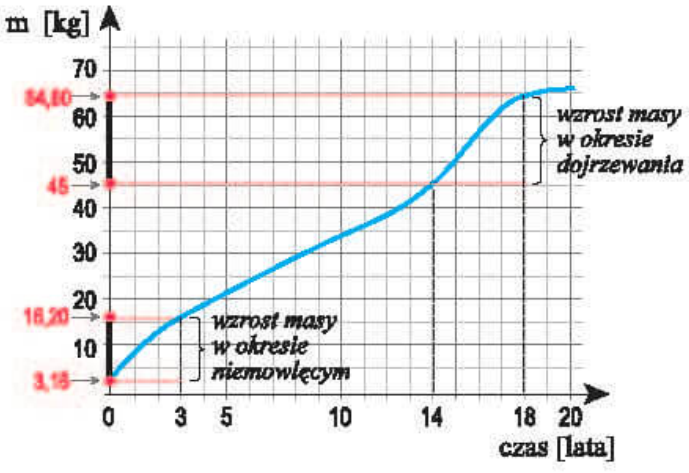
c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1},\ x_0=2,\ \Delta x=1,$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3},\ x_0=1,\ \Delta x=-1.$

10.3. Naszkicuj wykres funkcji f. Oblicz współczynnik kierunkowy a siecznej przecinającej wykres funkcji w punktach o odciętych x_0 i x_1. Podaj kąt nachylenia α tej siecznej do osi x, gdy:

a) $f(x)=x^2-5x+4,\ x_0=1,\ x_1=3,$ **b)** $f(x)=\dfrac{4}{x-2},\ x_0=3,\ x_1=4.$

10.4. Drogę punktu P przebytą w czasie t opisuje wzór $S(t)=2t^2-3t$. Oblicz średnią prędkość punktu P od chwili t_0 do chwili $t_0+\Delta t$, gdy $t_0=2$ i $\Delta t=0{,}5$.

10.5. Na rysunku przedstawiona jest krzywa wzrostu masy ciała Jasia od chwili jego narodzin. Odczytaj z wykresu dane i oblicz odpowiednie ilorazy różnicowe. Oceń, czy Jaś szybciej przybierał na wadze w okresie niemowlęcym czy w okresie dojrzewania.



10.6. Przy swobodnym spadaniu ciała, bez uwzględnienia oporu powietrza, równanie drogi s, jaką pokonuje ciało, opisuje wzór $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$, gdzie t to czas mierzony w sekundach i g to przyspieszenie ziemskie. Średnia prędkość $V_{śr}$ swobodnego spadania to wartość ilorazu różnicowego $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Oblicz średnią prędkość spadania ciała w czasie od t_0 do t_1, gdy:

a) $t_0=0$ i $t_1=5,$ **b)** $t_0=3$ i $t_1=7,$ **c)** $t_0=2$ i $t_1=10.$

W obliczeniach przyjmij $g\approx 10\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Pochodna funkcji w punkcie i jej interpretacja

Definicja

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, to granicę właściwą (jeżeli istnieje) ilorazu różnicowego $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, gdy przyrost argumentu h dąży do 0, nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Przykład 6. Oblicz z definicji pochodną funkcji f w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x)=x^2$ i $x_0=2$, b) $f(x)=\frac{4}{x-1}$, $x_0=3$.

Rozwiązanie

a) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+4)=4,$

b) $f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{4}{3+h-1}-\frac{4}{3-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h(2+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{2+h}=-1.$

Ćwiczenie 9. Oblicz z definicji pochodną funkcji f w punkcie x_0, gdy $f(x)=x^3+2x^2$ i $x_0=-1$.

Przykład 7. Wykaż, że funkcja $f(x)=|x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0=0$.

Rozwiązanie

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

$$|h|=\begin{cases}h, & \text{gdy } h\geq 0\\ -h, & \text{gdy } h<0\end{cases},\ \text{więc}\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{+h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}1=1\\ \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(-1)=-1\end{array}\right\},\ \text{czyli}\ \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}\neq\lim_{h\to 0^+}\frac{+h}{h}.$$

Zatem nie istnieje granica $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Funkcja $f(x)=|x|$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0=0$. ***cnw.***

Ćwiczenie 10. Wykaż, że funkcja $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{gdy } x\geq 0 \\ 2, & \text{gdy } x<0 \end{cases}$ nie jest różniczkowalna w punkcie $x_0=0$.

Uwaga

- Jeżeli **funkcja f ma pochodną** w punkcie x_0, to mówimy że **jest różniczkowalna** w tym punkcie i jest w nim ciągła.
- Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie przedziału $(a;b)$, to funkcję f nazywamy **różniczkowalną w przedziale $(a;b)$**.
- Każda funkcja mająca pochodną w punkcie x_0 jest w tym punkcie ciągła.

Przykład 8. Prosta o równaniu $y=2x-5$ jest styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=x^2-4$ w punkcie $P=(x_0,y_0)$.

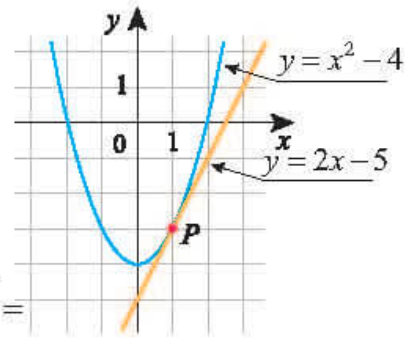
a) Oblicz współrzędne punktu P.

b) Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0 i sprawdź, czy jest ona równa wartości współczynnika kierunkowego tej prostej.

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=x^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ (x-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$.

Zatem $P=(1,-3)$.



b) $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-4-(1^2-4)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h+2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+2)=2.$

Współczynnik kierunkowy a prostej o równaniu $y=2x-5$ jest równy 2 oraz $f'(x_0)=f'(1)=2$, więc $f'(x_0)=a$.

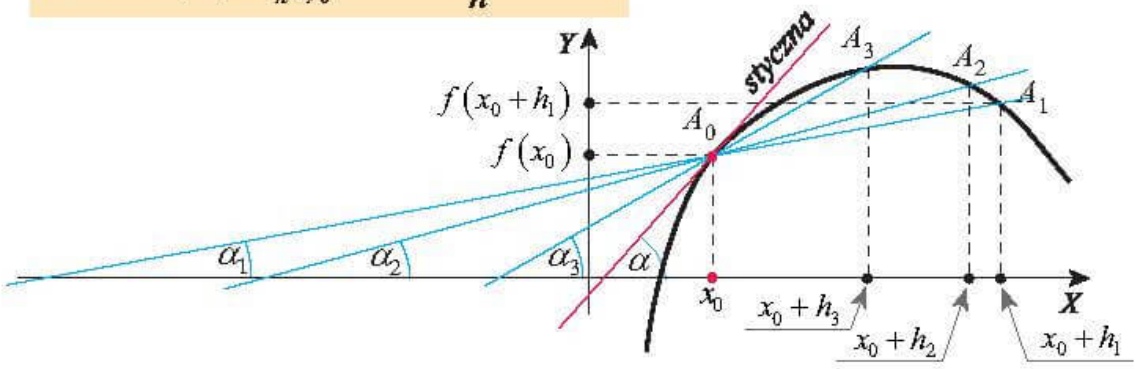
Odp.: **a)** $P=(1,-3)$, **b)** $f'(1)=2=f(1)$.

Ćwiczenie 11. Prosta o równaniu $y=4x+6$ jest styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=2-x^2$ w punkcie $P=(x_0,y_0)$. Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0 i porównaj jej wartość z wartością a współczynnika kierunkowego danej prostej.

Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta α, jaki tworzy z dodatnią częścią osi x styczna do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej x_0.

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

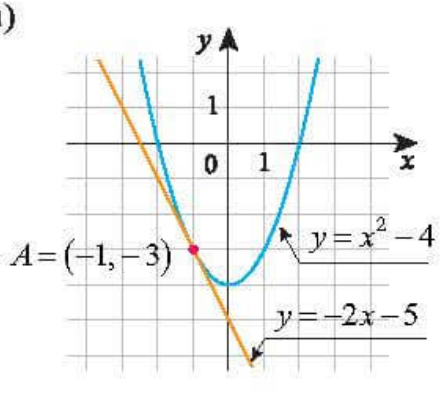


$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ – *równanie stycznej do wykresu funkcji* f *w punkcie* $(x_0, f(x_0))$, *której współczynnik kierunkowy* $a=f'(x_0)$

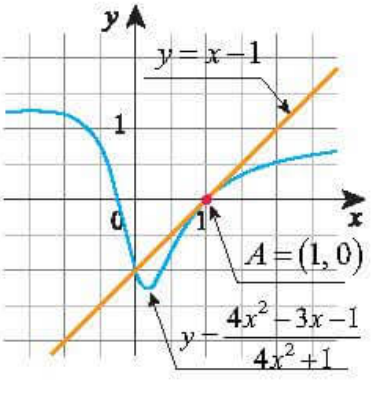
Styczna do krzywej to prosta, która jest granicznym położeniem siecznych tej krzywej.

Przykłady położenia stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A.

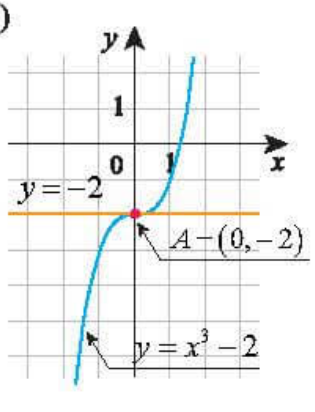
a)



b)

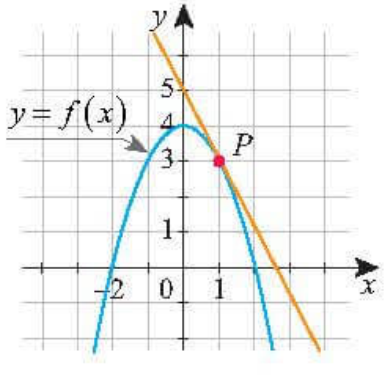


c)

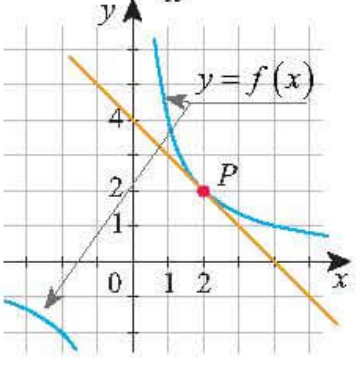


Ćwiczenie 12. Prosta wyróżniona na rysunku kolorem pomarańczowym jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P=(x_0, y_0)$. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i podaj wartość $f'(x_0)$.

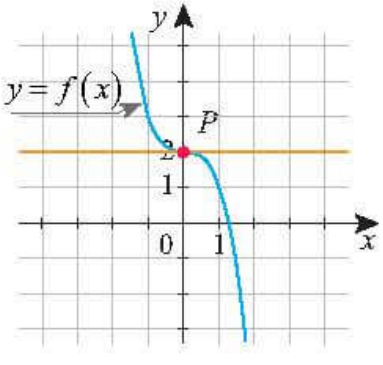
a) $f(x)=4-x^2$,



b) $f(x)=\frac{4}{x}$,



c) $f(x)=2-x^3$.



Przykłady interpretacji fizycznej pochodnej

- Prędkość chwilowa v w chwili t_0 poruszającego się punktu na drodze s jest granicą (o ile istnieje) ilorazu różnicowego funkcji $s = s(t)$

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

- Przyspieszenie chwilowe a w chwili t_0 jest granicą (o ile istnieje) ilorazu różnicowego funkcji $v = v(t)$

$$a(t_0) = v'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

Ćwiczenie 13. Wyszukaj w literaturze lub w internecie przykłady par zależności fizycznych, których jedna jest pochodną drugiej.

Odpowiedzi do ćwiczeń

9. $f'(-1) = -1$. **10.** Nie, ponieważ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$, $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$.

11. $P = (-2, -2)$, $f'(-2) = 4$, $a = f'(-2)$. **12.** **a)** $f'(1) = -2$, **b)** $f'(2) = -1$, **c)** $f'(0) = 0$.

Zadania utrwalające

10.7. Oblicz z definicji pochodną funkcji f w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x) = -2x + 1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, **b)** $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 1$, **c)** $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$.

10.8. Skorzystaj z definicji pochodnej i zbadaj, czy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x) = |x + 1|$, $x_0 = -1$,

b) $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{gdy } x \le 0 \\ -x, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$ i $x_0 = 0$.

10.9. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0, gdy:

a) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -3$, **b)** $f(x) = 5x^3 - 2x$, $x_0 = 1$.

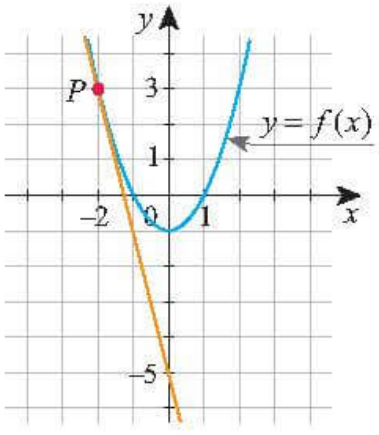
10.10. Prosta k jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P = (x_0, y_0)$. Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0 i porównaj jej wartość z wartością a współczynnika kierunkowego prostej k, gdy:

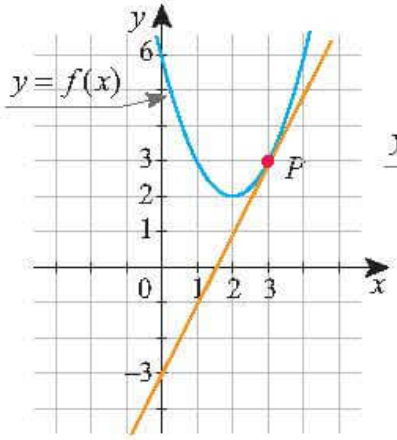
a) k: $y = -2x - 5$, $f(x) = x^2 - 4$, **b)** k: $y = 2x - 2$, $f(x) = x^2 - 1$,

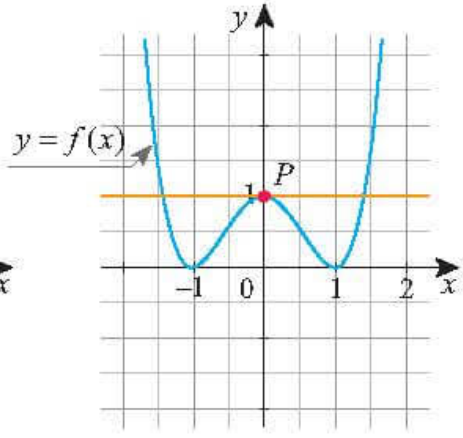
c) k: $y = 4x - 4$, $f(x) = x^2$, **d)** k: $y = 12x - 16$, $f(x) = x^3$.

10.11. Prosta wyróżniona na rysunku kolorem pomarańczowym jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P=(x_0, y_0)$. Odczytaj z rysunku odpowiednie dane i nie obliczając pochodnej, oblicz $f'(x_0)$.

a) $f(x)=x^2-1$, **b)** $f(x)=x^2-4x+6$, **c)** $f(x)=x^4-2x^2+1$.



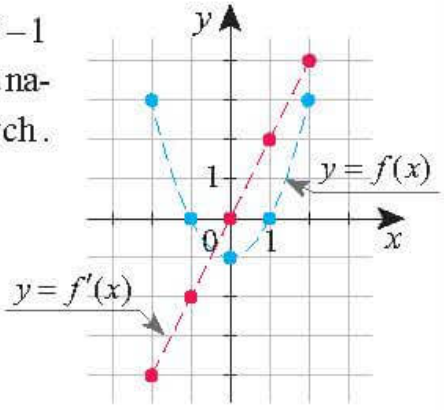




Pochodna jako funkcja

Lucyna obliczyła dla funkcji określonej wzorem $f(x)=x^2-1$ wartości $f(x_0)$ oraz $f'(x_0)$ i przedstawiła wyniki w tabeli, a następnie zaznaczyła te punkty w jednym układzie współrzędnych.

x_0	–2	–1	0	1	2
$f(x_0)$	3	0	–1	0	3
$f'(x_0)$	–4	–2	0	2	4



Zauważyła, że punkty o współrzędnych $(x_0, f'(x_0))$ leżą na wykresie funkcji określonej wzorem $y=2x$.

Definicja

Funkcję, która każdej liczbie $x_0 \in D_f$ przyporządkowuje liczbę $f'(x_0)$ (o ile istnieje $f'(x_0)$), nazywamy funkcją pochodną funkcji f lub **pochodną funkcji f** i oznaczamy f'.

- Dziedziną $D_{f'}$ pochodnej funkcji f jest zbiór tych punktów $x_0 \in D_f$, dla których istnieje $f'(x_0)$. $D_{f'} \subset D_f$
- $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, gdzie $x \in D_f$.

Pochodną f' oznacza się również: $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

Przykład 9. Wyznacz pochodną funkcji określonej wzorem $f(x)=x^2-2x+6$.

Rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji dla dowolnego punktu x, analogicznie jak dla ustalonego punktu x_0.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-2(x+h)+6\right]-\left(x^2-2x+6\right)}{h}=$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\quad f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-2)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-2)=2x-2.$$

Odp.: Pochodną funkcji $f(x)=x^2-2x+6$ jest funkcja $f'(x)=2x-2$, gdy $x\in \boldsymbol{R}$.

Ćwiczenie 14. Wykaż, że pochodną funkcji określonej wzorem $f(x)=ax+b$ jest funkcja mająca wzór $f'(x)=a$, czyli że $(ax+b)'=a$.

Wiele problemów praktycznych łączy się z koniecznością obliczania pochodnych różnych funkcji. Posługiwanie się w każdym przypadku granicą ilorazu różnicowego jest niewygodne i czasochłonne. Przedstawiamy więc twierdzenia i wzory, które ułatwiają obliczanie pochodnych funkcji.

Twierdzenie

$(x)'=1$

$\left(x^2\right)'=2x$

$\left(x^3\right)'=3x^2$

. . . . . .

- $\left(x^k\right)'=k\cdot x^{k-1}$

- $(c)'=0$ *(pochodna funkcji stałej)*
- $\left[f(x)+g(x)\right]'=f'(x)+g'(x)$ *(pochodna sumy funkcji)*
- $\left[f(x)-g(x)\right]'=f'(x)-g'(x)$ *(pochodna różnicy funkcji)*
- $\left[c\cdot f(x)\right]'=c\cdot f'(x)$ *(pochodna iloczynu stałej i funkcji)*

Ćwiczenie 15. Oblicz pochodną f' funkcji f, gdy:

a) $f(x)=x^3$, **b)** $f(x)=x^5$, **c)** $f(x)=x^6$, **d)** $f(x)=100$.

Przykład 10. Oblicz pochodną f' funkcji f, gdy:

a) $f(x)=5x^2$, **b)** $f(x)=-x^3$, **c)** $f(x)=5x^4-3x^3+2$, **d)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

Rozwiązanie

a) $f'(x)=\left(5x^2\right)'=5\cdot\left(x^2\right)'=$

$=5\cdot 2x=10x$,

$(c\cdot f(x))'-c\cdot f'(x)$

$\left(x^2\right)'-2x$

b) $f'(x)=\left(-x^3\right)'=-1\cdot\left(x^3\right)'=-1\cdot 3x^2=-3x^2,$

c) $f'(x)=\left(5x^4-3x^3+2\right)'=\left(5x^4\right)'-\left(3x^3\right)'+(2)'=$ $\quad [f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$

$=5\cdot\left(x^4\right)'-3\cdot\left(x^3\right)'+0=$ $\quad (2)'=0$

$=5\cdot 4x^3-3\cdot 3x^2=20x^3-9x^2,$ $\quad \left(x^4\right)'=4x^3,\left(x^3\right)'=3x^2$

d) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$ $\quad D_f=R$ *oraz* $D_{f'}=R\setminus\{0\}$, *skąd* $D_{f'}=R\setminus\{0\}$

Odp.: **a)** $f'(x)=10x$, **b)** $f'(x)=-3x^2$, **c)** $f'(x)=20x^3-9x^2$, **d)** $f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Ćwiczenie 16. Oblicz pochodną f' funkcji f, gdy:

a) $f(x)=-\frac{1}{2}x^6$, **b)** $f(x)=-4x^2+2x-7$, **c)** $f(x)=x^5-2x^3$.

Twierdzenie o pochodnej iloczynu dwóch funkcji

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze D, to funkcja $f\cdot g$ jest różniczkowalna w zbiorze D i $\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$, gdy $x\in D$.

Założenie: $x\in D$ oraz

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$g'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Teza:

$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Dowód: $\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$

Do licznika występującego w ilorazie różnicowym $\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$

dodajemy wyrażenie $\underbrace{g(x+h)\cdot f(x)-g(x+h)\cdot f(x)}_{0}$ i grupujemy wyrazy.

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\cdot\left[f(x+h)-f(x)\right]+f(x)\cdot\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)\right]=$$

$$=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x).$$ ***c.n.u.***

Przykład 11. Oblicz pochodną h' funkcji h, gdy $h(x)=\left(x^2+3x\right)\left(2-x^2\right)$.

Rozwiązanie

I sposób

$$h'(x)=\left[\left(x^2+3x\right)\cdot\left(2-x^2\right)\right]'=$$

$$=\left(x^2+3x\right)'\left(2-x^2\right)+\left(2-x^2\right)'\left(x^2+3x\right)=$$

$$=(2x+3)\left(2-x^2\right)-2x\cdot\left(x^2+3x\right)=$$

$$=-4x^3-9x^2+4x+6$$

$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$, gdzie $f(x)=x^2+3x$, $g(x)=2-x^2$

II sposób

$$h'(x)=\left[\left(x^2+3x\right)\cdot\left(2-x^2\right)\right]'=\left[2x^2-x^4+6x-3x^3\right]'=$$

$$=\left(2x^2\right)'-\left(x^4\right)'+(6x)'-\left(3x^3\right)'=$$

$$=4x-4x^3+6-9x^2=-4x^3-9x^2+4x+6.$$

Odp.: $h'(x)=-4x^3-9x^2+4x+6$.

Ćwiczenie 17. Oblicz pochodną h' funkcji h, gdy:

a) $h(x)=\left(x^3-4x^2+2x-3\right)\left(2+3x^2\right)$, **b)** $h(x)=x^2\left(\sqrt{x}+1\right)$.

Twierdzenie o pochodnej ilorazu dwóch funkcji

Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze D i $g(x)\neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w zbiorze D i $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$, gdy $x\in D$.

Przykład 12. Wyznacz pochodną funkcji f i podaj jej dziedzinę $D_{f'}$, gdy:

a) $f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2-1}$, **b)** $f(x)=\frac{4}{x-2}$, **c)** $f(x)=\frac{1}{x^4}$.

Rozwiązanie

a)
$$\left(\frac{x^3+2x}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(x^3+2x\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^3+2x\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(3x^2+2\right)\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^3+2x\right)\cdot(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-5x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$D_{f'}: x^2-1\neq 0$

$$f'(x)=\frac{x^4-5x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2} \text{ i } D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{-1,1\}.$$

b) $\left(\frac{4}{x-2}\right)'=\frac{(4)'(x-2)-4\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{0\cdot(x-2)-4\cdot 1}{(x-2)^2}$ $\quad D_f: x-2\neq 0$

$$f'(x)=\frac{-4}{(x-2)^2} \text{ i } D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{2\}.$$

c) *I sposób*

Stosujemy wzór na pochodną ilorazu.

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)'=\frac{(1)'\cdot x^4-1\cdot\left(x^4\right)'}{\left(x^4\right)^2}=\frac{0\cdot x^4-4\cdot x^{4-1}}{x^8}=\frac{-4x^3}{x^8}=\frac{-4}{x^5}, \text{ gdy } x\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$$

II sposób

Stosujemy wzór na pochodną funkcji $\left(x^{-4}\right)'$

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)'=\left(x^{-4}\right)'=-4\cdot x^{-4-1}=-4\cdot x^{-5}=-\frac{4}{x^5}, \text{ gdy } x\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}.$$

Odp.: **a)** $f'(x)=\frac{x^4-5x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2}$ i $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{-1,1\}$, **b)** $f'(x)=\frac{-4}{(x-2)^2}$ i $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{2\}$,

c) $f'(x)=\frac{-4}{x^5}$ i $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

Ćwiczenie 18. Wyznacz pochodną funkcji f i podaj jej dziedzinę $D_{f'}$, gdy:

a) $f(x)=\frac{-2}{x}$, **b)** $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, **c)** $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$.

Przykład 13. Oblicz pochodną funkcji f, gdzie m jest parametrem.

a) $f(x)=m^2x^2-2(m-1)x+4m-1$, **b)** $f(x)=\frac{m}{x-m}$.

Rozwiązanie

a) $f'(x)=m^2\cdot\left(x^2\right)'-2(m-1)\cdot(x)'=2m^2x-2(m-1)$,

b) $f'(x)=\frac{(m)'\cdot(x-m)-m\cdot(x-m)'}{(x-m)^2}=\frac{0\cdot(x-m)-m\cdot 1}{(x-m)^2}=\frac{-m}{(x-m)^2}$, gdzie $x\neq m$.

Odp.: **a)** $f'(x)=2m^2x-2(m-1)$, **b)** $f'(x)=\frac{-m}{(x-m)^2}$.

Ćwiczenie 19. Oblicz pochodną funkcji f, gdzie m jest parametrem.

a) $f(x)=mx^2-4mx+2$, b) $f(x)=\dfrac{mx-2}{x^2-m}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

15. a) $f'(x)=3x^2$, b) $f'(x)=5x^4$, c) $f'(x)=6x^5$, d) $f'(x)=0$.

16. a) $f'(x)=-3x^5$, b) $f'(x)=-8x+2$, c) $f'(x)=5x^4-6x^2$.

17. a) $h'(x)=15x^4-48x^3+24x^2-34x+4$, b) $h'(x)=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}+2x$.

18. a) $f'(x)=\dfrac{2}{x^2}$, $D_{f'}=R\setminus\{0\}$, b) $f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $D_{f'}=R$, c) $f'(x)=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$, $D_{f'}=R\setminus\{1\}$.

19. a) $f'(x)=2mx-4m$, b) $f'(x)=\dfrac{-mx^2+4x-m^2}{\left(x^2-m\right)^2}$, gdzie $x^2-m\neq 0$.

Zadania utrwalające

10.12. Oblicz pochodną funkcji f i podaj jej dziedzinę, gdy:

a) $f(x)=-2$, b) $f(x)=\sqrt{2}x$, c) $f(x)=5x^3$, d) $f(x)=-\dfrac{3}{4}x^4$,

e) $f(x)=x^{21}$, f) $f(x)=\dfrac{1}{x^7}$, g) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, h) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

10.13. Oblicz pochodną funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\pi-2x$, b) $f(x)=2x-8x^2$, c) $f(x)=x^3+\sqrt[3]{5}$,

d) $f(x)=3-4x+\dfrac{2}{3}x^3$, e) $f(x)=1-x$, f) $f(x)=(x-1)^2$.

10.14. Oblicz pochodną funkcji f i podaj jej dziedzinę.

a) $f(x)=2x^4-3x^2+\pi$, b) $f(x)=-x^8+2x^6-x+5$,

c) $f(x)=7x^3+5\sqrt{x}+5$, d) $f(x)=4\sqrt{x}+6x^4$.

10.15. Wyznacz pochodną funkcji f i podaj jej dziedzinę.

a) $f(x)=(2x+1)\cdot\left(3x^2+2\right)$, b) $f(x)=\left(x^5-3x^4\right)\cdot\left(x^7+3x+1\right)$,

c) $f(x)=\sqrt{x}\,(3+2x)$, d) $f(x)=x^2\left(3-\sqrt{x}\right)$.

10.16. Wyznacz pochodną funkcji f i podaj jej dziedzinę.

a) $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$, b) $f(x)=\dfrac{2x-5}{3x-7}$, c) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-2x}$,

d) $f(x)=\dfrac{5}{x^2-2x}$, e) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$, f) $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{x^3+1}$.

10.17. Wyznacz pochodną funkcji f, a następnie oblicz $f'(-2)$ i $f'(2)$, gdy:

a) $f(x)=2x^2-3x+4$, b) $f(x)=(x-5)(x^2-3)$, c) $f(x)=\dfrac{3x^2-4}{x^2+1}$.

10.18. Oblicz $f'(x_0)$, gdy:

a) $f(x)=3x^2-4x+5$ i $x_0=-1$, b) $f(x)=-\dfrac{2}{x}$ i $x_0=-\sqrt{2}$,

c) $f(x)=\dfrac{2x+7}{x^2+3}$ i $x_0=-\dfrac{1}{2}$, d) $f(x)=\dfrac{2x^4+13}{6-x^2}$ i $x_0=1$.

10.19. D Uzasadnij, że:

a) $f'(0)=0$, gdy $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ i $x\in R\setminus\{-1,1\}$,

b) $f'\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{3}{4}$, gdy $f(x)=\dfrac{3x+2}{3x-2}$ i $x\in R\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

10.20. Oblicz te wartości x, dla których:

a) $f'(x)=f(x)$, gdy $f(x)=(x+3)^2$, b) $f'(x)<f(x)$, gdy $f(x)=x^3$.

10.21. Oblicz pochodną funkcji f, gdy:

a) $f(x)=ax^2+bx+c$, b) $f(x)=2mx^2-(m-2)x+m^2+2$,

c) $f(x)=(4k-2)x^3-2kx^2+(3k+1)x-k+5$,

d) $f(x)=\dfrac{m}{x-1}$, e) $f(x)=\dfrac{mx+2}{mx-2}$, f) $f(x)=\dfrac{(m-2)x^2+4}{mx+1}$.

10.22. Oblicz współczynniki a, b, c wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+bx+c$, wiedząc, że $W(1)=2$, $W'(-1)=3$ i $W'(1)=7$.

Funkcja złożona i jej pochodna

Przypomnijmy

Jeżeli $f(x)=3-2x$, to: $f(1-x)=3-2\cdot(1-x)=2x+1$

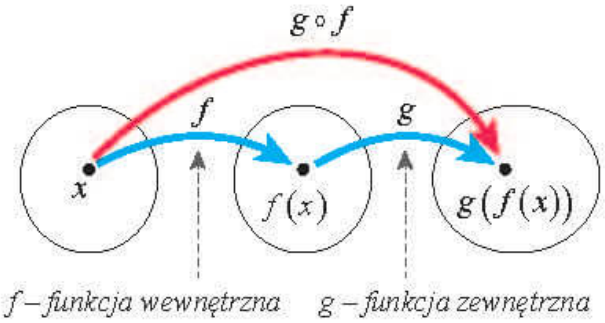
$f(x^2-4x)=3-2\cdot(x^2-4x)=-2x^2+8x+3$.

Ćwiczenie 20. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^2+2$. Napisz wzór funkcji g, gdy:

a) $g(x)=f(x+1)$, b) $g(x)=f(3-5x)$, c) $g(x)=f(x^2-1)$.

Definicja

Jeżeli $f: A \to B$ i $g: B \to C$, to istnieje funkcja $h: A \to C$ określona wzorem $p(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ zwana złożeniem funkcji f z funkcją g.



h – złożenie funkcji f i g
$p(x) = g(f(x))$

Przykłady wzorów funkcji złożonych:

$p(x) = (x^2+3)^5$, gdzie $g(x) = u^5$, gdy $u = f(x) = x^2+3$

$p(x) = (2x+1)^2 - 3$, gdzie $g(x) = u^2 - 3$, gdy $u = f(x) = 2x+1$

$p(x) = \sqrt{x^2-4}$, gdzie $g(x) = \sqrt{u}$, gdy $u = f(x) = x^2-4$.

Ćwiczenie 21. Określ wzór funkcji zewnętrznej g i funkcji wewnętrznej f, gdy $p(x) = g(f(x))$ oraz:

a) $p(x) = (1-x)^4$, **b)** $p(x) = \sqrt{x+3}$, **c)** $p(x) = 4-(2x-1)^3$.

Uwaga

Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Uzasadnienie

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ oraz } \lim_{n \to +\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)) \text{ i } g(f(x_0)) = p(x_0),$$

więc $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$.

Przykład 14. Sprawdź, czy $g(f(x)) = f(g(x))$, gdy:

a) $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 2x+1$, **b)** $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ i $g(x) = x^2$.

Rozwiązanie

a)
$$\left.\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2-1) = 2\cdot(x^2-1)+1 = 2x^2-1 \\ f(g(x)) &= f(2x+1) = (2x+1)^2 - 1 = 4x^2+4x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad g(f(x)) \neq f(g(x)),$$

b) $\left.\begin{array}{l} g(f(x))=g\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=x^2+1 \\ f(g(x))=f\left(x^2\right)=\sqrt{\left(x^2\right)^2+1}=\sqrt{x^4+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g(f(x)) \neq f(g(x))$

Ćwiczenie 22. Sprawdź, czy $g(f(x))=f(g(x))$, gdy:

a) $f(x)=2x^2$ i $g(x)=4-x$, **b)** $f(x)=\sqrt{2x^2+3}$ i $g(x)=x$.

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej

Jeżeli w funkcji złożonej $g \circ f$ funkcja f ma pochodną $f'(x)$ w punkcie x i funkcja g ma pochodną $g'(u)$ w punkcie $u=f(x)$, to funkcja złożona $g \circ f$ ma w punkcie x pochodną $\left[g \cdot f(x)\right]'(x)$ taką, że $\boldsymbol{\left[g\cdot(f(x))\right]'=g'(f(x))\cdot f'(x)}$.

Pochodna funkcji złożonej jest równa iloczynowi pochodnej funkcji zewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej.

Z (***założenie***): $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$, gdzie h to przyrost argumentu x

$\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{g(u+k)-g(u)}{k}=g'(u)$, gdzie $u=f(x)$ i $k=f(x+h)-f(x)$.

T (***teza***): $\left[g(f(x))\right]'=g'(f(x))\cdot f'(x)$

Szkic dowodu:

$g(f(x))=g(u)$, więc

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\frac{g(u+k)-g(u)}{h}$$

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\frac{g(u+k)-g(u)}{h}\cdot\frac{k}{k}$$

Mnożymy prawą stronę równości przez $1=\dfrac{k}{k}$.

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\frac{g(u+k)-g(u)}{k}\cdot\frac{k}{h}$$

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\frac{g(u+k)-g(u)}{k}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Jeżeli $h\to 0$, to również $k\to 0$, więc $\left[g(f(x))\right]'=g'(f(x))\cdot f'(x)$. ***c.n.u.***

Aby obliczyć pochodną funkcji złożonej, najpierw ustalamy wzór funkcji zewnętrznej, a następnie wzór funkcji wewnętrznej. Po określeniu tych funkcji stosujemy wzór na pochodną funkcji złożonej. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 15. Oblicz pochodną funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\left(4x^2-x\right)^2$, **b)** $f(x)=\left(5x^2-2x-4\right)^3$, **c)** $f(x)=\sqrt{x^2+2}$.

Rozwiązanie

Zakładamy, że $f=g\circ h$, czyli $f(x)=g\left(h(x)\right)$, więc

$$f'(x)=\left[g\left(h(x)\right)\right]'=g'\left(h(x)\right)\cdot h'(x).$$

Zatem $f'(x)=g'(u)\cdot h'(x)=g'(u)\cdot u'$, gdy $u=h(x)$.

a) Pochodną funkcji $f(x)=\left(4x^2-x\right)^2$ można obliczyć na dwa sposoby.

I sposób

$$f(x)=\underbrace{\left(4x^2-x\right)}_{u}{}^2$$

$$f'(x)=\left[(u)^2\right]'=2\cdot u\cdot u', \text{ gdzie } u=4x^2-x,$$

$$f'(x)=2\cdot\left(4x^2-x\right)\cdot\left(4x^2-x\right)'=$$

$$=2\cdot\left(4x^2-x\right)\cdot(8x-1)$$

II sposób

Przekształcamy wzór funkcji f tak, by nie stosować wzoru na pochodną funkcji złożonej.

$$f(x)=\left(4x^2-x\right)^2=16x^4-8x^3+x^2$$

$$f'(x)=\left(16x^4-8x^3+x^2\right)'=$$

$$=4\cdot 16x^3-3\cdot 8x^2+2x=$$

$$=64x^3-24x^2+2x.$$

b) $f(x)=\underbrace{\left(5x^2-2x-4\right)}_{u}{}^3$, gdzie $u=5x^2-2x-4$

$$f'(x)=\left[(u)^3\right]'=3u^2\cdot u'=3\left(5x^2-2x-4\right)^2\cdot\left(5x^2-2x-4\right)'=$$

$$=3\left(5x^2-2x-4\right)^2\cdot(10x-2)$$

c) $f(x)=\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{u}$, gdzie $u=x^2+2$

$$f'(x)=\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot\left(x^2+2\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

Odp.: **a)** $f'(x)=2x(4x-1)(8x-1)$, **b)** $f'(x)=6(5x-1)\left(5x^2-2x-4\right)^2$,

c) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

Ćwiczenie 23. Oblicz pochodną funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\left(3+x^2\right)^2$, b) $f(x)=\left(4x^2-x+1\right)^3$, c) $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

20. a) $g(x)=x^2+2x+3$, b) $g(x)=25x^2-30x+11$, c) $g(x)=x^4-2x^2+3$.

21. a) $g(x)=u^4$, gdy $u=1-x$, b) $g(x)=\sqrt{u}$, gdy $u=x+3$ i $x+3>0$, c) $g(x)=4-u^3$, gdy $u=2x-1$.

22. a) Nie, b) tak. 23. a) $f'(x)=4x\left(x^2+3\right)$, b) $f'(x)=3\left(4x^2-x+1\right)^2\cdot(8x-1)$, c) $f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

Zadania utrwalające

10.23. Określ wzór funkcji zewnętrznej g i funkcji wewnętrznej h, gdy $f(x)=g(h(x))$ oraz:

a) $f(x)=(3x-4)^6$,

b) $f(x)=\left(2x^2-4x+1\right)^5$,

c) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}$,

d) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+1}$,

e) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^3$,

f) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2$.

10.24. Utwórz wzory funkcji **1** $g(f(x))$, **2** $f(g(x))$, gdy:

a) $f(x)=x^2+2x$ i $g(x)=4x-5$,

b) $f(x)=x-3x^2$ i $g(x)=3x+2$,

c) $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ i $g(x)=x^2+2$,

d) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ i $g(x)=4x-3$,

e) $f(x)=\frac{1}{x}$ i $g(x)=x^2$,

f) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$ i $g(x)=x+1$.

10.25. Oblicz pochodną funkcji f, gdy:

a) $f(x)=(2x-5)^2$, b) $f(x)=(3-4x)^3$, c) $f(x)=(3x+7)^5$,

d) $f(x)=\left(2x^2-4x+1\right)^3$, e) $f(x)=\left(4x^2+3x-4\right)^6$, f) $f(x)=\left(6x^3+x^2\right)^{10}$.

10.26. Oblicz pochodną funkcji f, gdy:

a) $f(x)=(2x-5)^{-3}$, b) $f(x)=(3x+2)^{-1}$, c) $f(x)=\left(x^2+3\right)^{-2}$,

d) $f(x)=\left(5-2x^3\right)^{-1}$, e) $f(x)=\frac{1}{3+4x}$, f) $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$,

g) $f(x)=\frac{5}{3-2x}$, h) $f(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$, i) $f(x)=\frac{7}{\left(2-x^2\right)^5}$.

R

10.27. Oblicz pochodną funkcji f, gdy:

a) $f(x)=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$,

b) $f(x)=(6-x)^{\frac{1}{3}}$,

c) $f(x)=\left(x^3-2\right)^{\frac{2}{3}}$,

d) $f(x)=\left(4-x^5\right)^{-\frac{1}{5}}$,

e) $f(x)=\sqrt{4x-5}$,

f) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3}$.

10.28. Oblicz pochodną funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\left(x^2+x-1\right)^4$,

b) $f(x)=\sqrt{x^3-6x}$,

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+5}$,

d) $f(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)^4$,

e) $f(x)=\left(x^4-2x^2+3\right)^5$,

f) $f(x)=(1+x)^2\cdot(x-2)^3$.

10.29. Rozwiąż równanie $f'(x)=0$, gdy:

a) $f(x)=(3x-1)^4$,

b) $f(x)=\left(x^2-7x+6\right)^{10}$,

c) $f(x)=\left(x^2-4x+5\right)^7$.

10.30. D Wykaż, że $f'(x)=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$, gdy $f(x)=x\cdot\sqrt{x^2+1}$.

Zastosowanie interpretacji geometrycznej i fizycznej pochodnej funkcji

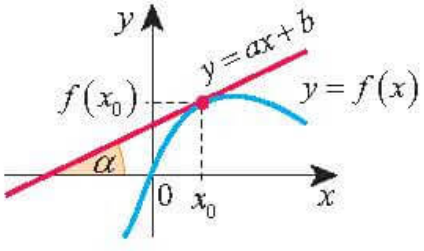
Przypomnijmy

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to wykres funkcji f ma w punkcie $(x_0, f(x_0))$ styczną, której współczynnik kierunkowy jest równy $f'(x_0)$.

Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, czyli

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.



$a=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$

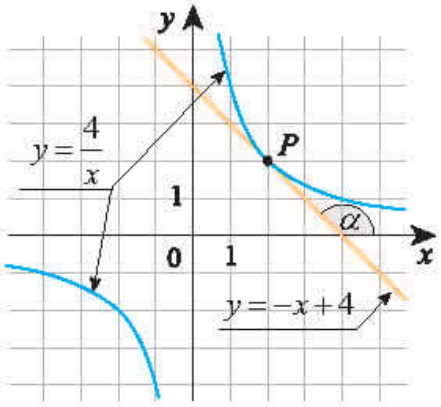
$y-y_0=a(x-x_0)$, *gdzie*
$P=(x_0, y_0)$ – *punkt styczności*
$a=f'(x_0)$ – *współczynnik kierunkowy stycznej*

R

Przykład 16. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x)=\frac{4}{x}$ w punkcie P o odciętej $x_0=2$ i podaj miarę kąta, jaki tworzy ta styczna z osią x.

Rozwiązanie $D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}$

- $y_0=f(x_0)=f(2)=\frac{4}{2}=2$, czyli $P=(2,2)$,
- $f'(x)=\left(\frac{4}{x}\right)'=-\frac{4}{x^2}$, gdzie $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$,
- $a=f'(2)=\frac{-4}{2^2}=-1$,
- $\operatorname{tg}\alpha=-1$, więc $\alpha=135°$,
- $y-2=-1\cdot(x-2)$, więc $y=-x+4$.



Ćwiczenie 24. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P o odciętej x_0, gdy: **a)** $f(x)=x^2-3x+1$, $x_0=0$, **b)** $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$, $x_0=1$.

Przykład 17. Prosta o równaniu $y=x-2$ jest styczna w punkcie P do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=2x^2-3x$. Oblicz współrzędne punktu $P=(x_0,y_0)$.

Rozwiązanie

$y=x-2$, więc $a=1$, skąd $f'(x_0)=1$ — *a – współczynnik kierunkowy prostej $y=x-2$.*

$f'(x)=\left(2x^2-3x\right)'=4x-3$. — *$f'(x_0)=1$*

$4x-3=1$, skąd $x_0=1$, więc $y_0=f(1)=-1$.

Odp.: $P=(1,-1)$.

Ćwiczenie 25. Prosta l jest styczna w punkcie P do wykresu funkcji f. Oblicz współrzędne punktu P, gdy:

a) $l: 5x+y=0$ i $f(x)=4x^2-5x$, **b)** $l: 6x+y+9=0$ i $f(x)=6-3x^2$.

Ćwiczenie 26. Sprawdź, czy do wykresu funkcji f istnieje styczna o współczynniku kierunkowym a. Jeżeli styczna istnieje, to napisz jej równanie.

a) $f(x)=\frac{x^2}{4}-2x-5$, $a=1$, **b)** $f(x)=4x+2$, $a=-1$.

Ćwiczenie 27. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=2x^2+3x$. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f:
a) równoległej do prostej o równaniu $7x-y+7=0$,
b) prostopadłej do prostej o równaniu $x-5y+12=0$.

Przykład 18. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $5x-y-9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=x^3-2x^2+x-1$.

Rozwiązanie

$5x-y-9=0$, więc $y=5x-9$.

Uzasadnić, że prosta o równaniu $y=5x-9$ jest styczna do wykresu funkcji f, tzn. wykazać, że:

1 istnieje taki punkt $P=(x_0, y_0)$ należący do wykresu funkcji f, że $f'(x_0)=5$ i $y_0=f(x_0)$,

2 punkt P leży na prostej l o równaniu $5x-y-9=0$.

Ad 1 $f'(x)=\left(x^3-2x^2+x-1\right)'=3x^2-4x+1$

$f'(x_0)=5$, więc $3x^2-4x+1=5$

$3x^2-4x-4=0$ $\quad \Delta=64,\ \sqrt{\Delta}=8$

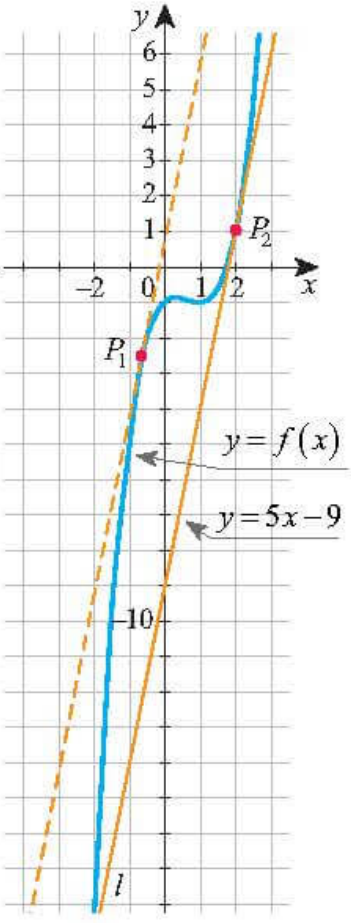
$x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=2.$

$x_1=-\frac{2}{3}$, więc $f\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}-1,$

zatem $P_1=\left(-\frac{2}{3},-\frac{77}{27}\right)$,

$x_2=2$, więc $f(2)=2^3-2\cdot 2^2+2-1$,

zatem $P_2=(2,1)$.



Ad 2 $P_1=\left(-\frac{2}{3},-\frac{77}{27}\right)$ i $5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{77}{27}-9\neq 0$, więc $P_1\notin l$, $\quad 5x-y-9=0$

$P_2=(2,1)$ i $5\cdot 2-1-9=0$, zatem $P_2\in l$.

Prosta o równaniu $5x-y-9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P_2.

c.n.u.

Ćwiczenie 28. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$.

Uwaga

$\Delta s = s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$ droga przebyta w przedziale czasu Δt	Oznaczenia: t – czas i $t \geq 0$, s – droga, v – prędkość, a – przyspieszenie, $s = s(t)$ – równanie drogi	
$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ średnia prędkość w przedziale czasu Δt	$v(t) = s'(t)$ funkcja prędkości	$v(t_0) = s'(t_0)$ prędkość w chwili t_0
$a_{śr} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$ średnie przyspieszenie w przedziale czasu Δt	$a(t) = v'(t)$ funkcja przyspieszenia	$a(t_0) = v'(t_0)$ przyspieszenie w chwili t_0

Przykład 19. Przy swobodnym spadaniu ciała, bez uwzględnienia oporu powietrza, równanie drogi s, jaką pokonuje ciało, opisuje wzór $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, gdzie $g \approx 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Napisz wzór opisujący prędkość v.

b) Oblicz prędkość ciała w chwili $t_0 = 100$ s.

c) Napisz wzór opisujący przyspieszenie a i oblicz przyspieszenie w chwili $t_0 = 100$ s.

Rozwiązanie

a) $v(t) = s'(t)$, więc $v(t) = \left(\frac{1}{2}gt^2\right)' = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(t^2\right)' = gt$,

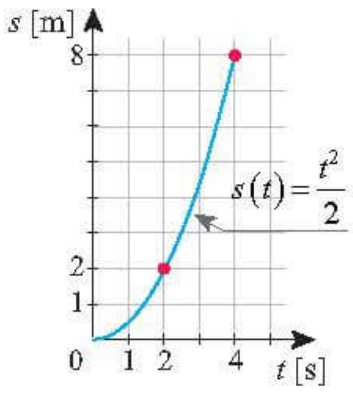
b) $t_0 = 100$ s, więc $v(100) = g\cdot 100 = 100g$, czyli $v(100) \approx 981\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

c) $a(t) = v'(t)$, więc $a(t) = (gt)' = g\cdot(t)' = g$,

$a(100) = g$, więc $a(100) \approx 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Odp.: **a)** $v(t) = gt$, **b)** $v(100) \approx 981\frac{\text{m}}{\text{s}}$, **c)** $a(t) = g$, $a(100) \approx 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ćwiczenie 29. Fragment paraboli przedstawionej na wykresie określa zależność drogi s wyrażonej w metrach od czasu t poruszającego się ciała.



a) Oblicz prędkość poruszającego się ciała w pierwszych dwóch sekundach ruchu.

b) Oblicz prędkość poruszającego się ciała w chwili $t_0 = 2$.

c) Oblicz prędkość poruszającego się ciała od drugiej do czwartej sekundy ruchu.

d) Oblicz prędkość poruszającego się ciała w chwili $t_0 = 3$.

Przykład 20. Droga s przebyta przez wyrzucony pionowo do góry kamień określona jest wzorem $s(t)=20t-\frac{gt^2}{2}$, gdzie $g\approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Wyznacz wzór funkcji prędkości v i przyspieszenia a.

b) Oblicz prędkość, z jaką poruszał się kamień w chwili t_0, gdy: $t_0=1$, $t_0=2$, $t_0=3$.

c) Oblicz, na jaką wysokość wyrzucono kamień i podaj, po ilu sekundach kamień zacznie spadać.

d) Oblicz, po ilu sekundach kamień spadnie na ziemię.

Rozwiązanie $s(t)=20t-\frac{gt^2}{2}$ i $g\approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, więc $s(t)=20t-5t^2$.

a) $v(t)=s'(t)=\left(20t-5t^2\right)'$, czyli $v(t)=20-10t$,

$a(t)=v'(t)=(20-10t)'$, czyli $a(t)=-10$.

b) $t_0=1$, więc $v(1)=20-10\cdot 1=10$,

$t_0=2$, więc $v(2)=20-10\cdot 2=0$,

$t_0=3$, więc $v(3)=20-10\cdot 3=-10$.

c) Funkcja $s(t)=-5t^2+20t$ ma największą wartość równą 20 (wysokość, na jaką wyrzucono kamień), gdy $t=2$.

Kamień zacznie spadać po upływie 2 sekund.

$y=ax^2+bx+c$,
$p=-\frac{b}{2a}$, $q=\frac{-\Delta}{4a}$

d) $s(t)=0$ i $t>0$, więc $-5t^2+20t=0$, skąd $t=4$.

Kamień spadnie na ziemię po upływie 4 sekund.

Ćwiczenie 30. Droga s (w metrach) przebyta przez pojazd w czasie t (w sekundach) określona jest wzorem $s(t)=t^2-6t$.

a) Wyznacz wzór funkcji prędkości v i przyspieszenia a.

b) Oblicz prędkość poruszającego się pojazdu w chwili t_0, gdy: $t_0=1$, $t_0=3$, $t_0=10$.

c) Kiedy prędkość poruszającego się pojazdu będzie równa 0?

Odpowiedzi do ćwiczeń

24. **a)** $y=-3x+1$, **b)** $y=-3x+2$. **25.** **a)** $P=(0,0)$, **b)** $P=(1,3)$. **26.** **a)** Tak, $y=x-14$, **b)** nie.

27. **a)** $y=7x-2$, **b)** $y=-5x-8$. **29.** **a)** $\frac{\Delta s}{\Delta t}=1\frac{\text{m}}{\text{s}}$, gdzie $\Delta s=s(2)-s(0)$, **b)** $v(2)=s'(2)=2\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

c) $\frac{\Delta s}{\Delta t}=3\frac{\text{m}}{\text{s}}$, gdzie $\Delta s=s(4)-s(2)$, **d)** $v(3)=s'(3)=3\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

30. **a)** $v(t)=s'(t)=2t-6$, $a(t)=v'(t)=2$, **b)** $v(1)=-4$, $v(3)=0$, $v(10)=14$, **c)** $t_0=3$.

Zadania utrwalające

10.31. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, gdy:

a) $f(x)=-4x+3$ i $x_0=-4$,

b) $f(x)=6x-3x^2$ i $x_0=0$,

c) $f(x)=x^3-3x$ i $x_0=1$,

d) $f(x)=x^2-5x+1$ i $x_0=5$,

e) $f(x)=\frac{9}{x+2}$ i $x_0=1$,

f) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ i $x_0=2$.

10.32. Sprawdź, czy istnieje styczna o współczynniku kierunkowym a do wykresu funkcji f. Jeśli styczna istnieje, to napisz jej równanie.

a) $f(x)=4-3x$, $a=-3$,

b) $f(x)=x^2-x+2$, $a=0$,

c) $f(x)=\frac{2}{x}$, $a=-2$,

d) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$, $a=-\frac{1}{4}$.

10.33. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f, która jest równoległa do prostej l, gdy:

a) $f(x)=-x^2+x$ i $l: y=3x-2$,

b) $f(x)=9-x^3$ i $l: 27x+y=0$,

c) $f(x)=-5x^2+3x+8$ i $l: x-y+17=0$,

d) $f(x)=\frac{1}{x}$ i $l: 2x+y+4=0$.

10.34. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji f, która jest prostopadła do prostej l, gdy:

a) $f(x)=4x^2+3$ i $l: y=x$,

b) $f(x)=4x^3-2x+1$ i $l: y=-0{,}1x-4$,

c) $f(x)=x^3-2x$ i $l: x+y+2=0$,

d) $f(x)=\frac{32}{x}$ i $l: x-2y+8=0$.

10.35. D Uzasadnij, że prosta l jest styczna do wykresu funkcji f, gdy:

a) $l: y=12x+12$ i $f(x)=2x^3-3x^2+5$,

b) $l: y=7x+3$ i $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$,

c) $l: y=2x-1$ i $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$.

10.36. Napisz równania stycznych do wykresów funkcji f i g w ich punkcie przecięcia, gdy:

a) $f(x)=x^2+4x+8$ i $g(x)=x^2+8x+4$,

b) $f(x)=x^3$ i $g(x)=\frac{32}{x^2}$,

c) $f(x)=x^4$ i $g(x)=-\frac{1}{x}$.

R **10.37.** Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+px+q$ należy punkt $M=\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie M jest nachylona do osi x pod kątem 135°. Oblicz współczynniki p i q.

10.38. Wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=x^3+kx-2$ jest styczny do osi x. Oblicz wartość k.

10.39. D Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=x^5+2x-12$ tworzy z osią x kąt ostry,

b) $f(x)=10-x-x^3$ tworzy z osią x kąt rozwarty,

c) $f(x)=\left(x^3+x\right)^5$ tworzy z osią x kąt $\alpha\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right)$.

10.40. D Prosta o równaniu $y=kx$ przecina parabolę o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ w dwóch punktach A i B. Wykaż, że styczne do tej paraboli w punktach A i B są prostopadłe.

10.41. Droga s, jaką porusza się w czasie t ruchem jednostajnym punkt materialny, określona jest wzorem $s(t)=5t+3$. Oblicz prędkość tego punktu w chwili t_0, gdy:

a) $t_0=0$, **b)** $t_0=1$, **c)** $t_0=10$, **d)** t_0 jest dowolną chwilą.

10.42. Pewne ciało porusza się w czasie t po drodze s z prędkością v i przyspieszeniem a. Napisz wzór opisujący: **1** prędkość v, **2** przyspieszenie a, gdy:

a) $s(t)=40t-5t^2$, **b)** $s(t)=30t+2t^2$, **c)** $s(t)=100t-t^2$.

10.43. Pewne ciało porusza się w czasie t z prędkością v po drodze s określonej wzorem $s(t)=2t^2-3t$. Oblicz:

a) średnią prędkość poruszającego się ciała, gdy $t\in\langle 2;2,5\rangle$,

b) prędkość w chwili $t_0=2$,

c) prędkość w chwili, w której to ciało zmienia kierunek ruchu.

R

10.44. Pewne ciało porusza się w czasie t po linii prostej z prędkością $v\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ tak, że jego odległość od punktu początkowego po t sekundach określona jest wzorem:

a) $s(t)=\frac{1}{3}t^3-2t^2+1$, **b)** $s(t)=5t^3-3t^2+2t-4$.

Napisz wzór opisujący prędkość v tego ciała w dowolnej chwili t i oblicz jej wartość w chwili t_0 oraz odległość tego ciała od punktu początkowego gdy:

1 $t_0=0$, **2** $t_0=3$, **3** $t_0=5$.

Związek pochodnej z monotonicznością funkcji

Wprowadzając iloraz różnicowy, wskazaliśmy na jego rolę w badaniu monotoniczności funkcji.

Przypomnijmy

- Jeżeli funkcja f jest rosnąca w przedziale $(a; b)$, to $\frac{\Delta f}{\Delta x}>0$.
- Jeżeli funkcja f jest malejąca w przedziale $(a; b)$, to $\frac{\Delta f}{\Delta x}<0$.

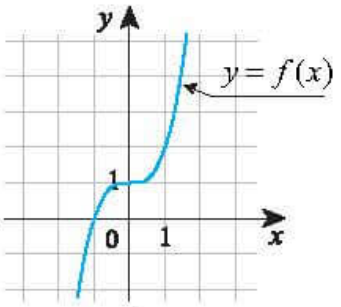
Efektywniejszym narzędziem do określania, czy funkcja w danym przedziale jest rosnąca czy malejąca, jest pochodna funkcji. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 21. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x)=x^3+1$.

a) Określ dziedzinę i monotoniczność funkcji f.

b) Wyznacz pochodną funkcji f i naszkicuj jej wykres.

c) Określ znak pochodnej f' w zbiorze R.

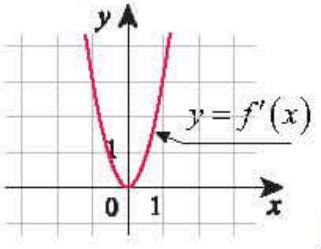


Rozwiązanie

a) $D_f=R$. Funkcja f jest rosnąca w zbiorze R.

b) $f'(x)=3x^2$.

c) Z wykresu funkcji f' odczytujemy, że $f'(x)\geq 0$, gdy $x\in R$.



Ćwiczenie 31. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = -3x + 2$.

a) Określ dziedzinę i monotoniczność funkcji f.

b) Wyznacz pochodną f' funkcji f i narysuj jej wykres.

c) Określ znak pochodnej f' w zbiorze R.

Twierdzenie o pochodnej funkcji rosnącej

Jeżeli **funkcja f**, określona i różniczkowalna w **przedziale $(a; b)$**, jest w tym przedziale **rosnąca**, to jej pochodna f' w każdym punkcie przedziału $(a; b)$ przyjmuje wartości nieujemne ($f'(x) \geq 0$).

Z (założenie): Dla każdego $x \in (a; b)$ istnieje pochodna f' oraz funkcja f jest rosnąca w przedziale $(a; b)$

T (teza): $f'(x) \geq 0$, gdy $x \in (a; b)$

Dowód. Z założenia funkcja f jest rosnąca w przedziale $(a; b)$. Dla każdego argumentu x oraz h, takiego że $x \in (a; b)$ oraz $x + h \in (a; b)$, iloraz różnicowy $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$,

zatem $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$, czyli $f'(x) \geq 0$ ***c.n.u.***

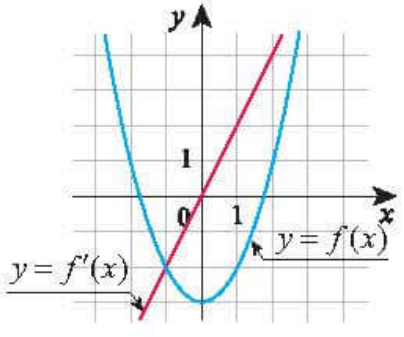
Twierdzenie o pochodnej funkcji malejącej

Jeżeli **funkcja f**, określona i różniczkowalna **w przedziale $(a; b)$**, jest w tym przedziale **malejąca**, to jej pochodna f' w każdym punkcie przedziału $(a; b)$ przyjmuje wartości niedodatnie ($f'(x) \leq 0$).

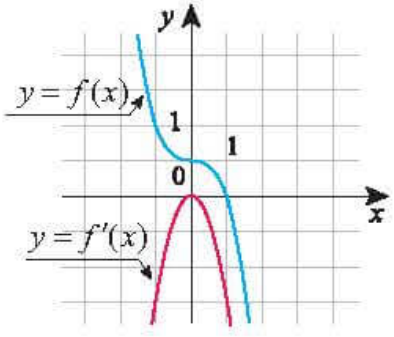
Ćwiczenie 32. Na rysunku przedstawione są wzory i fragmenty wykresów funkcji f (kolor zielony) i f' (kolor czerwony). Podaj przedziały argumentów x, dla których:

- $f'(x) \geq 0$ i określ rodzaj monotoniczności funkcji f w tych przedziałach,
- $f'(x) \leq 0$ i określ rodzaj monotoniczności funkcji f w tych przedziałach.

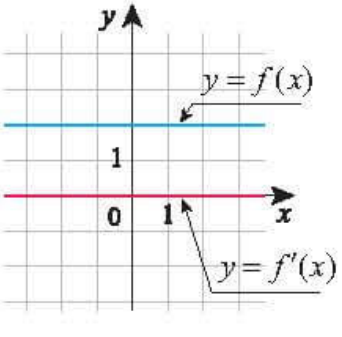
a) $f(x) = x^2 - 3$,



b) $f(x) = -x^3 + 1$,



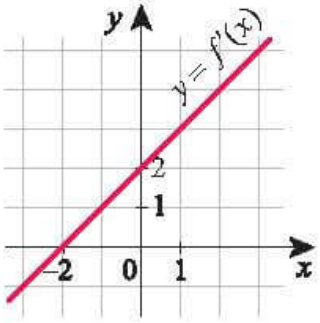
c) $f(x) = 2$.



Twierdzenie o pochodnej funkcji monotonicznej

Jeżeli funkcja f jest określona i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ oraz jej pochodna jest w każdym punkcie tego przedziału **dodatnia** (ujemna), **z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów**, w których przyjmuje wartość zero, to funkcja f w przedziale $(a; b)$ jest funkcją **rosnącą** (malejącą).

Przykład 22. Na rysunku prosta jest wykresem funkcji f', pochodnej pewnej funkcji f.



a) Podaj przedziały, w których funkcja f jest rosnąca oraz przedziały, w których funkcja f jest malejąca. Wynik przedstaw w tabeli przebiegu zmienności funkcji.

b) Podaj trzy przykłady wykresów, które mogą być wykresami funkcji f.

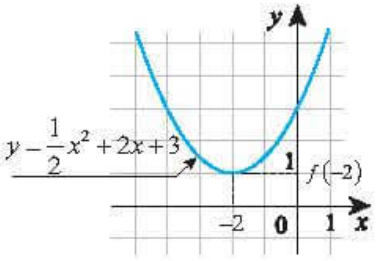
Rozwiązanie

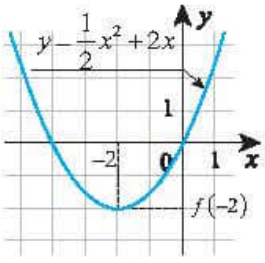
a) Analizując wykres pochodnej f' funkcji, zauważamy, że:

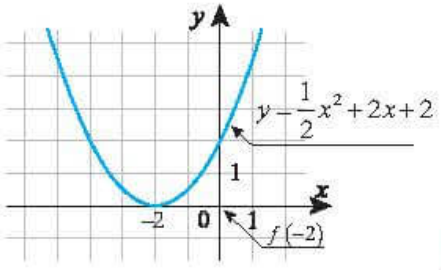
- $f'(x) > 0$, gdy $x \in (-2; +\infty)$, więc funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-2; +\infty)$,
- $f'(x) < 0$, gdy $x \in (-\infty; -2)$, więc funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(-2)$	↗

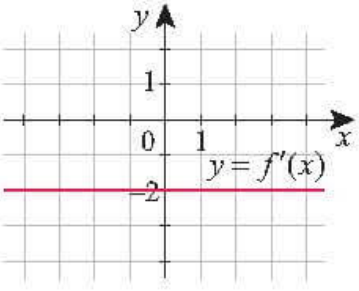
b)







Ćwiczenie 33. Na rysunku prosta jest wykresem funkcji f', pochodnej pewnej funkcji f.



a) Określ monotoniczność funkcji f w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

b) Narysuj w zeszycie trzy przykłady wykresów, które mogą być wykresami funkcji f.

Przy określaniu monotoniczności funkcji korzystamy z **różniczkowego kryterium badania monotoniczności funkcji**, które jest szczególnym przypadkiem poprzedniego twierdzenia.

Twierdzenie o pochodnej funkcji monotonicznej

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ oraz dla każdego argumentu $x \in (a; b)$:

- $f'(x) = 0$, to funkcja f jest **stała** w przedziale $(a; b)$,
- $f'(x) > 0$, to funkcja f jest **rosnąca** w przedziale $(a; b)$,
- $f'(x) < 0$, to funkcja f jest **malejąca** w przedziale $(a; b)$.

Przykład 23. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f, gdy:
a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$, **b)** $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x$.

Rozwiązanie

Funkcja f jest wielomianem trzeciego stopnia, więc $D_f = \boldsymbol{R}$.

a) 1° Wyznaczamy pochodną f' i określamy jej dziedzinę $D_{f'}$.

$f'(x) = \left(x^3 + 3x^2 - 1\right)' = 3x^2 + 6x$, czyli

$f'(x) = 3x^2 + 6x$, $D_{f'} = \boldsymbol{R}$.

2° Wyznaczamy zbiory argumentów, dla których $f'(x) > 0$ oraz $f'(x) < 0$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$,

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0)$.



Strzałki wskazują przedziały monotoniczności funkcji f.

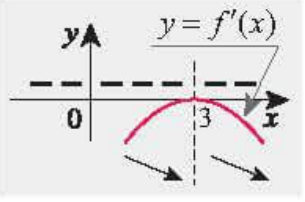
3° Określamy przedziały monotoniczności funkcji f.

$f'(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$, więc funkcja f **jest rosnąca w każdym z przedziałów** $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$.

$f'(x) < 0$, gdy $x \in (-2; 0)$, więc funkcja f jest malejąca w przedziale $(-2; 0)$.

b) 1° $f'(x) = \left(-x^3 + 9x^2 - 27x\right)' = -3x^2 + 18x - 27$, czyli

$f'(x) = -3\left(x^2 - 6x + 9\right) = -3(x-3)^2$, $D_{f'} = \boldsymbol{R}$.



2° $f'(x) < 0$, gdy $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{3\}$ i $f'(x) = 0$, gdy $x = 3$.

3° $f'(x) \leq 0$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$, więc funkcja f **jest malejąca w przedziale** $(-\infty; +\infty)$, bo w tym przedziale **pochodna** f' **tylko raz przyjmuje wartość równą 0**.

Odp.: Funkcja f jest: **a)** rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$; malejąca w przedziale $(-2; 0)$, **b)** malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

Ćwiczenie 34. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f określonej wzorem:
a) $f(x)=-2x^3-6x^2+3$, **b)** $f(x)=x^3-3x^2+3x$.

Ćwiczenie 35. Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x)=x^3+3x+6$ jest rosnąca w swojej dziedzinie.

Przykład 24. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f określonej wzorem $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$.

Rozwiązanie

$D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$

1° Obliczamy pochodną f' funkcji f i określamy jej dziedzinę $D_{f'}$.

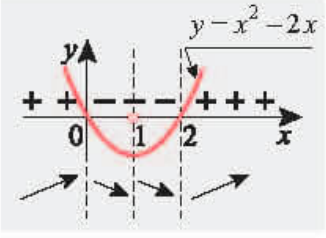
$$f'(x)=x'+\left(\frac{1}{x-1}\right)'=$$

$$=1+\frac{0\cdot(x-1)-1\cdot 1}{(x-1)^2}=1-\frac{1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2},$$

$D_{f'}=D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$.

2° Zauważamy, że dla każdej liczby rzeczywistej $x\in\boldsymbol{R}\setminus\{1\}$ wyrażenie $(x-1)^2$ przyjmuje tylko wartości dodatnie, więc znak pochodnej zależy tylko od znaku licznika x^2-2x.



$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}>0\\ x\in\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x>0\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty),$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}<0\\ x\in\boldsymbol{R}\setminus\{1\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x<0\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(1;2).$$

Odp.: Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$, a malejąca w każdym z przedziałów $(0;1)$, $(1;2)$.

Ćwiczenie 36. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f, gdy $f(x)=\frac{5x}{1+x^2}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

31. a) $D_f = \boldsymbol{R}$, funkcja f jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$, b) $f'(x) = -3$, c) $f'(x) < 0$.

32. a) $f'(x) \geq 0$, gdy $x \geq 0$, funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty)$; $f'(x) \leq 0$, gdy $x \leq 0$, funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$, b) $f'(x) \geq 0$, gdy $x = 0$, $f'(x) \leq 0$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$, funkcja jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$, c) $f'(x) = 0$, gdy $x \in \boldsymbol{R}$, funkcja jest stała w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

33. a) Funkcja f jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$, b) możliwym wykresem funkcji f jest każda prosta, której współczynnik kierunkowy jest równy -2.

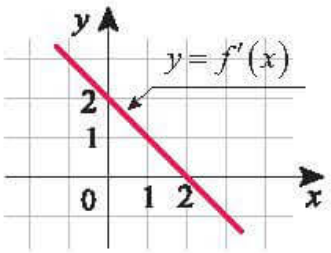
34. Funkcja f jest: a) rosnąca w przedziale $(-2; 0)$, malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$, $(0; +\infty)$, b) rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

36. Funkcja f jest: rosnąca w przedziale $(-1; 1)$, malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$.

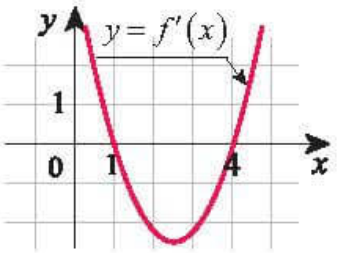
Zadania utrwalające

10.45. Poniżej przedstawiony jest wzór funkcji f' i fragment jej wykresu. Określ przedziały monotoniczności funkcji f.

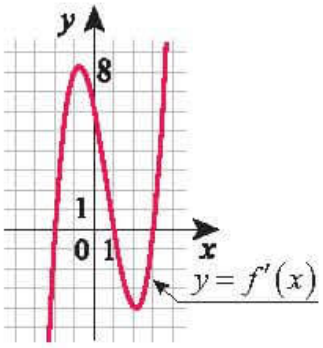
a) $f'(x) = -x + 2$,



b) $f'(x) = x^2 - 5x + 4$,



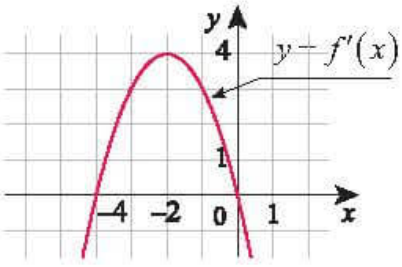
c) $f'(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.



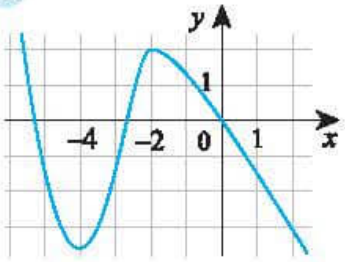
10.46. Parabola przedstawiona na rysunku jest wykresem pochodnej funkcji f.

a) Podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

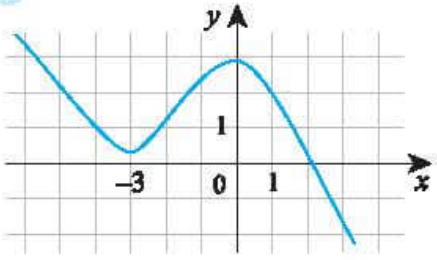
b) Który spośród wykresów **1**, **2**, **3** może być wykresem funkcji f?



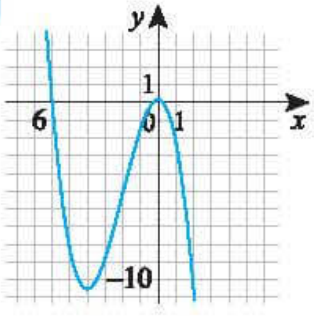
1



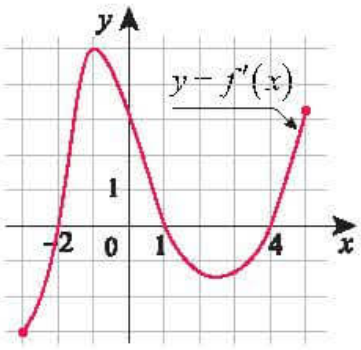
2



3



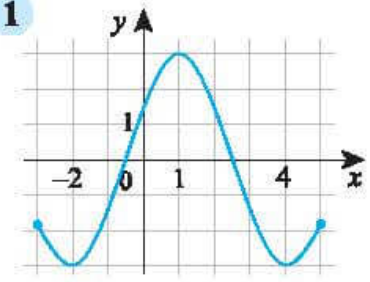
10.47. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f', która jest pochodną funkcji f.



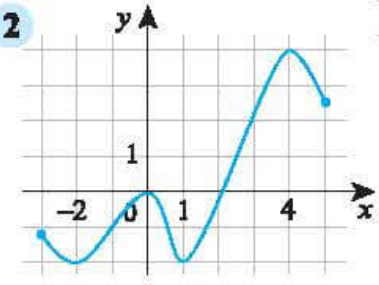
a) Podaj przedziały, w których funkcja f jest rosnąca oraz przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

b) Który spośród wykresów **1** i **2** może być wykresem funkcji f?

1



2



10.48. W tabeli określone są: znak i wartości funkcji pochodnej f'. Podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

a)

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b)

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

c)

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

d)

x	$(-\infty;4)$	4	$(4;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

10.49. Przerysuj tabelę do zeszytu i w miejsce ■ wpisz znak ↗ lub ↘. Naszkicuj wykres funkcji f.

x	-4	$(-4;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;10)$	10
$f'(x)$	⊠	$+$	0	$-$	0	$+$	⊠
$f(x)$	-2	■	4	■	0	■	4

10.50. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f, gdy:

a) $f(x)=-x^3+2x^2-2x$,

b) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$,

c) $f(x)=x^2(1-x^2)$,

d) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-24x+5$.

10.51. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$, **b)** $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$, **c)** $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$, **d)** $f(x)=x+2+\frac{1}{x}$.

10.52. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f, gdy:

a) $f(x)=4x^3-2x^2-x+5$,

b) $f(x)=(x+1)^2\cdot(5-x)$,

c) $f(x)=x+\frac{1}{x}$,

d) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$.

10.53. Określ, dla jakich wartości parametru m funkcja f określona wzorem:

a) $f(x)=x^3+mx^2-mx+2$ jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych,

b) $f(x)=mx^3+2x^2+3mx-1$ jest malejąca w zbiorze liczb rzeczywistych,

c) $f(x)=x^3+3mx^2+3x$ jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych.

10.54. D Wykaż, że funkcja f określona wzorem:

a) $f(x)=x^3-12x$ w przedziale $(3;5)$ jest rosnąca,

b) $f(x)=x^4-2x^2$ w przedziale $(-20;-10)$ jest malejąca,

c) $f(x)=\frac{x+1}{2x-6}$ w przedziale $(3;+\infty)$ jest malejąca.

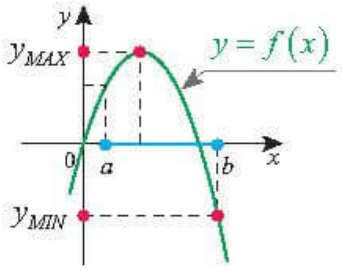
10.55. D Wykaż, że funkcja f określona wzorem:

a) $f(x)=1+x+x^2+x^3$ jest monotoniczna,

b) $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ nie jest monotoniczna.

Ekstrema lokalne funkcji

Omawiając własności funkcji kwadratowej, obliczaliśmy najmniejszą (y_{MIN}) oraz największą (y_{MAX}) jej wartość w przedziale domkniętym $\langle a;b\rangle$.

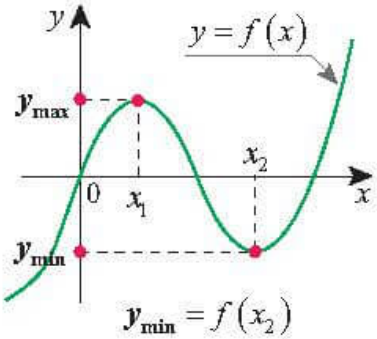


Obecnie zajmiemy się tymi punktami charakteryzującymi wykres funkcji, w których funkcja z rosnącej przechodzi w malejącą lub odwrotnie – z malejącej w rosnącą.

Przyjmujemy oznaczenia:

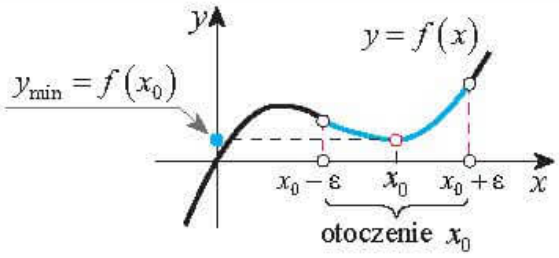
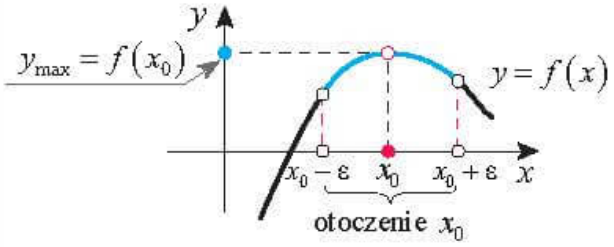
y_{min} – **minimum lokalne** funkcji (ekstremum lokalne funkcji),

y_{max} – **maksimum lokalne** funkcji (ekstremum lokalne funkcji).



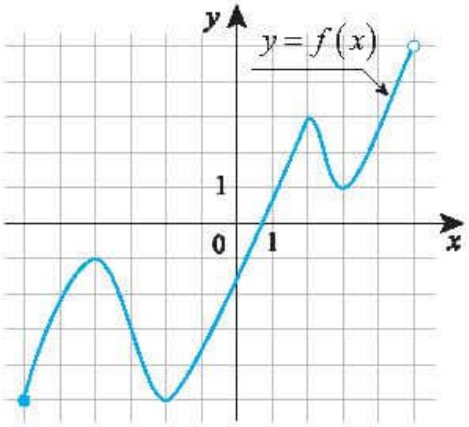
$y_{min} = f(x_2)$

$y_{max} = f(x_1)$

Minimum lokalne y_{min}	Maksimum lokalne y_{max}
	
$x \in (x_0-\varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0+\varepsilon)$ i $\varepsilon > 0$ oraz $f(x_0) < f(x)$, to $y_{min} = f(x_0)$	$x \in (x_0-\varepsilon; x_0) \cup (x_0; x_0+\varepsilon)$ i $\varepsilon > 0$ oraz $f(x_0) > f(x)$, to $y_{max} = f(x_0)$

Badanie własności pochodnej funkcji pozwala na wyznaczenie argumentów, dla których funkcja może mieć ekstrema.

Przykład 25. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Przeanalizuj ten wykres i podaj wartości argumentu x, dla którego funkcja ma ekstrema lokalne, nazwij je i podaj ich wartości.



Rozwiązanie

Funkcja f ma dwa minima lokalne, tj.

$$y_{min} = f(-2) = -5 \text{ i } y_{min} = f(3) = 1$$

oraz dwa różne maksima lokalne

$$y_{max} = f(-4) = -1 \text{ i } y_{max} = f(2) = 3.$$

Uwaga

- Funkcja może mieć więcej niż jedno minimum lokalne i więcej niż jedno maksimum lokalne.
- Wartość minimum lokalnego funkcji może być większa od wartości maksimum lokalnego tej funkcji.

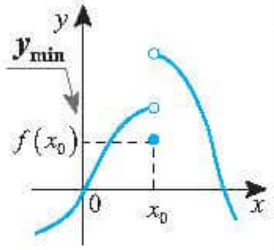
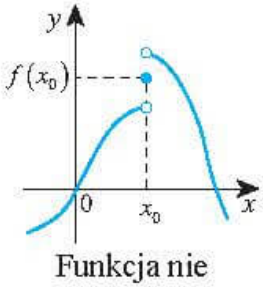
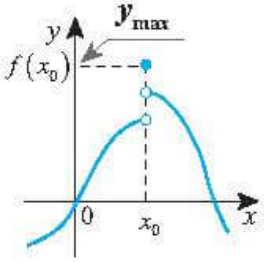
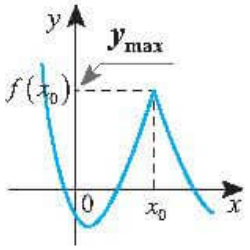
Ćwiczenie 37. Naszkicuj przykładowy wykres funkcji f spełniającej warunki:

- dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -5; 7 \rangle$,
- funkcja f ma trzy ekstrema lokalne:

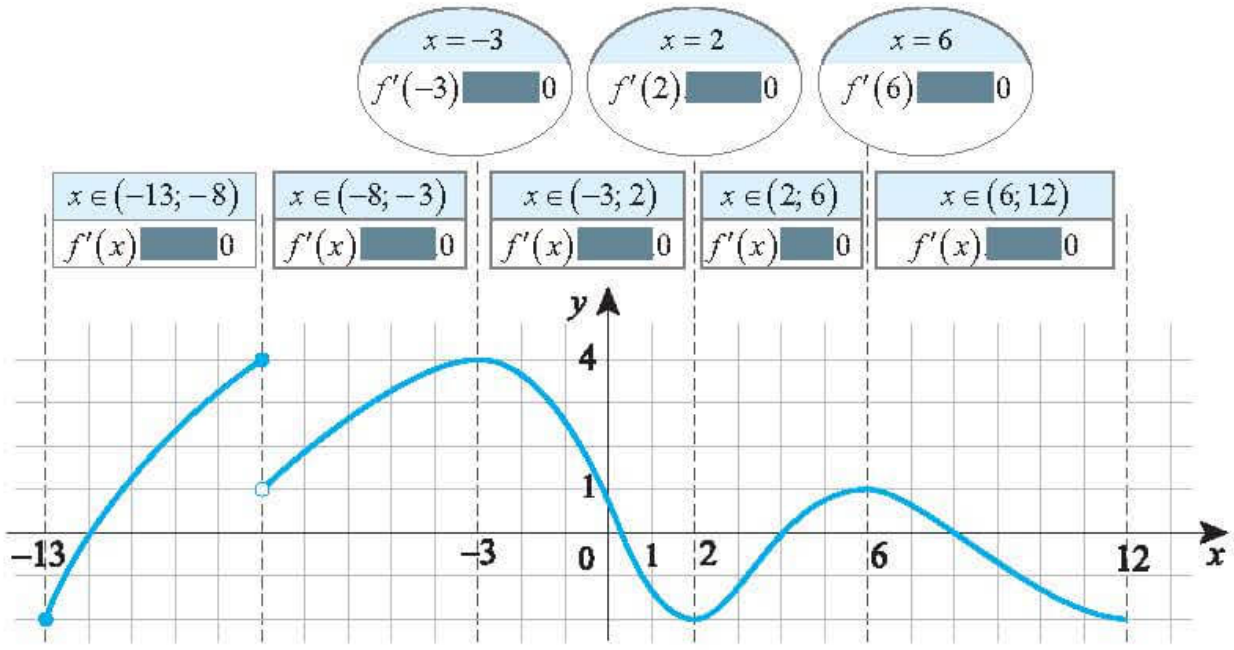
(I) $y_{max} = f(-3) = 4$, (II) $y_{max} = f(4) = 5$, (III) $y_{min} = f(0) = -3$.

Uwaga

Z istnienia ekstremum w punkcie x_0 nie wynika istnienie pochodnej funkcji w tym punkcie.

Funkcja f nieciągła i nieróżniczkowalna w punkcie x_0			Funkcja f ciągła, ale nieróżniczkowalna w punkcie x_0
 $y_{min} = f(x_0)$	 Funkcja nie ma ekstremum w punkcie x_0.	 $y_{max} = f(x_0)$	 $y_{max} = f(x_0)$

Ćwiczenie 38. Przerysuj wykres do zeszytu i w miejsce ■ wpisz znak: „>” lub „<”, lub „=”.



a) Czy funkcja f w punkcie $x_0 = -8$ jest różniczkowalna?

b) Czy funkcja f w punkcie $x_0 = -8$ ma maksimum lokalne?

W dalszych rozważaniach skoncentrujemy się na zagadnieniach dotyczących funkcji różniczkowalnych (a więc również ciągłych).

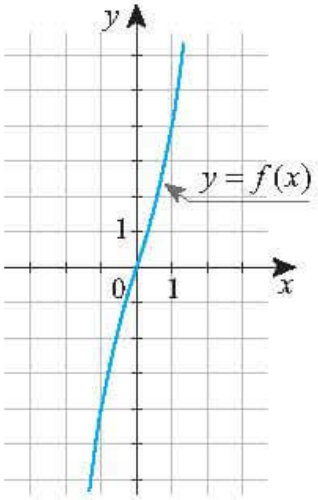
Związek pochodnej z ekstremum funkcji

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

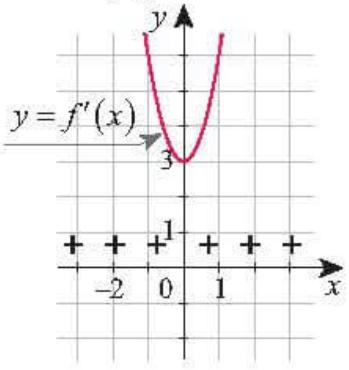
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D_f$ i ma w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$.

Funkcja f nie ma ekstremów i równanie $f'(x) = 0$ nie ma rozwiązania.

$f(x) = x^3 + 3x$



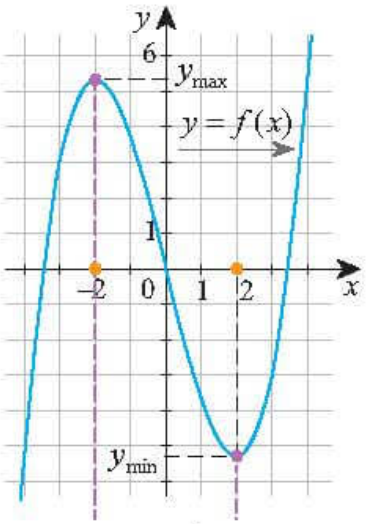
$f'(x) = 3x^2 + 3$



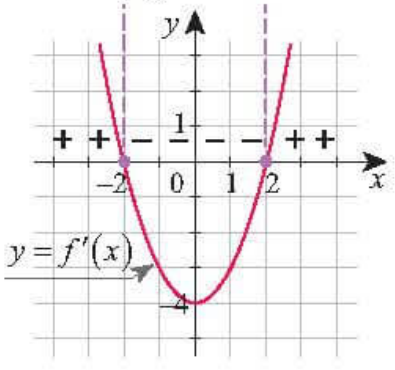
$f'(x) = 0$ – brak rozwiązania

Funkcja f ma dwa ekstremum i równanie $f'(x) = 0$ ma dwa rozwiązania.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$



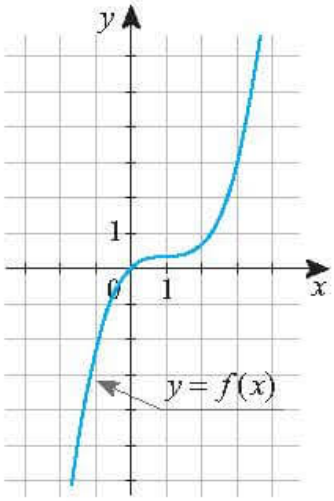
$f'(x) = x^2 - 4$



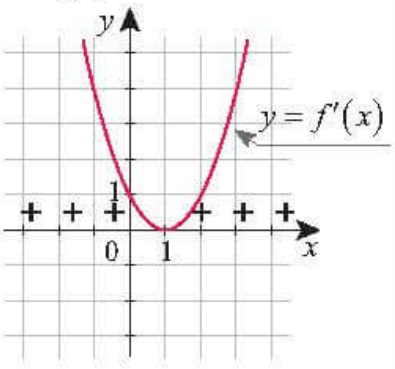
$f'(x) = 0$, gdy $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

Funkcja f nie ma ekstremów, a równanie $f'(x) = 0$ ma jedno rozwiązanie.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$



$f'(x) = x^2 - 2x + 1$



$f'(x) = 0$, gdy $x_0 = 1$

Uwaga

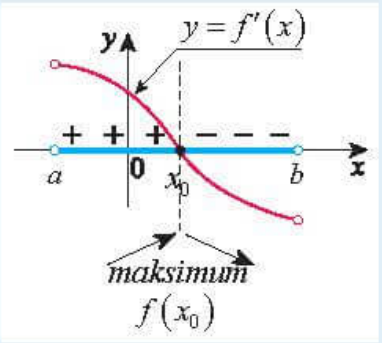
Jeżeli $f'(x_0) = 0$, to punkt x_0 nazywa się **punktem stacjonarnym**.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ oraz gdy:

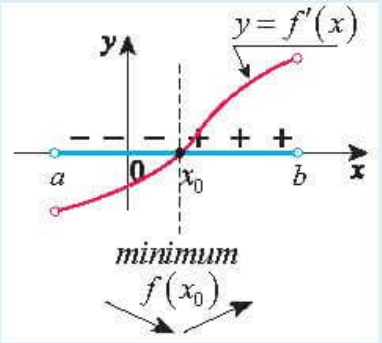
- $x \in (a; x_0)$ i $f'(x) > 0$,
- $x \in (x_0; b)$ i $f'(x) < 0$,

to funkcja f ma maksimum w punkcie x_0.

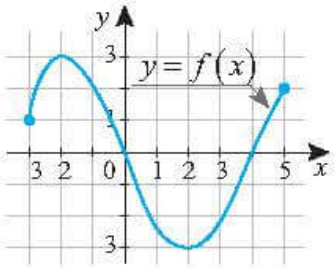


- $x \in (a; x_0)$ i $f'(x) < 0$,
- $x \in (x_0; b)$ i $f'(x) > 0$,

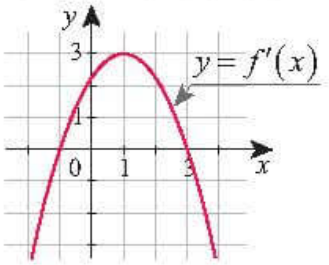
to funkcja f ma minimum w punkcie x_0.



Ćwiczenie 39. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Naszkicuj w zeszycie przykładowy wykres funkcji, która jest pochodną funkcji f.



Ćwiczenie 40. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f', która jest pochodną funkcji f. Naszkicuj w zeszycie przykładowy wykres funkcji f.



Przykład 26. Wyznacz ekstrema funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$.

Rozwiązanie

1° $D_f = \boldsymbol{R}$. Funkcja f jest wielomianem, więc jest różniczkowalna w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

2° Obliczamy pochodną f', określamy jej dziedzinę $D_{f'}$ i miejsca zerowe.

$$f'(x) = \left(x^3 - 2x^2 + x - 5\right)' = 3x^2 - 4x + 1, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R},$$

$$f'(x) = 0, \text{ gdy } 3x^2 - 4x + 1 = 0, \text{ skąd } x = \frac{1}{3} \text{ lub } x = 1.$$

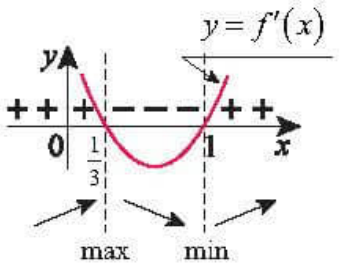
Funkcja f może mieć ekstrema lokalne w punktach o odciętych $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

3° Określamy znak pochodnej w jej dziedzinie.

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty),$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{3};1\right).$$



4° Sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum w punkcie

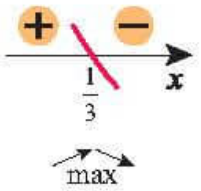
1 $x_1=\frac{1}{3}$ oraz w punkcie **2** $x_2=1$ i jeśli ekstremum istnieje,

to określamy jego rodzaj, a następnie obliczamy jego wartość.

1 $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$, to $f'(x)>0$

$x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$, to $f'(x)<0$

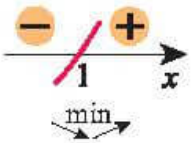
W punkcie $x_1=\frac{1}{3}$ *funkcja f ma maksimum* $f\left(\frac{1}{3}\right)=-4\frac{23}{27}$.



2 $x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$, to $f'(x)<0$

$x\in(1;+\infty)$, to $f'(x)>0$

W punkcie $x_2=1$ *funkcja f ma minimum* $f(1)=-5$.



Odp.: $y_{\max}=f\left(\frac{1}{3}\right)=-4\frac{23}{27}$, $y_{\min}=f(1)=-5$.

Ćwiczenie 41. Wyznacz ekstrema funkcji określonej wzorem $f(x)=x^4-8x^2$.

Przykład 27. Wyznacz ekstrema funkcji określonej wzorem $f(x)=\frac{x^2}{2x-6}$.

Wyniki przedstaw, sporządzając tabelę przebiegu zmienności funkcji.

Rozwiązanie

1° $D_f=\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$

2° $f'(x)=\frac{2x(2x-6)-x^2\cdot 2}{(2x-6)^2}=\frac{2x(x-6)}{(2x-6)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$

$f'(x)=0$, gdy $\frac{2x(x-6)}{(2x-6)^2}=0$ i $x\neq 3$

$2x(x-6)=0$ i $x\neq 3$, więc $x=0$ lub $x=6$.

$\frac{a}{b}=0$, *gdzie* $b\neq 0$, *gdy* $a=0$

Funkcja f może mieć ekstrema w punktach $x_1=0$ i $x_2=6$.

3° Zauważamy, że znak pochodnej f' zależy od znaku licznika $2x(x-6)$,

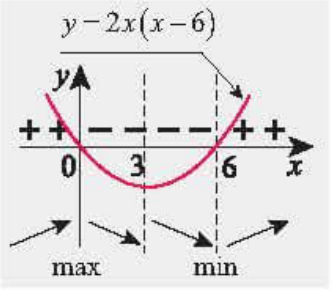
bo gdy $x \neq 3$, to mianownik $(2x-6)^2 > 0$.

$f'(x) > 0$, gdy $2x(x-6) > 0$ i $x \neq 3$,

skąd $x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$,

$f'(x) < 0$, gdy $2x(x-6) < 0$ i $x \neq 3$,

skąd $x \in (0; 3) \cup (3; 6)$.



4°

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; 6)$	6	$(6; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	✕	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	✕	↘	6	↗
		max lokalne				min lokalne	

Odp.: $y_{max} = f(0) = 0$, $y_{min} = f(6) = 6$.

Ćwiczenie 42. Wyznacz ekstrema funkcji f określonej wzorem $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

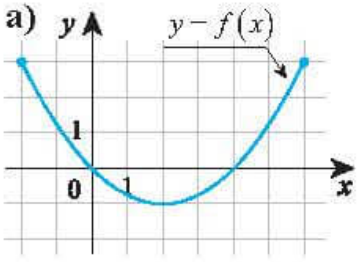
38. Kolejno: $>, >, =, <, =, >, =, <$. **a)** W punkcie $x_0 = -8$ funkcja nie jest różniczkowalna, **b)** tak.

41. $y_{min} = f(-2) = f(2) = -16$, $y_{max} = f(0) = 0$. **42.** $y_{min} = f(-1) = -2$, $y_{max} = f(1) = 2$.

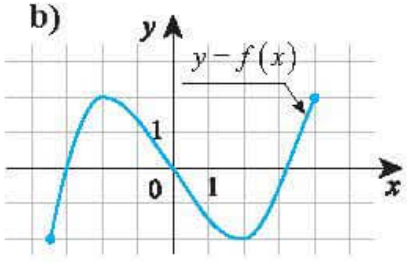
Zadania utrwalające

10.56. Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Przeanalizuj ten wykres, podaj punkty, w których funkcja ma ekstrema lokalne i określ ich rodzaj.

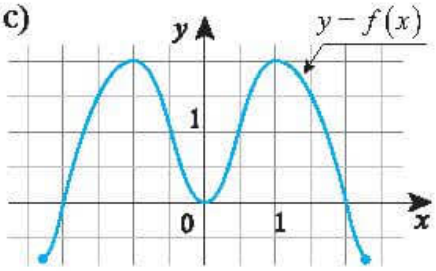
a)



b)



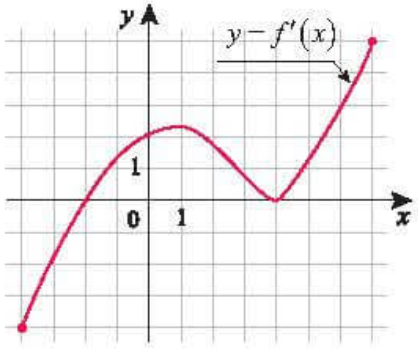
c)



10.57. Na rysunku przedstawiony jest wykres pochodnej f' funkcji f, gdy $x \in \langle -4; 7 \rangle$. Przeanalizuj wykres funkcji pochodnej i:

a) podaj te wartości argumentów, dla których funkcja f może mieć ekstremum,

b) dla argumentu, dla którego funkcja ma ekstremum, określ jego rodzaj.



10.58. Określ, czy funkcja f określona i różniczkowalna w podanym przedziale ma w tym przedziale ekstremum lokalne, gdy:

a) $f(x)=x^2-2x$, $(0;4)$,

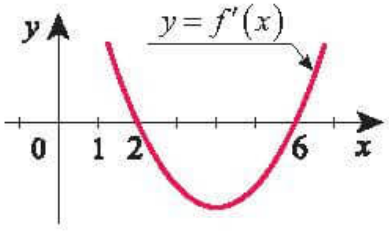
b) $f(x)=-x^2+3x-1$, $(-4;0)$,

c) $f(x)=x^3-3x^2$, $(10;20)$,

d) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $(-1;1)$.

Jeśli funkcja ma ekstremum, to określ jego rodzaj.

10.59. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu pochodnej funkcji f oraz tabelkę, w której podano wartości funkcji f dla wybranych argumentów. Podaj wartości ekstremów lokalnych funkcji f.



x	2	6
$f(x)$	3	–4

10.60. Wyznacz ekstrema funkcji f, gdy:

a) $f(x)=8x^3-12x^2+6x+10$,

b) $f(x)=3x^5-5x^3$,

c) $f(x)=3x(x-5)^2$,

d) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3$.

10.61. Wyznacz ekstrema funkcji f, gdy:

a) $f(x)=\frac{x^2+x+9}{x+1}$,

b) $f(x)=\frac{2+x-x^2}{x-1}$,

c) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$,

d) $f(x)=\frac{x^2+x-4}{x^2+x-2}$.

10.62. Wyznacz ekstrema funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{gdy } x\le 2 \\ 4x-4, & \text{gdy } x>2 \end{cases}$,

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{gdy } x\le 2 \\ -\frac{1}{2}x+4, & \text{gdy } x>2 \end{cases}$.

10.63. D Uzasadnij, że funkcja f określona wzorem $f(x)=\begin{cases} -x+3, & \text{gdy } x<2 \\ 3, & \text{gdy } x=2 \\ x^2-4x+3, & \text{gdy } x>2 \end{cases}$ ma w punkcie $x_0=2$ maksimum lokalne.

10.64. Dla jakiej wartości parametru m funkcja określona wzorem $f(x)=mx^3+6x^2+12x-8$ ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0=2$? Określ rodzaj tego ekstremum.

10.65. D Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3+7$ nie ma ekstremum.

10.66. Zbadaj monotoniczność i wyznacz ekstrema funkcji f, gdy:

a) $f(x)=x^3-3x+3$, b) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$, c) $f(x)=x+1+\frac{1}{x}$,

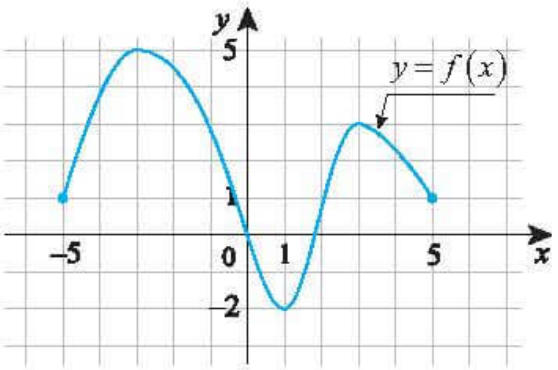
d) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$, e) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

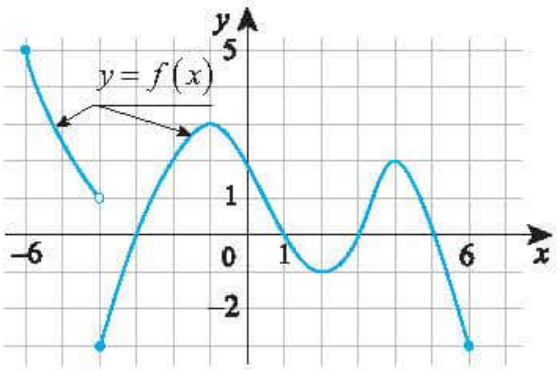
10.67. D Wykaż, że jeżeli $x>2$, to $x^3-2x+2>0$.

Najmniejsza i największa wartość funkcji – zastosowania

Ćwiczenie 43. Przeanalizuj wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle a;b\rangle$ i podaj jej wartość najmniejszą y_{MIN} oraz jej wartość największą y_{MAX}.

a) $\langle a;b\rangle=\langle -5;5\rangle$, b) $\langle a;b\rangle=\langle -6;6\rangle$.





Wyznaczanie najmniejszej ($y_{\min}$ lub y_{MIN}) albo największej ($y_{\max}$ lub y_{MAX}) wartości funkcji ma bardzo duże zastosowanie w matematyce, a także w innych dziedzinach wiedzy. Pozwala obliczyć np. odległość punktu od krzywej (w fizyce np. odległość komety od orbity Ziemi), wyznaczać zbiór wartości funkcji, obliczać liczbę pierwiastków równań, szacować produkcję, przy której koszty są najmniejsze itp. Zastosowaniami w geometrii zajmiemy się w klasie czwartej.

Przykład 28. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2-12x+5$ w przedziale $\langle -2;2\rangle$.

Rozwiązanie

1° Obliczamy wartości funkcji f na końcach przedziału $\langle -2;2\rangle$.

$$f(-2)=(-2)^3+\frac{9}{2}\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+5=39,$$

$$f(2)=2^3+\frac{9}{2}\cdot 2^2-12\cdot 2+5=7.$$

2° Badamy, czy funkcja f może mieć ekstrema lokalne w przedziale $(-2; 2)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 + 9x - 12 = 0$$

$$x_1 = -4, \; x_2 = 1.$$

$-4 \notin (-2; 2)$
$1 \in (-2; 2)$

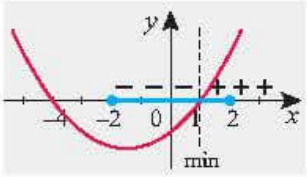
3° Badamy, czy w punkcie $x_0 = 1$ funkcja f ma ekstremum i obliczamy jego wartość.

$x_0 = 1$, więc $y_{\min} = f(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 5 = -1{,}5.$

$x \in (-2; 1)$, to $f'(x) < 0$

$x \in (1; 2)$, to $f'(x) > 0$

W punkcie $x_0 = 1$ funkcja f ma minimum lokalne.



4° Porównujemy wartości: $\left.\begin{array}{l} f(-2) = 39 \\ f(1) = -1{,}5 \\ f(2) = 7 \end{array}\right\}$, zatem $\underbrace{f(1)}_{y_{MIN}} < f(2) < \underbrace{f(-2)}_{y_{MAX}}$.

$y_{MIN} = f(1) = -1{,}5$ to najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$,

$y_{MAX} = f(-2) = 39$ to największa wartość funkcji f w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$.

Odp.: $y_{MIN} = f(1) = -1{,}5$, $y_{MAX} = f(-2) = 39$.

Ćwiczenie 44. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale, gdy: **a)** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $\langle -2; 3 \rangle$, **b)** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$, $\langle -1; 4 \rangle$.

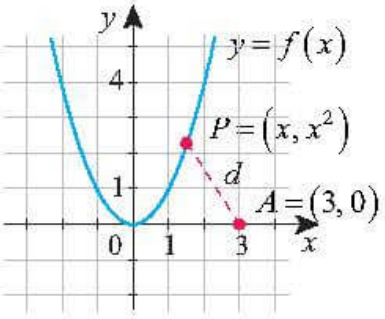
Przykład 29. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^2$. Wyznacz współrzędne punktu P znajdującego się na wykresie funkcji f, który leży najbliżej punktu $A = (3, 0)$.

Rozwiązanie

Punkt P leży na wykresie funkcji f, więc $P = (x, x^2)$.

$d(x) = |AP| = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2 - 0)^2}$, skąd $d(x) = \sqrt{g(x)}$

$d(x) = \sqrt{\underbrace{x^4 + x^2 - 6x + 9}_{g(x)}}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$ i $g(x) \geq 0$.



Obliczamy pochodną funkcji d.

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x), \text{ gdy } g(x) > 0.$$

$$d'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}\cdot\left(4x^3+2x-6\right)=\frac{(x-1)\left(2x^2+2x+3\right)}{\sqrt{x^4+x^2-6x+9}}$$

$g'(x)=0$, gdy $(x-1)\cdot\left(2x^2+2x+3\right)=0$

Równanie $2x^2+2x+3=0$ nie ma rozwiązania ($\Delta<0$).

$x-1=0$ lub $2x^2+2x+3=0$

$x=1$

$x\in(-\infty;1)$, to $g'(x)<0$

$x\in(1;+\infty)$, to $g'(x)>0$

więc $y_{\min}=g(1)=1^4+1^2-6\cdot1+9=5$.

$x_p=1$, więc $y_p=f(1)=1$, wtedy $d_{MIN}=d(1)=\sqrt{g(1)}=\sqrt{5}$.

Odp.: $P=(1,1)$.

Powyższy przykład można rozwiązać, korzystając z tego, że funkcja $d(x)=\sqrt{g(x)}$ ma najmniejszą wartość dla tych x, dla których najmniejszą wartość ma funkcja g.

Ćwiczenie 45. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^2+1$. Wyznacz współrzędne punktu P znajdującego się na wykresie funkcji f, który leży najbliżej punktu $A=(-3,1)$.

Przykład 30. Wyznacz zbiór wartości Y_f funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{6x}{x^2+1}$.

Rozwiązanie

$D_f=\boldsymbol{R}$

$x^2+1\neq0$, gdy $x\in\boldsymbol{R}$

I sposób

Określamy, czy równanie $\frac{6x}{x^2+1}=m$, gdy $m\in\boldsymbol{R}$, ma rozwiązanie.

$$\frac{6x}{x^2+1}=m \quad /\cdot\left(x^2+1\right)$$

$$\otimes \qquad mx^2-6x+m=0$$

Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór tych wartości parametru m, dla których równanie $\otimes$ ma rozwiązanie.

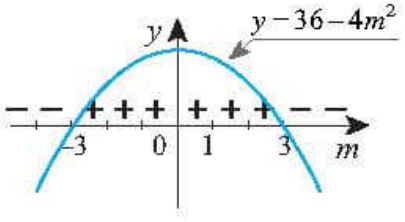
1° $m=0$, to $-6x=0$, więc równanie $\otimes$ ma rozwiązanie.

2° $m\neq0$, więc równanie $\otimes$ ma rozwiązanie, gdy $\Delta\geq0$.

$\Delta=36-4m^2$.

$36-4m^2\geq0 \Leftrightarrow m\in\langle-3;3\rangle$.

$0\in\langle-3;3\rangle$, więc $\boldsymbol{Y_f=\langle-3;3\rangle}$.



II sposób

Zbiór wartości funkcji odczytamy ze szkicu wykresu.

W tym celu obliczamy najmniejszą i największą wartość funkcji f w zbiorze $\boldsymbol{R}$ oraz granice na końcach przedziału $(-\infty; +\infty)$.

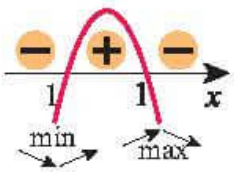
$$f'(x)=\frac{6\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0$$

$$x_1=-1,\ x_2=1$$

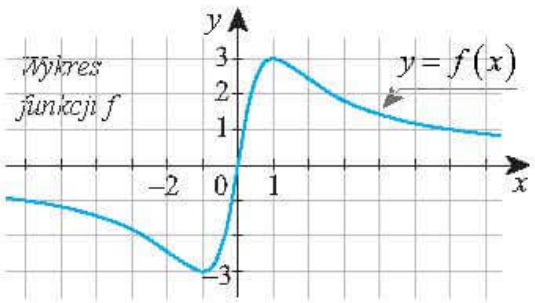
$$\left.\begin{array}{l} x\in(-\infty;-1), \text{ to } f'(x)<0 \\ x\in(-1;1), \text{ to } f'(x)>0 \end{array}\right\} \quad y_{\min}=f(-1)=-3.$$

$$\left.\begin{array}{l} x\in(-1;1), \text{ to } f'(x)>0 \\ x\in(1;+\infty), \text{ to } f'(x)<0 \end{array}\right\} \quad y_{\max}=f(1)=3.$$



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x^2+1}=0 \text{ i } \lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2+1}=0,$$

$0\in\langle -3, 3\rangle$, więc $Y_f=\langle -3; 3\rangle$.



Ćwiczenie 46. Wyznacz zbiór wartości Y_f funkcji f określonej wzorem $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2+4}$.

Przykład 31. Określ liczbę pierwiastków równania $x^3-6x^2+9x-6=0$.

Rozwiązanie

Liczba pierwiastków równania $x^3-6x^2+9x-6=0$ jest równa liczbie miejsc zerowych funkcji $f(x)=x^3-6x^2+9x-6$. Aby to określić:

1° obliczamy granice na końcach przedziału $(-\infty; +\infty)$, bo $D_f=\boldsymbol{R}$,

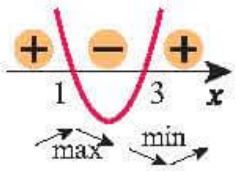
2° obliczamy największą i najmniejszą wartość funkcji f w zbiorze $\boldsymbol{R}$,

3° szkicujemy przybliżony wykres funkcji f.

Ad. 1° $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-6x^2+9x-6\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-6x^2+9x-6\right)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)=+\infty$$

Ad. 2° $f'(x)=\left(x^3-6x^2+9x-6\right)'=3x^2-12x+9$



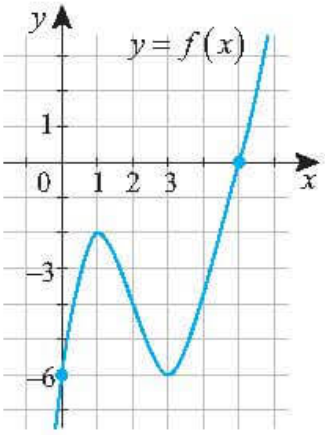
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \quad /:3$

$x^2-4x+3=0$

$x_1=1,\ x_2=3$

$\left.\begin{array}{l} x\in(-\infty;1), \text{ to } f'(x)>0 \\ x\in(1;3), \quad \text{to } f'(x)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_{\max}=f(1)=-2$

$\left.\begin{array}{l} x\in(1;3), \quad \text{to } f'(x)<0 \\ x\in(3;+\infty), \text{ to } f'(x)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_{\min}=f(3)=-6$



Ad. 3° Obliczamy wartość $f(0)=-6$ i szkicujemy wykres funkcji f.

Z wykresu odczytujemy, że funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

Odp.: Równanie $x^3-6x^2+9x-6=0$ ma jeden pierwiastek.

Ćwiczenie 47. Określ liczbę pierwiastków równania:

a) $2x^3+3x^2+6x-2=0$, **b)** $x^4+2x^2+3=0$.

Odpowiedzi do ćwiczeń

43. a) $y_{MIN}=f(1)=-2$, $y_{MAX}=f(-3)=5$, **b)** $y_{MIN}=f(-4)=f(6)=-3$, $y_{MAX}=f(-6)=5$.

44. a) $y_{MIN}=f(-2)=-34$, $y_{MAX}=f(3)=16$, **b)** $y_{MIN}=f(3)=-25$, $y_{MAX}=f(-1)=7$.

45. $P=(-1,2)$. **46.** $Y_f=\left\langle -\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right\rangle$. **47. a)** Jeden pierwiastek, **b)** zero pierwiastków.

Zadania utrwalające

10.68. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale, gdy:

a) $f(x)=x^3-3x^2-24x$ i $x\in\langle 0;6\rangle$, **b)** $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$ i $x\in\langle -1;2\rangle$,

c) $f(x)=5+2x^2-x^4$ i $x\in\langle -2;2\rangle$, **d)** $f(x)=x^3-3x^2+3x$ i $x\in\langle 0;4\rangle$.

10.69. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale, gdy:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ i $x\in\langle 3;4\rangle$, **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ i $x\in\langle -1;1\rangle$,

c) $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+2)^2}$ i $x\in\langle -1;1\rangle$, **d)** $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x^2+2}x$ i $x\in\langle -1;0\rangle$.

10.70. Wyznacz współrzędne punktu P znajdującego się na wykresie funkcji f, który leży najbliżej punktu A, gdy:

a) $f(x)=x^2-2$ i $A=(-3,-2)$, **b)** $f(x)=-x^2+1$ i $A=(3,1)$.

10.71. Wyznacz zbiór wartości Y_f funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, **b)** $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$, **c)** $f(x)=\frac{x^2-4x}{x^2+2}$, **d)** $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

10.72. Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów pierwiastków równania $x^2+(m-3)x+m-5=0$ osiąga wartość najmniejszą?

10.73. Dla jakich wartości parametru p suma odwrotności kwadratów pierwiastków równania $x^2-2\sqrt{2}x+p^2+1=0$ osiąga wartość największą?

10.74. Wydajność pracy pewnego robotnika zmienia się w ciągu 8-godzinnego dnia pracy. Zależność wydajności od czasu pracy t (w godzinach) określa funkcja $f(t)=500+3t+4t^2-t^3$. O której godzinie wydajność robotnika jest największa, jeśli rozpoczyna on pracę o godzinie 7^{00}?

10.75. Przy jakiej wielkości produkcji zysk przedsiębiorstwa będzie największy, jeżeli funkcja kosztu K w zależności od wielkości produkcji x wyrobów określona jest wzorem $K(x)=-\frac{1}{30}x^2+3x+600$?

10.76. W pewnym zakładzie produkowane są podzespoły do dźwigów. Całkowity koszt K wyprodukowania x sztuk podzespołów określony jest wzorem $K(x)=x^3+100x+2000$. Dla jakiej liczby x podzespołów koszt P wyprodukowania jednego podzespołu będzie najmniejszy? Oblicz wartość kosztu P, gdzie $P(x)=\frac{K(x)}{x}$.

10.77. Koszt całkowity K wyprodukowania x jednostek pewnego wyrobu określony jest wzorem $K(x)=0,01x^3+10x+160$. Ile sztuk tego wyrobu powinno się wytwarzać, by produkcja była najbardziej opłacalna?

10.78. Wyznacz ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{x^3+2}{x}$ i spośród zdań oznaczonych cyframi **1**, **2** i **3** wskaż zdania prawdziwe.

1 Nierówność $f(x)\geq 3$ jest spełniona, gdy $x\in(0;+\infty)$.

2 Nierówność $f(x)\geq 3$ jest spełniona, gdy $x\in(-\infty;0)$.

3 Nierówność $f(x)\geq 3$ jest spełniona, gdy $x=0$.

10.79. Punkt P_1 o dodatnich współrzędnych leży na hiperboli o równaniu $y=\frac{1}{x}$. Punkt P_2 jest obrazem punktu P_1 w symetrii względem punktu $O=(0,0)$. Funkcja d zmiennej x określa kwadrat odległości punktów P_1 i P_2. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji d.

10.80. Określ liczbę pierwiastków równania:

a) $x^3+5x^2+x-2=0$, **b)** $x^4+4x^3-8x^2-1=0$, **c)** $x^5+5x^3+1=0$.

10.81. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=(x-1)^2\cdot\sqrt{x^2-2x+3}$ w przedziale $\langle 0;3\rangle$.

Zestaw powtórkowy

1. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Funkcja $f(x)=x^4+4x^3$ jest malejąca w przedziale:

A. $(-\infty;+\infty)$, **B.** $(-\infty;-3)$, **C.** $(-3;0)$, **D.** $(0;+\infty)$.

2. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{1}{(x+5)^3}$, gdzie $x\in R\setminus\{-5\}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Styczna do funkcji f poprowadzona w punkcie x_0 jest nachylona do osi x pod kątem:

rozwartym, gdy $x_0=-1$	P	F
ostrym, gdy $x_0=-6$	P	F

3. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Jeżeli funkcja $f(x)=mx-x^4$ ma ekstremum lokalne w punkcie $x_0=2$, to wartość parametru m jest równa:

A. $m=-32$, **B.** $m=0$, **C.** $m=8$, **D.** $m=32$.

4. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\sqrt{4x^2-3}$ w punkcie $x_0=1$ jest równy:

A. $\frac{1}{2}$, **B.** 1, **C.** 2, **D.** 4.

5. *Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.*

Najmniejsza wartość funkcji $f(x)=x^3-3x$ w przedziale $\langle 0;2\rangle$ jest równa:

A. -2, **B.** 0, **C.** 1, **D.** 2.

Odpowiedzi i wskazówki

1. Funkcja wykładnicza

Potęga o wykładniku rzeczywistym

1.1. **a)** 5, **b)** $-\frac{1}{12}$, **c)** $\frac{7}{4}$, **d)** 2, **e)** 125, **f)** 10,5.

1.2. **a)** $\frac{1}{4}\sqrt{x}$, **b)** m^3-n, **c)** $a-b$, **d)** $\sqrt{3}+\sqrt{a}$.

1.3. **a)** „>", **b)** „>", **c)** „>", **d)** „=". *Wskazówka.* **b)** $3^{22}>3^{17}$, **c)** $5^{\frac{74}{3}}>5^{18}$.

1.4. **a)** $a^{\frac{3}{4}}$, **b)** $a^{-4\sqrt{2}}$, **c)** 1, **d)** $\left(\frac{3}{2}\right)^x$, **e)** $a\cdot b^{-1}$, **f)** a^9, **g)** 2^{x+1}.

1.6. *Wskazówka.* Patrz przykład 5. Zauważ, że otrzymasz równanie: **a)** $x^3+3x-4=0$, **b)** $x^3-6x-40=0$.

1.7. **a)** $2^{\sqrt{2}+1}$, **b)** $2^{2\sqrt{2}}$, **c)** 2^2, **d)** $2^{2-2\sqrt{2}}$, **e)** $2^{\sqrt{2}-1}$, **f)** $2^{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}$, **g)** $2^{2\sqrt{2}}$, **h)** $2^{4\sqrt{2}-2}$.

1.8. **a)** 2, **b)** $\frac{1}{3}$, **c)** 2, **d)** 9, **e)** $\frac{1}{8}$, **f)** 8.

1.9. **a)** $8-2\sqrt{15}$, **b)** $\frac{1}{8}$, **c)** 729.

1.11. **a)** $3^{2,5\sqrt{2}+2}$, **b)** 2^{46}, **c)** $6^{-\frac{23}{4}}$, **d)** $10^{-\frac{295}{16}}$.

1.12. **a)** 36,5, **b)** 6,7, **c)** 2,7, **d)** 6,1, **e)** 36,6.

Funkcja wykładnicza i jej własności

1.14. *Wskazówka.* **a)** $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$, $(0,1)$, $(1,4)$, **b)** $(-1,4)$, $(0,1)$, $\left(1,\frac{1}{4}\right)$, **c)** $\left(-1,\frac{2}{3}\right)$, $(0,1)$, $\left(1,\frac{3}{2}\right)$, **d)** $\left(-1,\frac{5}{2}\right)$, $(0,1)$, $\left(1,\frac{2}{5}\right)$.

1.15. **a)** $a=\frac{3}{5}$, funkcja malejąca, **b)** $a=\frac{5}{3}$, funkcja rosnąca, **c)** $a=1\frac{2}{3}$, funkcja rosnąca, **d)** $a=\frac{3}{5}$, funkcja malejąca.

1.16. **a)** $x\geq 0$, **b)** $x\leq 0$, **c)** $x>0$.

1.17. **a)** $3^{-2\sqrt{2}}<3^{-\frac{11}{4}}<3^0<3^{\frac{1}{2}}<3^{2\pi}$, **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{\pi}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$,

c) $6^{-\sqrt{6}}<6^{-2}<6^{-\sqrt{3}}<6^2<6^{\sqrt{6}}$, **d)** $(0{,}2)^{\frac{1}{2}}<(0{,}2)^{-\frac{1}{2}}<(0{,}2)^{-\sqrt{7}}<(0{,}2)^{-4}$.

1.18. **a)** $D_f=\boldsymbol{R}$, $Y_f=\boldsymbol{R}^+$, $(0,1)$, $D_g=\boldsymbol{R}$, $Y_g=\boldsymbol{R}^+$, $(0,1)$,

b) **1** $\left(\frac{3}{2}\right)^x>2^x$, gdy $x<0$, **2** $\left(\frac{3}{2}\right)^x\leq 2^x$, gdy $x\geq 0$.

1.19. **a)** $D_f=\boldsymbol{R}$, $Y_f=\boldsymbol{R}^+$, $(0,1)$, $D_g=\boldsymbol{R}$, $Y_g=\boldsymbol{R}^+$, $(0,1)$,

b) **1** $\left(\frac{1}{2}\right)^x\geq\left(\frac{1}{3}\right)^x$, gdy $x\geq 0$, **2** $\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^x$, gdy $x<0$.

1.20. **a)** $f(-2)=\frac{1}{4}$, $f(0)=1$, $f(\log_2 5)=5$, **b)** $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f\left(\sqrt{2}\right)=3^{\sqrt{2}}$, $f(2\log_3 4)=16$,

c) $f(-2)=25$, $f(\log_5 3)=\frac{1}{3}$, $f\left(\log_5 \frac{1}{12}\right)=12$, **d)** $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$, $f(\log_2 3)=\frac{1}{9}$, $f(\log_4 7)=\frac{1}{7}$.

Wskazówka. **c), d)** Skorzystaj z wzoru $a^{\log_a b}=b$.

1.21. **a)** $x=4$, **b)** $x=-4$, **c)** $x=-3$, **d)** $x=6$, **e)** $3+\log_2 3$, **f)** $x=4+\log_3 5$.

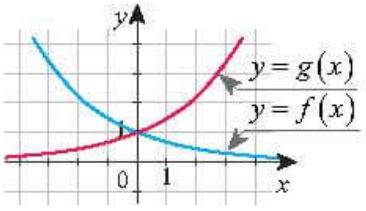
Wskazówka. **e)** $\log_2 24=\log_2\left(2^3\cdot 3\right)=\log_2 2^3+\log_2 3$.

1.22. **a)** $x=\frac{3}{2}$, **b)** $x=-6$, **c)** $x=\frac{2}{3}$, **d)** $x=-4$, **e)** $x=-\frac{3}{2}$, **f)** $x=-2+\log_{0,1} 2$.

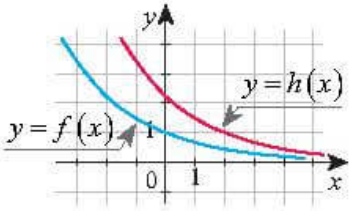
1.23. **a)** $m>0$, **b)** $m>1$, **c)** $m<2$, **d)** $m>3$, **e)** $m>-5$, **f)** $m\neq 0$.

Przekształcanie wykresu funkcji wykładniczej

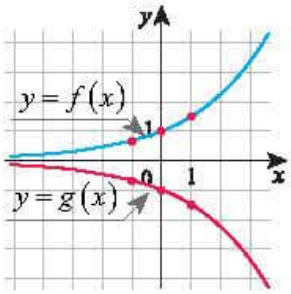
1.24. **a)** $a=\frac{2}{3}$, **b)**



c)

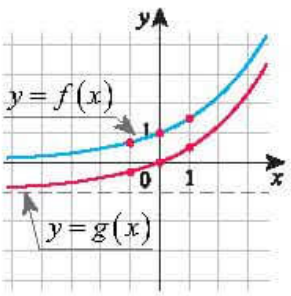


1.25. **a)**



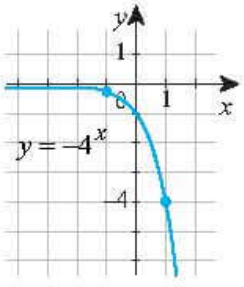
$Y_g=(-\infty;0)$

b)



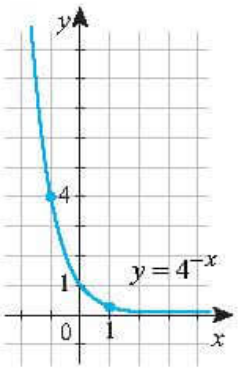
$Y_g=(-1;+\infty)$

1.26. **a)**



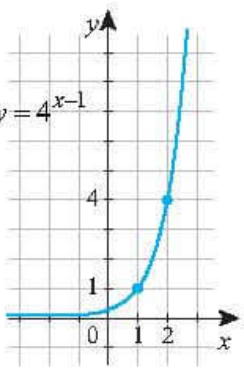
funkcja jest malejąca

b)



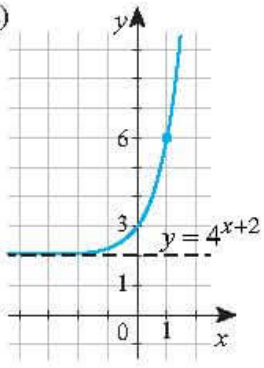
funkcja jest malejąca

c)



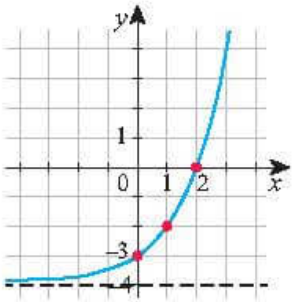
funkcja jest rosnąca

d)



funkcja jest rosnąca

1.27. **a)**



b) nie,

c) $x=2$,

d) $x=1$.

1.28. *Wskazówka:* **a)** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$, $f(0)=8$,

b) $f(x)=2^{x+4}$, $f(0)=16$,

c) $f(x)=(1{,}5)^{x-1}$, $f(0)=\frac{2}{3}$.

1.29. **a)** Wykres funkcji f przekształcono symetrycznie względem osi y,

b) wykres funkcji f przekształcono symetrycznie względem osi y,

c) wykres funkcji f przekształcono symetrycznie względem osi y,

d) wykres funkcji f przesunięto równolegle wzdłuż osi x o 2 jednostki w prawo.

1.30. **a)** $(0,1)$, **b)** $(0,1)$.

1.31. **a)** $(-3,2)$, **b)** $\left(2,\frac{1}{3}\right)$.

1.32. **a)** $x=-6$, **b)** $x=0$.

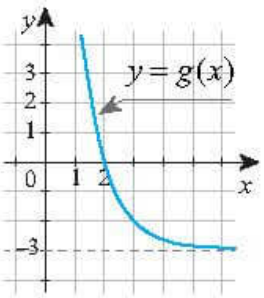
1.33. **a)** $x=0$, **b)** $x=-\frac{7}{3}$.

1.34. **1** – C, **2** – D, **3** – B, **4** – A.

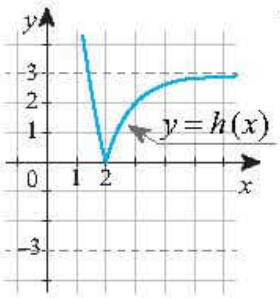
1.35. **a)** $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$, **b)** $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}-3$, **c)** $g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}-2$.

1.36. **a)** $\vec{u}=[-1,-3]$, **b)** $\vec{u}=[4,1]$, **c)** $\vec{u}=[-4,-2]$, **d)** $\vec{u}=[-6,0]$.

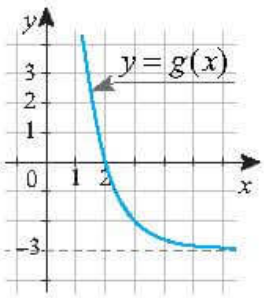
1.37. **a)**



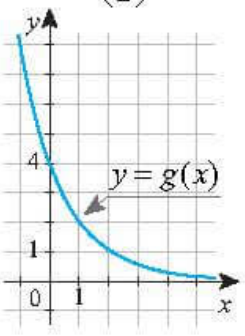
b)



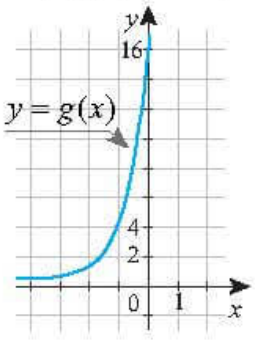
c)



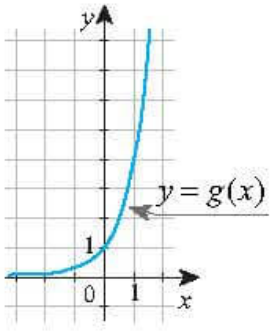
1.38. **a)** $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$,



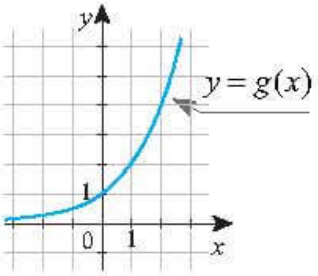
b) $g(x)=4^{x+2}$,



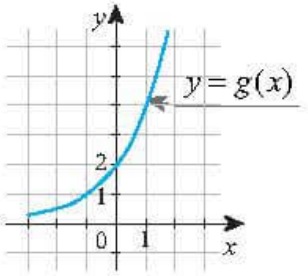
c) $g(x)=2^{2x}=4^{x}$,



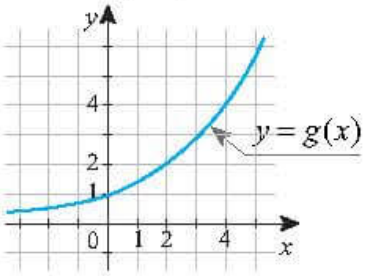
d) $g(x)=4^{\frac{x}{2}}=2^x$,



e) $g(x)=2\cdot 2^x=2^{x+1}$,



f) $g(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$.



1.39. **a)** $\vec{u}=[1,0]$, **b)** $\vec{u}=[-1,0]$, **c)** $\vec{u}=[-5,0]$, **d)** $\vec{u}=[0,-1]$, **e)** $\vec{u}=[-1,-1]$, **f)** $\vec{u}=[-3,4]$.

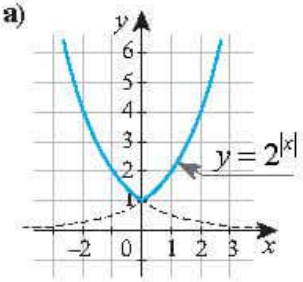
Wskazówka. **a)** $2^x \xrightarrow{S_y} 2^{-x} \xrightarrow{[1,0]} 2^{-x-1}$, **b)** $2^x \xrightarrow{S_x} -2^x \xrightarrow{[-1,0]} -2^{x+1}$,

c) $2^x \xrightarrow{S_y} 2^{-x} \xrightarrow{[-5,0]} 2^{-x+5}$, **d)** $2^x \xrightarrow{S_x} -2^x \xrightarrow{[0,-1]} -2^x-1$,

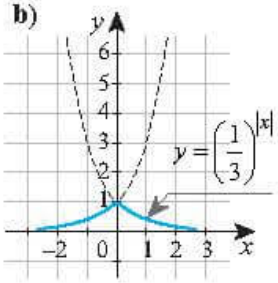
e) $2^x \xrightarrow{S_y} 2^{-x} \xrightarrow{[-1,0]} 2^{-x+1} \xrightarrow{[0,-1]} 2^{-x+1}-1$, **f)** $2^x \xrightarrow{S_x} -2^x \xrightarrow{[-3,4]} -2^{x-3}+4$,

gdzie S_x – symetria względem osi x, S_y – symetria względem osi y.

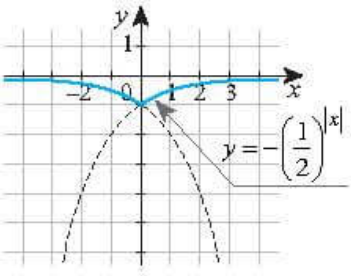
1.40. **a)**



b)



c)



Funkcja wykładnicza w zastosowaniach

1.41.

Nazwa towaru	Obecna cena	Wskaźnik rocznego wzrostu ceny	Cena po t latach
prześcieradło	29 zł	2%	$29\cdot(1,02)^t$
samochód	32 000 zł	10%	$32\,000\cdot(1,10)^t$
żyrandol	270 zł	7%	$270\cdot(1,07)^t$

1.42.

Obecna wielkość populacji	Czas podwojenia	Wzrost populacji po t latach
1 000	10 lat	$1\,000\cdot 2^{0,1t}$
1 000 000	25 lat	$100\,000\cdot 2^{0,04t}$
250 000	100 lat	$250\,000\cdot 2^{0,01t}$

1.43.

Pierwiastek promieniotwórczy	Czas połowicznego rozpadu	Obecna ilość materiału radioaktywnego	Wielkość materiału radioaktywnego po czasie t
ołów: ^{210}Pb	22 lata	10	$10\cdot(0,5)^{\frac{t}{22}}$ lat
polon: ^{210}Po	140 dni	100	$100\cdot(0,5)^{\frac{t}{140}}$ dni
tal: ^{209}Tl	2 minuty	500	$500\cdot(0,5)^{0,5t}$ minut

1.44. **a)** 400, **b)** 102 400, **c)** $100\cdot 2^{48}$. **1.45.** **a)** $y=1\,000\,000\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^t$, **b)** $y(3)=1\,953\,125$.

1.46. **a)** Ok. 11576, **b)** 2 miesiące. **1.47.** **a)** 30 000 zł, **b)** 10%, **c)** 24 300 zł, **d)** po 4 latach.

1.48. **a)** 100°C, **b)** ok. 67°C, **c)** tak, bo garnek z zupą osiągnie temperaturę ok. 30°C.

1.49. **a)** O cały ton, **b)** $220\cdot 2^{\frac{3}{12}}=220\sqrt[4]{2}$ Hz. *Wskazówka.* Wzór funkcji określającej częstotliwość dźwięku wydawanego przez klawisz odległy o t miejsc od klawisza A ma postać: $f(t)=220\cdot 2^{\frac{t}{12}}$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Odpowiedź	B	A	D	C	Kolejno: P, P, P, F	Kolejno: F, P, F	N – A

2. Funkcja logarytmiczna

Logarytm i jego własności

2.1. **a)** –3, **b)** 5, **c)** $\frac{5}{3}$, **d)** $\frac{3}{4}$, **e)** $\frac{5}{3}$, **f)** 2. **2.2.** **a)** 15, **b)** 30, **c)** $\frac{8}{3}$, **d)** $\frac{32}{3}$.

2.3. **a)** $x=-4$, **b)** $x=\frac{13}{8}$, **c)** $x=\sqrt{3}$, **d)** $x=\frac{\sqrt{2}}{32}$, **e)** $x=8$, **f)** $x=\frac{1}{4}$.

2.4. **a)** $x=5$, **b)** $x=25$, **c)** $x=64$, **d)** $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=9$. **2.5.** **a)** $\log_3 135$, **b)** $\log_{0,5}10$, **c)** $\log_2\left(6\sqrt{5}\right)$.

2.6. **a)** $x=8$, **b)** $x=100$, **c)** $x=0,001$. **2.7.** **a)** $a+1$, **b)** $1-a$, **c)** $3a+1$, **d)** $1-3a$.

2.8. **a)** $(0;1)$, **b)** $(1;2)$, **c)** $(2;3)$, **d)** $(-2;-1)$, **e)** $(1;2)$.

2.10. **a)** $2a+b$, **b)** $a-2b$, **c)** $\frac{1}{3}(a+b)$, **d)** $\frac{1}{a+2b}$. **2.11.** **a)** $\frac{1}{3}$, **b)** 0. **2.12.** **a)** Tak, **b)** nie, **c)** nie.

Funkcja logarytmiczna i jej własności

2.13. **a)** $f(x)=2^x$, **b)** $f(x)=\log_2 x$, **c)** $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, **d)** $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, **e)** $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$, **f)** $f(x)=\log_{\sqrt{2}} x$.

Wskazówka. **a)** $a^1=2$, **b)** $\log_a 2=1$, **c)** $a^{-1}=2$, **d)** $\log_a 3=-1$, **e)** $a^2=2$, **f)** $\log_a 2=2$.

2.14. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** tak.

2.15. **a)** $a=4$, **b)** $a=9$, **c)** $a=4$, **d)** $a=2$, **e)** $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, **f)** $a=125$.

2.16. **a)** $\log_4 0,1$, $\log_4\frac{1}{3}$, $\log_4 3$, $\log_4 5$, **b)** $\log_{\frac{1}{4}}5$, $\log_{\frac{1}{4}}3$, $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}$, $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{5}$,

c) $\log_{\frac{1}{3}}4$, $\log_{0,1}4$, $\log_5 4$, $\log_3 4$, **d)** $\log_3\frac{1}{4}$, $\log_5\frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$.

2.17. Np. **a)** $\left(\frac{3}{4},1\right)$, $\left(\frac{4}{3},-1\right)$, $(1,0)$, **b)** $(1,0)$, $(2,2)$, $(4,4)$, **c)** $(12,2)$, $(144,4)$, $(1,0)$, **d)** $(2,3)$, $(4,6)$, $(8,9)$.

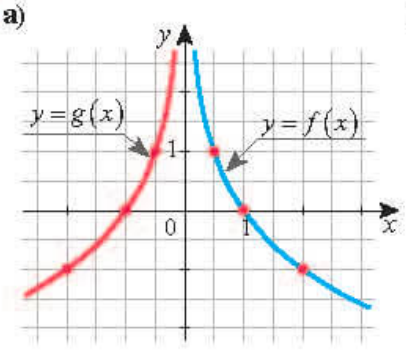
2.18. **a)** $D_f=(-\infty;0)$, **b)** $D_f=(-2;+\infty)$, **c)** $D_f=(5;+\infty)$. **2.19.** **a)** 21, **b)** 12.

2.20. **a)** **1** $m\in(2;+\infty)$, **2** $m\in\left(\frac{5}{3};2\right)$,

b) **1** $m\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$, **2** $m\in(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})$, **c)** **1** $m\in R^+$, **2** $m\in(-\infty;-1)$.

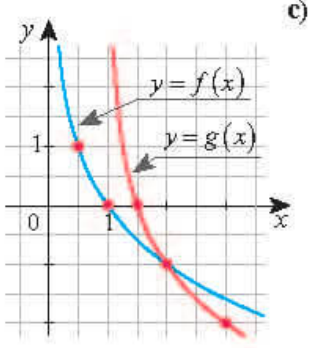
Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej

2.21. **a)**



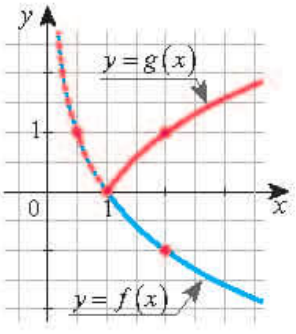
$D_g=R^-$

b)



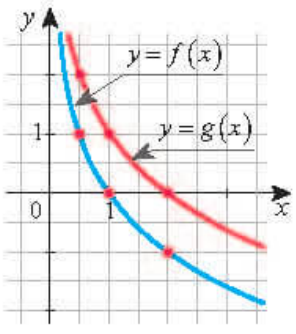
$D_g=(1;+\infty)$

c)



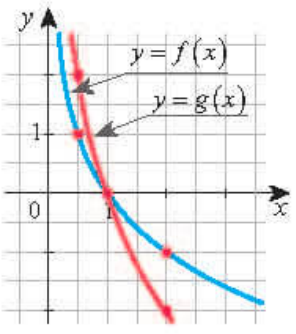
$D_g=R^+$

d)



$D_g=R^+$

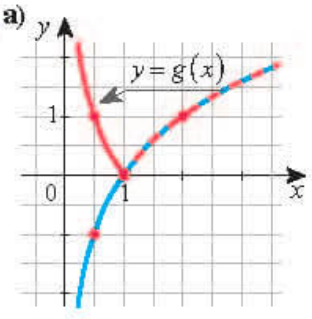
e)



$D_g=R^+$

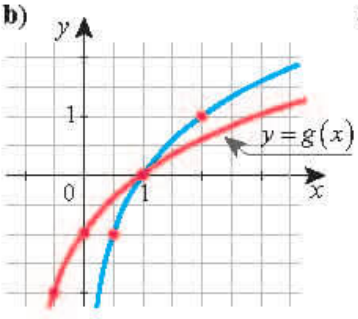
Wskazówka. **d)** $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}x=1+\log_{\frac{1}{2}}x$.

2.22. **a)**



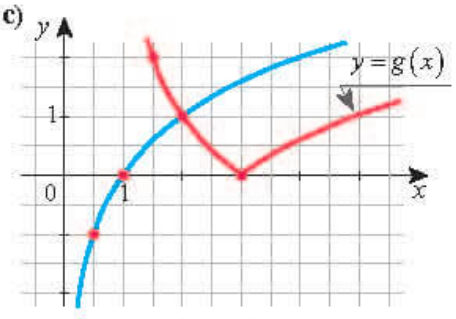
$Y_g=\langle 0;+\infty)$,
$g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

b)



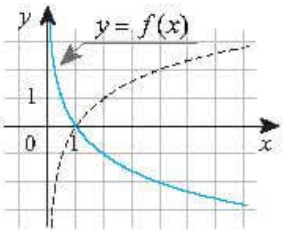
$Y_g=R$,
$g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

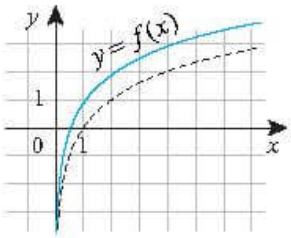
c)

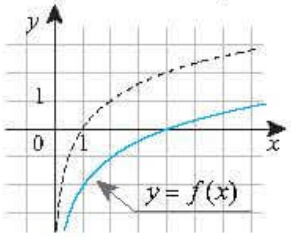


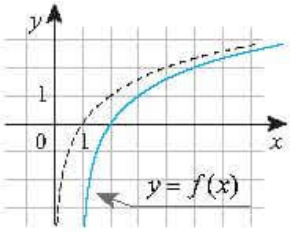
$Y_g=\langle 0;+\infty)$,
$g(x)=0 \Leftrightarrow x=3$.

2.23. **a)** $f(x)=-\log_2 x$, **b)** $f(x)=\log_2(2x)$, **c)** $f(x)=\log_2\frac{x}{4}$, **d)** $f(x)=\log_2(x-1)$,

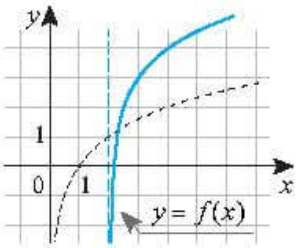


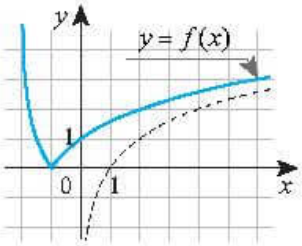






e) $f(x)=\log_2(x-2)+3$, **f)** $f(x)=\left|\log_2(x+2)\right|$.

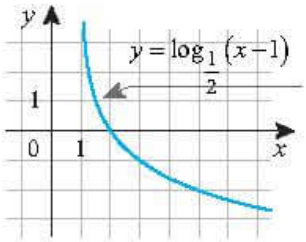




2.24. **a)** $f(x)=3\log_2 x+1$, **b)** $f(x)=6\log_2 x-5$.

2.25. **a)** $D_f=(1;+\infty)$, **b)** $Y_f=\boldsymbol{R}$, **c)** 5, **d)** $(1;3)$.

2.26. **a)** $x=-1$ lub $x=1$, **b)** $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.



Funkcja logarytmiczna w zastosowaniach

2.27. **a)** $f(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$, **b)** $\frac{1}{64}$mg lub 0,015 625 mg.

2.28. **a)** 10^3razy (1000 razy), **b)** 10^6razy (milion razy).

2.29. **a)** $A=10^{-2}$ cm, **b)** $A=1$ cm, **c)** $A=10^{0,7}$ cm, $A\approx 5$ cm, **d)** $A=10^{5,5}$ cm, $A\approx 316\,000$ cm, **e)** $A=10^5$ cm.

2.30. Głośność dźwięku wzrośnie o $10\log 3$, czyli o około 4,17 decybeli.

Wskazówka. $L(3I)-L(I)=10\log\frac{3I}{I_0}-10\log\frac{I}{I_0}=10\cdot\log\left(\frac{3I}{I_0}:\frac{I}{I_0}\right)$.

2.31. **a)** Nie, **b)** nie.

2.32. **a)** pH $\approx 2,9$, **b)** $10^{-6,6}$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Odpowiedź	B i D	D	C	B	T – B	P, P, P, F

3. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Miara łukowa kąta. Kąt jako miara obrotu

3.1.

$6°$	$9°$	$12°$	$15°$	$27°$	$36°$	$72°$	$80°$	$105°$	$310°$
$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{15}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3}{20}\pi$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{4}{9}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{31}{18}\pi$

3.2.

$\frac{5}{18}\pi$	$\frac{7}{18}\pi$	$\frac{5}{9}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{7}{9}\pi$	$\frac{35}{36}\pi$	$\frac{6}{5}\pi$	$\frac{8}{5}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{16}{9}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$50°$	$70°$	$100°$	$105°$	$140°$	$175°$	$216°$	$288°$	$315°$	$320°$	$330°$

3.3. a)

Miara stopniowa	$30°$	$45°$	$60°$	$20°$	$15°$	$90°$
Miara łukowa	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$

b)

Miara stopniowa	$120°$	$135°$	$150°$	$160°$	$180°$
Miara łukowa	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{8}{9}\pi$	π

c)

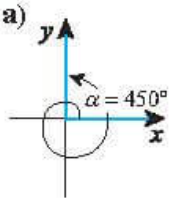
Miara stopniowa	$200°$	$210°$	$225°$	$240°$	$195°$	$270°$
Miara łukowa	$\frac{10}{9}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{13}{12}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$

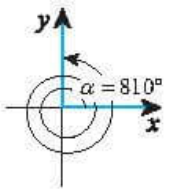
d)

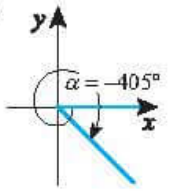
Miara stopniowa	$300°$	$330°$	$315°$	$340°$	$360°$
Miara łukowa	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{17}{9}\pi$	2π

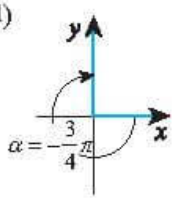
3.4. $\frac{4}{3}\pi$. **3.5.** **a)** $-15°$, **b)** $-45°$, **c)** $-225°$, **d)** $-540°$.

3.6. **a)** $-90°$, **b)** $-150°$, **c)** $-570°$, **d)** $-1020°$.

3.7. **a)** 

b) 

c) 

d) 

3.8. **a)** $40°, 130°, 200°, 120°, 350°$, **b)** $\frac{5}{3}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \frac{13}{12}\pi$.

3.9. Kolejno: IV, III, I, II, IV, III, II, II, na ujemnej półosi x, na dodatniej półosi y.

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

3.10. **a)** $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{2}$, **b)** $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$,
c) $\sin\alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, **d)** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

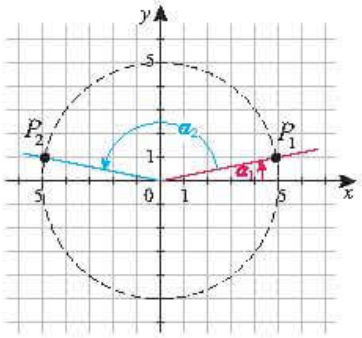
3.11. **a)** $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, **b)** $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$, $\operatorname{tg}\alpha = 5$,
c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, **d)** $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

3.12. **a)** $\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=1$, **b)** $\cos\frac{9\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{9\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}=1$.

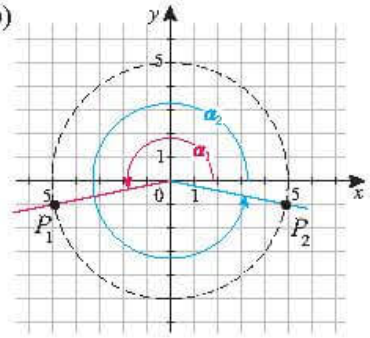
3.13. **a)** 0, **b)** 0, **c)** 0, **d)** $-\sqrt{2}$, **e)** -2, **f)** 0.

3.14. **a)** $-\frac{\sqrt{3}}{4}$, **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **c)** $9\sqrt{3}$, **d)** $-2\sqrt{3}$.

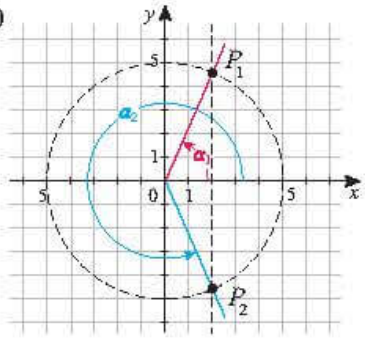
3.15. **a)**



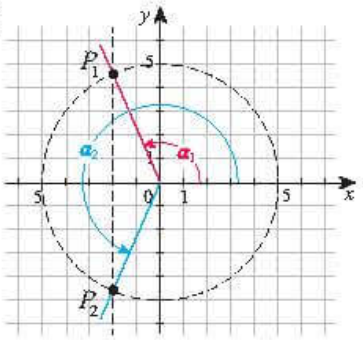
b)



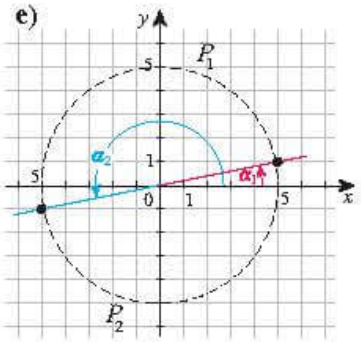
c)



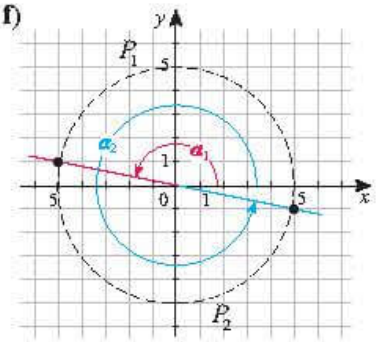
d)



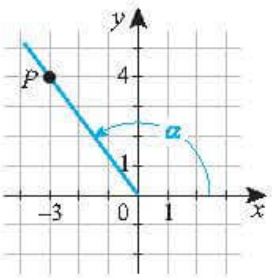
e)



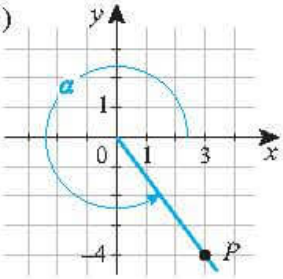
f)



3.16. **a)**



b)



Wartości funkcji trygonometrycznych wielokrotności kąta $\frac{\pi}{2}$

3.17. $\sin 2\pi=0$, $\cos 2\pi=1$, $\operatorname{tg}2\pi=0$, $\sin\frac{7}{2}\pi=-1$, $\cos\frac{7}{2}\pi=0$, $\operatorname{tg}\frac{7}{2}\pi$ – nie istnieje, $\sin 1000\pi=0$, $\cos 1000\pi=1$, $\operatorname{tg}1000\pi=0$, $\sin(-900^\circ)=\sin 180^\circ=0$, $\cos(-900^\circ)=-1$, $\operatorname{tg}(-900^\circ)=0$, $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=1$, $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=0$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$ – nie istnieje, $\sin(-180^\circ)=0$, $\cos(-180^\circ)=1$, $\operatorname{tg}(-180^\circ)=0$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ – nie istnieje.

3.18. **a)** kolejno: 0, 0, 0, **b)** 0, **c)** -1, **d)** 0, **e)** 1.

3.19. **a)** ćwiartka I, **b)** ćwiartka I, **c)** ćwiartka II, **d)** ćwiartka III, **e)** ćwiartka III, **f)** ćwiartka IV.

3.20. **a)** liczba ujemna, **b)** liczba ujemna, **c)** liczba dodatnia, **d)** liczba dodatnia, **e)** liczba ujemna, **f)** zero, **g)** liczba ujemna, **h)** liczba dodatnia.

3.21. **a)** $\sin\alpha > 0$, **b)** $\cos\alpha < 0$, **c)** $\sin\alpha > 0$, **d)** $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

3.22. **a)** $\frac{1}{2}\sin\alpha$, **b)** $4\operatorname{tg}\alpha$, **c)** $-2(\cos\alpha + 2\sin\alpha)$, **d)** $9\operatorname{tg}\alpha$. **3.23.** **a)** -1, **b)** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, **c)** 0, **d)** 0.

Wzory redukcyjne

3.24. **a)** $140^\circ = 180^\circ - 40^\circ$, **b)** $200^\circ = 180^\circ + 20^\circ$, **c)** $280^\circ = 360^\circ - 80^\circ$, **d)** $\frac{5}{6}\pi = \pi - \frac{\pi}{6}$, **e)** $\frac{5}{4}\pi = \pi + \frac{\pi}{4}$, **f)** $\frac{11}{6}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{6}$.

3.25. **a)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$, **b)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, **c)** $\frac{1}{2}$, **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, **e)** $1-\sqrt{3}$. **3.26.** **a)** 0, **b)** -1, **c)** $\sqrt{3}-2$, **d)** 0.

3.27. **a)** 0,97, **b)** –0,97, **c)** –18, **d)** 0,67, **e)** 0,57, **f)** –0,29, **g)** 2,25, **h)** –1,73.

3.28. Np.: **a)** $\alpha = 168^\circ$, $\alpha = 372^\circ$, $\alpha = -348^\circ$, $\alpha = -372^\circ$, **b)** $\alpha = 50^\circ$, $\alpha = 410^\circ$, $\alpha = -410^\circ$, $\alpha = -770^\circ$, **c)** $\alpha = 20^\circ$, $\alpha = 160^\circ$, $\alpha = -340^\circ$, $\alpha = -200^\circ$, **d)** $\alpha = 20^\circ$, $\alpha = 380^\circ$, $\alpha = -340^\circ$, $\alpha = -700^\circ$, **e)** $\alpha = 47^\circ$, $\alpha = 407^\circ$, $\alpha = -313^\circ$, $\alpha = -673^\circ$, **f)** $\alpha = 53^\circ$, $\alpha = 413^\circ$, $\alpha = -307^\circ$, $\alpha = -667^\circ$.

3.29. **a)** $\cos\alpha - \sin\alpha$, **b)** $-\sin\alpha\cos\alpha$, **c)** $-\operatorname{tg}^2\alpha$, **d)** $-\sin^2\alpha$, **e)** -1, **f)** $1-\cos^2\alpha$.

3.30. **a)** $\cos\alpha - \sin\alpha$, **b)** 0, **c)** $-\sin\alpha$, **d)** $\operatorname{tg}\alpha$.

3.32. **a)** $-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, **b)** $2\cos\alpha$, **c)** 1.

Wskazówka. **c)** $\alpha + \frac{\pi}{2} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ oraz $\alpha - \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ i $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

3.33. **a)** Nie, **b)** tak, **c)** tak, **d)** nie.

3.34. **a)** $\cos\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ lub $\cos\alpha = -0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$,

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ lub $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$,

c) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$ lub $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,

d) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ lub $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

3.35. **a)** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, **b)** $\sin\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, **c)** $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$,

d) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

3.36. **a)** $-\cos^2\alpha$, **b)** 1, **c)** $\frac{1}{\cos\alpha}$, **d)** $1-\operatorname{tg}^2\alpha$, **e)** $\frac{1}{\sin^2\alpha}$, **f)** 4.

3.38. **a)** Tak, $\cos\alpha\neq 0$, **b)** tak, $\sin\alpha\neq 0$ i $\cos\alpha\neq 0$, **c)** tak, $\cos\alpha\neq 0$, **d)** tak, $\cos\alpha\neq 0$,
e) nie, $\cos\alpha\neq 0$, **f)** nie, $\cos\alpha\neq 0$, **g)** tak, $\sin\alpha\neq 0$ i $\cos\alpha\neq 0$, **h)** nie, $\cos\alpha\neq 0$.

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

3.39. **a)** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, **b)** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, **c)** $2-\sqrt{3}$, **d)** $\sqrt{2}-1$, **e)** $\frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$, **f)** $\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$.

Wskazówka. $7{,}5^\circ\cdot 2=15^\circ$.

3.40. **a)** 1, **b)** 2, **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.41. **a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **c)** $-\frac{1}{2}$, **d)** -1.

3.42. **a)** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{30}}{6}$, **b)** $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3.43. **a)** 0, **b)** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, **c)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, **d)** $\sqrt{3}$.

3.44. **a)** 0, **b)** $\frac{7}{25}$, **c)** 0, **d)** $\frac{24}{7}$.

3.45. **a)** $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$, **b)** $-\frac{7}{9}$, **c)** $\frac{4\sqrt{2}}{7}$, **d)** $\frac{10\sqrt{2}}{27}$. *Wskazówka.* **d)** $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)$.

3.46. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** tak, **d)** tak.

Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

3.47. **a)** $4\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$, **b)** $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$, **c)** $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$,
d) $-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$, **e)** $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$, **f)** $4\sin 2\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$,
g) $4\cos\alpha\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$, **h)** $2\sin^2(\alpha+45^\circ)$, **i)** $\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ)$.

3.48. **a)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$, **b)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **c)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$, **d)** $\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

3.49. *Wskazówka.* $L=\sin 47^\circ+\sin 61^\circ-\sin 11^\circ-\sin 25^\circ=2\sin 54^\circ\cdot\cos 7^\circ-2\sin 18^\circ\cos 7^\circ=$

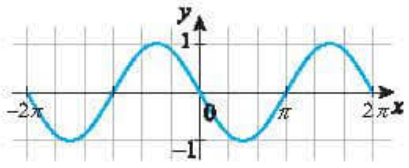
$=2\cos 7^\circ(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)=2\cos 7^\circ\cdot 2\sin 18^\circ\cos 36^\circ\cdot\frac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ}=$

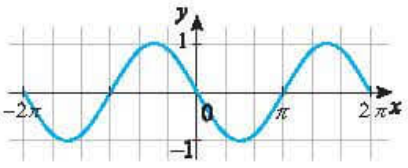
$=\frac{2\cos 7^\circ}{\cos 18^\circ}\cdot\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ=\frac{\cos 7^\circ}{\cos 18^\circ}\cdot\sin 72^\circ=\frac{\cos 7^\circ}{\cos 18^\circ}\cdot\cos 18^\circ.$

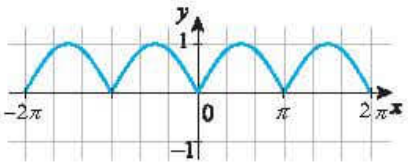
3.50. Tak: **a)**, **b)**, **c)**, **d)**, **e)**, **f)**.

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

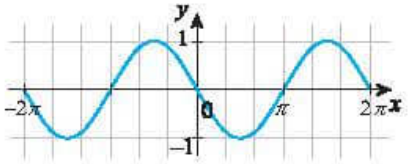
3.51. **a)** $g(x)=-\sin x$, $Y_g=\langle -1;1\rangle$, **b)** $g(x)=-\sin x$, $Y_g=\langle -1;1\rangle$, **c)** $g(x)=|\sin x|$, $Y_g=\langle 0;1\rangle$,

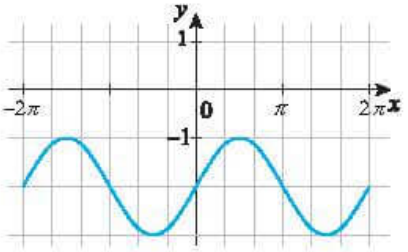


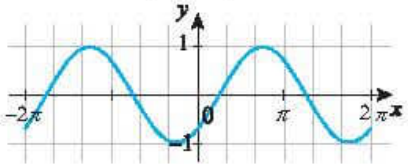




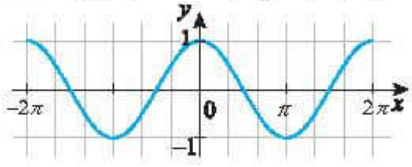
d) $g(x)=-\sin x$, $Y_g=\langle -1;1\rangle$, **e)** $g(x)=\sin x-2$, $Y_g=\langle -3;-1\rangle$, **f)** $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $Y_g=\langle -1;1\rangle$.

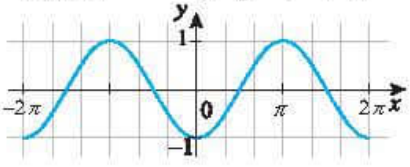


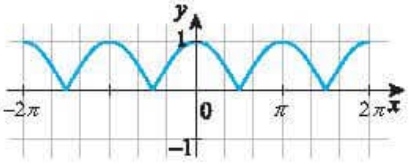




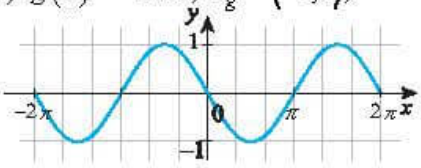
3.52. **a)** $g(x)=\cos x$, $Y_g=\langle -1;1\rangle$, **b)** $g(x)=-\cos x$, $Y_g=\langle -1;1\rangle$, **c)** $g(x)=|\cos x|$, $Y_g=\langle 0;1\rangle$,

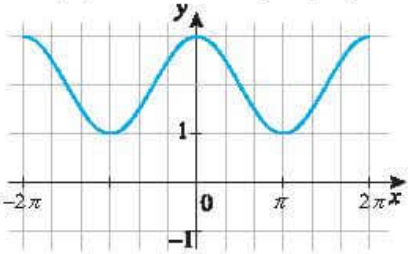


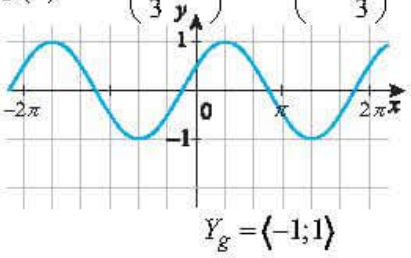




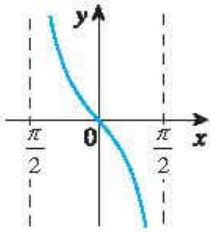
d) $g(x)=-\sin x$, $Y_g=\langle -1;1\rangle$, **e)** $g(x)=\cos x+2$, $Y_g=\langle 1;3\rangle$, **f)** $g(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

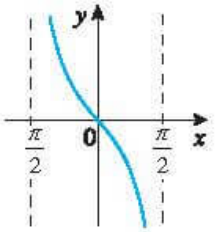


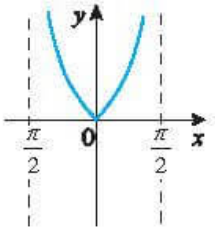




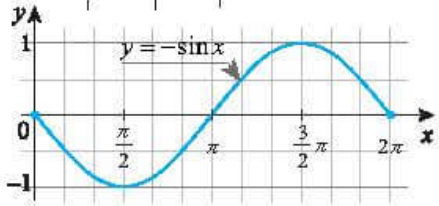
3.53. **a)** $g(x)=-\operatorname{tg} x$, $Y_g=\boldsymbol{R}$, **b)** $g(x)=-\operatorname{tg} x$, $Y_g=\boldsymbol{R}$, **c)** $g(x)=|\operatorname{tg} x|$, $Y_g=\langle 0;+\infty)$.



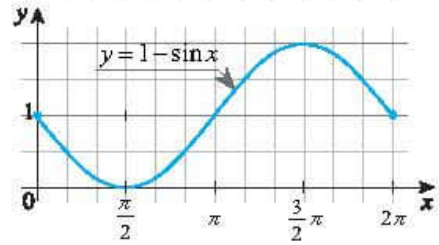




3.54. **a)** **1** $f(x)=0$, gdy $x\in\{0,\pi,2\pi\}$, **2** $y_{MIN}=-1$, gdy $x=\frac{\pi}{2}$,
3 $y=-\frac{1}{2}$, gdy $x=\frac{\pi}{6}$ lub $x=\frac{5}{6}\pi$.

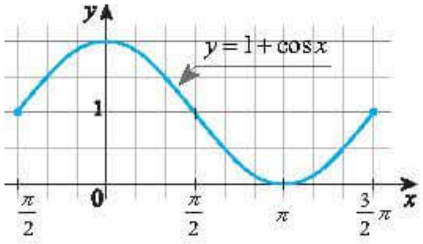


b) **1** $f(x)=0$, gdy $x=\frac{\pi}{2}$, **2** $y_{MIN}=0$, gdy $x=\frac{\pi}{2}$,
3 $y=-\frac{1}{2}$ – nie ma takiego x.



3.55. **a)** $Y_f = \langle 0; 2\rangle$, **b)** $y = 1$, gdy $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$,

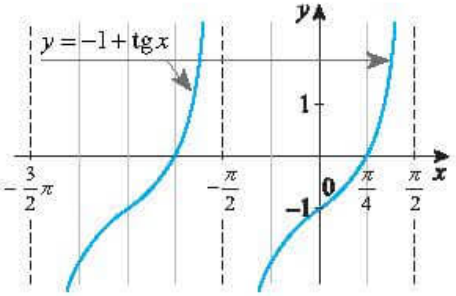
c) funkcja malejąca w przedziale $\langle 0; \pi\rangle$.



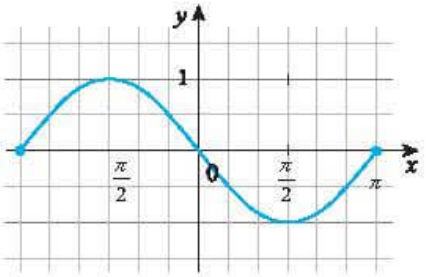
3.56. **a)** $y = 0$, gdy $x = -\frac{3}{4}\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4}$,

b) $y = -1$, gdy $x = -\pi$ lub $x = 0$,

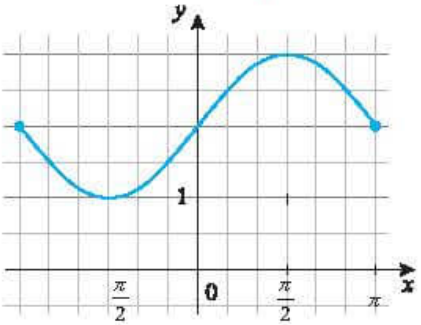
c) $y > 0$, gdy $x \in \left(-\frac{3}{4}\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.



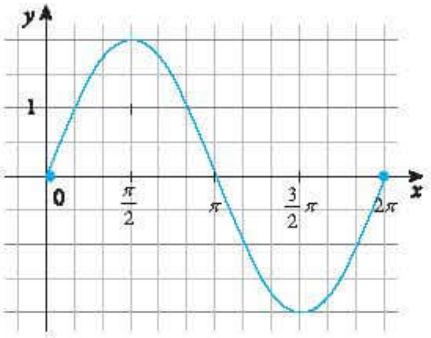
3.57. **a)**



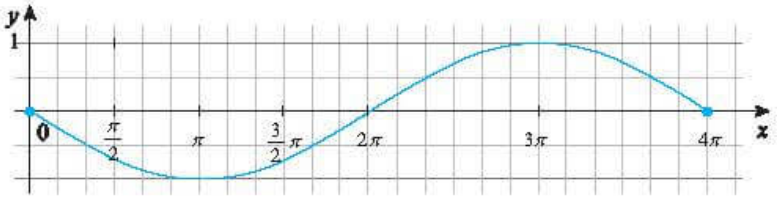
b)



c)



d)



Równania trygonometryczne

3.58. **a)** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, **b)** $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

c) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, **d)** $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.59. **a)** $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, **b)** $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, **c)** $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,

d) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.60. **a)** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, **b)** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, **c)** $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, **d)** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.61. **a)** 3, **b)** 3, **c)** 2, **d)** 0, **e)** 0, **f)** 2, **g)** 0.

3.62. $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi$, **a)** $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$, **b)** $-\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\pi}{3}$, **c)** $\frac{16}{3}\pi$, $\frac{17}{3}\pi$, **d)** $-\frac{8}{3}\pi$, $-\frac{7}{3}\pi$.

Wskazówka. **c)** $\frac{4}{3}\pi+4\pi$, $\frac{5}{3}\pi+4\pi$, **d)** $-\frac{2}{3}\pi-2\pi$, $-\frac{\pi}{3}-2\pi$.

3.63. a) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$, **c)** $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$.

Wskazówka. **a)** $\sin^2 x=1$, więc $\sin x=1$ lub $\sin x=-1$.

3.64. a) $x=\frac{k\pi}{6}$, $k\in Z$, **b)** $x=\frac{2k\pi}{7}$, $k\in Z$, **c)** $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$,

d) $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ lub $x=\frac{17}{24}\pi+k\pi$, $k\in Z$, **e)** $x=-\frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$ lub $x=-\frac{5}{36}\pi+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in Z$,

f) $x=-\frac{3}{2}\pi+3k\pi$, $k\in Z$.

3.65. a) $x=\frac{\pi}{2}\cdot k$ lub $x=0{,}1\cdot\pi+0{,}2\cdot k\pi$, $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{2}\cdot k$ lub $x=0{,}2\cdot k\pi$, $k\in Z$, **c)** $x=k\cdot\frac{\pi}{4}$, $k\in Z$,

d) $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{7}{18}\pi+\frac{2}{3}k\pi$, $k\in Z$, **e)** $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$, $k\in Z$,

f) $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

3.66. a) $m\in\langle -1;1\rangle$, **b)** $m\in\langle 0;2\rangle$, **c)** $m\in R\setminus\{0\}$.

3.67. Równanie nie ma rozwiązania, gdy $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$, ma 3 rozwiązania, gdy $m=0$, ma 4 rozwiązania, gdy $m=1$, ma 6 rozwiązań, gdy $m\in(0;1)$.

Równania trygonometryczne – ciąg dalszy

3.69. a) $x=k\pi$, $k\in Z$, **b)** $x=k\pi$, $k\in Z$, **c)** $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$, **d)** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$,

e) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, **f)** $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

3.70. a) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, $k\in Z$,

b) $x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ lub $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ lub $x=2k\pi$, $k\in Z$, **c)** $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, $k\in Z$,

d) $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$, $k\in Z$, **e)** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$,

f) nie ma rozwiązania, **g)** $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$, **h)** $x=\pi+2k\pi$, $k\in Z$,

i) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ lub $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, $k\in Z$.

3.71. a) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi$, $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}k\pi$, $k\in Z$,

c) $x=-\frac{\pi}{36}+\frac{1}{3}k\pi$, $k\in Z$, **d)** $x=\frac{7}{12}\pi+k\pi$, $k\in Z$, **e)** $x=\frac{-5}{36}\pi+\frac{2}{3}k\pi$, $x=\frac{5}{12}\pi+2k\pi$, $k\in Z$,

f) $x=\frac{13}{4}\pi+3k\pi$, $k\in Z$.

3.72. **a)** $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ lub $x=2k\pi$, $k\in Z$, **b)** $x=k\pi$, $k\in Z$,

c) $x=k\pi$ lub $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ lub $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, $k\in Z$,

d) $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$, **e)** $x=k\pi$, $k\in Z$, **f)** $x\in R$, **g)** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$, $k\in Z$,

h) $x=k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in Z$, **i)** $x=2k\pi.\ k\in Z$.

3.73. **a)** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}$ lub $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$, **c)** $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$,

d) $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ lub $x=\pi+2k\pi$, $k\in Z$.

3.74. **a)** $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$, $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ lub $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, $k\in Z$ (albo $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$),

c) $x=-\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$, **d)** $x\in R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, $k\in Z$.

3.75. **a)** $\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{6}$, **b)** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, **c)** $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. *Wskazówka.* **a)** $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$,

więc $2\cos^2\frac{x}{2}-1=-\frac{2}{3}$, skąd $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{6}$, **b)** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$, **c)** $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

3.76. **a)** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$, **b)** $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$, $x=\frac{5}{12}\pi+k\pi$, $k\in Z$, **c)** $x=-\frac{\pi}{8}+k\pi$, $x=-\frac{3}{8}\pi+k\pi$, $k\in Z$,

d) $x=\frac{2}{3}k\pi$, $k\in Z$, **e)** $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi$, $x=-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi$, $k\in Z$, **f)** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}k\pi$, $k\in Z$.

Wskazówka. **a)** $\sin 6x=\sin(4x+2x)=\sin 4x\cdot\cos 2x+\cos 4x\cdot\sin 2x$, więc $\sin 4x\cdot\cos 2x-\cos 4x\cdot\sin 2x=1$,

skąd $\sin(4x-2x)=1$, **e)** $2\cos 7x=2\cos(5x+2x)=2(\cos 5x\cdot\cos 2x-\sin 5x\cdot\sin 2x)$, więc

$-2\sin 5x\cdot\sin 2x-2\cos 5x\cdot\cos 2x=-\sqrt{3}$, skąd $\cos(5x-2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nierówności trygonometryczne

3.77. **a)** **1** $x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};2\pi\right\rangle$, **2** $x\in\left\langle-\frac{3}{4}\pi;-\frac{\pi}{4}\right\rangle$, **3** $x\in R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$, $k\in Z$,

b) **1** $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **2** $x\in\left\langle-\frac{3}{4}\pi;-\frac{\pi}{4}\right\rangle$, **3** $x\in R$, **c)** **1** $x\in\langle 0;\pi)\cup(\pi;2\pi\rangle$, **2** $x\in\left\langle-\frac{3}{4}\pi;-\frac{\pi}{4}\right\rangle$,

3 $x\in R\setminus\{\pi+2k\pi\}$, $k\in Z$, **d)** **1** $x\in\langle 0;2\pi\rangle$, **2** $x\in\left\langle-\frac{3}{4}\pi;-\frac{\pi}{4}\right\rangle$, **3** $x\in R$.

3.78. **a)** $x\in\left(\frac{2}{3}k\pi;\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\right)$, $k\in Z$, **b)** $x\in\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi;\ \frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right)$, $k\in Z$,

c) $x\in\left(k\cdot\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}\right)$, $k\in Z$, **d)** $x\in\langle 2k\pi;\pi+2k\pi)$, $k\in Z$, **e)** $x\in\langle 2\pi+4k\pi;4\pi+4k\pi\rangle$, $k\in Z$,

f) $x\in\langle-\pi+4k\pi;\pi+4k\pi\rangle$, $k\in Z$.

3.79. **a)** $x \in \left\{-\frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$, **b)** $x \in \langle -3\pi; -2\pi\rangle \cup \langle -\pi; 0\rangle \cup \langle \pi; 2\pi\rangle$, **c)** $x \in \{-3\pi, -\pi, \pi\}$,

d) $x \in \left\langle 0; \frac{2}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{4}{3}\pi; 2\pi\right\rangle$, **e)** $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{4}{3}\pi\right\rangle$, **f)** $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi; \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi; 2\pi\right\rangle$.

3.80. **a)** $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3}\right\rangle \cup \{2\pi\}$, **b)** $x \in \left\langle -\pi; -\frac{\pi}{12}\right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{12}\pi; \pi\right\rangle$, **c)** $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, **d)** $x \in \left(0; \frac{\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}; \frac{7}{18}\pi\right)$.

3.81. **a)** $x \in \left\langle \frac{5}{12}\pi + k\pi; \frac{13}{12}\pi + k\pi\right\rangle$, $k \in \boldsymbol{Z}$, **b)** $x = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, **c)** $x \in \left\langle -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle$, $k \in \boldsymbol{Z}$,

d) $x \in \boldsymbol{R}$.

3.82. **a)** $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, **b)** $x \in \left\langle -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\rangle$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3.83. **a)** $x \in \left\langle \frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5}{6}\pi + k\pi\right\rangle$, $k \in \boldsymbol{Z}$, **b)** $x \in \left(\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$,

c) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Odpowiedź	A i D	A i D	Kolejno: F, F, F.	B i D

4. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów

Twierdzenie sinusów

4.1. **a)** $R = 15\sqrt{3}$ cm, **b)** $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$m, **c)** $R = 36\sqrt{2}$ dm. **4.2.** $R = \frac{a}{2\sin(\beta + \gamma)}$.

4.3. **a)** $a \approx 98{,}5$ cm, $b \approx 50$ cm, $c \approx 94$ cm, $\gamma = 70°$, **b)** $a \approx 50$ cm, $b \approx 70{,}9$ cm, $c \approx 42{,}3$ cm, $\alpha = 44°$.

4.4. **a)** $a \approx 12{,}64$ cm, $c \approx 23{,}56$ cm, $\gamma \approx 99°$, **b)** $a \approx 1{,}28$m, $b \approx 6{,}5$m, $\alpha = 10°$, **c)** $c \approx 19{,}4$ cm, $\beta \approx 25°$,

$\gamma \approx 113°$, **d)** $\beta \approx 60°$, $\alpha \approx 84°$, $a \approx 8{,}65$ lub $\beta \approx 120°$, $\alpha \approx 24°$, $a \approx 3{,}55$.

4.5. Istnieją dwa trójkąty spełniające warunki zadania:

trójkąt I: $|AB| = 81{,}24$ cm, $|\sphericalangle A| = 24°$, $|\sphericalangle B| = 32°$, $|\sphericalangle C| = 124°$,

trójkąt II: $|AB| = 13{,}64$ cm, $|\sphericalangle A| = 24°$, $|\sphericalangle B| = 148°$, $|\sphericalangle C| = 8°$.

4.6. $r = \left(6\sqrt{2} - 3\sqrt{6}\right)$. *Wskazówka.* Z warunków zadania $|\sphericalangle ABD| = 30°$, $|\sphericalangle DAB| = 15°$, $|\sphericalangle ADB| = 135°$.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta DAB: $\frac{|AB|}{\sin 135°} = \frac{|AD|}{\sin 30°}$, stąd $|AB| = 6\sqrt{2}$.

W trójkącie AEO: $\operatorname{tg}|\sphericalangle OAE| = \frac{r}{|AE|}$ i $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

4.7. **a)** $R=1$, **b)** $R=\frac{16\sqrt{15}}{15}$, **c)** $R=3\sqrt{3}$, **d)** $R=\frac{\sqrt{305}}{4}$.

Wskazówka. **b)** Najpierw policz z wzoru Herona pole trójkąta ABC, a następnie promień R.

4.8. **a)** $5{,}9\cdot10^7$km, **b)** $1{,}1\cdot10^8$km.

4.9. *Wskazówka.* Wyznacz sinusy kątów α, β, γ w zależności od promienia R okręgu opisanego na tym trójkącie.

4.10. *Wskazówka.* Skorzystaj z twierdzenia sinusów i zapisz $a^2=4R^2\sin^2\alpha$, $b^2=4R^2\sin^2\beta$, $c^2=4R^2\sin^2\gamma$ i $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$. Zatem

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{4R^2\left(\sin^2\alpha-\sin^2\beta\right)}{4R^2\sin^2\left(180^\circ-(\alpha+\beta)\right)}=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Twierdzenie cosinusów

4.11. **a)** $a=\sqrt{37}$ dm, **b)** $a=2\sqrt{2}$ cm, **c)** $b=\sqrt{34}$ cm, **d)** $c=\sqrt{93}$ cm.

4.12. **a)** $\alpha=30^\circ$, $\beta=30^\circ$, $\gamma=120^\circ$, **b)** $\alpha\approx28^\circ$, $\beta\approx44^\circ$, $\gamma\approx108^\circ$, **c)** $\alpha\approx33^\circ$, $\beta\approx69^\circ$, $\gamma\approx78^\circ$, **d)** $\alpha\approx23^\circ$, $\beta\approx34^\circ$, $\gamma\approx123^\circ$.

4.13. $\alpha\approx44^\circ$, $\beta\approx15^\circ$, $\gamma\approx121^\circ$.

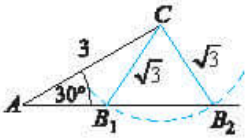
4.14. **a)** 120°, $P=8\sqrt{3}$, **b)** 105°, $P\approx5{,}46$.

4.15. **a)** Prostokątny, **b)** rozwartokątny, **c)** ostrokątny, **d)** rozwartokątny.

4.16.

a	b	c	α	β	γ
$\sqrt{3}$	3	$2\sqrt{3}$ lub $\sqrt{3}$	30°	60° lub 120°	90° lub 30°
$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ lub $\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	15° lub 105°	30°	135° lub 45°
4	4	$4\sqrt{3}$	30°	30°	120°
10	8	7	83°	53°	44°

Wskazówka. 1) Jeżeli $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, to $\beta=60^\circ$ lub $\beta=120^\circ$.



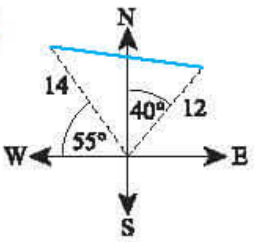
4.17. $|BC|=2\sqrt{5}-4$.

4.18. $|BC|=8$. *Wskazówka.* $P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\sin(\sphericalangle BAC)$.

4.19. $|AC|=52$ lub $|AC|=2\sqrt{109}$.

Wskazówka. $P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\sin(\sphericalangle ABC)$.

4.20. $d=15{,}907$km. *Wskazówka.*



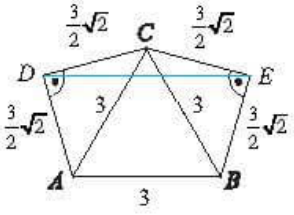
4.21. **a)** 139,104 km, **b)** 0,637 km.

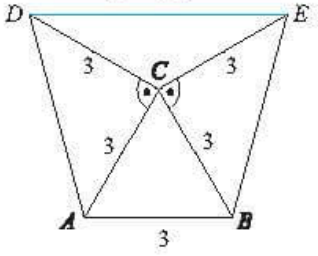
Nr zadania	4.22	4.23	4.24	4.25	4.26
A		X	X	X	X
B	X	X		X	X
C	X	X	X	X	X

Zastosowanie twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów

4.27. **a)** $\alpha = 60°$, **b)** $\alpha = 75°$.

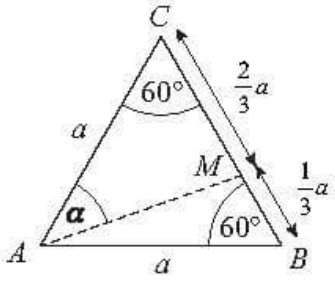
4.28. $|DE| = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$ lub $|DE| = 3\sqrt{3}$. *Wskazówka.* **I przypadek** **II przypadek**





4.29. $\sin(\sphericalangle CAM) = \frac{\sqrt{21}}{7}$. *Wskazówka.* Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

$|CM| + |MB| = a$, więc $|CM| = \frac{2}{3}a$, $|MB| = \frac{1}{3}a$.

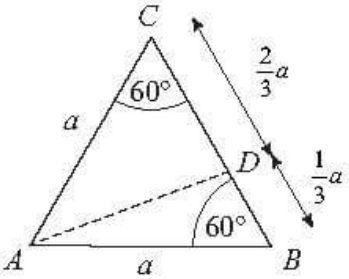


Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABM:

$$|AM|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{3}a \cdot \cos 60°, \text{ skąd } |AM| = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta AMC:

$$\frac{\frac{2}{3}a}{\sin\alpha} = \frac{|AM|}{\sin 60°}, \text{ skąd } \sin\alpha = \frac{\frac{2}{3}a \cdot \sin 60°}{|AM|}.$$



4.30. *Wskazówka.* Przyjmij oznaczenia jak na rysunku oraz

R_1 – promień okręgu opisanego na trójkącie ACD,

R_2 – promień okręgu opisanego na trójkącie ADB,

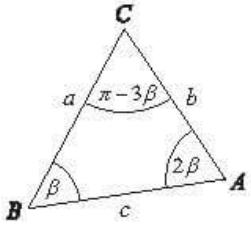
Z twierdzenia sinusów dla trójkątów ACD i ADB: $2R_1 = \frac{|AD|}{\sin 60°}$ i $2R_2 = \frac{|AD|}{\sin 60°}$, skąd $R_1 = R_2$.

4.31. *Wskazówka.* Zauważ, że jeżeli $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, to $|\sphericalangle DCA| = \frac{\alpha}{2}$ i $|\sphericalangle BCE| = 45° - \frac{\alpha}{2}$.

4.32. $\sqrt{b^2 + bc}$. *Wskazówka.* Z twierdzenia sinusów: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(\pi - 3\beta)}$, czyli

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin 3\beta}$ oraz $\sin 3\beta = \sin(2\beta + \beta)$, więc $\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta$.

Zatem $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{3\sin\beta - 4\sin^3\beta}$, skąd $\frac{b}{c} = \frac{1}{3 - 4\sin^2\beta}$, więc $\sin^2\beta = \frac{3b - c}{4b}$.



Z twierdzenia cosinusów $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos 2\beta$ i $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$.

Zatem $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \frac{c - b}{2b}$.

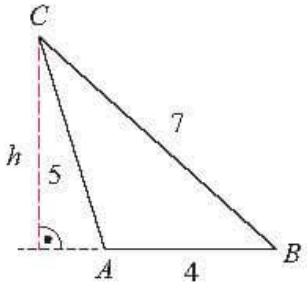
Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Odpowiedź	B i C	D	D	B i D	D	P, F	D

5. Obliczanie długości odcinków i pól trójkątów

Związki miarowe w trójkącie

5.1. $R=2$. **5.2.** *Wskazówka.* $21^2>12^2+16^2$.

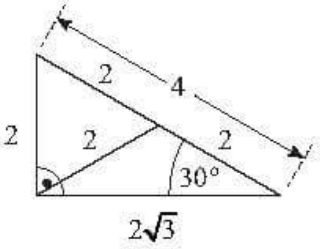


5.3. $2\sqrt{6}$. *Wskazówka.* Zauważ, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Najdłuższą wysokość należy poprowadzić na najkrótszy bok.

5.4. Około 15,04. *Wskazówka.* $P_\Delta=\dfrac{25\sqrt{3}}{4\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ}$.

5.5. 6 i $4+2\sqrt{3}$. *Wskazówka.*



5.6. $r=\dfrac{10}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$. *Wskazówka.* $r=\dfrac{a+b-c}{2}$, gdzie $a=\dfrac{10}{3}$, $b=\dfrac{20\sqrt{2}}{3}$, $c=10$.

5.7. *Wskazówka.* $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ i $c=2R$. **5.8.** 45°, 45°, 90°.

5.9. *Wskazówka.* Z twierdzenia sinusów $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{a}{b}$, z twierdzenia cosinusów $2\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}$,

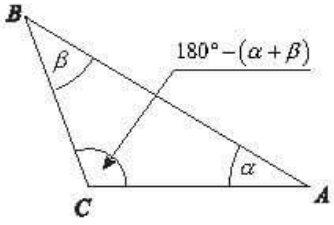
z warunków zadania $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\cos\gamma$, więc $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}$, skąd $b^2=c^2$.

5.10. $P=2\sqrt{15}+\sqrt{21}$. *Wskazówka.* Zauważ, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Przyjmij oznaczenia jak na rysunku i oblicz:

$|AC|=2R\cdot\sin\beta$ i $|BC|=2R\cdot\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$ i $\cos\beta$.

Skorzystaj z wzoru $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ i oblicz pole P trójkąta z wzoru $P=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot|BC|\cdot\sin(\alpha+\beta)$.



5.11. *Wskazówka.* Uzasadnij, że w trójkącie o bokach 4, 5, 7 cosinusy wszystkich kątów są równe $-\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{5}{7}$, $\dfrac{29}{35}$.

Wzory na pola trójkątów i ich zastosowanie

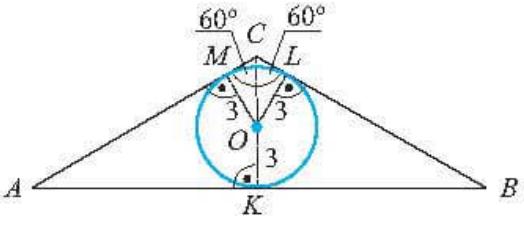
5.12. **a)** $P=420$, **b)** 15, **c)** $r=7$. **5.13.** **a)** 28, **b)** $14\dfrac{1}{6}$, **c)** $\dfrac{13}{85}$.

5.14. **a)** $|AC|=|BC|=4\sqrt{3}+6$, $|AB|=6\sqrt{3}+12$, **b)** $R=6+4\sqrt{3}$, **c)** $P_\Delta=36+21\sqrt{3}$.

Wskazówka.

a) W ΔOLC: $\dfrac{3}{|OC|}=\sin 60^\circ$, skąd $|OC|=3:\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

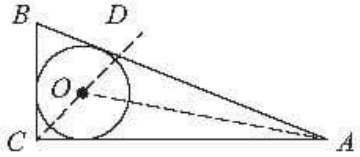
więc $|CK|=3+2\sqrt{3}$.



5.15. **a)** $r=\frac{3}{5}\sqrt{10}$, **b)** $R=\frac{49\sqrt{10}}{40}$.

5.16. 15°, **b)** 75°. *Wskazówka.* Zauważ, że $|CO|:|OD|=\sqrt{3}:\sqrt{2}$,

$|\sphericalangle ACD|=45°$. Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu



dwusiecznych kątów tego trójkąta, zatem OA jest dwusieczną kąta CAD.

Z twierdzenia o dwusiecznej kąta w ΔACD: $\frac{|AC|}{|AD|}=\frac{|OC|}{|OD|}$, stąd $\frac{|AC|}{|AD|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Z twierdzenia sinusów do $\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ADC|}=\frac{|AD|}{\sin 45°}$, stąd $|\sphericalangle ADC|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zatem $|\sphericalangle ADC|=60°$ lub $|\sphericalangle ADC|=120°$, $|\sphericalangle CAD|=180°-(120°+45°)=15°$, $|\sphericalangle ABC|=75°$.

5.17. **a)** $r=\sqrt{3}$, $R=\frac{14\sqrt{3}}{3}$, **b)** $r=\sqrt{5}$, $R=2{,}1\sqrt{5}$, **c)** $r=\frac{11\sqrt{23}}{23}$, $R=\frac{72\sqrt{23}}{23}$, **d)** $r=4$, $R=10$.

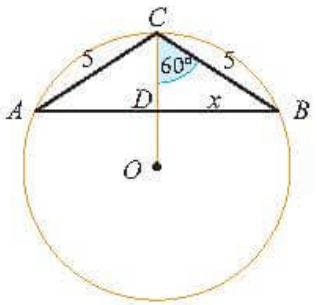
Wskazówka. **a)** Skorzystaj z wzorów $r=\frac{P_\Delta}{p}$, $R=\frac{abc}{4P_\Delta}$. $P_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{a+b+c}{2}$, czyli

$p=\frac{6+10+14}{2}=15$ oraz $P_\Delta=\sqrt{15\cdot(15-6)(15-10)(15-14)}=15\sqrt{3}$.

Zatem $R=\frac{6\cdot 10\cdot 14}{4\cdot 15\sqrt{3}}$, czyli $R=\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

5.18. **a)** $P=25\pi-24$, **b)** $P=12\sqrt{10}-6{,}4\pi$, **c)** $P=8\sqrt{5}-\frac{16}{5}\pi$.

5.19. $R=5$. *Wskazówka.* ΔCDB jest prostokątny, więc $\frac{x}{5}=\sin 60°$,

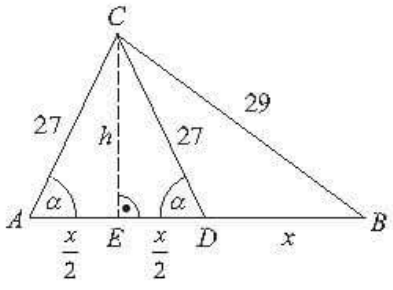


skąd $x=\frac{5}{2}\sqrt{3}$. $|AB|=2x$, czyli $|AB|=5\sqrt{3}$.

$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25}{4}\sqrt{3}$.

5.20. **a)** $P=\frac{323}{8}\pi=40\frac{3}{8}\pi$, **b)** $P=100\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$, **c)** $P=\frac{481}{16}\pi=30\frac{1}{16}\pi$.

5.21. $P=2\sqrt{10\,010}$ cm^2. *Wskazówka.* Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ADC i DBC:

$27^2=x^2+27^2-54x\cdot\cos\alpha$ i $29^2=x^2+27^2-54x\cdot\cos(180°-\alpha)$ oraz

$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, więc $\begin{cases}0=x^2-54x\cos\alpha\\ 2\cdot 56=x^2+54x\cos\alpha\end{cases}$, skąd $x^2=56$.

$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot h=x\cdot h=\sqrt{x^2\cdot h^2}$, gdzie w trójkącie CEB: $h^2=29^2-\left(\frac{x}{2}+x\right)^2=29^2-\frac{9}{4}\cdot 56=715$.

5.22. **a)** $R=1$, **b)** $P_\Delta=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5.23. *Wskazówka.* Z równości $\frac{\cos\alpha}{b}=\frac{\cos\beta}{a}$ wynika, że $\frac{a}{b}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

Z twierdzenia sinusów $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ wynika, że $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$. Zatem $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, skąd $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$.

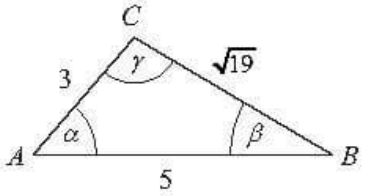
5.24. Nie.

5.25. $m_1=-2\sqrt{2}+2$, $m_2=2$, $m_3=2\sqrt{2}+2$. *Wskazówka.* Korzystając ze wzoru na pole trójkąta otrzymasz równanie $\frac{1}{2}\left|(m-2)^2-4\right|=2$, skąd $(m-2)^2-4=4$ lb $(m-2)^2-4=-4$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.
Odpowiedź	D	D	P, P	B i D	B i C

3. *Wskazówka.* $\cos\alpha=\frac{3^2+5^2-\left(\sqrt{19}\right)^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{1}{2}$.



6. Obliczanie długości odcinków i pól czworokątów

Klasyfikacja i pola czworokątów wypukłych. Prostokąty i kwadraty

6.1. **a)** $16\sqrt{3}$, **b)** 8.

6.3. **a)** $\alpha=40°$, **b)** $\alpha\approx 74°$, **c)** $\alpha\approx 106°$.

6.4. **a)** 3 i $3\sqrt{3}$, **b)** 11,47 i 16,38, **c)** 3,38 i 7,25.

6.5. $P\approx 73\text{ cm}^2$, $L\approx 37\text{ cm}$.

6.6. 210 cm.

6.7. Około: **a)** 54°, **b)** 101°, **c)** 50°.

6.8. $L\approx 33{,}5$, $P\approx 68{,}5$.

6.9. *Wskazówka.* **b)** $P_{\square ABCD}=48$, $P_{\triangle ASD}=12$ i $P_{\triangle ASD}=\frac{1}{2}\cdot 5^2\cdot\sin\alpha$.

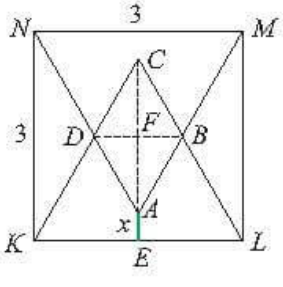
6.10. *Wskazówka.* **a)** $KC\|AM$ i $AN\|LC$ oraz $|\sphericalangle BAD|=|\sphericalangle BCD|=60°$,

b) $|EC|=|AC|+x$ i $|EC|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, więc $x=3-\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{6-3\sqrt{3}}{2}$. $|AC|=3-2x$,

skąd $|AC|=3\left(\sqrt{3}-1\right)$. DB jest bokiem trójkąta równobocznego DBC (DBA)

o wysokości FC, gdzie $|FC|=\frac{1}{2}|AC|$ i $|FC|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot|DB|$.

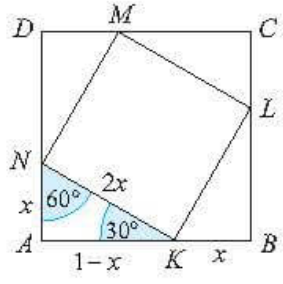
Zatem $\frac{1}{2}\cdot 3\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot|DB|$, skąd $|DB|=\frac{1}{2}\cdot 3\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$.



6.11. $P=4-2\sqrt{3}$.

Wskazówka. Trójkąty NAK, KBL, LCM i MDN są prostokątne i przystające.

$x^2+(1-x)^2=(2x)^2$, skąd $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$. $P_{KLMN}=(2x)^2$.



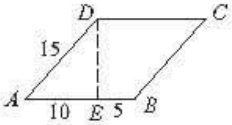
Równoległoboki i romby

6.13. **a)** $8\sqrt{3}$, **b)** 35, **c)** $24\sqrt{2}$. **6.14.** 40. **6.15.** $\sqrt{10}$ i $\sqrt{58}$.

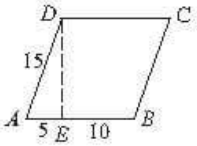
6.16. **a)** 24, **b)** 24, **c)** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **6.17.** 40° i 140°. **6.18.** $P \approx 8{,}0$. **6.19.** 45°.

6.21. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ lub $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, gdzie α jest kątem ostrym rombu.

Wskazówka. Przypadek 1.

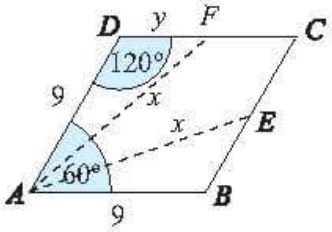


Przypadek 2.



6.22. **a)** $L = 48$, **b)** $P = 110{,}5$. **6.23.** 60°. **6.24.** $16\sqrt{10} - 3\sqrt{3}$ cm. **6.25.** $P = 9$.

6.26. $3\sqrt{19}$. *Wskazówka.* Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.

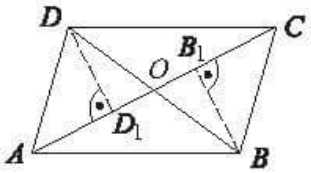


$P_{ABCD} = 9^2 \cdot \sin 60° = \frac{81\sqrt{3}}{2}$,

$P_{\Delta ADF} = \frac{1}{3}P_{ABCD} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ i $P_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot y \cdot \sin 120°$, skąd $y = 6$.

Z twierdzenia cosinusów w trójkącie ADF oblicz x.

6.27. *Wskazówka.* Trójkąty ABC i ACD mają równe pola,



to $\frac{|AC||BB_1|}{2} = \frac{|AC| \cdot |DD_1|}{2}$, czyli $|BB_1| = |DD_1|$.

Łatwo wykazać, że trójkąty OBB_1 i ODD_1 są przystające, więc $|OB| = |OD|$.

Z nierówności pól trójkątów ABC i BDC wynika, że $|AO| = |OC|$.

Przekątne czworokąta dzielą się na połowy, więc czworokąt jest równoległobokiem.

6.28. **a)** $|BD| = 10$, **b)** $P = 120$, **c)** $\sin(\sphericalangle DAB) = \frac{120}{169}$, **d)** $\cos(\sphericalangle ADC) = -\frac{119}{169}$.

6.29. *Wskazówka.* $\frac{x(x+2)}{2} = 7{,}5$, skąd $x = 3$, gdzie x jest długością krótszej przekątnej rombu.

6.30. *Wskazówka.* Porównaj pole rombu wyrażone w zależności od przekątnych rombu z polem wyrażonym w zależności od boku rombu.

6.31. **a)** $|AC| = 2\sqrt{5}$, **b)** $|BD| = 4\sqrt{5}$, **c)** 5, **d)** $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. **6.32.** **a)** Tak, $P = 5$, **b)** nie.

6.33. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** nie. *Wskazówka.* Sprawdź, czy środek odcinka AC jest również środkiem odcinka BD.

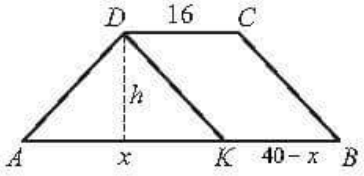
Trapezy

6.34. **a)** $\delta = 138°$, $\gamma = 145°$, **b)** $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, czyli 120°, 120°, 60°, 60°.

6.35. **a)** $\alpha \approx 53°$, **b)** $\alpha \approx 27°$, **c)** $\alpha = 90°$. **6.36.** 8 i 16.

6.37. Około: **a)** 31,2, **b)** 6,8, **c)** 147,8. **6.38.** **a)** 6, **b)** $18\sqrt{3}$.

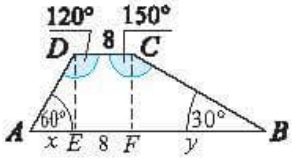
6.39. $|AK|=28$. *Wskazówka.* $P_{\Delta AKD}=\frac{1}{2}hx$ i $P_{\square KBCD}=\frac{16+40-x}{2}\cdot h$, więc rozwiązujemy równanie $\frac{1}{2}hx=\frac{16+40-x}{2}\cdot h$.



6.40. **a)** $P=21$, **b)** $P=289$, **c)** $P=6$. **6.41.** $P=64\sqrt{3}$, $L=8\left(5+\sqrt{3}\right)$.

6.42. **a)** $P=6\left(9-\sqrt{3}\right)$, **b)** $P=42\sqrt{3}$, **c)** nie istnieje.

Wskazówka. **b)**



$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}h \\ y=\sqrt{3}h \\ x+y+8=20 \end{cases}$$

c) nie istnieje, bo $|BC|=4\sqrt{2}$, a wysokość trójkąta EDA poprowadzona z punktu D ma długość 4,8.

6.43. *Wskazówka.* $P_{\Delta MBC}=P_{\text{trapezu }ABCD}-\left(P_{\Delta ABM}+P_{\Delta CDM}\right)$.

6.44. $C=(0,-2)$, $D=(2,4)$. *Wskazówka.* Z warunków: $|MC|^2=10$ (bo $|AB|^2=10$), a punkty C i D leżą na prostej o równaniu $y=3x-2$ ($CD\,||\,AB$), to otrzymujemy równania $(x_C-1)^2+(y_C-1)^2=10$ i $y_C=3x_C-2$, skąd $(x_C-1)^2+(3x_C-3)^2=10$, więc $10(x_C-1)^2=10$, zatem $(x_C-1)^2=1$.

6.46. $D=(1,3)$.

Okrąg wpisany w czworokąt

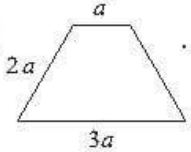
6.47. Np. 5 cm, 6 cm, 8 cm, 7 cm lub 1 cm, 1 cm, 12 cm, 12 cm. **6.48.** $\alpha=270°$.

6.49. **a)** $|AB|=3$, $|BC|=5$, $|CD|=6$, $|DA|=4$, **b)** $|AB|=6$, $|BC|=5$, $|CD|=3$, $|DA|=4$,
c) $|AB|=20$, $|BC|=|AD|=15$, $|CD|=10$.

6.50. 21 cm, 14 cm, 7 cm i 14 cm. *Wskazówka.* Czworokąt opisany na okręgu, więc stosunek długości jego boków to: 3 : 2 : 1 : 2.

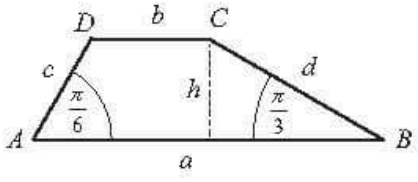
6.51. $P=125$. *Wskazówka.* $a+b=25$, gdzie a i b to długości podstaw trapezu.

6.52. *Wskazówka.*



6.53. $r=5$.

6.54. $\frac{4\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}$. *Wskazówka.* $\frac{\pi}{3}$ Zauważ, że $a+b=c+d$, $\frac{h}{c}=\sin\frac{\pi}{6}$ i $\frac{h}{d}=\sin\frac{\pi}{3}$, więc $\frac{a+b+c+d}{h}=\frac{2(c+d)}{h}$.



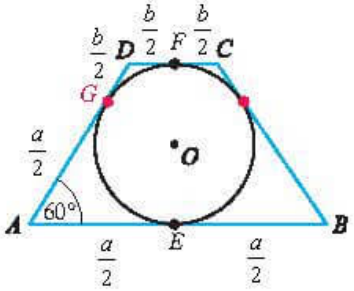
6.55. **a)** $r=7{,}2$, **b)** $r=\frac{5}{2}\sqrt{2}$, **c)** $r=\frac{60}{13}$.

6.56. *Wskazówka.* $P=\frac{1}{2}pq$ i $P=a\cdot h$, gdzie $h=2r$ oraz $a=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}$. Zatem $\frac{1}{2}pq=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}\cdot 2r$.

6.57. **a)** $P=2mr$, **b)** $P=\frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot a^2$. *Wskazówka.* **b)** $|AG|=\frac{a}{2}$, $|DG|=\frac{b}{2}$.

6.58. *Wskazówka.*

Zauważ, że ramię trapezu ma długość równą $\frac{a+b}{2}$.



6.59. Czworokąt jest deltoidem, $P=18$, $L=2\left(5+\sqrt{13}\right)$, $r=\frac{3}{2}\left(5-\sqrt{13}\right)$.

6.60. $L=34$ cm.

6.61. $r=\frac{25\sqrt{3}+60}{23}$.

6.62. **b)** $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{4}{5}$.

6.63. $(x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{289}{40}$.

Okrąg opisany na czworokącie

6.64. **a)** $\beta=90°$, $\gamma=145°$, **b)** $\alpha=110°$, $\beta=100°$, $\gamma=80°$, **c)** $\alpha=70°$, $\beta=60°$, $\gamma=120°$, **d)** $\alpha=90°$, $\beta=110°$, $\gamma=90°$, $\delta=70°$.

6.65. **a)** 45°, 108°, 135°, 72°, czworokąt wpisany w okrąg, **b)** 20°, 60°, 40°, 240°, czworokąt nie jest wpisany w okrąg.

6.66. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** nie.

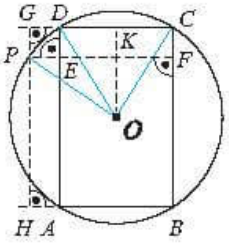
6.67. 80°, 100°, 110°, 70°, na czworokącie nie można opisać okręgu.

6.68. 626 mm.

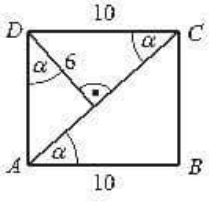
6.69. $5\sqrt{13}$ m.

6.70. **b)** $\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\left(y+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{325}{18}$. *Wskazówka.* **a)** Zauważ, że $AB\parallel CD$ oraz $AD\not\parallel BC$ i $|AD|=|BC|$.

6.71. $4R^2$. *Wskazówka.* Oznaczamy $|PG|=x$, $|PH|=y$, $|PE|=v$, $|PF|=u$, gdzie P to punkt leżący na okręgu. $|AC|=2R$. Zauważ, że $|AB|=u-v$, $|BC|=x+y$, $|PK|=v+\frac{u-v}{2}=\frac{u+v}{2}$. $|KO|=\frac{x+y}{2}-x=\frac{y-x}{2}$. Zastosuj twierdzenie Pitagorasa dla ΔABC i ΔPKO, i przekształć otrzymane równości, tak by otrzymać $u^2+v^2+x^2+y^2=4R^2$.



6.72. **a)** 3 lub $\sqrt{3}$, **b)** $6\frac{1}{4}$, **c)** 3. *Wskazówka.* **a)** Rozważ dwa przypadki, gdy bok AB jest: 1° krótszym bokiem prostokąta, 2° dłuższym bokiem prostokąta, **b)** zauważ, że $\sin\alpha=0{,}6$, skąd $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, **c)** zauważ, że $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, skąd $\sin\alpha=0{,}6$.



6.73. **b)** $\sqrt{19}$. *Wskazówka.* Zauważ, że trójkąty prostokątne DEB i DFB mają wspólną przeciwprostokątną, która jest średnicą okręgu opisanego na każdym z nich.

Rozwiązywanie zadań optymalizacyjnych z planimetrii

6.75. Ramka ma kształt kwadratu o boku 1 dm. *Wskazówka.* $a+b=2$, skąd $b=2-a$, gdzie a i b są długościami boków prostokąta. $P(a)=a(2-a)$, gdzie $a\in(0;2)$.

6.76. Prostokątna szyba ma wymiary 1,5 m i 1,5 m, $P=2{,}25\ \text{m}^2$. *Wskazówka.* $2x+2y=6$, skąd $y=3-x$, gdzie x i y są długościami boków prostokąta. $P(x)=x(3-x)$, gdzie $x\in(0;3)$ i $P\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\left(3-\frac{3}{2}\right)$.

6.77. Prostokątny ogródek ma wymiary 9 m i 18 m. *Wskazówka.* $2x+y=36$, skąd $y=36-2x$, gdzie x i y są długościami boków prostokąta. $P(x)=x(36-2x)=2x(18-x)$, gdzie $x\in(0;18)$.

6.78. $x=5$ cm, $P=625\ \text{cm}^2$. *Wskazówka.* Nowe wymiary prostokąta to: $20+x$ i $30-x$.

$P(x)=(20+x)(30-x)$, gdzie $x\in(0;30)$.

6.79. Prostokąt o wymiarach 0,5 dm i 1 dm. *Wskazówka.* $P(x)=x(2-2x)=2x(1-x)$, gdzie $x\in(0;1)$.

6.80. $r=\frac{350}{\pi}$ m i $a=350$ m. *Wskazówka.* $L=1400$ i $L=2\pi r+2a$, skąd $a=700-\pi r$.

$P(r)=2r(700-\pi r)$, gdzie $r\in\left(0;\frac{700}{\pi}\right)$.

6.81. Pierwsza część drutu ma długość $39\frac{1}{41}$ cm, a druga $60\frac{40}{41}$ cm.

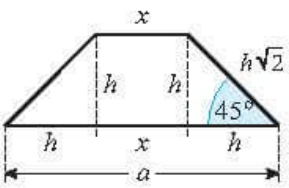
Wskazówka. Drut długości 100 cm podzielono na dwie części x i y, czyli $100=x+y$, skąd $y=100-x$, gdzie $x\in(0;100)$. Obwód kwadratu jest równy x cm, czyli bok kwadratu jest równy $\frac{x}{4}$.

Obwód prostokąta jest równy $100-x$, a boki prostokąta mają długość $\frac{100-x}{10}$ i $\frac{4\cdot(100-x)}{10}$.

Pole figury wyrażone jest wzorem $P(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\frac{100-x}{10}\cdot\frac{4(100-x)}{10}=\frac{41}{400}x^2-8x+400$.

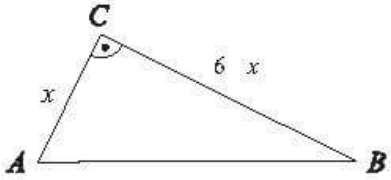
Najmniejsza wartość pola tej figury jest dla $x=\frac{-(-8)}{2\cdot\frac{41}{400}}=39\frac{1}{41}$ i $39\frac{1}{41}\in(0;100)$.

6.82. Podstawy trapezu mają długości 9 i 3, a ramię $3\sqrt{2}$.



Wskazówka. $h+a=12$, skąd $a=12-h$ i $a=x+2h$, skąd $x=12-3h$, gdzie $h\in(0;4)$. $P(h)=\frac{12-h+12-3h}{2}\cdot h=2h(6-h)$. Największą wartość funkcja P przyjmuje dla $h=3$ i $3\in(0;4)$.

6.83. $3\sqrt{2}$. *Wskazówka.* Przyjmij oznaczenia jak na rysunku.



$|AB|^2=x^2+(6-x)^2$, gdzie $x>0$ i $x<6$, $f(x)=\sqrt{x^2+(6-x)^2}$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Odpowiedź	B	C	F, F	C	C	C	N – A	T – B

7. Ciągi liczbowe

Pojęcie ciągu liczbowego. Przykłady i sposoby określania ciągu

7.1. **a)** $1024 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 512 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} \ldots, 64, 32,$ **b)** $52 \xrightarrow{-4} 48 \xrightarrow{-4} \ldots, 36, 32,$

c) $-3 \xrightarrow{\cdot(-2)} 6 \xrightarrow{\cdot(-2)} \ldots, -48, 96,$

d) $21 \xrightarrow{+4} 25 \xrightarrow{+3} 28 \xrightarrow{+2} 30 \xrightarrow{+1} 31 \xrightarrow{+0} 31.$

7.2. **a)** $30, 31,$ **b)** $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}.$ *Wskazówka.* **a)** $21+4,\ 25+3,\ 28+2, \ldots,$ **b)** $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \ldots.$

7.3. **a)** $D=\{1,2,\ldots,12\},$ **b)** $(5, 5, 5, 5, 3, 2, 1, 0, -3, -3, -3, -3).$

7.4. **a)** Tak, **b)** nie, **c)** 244 i 245. *Wskazówka.*

Kwartał	I	II	III	IV
Liczba dni w roku zwykłym	90	91	92	92
Liczba dni w roku przestępnym	91	91	92	92

7.5. **a)** $(0, 3, 8, 15, 24, \ldots),$ **b)** $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots\right),$ **c)** $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots),$ **d)** $(-4, 16, -64, 256, -1024, \ldots),$

e) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots\right),$ **f)** $(-2, 5, -10, 17, -26, \ldots).$

7.6. **a)** $1, 4, 9, 16,\ a_n = n^2,$ **b)** $1, 8, 27, 64,\ a_n = n^3.$ **7.7.** $a_n = \frac{n}{n+1},$ gdy $n \in \mathbb{N}^+.$

7.8. Podpunkty **a)**, **c)**, **d)**, **f)** – nie, **b)** tak, $a_{24} = 100,$ **e)** tak, $a_2 = 100.$

7.9. Nie, np. $a_3 = 80.$

7.10. **a)** $a_1, a_2,$ **b)** $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$ **c)** nie ma ujemnych wyrazów,

d) wszystkie wyrazy ciągu są ujemne, **e)** $a_1, a_2,$ **f)** $a_5, a_6, a_7, \ldots$

7.12. **a)** $a_4,$ **b)** brak takiego wyrazu, **c)** brak takiego wyrazu, **d)** $a_2.$

7.13. **a)** $a_1, a_3,$ **b)** $a_1,$ **c)** $a_1, a_2, a_5, a_{10}.$ **7.14.** **a)** $a_n = 3n-2,$ **b)** $a_n = n,$ **c)** $a_n = 10-2n.$

7.15. $a_{12} = 265.$

Ciąg określony rekurencyjnie

7.16. **a)** $a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=1,\ a_4=-1,\ a_5=1,$ **b)** $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=6,\ a_5=24,$ **c)** $a_1=1,$

$a_2=2,\ a_3=6,\ a_4=24,\ a_5=120,$ **d)** $a_1=\frac{3}{4},\ a_2=\frac{9}{16},\ a_3=\frac{1}{2},\ a_4=\frac{15}{32},\ a_5=\frac{9}{20}.$

7.17. **a)** $\begin{cases} a_1=-2 \\ a_{n+1}=a_n^2-4 \end{cases},\ n \in \mathbb{N}^+,\ a_5=140,$ **b)** $\begin{cases} a_1=\sqrt{2} \\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n \end{cases},\ n \in \mathbb{N}^+,\ a_5=\frac{\sqrt{2}}{16},$

c) $\begin{cases} a_1=0 \\ a_2=1 \\ a_{n+2}=2(a_{n+1}+a_n) \end{cases},\ n \in \mathbb{N}^+,\ a_5=16.$

7.18. 10.

7.19. **a)** $a_n = n^2$, **b)** $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1 \end{cases}$.

7.20. **a)** $a_n = 3n+1$, **b)** $a_n = 5-2n$, **c)** $a_n = 10n$, **d)** $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \sqrt{5}$, **e)** $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 2^{(-1)^n}$, **f)** $a_n = 2^{3^{n-1}}$.

7.21. **a)** $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 5 \end{cases}$, $n \in \boldsymbol{N}^+$, **b)** $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases}$, $n \in \boldsymbol{N}^+$, **c)** $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases}$, $n \in \boldsymbol{N}^+$.

Monotoniczność ciągu liczbowego

7.22. $(0, 4, 0, 8, 0, 12)$, ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

7.23. **a)** $a_{n+1} = n^2 + 2n$, **b)** $a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$, **c)** $a_{n+1} = \frac{3n+3}{n+2}$, **d)** $a_{n+1} = -n^2 + n + 2$, **e)** $a_{n+1} = \frac{-3n-1}{n+2}$, **f)** $a_{n+1} = \frac{-n^2-2n}{2n^2+4n+2}$.

7.24. Ciąg (a_n) jest: **a)** malejący, **b)** rosnący, **c)** rosnący, **d)** rosnący.

7.25. **a)** $(3, 6, 7, 12, 11, 18, 15, 24, 19, 30)$, **b)** ciąg nie jest monotoniczny, bo np. $a_3 > a_2$ i $a_5 < a_4$.

7.26. **a)** $(5, 5, 5, 4, 3, 2, 1, -2, -3, -4, -5, -5)$, **b)** ciąg jest nierosnący, a więc jest monotoniczny.

7.27. *Wskazówka.* Ciąg (a_n) jest: **a)** rosnący, **b)** rosnący, **c)** rosnący, **d)** malejący, **e)** rosnący, **f)** rosnący.

Pojęcie ciągu arytmetycznego

7.28. **a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak, **d)** tak.

7.29. Kolejno: **a)** 13, 17, **b)** −20, −48, **c)** 13, 5, −3, **d)** $-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{6}{5}$.

7.30. **a)** $a_n = 4n+1$, **b)** $b_n = 17-7n$, **c)** $c_n = \sqrt{2}(n-2)$, **d)** $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}(2-n)$.

7.31. **a)** $a_1 = 3$, $r = 15$, **b)** $a_1 = -11$, $r = -14$, **c)** $a_1 = 2$, $r = -6$, **d)** $a_1 = 7$, $r = 3$.

7.32. $a_n = n^2$

a_1	r	n	a_n
3	2	20	41
63	$-2\frac{1}{3}$	16	28
−200	8	15	−88
0,5	0,5	21	10,5

7.33. $a_1 = -5$, $a_8 = 9$.

7.34. Ciągi arytmetyczne: a_n, e_n, f_n, h_n.

7.35. **a)** a_8, **b)** a_{143}, **c)** a_2.

7.36. **a)** $a_6 = 12$, $a_{12} = 30$, **b)** $a_{20} = 21$, $a_{40} = 1$, **c)** $a_1 = 16$, $a_{100} = -182$, **d)** $a_5 = \log\frac{1}{4}$, $a_{10} = \log 8$.

7.37. **a)** $a_9 = -3$, **b)** $a_{20} = -2$, **c)** $a_{10} = 49$, **d)** $a_1 = -3$.

7.38. Liczby, które: **a)** przy dzieleniu przez 7 dają resztę 1, **b)** przy dzieleniu przez 6 dają resztę 3, **c)** przy dzieleniu przez 6 dają resztę 3, **d)** przy dzieleniu przez 9 dają resztę 7, **e)** przy dzieleniu przez 9 dają resztę 7, **f)** przy dzieleniu przez 8 dają resztę 5.

7.39. **a)** Tak, **b)** nie, **c)** tak. **7.40.** Wyrazy: a_{101}, a_{102}, a_{103}, a_{104}. **7.42.** Nie.

7.43. *Wskazówka.* Sprawdź, czy $a_{n+1}-a_n$ jest liczbą.

Własności ciągu arytmetycznego

7.44. *Wskazówka.* $r=-\frac{1}{2}$. **7.45.** $r=-1$, ciąg malejący.

7.46. **a)** $\begin{cases} a_1=26 \\ r=-4 \end{cases}$, **b)** $\begin{cases} a_1=9{,}5 \\ r=-0{,}5 \end{cases}$, **c)** $\begin{cases} a_1=-18 \\ r=2 \end{cases}$. **7.47.** **a)** $3\frac{1}{3}$, $5\frac{2}{3}$, 8, $10\frac{1}{3}$, $12\frac{2}{3}$, **b)** 3, 5, 7, 9, 11, 13.

7.48. **a)** $x=4{,}5$, **b)** $x\in\mathbf{R}$, **c)** $x=0$ lub $x=1$, **d)** $x=\frac{1}{4}$, **e)** $x=3$ lub $x=4$, **f)** $x=5$.

7.49. *Wskazówka.* Sprawdź, czy $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$.

7.50. **a)** $a_5+a_{13}=5$, **b)** $a_2+a_5+a_7+a_{10}=12$, **c)** $a_5+a_8+a_{11}=15$, **d)** $a_4+a_7+a_9+a_{12}=4$.

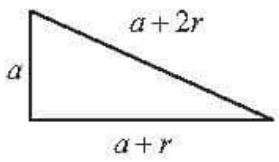
7.51. Kolejne odczyty: (7121, 7127, 7133, 7139, 7145).

7.52. $3\,333\frac{1}{3}$ lat. *Wskazówka.* $a_1=0{,}0003$, $r=0{,}0003$, $a_n=1$.

7.53. *Wskazówka.* Wyraź różnicę $b_{n+1}-b_n$ za pomocą różnicy r ciągu a_n, gdzie $a_n=a_1+(n-1)r$.

7.54. 3, 4, 5 lub 4, 4, 4. **7.55.** $r=-\frac{2}{15}$.

7.56. *Wskazówka.* Przyjmij oznaczenia jak na rysunku, gdzie $a>0$ i $r>0$.



$a^2+(a+r)^2=(a+2r)^2$, więc $3r^2+2ar-a^2=0$, skąd $r=\frac{a}{3}$.
Zatem boki trójkąta mają długości: a, $\frac{4}{3}a$, $\frac{5}{2}a$ i promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny wyrażony jest wzorem $\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{3}a-\frac{5}{3}a\right)$.

Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

7.57. **a)** -2, **b)** $4\sqrt{2}$, **c)** 12.

7.58. **a)** 165 150, **b)** 123 300, **c)** 41 400, **d)** 70 950, **e)** 45 223.

Wskazówka. **d)** $a_1=102$, $n=129$, **e)** $a_1=106$, $n=82$.

7.59. **a)** 37 107, **b)** $2\,500\sqrt{2}$, **c)** 655, **d)** $-269{,}5$.

7.60. **a)** $S_n=\frac{(5n-3)n}{2}$, **b)** $S_n=\frac{(5n+1)n}{2}$, **c)** $S_n=(2n+5)n$, **d)** $S_n=\frac{(11n+9)n}{2}$.

7.61. **a)** 0, **b)** 10, **c)** 92, **d)** 435, **e)** 215, **f)** $(2n-1)x$.

7.62. **a)** $a_1=16,\ r=-4$, **b)** $a_1=-4,\ r=-2$, **c)** $a_1=4,\ r=-\frac{3}{2}$, **d)** $a_1=-200,\ r=7$, **e)** $a_1=5,\ r=-2$, **f)** $a_1=4,\ r=1$.

7.63. **a)** $a_1=9,\ r=2$, **b)** $a_1=5,\ r=3$ **c)** $a_1=1,\ r=3$, **d)** nieskończenie wiele ciągów, których wyraz $a_6=7$, czyli $a_1\in\boldsymbol{R}$ i $r=\frac{7-a_1}{5}$, **e)** $a_1=2,\ r=3$, **f)** $a_1=3,\ r=-1$.

7.64. **a)** $a_n=-6n+9$, **b)** $a_n=4n+1$, **c)** $a_n=3n-\frac{3}{2}$, **d)** $a_n=7n-6$.

7.65. **a)** $n=33$, **b)** nie istnieje takie n, **c)** nie istnieje takie n.

7.66. **a)** $x=3n-5$, **b)** $x=9-2n$, **c)** $x=0{,}5n-0{,}6$.

7.67. **a)** $n=5$, **b)** $n=11$, **c)** $n=9$, **d)** $n=50$, **e)** $n=12$, **f)** $n=31$.

Wskazówka. **a)** $S_n=\frac{(1+n)n}{2}=3n$, **b)** $n^2=121$, **c)** $(2n-1)n=153$, **d)** $2n^2-7n-4650=0$, **e)** $n^2+n-156=0$, **f)** $n^2-2n-899=0$.

7.68. **a)** $x=63$, **b)** $x=\frac{1}{2}$, **c)** $x=-0{,}4$.

Wskazówka. **b)** $a_1=1+2x$, $a_2=4+2x$, skąd $r=3$; $a_n=28+2x$, skąd $n=10$.

7.69. $a_1=31$, $a_{100}=328$. *Wskazówka.* $a_1=3n+1$, $a_{100}=a_1+(100-1)\cdot 3$. **7.70.** 10 boków.

7.71. 30 cm, 40 cm, 50 cm, $P=600\ \text{cm}^2$.

Pojęcie ciągu geometrycznego

7.72. **a)** $-1,\ -0{,}1,\ -0{,}01,\ -0{,}001,\ -0{,}0001$, **b)** $5,\ -5,5,\ -5,5$, **c)** $-\sqrt{3},3,-3\sqrt{3},9,-9\sqrt{3}$, **d)** $10^{10},\ 10^9,\ 10^8,\ 10^7,\ 10^6$.

7.73. **a)** $a_7=27\sqrt{2}$, $a_{14}=729\sqrt{6}$, **b)** $a_5=\frac{27}{8}$, $a_7=\left(\frac{3}{2}\right)^5=\frac{243}{32}$, **c)** $a_4=2$, $a_8=8$.

7.74. **a)** $a_4=\frac{32}{27}$, **b)** $q=2$, **c)** $n=5$, **d)** $a_1=-\sqrt{2}$.

7.75. *Wskazówka.* Oblicz iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ i wyciągnij wniosek.

7.76. *Wskazówka.* Oblicz iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ i wyciągnij wniosek.

7.77. **a)** $a_n=4\cdot(-1)^{n-1}$, **b)** $a_n=(-1)^{n-1}$, **c)** $a_n=2^{n+5}$, **d)** $a_n=6^{n-4}$, **e)** $a_n=-\frac{1}{12}\cdot(-3)^{n-1}$, **f)** $a_n=\frac{1}{64}\cdot 2^{n-1}=2^{n-7}$ lub $a_n=\frac{1}{64}\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-7}$.

7.78. **a)** $a_n = 4 \cdot 4^{n-1}$, **b)** $a_n = 125 \cdot 5^{n-1}$, **c)** $a_n = \frac{1}{6} \cdot 6^{n-1}$, **d)** $a_n = -2 \cdot (-2)^{n-1}$, **e)** $a_n = -\frac{1}{27}(-3)^{n-1}$,
f) $a_n = 100 \cdot (-10)^{n-1}$, **g)** $a_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, **h)** $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

7.79. **a)** $a_1 = \frac{9}{2}$, $q = \frac{2}{3}$, **b)** $a_n = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

7.80. 2^9. *Wskazówka.* Przedstaw wszystkie wyrazy ciągu za pomocą wyrazu piątego.

Własności ciągu geometrycznego

7.81. Np. $q < 0$ i $a_1 < 0$: $-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$ ciąg niemonotoniczny;
$q > 1$ i $a_1 < 0$: $-2, -4, -8, -16, \ldots$ ciąg malejący.

7.82. **a)** 64 i 256, **b)** 32, 64, 128, 256, 512 lub $-32, 64, -128, 256, -512$.

7.83. **a)** $a_1 = \frac{25}{49}$, $q = \frac{7}{5}$, **b)** $a_1 = 10^{11}$, $q = 0{,}01$, **c)** $\begin{cases} a_1 = 16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = 16 \\ q = -\frac{1}{2}, \end{cases}$
d) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{1296} \\ q = 6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{1296}. \\ q = -6 \end{cases}$

7.84. **a)** Tak, **b)** tak, **c)** tak.

7.85. **a)** $x = \frac{5}{4}$ lub $x = -\frac{5}{4}, 1, \frac{5}{4}, 1\frac{9}{16}$ lub $1, -\frac{5}{4}, 1\frac{9}{16}$, **b)** $x = 3, 3, 4, \frac{16}{3}$,
c) $x = \frac{1}{3}$ lub $x = \frac{5}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{2}{3}, 4$ lub $\frac{1}{9}, \frac{2}{3}, 4$, **d)** $x = 3, 8, 4, 2$, **e)** $x = 0$ lub $x = 5, 4, 2, 1$ lub $9, 27, 81$.

7.86. $\left(a^2, \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{4}a^2, \frac{1}{8}a^2\right)$, $q = \frac{1}{2}$, $P_{10} = \frac{a^2}{512}$.

7.87. *Wskazówka.* Uzasadnij, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{const}$,
b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2} \cdot 2^{n+1} - 6^{n+1}}{3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n} = \frac{3 \cdot 3^{n+1} \cdot 2 \cdot 2^n - 6 \cdot 6^n}{3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n} = \frac{6 \cdot \left(3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n\right)}{3^{n+1} \cdot 2^n - 6^n}$.

7.88. **a)** **1** 111, **2** 1 111, **3** 11 111, **b)** po 10 godzinach.

7.89. **a)** $q = 2 - \sqrt{2}$, **b)** $a_1 = \frac{1}{2}$, **c)** $a_7 - a_5 = a_5 q^2 - a_5 = 362 - 256\sqrt{2}$.

7.90. **a)** $a_3 = 3$, **b)** $a_7 = \sqrt[3]{5}$, **c)** $a_{15} = 2$, **d)** $a_{10} = 1$.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

7.91. **a)** $S_6=\frac{665}{48}$, **b)** $S_6=\frac{13}{3}\left(\sqrt{3}+3\right)$, **c)** $S_6=\frac{5187}{80}$.

7.92. **a)** $S_5=62$, **b)** $S_5=-\frac{1844}{3125}$, czyli $S_5\approx -0{,}59$, **c)** $S_5=-\frac{11}{32}$, **d)** $S_5=25\cdot\frac{2^5+5^5}{2^5}=\frac{78\,925}{32}$, **e)** $S_5=\frac{1}{4}$, **f)** $S_5=\frac{121}{27}$.

7.93. **a)** $S_{10}=1023$, **b)** $S_{10}=-682$, **c)** $S_5=\frac{11}{16}=0{,}6875$, **d)** $S_6=909\,090$, **e)** $S_5=41{,}68$, **f)** $S_6=-\frac{665}{32}$, **g)** $S_7=40+13\sqrt{3}$, **h)** $S_5=7-3\sqrt{2}$.

7.94. $a_1=2$, $S_n=-5{,}555$, $q=\frac{2}{3}$, $n=8$.

7.95. **a)** $S_8=331{,}5$, **b)** $S_7=\frac{381}{160}$ lub $S_7=-\frac{129}{160}$, **c)** $S_4=10$, **d)** $a_1=2$ i $q=3$ lub $a_1=\frac{242}{61}$ i $q=-3$.

7.96. $2^{64}-1$.

7.97. (7, 7, 7) lub (3, 6, 12). *Wskazówka.* $S_3=a_1+a_1q+a_1q^2=a_1\left(1+q+q^2\right)$, więc $a_1\left(1+q+q^2\right)=3\cdot 7$.

Zatem $a_1=3$ i $1+q+q^2=7$ lub $a_1=7$ i $1+q+q^2=3$.

7.98. Nie, bo $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=\frac{2}{3}\left(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9\right)$.

Wskazówka. $S_{2n}=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=a_1q\left(1+q^2+q^4+q^6+q^8\right)$,

$S_{2n-1}=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=a_1\left(1+q^2+q^4+q^6+q^8\right)$,

$\frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}=\frac{a_1q\left(1+q^2+q^4+q^6+q^8\right)}{a_1\left(1+q^2+q^4+q^6+q^8\right)}=q$ i $q=\frac{2}{3}$, więc $\frac{S_{2n}}{S_{2n-1}}=\frac{2}{3}<1$, skąd $S_{2n}<S_{2n-1}$.

7.99. $S_{12}=\frac{81}{8}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right]$. *Wskazówka.* Zauważ, że $a_6=\frac{1}{36}$ i $a_7=\frac{1}{108}$, skąd $q=\frac{1}{3}$.

7.100. $a_1=162$ i $q=\frac{1}{3}$ lub $a_1=\frac{19\,602}{61}$ i $q=-\frac{1}{3}$, lub $a_1=2$ i $q=3$, lub $a_1=\frac{242}{61}$ i $q=-3$.

Wskazówka. **1** $\frac{a_1+a_1q^4}{a_1q^2}=\frac{82}{9}$ i **2** $a_1\cdot\frac{1-q^5}{1-q}=242$.

1 $\frac{1+q^4}{q^2}=\frac{82}{9}$, czyli $9q^4-82q^2+9=0$, skąd $q=\pm 3$, $q=\pm\frac{1}{3}$.

7.101. $q=-2$ lub $q=2$. *Wskazówka.* $\frac{S_4}{S_8}=\frac{1}{17}$, czyli $\frac{a_1\cdot\frac{1-q^4}{1-q}}{a_1\cdot\frac{1-q^8}{1-q}}=\frac{1}{17}$, gdzie $q\neq\pm 1$, więc $q^8-17q^4+16=0$.

7.102. $S_{10}=9841$. *Wskazówka.* Oblicz sumę S_{10} wyrazów ciągu $3^0+3^1+3^2+\ldots+3^9$, w którym $a_1=1$ i $q=3$.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zadaniach

7.103. **a)** $b_n=(-1)^n$, **b)** $a_n=\frac{1}{2}n-\frac{1}{6}$, **c)** $b_n=486\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, **d)** $a_n=3\frac{1}{4}n+2\frac{1}{4}$, **e)** $a_n=2n-5$, **f)** $b_n=64\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$.

7.104. **a)** $S_{51}=2\,601$, **b)** $S_7=\frac{3277}{512}$, **c)** $S_7=\frac{4372}{243}$, **d)** $S_5=25{,}6518$, **e)** $S_6=9{,}3$, **f)** $S_5=\frac{781}{108}$.

7.105. **a)** 250, **b)** $\frac{50}{51}$, **c)** $\frac{26}{31}$, **d)** $\frac{1}{6}$, **e)** $\frac{1}{6}$, **f)** $\frac{1}{2}$.

7.106. **a)** $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=9$, $b_1=1$, $b_2=5$, $b_3=12$, $c_1=1$, $c_2=\frac{4}{5}$, $c_3=\frac{3}{4}$,

b) $a_n=n^2$, $b_n=\frac{3n-1}{2}\cdot n$, $c_n=\frac{2n}{3n-1}$, **c)** $a_{12}=144$, $b_{30}=1335$, $c_{100}=\frac{200}{299}$.

7.107. *Wskazówka.* **a), b)** Przedstaw wyrazy ciągu w prostszej postaci i zastosuj wzór $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$.

7.108. **a)** 17, **b)** $a_{505}=b_{403}=2\,017$. **7.109.** $b_7=27$.

7.110. **a)** 55, **b)** 5 050, **c)** 500 500. *Wskazówka.* Przedstaw każdą różnicę $10^2-9^2=(10-9)(10+9)$ i oblicz sumę utworzonego ciągu.

7.111. $-1, 0, 0$ lub $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}$. *Wskazówka.* Z warunków zadania: liczby $x, y, 1$ tworzą ciąg arytmetyczny, więc $y=\frac{x+1}{2}$, a liczby $x, y, x+y+1$ tworzą ciąg geometryczny, więc $y^2=x(x+y+1)$.

7.112. 4, 8, 16 lub $\frac{28}{3}, \frac{28}{3}, \frac{28}{3}$.

7.113. *Wskazówka.* Zauważ, że $(a-b)^2\geq 0$, więc $a^2+b^2\geq 2ab$, skąd $(a+b)^2\geq 4ab$.

7.114. *Wskazówka.* Skorzystaj ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$S_n=\frac{[2a_1+(n-1)r]\cdot n}{2}$, $S_{2n}=\frac{[2a_1+(2n-1)r]\cdot 2n}{2}$ i $S_{3n}=\frac{[2a_1+(3n-1)r]\cdot 3n}{2}$ i wyznacz $3(S_{2n}-S_n)$.

$$3(S_{2n}-S_n)=3\cdot\left[\frac{(2a_1+2nr-r)\cdot 2n}{2}-\frac{(2a_1+nr-r)\cdot n}{2}\right]=\frac{3n}{2}\cdot[2a_1+r(3n-1)]=S_{3n}.$$

7.115. **b)** $p\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$. *Wskazówka.* **a)** Przy założeniu: $\left(\frac{2-p}{2+p}\right)\in R\setminus\{0\}$ dla $p\in R\setminus\{-2,2\}$,

wyznacz iloraz: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{2-p}{2+p}\right)^{2n-1}}{\left(\frac{2-p}{2+p}\right)^{2n-3}}=\left(\frac{2-p}{2+p}\right)^2=\text{const.}=q$, czyli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

b) Ciąg geometryczny jest malejący, gdy: $\begin{cases} 0<q<1 \\ a_1>0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} q>1 \\ a_1<0 \end{cases}$, więc

$$\begin{cases} 0<\left(\frac{2-p}{2+p}\right)^2<1 \\ \frac{2+p}{2-p}>0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \left(\frac{2-p}{2+p}\right)^2>1 \\ \frac{2+p}{2-p}<0 \end{cases}, \text{ skąd } \begin{cases} p\in(0;+\infty) \\ p\in(-2;2) \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} p\in(-\infty;-2)\cup(-2;0) \\ p\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty) \end{cases}.$$

7.116. *Wskazówka.* Aby liczby: $\sin^2\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ dla $\alpha\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right)$ były trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego musi być spełniony warunek: $\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

7.117. *Wskazówka.* Zauważ, że $b_{n+1}=2^{a_{n+1}}=2^{a_n+r}=2^{a_n}\cdot 2^r$.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny w bankowości

7.118.

	Kapitał początkowy	Roczna stopa procentowa	Liczba lat lokaty n	Odsetki po upływie n lat	Stan konta po upływie n lat
Ala	3000	4	10	1200	4200
Beata	1000	5	5	250	1250
Robert	100	1	99	99	199

7.119. Nie.

7.120. Nie, ponieważ roczne oprocentowania w każdym z banków są równe 12%.

7.121. **a)** 0,03 zł, **b)** 1 zł, **c)** 3 zł.

7.122. **a)** Nie, **b)** tak, podwojenie nastąpi już po upływie 8 lat, bo $(1{,}1)^8\approx 2.14$.

7.123.

Właściciel lokaty	Kapitał początkowy K	Roczna stopa procentowa p	Liczba n lat lokaty	Stan konta po upływie n lat
Bogdan	300	8	3	377,91
Czesław	400	5	4	486,20
Damian	200	10	2	242

7.124. Lokata III. *Wskazówka:* I – 242,17 zł, II – 281,96 zł, III – 320 zł.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Odpowiedź	C	D	C	D	Kolejno: P, P, P, P, P, F	T – A

8. Granica ciągu liczbowego

Ciągi zbieżne do zera i ich własności

8.1. **a)** Dwadzieścia dwa wyrazy, **b)** dwieście dwadzieścia pięć wyrazów.

8.2. (a_n), (b_n), (d_n).

8.3. *Wskazówka.* **a)** $a_n=\frac{2}{3^n}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, gdzie $q=\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{3}\in(-1;1)$, **b)** $a_n=-0{,}6\cdot(-0{,}6)^{n-1}$,

c) $a_n=2\cdot 4^{2-n}=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Ciągi zbieżne i ich własności

8.4. **a)** 3, **b)** –2, **c)** 3, **d)** 0, **e)** $\frac{1}{2}$, **f)** 2.

8.5. **a)** –3, **b)** 0, **c)** 2, **d)** –1, **e)** –1, **f)** 3.

8.6. **a)** –1, **b)** $\frac{3}{2}$, **c)** $-\frac{1}{2}$, **d)** $\frac{5}{7}$, **e)** $\frac{16}{5}$, **f)** 0.

8.7. **a)** 1, **b)** 1, **c)** 0, **d)** 1.

Wskazówka.

d) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

8.8. **a)** 2, **b)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, **c)** 1, **d)** $\frac{1}{3}$, **e)** 0, **f)** 1.

8.9. **a)** $k=-3$, **b)** $k=-2$, **c)** $k=-2$ lub $k=6$, **d)** $k=4$.

8.10. **a)** 10, **b)** –17, **c)** $\frac{5}{3}$, **d)** $\frac{9}{5}$.

8.11. *Wskazówka.* **a)**. Np.: $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ lub $a_n=\frac{4n+1}{n^2}$, $b_n=\frac{4n+5}{n^2}$.

Twierdzenie o trzech ciągach

8.12. Na przykład: **a)** 0 i $\frac{1}{n}$, **b)** $\frac{4n-1}{2n+3}$ i $\frac{4n+1}{2n+3}$, **c)** $\frac{1}{n+3}$ i $\frac{1}{n+1}$, **d)** $\frac{3n^2+n-1}{4n^2+n}$ i $\frac{3n^2+n+1}{4n^2+n}$.

8.13. **a)** 8, **b)** 10, **c)** 10, **d)** 11, **e)** 8, **f)** 6.

8.14. **a)** $\frac{4}{7}$, **b)** $\frac{5}{6}$, **c)** $\frac{3}{4}$, **d)** $\frac{3}{4}$, **e)** 8, **f)** $\frac{3}{4}$.

Wskazówka. **a)** $\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$, więc $\sqrt[n]{\left(\frac{4}{7}\right)^n}<\sqrt[n]{\left(\frac{4}{7}\right)^n+\left(\frac{5^n}{9}\right)}<\sqrt[n]{2\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^n}$.

8.15. **a)** 2, **b)** 3, **c)** 2, **d)** 1.

Wskazówka. **a)** $1+5+9+\ldots+4n-3=2n^2-n$,

$$\frac{1}{n^2+4n-3}+\frac{5}{n^2+4n-3}+\ldots+\frac{4n-3}{n^2+4n-3}\le x_n\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{5}{n^2+1}+\ldots+\frac{4n-3}{n^2+1}$$

$$\frac{1+5+9+\ldots+4n-3}{n^2+4n-3}\le x_n\le\frac{1+5+9+\ldots+4n-3}{n^2+1},$$

d) $n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Szereg geometryczny i jego suma

8.16. **a)** $3+6+12+24+\ldots$, **b)** $4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$, **c)** $-3+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$, **d)** $1+(x-1)+(x-1)^2+\ldots$, **e)** $x+x^2+x^3+x^4+\ldots$, **f)** $0{,}17+0{,}0017+0{,}000017+\ldots$.

8.17. **a)** $-5+\left(-\frac{10}{3}\right)+\left(-\frac{20}{9}\right)+\left(-\frac{40}{27}\right)+\ldots$, **b)** $3+\frac{9}{10}+\frac{27}{100}+\frac{81}{1000}+\ldots$, **c)** $7+\left(-\frac{14}{5}\right)+\frac{28}{25}+\left(-\frac{56}{125}\right)+\ldots$

8.18. **a)** 4, **b)** $\frac{4}{5}$, **c)** $\frac{2\sqrt{3}+3}{2}$, **d)** $\frac{9\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.

8.19. **a)** $\frac{23}{99}$, **b)** $1\frac{13}{99}$, **c)** $\frac{17}{990}$, **d)** $2\frac{31}{990}$, **e)** $\frac{127}{300}$, **f)** $1\frac{403}{3300}$.

8.20. **2** $S=2\sqrt{2}+2$, **3** $S=-\frac{81}{4}$, **5** $S=-\frac{25}{3}$, **6** $S=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{3}+3\right)$.

8.21. Nie, bo $q=1{,}01$.

8.22. **a)** $4\left(\sqrt{5}+2\right)$, **b)** $\sqrt{3}$. *Wskazówka.* **a)** $a_1=|AA_1|=\frac{4}{\sqrt{5}}$, $q=\frac{2}{\sqrt{5}}$, **b)** $a_1=|AA_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q=\frac{1}{2}$.

8.23. $12\sqrt{3}$. **8.24.** $\frac{49}{24}a^2$. **8.25.** **a)** $\pi a\left(2+\sqrt{2}\right)$, **b)** $\frac{1}{2}\pi a^2$.

8.26. **a)** $x\in(0;1)\cup(2;3)$, **b)** $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

8.27. **a)** $x=\frac{2}{9}$, **b)** $x=-6$, **c)** $x=2$, **d)** $x=-\frac{2}{3}$ lub $x=1$.

8.28. **a)** $x\in(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$, **b)** $x\in(3;4)$, **c)** $x\in\langle 3;+\infty)$, **d)** $x\in\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Granica niewłaściwa ciągu

8.30. **a)** $+\infty$, **b)** $-\infty$, **c)** $+\infty$, **d)** $-\infty$, **e)** $+\infty$, **f)** $-\infty$.

8.31. **a)** $+\infty$, **b)** $-\infty$, **c)** $+\infty$, **d)** $-\infty$, **e)** $+\infty$, **f)** $+\infty$.

8.32. Ciągi w punktach **a)**, **b)** i **d)** są rozbieżne.

8.33. **a)** $\frac{1}{6}$, **b)** $+\infty$, **c)** 0, **d)** $\frac{1}{32}$, **e)** $-\frac{1}{8}$, **f)** 32.

8.34. **a)** 1, **b)** -1, **c)** 0, **d)** 0, **e)** $+\infty$.

Wskazówka. Wykonaj działania na ciągach, a następnie oblicz granicę, **e)** $\frac{b_n}{a_n}=\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{3}{n}}=\frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.

8.35. **a)** $+\infty$, **b)** $+\infty$, **c)** 0, **d)** $+\infty$, **e)** 0.

Wskazówka. **a)** $a_n+b_n=n^2-1+\frac{n-1}{n}=\frac{n^3-1}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3-1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-\frac{1}{n}}{1}=+\infty$.

8.36. **a)** $+\infty$, **b)** $+\infty$, **c)** $+\infty$, **d)** $-\infty$.

8.37. **a)** $k=2$, **b)** $k=-1$, **c)** $k=1$, **d)** nie istnieje takie k.

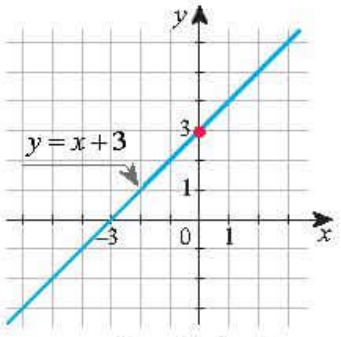
Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Odpowiedź	A i D	B	B i D	F, P	N – B	C	C

9. Granica i ciągłość funkcji

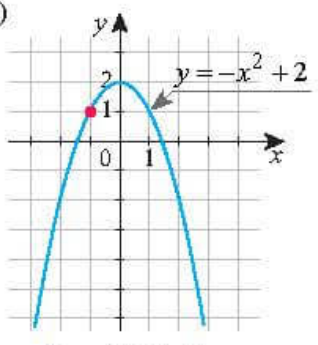
Granica funkcji w punkcie

9.1. **a)**



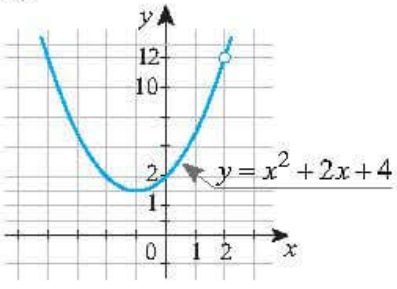
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$

b)



$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$

c)



$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=12$

9.2. **a)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$, tak, **b)** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\frac{1}{4}$, tak, **c)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{3}$, tak, **d)** $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)=0$, tak.

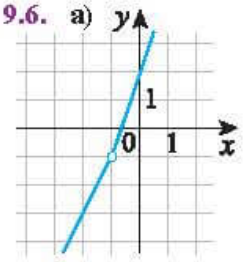
9.3. **a)** 3, **b)** $-\frac{1}{3}$, **c)** 0, **d)** $\frac{9}{7}$, **e)** 2, **f)** 3.

9.4. **a)** 2, **b)** $\frac{1}{4}$, **c)** 0.

9.5. **a)** 0, **b)** $\frac{8}{3}$, **c)** $\frac{1}{4}$, **d)** 2, **e)** $\frac{4}{3}$, **f)** $\frac{3}{2}$. *Wskazówka.* **e)** Pomnóż wzór funkcji przez dwie jedynki $1=\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}$, $1=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$, **f)** pomnóż wzór funkcji przez dwie jedynki $1=\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}$, $1=\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}$.

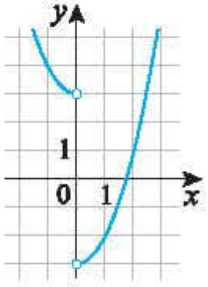
Granice jednostronne funkcji w punkcie

9.6. **a)**



$\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+2)=1$

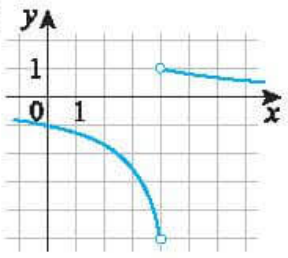
b)



$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3\right)=3,$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-3\right)=-3$

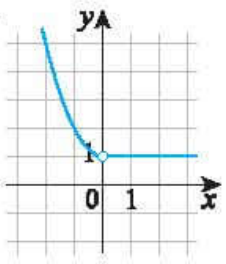
c)



$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5}{x-5}=-5,$

$\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{4}{x}=1$

d)



$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+1\right)=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

9.7. **a)** $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=1$, **b)** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$, **c)** $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$ nie istnieje.

9.8. **a)** $x_0=1$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=4$, **b)** $x_0=1$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-1$,

c) $x_0=2$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=3$.

9.9. **a)** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-2$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, **c)** $\lim\limits_{x\to -3^+}f(x)=4$, **d)** $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=-2$.

9.10. **a)** Nie, **b)** tak, **c)** nie, **d)** tak.

9.11. **a)** $m=2$, **b)** $m_1=-3$, $m_2=1$. *Wskazówka.* **a)** $\lim\limits_{x\to 1^+}(mx+3)=m+3$ i $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2m\right)=1+2m$,

więc $m+3=1+2m$, **b)** $\lim\limits_{x\to 2}(mx+1)=2m+1$ i $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2x-m^2\right)=4-m^2$, więc $2m+1=4-m^2$.

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie

9.12. **a)** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=3$, **b)** $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to -3^+}f(x)=-\infty$,

c) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=-\infty$.

9.13. **a)** $-\infty$, **b)** $-\infty$, **c)** $+\infty$, **d)** $+\infty$, **e)** $-\infty$, **f)** $-\infty$.

9.14. **a)** $+\infty$, **b)** $+\infty$, **c)** $+\infty$, **d)** $-\infty$, **e)** $-\infty$, **f)** -1.

9.15. **a)** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$, **b)** $\lim\limits_{x\to -4}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -4^+}f(x)=+\infty$,

c) $\lim\limits_{x\to 8}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 8^+}f(x)=-\infty$, **d)** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-\infty$,

e) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$,

f) $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=+\infty$.

9.16. **a)** $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\frac{1}{6}$,

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\frac{1}{4}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$,

d) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$,

e) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\frac{3}{2}$,

f) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\frac{3}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

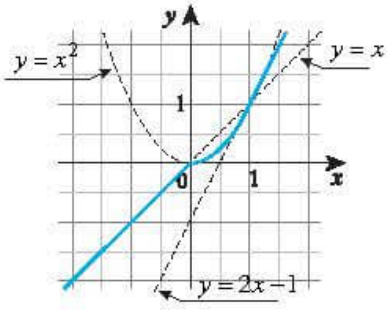
9.17. **a)** $-\infty$, **b)** $+\infty$, **c)** $-\infty$.

Ciągłość funkcji

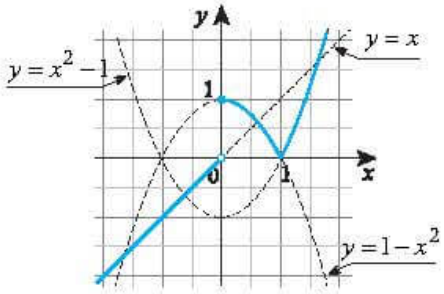
9.19. **a)** Nie jest ciągła w punkcie x_0, **b)** jest ciągła w punkcie x_0, **c)** nie jest ciągła w punkcie x_0, **d)** nie jest ciągła w punkcie x_0.

9.20. **a)** $m=0$, **b)** $m=-1$, **c)** $m\in \boldsymbol{R}$, **d)** $m_1=-2$, $m_2=2$.

9.21. **a)** Funkcja f jest ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$.



b) Funkcja f nie jest ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$.



9.22. **a)** Nie, **b)** tak.

9.23. **a)** $x_0=-2$, **b)** $x_0=2$.

9.24. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^3-1}, & \text{gdy } x\neq 1\\ \dfrac{1}{3}, & \text{gdy } x=1\end{cases}$.

Własności funkcji ciągłych

9.25. **a)** $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $f(-4)\cdot f(4)<0$, **b)** $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=4$, $f(-2)\cdot f(5)>0$, **c)** $x_1=0$, $x_2=3$, $f(-2)\cdot f(4)>0$.

9.26. **a)** $f_{MIN}=f(a)$, $f_{MAX}=f(b)$, **b)** $f_{MIN}=f(b)$, $f_{MAX}=f(a)$.

9.27. **a)** Nie, **b)** nie.

9.28. *Wskazówka.* Oblicz wartości $f(0{,}5)$ i $f(0{,}75)$, $f(1)$ i $f(2)$ oraz $f(2{,}25)$ i $f(2{,}5)$.

9.29. $-0{,}5$.

Granica funkcji w nieskończoności

9.30. **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

9.31. **a)** $+\infty$, **b)** $-\infty$, **c)** $+\infty$, **d)** $-\infty$, **e)** $+\infty$, **f)** $-\infty$.

9.32. **a)** 0, **b)** $-\infty$, **c)** 1, **d)** 0, **e)** 2, **f)** $-2\sqrt{2}$.

9.33. **a)** –2, **b)** –1, **c)** $-\infty$, **d)** 2, **e)** 0, **f)** $-\infty$.

9.34. **a)** $k=\frac{3}{2}$, **b)** $k=\frac{2}{3}$, **c)** $k=1$, **d)** nie istnieje takie k.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Odpowiedź	P, P	F, P	D	C

10. Pochodna funkcji i jej interpretacja

Iloraz różnicowy funkcji i jego interpretacja

10.1. **a)** 15, **b)** 6, **c)** 1, **d)** $-\frac{7}{4}$.

10.2. **a)** 1, **b)** 1, **c)** $-\frac{5}{24}$, **d)** $\frac{1}{2}$.

10.3. **a)** –1, $\alpha=135^\circ$, **b)** $a=-2$, $\alpha\approx117^\circ$.

10.4. $v_{\text{śr}}=6$.

10.5. Jaś przybierał szybciej na wadze w okresie dojrzewania.

Wskazówka. W okresie niemowlęcym $\frac{\Delta m}{\Delta t}=4{,}35$, w okresie dojrzewania $\frac{\Delta m}{\Delta t}=4{,}95$.

10.6. **a)** $25\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, **b)** $50\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, **c)** $60\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Pochodna funkcji w punkcie i jej interpretacja

10.7. **a)** –2, **b)** 4, **c)** $-\frac{1}{4}$.

10.8. **a)** Nie, **b)** nie.

10.9. **a)** –3, **b)** 13.

10.10. **a)** $P=(-1,-3)$, $f'(-1)=-2$, $a=f'(-1)$, **b)** $P=(2,8)$, $f'(2)=12$, $a=f'(2)$.

10.11. **a)** $f'(-2)=-4$, **b)** $f'(3)=2$, **c)** $f'(0)=0$.

Pochodna jako funkcja

10.12. **a)** $f'(x)=0$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$, **b)** $f'(x)=\sqrt{2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$, **c)** $f'(x)=15x^2$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$,

d) $f'(x)=-3x^3$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$, **e)** $f'(x)=21x^{20}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$, **f)** $f'(x)=\dfrac{-7}{x^8}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$,

g) $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$, **h)** $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}^+$.

10.13. **a)** $f'(x)=-2$, **b)** $f'(x)=2-16x$, **c)** $f'(x)=3x^2$, **d)** $f'(x)=2x^2-4$, **e)** $f'(x)=-1$,

f) $f'(x)=2x-2$.

10.14. **a)** $f'(x)=8x^3-6x$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$, **b)** $f'(x)=-8x^7+12x^5-1$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$,

c) $f'(x)=21x^2+\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}^+$, **d)** $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}+24x^3$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}^+$.

10.15. **a)** $f'(x)=18x^2+6x+4$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$, **b)** $f'(x)=12x^{11}-33x^{10}+18x^5-40x^4-12x^3$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$,

c) $f'(x)=\dfrac{6x+3}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}^+$, **d)** $f'(x)=\dfrac{12x-5x\sqrt{x}}{2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}^+$.

10.16. **a)** $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$, **b)** $f'(x)=\dfrac{1}{(3x-7)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\left\{\dfrac{7}{3}\right\}$,

c) $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+2}{\left(x^2-2x\right)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{0,2\}$, **d)** $f'(x)=\dfrac{10(1-x)}{\left(x^2-2x\right)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{0,2\}$,

e) $f'(x)=\dfrac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}$, **f)** $f'(x)=\dfrac{-4x^4+8x^3-3x^2+8x-4}{\left(x^3+1\right)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}$.

10.17. **a)** $f'(x)=4x-3$, $f'(-2)=-11$, $f'(2)=5$, **b)** $f'(x)=3x^2-10x-3$, $f'(-2)=29$, $f'(2)=-11$,

c) $f'(x)=\dfrac{14x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $f'(-2)=-\dfrac{28}{25}$, $f'(2)=\dfrac{28}{25}$.

10.18. **a)** $f'(-1)=-10$, **b)** $f'\left(-\sqrt{2}\right)=1$, **c)** $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{200}{169}$, **d)** $f'(1)=\dfrac{14}{5}$.

10.20. **a)** $x_1=-3$, $x_2=-1$, **b)** $x\in(3;+\infty)$.

10.21. **a)** $f'(x)=2ax+b$, **b)** $f'(x)=4mx-m+2$, **c)** $f'(x)=3(4k-2)x^2-4kx+3k+1$,

d) $f'(x)=\dfrac{-m}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$, **e)** $f'(x)=\dfrac{-4m}{(mx-2)^2}$, $mx-2\neq 0$,

f) $f'(x)=\dfrac{m(m-2)x^2+2(m-2)x-4m}{(mx+1)^2}$, $mx+1\neq 0$.

10.22. $a=1$, $b=2$, $c=-2$.

Funkcja złożona i jej pochodna

10.23. **a)** $g(u)=u^6$, $h(x)=3x-4$, **b)** $g(u)=u^5$, $h(x)=2x^2-4x+1$, **c)** $g(u)=\sqrt{u}$, $h(x)=4x^2+1$,

d) $g(u)=\sqrt[3]{u}$, $h(x)=x^2-5x+1$, **e)** $g(u)=u^3$, $h(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$, **f)** $g(u)=u^{\frac{2}{3}}$, $h(x)=x^2+1$.

10.24. **a)** **1** $g(f(x))=4x^2+8x-5$, **2** $f(g(x))=16x^2-32x+15$,

b) **1** $g(f(x))=-9x^2+3x+2$, **2** $f(g(x))=-27x^2-33x-10$,

c) **1** $g(f(x))=x^2+4$, **2** $f(g(x))=\sqrt{x^4+4x^2+6}$,

d) **1** $g(f(x))=4\sqrt{x^2+x+1}-3$, **2** $f(g(x))=\sqrt{16x^2-20x+7}$,

e) **1** $g(f(x))=\dfrac{1}{x^2}$, **2** $f(g(x))=\dfrac{1}{x^2}$, **f)** **1** $g(f(x))=\dfrac{x-1}{x^2}+1$, **2** $f(g(x))=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

10.25. **a)** $f'(x)=4(2x-5)$, **b)** $f'(x)=-12(3-4x)^2$, **c)** $f'(x)=15(3x+7)^4$,

d) $f'(x)=12(x-1)\left(2x^2-4x+1\right)^2$, **e)** $f'(x)=6(8x+3)\left(4x^2+3x-4\right)^5$,

f) $f'(x)=20x(9x+1)\left(6x^3+x^2\right)^9$.

10.26. **a)** $f'(x)=-6(2x-5)^{-4}$, **b)** $f'(x)=-3(3x+2)^{-2}$, **c)** $f'(x)=-4x\left(x^2+3\right)^{-3}$,

d) $f'(x)=6x^2\left(5-2x^3\right)^{-2}$, **e)** $f'(x)=\dfrac{-4}{(3+4x)^2}$, **f)** $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(4-x^2\right)^2}$,

g) $f'(x)=\dfrac{10}{(3-2x)^2}$, **h)** $f'(x)=\dfrac{-6}{(x+1)^2}$, **i)** $f'(x)=\dfrac{70x}{\left(2-x^2\right)^6}$.

10.27. **a)** $f'(x)=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$, **b)** $f'(x)=-\dfrac{1}{3}(6-x)^{\frac{2}{3}}$, **c)** $f'(x)=2x^2\left(x^3-2\right)^{\frac{1}{3}}$,

d) $f'(x)=x^4\left(4-x^5\right)^{\frac{6}{5}}$, **e)** $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x-5}}$, **f)** $f'(x)=\dfrac{2}{3}x\cdot\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^2}}$.

10.28. **a)** $f'(x)=4(2x+1)\left(x^2+x-1\right)$, **b)** $f'(x)=\dfrac{3x^2-6}{2\sqrt{x^3-6x}}$, **c)** $f'(x)=\dfrac{3-2x}{\left(x^2-3x+5\right)^2}$,

d) $f'(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{x^3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)^3$, **e)** $f'(x)=20x\left(x^2-1\right)\left(x^4-2x^2+3\right)^4$,

f) $f'(x)=2(1+x)(x-2)^3+3(1+x)^2(x-2)^2$.

10.29. **a)** $x_0=\frac{1}{3}$, **b)** $x_1=1,\ x_2=3{,}5,\ x_3=6$, **c)** $x_0=2$.

10.30. *Wskazówka.* $f'(x)=(x)'\cdot\sqrt{x^2+1}+x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\sqrt{x^2+1}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$.

Zastosowanie interpretacji geometrycznej i fizycznej pochodnej funkcji

10.31. **a)** $y=-4x+3$, **b)** $y=6x$, **c)** $y=-2$, **d)** $y=5x-24$, **e)** $y=-x+4$, **f)** $y=-\frac{6}{25}x+\frac{32}{25}$.

10.32. **a)** Tak, $y=-3x+4$, **b)** tak, $y=\frac{7}{4}$, **c)** tak, $y=-2x+4$ i $y=-2x-4$, **d)** tak, $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{24}$.

10.33. **a)** $y=3x+1$, **b)** $y=-27x+63,\ y=-27x-45$, **c)** $y=x+8\frac{1}{5}$, **d)** $y=-2x+2\sqrt{2},\ y=-2x-2\sqrt{2}$.

10.34. **a)** $y=-x+2\frac{15}{16}$, **b)** $y=10x-7,\ y=10x+9$, **c)** $y=x+2,\ y=x-2$,

d) $y=-2x-16,\ y=-2x+16$.

10.35. *Wskazówka.* **a)** $f'(x)=6x^2-6x$ i $f'(x_0)=12$, **b)** $f'(x)=\frac{7}{(x+2)^2}$ i $f'(x_0)=7$,

c) $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$ i $f'(x_0)=2$.

10.36. **a)** $y=6x+7,\ y=10x+3,\ P=(1,13)$, **b)** $y=12x-16,\ y=-8x+24,\ P=(2,8)$, **c)** $y=-4x-3$,

$y=x+2,\ P=(-1,1)$.

10.37. $p=0$ i $q=-\frac{4}{3}$.

10.38. $k=-3$. *Wskazówka.* Rozwiąż układ równań $\begin{cases}f(x)=0\\ f'(x)=0\end{cases}$.

10.39. *Wskazówka.* **a)** $f'(x)>0$, **b)** $f'(x)<0$, **c)** $f'(x)=5\left(x^3+x\right)^4\cdot\left(3x^2+1\right)$ i $f'(x)\geq 0$.

10.40. *Wskazówka.* $f'(x_A)\cdot f'(x_B)=-1$, gdzie $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ oraz $x_A=k-\sqrt{k^2+1},\ x_B=k+\sqrt{k^2+1}$.

10.41. **a)** $v(0)=5$, **b)** $v(1)=5$, **c)** $v(10)=5$, **d)** $v(t)=5$.

10.42. **a)** $v(t)=40-10t,\ a(t)=-10$, **b)** $v(t)=30+4t,\ a(t)=4$, **c)** $v(t)=100-2t,\ a(t)=-2$.

10.43. **a)** $v_{śr}(t)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=6$, **b)** $v'(2)=5$, **c)** $v(t)=0$, gdy $t=\frac{3}{4}$.

Wskazówka. **c)** Zmiana kierunku ruchu następuje w chwili t_0 równej pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli określonej równaniem $s(t)=2t^2-3t$ $\left(t_0=p=\frac{-(-3)}{2\cdot 2}\right)$.

10.44. **a)** $s'(t)=v(t)=t^2-4t$, **1** $v(0)=0$, $s(0)=1$, **2** $v(3)=-3$, $s(3)=-8$,

3 $v(5)=5$, $s(5)=-\frac{22}{3}$,

b) $s'(t)=v(t)=15t^2-6t+2$, **1** $v(0)=2$, $s(0)=-4$, **2** $v(3)=119$, $s(3)=110$,

3 $v(5)=347$, $s(5)=556$.

Związek pochodnej z monotonicznością funkcji

10.45. Funkcja f jest:

a) rosnąca w przedziale $(-\infty;2)$, malejąca w przedziale $(2;+\infty)$,

b) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;1)$, $(4;+\infty)$; malejąca w przedziale $(1;4)$,

c) rosnąca w każdym z przedziałów $(-2;1)$, $(3;+\infty)$; malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-2)$, $(1;3)$.

10.46. Funkcja f jest: **a)** rosnąca w przedziale $(-4;0)$; malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-4)$, $(0;+\infty)$, **b)** **3**.

10.47. Funkcja f jest: **a)** rosnąca w każdym z przedziałów $(-2;1)$, $(4;5)$; malejąca w każdym z przedziałów $\langle -3;-2)$, $(1;4)$, **b)** **1**.

10.48. Funkcja f jest: **a)** malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-3)$, $(1;+\infty)$; rosnąca w przedziale $(-3;1)$,

b) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$; malejąca w przedziale $(0;2)$,

c) malejąca w zbiorze R, **d)** rosnąca w zbiorze R.

10.49. Kolejno: ↗ ↘ ↗.

10.50. Funkcja f jest:

a) malejąca w zbiorze R,

b) rosnąca w każdym z przedziałów $(-1;0)$, $(2;+\infty)$; malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-1)$, $(0;2)$;

c) rosnąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$, **d)** malejąca w przedziale $(-\infty;3)$; rosnąca w przedziale $(3;+\infty)$.

10.51. Funkcja f jest:

a) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$, $(2;+\infty)$,

b) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$,

c) malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$; rosnąca w każdym z przedziałów $(0;1)$, $(1;+\infty)$,

d) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$; malejąca w każdym z przedziałów $(-1;0)$, $(0;1)$.

10.52. Funkcja f jest:

a) rosnąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{2};+\infty\right)$ malejąca w przedziale $\left\langle-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right\rangle$,

b) rosnąca w przedziale $\langle -1;3\rangle$, malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 3;+\infty)$,

c) rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-1\rangle$, $\langle 1;+\infty)$, malejąca w każdym z przedziałów $\langle -1;0)$, $(0;1\rangle$,

d) rosnąca w każdym z przedziałów $\langle 0;1\rangle$, $\langle 2;+\infty)$, malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;0\rangle$, $\langle 1;2\rangle$.

10.53. **a)** $m\in\langle -3;0\rangle$, **b)** $m\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right\rangle$, **c)** $m\in\langle -1;1\rangle$.

10.54. *Wskazówka.* Zauważ, że: **a)** $(3;5)\subset(2;+\infty)$, **b)** $(-20;-10)\subset(-\infty;-1)$,

c) funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty;3)$, $(3;+\infty)$.

10.55. *Wskazówka.* Funkcja jest monotoniczna, gdy jest rosnąca lub malejąca, lub nierosnąca, lub niemalejąca w całej dziedzinie.

Ekstrema lokalne funkcji

10.56. **a)** $y_{\min}=f(2)=-1$, **b)** $y_{\max}=f(-2)=2$, $y_{\min}=f(2)=-2$,

c) $y_{\max}=f(-1)=2$, $y_{\min}=f(0)=0$, $y_{\max}=f(1)=2$.

10.57. **a)** $x_1=-2$, $x_2=4$, **b)** $y_{\min}=f(-2)$.

10.58. **a)** tak, $y_{\min}=f(1)=-1$, **b)** nie, **c)** nie, **d)** tak, $y_{\max}=f(0)=-1$.

10.59. $y_{\max}=f(2)=3$, $y_{\min}=f(6)=-4$.

10.60. **a)** Nie ma ekstremum, **b)** $y_{\min}=f(1)=-2$, $y_{\max}=f(-1)=2$,

c) $y_{\min}=f(5)=0$, $y_{\max}=f\left(\frac{5}{3}\right)=55\frac{5}{9}$, **d)** $y_{\min}=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{32}$.

10.61. **a)** $y_{\max}=f(-4)=-7$, $y_{\min}=f(2)=5$, **b)** nie ma ekstremum,

c) $y_{\max}=f(-2)=-4$, $y_{\min}=f(2)=4$, **d)** $y_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{9}$.

10.62. **a)** $y_{\min}=f(0)=0$, **b)** $y_{\min}=f(0)=-1$, $y_{\max}=f(2)=3$.

10.63. *Wskazówka.* Naszkicuj wykres funkcji f.

10.64. $m=-3$, $y_{\max}=f(2)$.

10.65. *Wskazówka.* Zauważ, że warunek konieczny istnienia ekstremum jest spełniony, ale nie jest spełniony warunek wystarczający.

10.66. **a)** Funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$;

funkcja malejąca w przedziale $(-1;1)$; $y_{\max}=f(-1)=5$, $y_{\min}=f(1)=1$,

b) funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $\left(-\sqrt{3};0\right)$, $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(0;\sqrt{3}\right)$; $y_{\max}=f(0)=0$, $y_{\min}=f\left(-\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{9}{4}$,

c) funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(-1;0)$, $(0;1)$; $y_{\max}=f(-1)=-1$, $y_{\min}=f(1)=3$,

d) funkcja rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty;0)$, $(4;+\infty)$; funkcja malejąca w każdym z przedziałów $(0;2)$, $(2;4)$; $y_{\max}=f(0)=0$, $y_{\min}=f(4)=8$,

e) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty;0)$; funkcja rosnąca w przedziale $(0;+\infty)$; $y_{\min}=f(0)=-1$.

10.67. *Wskazówka.* Wystarczy wykazać, że funkcja $f(x)=x^3-2x+2$, gdy $x>2$: **1** nie ma ekstremów, **2** jest rosnąca, **3** $f(2)>0$.

Najmniejsza i największa wartość funkcji – zastosowania

10.68. **a)** $y_{MIN}=f(4)=-80$, $y_{MAX}=f(0)=0$, **b)** $y_{MIN}=f(-1)=-10$, $y_{MAX}=f(1)=2$,

c) $y_{MIN}=f(-2)=f(2)=-3$, $y_{MAX}=f(-1)=f(1)=6$, **d)** $y_{MIN}=f(0)=0$, $y_{MAX}=f(4)=28$.

10.69. **a)** $y_{MIN}=f(3)=\frac{9}{2}$, $y_{MAX}=f(4)=\frac{16}{3}$, **b)** $y_{MIN}=f(0)=-1$, $y_{MAX}=f(-1)=f(1)=0$,

c) $y_{MIN}=f(0)=0$, $y_{MAX}=f(-1)=2$, **d)** $y_{MIN}=f(0)=\frac{9}{2}$, $y_{MAX}=f\left(-\frac{2}{3}\right)=5\frac{1}{2}$.

10.70. **a)** $P=(-1,-1)$, **b)** $P=(1,0)$.

10.71. **a)** $Y_f=\langle -2;2\rangle$, **b)** $Y_f=\langle 0;2\rangle$, **c)** $Y_f=\langle -1;2\rangle$, **d)** $Y_f=\langle -1;1\rangle$.

10.72. $m=4$.

10.73. $p=0$.

10.74. O godzinie 10^{00}.

10.75. Przy produkcji 45 sztuk.

10.76. $P_{MIN}=P(10)=400$.

10.77. Powinno się wytwarzać 20 sztuk.

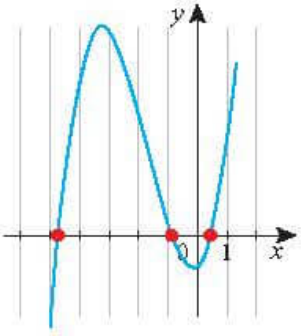
10.78. Funkcja f maleje w każdym z przedziałów $(-\infty;0)$, $(0;1)$; funkcja f rośnie w przedziale $(1;+\infty)$; $y_{\min}=f(1)=3$; **1**.

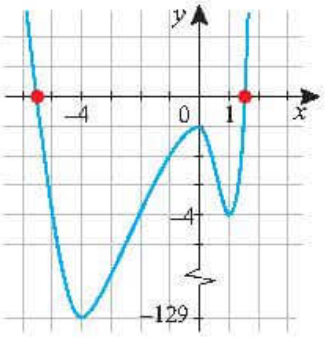
10.79. $d_{\min}=d(1)=8$. *Wskazówka.* $d(x)=4x^2+\frac{4}{x^2}$, gdy $P_1=\left(x,\frac{1}{x}\right)$ i $P_2=\left(-x,-\frac{1}{x}\right)$.

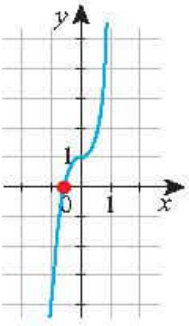
10.80. Równanie ma: **a)** trzy pierwiastki, **b)** dwa pierwiastki, **c)** jeden pierwiastek.

Wskazówka. Przybliżony wykres funkcji f:

a) $f(x)=x^3+5x^2+x-2$, **b)** $f(x)=x^4+4x^3-8x^2-1$, **c)** $f(x)=x^5+5x^3+1$.







10.81. $y_{MIN}=f(1)=0$, $y_{MAX}=f(3)=4\sqrt{6}$. *Wskazówka.* $f'(x)=\dfrac{(x-1)\left(3x^2-6x+7\right)}{\sqrt{x^2-2x+3}}$, gdzie

$f'(x)=\left[(x-1)^2\right]'\cdot\sqrt{x^2-2x+3}+(x-1)^2\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+3}\right)'$.

Zestaw powtórkowy

Nr zadania	1.	2.	3.	4.	5.
Odpowiedź	B	P, F	D	D	A