

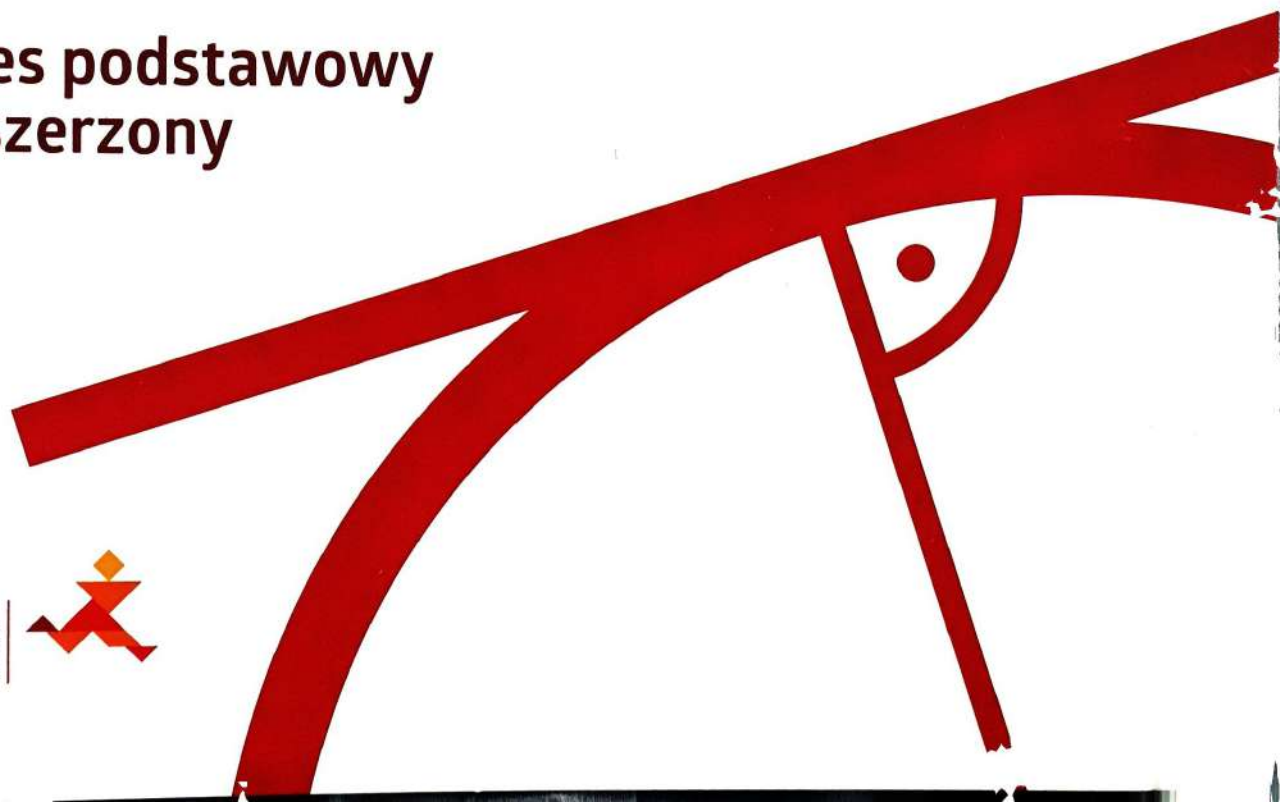
MATURA

z matematyki

Arkusze

**Zakres podstawowy
i rozszerzony**

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



Alina Popiołek
Jerzy Radziewicz
Adam Wojacek

NOWA mATURA

z matematyki

Arkusze

Zakres podstawowy
i rozszerzony

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



SPIS TREŚCI

Wstęp	4
Przykładowe arkusze egzaminacyjne (zakres podstawowy)	5
Arkusz egzaminacyjny nr 1*	6
Arkusz egzaminacyjny nr 2*	14
Arkusz egzaminacyjny nr 3	23
Arkusz egzaminacyjny nr 4	32
Arkusz egzaminacyjny nr 5	40
Arkusz egzaminacyjny nr 6	48
Arkusz egzaminacyjny nr 7	56
Arkusz egzaminacyjny nr 8	64
Arkusz egzaminacyjny nr 9	73
Arkusz egzaminacyjny nr 10	81
Przykładowe arkusze egzaminacyjne (zakres rozszerzony)	91
Arkusz egzaminacyjny nr 11	92
Arkusz egzaminacyjny nr 12	101
Arkusz egzaminacyjny nr 13	108
Arkusz egzaminacyjny nr 14	115
Arkusz egzaminacyjny nr 15	123
Schematy rozwiązań zadań otwartych (zakres podstawowy)	131
Schematy rozwiązań zadań (zakres rozszerzony)	155
Odpowiedzi	191

* Arkusz bez zadań z geometrii analitycznej, kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa

WSTĘP

Drodzy Maturzyści!

Proponujemy Wam książkę, która pomoże solidnie powtórzyć materiał z matematyki i jak najlepiej przygotować się do egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym i rozszerzonym. Dzięki niej zapoznacie się z nową strukturą arkuszy egzaminacyjnych oraz sprawdzicie stopień opanowania wiadomości i umiejętności wymaganych na egzaminie.

Główna część publikacji to 15 przykładowych arkuszy egzaminacyjnych wzorowanych na zadaniach egzaminacyjnych CKE. Zostały one uporządkowane w taki sposób, że 10 początkowych arkuszy to zestawy z zakresu podstawowego, a 5 kolejnych – z zakresu rozszerzonego. W dwóch początkowych arkuszach z zakresu podstawowego pominięto treści dotyczące geometrii analitycznej, kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Możecie po te arkusze sięgnąć nawet wtedy, gdy w szkole nie omówiliście jeszcze tych zagadnień.

Rozwiązanie każdego arkusza egzaminacyjnego powinno trwać nie dłużej niż 180 minut. Warto więc sprawdzić, jak długo pracujecie nad zadaniami z danego zestawu. Istotne jest nabranie wprawy w rozplanowaniu czasu, tak aby wystarczyło go zarówno na rozwiązanie wszystkich zadań, jak i ich sprawdzenie.

W książce, po przykładowych arkuszach egzaminacyjnych, umieściliśmy schematy rozwiązań wszystkich zadań otwartych. Możecie skorzystać z nich, gdy nie macie pomysłu na rozwiązanie zadania. Na końcu publikacji znajdują się odpowiedzi do wszystkich zadań.

Mamy nadzieję, że dzięki tej książce do egzaminu maturalnego z matematyki przystąpiacie pewni siebie i bez zbędnego stresu.

Autorzy

Drodzy Nauczyciele!

Niniejsza książka powstała z myślą o uczniach przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym w latach 2023 i 2024. Może być polecana do samodzielnej pracy ucznia. Można ją też wykorzystać jako pomoc do powtórzenia materiału na lekcji lub sprawdzenia poziomu wiedzy i umiejętności uczniów (do przeprowadzenia próbnej matury). W książce umieszczono 15 przykładowych arkuszy egzaminacyjnych (10 z zakresu podstawowego, 5 z zakresu rozszerzonego) wraz z zasadami oceniania. Zarówno arkusze, jak i zasady oceniania zostały przygotowane na podstawie aktualnych wytycznych CKE.

W zestawach zawarliśmy różnorodne zadania, tak pod względem zakresu materiału, typów zadań, jak i skali trudności.

Mamy nadzieję, że nasza publikacja pomoże Państwa uczniom nabrać wprawy w rozwiązywaniu zadań egzaminacyjnych i w rezultacie dobrze przygotować się do egzaminu maturalnego z matematyki.

Autorzy

PRZYKŁADOWE ARKUSZE EGZAMINACYJNE

(zakres podstawowy)

Arkusz egzaminacyjny nr 1

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\frac{\log 1234 - \log 1,234}{\log 123,4 - \log 12,34}$ jest równa:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 3

Zadanie 2. (0-1)

Wskaż liczbę, której odwrotność jest liczbą całkowitą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{\sqrt[6]{\frac{1}{64}} \cdot \sqrt[3]{-64}}{\sqrt{0,64}}$ B. $\frac{\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[4]{625}}{\sqrt{25}}$ C. $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{343}} \cdot \sqrt{49}}{\sqrt{0,49}}$ D. $\frac{\sqrt[5]{100\,000} : \sqrt[3]{-1\,000\,000}}{\sqrt[4]{0,0001}}$

Zadanie 3. (0-1)

Ile procent liczby $x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3-\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3+\sqrt{2}}$ stanowi liczba $y = 4^{2-\sqrt{3}} \cdot 4^{2+\sqrt{3}}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 6,25% B. 12,5% C. 16% D. 25%

Zadanie 4. (0-1)

Dane są cztery liczby:

$$w = 9^{-\frac{5}{2}} \quad x = 81^{\frac{3}{4}} \quad y = 27^{-\frac{4}{3}} \quad z = (\sqrt{3})^4$$

Jeśli pominiemy jedną z tych czterech liczb, to iloczyn trzech pozostałych będzie równy 1. Którą liczbę należy pominąć?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. w B. x C. y D. z

Zadanie 5. (0-1)

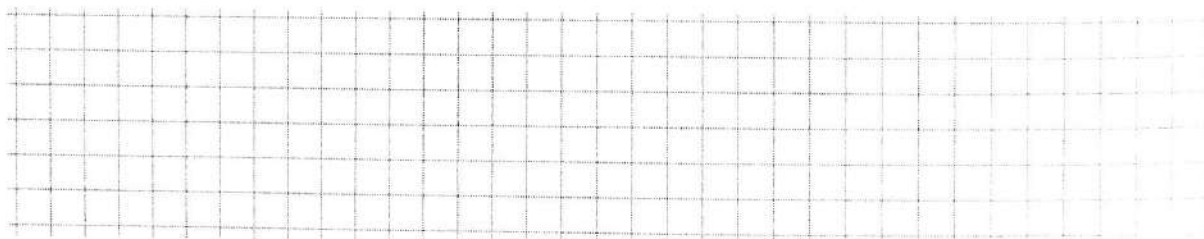
Wskaż przedział, do którego należy liczba a spełniająca warunek $\log_2 a = 1 + \log_2 5$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $(-\infty; 4)$ B. $\langle 4; 8)$ C. $\langle 8; 16)$ D. $\langle 16; +\infty)$

Zadanie 6. (0-2)

Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych nie jest podzielna przez 3.



Zadanie 7. (0-1)

Dane są cztery wyrażenia:

$$P(x) = 4x^2 + 3x$$

$$Q(x) = 10x^2 - 6$$

$$R(x) = 7x^2 + 9x$$

$$S(x) = 16x^2 - 12$$

Jedno z tych wyrażeń pominięto i obliczono sumę pozostałych wyrażeń. Ta suma jest równa $T(x) = 27x^2 + 12x - 12$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przy obliczaniu tej sumy pominięto wyrażenie:

A. $P(x)$

B. $Q(x)$

C. $R(x)$

D. $S(x)$

Zadanie 8. (0-1)

Wartość wyrażenia $x^5 + 2x^3 - 1000x^2$ dla pewnego x_0 ($x_0 > 0$) jest równa 2000, a wartość wyrażenia $x^3 + 2x - 1000$ dla tego samego x_0 jest równa 20. Wskaż wartość wyrażenia $x^4 + 2x^2 - 1000x$ dla liczby x_0 .

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 200

B. 100

C. 20

D. 10

Zadanie 9. (0-1)

Dane są dwa równania:

$$\text{I. } \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + x} = 0$$

$$\text{II. } \frac{x(x^2 + 1)}{x - 1} = 0$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Równanie I ma więcej pierwiastków niż równanie II.	P	F
2.	Nie istnieje liczba, która jest jednocześnie pierwiastkiem równania I i równania II.	P	F

Zadanie 10. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma wszystkich liczb naturalnych spełniających nierówność $\frac{6-x}{2} > \frac{2-x}{6}$ jest równa:

A. 28

B. 21

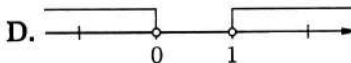
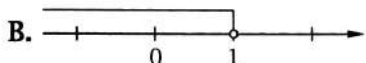
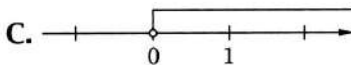
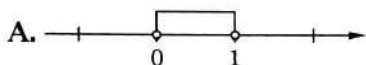
C. 15

D. 10

Zadanie 11. (0-1)

Wskaż rysunek, na którym na osi liczbowej zaznaczono zbiór wszystkich liczb spełniających nierówność $x^2 < x$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



Zadanie 12. (0-1)

Wskaż układ równań, który spełnia więcej niż jedna para liczb.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ -3x + 2y = -6 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 6y = 3 \\ 6x - y = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 6y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 6x - 3y = 12 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$

Zadanie 13. (0-3)

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + px + q$, dla którego $W(2) = 3^2$ i $W(3) = 2^3$.

Wyznacz wartość wielomianu $W(x)$ dla $x = -1$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-1)

Funkcja liniowa f określona jest za pomocą wzoru $f(x) = (k\sqrt{3} - 7)x - 2$, gdzie $k < 4$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f jest:

A.	rosnąca,	ponieważ	1.	$k\sqrt{3} - 7 < 0$.
B.	stała,		2.	$k\sqrt{3} - 7 = 0$.
C.	malejąca,		3.	$k\sqrt{3} - 7 > 0$.

Zadanie 15. (0-1)

Dane są funkcje f i g określone wzorami: $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$, $g(x) = -3x + 11$. Wiadomo, że wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie P .

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Punkt P ma współrzędne

Zadanie 16. (0-2)Funkcja f określona jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -2x + 6 & \text{dla } x \in \langle -1; 3 \rangle \\ 2x - 6 & \text{dla } x \in \langle 3; +\infty \rangle \end{cases}$$

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Największą wartość w przedziale $\langle -4; 1 \rangle$ funkcja f przyjmuje dla argumentu:

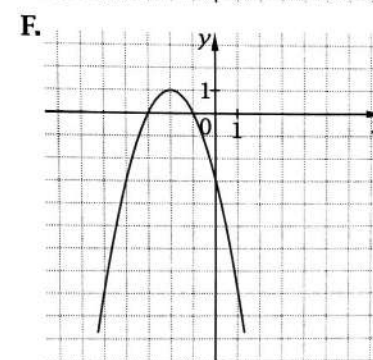
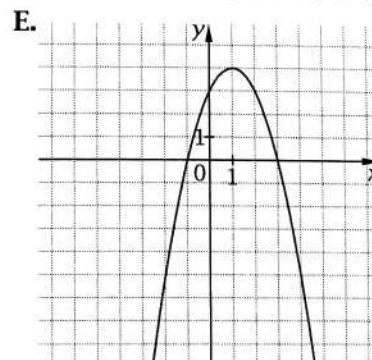
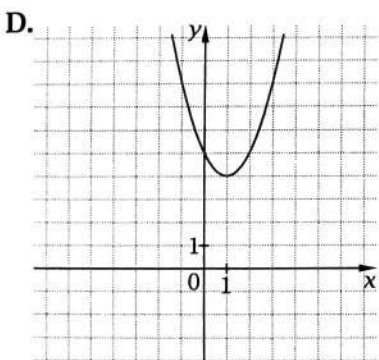
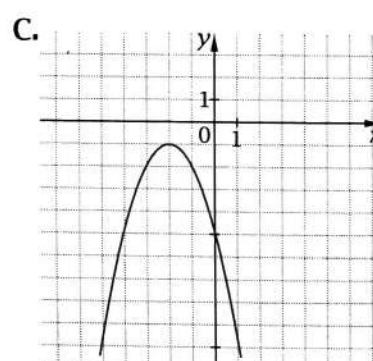
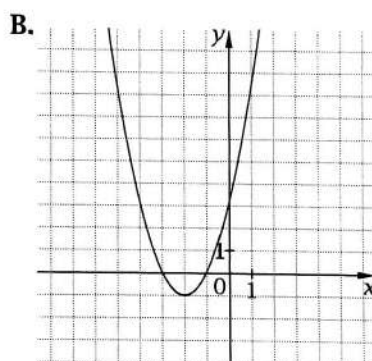
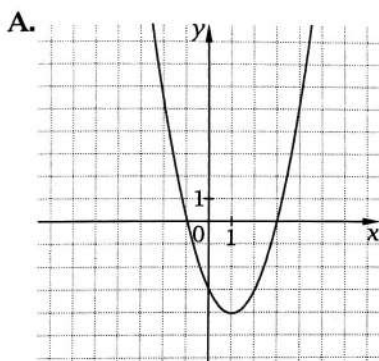
A. -4 B. -3 C. -2 D. -1

2. Najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 4; 7 \rangle$ jest:

E. -1 F. 0 G. 2 H. 4

Zadanie 17. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli funkcja $f(x) = mx^2 - x + \frac{1}{4}$ ma dwa różne miejsca zerowe, to:A. $m = 4$ B. $m = 1,5$ C. $m = 1$ D. $m = 0,5$ **Zadanie 18. (0-2)**Na rysunkach A-F przedstawiono fragmenty wykresów funkcji kwadratowych, w tym fragmenty wykresów funkcji $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ i $g(x) = x^2 + 4x + 3$.Każdej z funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ przyporządkuj fragment jej wykresu. Wpisz obok symbolu funkcji w tabeli poniżej właściwą odpowiedź wybraną spośród A-F.

Numer zadania	Funkcja	Rysunek
18.1.	$y = f(x)$	
18.2.	$y = g(x)$	

Zadanie 19. (0-1)

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = -2(n-3)(n+5)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n) jest równa:

- A. 14 B. 24 C. 30 D. 38

Zadanie 20. (0-1)

Pięcioma początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejno liczby: 8, 11, 14, 17, 20.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica $a_{60} - a_{50}$ jest równa:

- A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

Zadanie 21. (0-3)

Liczby 6, 12, 18, 27 wypisane w tej kolejności nie tworzą ciągu geometrycznego, ale można zmienić jedną z nich tak, aby otrzymać cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) .

Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 22. (0-1)

Wskaż wyrażenie, którego wartość jest liczbą dodatnią.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\sin 120^\circ - \cos 120^\circ$ C. $\sin 140^\circ \cdot \cos 140^\circ$
B. $\operatorname{tg} 130^\circ + \cos 130^\circ$ D. $\operatorname{tg} 150^\circ \cdot \sin 150^\circ$

Zadanie 23. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta rozwartego rombu o polu 24 i boku 5 jest równy:

- A. $-\frac{5}{24}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $-\frac{7}{24}$ D. $-\frac{24}{25}$

Zadanie 24. (0-2)



W trójkącie ostrokątnym jeden z boków ma długość 2, a inny ma długość 1. Sinus kąta między tymi bokami jest równy $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Pole tego trójkąta jest równe:

- A. $4\sqrt{15}$ B. $2\sqrt{15}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

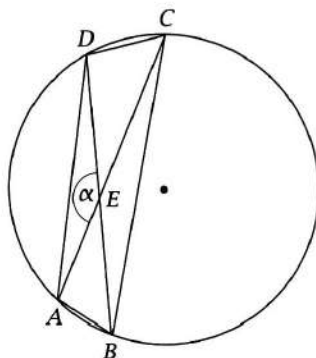
2. Obwód tego trójkąta jest równy:

- E. 4 F. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ G. $2 + \sqrt{15}$ H. 5

Zadanie 25. (0-1)



Przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek). Kąt wpisany ACB opiera się na łuku, który stanowi $\frac{1}{15}$ całego okręgu, a kąt CBD opiera się na łuku, który stanowi $\frac{1}{12}$ całego okręgu.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

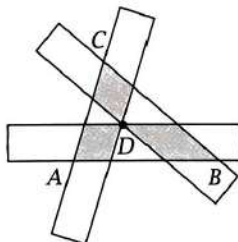
Miara kąta rozwartego AED jest równa:

- A. 126° B. 132° C. 153° D. 155°

Zadanie 26. (0-1)



Trzy paski folii o jednakowej szerokości naklejono tak, jak na rysunku poniżej.



Punkty A , B , C są wierzchołkami trójkąta różnobocznego ABC i każdy z tych punktów leży na brzegu dwóch pasków.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W punkcie D , który leży na brzegu wszystkich trzech pasków przecinają się:

- A. dwusieczne trzech kątów wewnętrznych tego trójkąta.
B. środkowe tego trójkąta.
C. symetralne trzech boków tego trójkąta.
D. proste zawierające wysokości tego trójkąta.

Zadanie 27. (0-1)

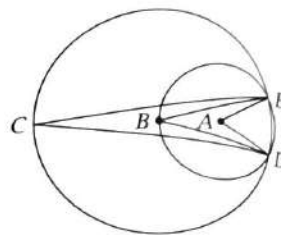
Punkt B jest środkiem okręgu O_1 i należy do okręgu O_2 o środku A . Okręgi te przecinają się w punktach D i E , a punkt C należy do okręgu O_1 (zobacz rysunek).

Suma miar kątów DAE , DBE , DCE jest równa 98° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

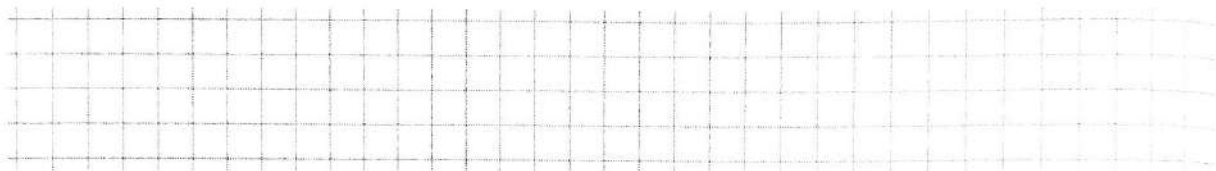
Najmniejszy z tych trzech kątów ma miarę:

- A. 35° B. 21° C. 15° D. 14°

**Zadanie 28. (0-2)**

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 5$ i $|AC| = 12$, a kąt CAB ma miarę α taką, że $\cos \alpha = -0,6$.

Wyznacz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

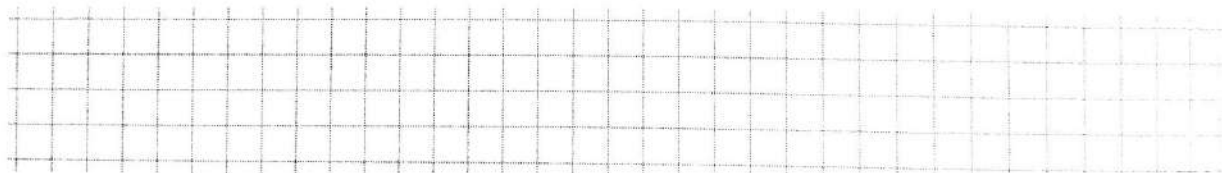
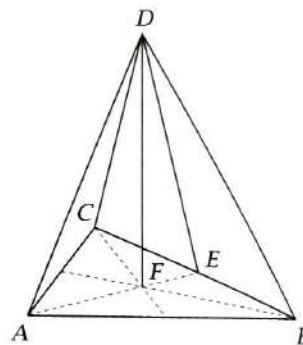
**Zadanie 29.**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCD$ punkt D jest wierzchołkiem ostrosłupa, a punkt F — spodkiem jego wysokości. Wysokość DE ściany bocznej jest dwa razy dłuższa niż odcinek EF (zobacz rysunek).

Zadanie 29.1. (0-1)

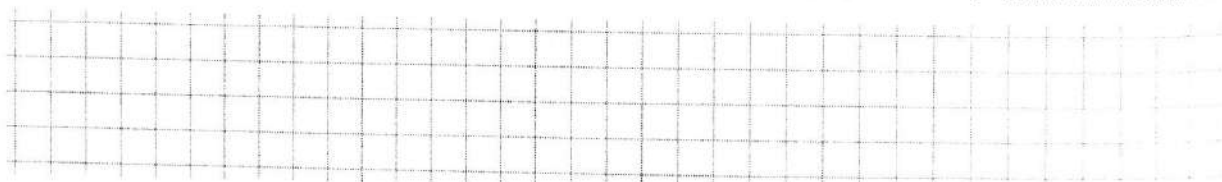
Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Miara kąta DEF jest równa stopni.

**Zadanie 29.2. (0-1)**

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Stosunek długości krawędzi podstawy do wysokości ostrosłupa jest równy



Zadanie 30. (0–1)

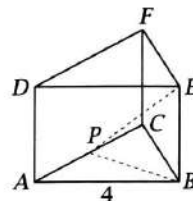
Graniastosłup prawidłowy G ma 54 krawędzie. Ile krawędzi ma ostrosłup prawidłowy o podstawie przystającej do podstawy graniastosłupa G ?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 45 B. 36 C. 27 D. 18

Zadanie 31. (0–1)

Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$ jest równa 4. W graniastosłupie tym wyznaczono taki punkt P , że $|AP| = |PC|$ oraz trójkąt BEP jest równoramienny (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego graniastosłupa jest równa:

- A. 8 B. $8\sqrt{3}$ C. 24 D. $24\sqrt{3}$

Zadanie 32. (0–1)

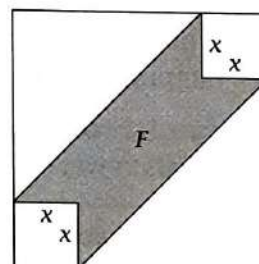
Średnia arytmetyczna zestawu Z_1 dwudziestu liczb dodatnich jest równa 30, a dominanta całego zestawu, to 40. Każdą liczbę w tym zestawie powiększono o 20% i otrzymano zestaw Z_2 .

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

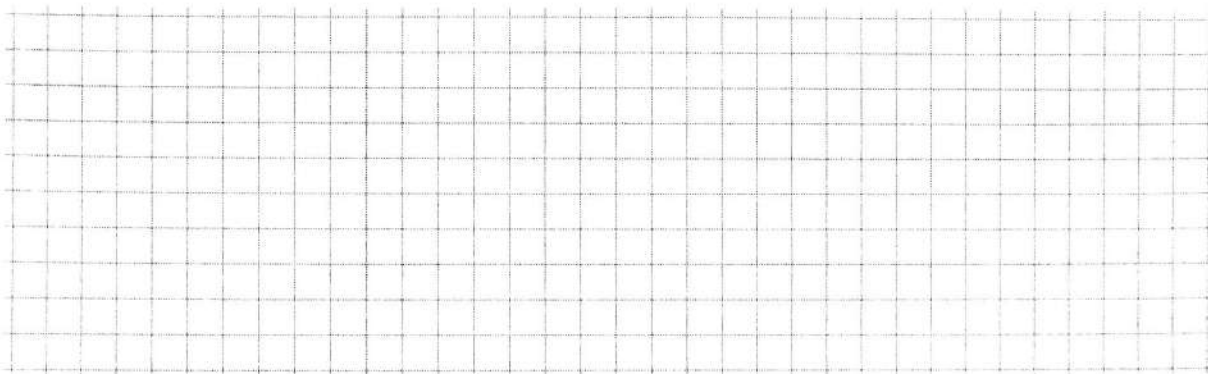
1.	Suma liczb tworzących zestaw Z_1 jest równa 600.	P	F
2.	Dominanta zestawu Z_2 jest równa 60.	P	F

Zadanie 33. (0–4)

Od kwadratowego arkusza blachy, którego bok ma długość 60 cm należy odciąć dwa mniejsze kwadraty — każdy o boku x cm oraz dwa jednakowe trójkąty równoramienne (zobacz rysunek).



Wyznacz taką wartość x , dla której pole pozostałej części dużego kwadratu (pole figury F zacieniowanej na rysunku), jest największe. Podaj to największe pole. Zapisz obliczenia.



Arkusz egzaminacyjny nr 2

Zadanie 1. (0-1)



Wskaż liczbę równą wartości wyrażenia $\frac{(10^5)^3}{10^6 \cdot 10^7 \cdot 10^8}$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

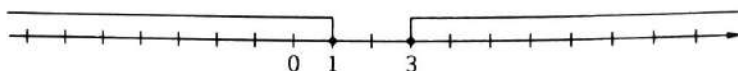
A. 0,00001

B. 10^{-6} C. $\frac{1}{100^2}$ D. $0,001^{-2}$

Zadanie 2. (0-1)



Wskaż nierówność, której rozwiązaniem jest zbiór przedstawiony na rysunku.



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $|x - 1| > 1$ C. $|x - 2| \geq 1$ B. $|x + 1| \leq 2$ D. $|x + 2| < 1$

Zadanie 3. (0-1)



Dane są liczby:

$$a = \log_{64} 8$$

$$b = \log_8 8$$

$$c = \log_2 8$$

$$d = \log_{\frac{1}{2}} 8$$

Wskaż nierówność prawdziwą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $a < bcd$ C. $c < abd$ B. $b < acd$ D. $d < abc$

Zadanie 4. (0-1)



Jurek wypisał od najmniejszej do największej wszystkie liczby dwucyfrowe, w zapisie których występują jedynie cyfry 1, 2 lub 3.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Piąta z kolei liczba w zapisie Jurka ma sumę cyfr równą 4.	P	F
2.	Suma wszystkich liczb wypisanych przez Jurka jest mniejsza od 200.	P	F

Zadanie 5. (0-1)



Dane jest równanie z niewiadomą x :

$$(2\sqrt{2} - 3)(2\sqrt{2} + 3) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszą liczbą x , która spełnia to równanie jest:

A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

Zadanie 6. (0-1)

Dane jest wyrażenie:

$$W = (x + \sqrt{2}y)^2 - (x - \sqrt{2}y)^2$$

Wartość wyrażenia W dla pewnych liczb rzeczywistych x, y jest równa 24.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn xy jest równy:

- A. 12 B. $4\sqrt{2}$ C. 6 D. $3\sqrt{2}$

Zadanie 7. (0-1)

Dane są dwa wyrażenia:

$$P(x) = |x - 2| - 2 \quad Q(x) = x - 4$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Dla każdej liczby $x \in \langle -2; +\infty \rangle$ wartości obu wyrażeń są równe.	P	F
2.	Dla każdej liczby ujemnej x zachodzi $P(x) \cdot Q(x) < 0$.	P	F

Zadanie 8. (0-1)

Dane jest równanie $\frac{(x-2)(x^2-1)}{(8-4x)(1+x)} = 0$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wszystkich rozwiązań tego równania jest:

- A. $\{1\}$ B. $\{2\}$ C. $\{-1, 2\}$ D. $\{-2, -1\}$

Zadanie 9. (0-3)

W każde pole szachownicy o n wierszach i n kolumnach, gdzie $n > 1$, wpisano liczbę określającą, z iloma polami sąsiaduje ono wzdłuż boku. Suma wszystkich tych liczb jest równa 22 200.

Wyznacz liczbę n . Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0-2)

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich zdanie było prawdziwe.

Równanie $x + 2y = 1$ tworzy układ sprzeczny wraz z równaniem:

A. $2x - 4y = 2$

C. $-x + 2y = 1$

E. $-x - 2y = 2$

G. $x - 2y = 1$

B. $x + 2y = 1$

D. $2x + 4y = 1$

F. $-2x + 4y = 2$

Zadanie 11. (0-3)

Wojciech ma 20 lat. Osiem lat temu wiek Joanny stanowił 160% średniej arytmetycznej ówczesnego wieku Wojciecha i Katarzyny. Za osiem lat wiek Katarzyny będzie stanowił 80% średniej arytmetycznej wieku, który wówczas osiągną Joanna i Wojciech.

Oblicz, jakim procentem obecnej średniej arytmetycznej wieku Joanny i Katarzyny jest obecny wiek Wojciecha. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-1)

Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -1,5x + 3 & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 0,5x - 3 & \text{dla } x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejscem zerowym funkcji $f(x)$ nie jest liczba:

A. -4

B. 2

C. 3

D. 6

Zadanie 13. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + kx + 9$ należy punkt $P = (1, 4)$, zatem:

A. miejscami zerowymi funkcji f są liczby 3 i -3.

B. miejscem zerowym funkcji f jest jedynie liczba -3.

C. miejscem zerowym funkcji f jest jedynie liczba 3.

D. funkcja f nie ma miejsca zerowego.

Zadanie 14. (0-1)

Dana jest funkcja f , która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje liczbę o 8 od niej mniejszą.

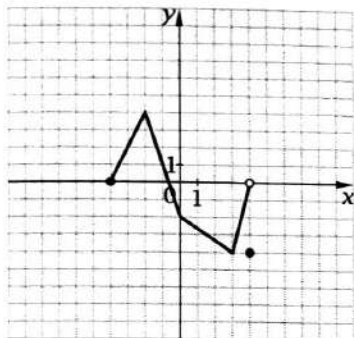
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Miejscem zerowym funkcji f jest liczba (-8) .	P	F
2.	Funkcja f przyjmuje wartości ujemne jedynie dla argumentów ujemnych.	P	F

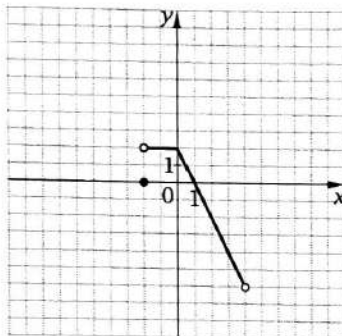
Zadanie 15. (0-2)

Na rysunkach A-F przedstawiono wykresy różnych funkcji. Wśród nich jest wykres funkcji $y = f(x)$ o dziedzinie $\langle -6; 2 \rangle$ i przyjmującej dla każdego argumentu mniejszego od -2 wartość mniejszą od -2 oraz wykres funkcji $y = g(x)$, której zbiorem wartości jest $\langle -4; 4 \rangle$, a liczba -2 jest jej miejscem zerowym.

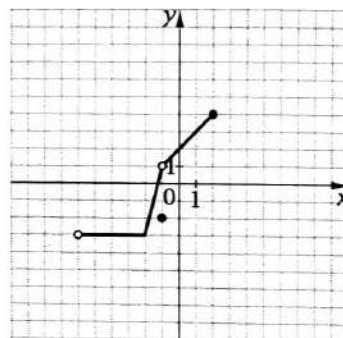
A.



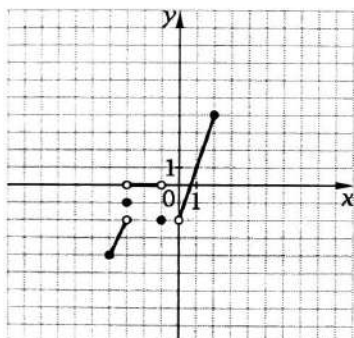
B.



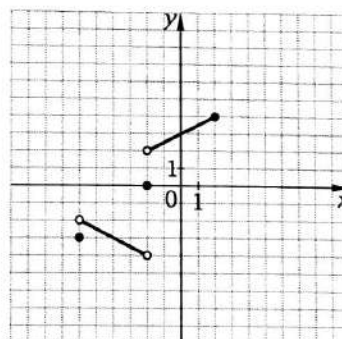
C.



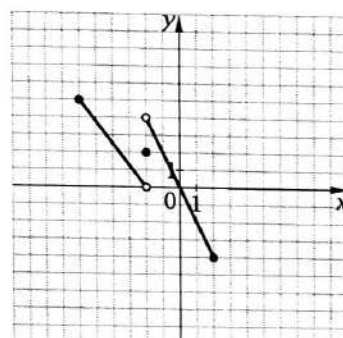
D.



E.



F.

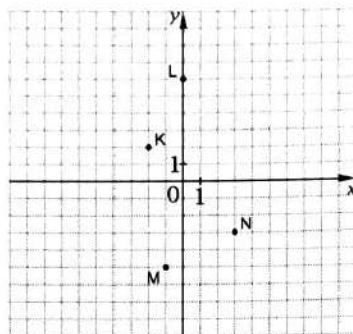


Każdej z funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ przyporządkuj rysunek, na którym przedstawiono jej wykres. Wpisz obok symbolu funkcji w tabeli poniżej właściwą odpowiedź wybraną spośród A-F.

Numer zadania	Funkcja	Rysunek
15.1.	$y = f(x)$	
15.2.	$y = g(x)$	

Zadanie 16. (0-1)

Dziedzinę funkcji $f(x) = 6 - x^2$ tworzą wszystkie liczby rzeczywiste. W układzie współrzędnych zaznaczono punkty K , L , M , N .



Jeden z nich nie należy do wykresu funkcji f . Który to punkt?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. K B. L C. M D. N

Zadanie 17. (0-1)

Dla pewnej liczby rzeczywistej x ciąg $2, x, 8$ jest geometryczny, a ciąg $12, x, -20$ jest arytmetyczny.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz ciągu geometrycznego jest równy:

- A. 2 B. -2 C. 4 D. -4

Zadanie 18. (0-1)

Wszystkie wyrazy malejącego ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie. Wskaż wyrażenie, które ma najmniejszą wartość.

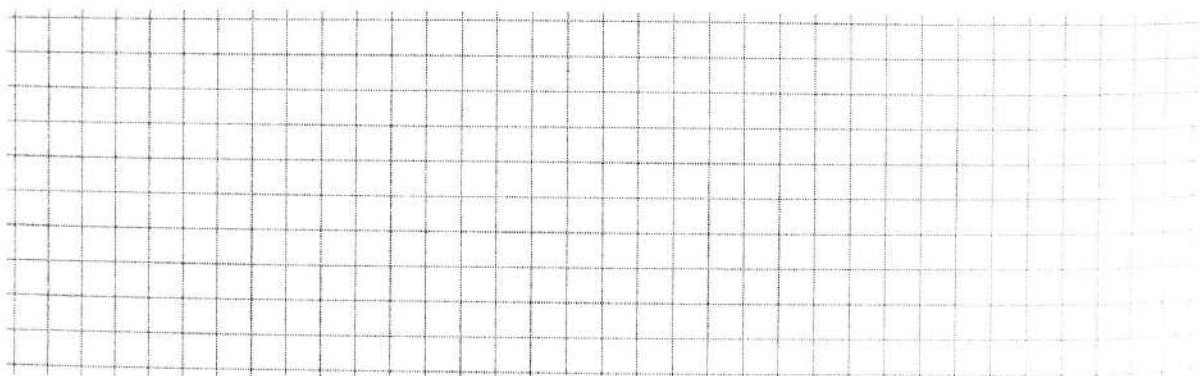
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{a_7}{a_2}$ B. $\frac{a_{14}}{a_{12}}$ C. $\frac{a_8}{a_{11}}$ D. $\frac{a_{10}}{a_{14}}$

Zadanie 19. (0-2)

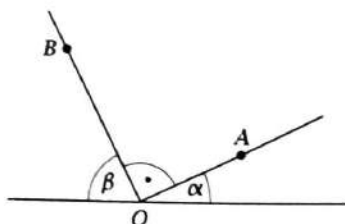
Dany jest ciąg arytmetyczny $a_n = 2n + 8$.

Wyznacz pięć kolejnych wyrazów ciągu (a_n) , których suma jest równa 180. Zapisz obliczenia.



Zadanie 20. (0-2)

Półproste OA i OB są prostopadłe, a tangens kąta α jest równy $\frac{1}{2}$ (zobacz rysunek).



Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Sinus kąta α jest równy:

- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

2. Tangens kąta β jest równy:

- E. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ F. $\frac{1}{2}$ G. $\sqrt{2}$ H. 2

Zadanie 21. (0-2)

Dla kąta ostrego α określono wyrażenie:

$$W = \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha$$

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Obliczono wartość wyrażenia W dla każdego $\alpha \in \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$. Największą wartość otrzymano dla:

- A. $\alpha = 0^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha = 60^\circ$

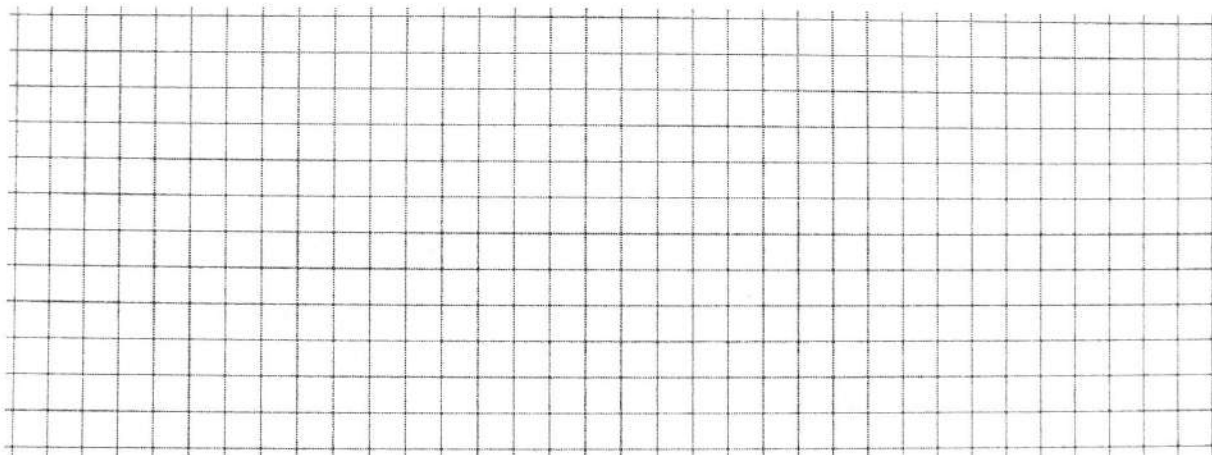
2. Dla każdej wartości $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ wyrażenie W jest równe:

- E. $\frac{1}{\sin \alpha}$ F. $\frac{1}{\cos \alpha}$ G. $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ H. 1

Zadanie 22. (0-4)

W trójkącie prostokątnym ABC , w którym przyprostokątne mają długości: $|AC| = 1$ i $|AB| = 7$, obrano na boku AB punkt D taki, że $\frac{\operatorname{tg} \angle ACB}{\operatorname{tg} \angle ACD} = 1,75$.

Wyznacz iloraz $\frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ACD}$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 23. (0-1)

Na okręgu o promieniu 6 cm zaznaczono łuk AB o długości $1,5\pi$ cm.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Kąt środkowy opierający się na łuku AB stanowi $\frac{1}{8}$ kąta pełnego.	P	F
2.	Łuk AB jest 7 razy krótszy od pozostałej części okręgu.	P	F

Zadanie 24.

W okrąg o środku O wpisano wielokąt foremny, który ma dokładnie 12 osi symetrii.

Zadanie 24.1. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Miara kąta AOB , gdzie A, B to dwa kolejne wierzchołki tego wielokąta, jest równa stopni.

Zadanie 24.2. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Miara kąta ABC , gdzie A, B, C to trzy kolejne wierzchołki tego wielokąta, jest równa stopni.

Zadanie 25. (0-1)

Zbiór wszystkich punktów, których odległość od punktu $S = (2, 1)$ jest mniejsza lub równa 10, jest kołem. Wskaż punkt, który nie należy do tego koła.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $K = (11, 4)$

B. $L = (10, -5)$

C. $M = (-6, -4)$

D. $N = (-5, 9)$

Zadanie 26. (0–1)

W układzie współrzędnych poprowadzono trzy proste a , b i c :

$$a: y = (2 - \sqrt{5})x + 0,5$$

$$b: y = (\sqrt{5} + 2)x + 7,5$$

$$c: y = (\sqrt{5} - 2)x + 0,5$$

Wskaż zdanie prawdziwe.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Proste a i c są równoległe.
- B. Proste b i c są prostopadłe.
- C. Proste b i c są równoległe.
- D. Proste a i b są prostopadłe.

Zadanie 27. (0–1)

W trójkącie ABC boki mają długości: $|AB| = 10$, $|AC| = 12$, $|BC| = 15$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Trójkąt ABC jest trójkątem:

A.	prostokątnym,	ponieważ	1.	$\cos \sphericalangle BAC < 0$.
B.	ostrokątnym,		2.	$\cos \sphericalangle BAC > 0$.
C.	rozwartokątnym,		3.	$\cos \sphericalangle BAC = 0$.

Zadanie 28. (0–1)

Pole rombu o boku długości 5 jest równe 15.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta ostrego tego rombu jest równy:

- A. $\frac{4}{3}$
- B. $\frac{3}{5}$
- C. $\frac{3}{4}$
- D. $\frac{4}{5}$

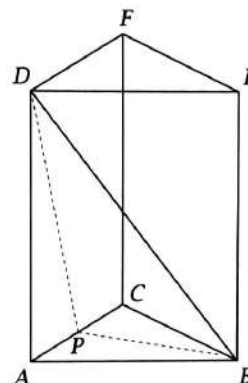
Zadanie 29. (0–1)

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCDEF$ poprowadzono odcinek DP , gdzie P jest środkiem krawędzi AC (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt BDP , to kąt nachylenia:

- A. odcinka AB do ściany $ABED$.
- B. odcinka BD do ściany ABC .
- C. odcinka BP do ściany $ACFD$.
- D. odcinka BD do ściany $ACFD$.



Zadanie 30. (0-1)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt między dwiema krawędziami bocznymi ma miarę dwukrotnie mniejszą niż kąt między dwiema krawędziami podstawy.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy, wychodzącymi z tego samego wierzchołka, jest równa:

A. 30°

B. 45°

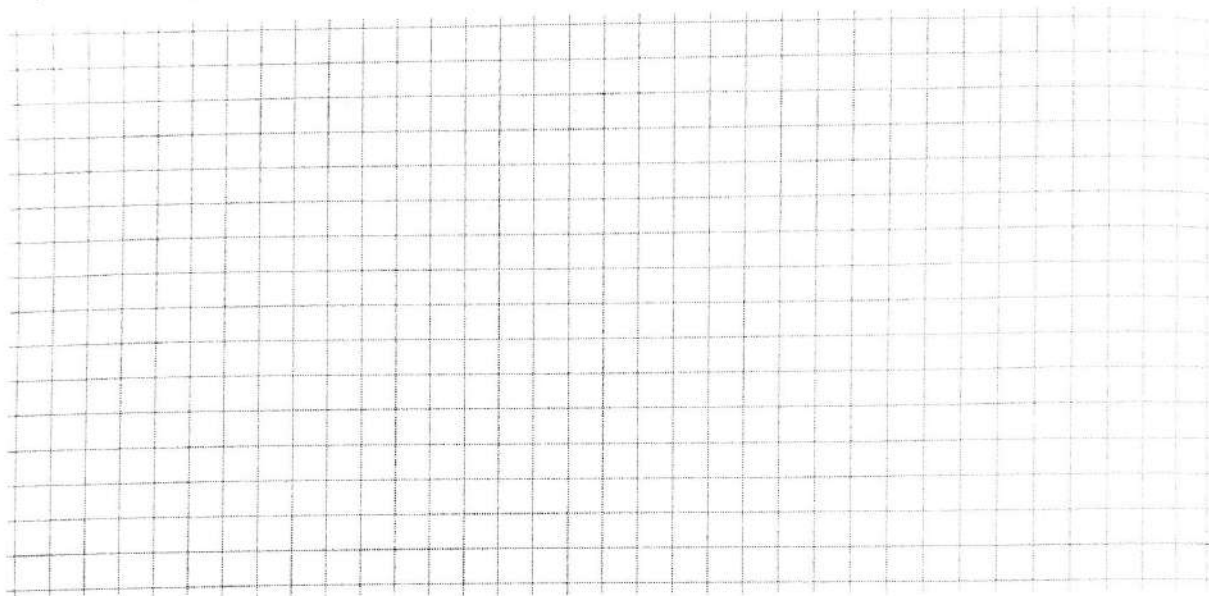
C. 60°

D. 75°

Zadanie 31. (0-2)

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12. Tangens kąta między krawędzią boczną a podstawą jest równy $2\sqrt{2}$.

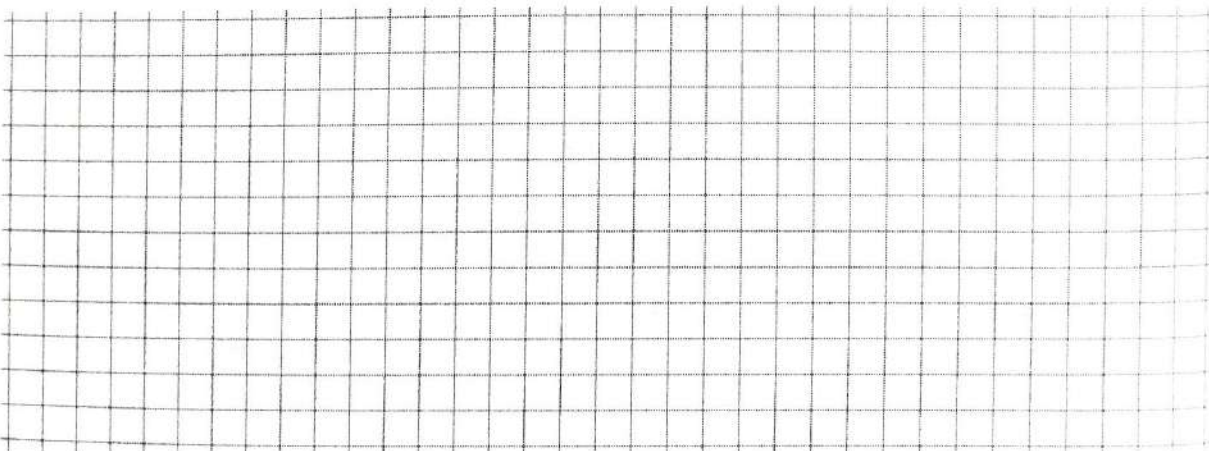
Wyznacz objętość ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 32. (0-1)**

Do zestawu liczb: 2, 3, 7, 15, 23 dołączono jeszcze średnią arytmetyczną wszystkich liczb tworzących ten zestaw.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Mediana powiększonego zestawu liczb jest równa



Zadanie 1. (0-1)

O ile liczba $a = 2 \log_3 3\sqrt{10}$ jest większa od liczby $b = 2 \log_3 \sqrt{10}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $2\sqrt{10}$ B. 3 C. 2 D. 9

Zadanie 2. (0-1)

Jaki procent liczby $z = \frac{(16^3 \cdot (0,25)^5)^4}{(0,5)^{-5}}$ stanowi liczba $t = \frac{\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt[6]{243}}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 112,5% B. $88\frac{8}{9}\%$ C. 12,5% D. $11\frac{1}{9}\%$

Zadanie 3. (0-1)

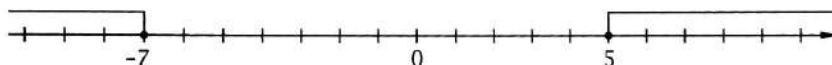
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Niech liczba naturalna n daje przy dzieleniu przez 4 resztę 3. Wówczas wartość wyrażenia $3n^2 + 2n$ dla tej liczby n daje przy dzieleniu przez 4 resztę:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 4. (0-1)

Wskaż nierówność, której rozwiązanie przedstawiono na osi liczbowej.



Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

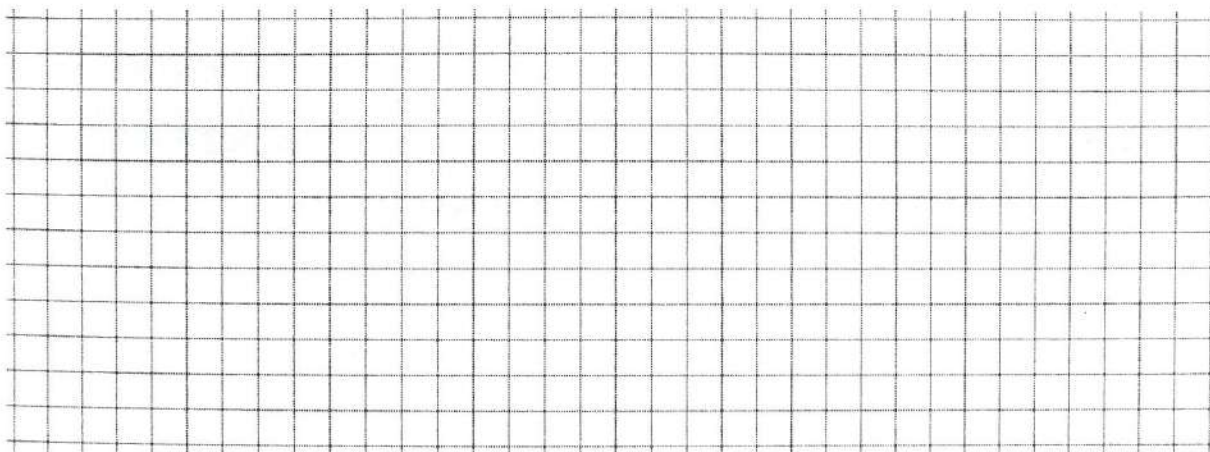
- A. $|x+1| \geq 5$ B. $|x-1| \geq 6$ C. $|x+2| \geq 7$ D. $|x+1| \geq 6$

Zadanie 5. (0-2)

Wiadomo, że liczby a i b są dodatnie oraz $a^2 + b^2 = 14ab$.

Wykaż, że dla każdej liczby a i b prawdziwa jest równość:

$$2 \log \frac{a+b}{4} = \log a + \log b$$



Zadanie 6. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $x = -3$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + mx^2 + mx + 3$. Wynika stąd, że:

- A. $m = 4$ B. $m = -3$ C. $m = -\frac{5}{2}$ D. $m = 5$

Zadanie 7. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedzina wyrażenia wymiernego $\frac{4x}{4x^3 + 3x^2 - 20x - 15}$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}, 0, \sqrt{5}\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, -\frac{3}{4}, \sqrt{5}\}$
 B. $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}, \sqrt{5}\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{5}\}$

Zadanie 8. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równość $\frac{x}{y} = \sqrt{7} + 1$ spełnia para liczb:

- A. $x = \sqrt{7} + 2$ i $y = 2$ C. $x = 6$ i $y = \sqrt{7} - 1$
 B. $x = 2\sqrt{7} + 1$ i $y = 2$ D. $x = 2$ i $y = \sqrt{7} - 1$

Zadanie 9. (0-1)

Dla jakiej wartości parametru m równanie $m^2x - 5 = 25x + m$ ma nieskończenie wiele rozwiązań?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $m = 5$ B. $m = -5$ C. $m = 0$ D. $m = 25$

Zadanie 10. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie:

$$\frac{(3x-1)(2x-5)}{(8x-20)(x+3)} = 0$$

w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie:

- A. jedno rozwiązanie C. trzy rozwiązania
 B. dwa rozwiązania D. cztery rozwiązania

Zadanie 11. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

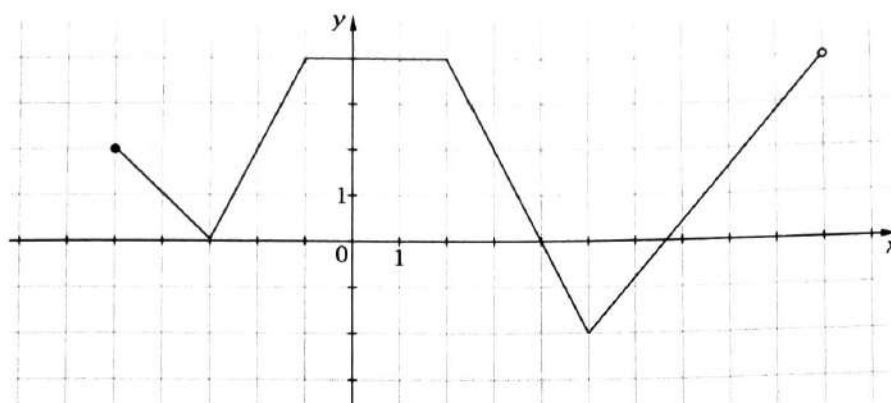
Układ równań zapisany w ramce obok:

- A. jest nieoznaczony
 B. jest oznaczony
 C. jest sprzeczny
 D. ma dokładnie dwa rozwiązania

$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} - \frac{x-1}{2} = 4 \\ \frac{y-4}{2} - \frac{x-y}{3} = 5 \end{cases}$$

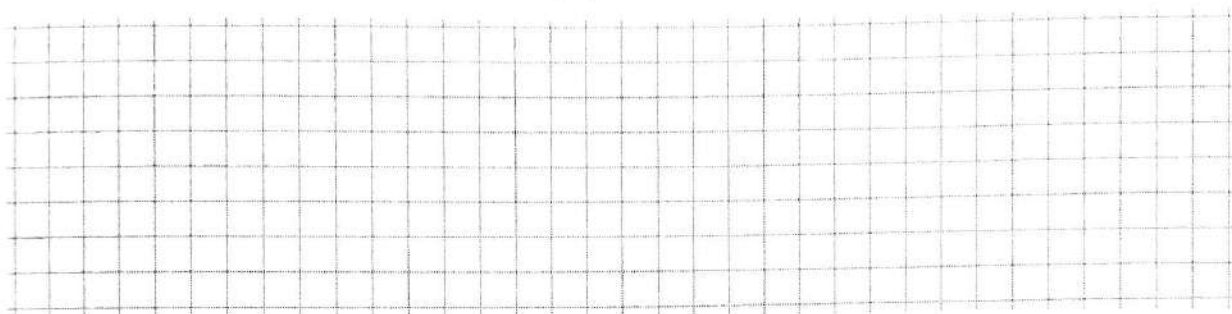
Zadanie 12.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.



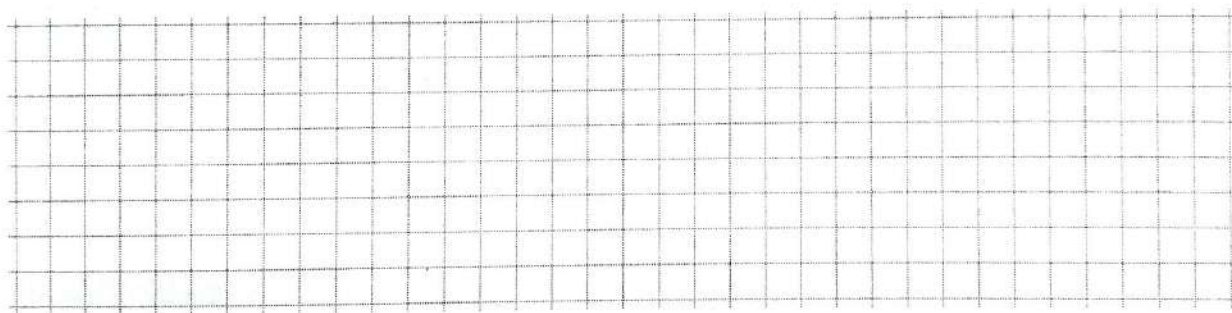
Zadanie 12.1. (0–1)

Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji f .



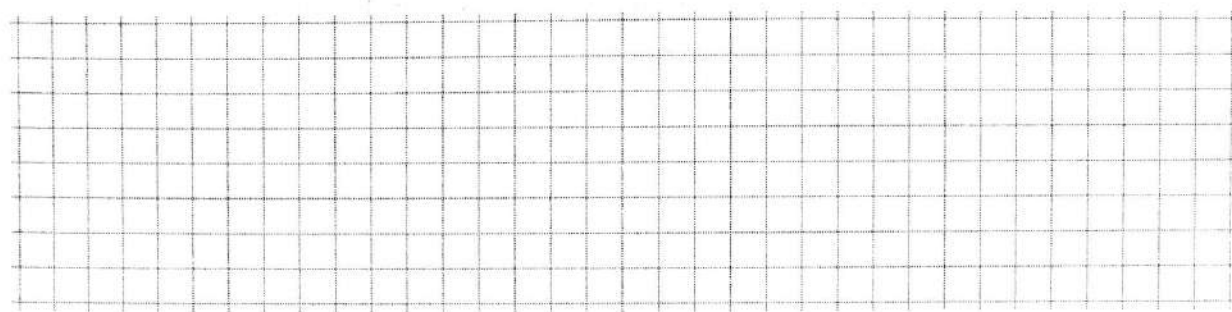
Zadanie 12.2. (0–1)

Oblicz różnicę między największą a najmniejszą wartością funkcji f .



Zadanie 12.3. (0–1)

Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f .

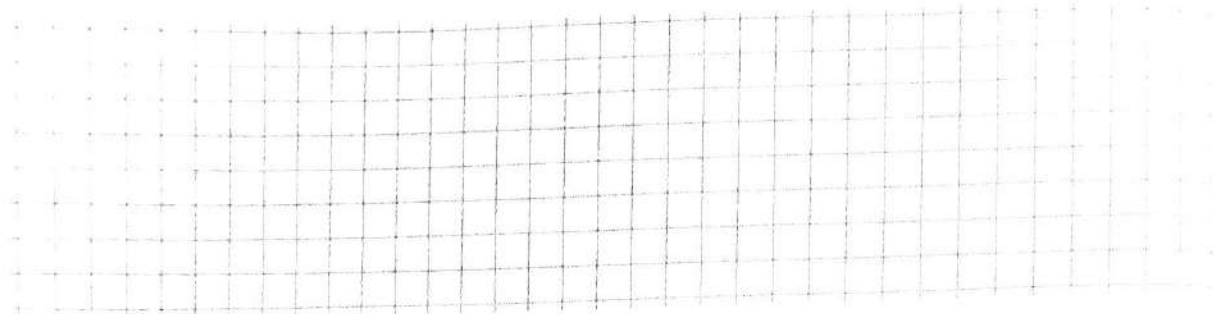


Zadanie 13.

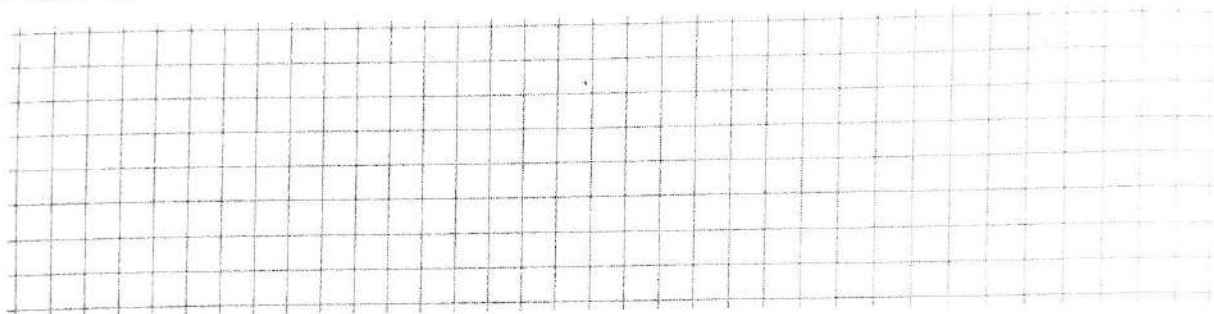
Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$ oraz funkcja liniowa g , której wykres przecina oś y układu współrzędnych w tym samym punkcie co wykres funkcji f oraz przechodzi przez punkt $P = (2, 4)$.

Zadanie 13.1. (0-1)

Wyznacz wzór funkcji g . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 13.2. (0-2)**

Wiedząc, że funkcja g przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in (\frac{2}{3}; +\infty)$ wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcje f i g jednocześnie przyjmują wartości ujemne. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 14. (0-1)**

Dla jakiej wartości a do wykresu funkcji $f(x) = a^x$ należy punkt $(-2, 16)$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych:

- A. $a = \frac{1}{4}$ B. $a = \frac{1}{8}$ C. $a = 4$ D. $a = -8$

Zadanie 15. (0-2)

Wykres funkcji kwadratowej f ma z prostą $y = -2$ jeden punkt wspólny, a prostą $y = 6$ przecina w punktach o współrzędnych $(-5, 6)$ i $(11, 6)$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f ma współrzędne:

- A. $W = (3, 2)$ C. $W = (3, -2)$
B. $W = (-3, 2)$ D. $W = (-3, -2)$

2. Wzór funkcji f można zapisać w postaci:

- E. $f(x) = \frac{1}{8}(x+3)^2 - 2$ G. $f(x) = \frac{1}{8}(x-3)^2 - 2$
F. $f(x) = \frac{1}{16}(x-3)^2 + 2$ H. $f(x) = \frac{1}{16}(x-3)^2 - 2$

Zadanie 16. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przesuwając wykres funkcji $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ o pięć jednostek w lewo i siedem jednostek w dół otrzymamy wykres funkcji g określonej wzorem:

- A. $g(x) = (x + 4)^2 - 5$ C. $g(x) = (x - 4)^2 - 7$
 B. $g(x) = (x - 6)^2 - 5$ D. $g(x) = (x - 8)^2 - 3$

Zadanie 17. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ dla liczb naturalnych $n \geq 1$ jest:

A.	malejący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$	1.	$a_{n+1} - a_n = 0$.
B.	stały,		2.	$a_{n+1} - a_n > 0$.
C.	rosnący,		3.	$a_{n+1} - a_n < 0$.

Zadanie 18. (0-1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 5^{n+1} + 5^n + 5^{n-1}$ dla liczb naturalnych $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) można zapisać w postaci $a_n = 5^{3n}$.	P	F
2.	Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = 5$ i $a_1 = 31$.	P	F

Zadanie 19. (0-1)

Dany jest nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n) , w którym $a_6 + a_{13} + a_{15} + a_{19} + a_{22} = 120$. Który wyraz ciągu (a_n) jest równy 24?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. a_{15} B. a_{17} C. a_{18} D. a_{14}

Zadanie 20. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt α jest rozwarty i $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$. Wynika stąd, że:

- A. $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ C. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$
 B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ D. $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$

Zadanie 21. (0-1)

Ile jest równe pole kwadratu, którego przekątna jest o 3 dłuższa od jego boku?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $27 - 18\sqrt{2}$ B. $9 + 6\sqrt{2}$ C. $27 + 18\sqrt{2}$ D. 27

Zadanie 22. (0-1)

W trójkącie prostokątnym o bokach długości 2, $2\sqrt{3}$, 4, poprowadzono dwusieczną kąta prostego.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dwusieczna podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach:

A. 2 i 2

C. $2(\sqrt{3} + 1)$ i $2(3 - \sqrt{3})$

B. $2(\sqrt{3} - 1)$ i $2(3 - \sqrt{3})$

D. $\sqrt{2}$ i $\sqrt{6}$

Zadanie 23. (0-1)

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym podstawy AB i CD mają odpowiednio długości 9 i 5, cosinus kąta ostrego jest równy $\frac{2}{7}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość trapezu $ABCD$ jest równa:

A. $8\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{5}$

C. $6\sqrt{5}$

D. $\sqrt{53}$

Zadanie 24. (0-1)

Trójkąt ABC podzielono na dwie figury prostą przechodzącą przez środki boków AC i BC .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek pól figur (trójkąta do trapezu) otrzymanych w wyniku podziału jest równy:

A. $\frac{1}{2}$

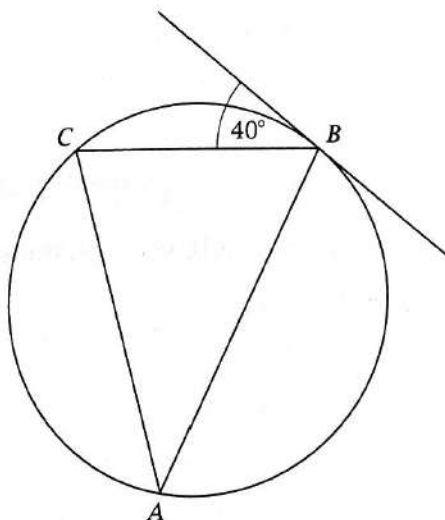
B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{9}$

D. $\frac{1}{3}$

Zadanie 25. (0-1)

Na trójkącie ABC opisano okrąg. Styczna do okręgu w wierzchołku B tworzy z bokiem BC kąt 40° (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta BAC trójkąta ABC jest równa:

A. 80°

B. 40°

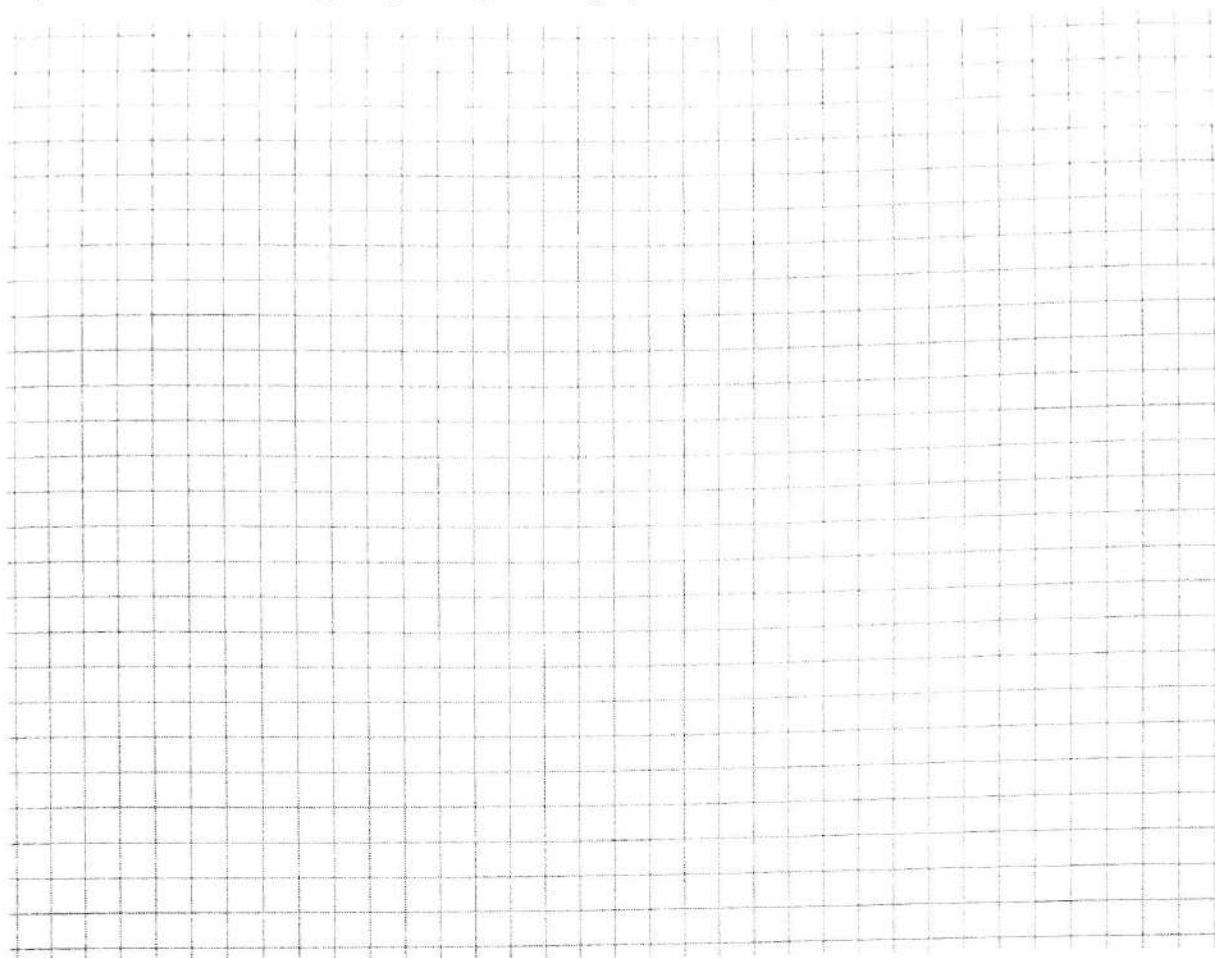
C. 50°

D. 20°

Zadanie 26. (0–3)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 6$, $|AC| = 4$ i $|BC| = 5$.

Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 27. (0–2)

Punkty $A = (0, -3)$ i $C = (4, 5)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $ABCD$, którego pole jest równe 60.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A–D oraz spośród E–H.

1. Długość przekątnej BD rombu $ABCD$ jest równa:

- A. $6\sqrt{5}$ B. $20\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{5}$ D. 10

2. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie o współrzędnych:

- E. (2, 1) F. (2, -1) G. (-2, 1) H. (2, 4)

Zadanie 28. (0–1)

Dane są punkty $K = (4\sqrt{3}, 0)$, $L = (6, 2\sqrt{3} - 4)$ i $M = (2\sqrt{3}, -2)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Prosta przechodząca przez punkty K i M ma równanie $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$.	P	F
2.	Punkty K , L i M są współliniowe.	P	F

Zadanie 29. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odcinek AB o końcach $A = (-2, 3)$ i $B = (6, -1)$ jest średnicą okręgu o równaniu:

A. $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$

C. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$

B. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 40$

D. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 80$

Zadanie 30.

Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest dwa razy krótsza od wysokości ściany bocznej poprowadzonej do krawędzi podstawy.

Zadanie 30.1. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Kąt między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej poprowadzoną do krawędzi podstawy ma miarę stopni.

Zadanie 30.2. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Przyjmijmy, że wysokość tego ostrosłupa jest równa 2. Wtedy jego objętość jest równa

Zadanie 31. (0-1)

Spośród wierzchołków ośmiokąta foremnego losowo wybieramy dwa.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo, że wybrane losowo dwa wierzchołki wyznaczą przekątną ośmiokąta jest równe:

A. $\frac{5}{7}$

B. $\frac{5}{13}$

C. $\frac{6}{7}$

D. $\frac{5}{14}$

Zadanie 32. (0–1)

W tabeli przedstawiono pewien zestaw danych:

Wartość	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Liczebność	7	4	5	1	6	3	3	2	2	1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

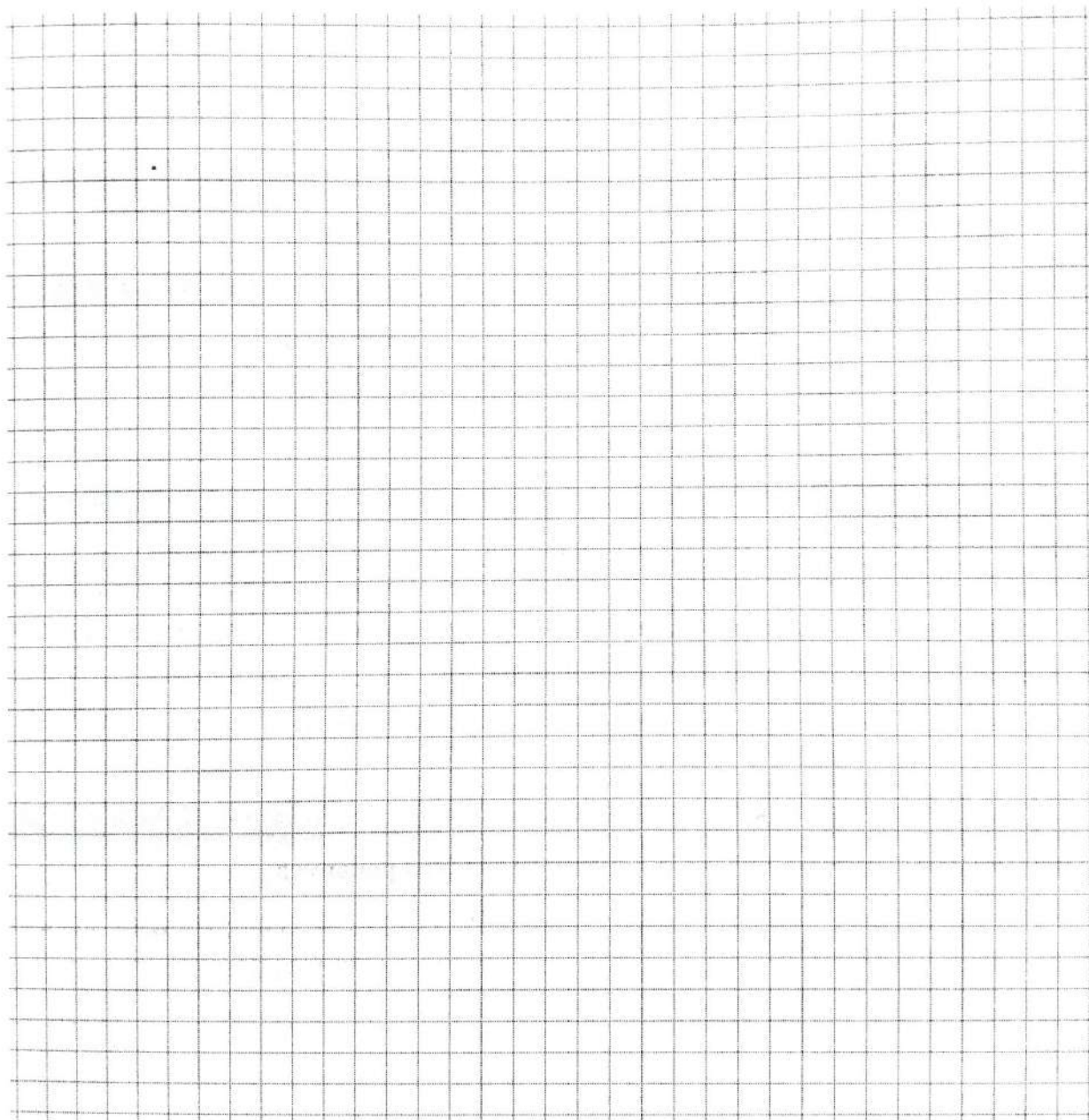
Mediana tego zestawu danych jest równa:

- A. 1,5 B. 2,5 C. 3,5 D. 4,5

Zadanie 33. (0–4)

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 30° . Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa 56.

Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa o największym polu powierzchni całkowitej. Znajdź to największe pole. Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0-1)

Wskaż nierówność prawdziwą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $(-2)^{-6} < 2^{-7}$

B. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} < \left(-\frac{1}{3}\right)^{-5}$

C. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-6} < 5^4$

D. $(-0,1)^{-2} < 0,1^{-6}$

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $3 \log_7 4 - 2 \log_7 5$ jest równa:

A. $\log_7 \frac{4}{5}$

C. $\log_7 \frac{64}{25}$

B. $\log_7 \frac{6}{5}$

D. $\log_7 \frac{81}{32}$

Zadanie 3. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby $a = \log(0,01)^{\frac{1}{3}}$, $b = \log \frac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt{10}}{100}$, $c = 2 \log \sqrt[5]{0,001}$ uporządkowane w kolejności od największej do najmniejszej, to:

A. $a > b > c$

C. $c > a > b$

B. $b > a > c$

D. $c > b > a$

Zadanie 4. (0-1)

Cenę wycieczki obniżono o 100 zł, a następnie nową cenę obniżono o 20%. Po tych dwóch obniżkach za wycieczkę trzeba zapłacić 1200 zł.

Oblicz, jaka była cena wycieczki przed obniżkami.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 1625 zł

B. 1600 zł

C. 1540 zł

D. 1560 zł

Zadanie 5. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem rozwiązań nierówności $|3 - x| \leq 2$ jest zbiór:

A. $\langle 1; 5 \rangle$

B. $(-\infty; 1]$

C. $\langle 1; \infty)$

D. $(-\infty; 1] \cup \langle 5; \infty)$

Zadanie 6. (0-2)

Niech a, b, c będą trzema kolejnymi liczbami naturalnymi, które nie są podzielne przez 4.

Udowodnij, że liczba $(a + b + c)^2$ jest podzielna przez 36.

Zadanie 7. (0-1)

Dane jest wyrażenie $W = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}{3x^3 - 18x^2 + 27x}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Wyrażenie W można przekształcić do postaci $\frac{x+3}{3x}$.	P	F
2.	Dziedziną wyrażenia W jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$.	P	F

Zadanie 8. (0-1)

Wskaż wielomian, którego pierwiastkiem jest liczba $x = -1$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $15x^7 - 5x - 10$ C. $x^9 - 1$
 B. $x^6 - 5x^4 - x^3 + 2x^2 - x$ D. $x^5 + x$

Zadanie 9. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = \sqrt{5}(x - 1) - 10$ jest liczba:

- A. $-2\sqrt{5} + 1$ B. $2\sqrt{5} - 1$ C. $2\sqrt{5} + 1$ D. $-2\sqrt{5} - 1$

Zadanie 10. (0-2)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -2(x + 3)(x - 7)$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Funkcja f jest rosnąca w przedziale:

- A. $(-\infty; 4)$ B. $\langle 2; \infty)$ C. $(-\infty; 3)$ D. $(-\infty; 2)$

2. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f ma współrzędne:

- E. (2, 18) F. (2, 50) G. (18, -2) H. (50, 2)

Zadanie 11. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja $f(x) = 4^x$ przyjmuje wartość 12 dla argumentu:

A. $x = 3$

B. $x = \frac{1}{3}$

C. $x = \log_4 12$

D. $x = \log_{12} 4$

Zadanie 12. (0-1)

Spośród podanych wzorów wskaż takie dwa, które opisują tę samą funkcję:

$f(x) = 3^{x+2}$

$g(x) = 9 + 3^x$

$h(x) = 9 \cdot 3^x$

$p(x) = 3^{3x}$

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. f i g

B. f i h

C. h i p

D. g i p

Zadanie 13. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{5-x} + \frac{1}{x-1}$ jest zbiór:

A. $(1; 5)$

C. $(-\infty; 5)$

B. $(-\infty; 1) \cup (1; 5)$

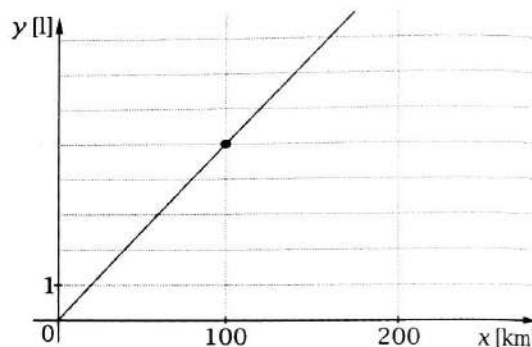
D. $(-5; 1) \cup (1; \infty)$

Zadanie 14. (0-1)

Na wykresie przedstawiono zależność zużycia paliwa y w litrach od pokonanej drogi x w kilometrach.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednie informacje, tak aby zdanie było prawdziwe.

Zależność wielkości y od wielkości x , przedstawioną na wykresie można opisać za pomocą wzoru $y = \dots$.

**Zadanie 15. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Liczba ujemnych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 10

B. 9

C. 6

D. 5

Zadanie 16. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby $\sqrt{5} + 2$, $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$, $\sqrt{5} - 6$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Różnica tego ciągu jest równa:

- A. -4 B. $\sqrt{5}$ C. 4 D. $\sqrt{5} - 2$

Zadanie 17. (0-1)

Na konto oszczędnościowe, którego oprocentowanie w skali roku jest równe 2%, wpłacono 9000 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli właściciel konta nie będzie dokonywał żadnych wpłat ani wypłat przed upływem czterech lat, to stan konta po czterech latach (bez uwzględnienia podatku) będzie równy:

- A. $9000 \cdot 1,02 \cdot 4$ B. $9000 \cdot (1,02)^4$ C. $9000 \cdot 1,08$ D. $9000 \cdot 1,16$

Zadanie 18. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

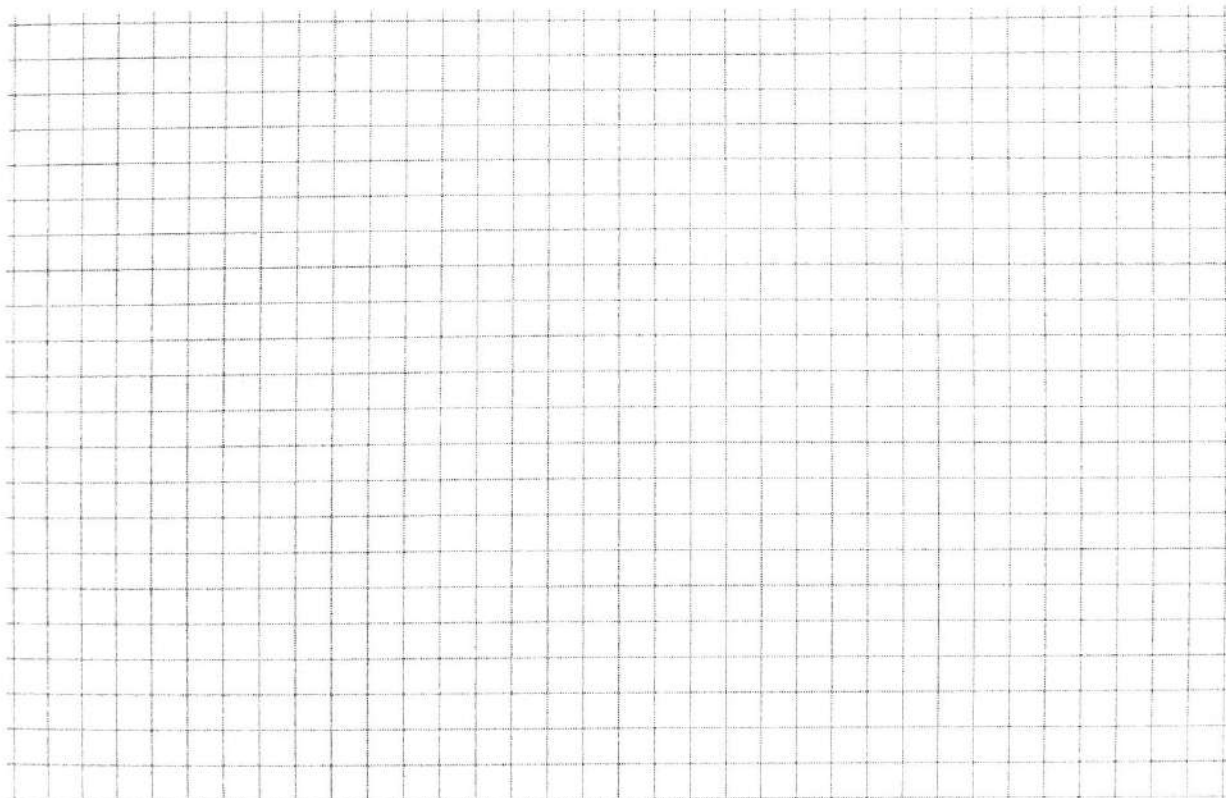
Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ można przekształcić do postaci:

- A. $\cos^2 \alpha$ B. $\sin^3 \alpha$ C. $\sin^2 \alpha$ D. $\sin \alpha$

Zadanie 19. (0-3)

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) pierwszy wyraz jest równy 3, a różnica między trzecim i drugim wyrazem jest równa 60.

Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.



Zadanie 20. (0-1)

W trójkącie dwa kąty mają miary 30° i 45° , a długość najkrótszego boku jest równa 8.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P jeśli zdanie jest prawdziwe albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wysokość trójkąta poprowadzona do najdłuższego boku jest równa 4.	P	F
2.	Obwód trójkąta jest równy $8 + 4\sqrt{6} + 12\sqrt{2}$.	P	F

Zadanie 21. (0-1)

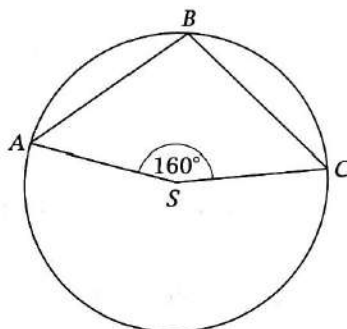
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W równoległoboku dwusieczne kątów leżących przy tym samym boku przecinają się pod kątem:

- A. 90° B. 30° C. 45° D. 60°

Zadanie 22. (0-1)

Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku S . W czworokącie $ASCB$ miara kąta ASC jest równa 160° (zobacz rysunek).



Jaką miarę ma kąt ABC w tym czworokącie?

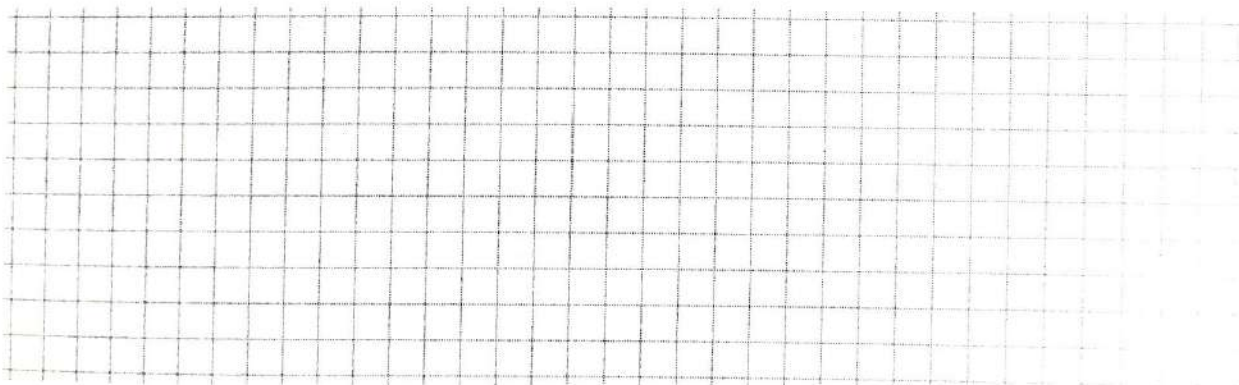
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 110° B. 80° C. 120° D. 100°

Zadanie 23. (0-2)

W trójkącie ABC dane są długości trzech boków: $|AB| = 7$, $|AC| = 5$, $|BC| = 6$.

Wyznacz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną do boku BC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 24. (0-1)

Wskaż równanie okręgu opisanego na prostokącie o wierzchołkach $A = (-2, -5)$, $B = (4, -5)$, $C = (4, 3)$, $D = (-2, 3)$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$

C. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$

B. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$

D. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

Zadanie 25. (0-2)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Prostą równoległą do prostej $y = -\frac{3}{4}x + 5$ i przecinającą oś x układu współrzędnych w punkcie $(12, 0)$ można opisać za pomocą równania:

A. $y = -\frac{3}{4}x + 12$

C. $y = \frac{4}{3}x + 12$

B. $y = -\frac{3}{4}x + 9$

D. $y = \frac{4}{3}x - 16$

2. Prostą prostopadłą do prostej $y = -\frac{3}{4}x + 5$ i przecinającą oś y układu współrzędnych w punkcie $(0, 12)$ można opisać za pomocą równania:

E. $y = -\frac{3}{4}x + 9$

G. $y = -\frac{4}{3}x + 12$

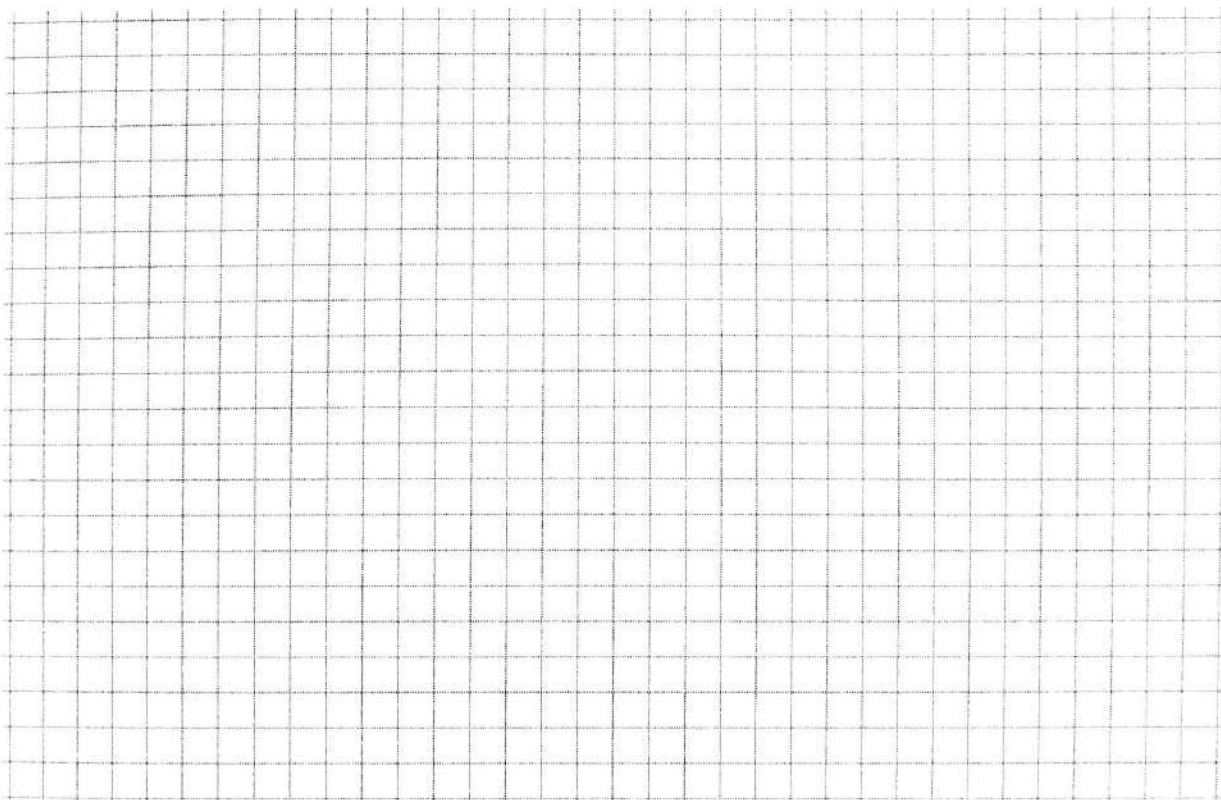
F. $y = \frac{4}{3}x - 16$

H. $y = \frac{4}{3}x + 12$

Zadanie 26. (0-2)

Dana jest prosta k opisana równaniem $y = \frac{1}{3}x + 7$ oraz punkty $A = (-2, 3)$ i $B = (4, 1)$. Punkt P należy do prostej k i jest jednakowo odległy od punktów A i B .

Wyznacz współrzędne punktu P . Zapisz obliczenia.



Zadanie 27. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość czworoboku foremnego, w którym krawędź ma długość 12, jest równa:

- A. $6\sqrt{3}$ B. $8\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{33}$

Zadanie 28. (0-1)

Powierzchnia boczna stożka, którego wysokość jest równa 8, po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 10. Jaką miarę ma kąt środkowy tego wycinka koła?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 288° B. 72° C. 144° D. 216°

Zadanie 29. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

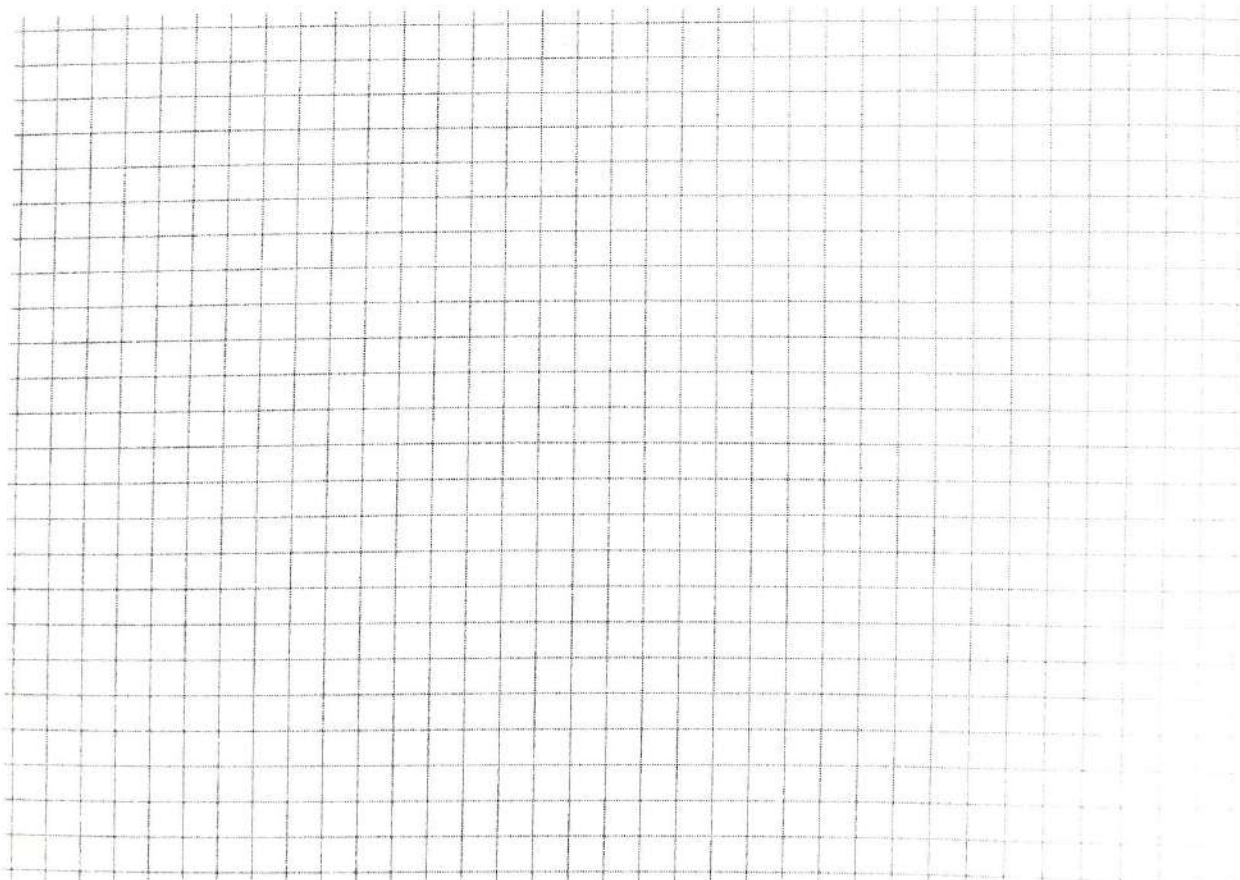
Stosunek objętości dwóch sześcianów jest równy $\frac{9}{64}$. Stosunek pól powierzchni całkowitych tych sześcianów jest równy:

- A. $\frac{3}{16}\sqrt[3]{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{9}$ D. $\frac{9}{16}$

Zadanie 30. (0-3)

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej ma długość $4\sqrt{6}$ i tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt o mierze 45° .

Wyznacz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.



Zadanie 31. (0-2)

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, 200\}$ losujemy jedną liczbę.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby nieparzystej podzielnej przez 5 jest równe:

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{19}{200}$

2. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej mniejszej od 50 jest równe:

- E. $\frac{2}{25}$ F. $\frac{3}{40}$ G. $\frac{1}{8}$ H. $\frac{3}{25}$

Zadanie 32. (0-1)

Dla zestawu liczb: 7, 9, 2, 2, 4, 7, 8, 8, 5, 4, 3, 7 obliczono średnią arytmetyczną (s), medianę (m) i dominantę (d). Wskaż prawdziwą zależność.

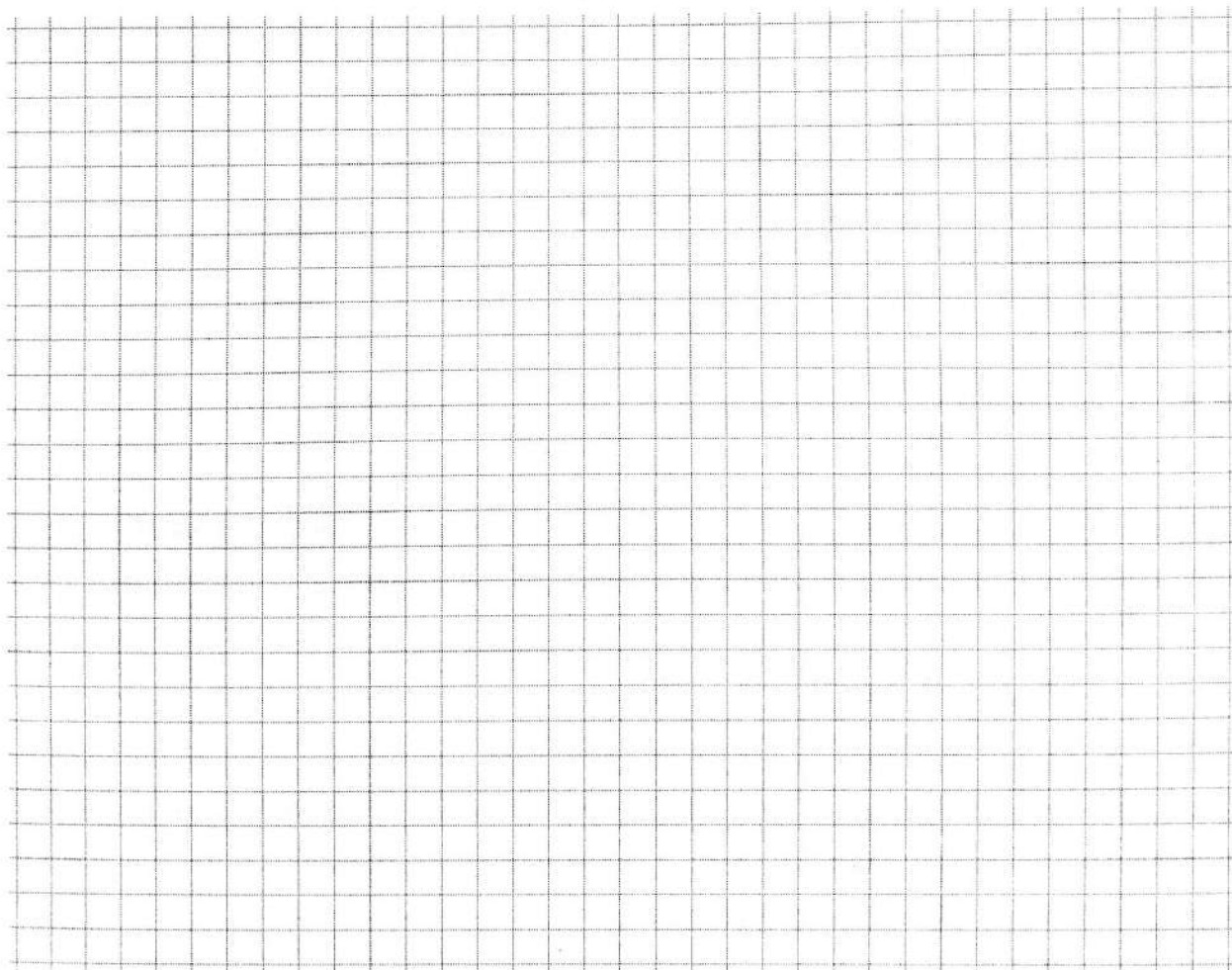
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $s < m < d$ B. $m < d < s$ C. $d < s < m$ D. $d < m < s$

Zadanie 33. (0-4)

W trójkąt równoramienny ABC , którego podstawa AB ma długość 18, a wysokość poprowadzona do tej podstawy jest równa 12, wpisywano prostokąty w ten sposób, że jeden bok prostokąta zawiera się w podstawie, a dwa pozostałe wierzchołki należą do ramion trójkąta.

Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{100^{\frac{5}{8}}}{\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{8}}$ jest równa:

- A. $10^{\frac{1}{4}}$ B. $10^{\frac{1}{2}}$ C. $10^{\frac{5}{3}}$ D. $10^{\frac{5}{6}}$

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cena towaru z 23% podatkiem VAT jest równa 196,80 zł. Cena tego towaru bez podatku VAT wynosi:

- A. 150 zł B. 168 zł C. 160 zł D. 242,06 zł

Zadanie 3. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_{0,2} 75$ jest od liczby $\log_{0,2} 3$:

- A. o 72 większa B. o 2 mniejsza C. o 2 większa D. o 5 mniejsza

Zadanie 4. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem rozwiązań nierówności $\left| \frac{5}{4} + x \right| \geq \frac{3}{4}$ jest:

- A. $(-\infty; -2) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$
B. $\langle -2; -\frac{1}{2} \rangle$
C. $\langle -\frac{1}{2}; +\infty \rangle$
D. $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup \langle 2; +\infty \rangle$

Zadanie 5. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli $\frac{7b}{a+b} = 5$, to iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy:

- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

Zadanie 6. (0-1)

Ile różnych rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych ma równanie $3x^3 = 48x$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 7. (0–1)

 Dane jest wyrażenie $\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{3-x}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Dziedziną wyrażenia jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, 3\}$.	P	F
2.	Wyrażenie można przekształcić do postaci $\frac{3x-1}{(x+1)(3-x)}$.	P	F

Zadanie 8. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

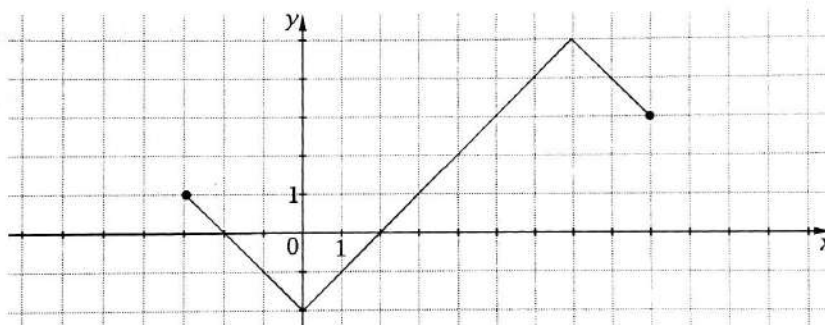
Zbiór, który przedstawiono na osi liczbowej



jest rozwiązaniem nierówności:

- A. $-x^2 + 7x \geq 0$ C. $x^2 - 7x \geq 0$
 B. $x^2 + 7x \leq 0$ D. $-x^2 - 7x \leq 0$

Zadanie 9. (0–1)

 Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.


Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Zbiorem wartości funkcji $g(x) = f(x+3)$ jest przedział $\langle 1; 8 \rangle$.	P	F
2.	Maksymalny przedział, w którym funkcja $g(x) = f(x+3)$ jest rosnąca, to $\langle -3; 4 \rangle$.	P	F

Zadanie 10. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

 Funkcje liniowe $f(x) = 3x + 5$ oraz $g(x) = ax - 1$ mają to samo miejsce zerowe dla liczby a równej:

- A. $\frac{5}{3}$ B. $-\frac{5}{3}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

Zadanie 11. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcję kwadratową f , która ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -12$, $x_2 = 2$ i jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 7)$ opisuje wzór:

A. $f(x) = -\frac{7}{9}(x-5)^2 + 7$

C. $f(x) = -\frac{1}{7}(x+5)^2 + 7$

B. $f(x) = \frac{1}{7}(x+5)^2 - 7$

D. $f(x) = \frac{7}{9}(x-5)^2 - 7$

Zadanie 12. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ należy punkt:

A. $\left(-1, -\frac{3}{5}\right)$

B. $\left(0, \frac{3}{5}\right)$

C. $\left(2, \frac{9}{5}\right)$

D. $\left(-2, \frac{25}{9}\right)$

Zadanie 13. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \log_a x$, której wykres przechodzi przez punkt $\left(\frac{1}{16}, -8\right)$. Wynika stąd, że:

A. $a = \sqrt{2}$

B. $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

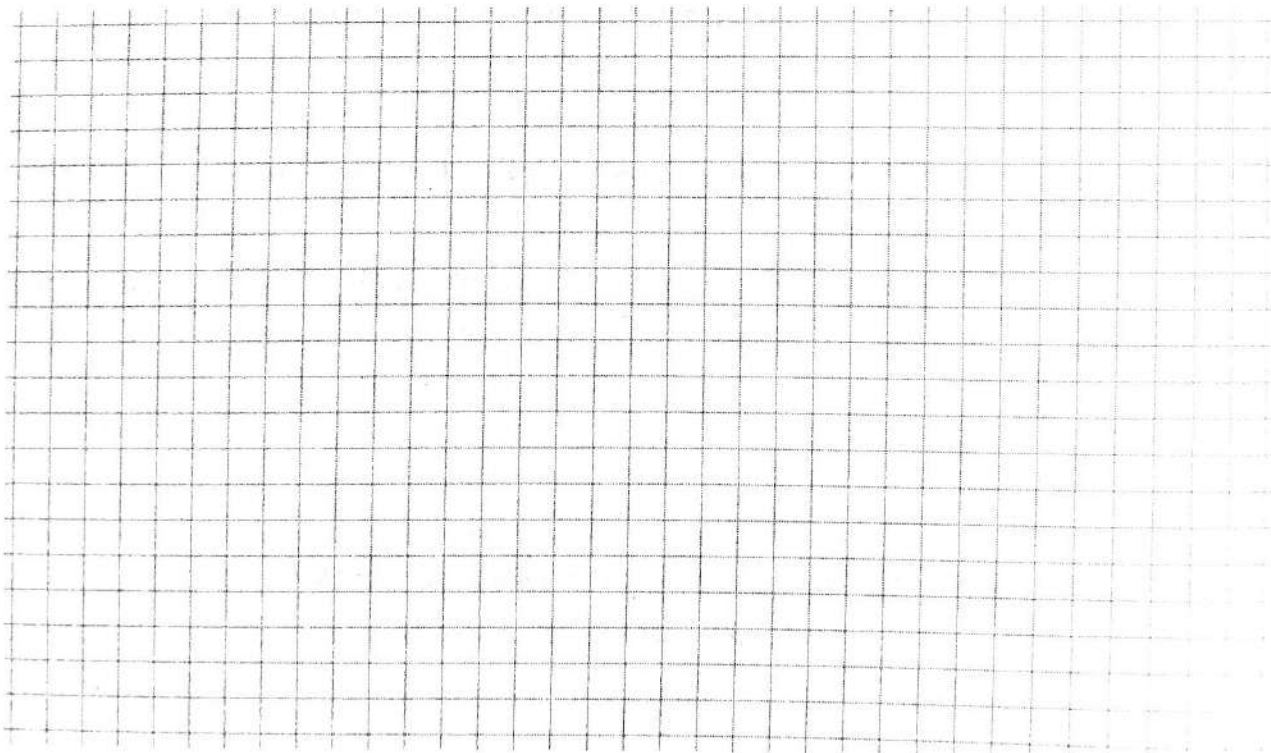
C. $a = 2$

D. $a = \frac{1}{2}$

Zadanie 14. (0-2)

Suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 50, a suma pięciu początkowych wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 40.

Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.



Zadanie 15. (0-1)

Wzór $S_n = 2^{n+3} - 8$ określa sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Drugi wyraz ciągu (a_n) jest równy 16.	P	F
2.	Iloraz ciągu (a_n) jest równy 2.	P	F

Zadanie 16. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby $x - 1$, $x + 9$, $x - 6$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego dla liczby x równej:

- A. 3 B. -3 C. 2 D. -2

Zadanie 17. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli α jest kątem rozwartym i $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, to:

- A. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4}$ B. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$ D. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$

Zadanie 18. (0-2)

Kąty ostre trójkąta prostokątnego mają miary α i β oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Cosinus kąta β jest równy:

- A. $\frac{5-\sqrt{7}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

2. Tangens kąta α jest równy

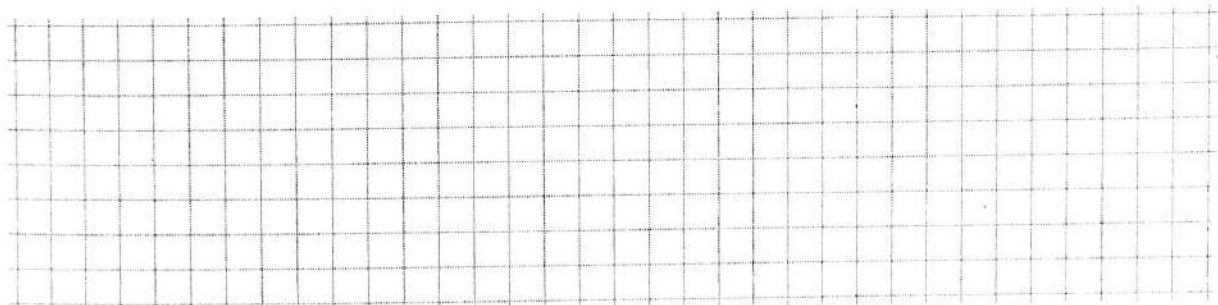
- E. $\frac{3\sqrt{14}}{7}$ F. $\frac{\sqrt{14}}{6}$ G. $\frac{5\sqrt{7}-7}{7}$ H. $\frac{3\sqrt{14}}{25}$

Zadanie 19. (0-2)

Dane jest wyrażenie:

$$W(\alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{1 - \sin^2 \alpha} + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Udowodnij, że dla każdego kąta ostrego α wartość wyrażenia $W(\alpha)$ nie zależy od miary kąta α .



Zadanie 20. (0-1)

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 2\sqrt{19}$, $|AC| = 4$, $|BC| = 6$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D .

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

A.	$ AD = \frac{6}{5}\sqrt{19}$,	ponieważ z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że	1.	$\frac{ AD }{ AB } = \frac{ AC }{ BC }$.
B.	$ AD = \frac{4}{3}\sqrt{19}$,		2.	$\frac{ AD }{ BD } = \frac{ AC }{ BC }$.
C.	$ AD = \frac{4}{5}\sqrt{19}$,		3.	$\frac{ AD }{ BD } = \frac{ BC }{ AC }$.

Zadanie 21. (0-1)

W trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej AB wpisano okrąg o środku S .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta wypukłego ASB jest równa:

- A. 90° B. 135° C. $112,5^\circ$ D. $67,5^\circ$

Zadanie 22. (0-1)

W trójkącie ABC dane są: $|AC| = 4\sqrt{3}$, $|AB| = 8$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 150^\circ$.

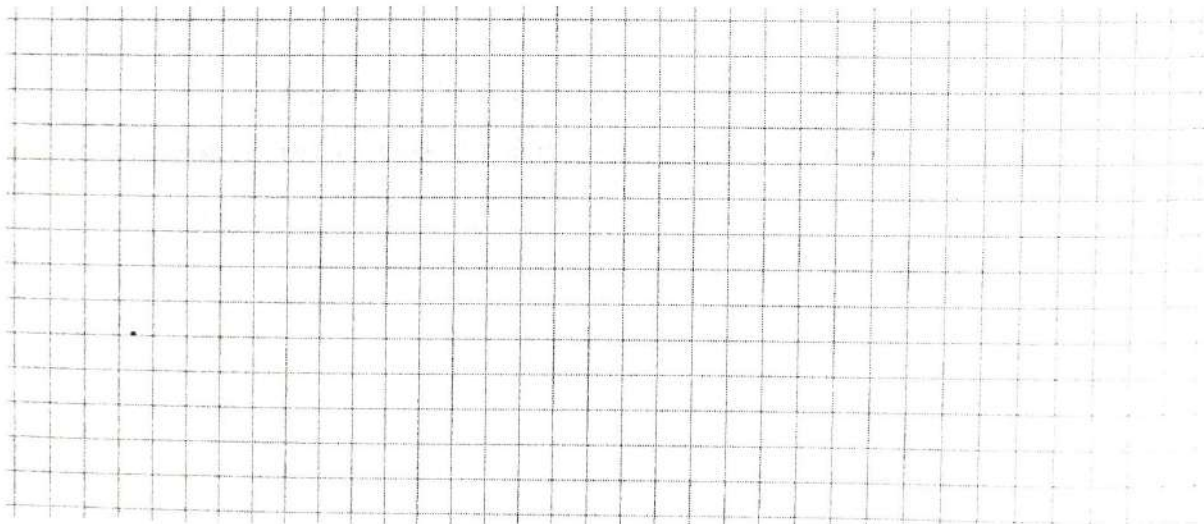
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Długość boku BC trójkąta ABC jest równa 10.	P	F
2.	Pole trójkąta ABC jest równe $8\sqrt{3}$.	P	F

Zadanie 23. (0-2)

W trapezie $ABCD$ o podstawach długości $|AB| = 6$ i $|CD| = 4$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P , którego odległość od krótszej podstawy jest równa 2.

Wyznacz pola trójkątów APD i BPC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 24. (0-2)

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Prosta $y = (2m - 1)x + 1$ jest prostopadła do prostej $y = \frac{2}{3}x - 3$ dla wartości m równej:

- A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{5}{4}$

2. Prosta $y = (2m - 1)x + 1$ jest równoległa do prostej $y = \frac{2}{3}x - 3$ dla wartości m równej:

- E. $\frac{5}{6}$ F. $-\frac{1}{6}$ G. $-\frac{1}{4}$ H. $-\frac{5}{4}$

Zadanie 25. (0-1)

Punkty A' i B' są odpowiednio obrazami punktów $A = (-4, -5)$ i $B = (8, 4)$ w symetrii środkowej względem punktu $O = (0, 0)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Środek odcinka $A'B'$ ma współrzędne:

- A. $(-2, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 6)$ C. $(2, \frac{1}{2})$ D. $(-2, -\frac{1}{2})$

Zadanie 26. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okrąg o środku w punkcie $S = (5, -2)$ styczny do osi y układu współrzędnych jest opisany równaniem:

- A. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4$ C. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 5$
B. $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ D. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Zadanie 27. (0-2)

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest kwadratem, którego bok ma długość 6.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Objętość tego walca jest równa:

- A. 216π C. $\frac{54}{\pi}$
B. 432π D. $\frac{108}{\pi}$

2. Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe:

- E. $72\pi + 36$ G. $\frac{36}{\pi} + 36$
F. $18\pi + 36$ H. $\frac{18}{\pi} + 36$

Zadanie 28. (0-1)

Ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości 56 podzielono na dwie bryły płaszczyzną równoległą do podstawy i przechodzącą przez środek jego wysokości.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

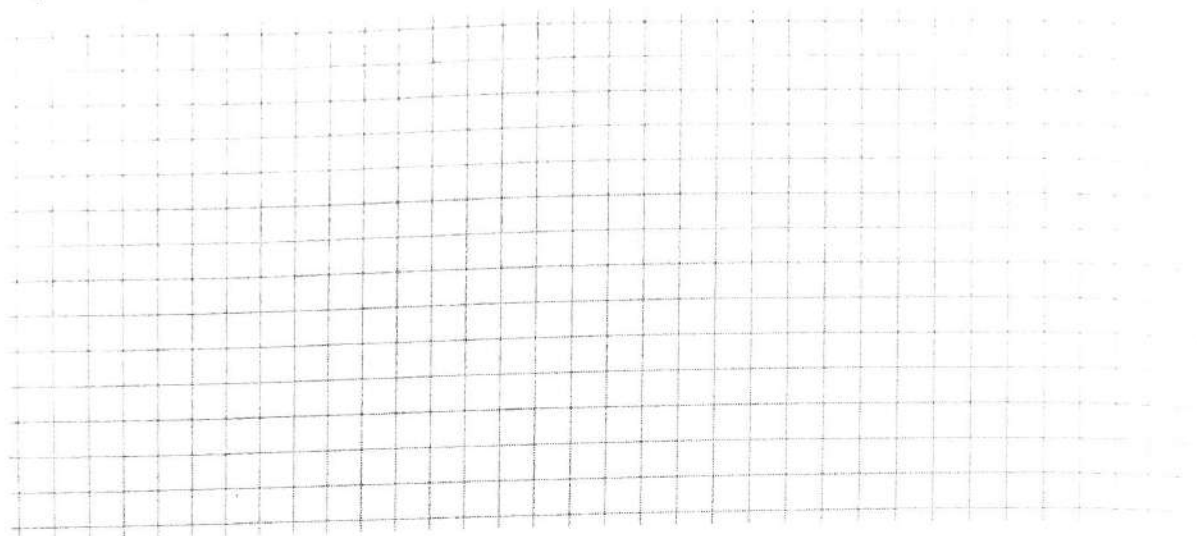
Objętość tej z otrzymanych w wyniku podziału brył, która nie jest ostrosłupem wynosi:

- A. 28 B. 7 C. 8 D. 49

Zadanie 29. (0-3)

Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego boki mają długość $4\sqrt{2}$ i 7. Krótsza przekątna graniastosłupa ma długość 10 i jest nachylona do podstawy pod kątem 60° .

Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 30. (0-1)**

Ze zbioru wszystkich liczb dwucyfrowych wybrano losowo jedną liczbę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

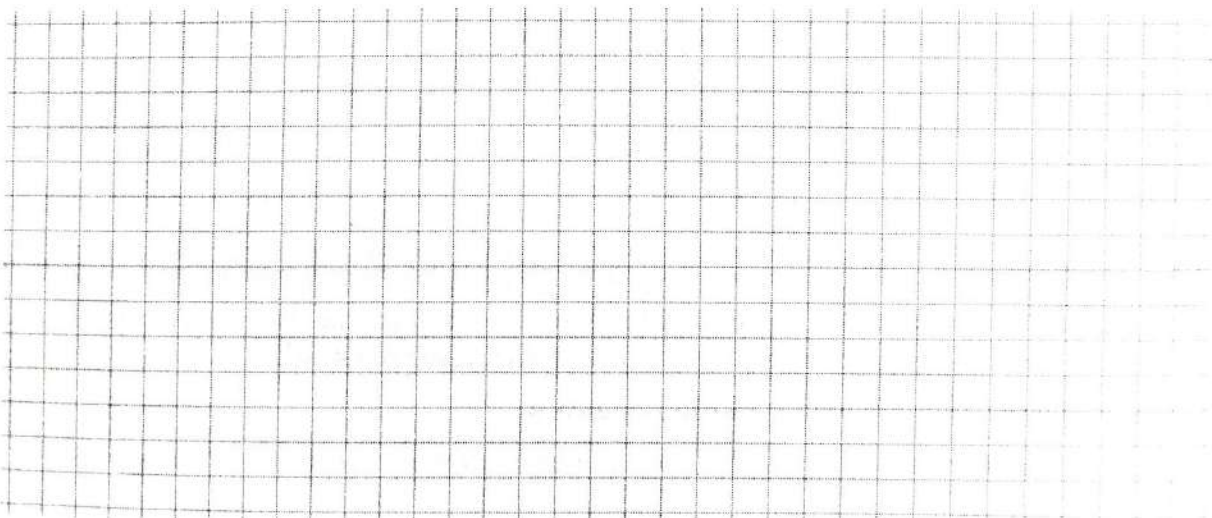
Prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub przez 5 jest równe:

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{7}{10}$

Zadanie 31. (0-3)

W dwóch pudełkach znajdują się kule białe i czarne. W pierwszym pudełku jest 8 kul białych i 2 kule czarne, a w drugim 2 kule białe i n czarnych. Prawdopodobieństwo wylosowania jednej kuli czarnej z pierwszego pudełka jest o 0,2 mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania jednej kuli białej z drugiego pudełka.

Wyznacz liczbę n . Zapisz obliczenia.

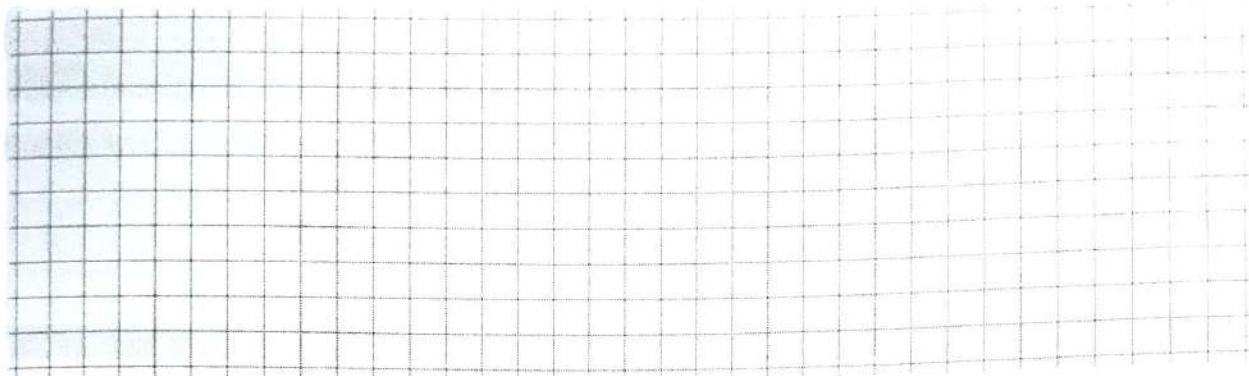


Zadanie 32. (0-1)

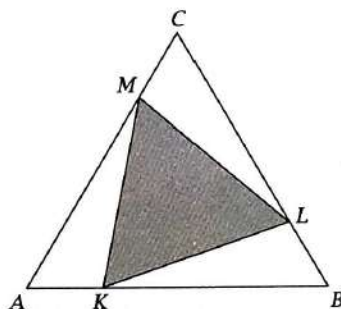
Dany jest zestaw: 1, 3, 5, 2, 1, 7, 2, 6, 7, 9, a , b , gdzie $a > b$.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

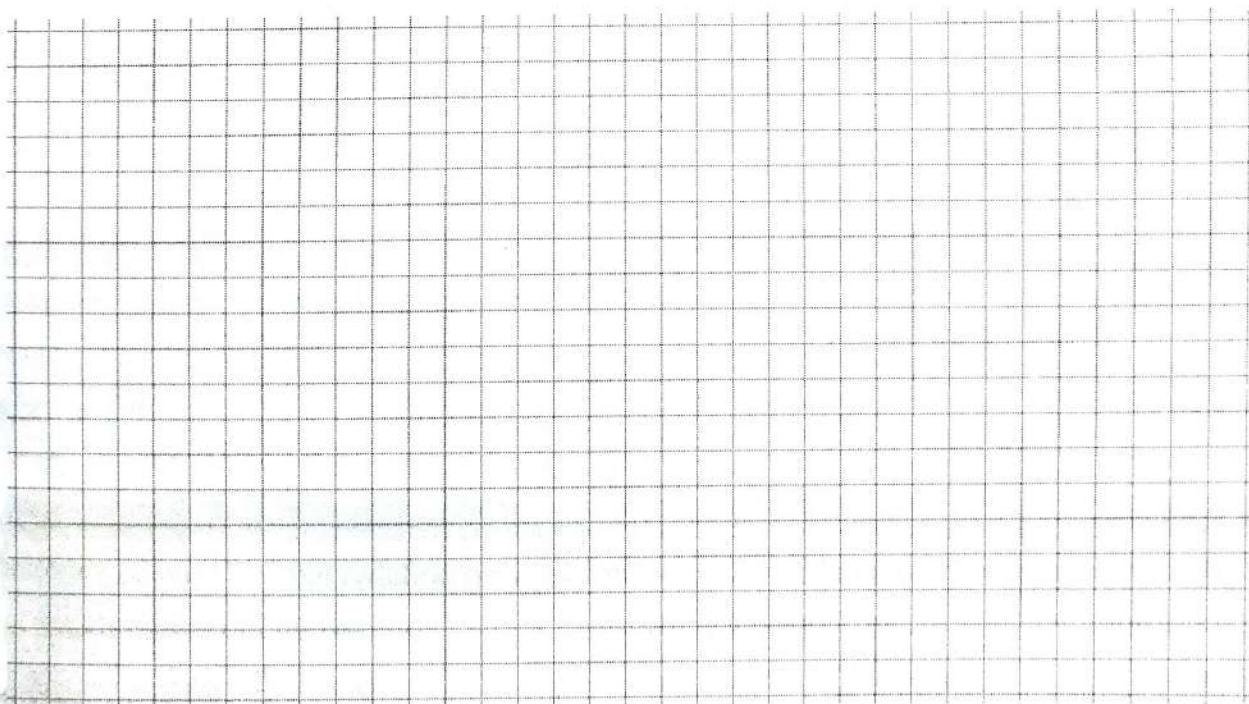
Dla liczb $a = \dots$ i $b = \dots$ średnia arytmetyczna tego zestawu jest równa $4\frac{1}{2}$, a dominanta to 7.

**Zadanie 33. (0-4)**

W trójkącie równobocznym ABC o obwodzie 24 wybrano na bokach AB , BC i CA odpowiednio punkty K , L i M w taki sposób, że $|AK| = |BL| = |CM| = x$ (zobacz rysunek).



Oblicz, dla jakiej wartości x pole trójkąta KLM jest najmniejsze. Wyznacz to pole. Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszą liczbą całkowitą, która nie należy do przedziału $(-\infty; -2)$ jest:

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dane są liczby $x = 5,2 \cdot 10^{11}$ oraz $y = 2,5 \cdot 10^{-8}$. Iloczyn $x \cdot y$ jest równy:

- A. $1,3 \cdot 10^4$ B. $2,08 \cdot 10^{19}$ C. $13 \cdot 10^4$ D. $1,3 \cdot 10^{13}$

Zadanie 3.

Dane są liczby $a = 1 - 4\sqrt{2}$ oraz $b = 3 + 2\sqrt{2}$.

Zadanie 3.1. (0-2)

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Suma liczb a oraz b jest liczbą:

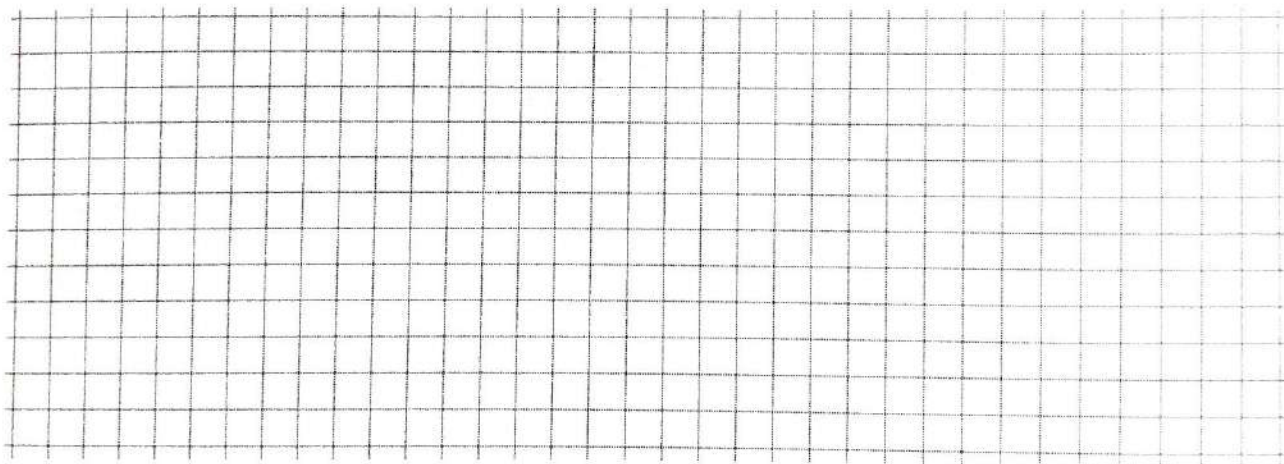
- A. dodatnią i wymierną C. dodatnią i niewymierną
B. ujemną i wymierną D. ujemną i niewymierną

2. Suma kwadratów liczb a oraz b jest równa:

- E. $24 - 16\sqrt{2}$ F. $50 + 4\sqrt{2}$ G. 50 H. $50 + 20\sqrt{2}$

Zadanie 3.2. (0-2)

Oblicz wartość bezwzględną iloczynu liczb a oraz b . Wynik zapisz w postaci wyrażenia $x + y\sqrt{2}$, gdzie x i y są liczbami całkowitymi. Zapisz obliczenia.



Zadanie 4. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Z zależności $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$, gdzie $h \neq 0$ wynika, że:

- A. $b = \frac{2P}{h} - a$ B. $b = \frac{2P}{h} + a$ C. $b = \frac{P}{2h} - a$ D. $b = \frac{2P}{h} - ah$

Zadanie 5. (0-1)


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedzina wyrażenia $W(x) = \frac{x^2 - 9}{(x^2 + 4)(x^2 - 25)}$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 2, 5\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \{-5, -3, 3, 5\}$

Zadanie 6. (0-2)

Dany jest wielomian $W(x) = -9x^3 + 18x^2 + x - 2$.

Rozłóż wielomian $W(x)$ na czynniki liniowe. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-1)


Dane jest równanie $\frac{x-2}{2x^2-a} = 0$ z niewiadomą x .

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Dla $a = -4$ równanie to ma dokładnie jedno rozwiązanie.	P	F
2.	Równanie to ma zawsze jedno rozwiązanie, bez względu na wartość liczby a .	P	F

Zadanie 8. (0-1)


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przedział liczbowy $\langle -2; 2 \rangle$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:

- A. $2 - x^2 \geq 0$ B. $4 - x^2 > 0$ C. $4 - x^2 \geq 0$ D. $4 - x^2 \leq 0$

Zadanie 9. (0-1)


Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{|x-1|}{3} \geq \frac{1}{2}$ nie należy liczba:

- A. $\frac{5}{2}$ B. -1 C. 3 D. $-\frac{1}{3}$

Zadanie 10. (0-1)

Dany jest układ równań z niewiadomymi x oraz y :

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ ax + 2y = b \end{cases}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań dla:

A. $a = 2, b = 3$

B. $a = -4, b = 3$

C. $a = -4, b = 1$

D. $a = -4, b = -6$

Zadanie 11. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ jest para liczb:

A. ujemnych

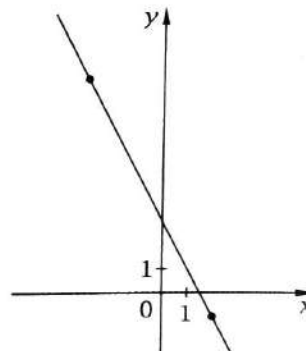
C. o przeciwnych znakach

B. dodatnich

D. o iloczynie równym 0

Zadanie 12.

Dana jest funkcja liniowa f , dla której spełnione są warunki: $f(-3) = 9$ oraz $f(2) = -1$ (zobacz rysunek). Wykres funkcji f przekształcono symetrycznie względem osi y układu współrzędnych i otrzymano w ten sposób wykres funkcji g .

**Zadanie 12.1. (0-2)**

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Funkcja f jest:

A. rosnąca i $f(0) > 0$

C. malejąca i $f(0) < 0$

B. rosnąca i $f(0) < 0$

D. malejąca i $f(0) > 0$

2. Funkcja g jest określona wzorem:

E. $g(x) = 2x - 3$

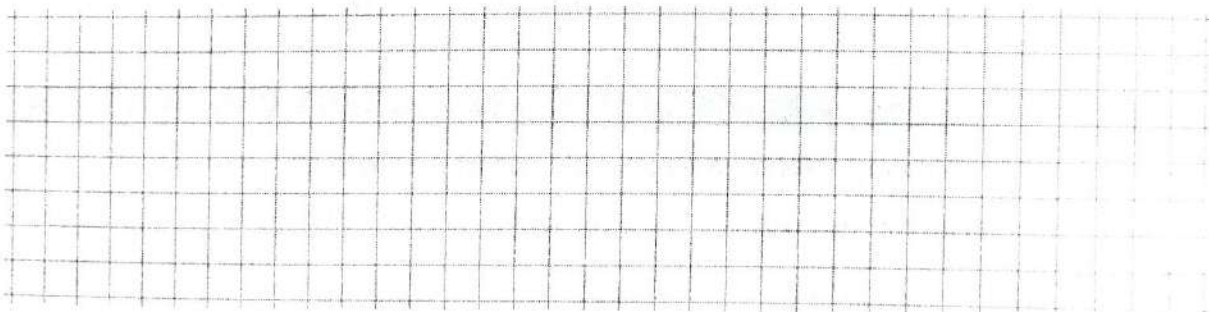
G. $g(x) = -2x - 3$

F. $g(x) = 2x + 3$

H. $g(x) = -2x + 3$

Zadanie 12.2. (0-2)

Wyznacz miejsce zerowe funkcji f . Zapisz obliczenia.



Zadanie 13. (0-1)

Dana jest funkcja $f(x) = -3(x+2)^2 + 4$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Istnieją dokładnie dwa argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość $2\sqrt{3}$.	P	F
2.	Prosta o równaniu $x = 2$ jest osią symetrii wykresu funkcji f .	P	F

Zadanie 14. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2n}$:

- A. jest malejący C. jest rosnący
B. jest stały D. nie jest ani rosnący, ani malejący

Zadanie 15. (0-1)

W rosnącym ciągu geometrycznym (b_n) dane są wyrazy: $b_4 = 6$ oraz $b_6 = 12$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Piąty wyraz ciągu (b_n) jest równy:

- A. 9 B. $6\sqrt{2}$ C. -9 D. $-6\sqrt{2}$

Zadanie 16. (0-1)

Sumę n początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego można wyznaczyć ze wzoru: $S_n = n^2 - \frac{3}{2}n$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

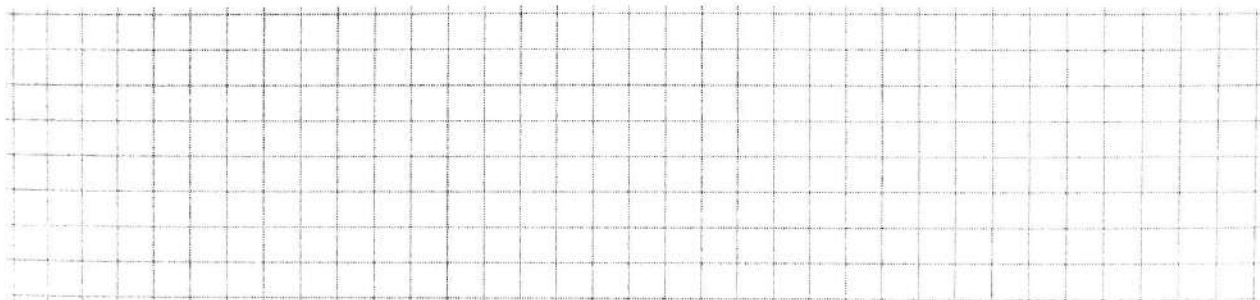
Drugi wyraz tego ciągu jest równy:

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 0 D. $-\frac{1}{2}$

Zadanie 17. (0-4)

O godzinie 4:20 ślimak rozpoczął wielogodziną wędrówkę. W ciągu pierwszego kwadransa wędrówki pokonał dystans o długości 0,9 m. W każdym kolejnym kwadransie pokonywał drogę o 1,5 cm krótszą od drogi z poprzedniego kwadransa. Przebył w ten sposób drogę o łącznej długości 2257,5 cm.

Wyznacz godzinę, o której ślimak zakończył wędrówkę. Zapisz obliczenia.



Zadanie 18. (0-1)

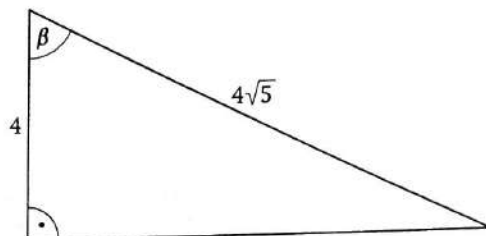
Sinus kąta rozwartego α wynosi $\frac{2}{3}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Cosinus kąta α jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$.	P	F
2.	Tangens kąta α jest równy $(-\frac{2\sqrt{5}}{5})$.	P	F

Zadanie 19. (0-2)

Na poniższym rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny i podano długości dwóch jego boków.



Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Cosinus kąta β jest równy:

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

2. Wyrażenie $\sin^2 \beta - \operatorname{tg} \beta$ przyjmuje wartość:

- E. $-\frac{9}{5}$ F. $-\frac{6}{5}$ G. $-\frac{3}{10}$ H. $-\frac{1}{10}$

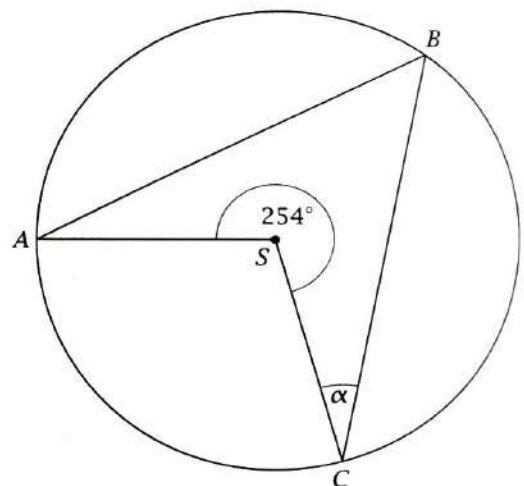
Zadanie 20. (0-1)

Na rysunku punkt S jest środkiem przedstawionego okręgu, a cięciwy AB i BC są równe.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt α ma miarę należącą do przedziału:

- A. $(0^\circ; 15^\circ)$
B. $(15^\circ; 20^\circ)$
C. $(20^\circ; 25^\circ)$
D. $(25^\circ; 40^\circ)$

**Zadanie 21. (0-1)**

Promień okręgu opisanego na pewnym kwadracie ma długość 2.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

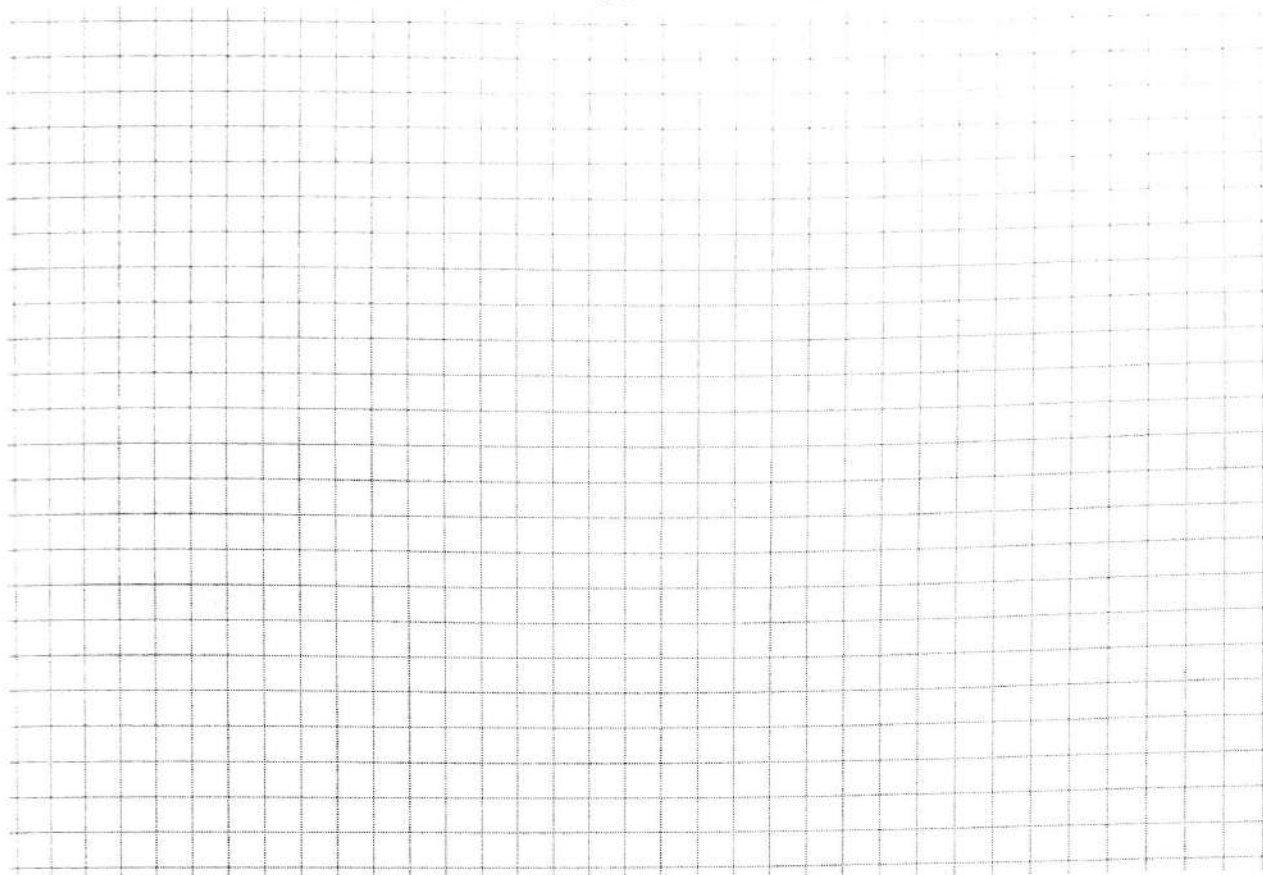
Promień okręgu wpisanego w ten kwadrat ma długość:

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

Zadanie 22. (0–3)

Działka ma kształt trapezu prostokątnego, w którym różnica między długościami podstaw wynosi 20 m, a wysokość stanowi 75% dłuższej podstawy. Powierzchnia działki wynosi 22,5 ara.

Oblicz, ile co najmniej metrów siatki ogrodzeniowej należy zakupić, by ogrodzić tę działkę. Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych metra. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 23. (0–2)**

W trapezie $ABCD$ w którym $C = (4, 3\frac{1}{2})$, podstawa AB zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{3}{8}x - 5$.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich zdanie było prawdziwe.

Wierzchołek D tego trapezu może mieć współrzędne:

A. (8, 6)

C. (0, 2)

E. (8, -2)

G. $(-8, -\frac{1}{2})$

B. (6, 5)

D. (0, -5)

F. (-16, -4)

Zadanie 24. (0–1)

Dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $A = (-6, 3)$, $B = (-2, 6)$, $C = (-5, 10)$ oraz okrąg F o równaniu $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 25$. Wskaż zdanie prawdziwe.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. Środek okręgu F jest jednocześnie punktem przecięcia się przekątnych kwadratu $ABCD$.

B. Punkt D ma współrzędne $(-9, 6)$.

C. Długość boku kwadratu $ABCD$ jest równa promieniowi okręgu F .

D. Jeden z wierzchołków kwadratu $ABCD$ należy do okręgu F .

Zadanie 25.

Prostokąt o bokach 8 i 10 jest podstawą ostrosłupa, w którym wszystkie krawędzie boczne mają jednakową długość. Objętość tego ostrosłupa wynosi 160.

Zadanie 25.1. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wysokość tego ostrosłupa jest równa

Zadanie 25.2. (0-1)

Podstawa tego ostrosłupa jest ścianą boczną pewnego graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Graniastosłup ten ma objętość równą lub

Zadanie 26. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb czterocyfrowych nieparzystych, w zapisie których występują tylko cyfry 3, 4, 5 jest:

- A. 36 B. 81 C. 54 D. 27

Zadanie 27. (0-1)

W sześciokącie foremnym, którego bok ma długość 2 wybrano losowo dwa różne wierzchołki.

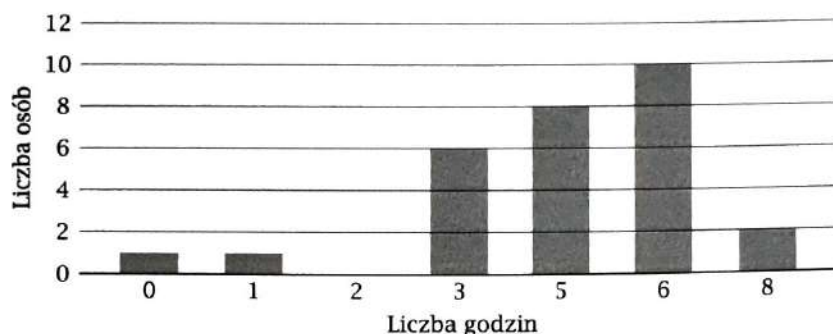
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo tego, że odległość między wylosowanymi wierzchołkami jest mniejsza niż 4 wynosi:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

Zadanie 28. (0-2)

Uczniom klasy 1A zadano pytanie, ile godzin tygodniowo poświęcają na aktywność fizyczną. Wyniki sondy przedstawiono na diagramie słupkowym (zobacz rysunek).



Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Średnia arytmetyczna przedstawionego zestawu danych wynosi:

- A. około 3,13 B. około 4,82 C. 5 D. około 5,19

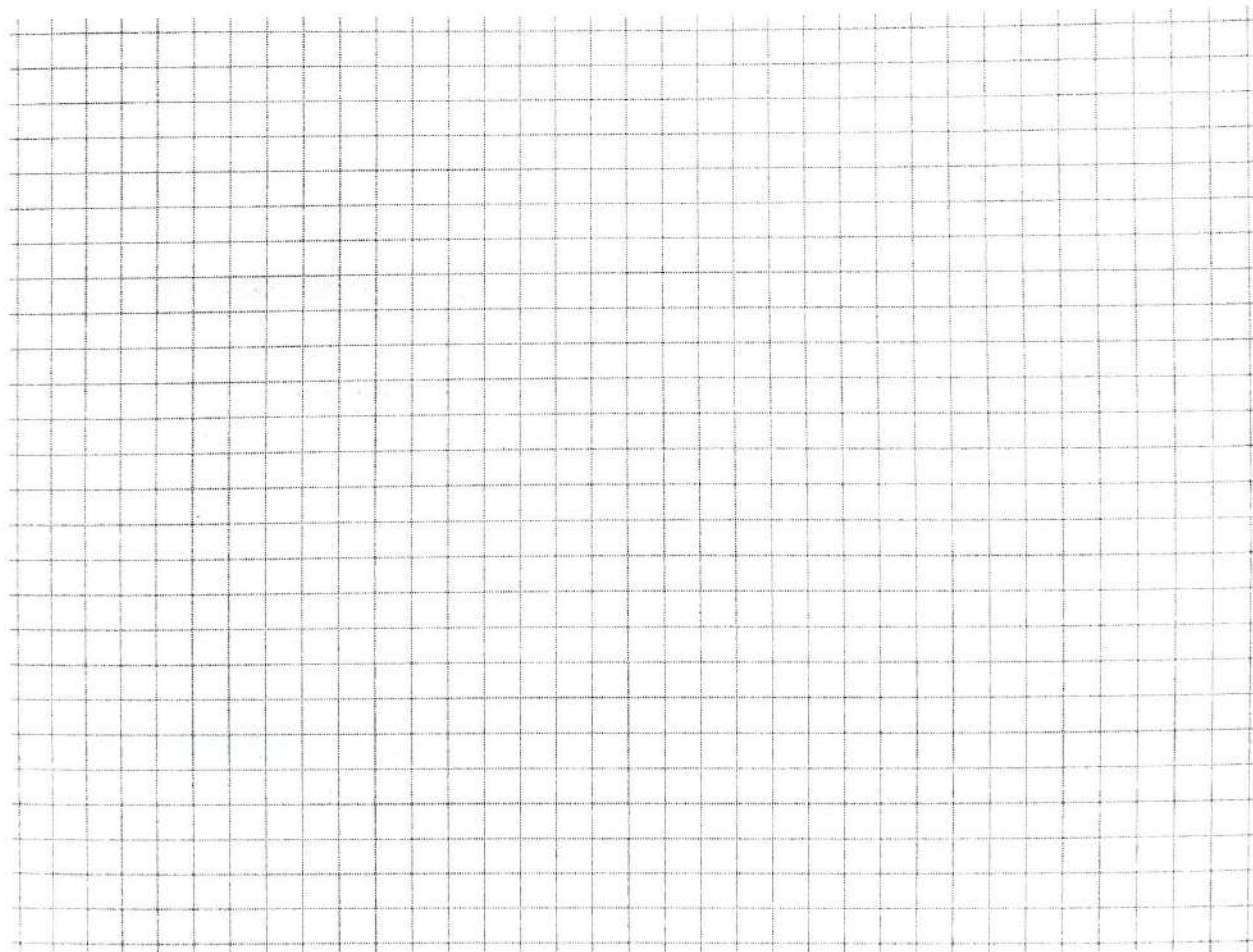
2. Mediana przedstawionego zestawu danych wynosi:

- E. 3 F. 5 G. 5,5 H. 6

Zadanie 29. (0-2)

Ze zbioru liczb $\{-3, -2, 1, 2, 3, 4\}$ losujemy po kolei ze zwracaniem dwie liczby x oraz y .

Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloraz liczby x przez liczbę y jest liczbą całkowitą. Zapisz obliczenia.



Zadanie 1.

Dane są trzy liczby dodatnie a , b oraz c takie, że $3a = 4b$ i $2c = 3b$.

Zadanie 1.1. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Spośród liczb a , b oraz c największą jest liczba c .	P	F
2.	Suma liczb b oraz c stanowi 175% liczby b .	P	F

Zadanie 1.2. (0-1)

Wskaż zdanie prawdziwe.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Liczba a jest o 25% większa od b .
- B. Liczba b jest o 25% mniejsza od c .
- C. Liczba c jest o 12,5% większa od a .
- D. Liczba a jest o 12,5 mniejsza od c .

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli przyjmiemy, że $\log 5 \approx 0,7$ oraz $\log 16 \approx 1,2$, to liczba $\log \frac{25}{16}$ jest w przybliżeniu równa:

- A. 0,2
- B. -0,71
- C. 2,6
- D. 0,4

Zadanie 3. (0-2)

Dane są liczby $x = 4^{20}$ i $y = 5^{10}$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Połowa liczby x jest równa:

- A. 4^{10}
- B. 4^{19}
- C. 2^{20}
- D. 2^{39}

2. Iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy:

- E. 80^{10}
- F. $(3,2)^{10}$
- G. $(0,8)^{10}$
- H. $(4\sqrt{5})^{20}$

Zadanie 4. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole kwadratu, którego bok ma długość $5 - 2\sqrt{3}$ jest równe:

- A. $37 - 20\sqrt{3}$
- B. $10 - 4\sqrt{3}$
- C. 13
- D. $20 - 8\sqrt{3}$

Zadanie 5. (0-2)

Udowodnij, że jeżeli liczba k przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3, to kwadrat liczby k przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1.

Zadanie 6. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $|x - 5| = 4$ ma:

- A. dokładnie jedno rozwiązanie $x = 9$.
- B. dwa rozwiązania będące liczbami dodatnimi.
- C. dwa rozwiązania będące liczbami przeciwnymi.
- D. dwa rozwiązania będące liczbami ujemnymi.

Zadanie 7. (0-1)

Dane są dwa wyrażenia: $W(x) = \frac{x+2}{x-1}$ oraz $V(x) = \frac{x-2}{x}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x \neq 0$ oraz $x \neq 1$ suma wyrażeń $W(x)$ i $V(x)$ jest równa:

- A. $\frac{2x}{2x-1}$
- B. $\frac{2x}{x(x-1)}$
- C. $\frac{2x^2-x+2}{x(x-1)}$
- D. $\frac{2x}{x-1}$

Zadanie 8.

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x$.

Zadanie 8.1. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wartość wielomianu $W(x)$ dla argumentu (-2) jest równa

Zadanie 8.2. (0-1)

Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $2(3 - x\sqrt{2}) < x\sqrt{2} - 3$ jest:

- A. 3 B. 2 C. -2 D. 0

Zadanie 10. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{(x^2+5)(x^2-4)(2x+1)}{x-7} = 0$ ma:

- A. dokładnie dwa rozwiązania. C. dokładnie cztery rozwiązania.
B. dokładnie trzy rozwiązania. D. dokładnie pięć rozwiązań.

Zadanie 11. (0-2)

Rozwiąż nierówność $(5x - 2)(x + 4) \geq 3(x + 4)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-2)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{dla } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{dla } 2 < x \leq 3 \\ \frac{x-8}{2} & \text{dla } x > 3 \end{cases}$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca to:

- A. $(-\infty; 2)$ B. $\langle 2; 3 \rangle$ C. $(3; \infty)$ D. $(-\infty; 3)$

2. Funkcja f :

- E. nie ma miejsc zerowych G. ma dwa miejsca zerowe
F. ma jedno miejsce zerowe H. ma trzy miejsca zerowe

Zadanie 13. (0-1)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 + bx + 2$, gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

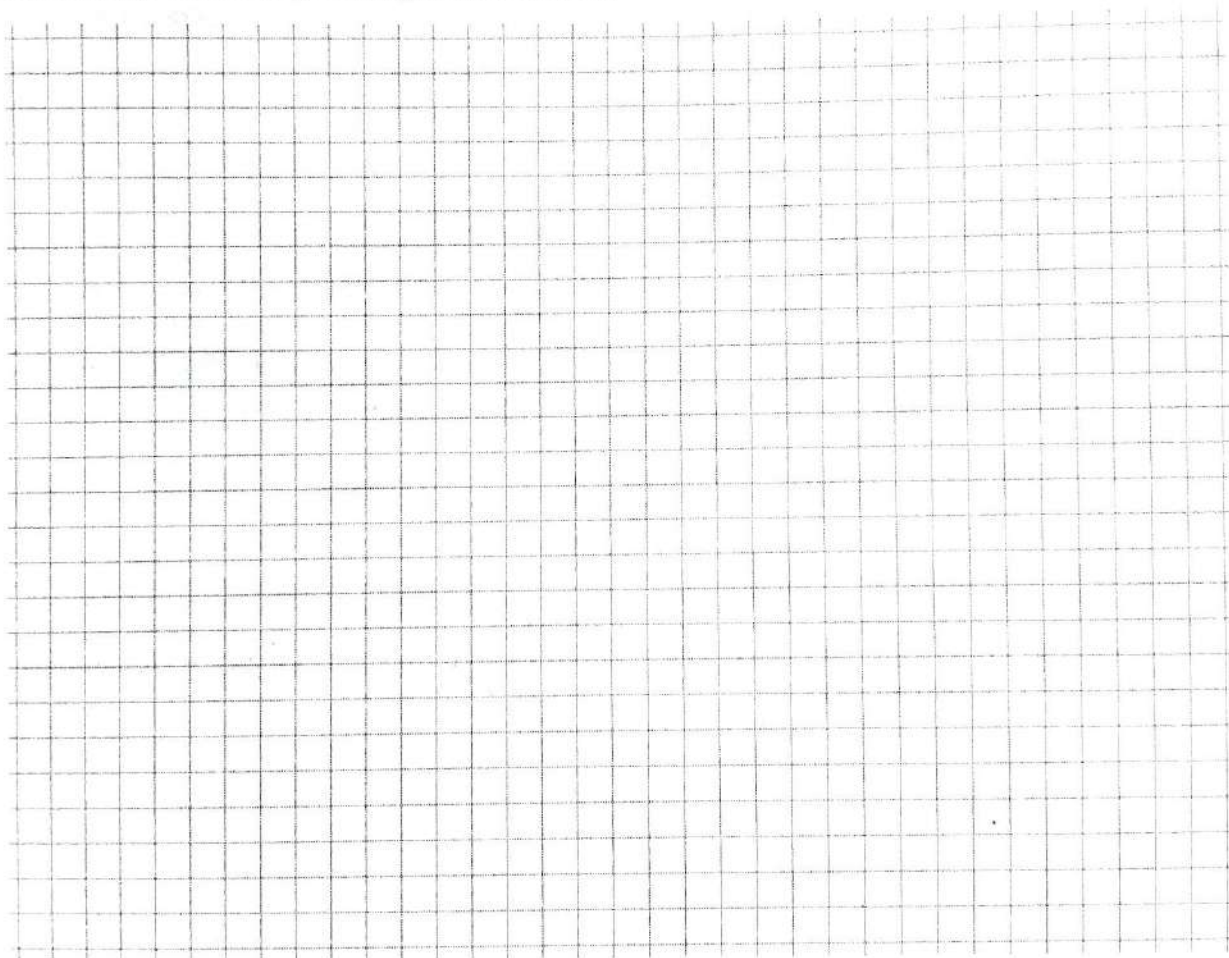
Funkcja f :

A.	nie ma miejsc zerowych,	ponieważ	1.	$b^2 - 8(1 - \sqrt{2}) > 0.$
B.	ma jedno miejsce zerowe,		2.	$b^2 - 8(1 - \sqrt{2}) = 0.$
C.	ma dwa miejsca zerowe,		3.	$b^2 - 8(1 - \sqrt{2}) < 0.$

Zadanie 14. (0-4)

Z drutu o długości 240 cm należy zbudować model prostopadłościanu. Podstawą tego prostopadłościanu ma być prostokąt, którego jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego.

Wyznacz wymiary takiego prostopadłościanu, który ma największe pole powierzchni całkowitej. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 15. (0-1)**

Który z podanych ciągów jest rosnący?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $a_n = -\frac{(n-6)^2}{4}$

B. $a_n = \frac{(n+6)^2}{4}$

C. $a_n = \frac{(n-2)^2}{4}$

D. $a_n = \frac{(-1)^n}{4}$

Zadanie 16.

Przez 10 kolejnych tygodni wakacji Marek pracował w kawiarni. W pierwszym tygodniu zarobił 520 zł, a w każdym kolejnym tygodniu o 25 zł więcej niż w poprzednim.

Zadanie 16.1. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	W ósmym tygodniu pracy Marek zarobił o 150 zł więcej niż w drugim tygodniu.	P	F
2.	Przez pierwsze cztery tygodnie Marek zarabiał średnio 557,50 zł.	P	F

Zadanie 16.2. (0-2)

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. W ostatnim tygodniu pracy Marek zarobił:

- A. 745 zł B. 720 zł C. 770 zł D. 695 zł

2. Marek co tydzień odkładał 60% swojego wynagrodzenia na konto oszczędnościowe.

Zgromadzona w ten sposób kwota po 10 tygodniach była równa:

- E. 6325 zł F. 3870 zł G. 3795 zł H. 3945 zł

Zadanie 17.

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , w którym trzeci wyraz jest równy $\frac{1}{4}$, a iloraz wynosi $\sqrt{2}$.

Zadanie 17.1. (0-1)

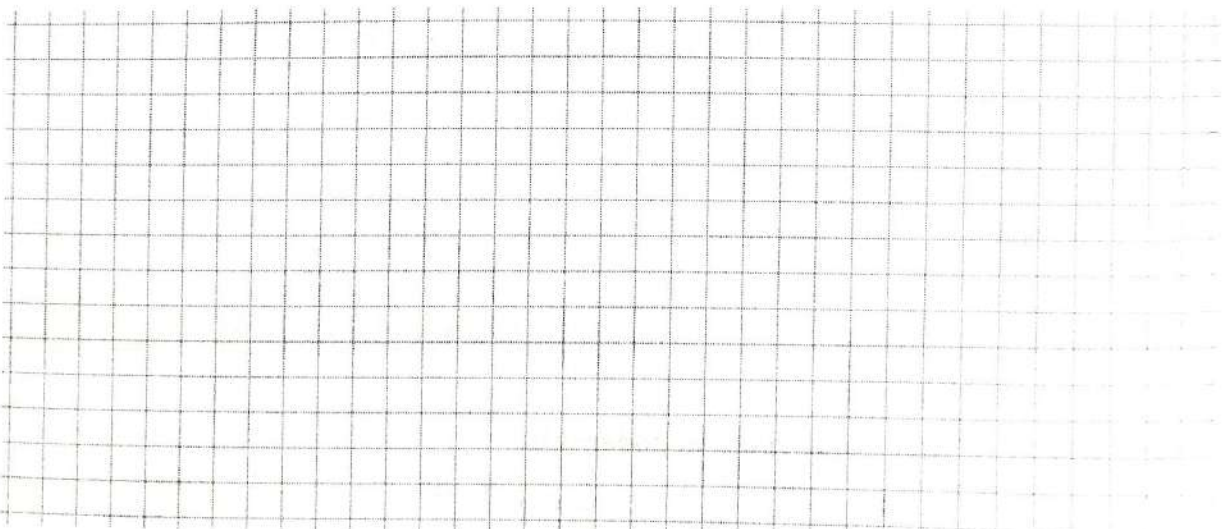
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\frac{a_{100}}{a_{97}}$ jest równa:

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

Zadanie 17.2. (0-2)

Wyznacz sumę szesnastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Otrzymany wynik zaokrąglaj do jedności. Zapisz obliczenia.



Zadanie 18. (0-1)

Dany jest trójkąt równoramienny, w którym boki mają długości 8, 8 i 6.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta zawartego między ramieniem a podstawą tego trójkąta jest równy:

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{\sqrt{55}}{8}$ C. $\frac{3}{\sqrt{55}}$ D. $\frac{\sqrt{55}}{3}$

Zadanie 19. (0-1)

W kole o średnicy 60 cm zaznaczono kąt środkowy α , który wyznacza wycinek tego koła o polu 800 cm^2 .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt środkowy α ma miarę:

- A. około 102° B. około 51° C. około 25° D. około 80°

Zadanie 20. (0-1)

Latarnia o wysokości 8 m rzuca cień o długości 14 m. W tym samym czasie i w tej samej miejscowości zmierzono, że maszt flagowy utworzył cień o długości 87,5 m.

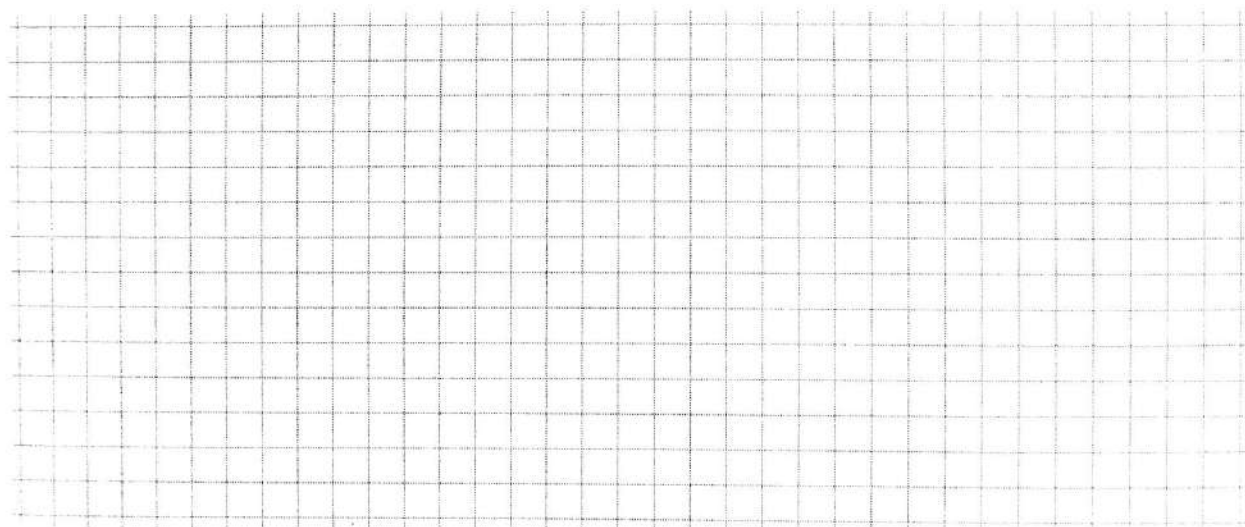
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Maszt flagowy ma wysokość 50 m.	P	F
2.	W momencie pomiarów promienie słoneczne padały na podłoże pod kątem około 60° .	P	F

Zadanie 21. (0-3)

Na trójkącie prostokątnym równoramiennym opisano koło, a następnie w ten sam trójkąt wpisano koło.

Wyznacz stosunek pola koła opisanego do pola koła wpisanego w ten trójkąt. Wynik zapisz w postaci wyrażenia $a + b\sqrt{c}$, gdzie a , b , c są liczbami naturalnymi. Zapisz obliczenia.



Zadanie 22. (0-2)

Punkty $A = (-4, 7)$ oraz $C = (2, 3)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Bok kwadratu $ABCD$ ma długość:

- A. $2\sqrt{13}$ B. $4\sqrt{13}$ C. $\sqrt{26}$ D. 6

2. Środek okręgu wpisanego w kwadrat $ABCD$ ma współrzędne:

- E. (2, 7) F. (-1, 4) G. (0, 5) H. (-1, 5)

Zadanie 23. (0-1)

Przez punkty $A = (-3, -6)$ i $B = (6, 0)$ przechodzi prosta k .

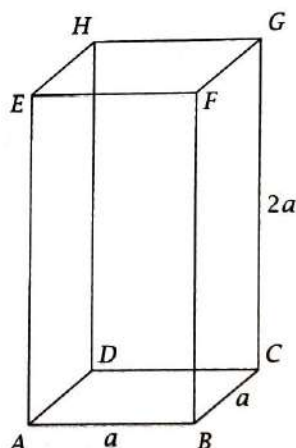
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik kierunkowy prostej k jest równy:

- A. -4 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

Zadanie 24.

Prostopadłościan $ABCDEFGH$ przedstawiony na rysunku ma objętość równą 128.

**Zadanie 24.1. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole ściany $BCGF$ prostopadłościanu $ABCDEFGH$ jest równe:

- A. 16 C. $16\sqrt{2}$
B. 32 D. 128

Zadanie 24.2. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Długość przekątnej AG prostopadłościanu $ABCDEFGH$ jest równa $4\sqrt{6}$.	P	F
2.	Tangens kąta HBD jest równy $\sqrt{2}$.	P	F

Zadanie 25. (0-2)

Romb o przekątnych 9 i 4 jest podstawą graniastosłupa prostego. Dłuższa przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego podstawą kąt o mierze 30° .

Wyznacz objętość tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 26. (0-1)

Spośród wszystkich liczb dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 12 lub przez 9 jest równe:

- A. $\frac{19}{90}$ B. $\frac{8}{45}$ C. $\frac{17}{90}$ D. $\frac{8}{90}$

Zadanie 27. (0-1)

Rzucamy czterokrotnie symetryczną monetą.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo tego, że wyrzucimy tyle samo orłów, co reszek jest równe:

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{5}{16}$

Zadanie 28. (0-1)

W pewnej firmie zatrudnionych jest 15 pracowników. W tabeli przedstawiono informację na temat zarobków w tej firmie bez uwzględnienia wynagrodzenia prezesa.

Kwota wynagrodzenia	3600 zł	4100 zł	4500 zł	4800 zł	5000 zł
Liczba pracowników	2	6	3	1	2

Wiadomo, że średnia arytmetyczna zarobków wszystkich piętnastu pracowników jest równa 4420 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynagrodzenie prezesa w tej firmie jest równe

- A. 5000 zł B. 6000 zł C. 6200 zł D. 6500 zł

Arkusz egzaminacyjny nr 8

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odwrotnością liczby $0,(12)$ jest:

- A. 8,25 B. $-\frac{4}{33}$ C. $0,(21)$ D. $-0,(12)$

Zadanie 2. (0-1)

Dane są liczby:

$$a = (-3)^2 \quad b = -3^2 \quad c = -3^{-2} \quad d = (-3)^{-2}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli zapiszemy te liczby w kolejności rosnącej, to otrzymamy ciąg liczb:

- A. c, d, b, a B. b, c, a, d C. b, c, d, a D. c, b, d, a

Zadanie 3. (0-1)

Dana jest liczba $x = 2^{0,5} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$. Wskaż liczbę, która stanowi połowę liczby x .

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\sqrt[6]{2}$ B. $2^{0,5} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ C. $4^{\frac{1}{3}}$ D. $\frac{8^{\frac{1}{3}}}{2}$

Zadanie 4. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem nierówności $|x + 7| > 1$ są wszystkie liczby rzeczywiste należące do zbioru:

- A. $(-\infty; -8) \cup (-6; \infty)$ B. $(-\infty; 6) \cup (8; \infty)$ C. $(-8; -6)$ D. $(-8; 6)$

Zadanie 5. (0-1)

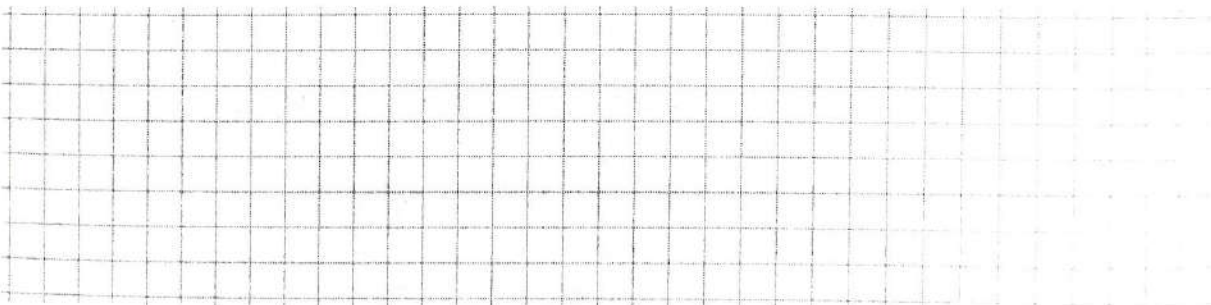
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma trzech liczb: $\log_4 \frac{1}{5}$, $\log_2 \sqrt{2}$ oraz $\log_4 1,25$ jest równa:

- A. $\frac{1}{2} + \log_4 6,25$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $2 + \log_4 6,25$ D. $\frac{3}{2}$

Zadanie 6. (0-2)

Wykaż, że liczba $2^{40} + 4^{21} + 8^{13}$ jest podzielna przez 88.



Zadanie 7. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $W(x) = 4x^2 - 10$ można przedstawić w postaci:

- A. $W(x) = (2x - 5)(2x + 5)$ C. $W(x) = (2x - \sqrt{10})(2x + \sqrt{10})$
 B. $W(x) = (2x - \sqrt{10})^2$ D. $W(x) = (2x - 5)(2x + 2)$

Zadanie 8. (0-1)

Liczby $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 1$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynniki a oraz b mają wartości:

- A. $a = -2, b = 1$ B. $a = 3, b = -3$ C. $a = -3, b = 3$ D. $a = 0, b = 2$

Zadanie 9. (0-1)

Dane są wielomiany $W(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ oraz $V(x) = x^2 - 5$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn wielomianów $W(x)$ i $V(x)$ jest wielomianem stopnia:

- A. szóstego C. trzeciego
 B. piątego D. pierwszego

Zadanie 10. (0-1)

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 3)^2}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Dziedziną wyrażenia $W(x)$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.	P	F
2.	Wyrażenie $W(x)$ można przedstawić w postaci ilorazu $\frac{x-2}{x-3}$.	P	F

Zadanie 11. (0-1)

Wskaż równanie, które nie ma rozwiązań.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $3x^2 - 7 = 0$ C. $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0$
 B. $\frac{5x^2 + 6x}{2} = 3x$ D. $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{5} = 0$

Zadanie 12. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $x(3 + \sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2}$ jest:

- A. dodatnia liczba niewymierna C. ujemna liczba wymierna
 B. ujemna liczba niewymierna D. dodatnia liczba wymierna

Zadanie 13. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do zbioru rozwiązań nierówności $(2x - \sqrt{17})(3x + 7) < 0$:

- A. nie należy żadna liczba całkowita.
- B. należy nieskończenie wiele liczb całkowitych.
- C. należą tylko 3 liczby całkowite.
- D. należy tylko 5 liczb całkowitych.

Zadanie 14. (0-1)

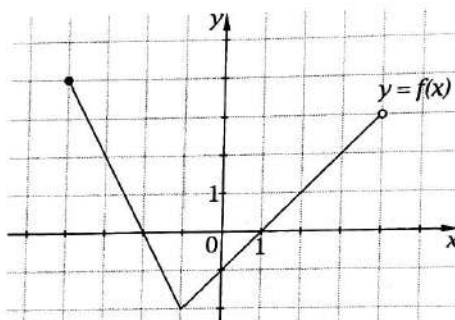
Wskaż układ równań, który ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -x + \frac{3}{2}y = 2 \end{cases}$
- D. $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 2y - 3x = -4 \end{cases}$

Zadanie 15.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f .

**Zadanie 15.1. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do wykresu funkcji $y = f(-x)$ należy punkt:

- A. $A = (-4, 4)$
- B. $B = (-4, -4)$
- C. $C = (-4, 3)$
- D. $D = (4, 4)$

Zadanie 15.2. (0-1)

Wykres funkcji f przesunięto tak, że otrzymano wykres funkcji $g(x) = f(x + 3) + 2$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Funkcja g ma dokładnie jedno miejsce zerowe.	P	F
2.	Dziedziną funkcji g jest przedział $\langle -1; 7 \rangle$.	P	F

Zadanie 16. (0-1)

Dana jest funkcja f określona wzorem: $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ osiąga najmniejszą wartość równą:

- A. $2\sqrt{2} - 1$ B. -3 C. -4 D. $\sqrt{2}$

Zadanie 17. (0-1)

Liczba bakterii w pewnej kolonii bakterii o godzinie 15:30 była równa 400. Liczbę b bakterii w tej kolonii po upływie x godzin od godziny 15:30 określa wzór $b(x) = 400 \cdot 2^{\frac{1}{2}x}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

O godzinie 18:30 liczba bakterii w tej kolonii będzie równa około:

- A. 3200 B. 1130 C. 2260 D. 6400

Zadanie 18.

Funkcja kwadratowa h określona jest wzorem $h(t) = -4t^2 + 12t$.

Zadanie 18.1. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Funkcja h osiąga największą wartość równą

Zadanie 18.2. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Miejscami zerowymi funkcji h są liczby

Zadanie 19. (0-3)

O funkcji liniowej f wiadomo, że dla każdego argumentu x spełnia warunek $f(x+2) - f(x) = 3$ oraz $f(-4) = 1$.

Podaj wzór funkcji f oraz wyznacz zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20. (0-1)

Suma trzech początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa (-18) . Czwarty wyraz tego ciągu jest 5 razy większy od trzeciego wyrazu.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Ciąg (a_n) można przedstawić za pomocą wzoru $a_n = 8n - 22$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.	P	F
2.	Drugi i trzeci wyraz ciągu (a_n) są liczbami przeciwnymi.	P	F

Zadanie 21. (0-1)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{2}{9} \cdot (-3)^n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Ciąg (a_n) :

- A. jest malejącym ciągiem geometrycznym.
- B. jest rosnącym ciągiem geometrycznym.
- C. jest ciągiem geometrycznym, który nie jest ani rosnący, ani malejący.
- D. nie jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 22. (0-2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 4n + 2$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wyznacz różnicę $a_{n+1} - a_n$. Wynik zapisz w postaci wyrażenia $an + b$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0–2)



Sinus kąta rozwartego α jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz spośród E–H.

1. Cosinus kąta α jest równy:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. Tangens kąta α jest równy:

- E. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ F. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ G. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ H. $-\frac{2}{3}$

Zadanie 24. (0–1)

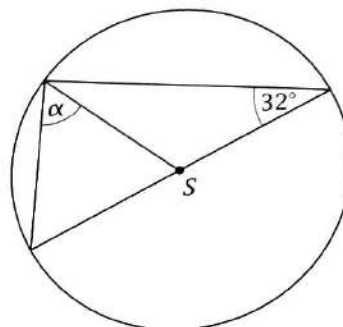


Dany jest okrąg o środku w punkcie S (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt α ma miarę:

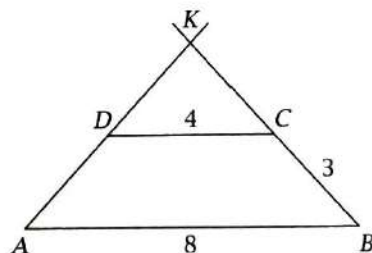
- A. 32°
B. 64°
C. 60°
D. 58°



Zadanie 25. (0–2)



Dany jest trapez równoramienny $ABCD$. Półproste AD oraz BC przecinają się w punkcie K (zobacz rysunek).



Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A–D oraz spośród E–G.

1. Obwód trójkąta ABK jest równy:

- A. 20
B. 10
C. 18
D. 24

2. Pole trójkąta ACD jest:

- E. takie samo jak pole trójkąta ABD .
F. dwa razy mniejsze od pola trójkąta ABD .
G. trzy razy mniejsze od pola trójkąta ABD .
H. cztery razy mniejsze od pola trójkąta ABD .

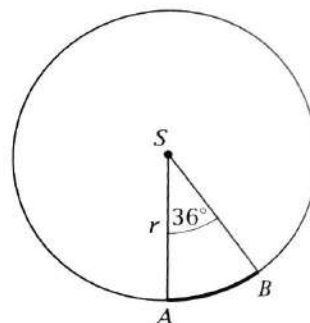
Zadanie 26. (0-1)

Dany jest okrąg o środku S i promieniu $r = 5$, w którym zaznaczono kąt środkowy o mierze 36° oparty na łuku AB (zobacz rysunek).

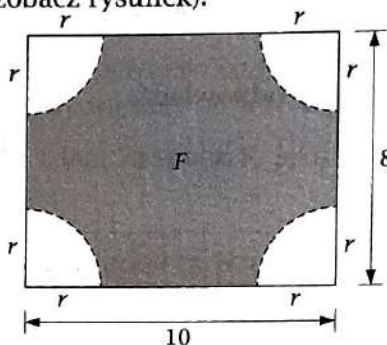
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Łuk AB ma długość:

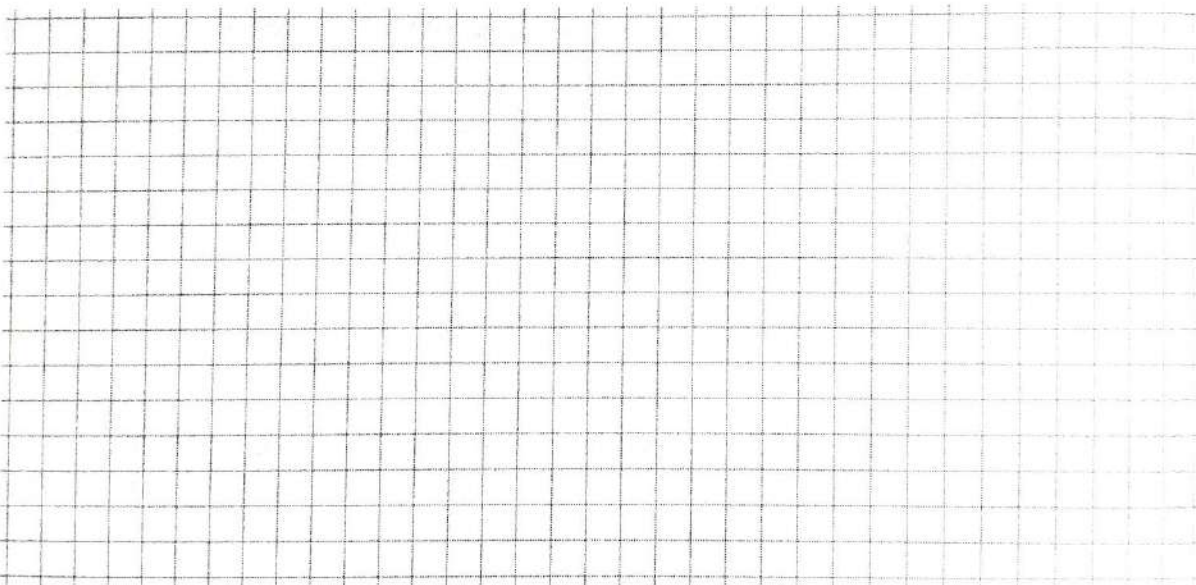
- A. 5π B. 2π C. π D. $\frac{5\pi}{2}$

**Zadanie 27. (0-2)**

Z prostokąta przy wierzchołkach wycięto 4 jednakowe wycinki koła o promieniu r , otrzymując w ten sposób figurę F (zobacz rysunek).



Wyznacz promień r tak, aby pole figury F stanowiło 75% pola prostokąta. Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 28. (0-1)**

Dany jest trójkąt ABC taki, że $A = (-6, -1)$, $C = (4, 7)$, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

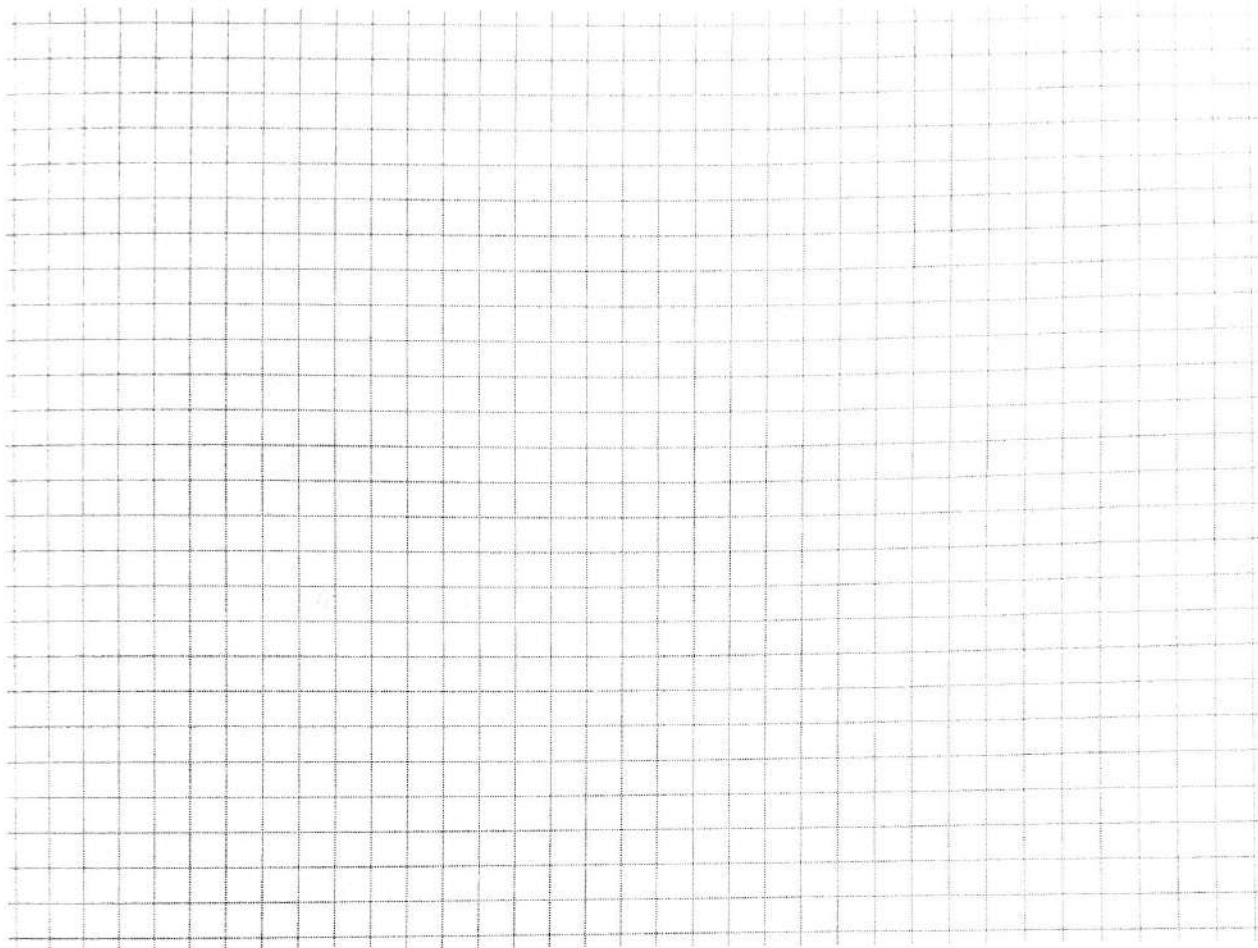
Okrąg opisany na trójkącie ABC ma równanie:

- A. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 41$ C. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 164$
 B. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 41$ D. $(x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 164$

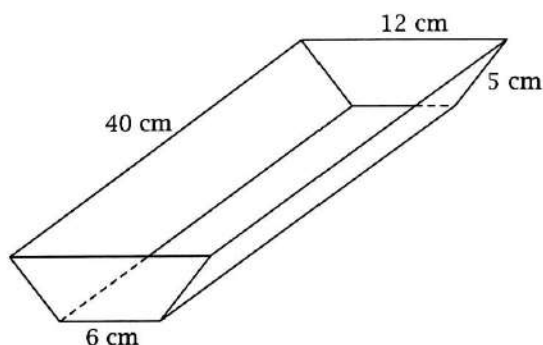
Zadanie 29. (0-4)

Dana jest prosta k o równaniu $y = 2x + 2$ oraz prosta l o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 7$. Punkt A jest punktem przecięcia się prostych k i l , a punkt $B = (-4, 9)$ należy do prostej l .

Wyznacz współrzędne punktu C należącego do prostej k i spełniającego warunek $|AB| = |AC|$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 30. (0-1)**

Michalina zakupiła formę do pieczenia ciasta. Forma ta ma kształt graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trapez równoramienny. Wewnętrzne wymiary tej formy przedstawiono na rysunku.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pojemność formy zakupionej przez Michalinę jest równa:

A. 1,44 litra

C. 1,8 litra

B. 2,88 litra

D. 1,2 litra

Zadanie 31. (0-1)

Państwo Nowakowie wraz z czwórką dzieci planują wakacyjny lot samolotem. Zgodnie z informacją umieszczoną na bilecie zasiadą w rzędzie 8 na miejscach A, B, C oraz w rzędzie 9 na miejscach A, B, C. Schemat rozmieszczenia miejsc w samolocie przedstawiono na rysunku obok.

Na naradzie rodzinnej postanowiono, że najmłodsza córka Halinka usiądzie przy oknie, czyli na miejscu A. Ponadto ustalono, że rodzice będą siedzieć obok siebie.

Na ile sposobów rodzina Nowaków może rozmieścić się na wskazanych miejscach zgodnie z podjętymi ustaleniami?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 24 B. 48 C. 60 D. 72

7	A	B	C	D	E	F
8	A	B	C	D	E	F
9	A	B	C	D	E	F
10	A	B	C	D	E	F
11	A	B	C	D	E	F
12	A	B	C	D	E	F
13	A	B	C	D	E	F

Zadanie 32. (0-1)

W koszyku znajdują się dwa jabłka kwaśne i pięć jabłek słodkich. Wojtek wybiera losowo z koszyka dwa jabłka.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

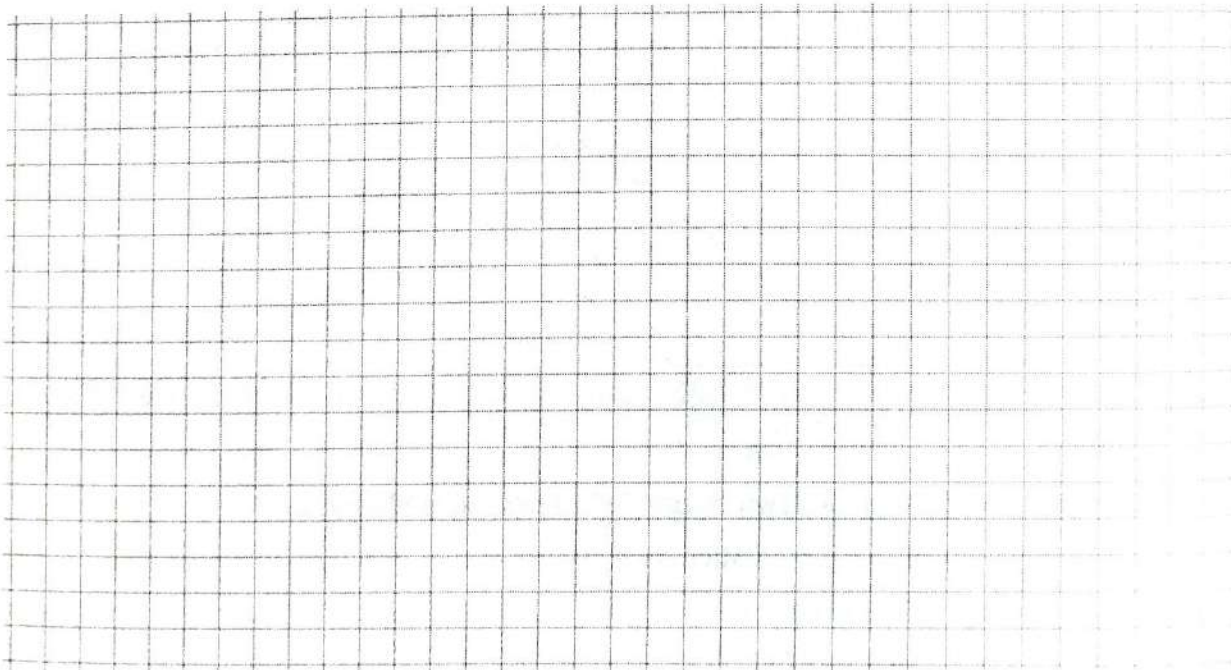
Prawdopodobieństwo tego, że oba wybrane przez Wojtkę jabłka są słodkie jest równe:

- A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{5}{21}$ C. $\frac{10}{21}$ D. $\frac{25}{42}$

Zadanie 33. (0-2)

W szufladzie znajduje się 20 par skarpet, wśród nich 14 par to skarpety czarne. Wśród wszystkich skarpet znajduje się 5 par skarpet dziurawych. Wiadomo, że dwie pary skarpet są jednocześnie czarne i dziurawe.

Wyznacz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana para skarpet nie jest ani czarna, ani dziurawa. Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0-1)

Cenę telewizora podniesiono najpierw o 10%. Następnie nową cenę podniesiono jeszcze o 5%. Po obu tych podwyżkach telewizor kosztuje 6 468 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przed podwyżkami telewizor kosztował:

- A. 5 624,30 zł B. 5 600 zł C. 6 160 zł D. 5 880 zł

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $|4 - 3\sqrt{2}| - |3 - 2\sqrt{2}|$ jest równa:

- A. $5\sqrt{2} - 7$ B. $1 - \sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} - 7$ D. $1 - 5\sqrt{2}$

Zadanie 3. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba o 2 większa od liczby $\log_5 10$ jest równa:

- A. 4 B. $\log_5 12$ C. $\log_5 250$ D. $\log_5 20$

Zadanie 4. (0-1)

Pan Władysław wpłacił do banku kwotę 8000 zł na lokatę z rocznym oprocentowaniem w wysokości 4% i kwartalną kapitalizacją odsetek.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po roku oszczędzania pan Władysław zgromadzi na koncie:

- A. 8320 zł B. około 9359 zł C. około 8325 zł D. 8080 zł

Zadanie 5. (0-1)

Dane jest wyrażenie $W = (2x - y)^2 - (2x + y)^2$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Wyrażenie W można przekształcić do postaci $(-8xy)$.	P	F
2.	Dla $x = 2 + \sqrt{3}$ i $y = \sqrt{3} - 2$ wyrażenie W przyjmuje wartość 8.	P	F

Zadanie 6. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $x = -1$ nie jest pierwiastkiem wielomianu:

- A. $W_1(x) = (2x - 3)(x + 1)(x - 3)^2$ C. $W_3(x) = (x + 3)(2x + 3)(x + 1)^2$
 B. $W_2(x) = (2x + 3)(x + 3)(x + 1)^2$ D. $W_4(x) = (2x + 3)(x - 3)(x + 3)^2$

Zadanie 7. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x \neq 0$ i $x \neq -2$ iloczyn wyrażeń $V(x) = \frac{x^2 - 5x}{x+2}$ oraz $W(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$ jest równy:

- A. $(x^2 - 5)(x - 2)$ B. $(x - 5)(x - 2)$ C. $\frac{x^3 - 5x^2}{(x+2)(x^2 - 4)}$ D. $\frac{(x^2 - 5)(x^2 - 4)}{2x}$

Zadanie 8. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przedział $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:

- A. $\frac{2+3x}{4} > 0$ B. $\frac{-2-3x}{4} \geq 0$ C. $\frac{-2-3x}{4} \leq 0$ D. $\frac{2-3x}{4} \leq 0$

Zadanie 9. (0-1)

Wskaż równanie, którego rozwiązaniem są dwie liczby wymierne.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $-2x^2 + 3 = 0$
 B. $\frac{5x^2 + 6x}{2} = 3x - 2$
 C. $x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$
 D. $\sqrt{3}x^2 + \frac{9}{2\sqrt{3}}x - \sqrt{3} = 0$

Zadanie 10. (0-1)

Dane są funkcje f i g . Funkcja f określona jest za pomocą tabelki, a funkcja g — wzorem $g(x) = f(x+2)$.

x	-4	-3	-1	0	2	4	6
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{7}{5}$	$\sqrt{15}$	5	$2\sqrt{15}$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Funkcja f jest rosnąca.	P	F
2.	Do wykresu funkcji g należy punkt $A = (4, \sqrt{15})$.	P	F

Zadanie 11. (0-1)

Dane są funkcje g i h określone wzorami $g(x) = -2x - \frac{4}{3}$ i $h(x) = \frac{1}{2}x - 3$ oraz funkcja liniowa f , której wykres jest równoległy do wykresu funkcji h i przecina oś y układu współrzędnych w tym samym punkcie, co wykres funkcji g .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejsce zerowe funkcji f jest liczbą:

- A. $-\frac{4}{3}$ B. 6 C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

Zadanie 12. (0-1)

Osiem kombajnów pracujących z jednakową wydajnością rozpoczęło o godzinie 15:00 koszenie zboża na pewnym polu. Obliczono, że praca zajmie im 3 godziny. Jednak o godzinie 16:00 dwa spośród pracujących kombajnów nieoczekiwanie musiały zaprzestać koszenia. Wszystkie pozostałe kombajny pracowały dalej zgodnie z planem i z tą samą wydajnością.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pozostałe na polu kombajny zakończą pracę o godzinie:

- A. 18:00 B. 18:20 C. 18:30 D. 18:40

Zadanie 13. (0-2)

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}(x+5)(x-19)$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji f jest punkt:

- A. $W = (7, 96)$ B. $W = (7, -\frac{104}{3})$ C. $W = (6, 96)$ D. $W = (8, \frac{286}{3})$

2. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie wyłącznie dla:

- E. $x \in (-19; 5)$ G. $x \in (-5; 19)$
 F. $x \in \langle -5; 19 \rangle$ H. $x \in (-\infty; -5) \cup (19; +\infty)$

Zadanie 14.

O godzinie 9:00 rowerzysta wyruszył na przejażdżkę. Najpierw jechał przez półtorej godziny ze średnią prędkością 24 km/h. Po godzinnym postoju kontynuował wyprawę poruszając się tym razem ze średnią prędkością 18 km/h. Do punktu docelowego dotarł o godzinie 14:00.

Zadanie 14.1. (0-2)

Wyznacz wzór funkcji opisującej drogę rowerzysty w zależności od czasu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14.2. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Przed przerwą rowerzysta pokonał krótszy odcinek niż po przerwie.	P	F
2.	Średnia prędkość jazdy rowerem, bez uwzględniania przerwy na postój, była równa 21 km/h.	P	F

Zadanie 14.3. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Podczas wyprawy rowerzysta pokonał łączny dystans km.

Zadanie 15. (0-1)

Dany jest ciąg określony wzorem $a_n = 2n - 1$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wskaż trzy wyrazowy ciąg geometryczny.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. (a_2, a_{20}, a_{200})

B. (a_1, a_6, a_{11})

C. (a_2, a_5, a_{14})

D. (a_1, a_7, a_{16})

Zadanie 16. (0-4)

Suma dziesięciu początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 170. Trzeci, czwarty i ósmy wyraz tego ciągu tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny (b_n) .

Wyznacz iloraz ciągu (b_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-1)

W trójkącie równoramiennym ABC dane są długości boków: $|AC| = |BC| = 10$ oraz $|AB| = 8$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus kąta CAB jest równy:

A. $\frac{\sqrt{21}}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{\sqrt{21}}{2}$

Zadanie 18. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ jest równe:

A. 1

B. $\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

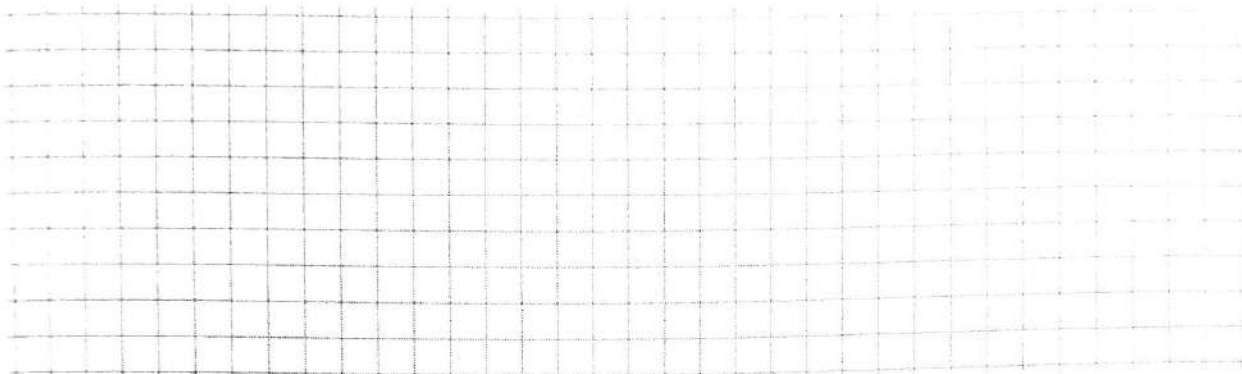
C. $\frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

D. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

Zadanie 19. (0–3)

W ciągu dnia dokonano dwukrotnie pomiaru długości cienia pewnego drzewa. Za pierwszym razem promienie słoneczne padały na podłoże pod kątem 60° , a za drugim razem — pod kątem 30° . Podczas drugiego pomiaru okazało się, że cień wydłużył się o 10 metrów w stosunku do pierwszego pomiaru.

Wyznacz wysokość drzewa. Wynik zaokrąglij do części dziesiętnych metra. Zapisz obliczenia.



Zadanie 20. (0–1)

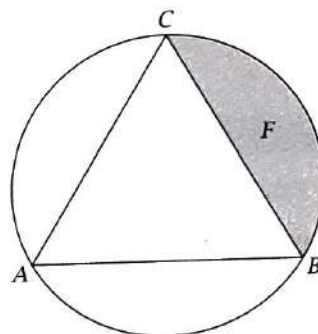


Trójkąt równoboczny ABC o boku 8 wpisany jest w koło (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole figury F jest równe:

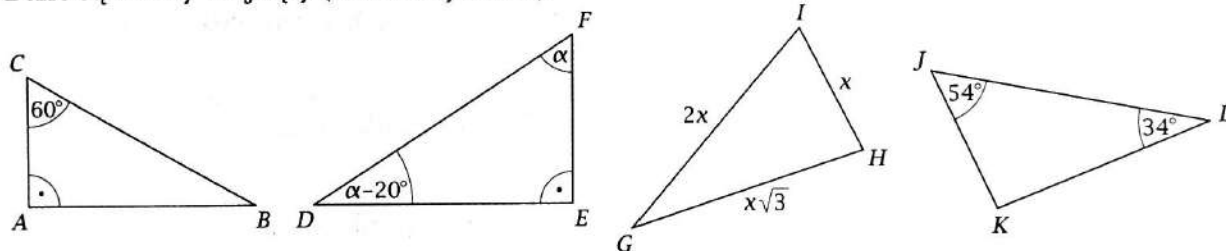
- A. $\frac{64\pi - 48\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{9}$
 B. $\frac{64\pi - 48\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{64\pi}{3}$



Zadanie 21. (0–2)



Dane są cztery trójkąty (zobacz rysunek).



Wskaż dwa zdania prawdziwe.

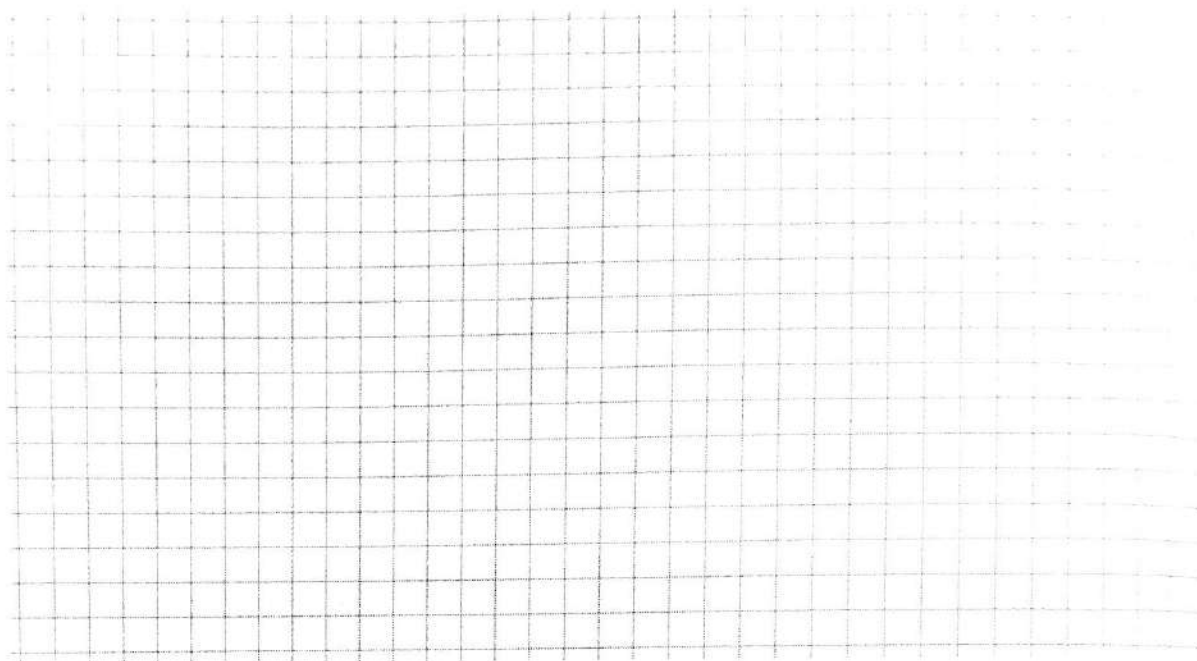
Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Trójkąt DEF jest podobny do trójkąta JKL .
 B. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta GHI .
 C. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DEF .
 D. Trójkąt GHI jest podobny do trójkąta JKL .
 E. Najmniejszy kąt trójkąta DEF ma miarę 25° .
 F. Jeżeli obwód trójkąta GHI jest równy $3(\sqrt{3} + 1)$, to $x = \sqrt{3}$.
 G. Jeżeli pole trójkąta GHI jest równe $8\sqrt{3}$, to $x = 16$.

Zadanie 22. (0-3)

W trójkącie równoramiennym kąt między ramionami ma miarę 120° , a obwód jest równy $18 + 12\sqrt{3}$.

Wyznacz pole tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 23. (0-1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt wewnętrzny dwunastokąta foremnego ma miarę:

- A. 150° B. 120° C. 140° D. 75°

Zadanie 24. (0-1)

Dana jest prosta k określona wzorem $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ oraz punkt $A = (-3, -2)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Prosta równoległa do prostej k i przechodząca przez punkt A ma równanie $y = -\frac{4}{3}x - 2$.	P	F
2.	Prosta prostopadła do prostej k i przechodząca przez punkt A ma równanie $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.	P	F

Zadanie 25. (0-1)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna ma długość a i jest nachylona do podstawy pod kątem 60° .

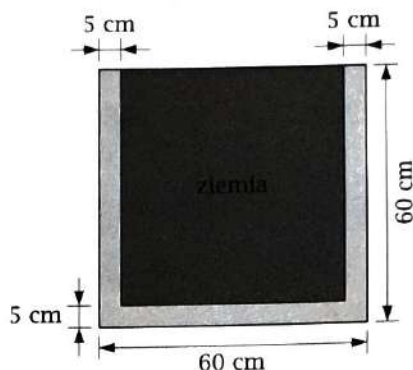
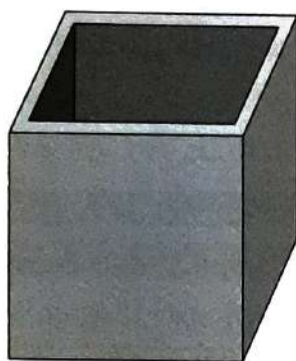
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość:

- A. $\frac{1}{2}a$ B. $2a$ C. $a\sqrt{2}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

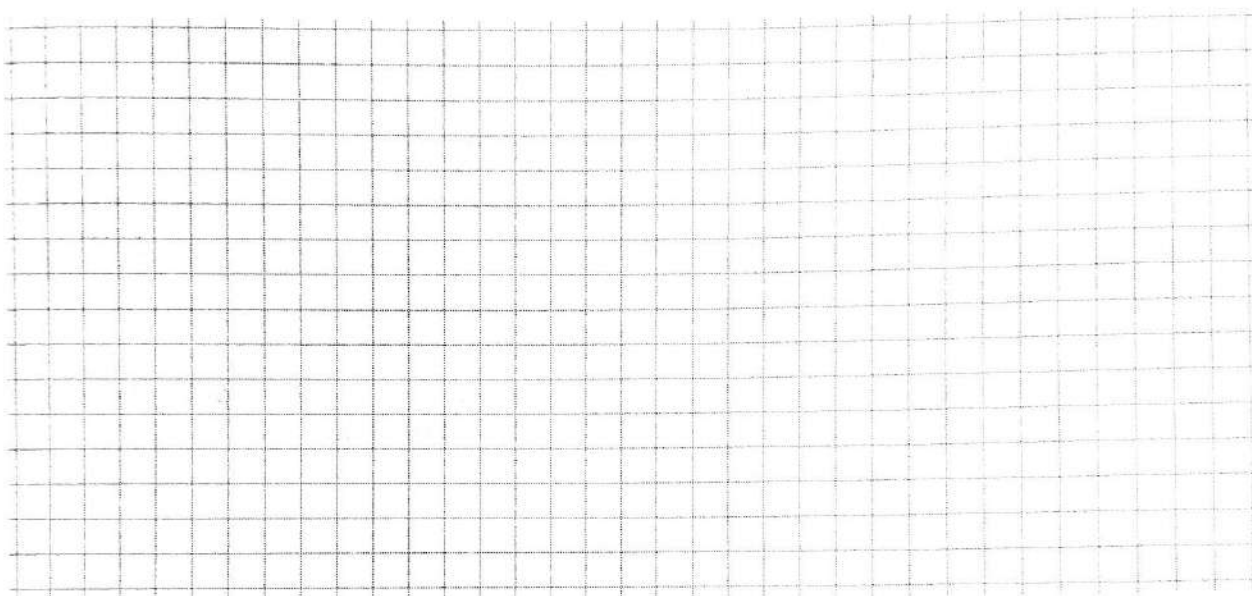
Zadanie 26. (0-2)

Poniżej przedstawiono donicę w kształcie sześcianu oraz jej przekrój (zobacz rysunek).



Donicę należy całkowicie wypełnić ziemią tak, aby ziemia nie wystawała nad jej powierzchnię. Wiadomo, że 1 cm^3 ziemi ma masę $0,4 \text{ g}$ oraz że ziemia, którą wypełniona będzie donica zostanie zakupiona w 10-kilogramowych workach.

Oblicz, ile co najmniej pełnych worków ziemi należy kupić, aby ziemi wystarczyło do napełnienia donicy. Zapisz obliczenia.



Zadanie 27. (0-1)



Uczestnicy pewnego konkursu kulinarnego oceniani są według kryteriów i odpowiadających im wag podanych w tabeli. Wynikiem końcowym jest średnia ważona otrzymanych punktów.

Piotr otrzymał od jurorów konkursu następujący przydział punktów:

- właściwy dobór produktów: 9 punktów,
- walory smakowe: 10 punktów,
- sposób podania: 6 punktów,
- walory dietetyczne: 7 punktów.

Kryterium	Waga
Właściwy dobór produktów	4
Walory smakowe	3
Sposób podania	1
Walory dietetyczne	2

Jaki był wynik końcowy Piotra w tym konkursie?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 8 punktów B. 8,5 punktu C. 8,6 punktu D. 86 punktów

Zadanie 28. (0-1)

Ile wszystkich liczb czterocyfrowych można utworzyć przy użyciu cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby żadna z cyfr się nie powtarzała?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 3584

B. 1260

C. 1680

D. 720

Zadanie 29.

W grupie 150 osób zadano pytanie *Ile kubków kawy wypitaś/eś wczoraj?* Wyniki sondy przedstawiono w tabeli:

Liczba kubków wypitej kawy	0	1	2	3	4	5
Liczba wskazań	15	60	45	20	7	3

Zadanie 29.1. (0-2)

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Dominantą zestawu danych przedstawionego w tabeli jest liczba:

A. 1

B. 60

C. 5

D. 2

2. Medianą zestawu danych przedstawionego w tabeli jest liczba:

E. 2

F. 2,5

G. 1

H. 1,5

Zadanie 29.2. (0-2)

Dwie losowo wybrane osoby uczestniczące w ankiecie na temat spożycia kawy zostaną nagrodzone drobnymi upominkami.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane osoby wypity w dniu poprzedzającym ankietę co najwyżej jeden kubek kawy. Zapisz obliczenia.

Zadanie 30. (0-1)

W pudełku znajdują się cztery cukierki czekoladowe i pięć truskawkowych. Ola wybiera z pudełka losowo dwa cukierki.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo tego, że oba wybrane przez Olę cukierki są czekoladowe, jest równe:

A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{4}{27}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{16}{81}$

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczbę $9^{17} + 9^{18}$ można przedstawić w postaci:

- A. 9^{35} B. 18^{35} C. $10 \cdot 9^{17}$ D. $9 \cdot 9^{19}$

Zadanie 2. (0-1)

Dane są liczby $x = 4 - 3\sqrt{2}$ oraz $y = 3 - 2\sqrt{2}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Iloczyn liczb x i y jest liczbą dodatnią.	P	F
2.	Kwadrat sumy liczb x i y jest równy $99 - 70\sqrt{2}$.	P	F

Zadanie 3. (0-1)

Dane są liczby:

$$a = 4|2 - \sqrt{5}| \quad b = |5 - 3\sqrt{2}| \quad c = |2\sqrt{3} - 4|$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby a , b oraz c spełniają warunek:

- A. $a < b < c$
 B. $c < b < a$
 C. $b < a < c$
 D. $c < a < b$

Zadanie 4. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli $a > 0$, $b > 0$ i $4\log a - \log \frac{a}{b} = 2$, to prawdziwa jest równość:

- A. $\log b = 2 - \log a^3$
 B. $\log a = \frac{1}{3}(2 + \log b)$
 C. $\log b = \log a^3 - 2$
 D. $\log a = 2 - \frac{1}{3}\log b$

Zadanie 5. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $(5x - 2)^2 - 9$ jest równe:

- A. $(5x - 3)^2$
 B. $(5x + 1)(5x - 5)$
 C. $25x^2 - 13$
 D. $(5x + 5)(5x - 1)$

Zadanie 6. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x \neq 0$ i $x \neq 1$ różnica $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1}$ jest równa:

- A. $\frac{1}{x(x+1)}$ B. $\frac{x^2-x+1}{x(x+1)}$ C. -1 D. $\frac{2x+1}{x(x+1)}$

Zadanie 7.

Dany jest wielomian $W(x) = (2x^2 + 1)(4x^2 - 1)(x^3 - 1)$.

Zadanie 7.1. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

1.	Różnica $W\left(\frac{1}{2}\right) - W(1)$ jest równa 0.	P	F
2.	Wielomian $W(x)$ ma trzy pierwiastki.	P	F

Zadanie 7.2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest równa:

- A. 1 B. $1\frac{1}{2}$ C. -1 D. 0

Zadanie 8. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $x(3 + \sqrt{2}) = -3\sqrt{2} - 2$ jest liczba:

- A. wymierna większa od (-1) C. wymierna mniejsza od (-1)
 B. niewymierna większa od (-1) D. niewymierna mniejsza od (-1)

Zadanie 9. (0-1)

Rozwiązaniem nierówności $x^2 + bx + 9 \leq 0$ jest dokładnie jedna liczba rzeczywista dodatnia.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba b jest równa:

- A. -6 B. -3 C. 0 D. -9

Zadanie 10. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $27x^3 + 8 = 0$:

- A. nie ma rozwiązań
 B. ma jedno rozwiązanie będące liczbą wymierną
 C. ma jedno rozwiązanie będące liczbą niewymierną
 D. ma trzy rozwiązania

Zadanie 11. (0-2)

Rozwiąż nierówność $\left|x + \frac{1}{6}\right| \geq \frac{11}{6}$, a następnie wyznacz wszystkie liczby całkowite, które nie należą do zbioru rozwiązań tej nierówności. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0-1)

Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + q$, należy punkt $A = (-3, 5)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział:

- A. $\langle 1; +\infty \rangle$ B. $\langle 5; +\infty \rangle$ C. $\langle -\infty; -3 \rangle$ D. $\langle -3; \infty \rangle$

Zadanie 13. (0-1)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$. Wykres funkcji f przekształcono przez symetrię względem osi y i otrzymano wykres funkcji g .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja g jest określona wzorem:

- A. $g(x) = 2^x - 2$ B. $g(x) = 2^x + 2$ C. $g(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$ D. $g(x) = -2^x + 2$

Zadanie 14. (0-1)

W pewnej korporacji taksówkowej pasażerowie za skorzystanie z taksówki płacą pewną opłatę stałą oraz opłatę za każdy kilometr przejechanej trasy. Ania przejechała taksówką z tej korporacji trasę 5 km i zapłaciła 33,50 zł, a Michał za przejechanie 8 km zapłacił 50 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

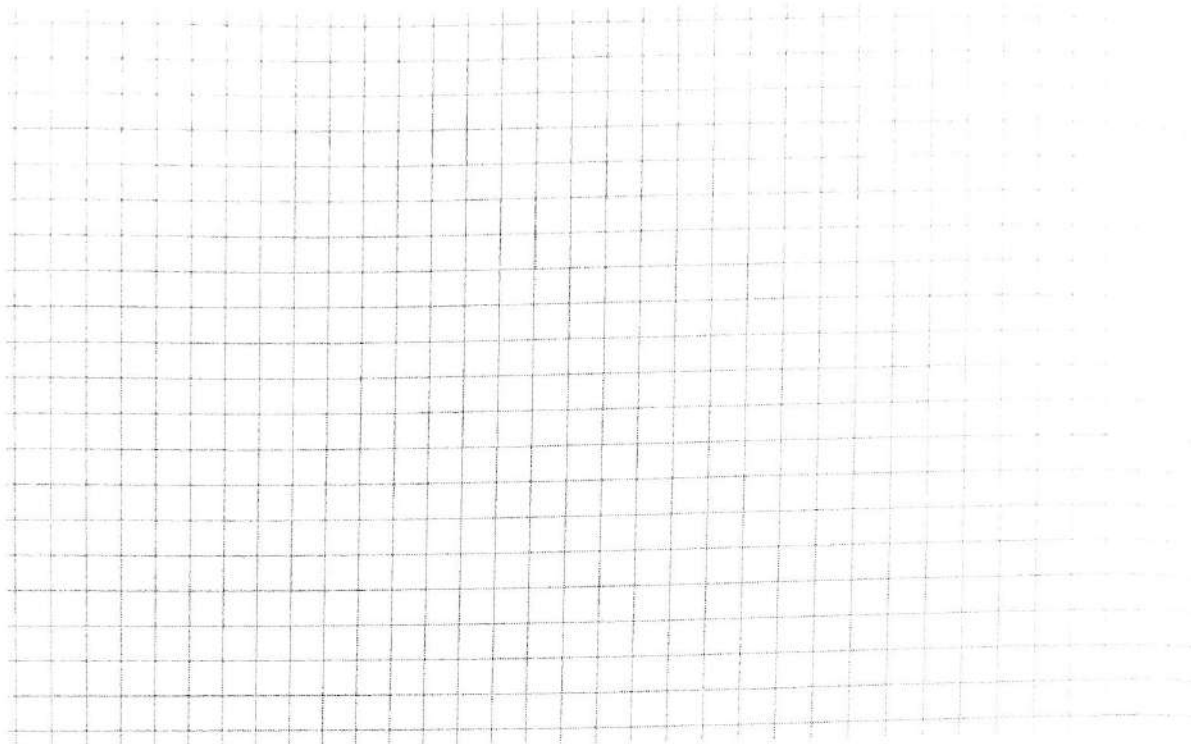
Za przejechanie taksówką z tej korporacji trasy o długości 13 km zapłacimy:

- A. 83,50 zł B. 77,50 zł C. 89,50 zł D. 70 zł

Zadanie 15. (0-2)

Prosta o równaniu $x = 3$ jest osią symetrii wykresu funkcji $f(x) = -2x^2 + bx - 1$.

Wyznacz miejsca zerowe funkcji f . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 16. (0-1)**

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = \frac{50-3n}{2}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

1.	Ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.	P	F
2.	Ciąg (a_n) ma dokładnie 16 dodatnich wyrazów.	P	F

Zadanie 17. (0-1)

Piąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy (-12) , a drugi wyraz tego ciągu jest równy $3\sqrt{2}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy:

- A. 3 B. -6 C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. -3

Zadanie 18. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma wszystkich liczb nieparzystych dwucyfrowych jest równa:

- A. 2475 B. 2530 C. 2430 D. 2250

Zadanie 19. (0-1)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC przedstawiony na rysunku.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

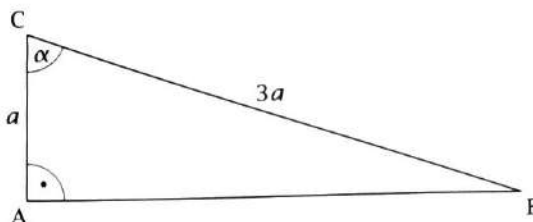
Dla kąta α spełniona jest równość:

A. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$

C. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$

B. $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$

D. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$



Zadanie 20. (0-1)

Która z podanych liczb jest ujemna?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\cos 120^\circ + \cos 60^\circ$

C. $\cos 120^\circ - \sin 150^\circ$

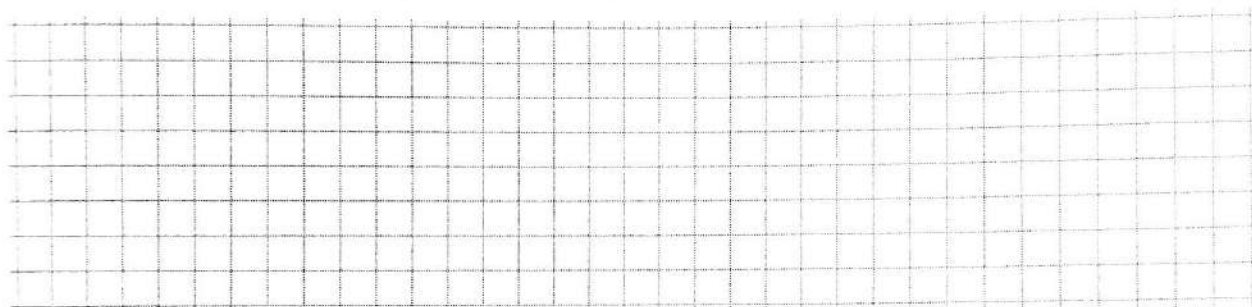
B. $\cos 60^\circ - \cos 120^\circ$

D. $\cos 120^\circ + \sin 150^\circ$

Zadanie 21. (0-1)

Uzasadnij, że dla każdego kąta ostrego α zachodzi równość:

$$(\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha + 1)(1 - \sin \alpha) = \cos^2 \alpha$$



Zadanie 22. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i $5\sqrt{3}$ jest podobny do trójkąta o bokach:

A. 10, $10\sqrt{3}$, 15

B. 3, 4, 5

C. $7\sqrt{3}$, 21, $14\sqrt{3}$

D. 8, $8\sqrt{3}$, $8\sqrt{2}$

Zadanie 23. (0-1)

Jaką miarę ma kąt α zaznaczony na rysunku?

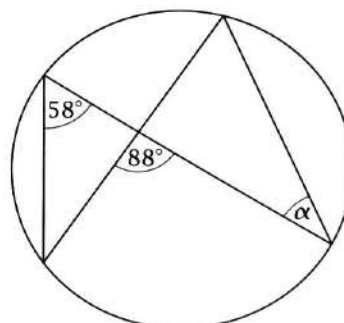
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 29°

C. 44°

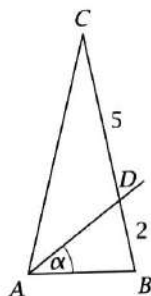
B. 58°

D. 30°



Zadanie 24.

Półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC trójkąta równoramiennego ABC (zobacz rysunek).

**Zadanie 24.1. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód trójkąta ABC jest równy:

- A. 17 B. 16,8 C. 17,2 D. 17,5

Zadanie 24.2. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

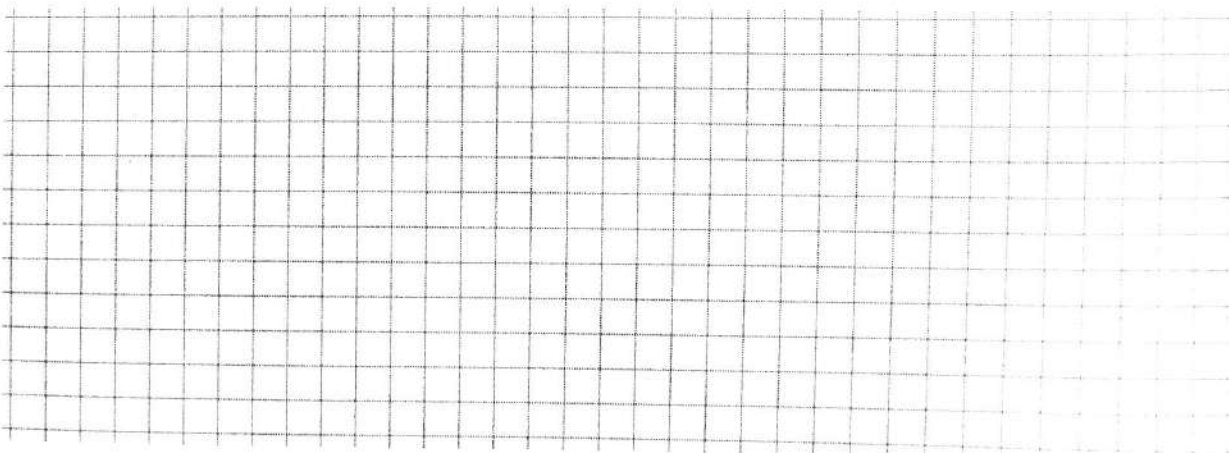
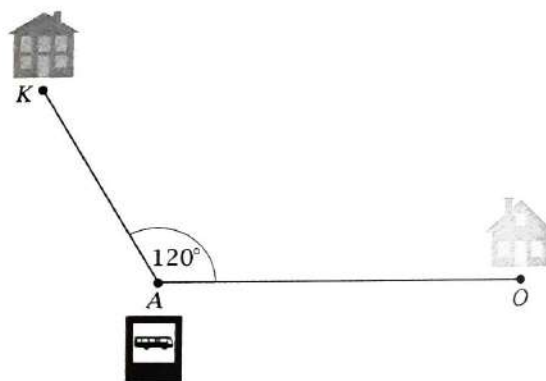
1.	Kąt ADC ma miarę 3α .	P	F
2.	Stosunek pola trójkąta ACD do pola trójkąta ABD jest równy $\frac{5}{2}$.	P	F

Zadanie 25. (0–3)

Kasia i Olga wysiadły razem na przystanku oznaczonym na rysunku literą A .

Dziewczyny udały się do swoich domów – dom Kasi oznaczono literą K , a dom Olgi literą O . Wiadomo, że Kasia porusza się ze średnią prędkością 3 km/h , a Olga – 4 km/h . Obie dziewczyny dotarły do swoich domów 10 minut po wyjściu z autobusu.

Wyznacz odległość w linii prostej między domami obu dziewczyn. Wynik zaokrąglij do części dziesiątych kilometra. Zapisz obliczenia.



Zadanie 26. (0-1)

Punkty $A = (-4, 2)$ i $D = (2, 5)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole koła opisanego na kwadracie $ABCD$ jest równe:

- A. $\frac{45\pi}{4}$ B. 45π C. $\frac{45\pi}{2}$ D. $3\pi\sqrt{5}$

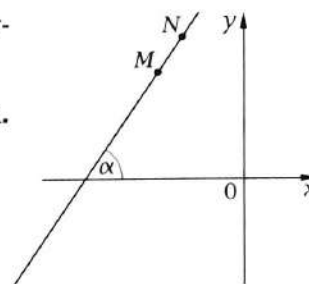
Zadanie 27. (0-1)

Prosta przechodzi przez punkty $M = (-7, 9)$ i $N = (-5, 12)$ (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy:

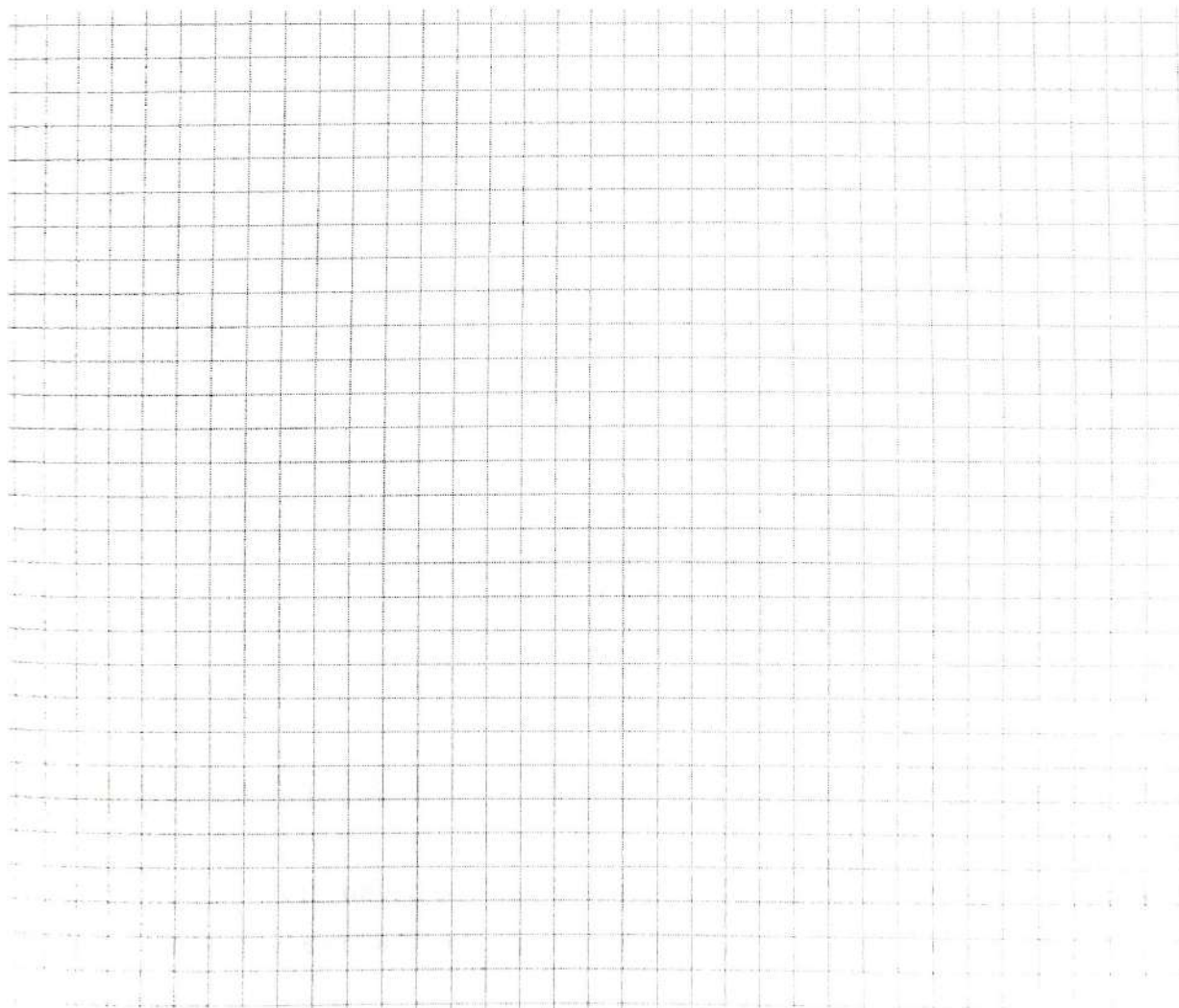
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{\sqrt{13}}$



Zadanie 28. (0-4)

Dana jest prosta k o równaniu $y = -x + 1$. Przez punkty $A = (-1, 9)$ i $B = (2, 3)$ poprowadzono prostą l , która przecina prostą k w punkcie P .

Wyznacz długość odcinka AP i równanie symetralnej odcinka BP . Zapisz obliczenia.



Zadanie 29. (0-2)

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4. Dłuższa przekątna w tym graniastosłupie tworzy z podstawą kąt o mierze 45° .

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Objętość tego graniastosłupa jest równa:

- A. $64\sqrt{3}$ B. $96\sqrt{3}$ C. $192\sqrt{3}$ D. $192\sqrt{6}$

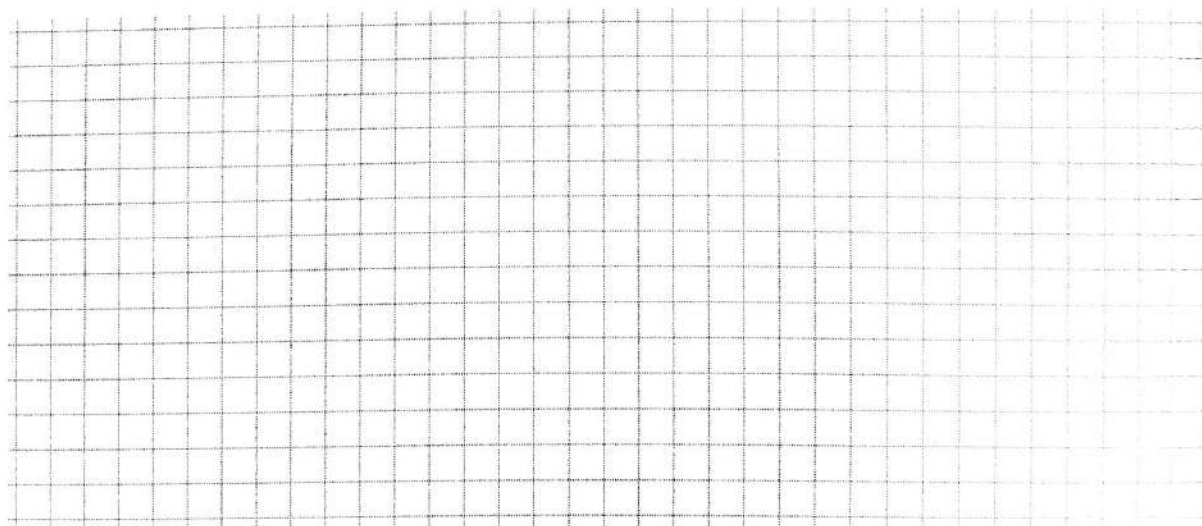
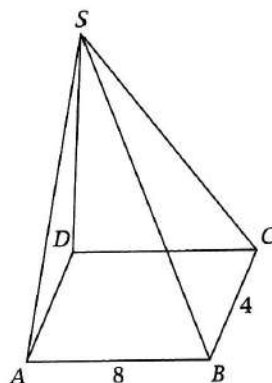
2. Tangens kąta między krótszą przekątną tego graniastosłupa a jego podstawą jest równy:

- E. 1 F. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ G. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ H. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

Zadanie 30. (0-2)

Na poniższym rysunku przedstawiono ostrosłup, w podstawie którego znajduje się prostokąt. Wiadomo, że krawędź SD jest prostopadła do podstawy, a objętość ostrosłupa jest równa $\frac{160}{3}$.

Wyznacz długość najdłuższej krawędzi bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 31. (0-1)**

Rzucamy trzykrotnie sześcienną symetryczną kostką do gry.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo tego, że za każdym razem wypadnie taka sama liczba oczek jest równe:

- A. $\frac{1}{216}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{5}{216}$

Zadanie 32. (0–1)

Pięcioro uczniów klasy 4C przystąpiło do matury pisemnej z języka francuskiego. Uzyskali następujące wyniki procentowe: 64%, 42%, 86%, 98%, 80%.

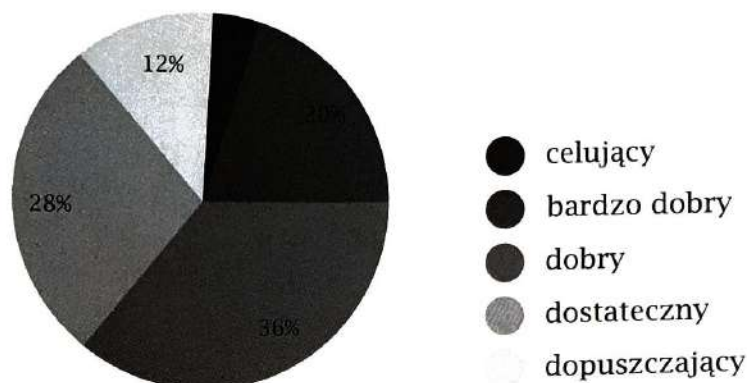
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odchylenie standardowe wyników matury pisemnej z języka francuskiego uczniów klasy 4C jest równe:

- A. 376% B. około 8,7% C. około 19,4% D. 74%

Zadanie 33. (0–3)

Na diagramie przedstawiono zestawienie ocen ze sprawdzianu z matematyki przeprowadzonego w klasie 4A liczącej 25 osób.



Wszyscy uczniowie klasy 4A napisali ten sprawdzian oraz żaden z nich nie uzyskał oceny niedostatecznej.

Wyznacz prawdopodobieństwo tego, że dwie losowo wybrane osoby z klasy 4A uzyskały ocenę wyższą od mediany wszystkich ocen w tej klasie. Zapisz obliczenia.

PRZYKŁADOWE ARKUSZE EGZAMINACYJNE

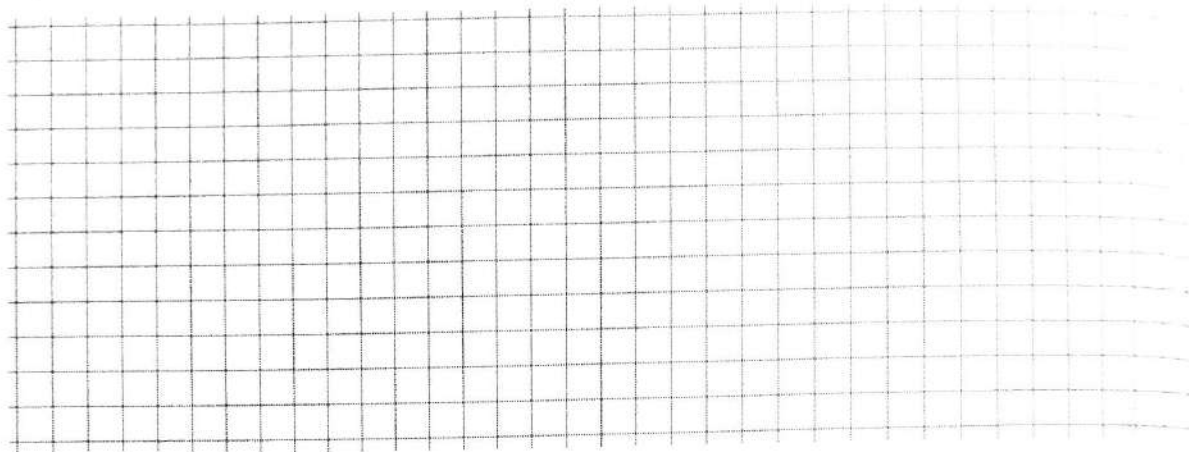
(zakres rozszerzony)

Zadanie 1. (0-3)

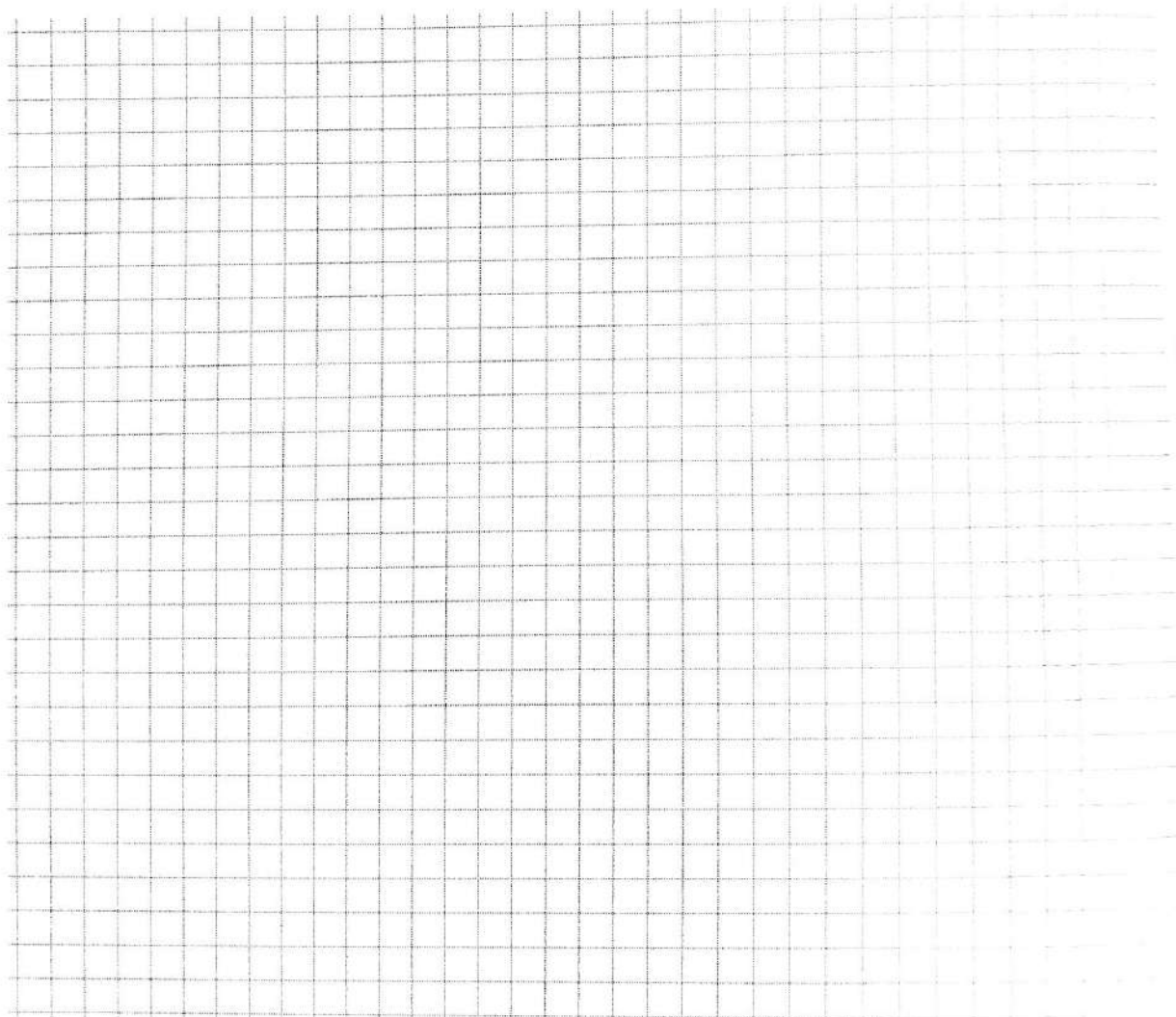
Dane są liczby a i b :

$$a = \left(\frac{9^{-18} + 9^{-16}}{82} \right)^{\frac{1}{9}} \quad b = \log_9 64 - \log_{27} 64$$

Wyznacz wartość potęgi a^b . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 2. (0-4)**

Rozwiąż nierówność $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$. Zapisz obliczenia.

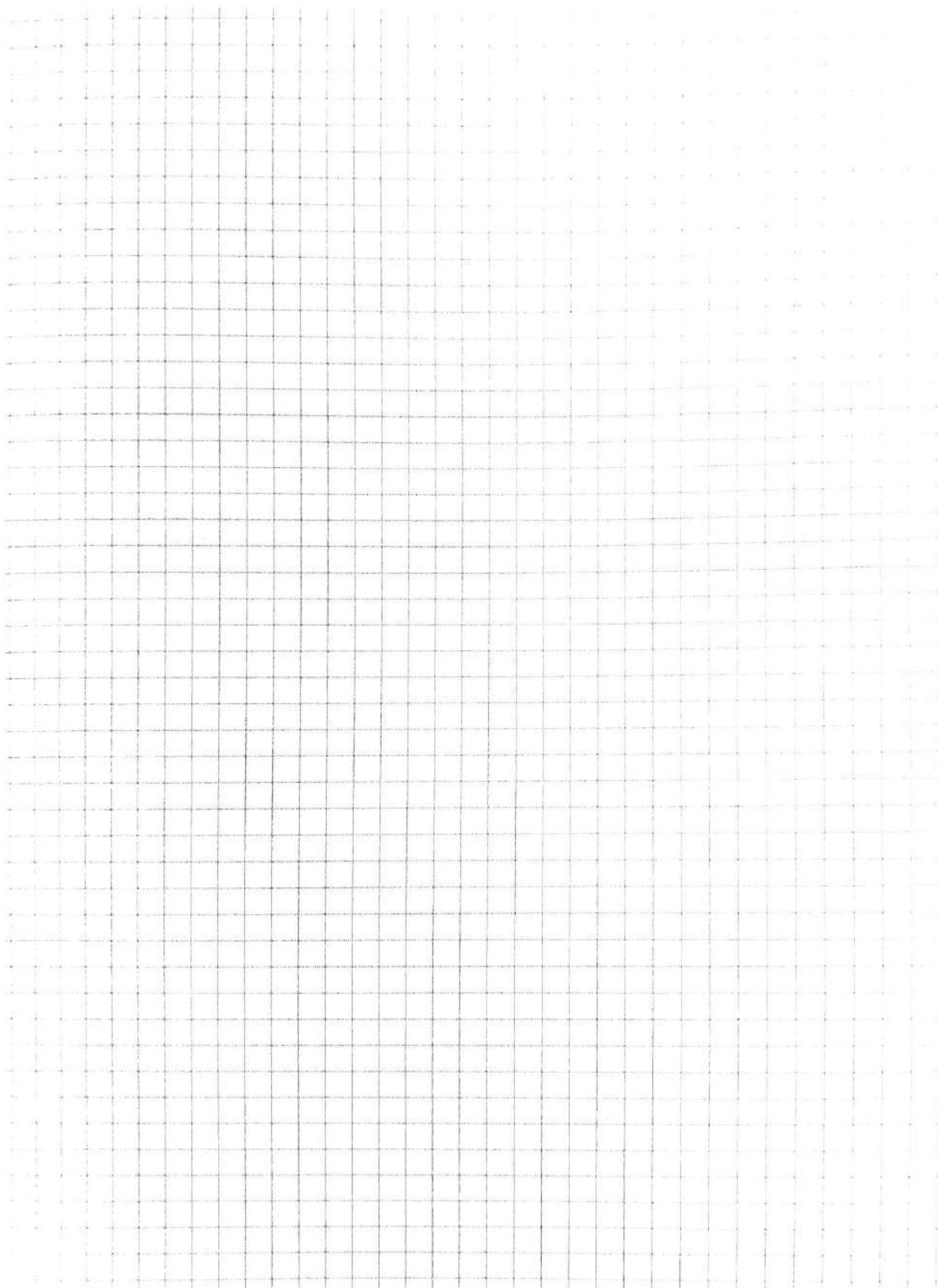


Zadanie 3. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie:

$$(m - 1)x^2 - (4m - 8)x + m - 1 = 0$$

ma dwa rozwiązania, z których jedno jest mniejsze od 1, a drugie większe od 1. Zapisz obliczenia.

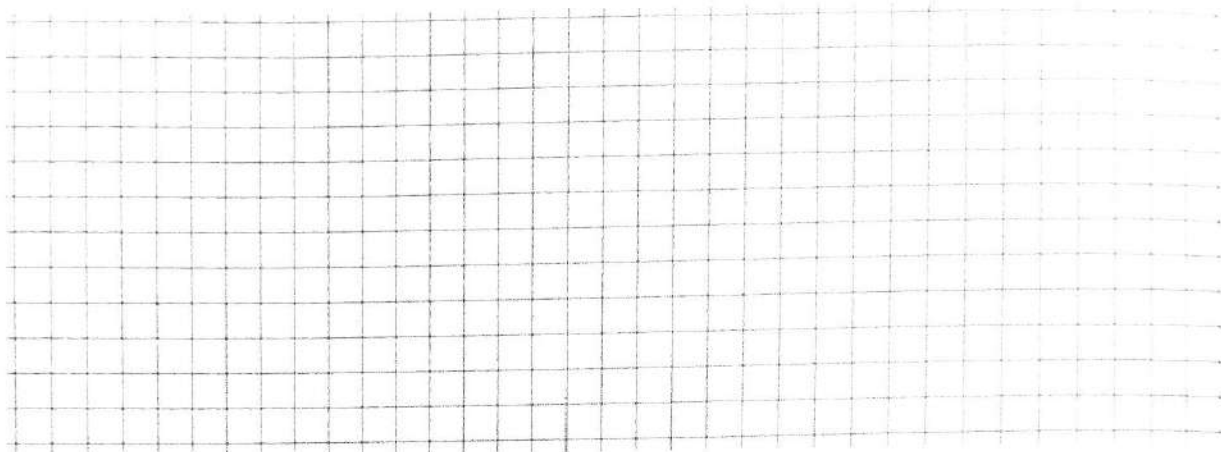


Zadanie 4. (0-2)

Dana jest funkcja określona wzorem:

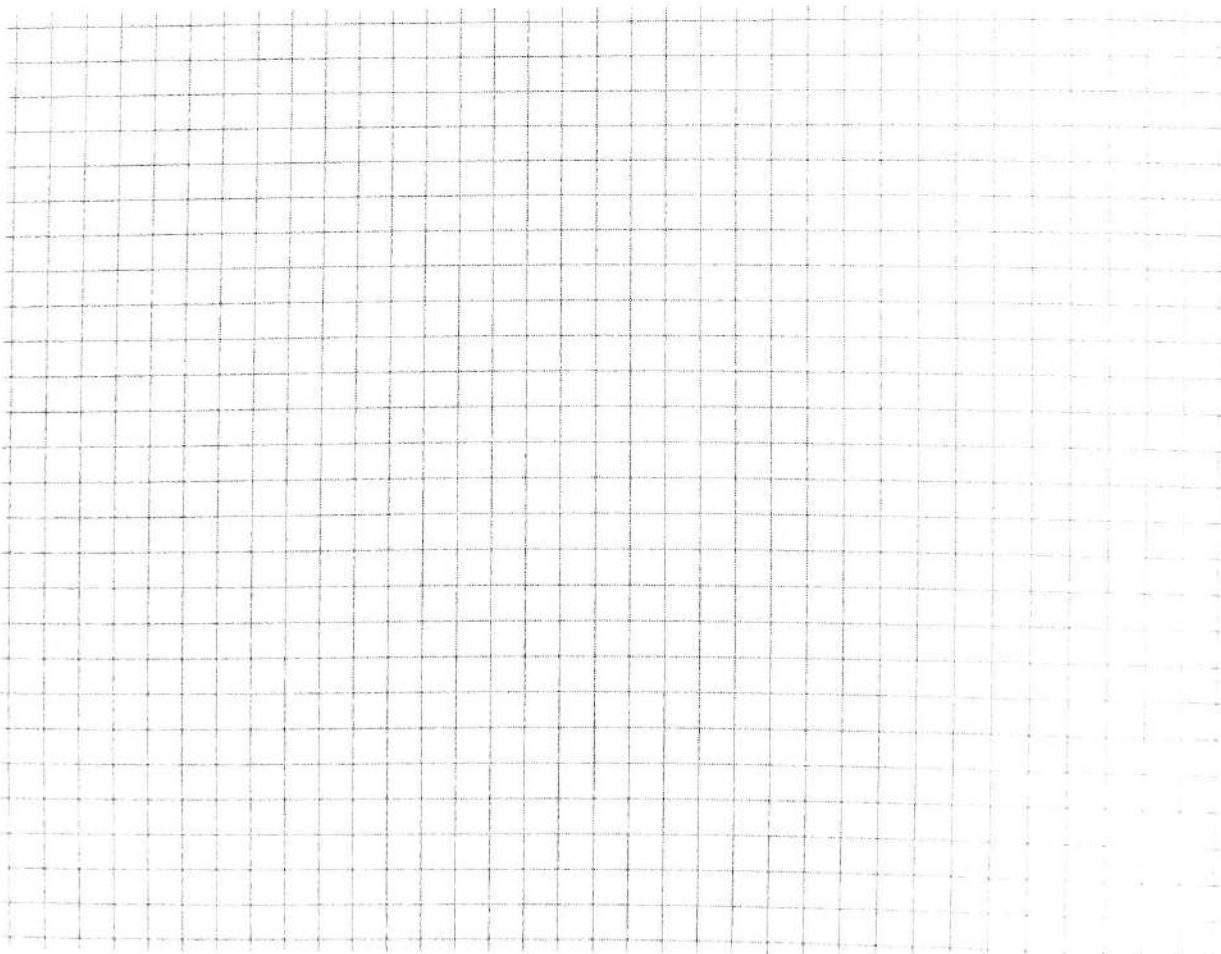
$$f(x) = \sqrt{(x-1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16)} + \frac{x}{x^2 - 1}$$

Wyznacz dziedzinę funkcji f . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 5. (0-4)**

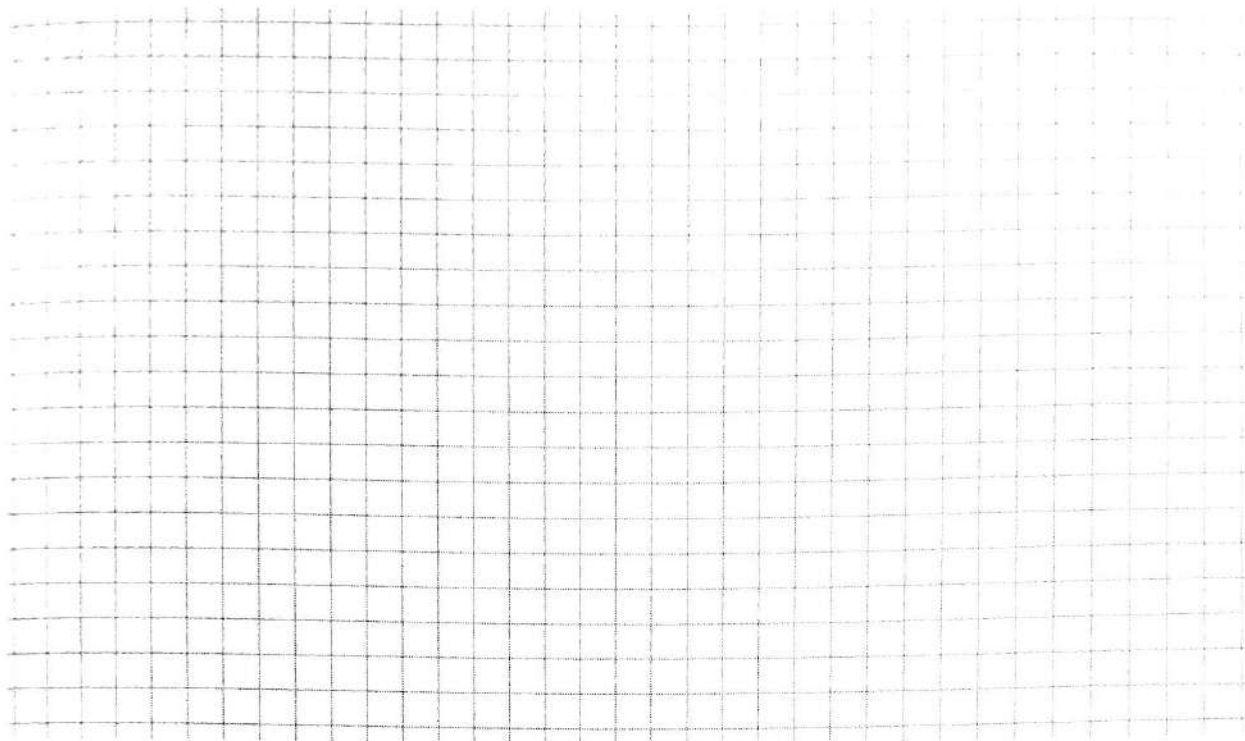
Nieskończony ciąg (a_n) jest malejącym ciągiem geometrycznym zbieżnym. Suma dwóch początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 6, a suma wszystkich jego wyrazów jest równa 8.

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n , która należy do zbioru rozwiązań nierówności $|S_n - S| < \frac{1}{512}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) , a S — sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Zapisz obliczenia.



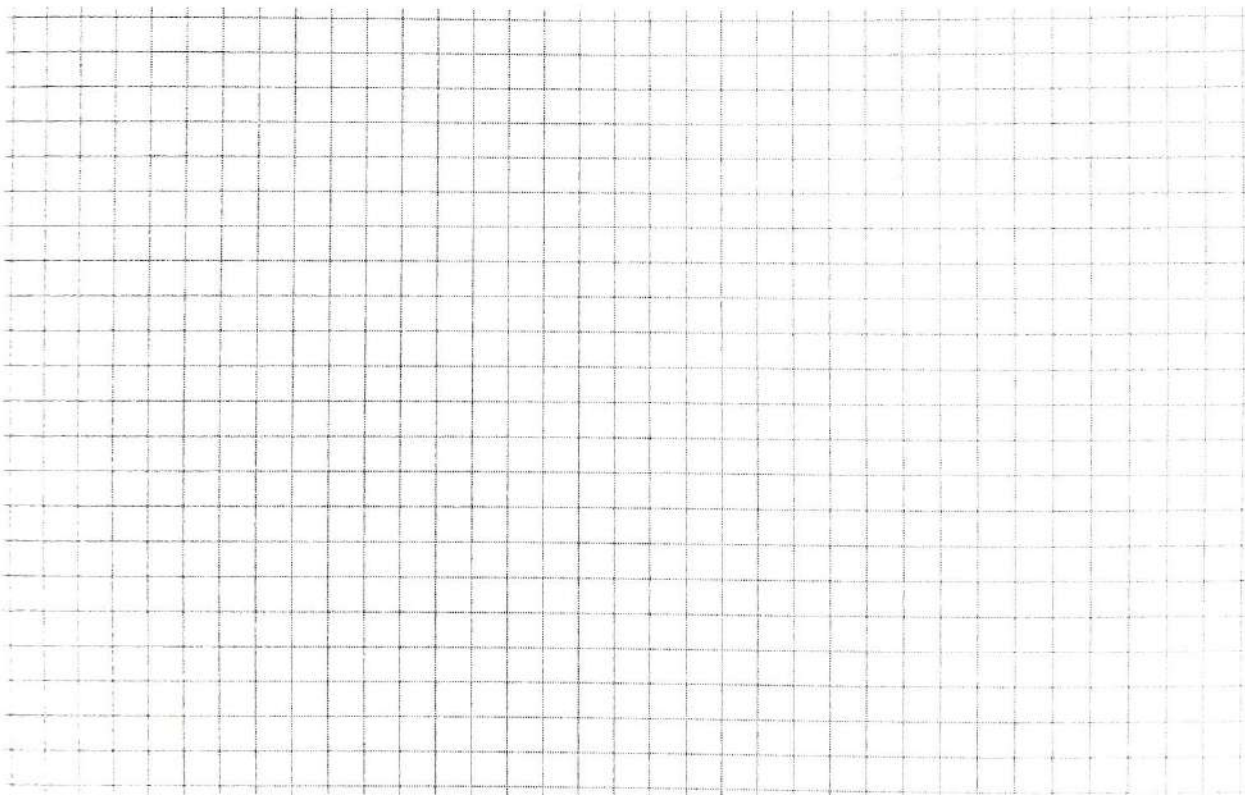
Zadanie 6. (0–3)

Znajdź wszystkie rozwiązania równania $4 \cos 4x \cos x = 2 \cos 5x + \sqrt{3}$ należące do przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 7. (0–3)**

W trapez, którego podstawy mają długości 36 i 12, można wpisać okrąg i na tym trapezie można opisać okrąg.

Wykaż, że średnica okręgu opisanego na tym trapezie jest równa $8\sqrt{21}$.



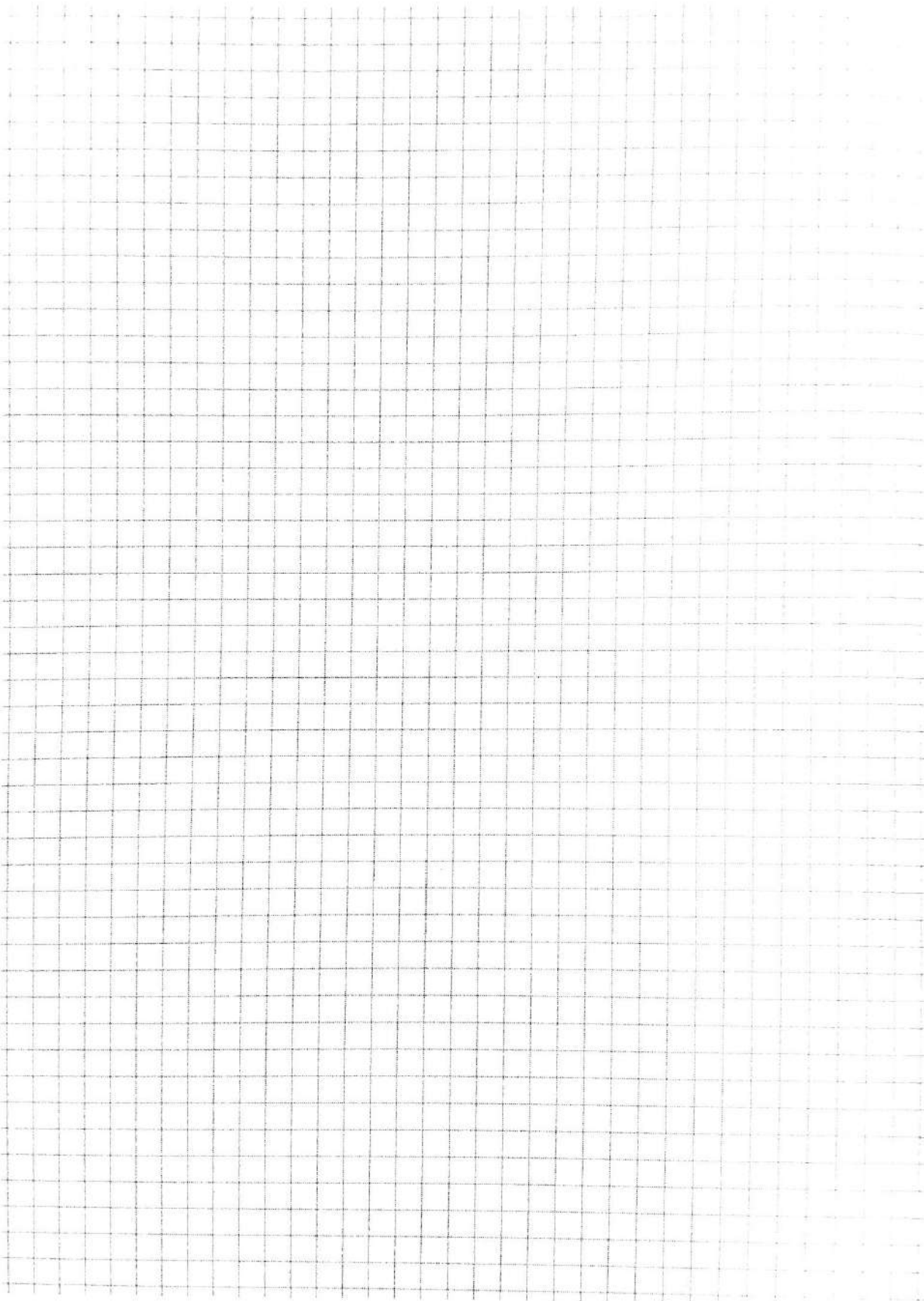
Zadanie 8. (0–4)

Dane są proste o równaniach:

$$x + my - m - 2 = 0$$

$$mx + y - m = 0$$

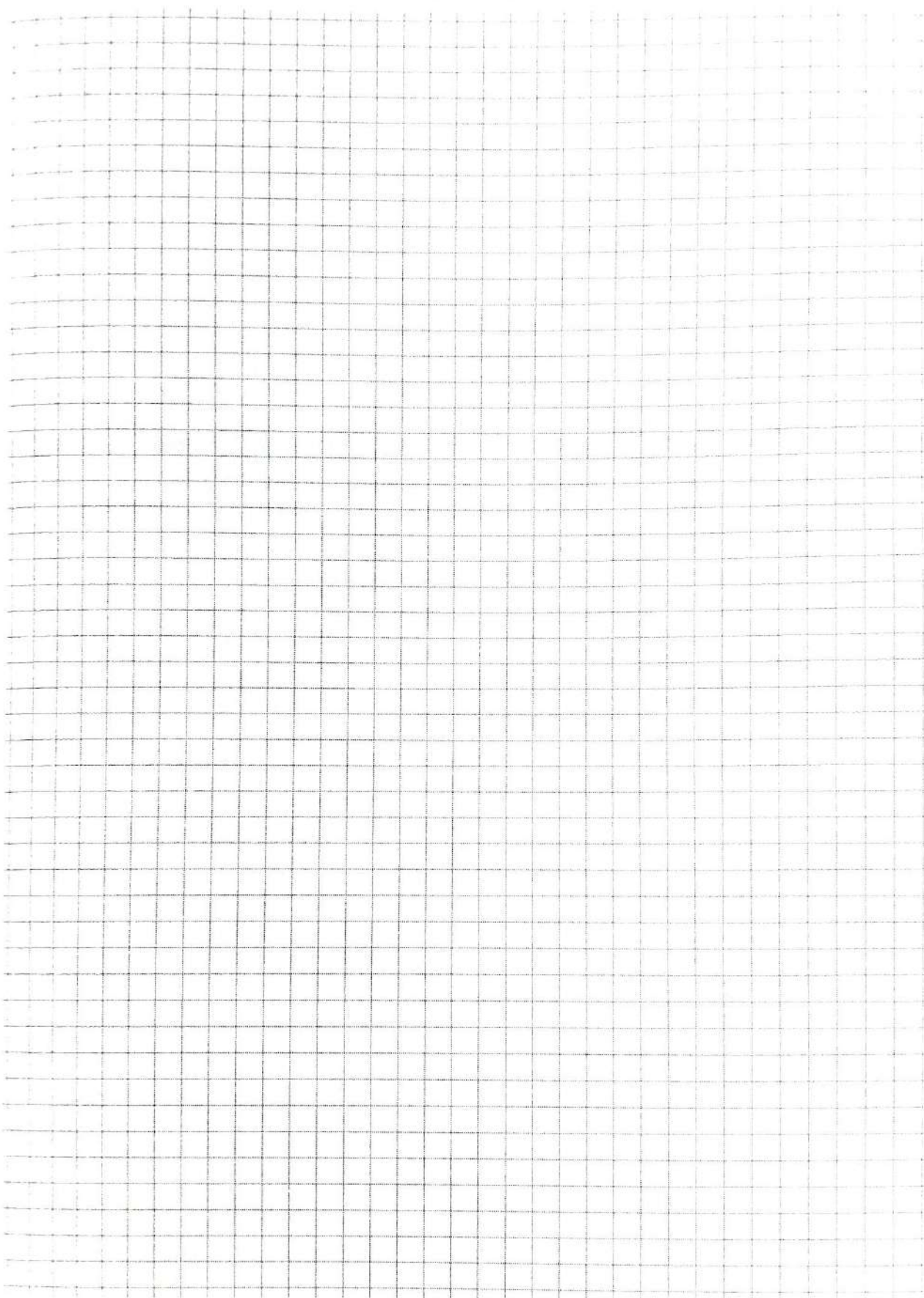
Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których iloczyn współrzędnych punktu przecięcia tych prostych jest liczbą nieujemną. Zapisz obliczenia.



Zadanie 9. (0–4)

Okrąg o równaniu $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 17$ przecina oś x układu współrzędnych w dwóch punktach i z prostą o równaniu $y = x + 1$ ma też dwa punkty wspólne.

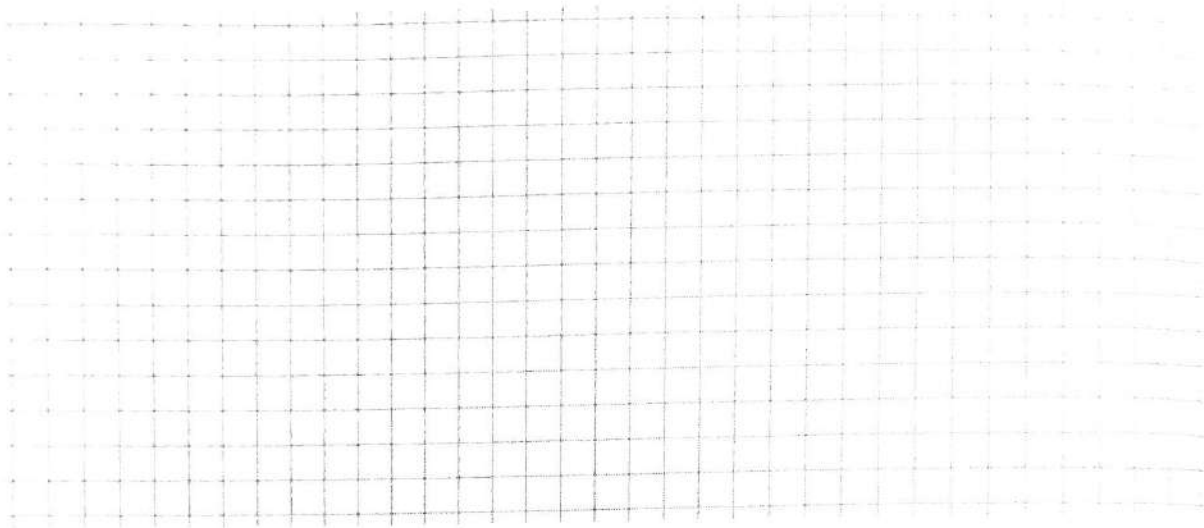
Oblicz pole czworokąta wypukłego, którego wierzchołkami są punkty przecięcia okręgu z prostą oraz z osią x układu współrzędnych. Zapisz obliczenia.



Zadanie 10. (0–3)

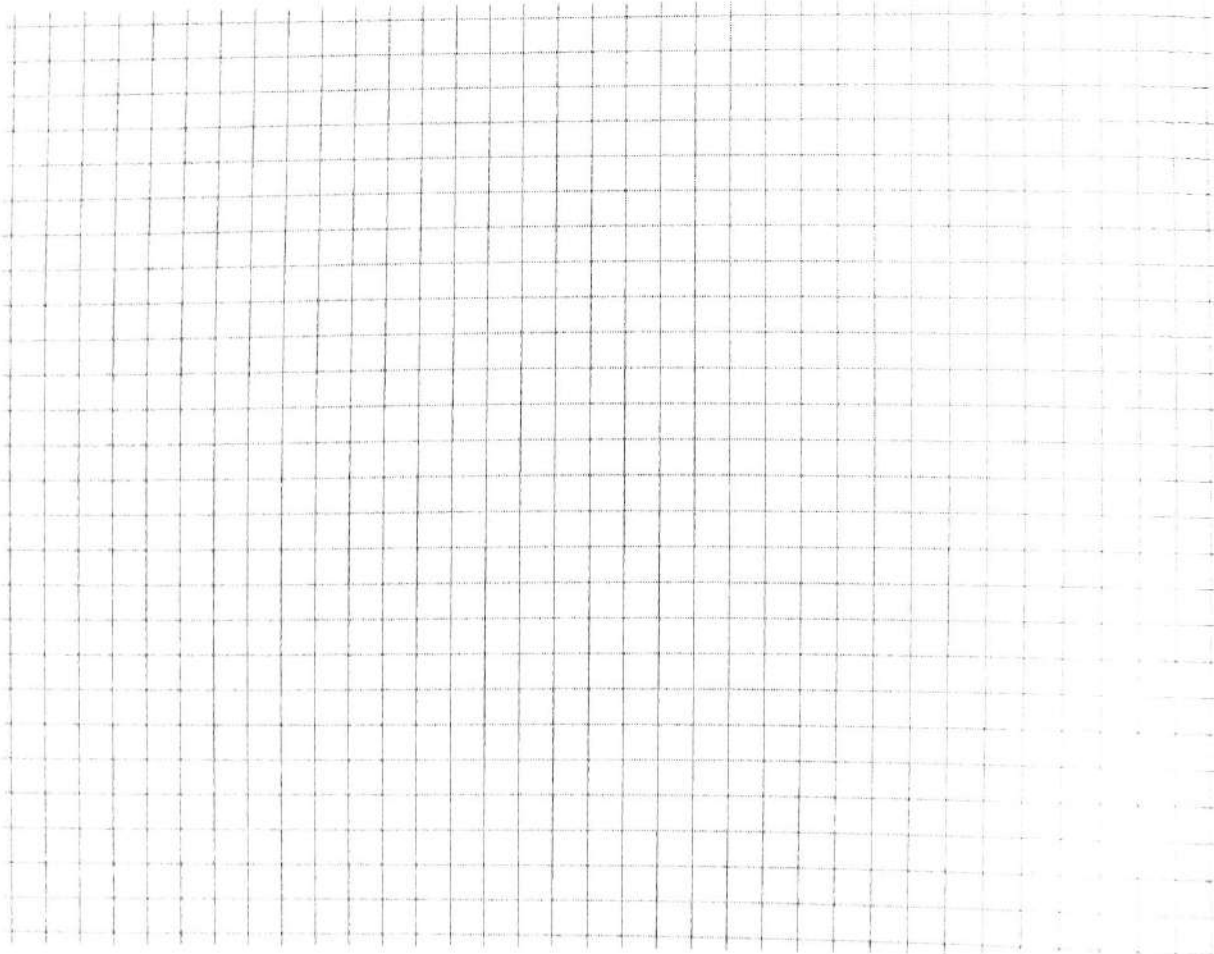
O równoległoboku $ABCD$ wiadomo, że $\overrightarrow{AC} = [20, 10]$ i $\overrightarrow{BD} = [-4, 2]$.

Oblicz cosinus kąta ostrego między przekątnymi równoległoboku $ABCD$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 11. (0–4)**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość $12\sqrt{2}$, a długość krawędzi bocznej jest równa 12. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wysokość podstawy i środek krawędzi bocznej.

Wyznacz obwód otrzymanego przekroju. Zapisz obliczenia.



Zadanie 12. (0-3)

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, \dots, 55\}$ losujemy jednocześnie dwie liczby.

Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch takich liczb, że ich iloczyn jest liczbą parzystą. Zapisz obliczenia.

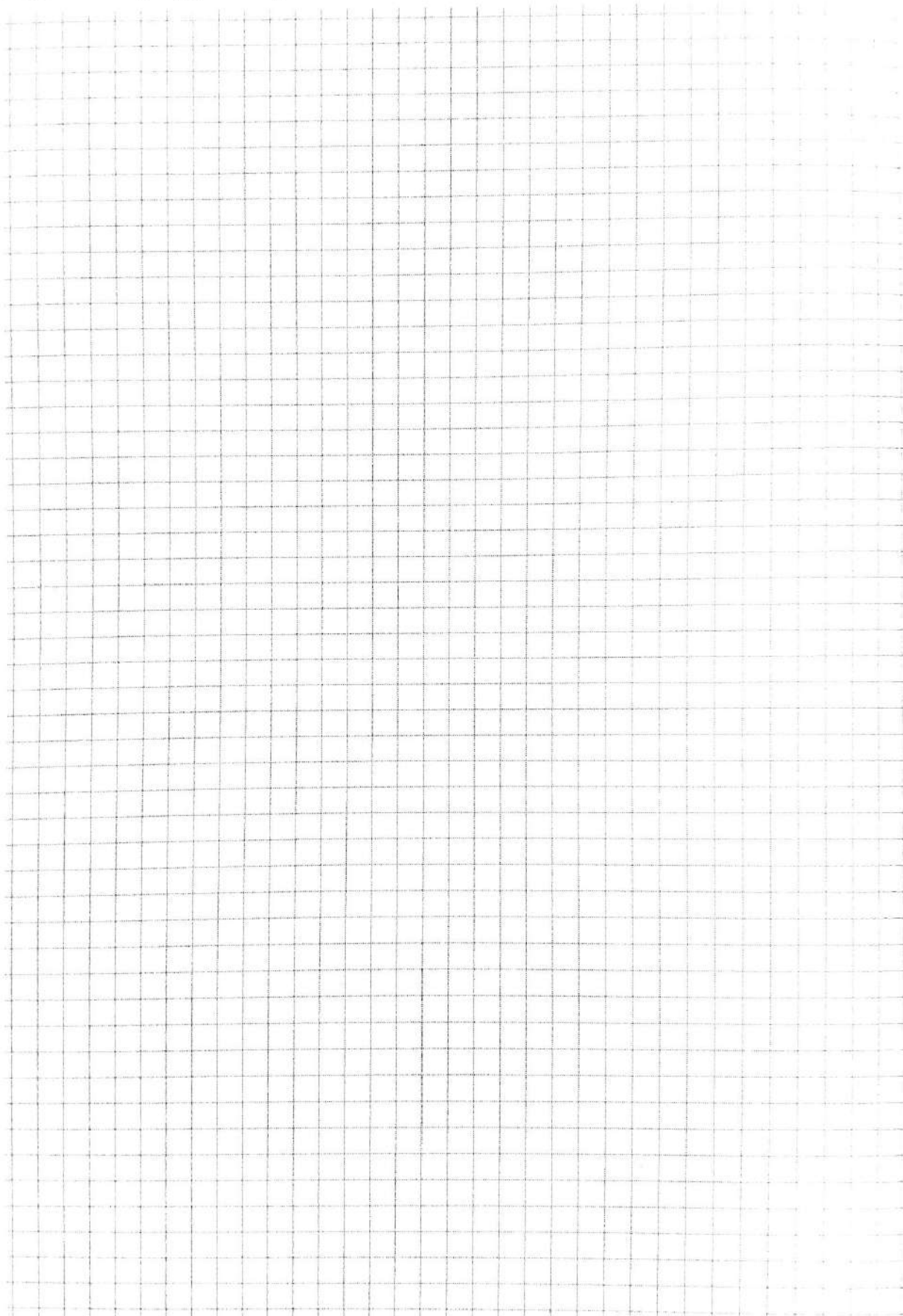
Zadanie 13. (0-2)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{x^3 + 5x^2}$.

Uzasadnij, że funkcja f nie ma granicy w punkcie $x = -5$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0-6)

Rozpatrujemy walce, których suma długości średnicy podstawy i wysokości jest równa 12. Oblicz promień podstawy i wysokość tego spośród walców, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość. Zapisz obliczenia.

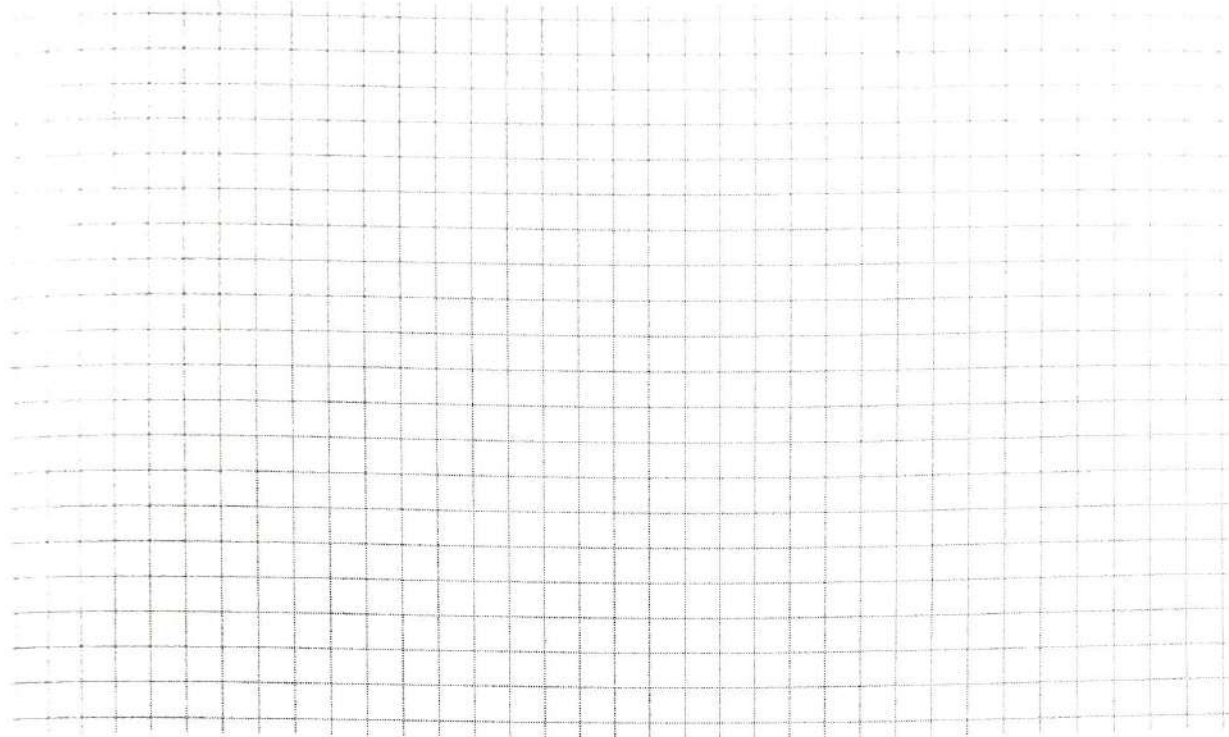


Zadanie 1. (0-2)

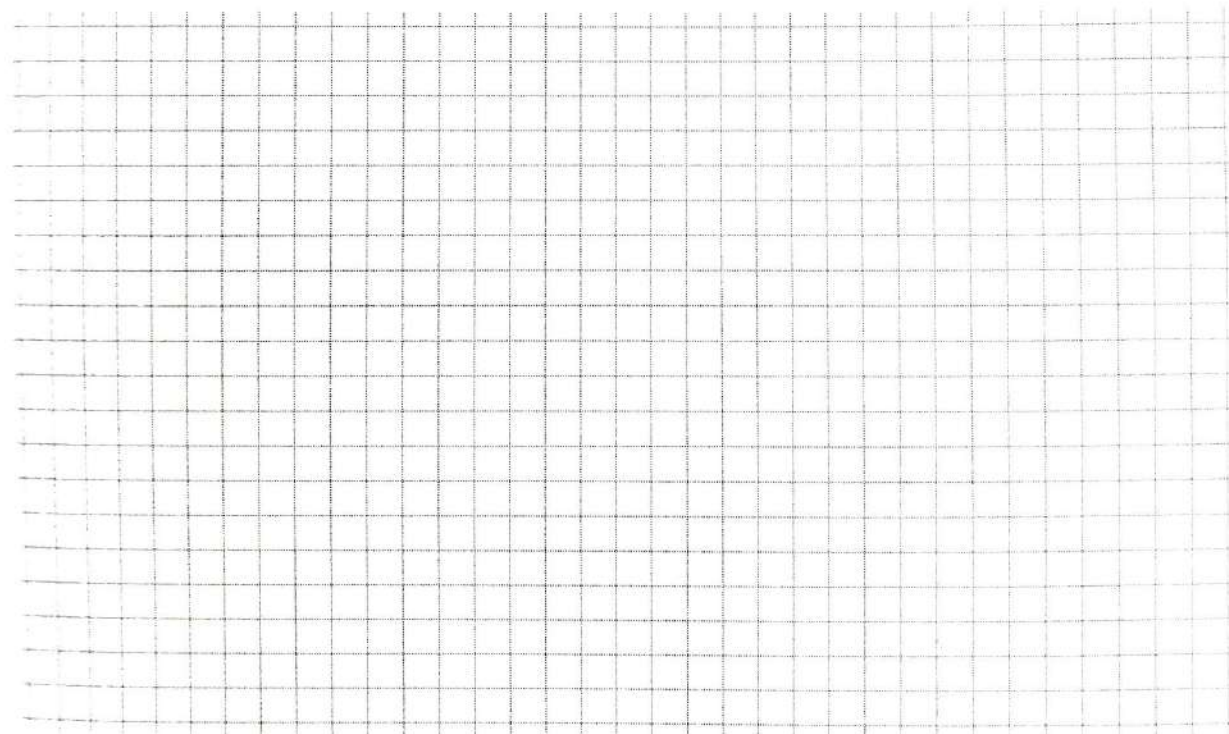
Dane są liczby a , b oraz c :

$$a = \frac{1}{\log_8 4} \quad b = \frac{1}{\log_{24} 4} \quad c = \frac{1}{\log_{48} 4}$$

Wyznacz wartość wyrażenia $a + c - b$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 2. (0-2)**

Udowodnij, że dla różnych liczb rzeczywistych x i y takich, że $x + y \geq 0$, prawdziwa jest nierówność $x^3 - x^2y \geq xy^2 - y^3$.

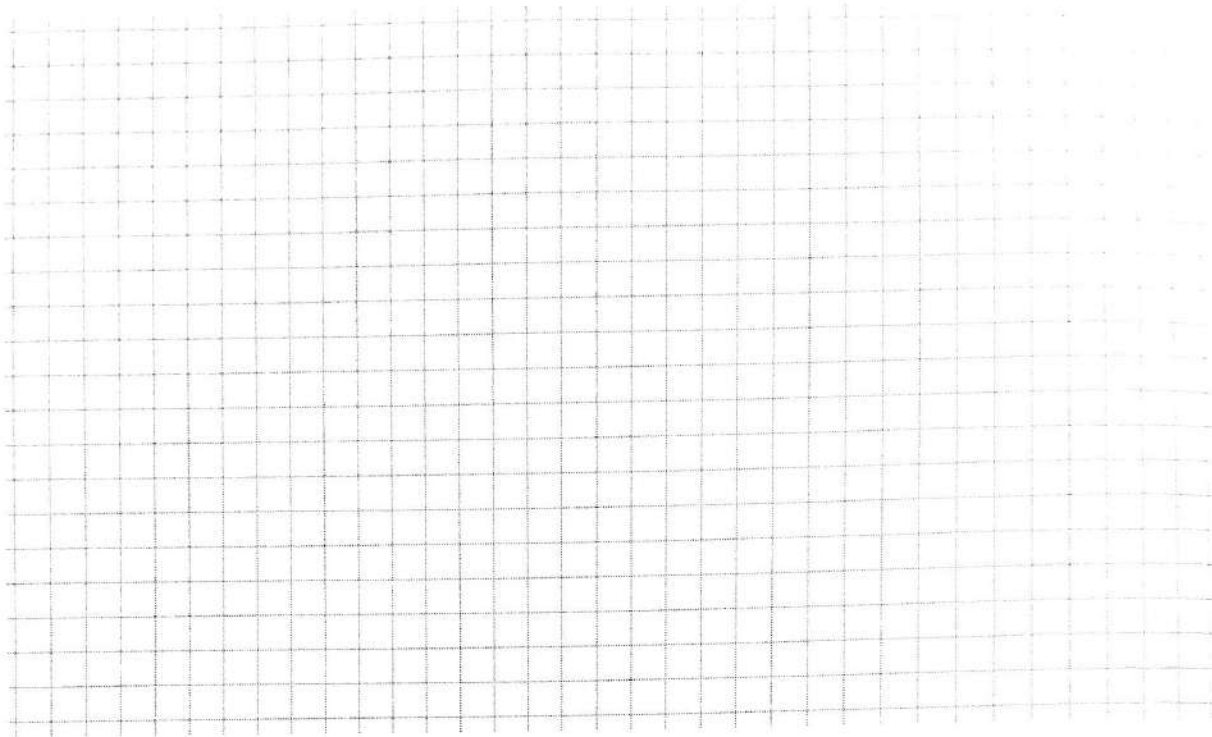


Zadanie 3. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem:

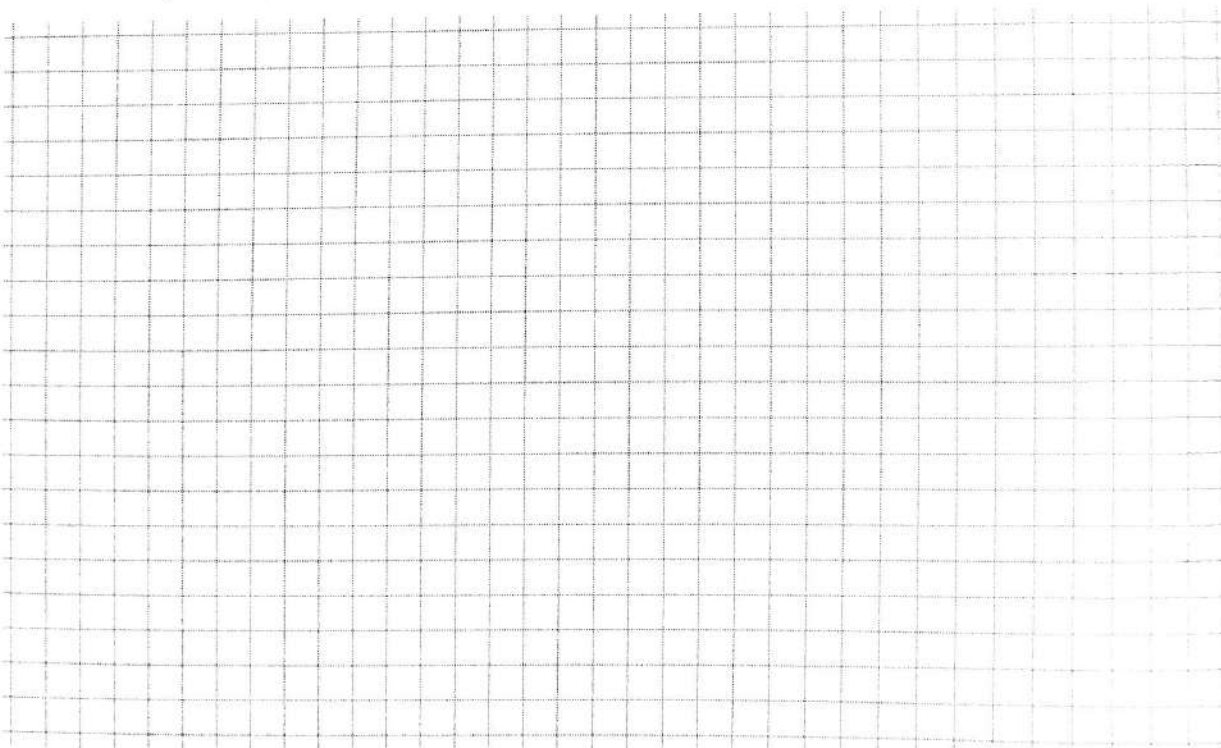
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+4), \text{ gdzie } x \in \langle -4; +\infty \rangle$$

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$ i wyznacz zbiór tych wartości, które funkcja g przyjmuje dla argumentów należących do przedziału $\langle -3; 12 \rangle$.

**Zadanie 4. (0-2)**

W pewnym ciągu arytmetycznym (a_n) suma m początkowych wyrazów jest równa sumie k początkowych wyrazów, gdzie $m \neq k$.

Oblicz sumę $(m+k)$ początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.



Zadanie 5. (0–3)

Ciąg (a_n) dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest określony wzorem:

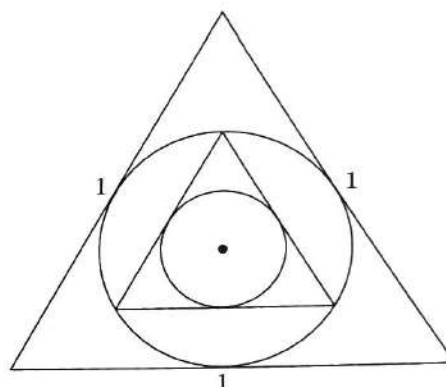
$$a_n = \frac{k^3 n + 2}{n + 6} - \frac{3k^2 n + 12kn + 1}{3n + 5}$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -4$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–5)

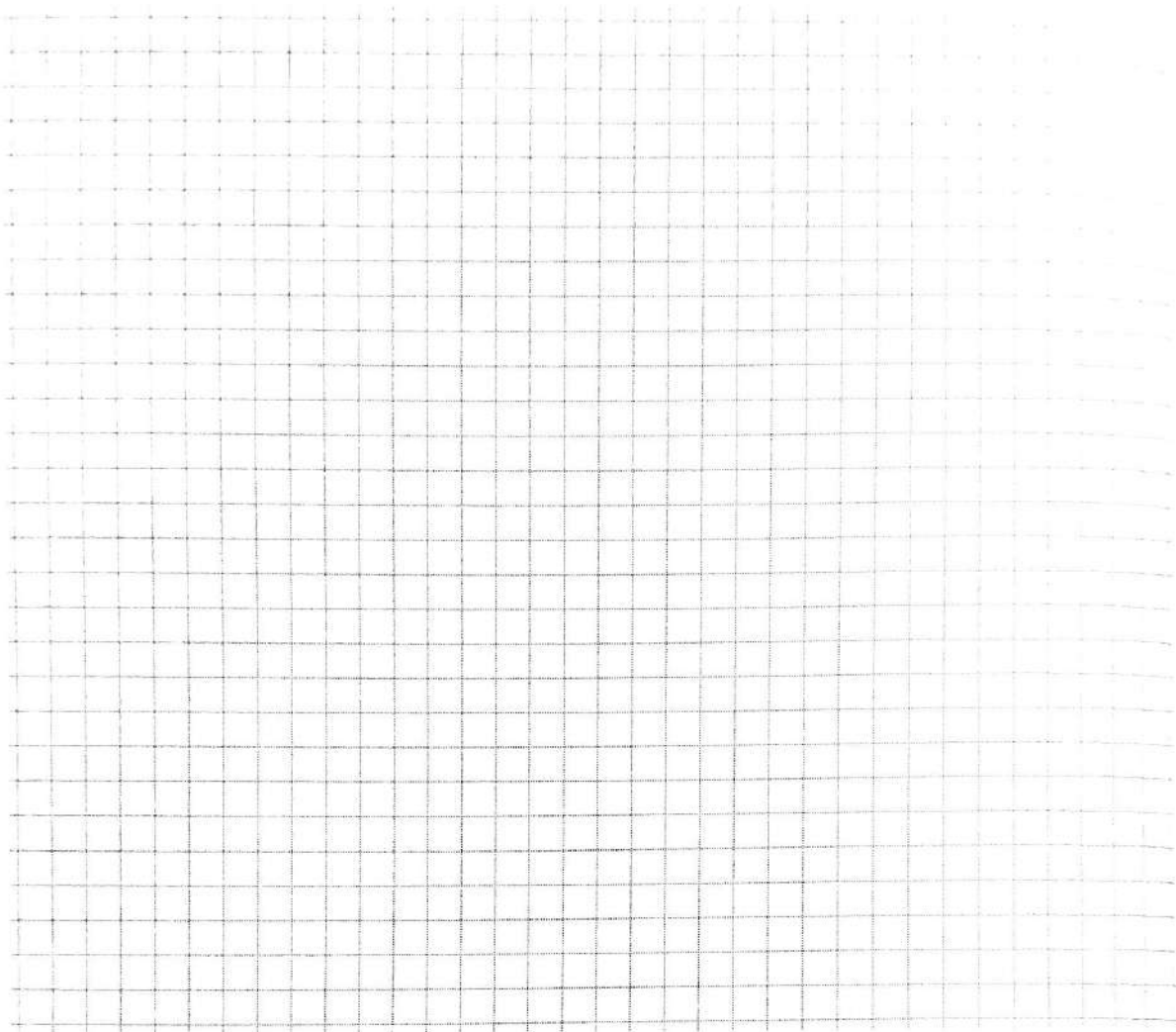
W trójkąt równoboczny, którego bok ma długość 1, wpisano okrąg. W ten okrąg wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt znów wpisano okrąg (zobacz rysunek).

Oblicz, ile razy suma obwodów wszystkich trójkątów równobocznych będzie większa od sumy długości wszystkich okręgów wpisanych w te trójkąty, jeżeli opisany powyżej schemat rysowania figur będziemy powtarzać w nieskończoność. Zapisz obliczenia.



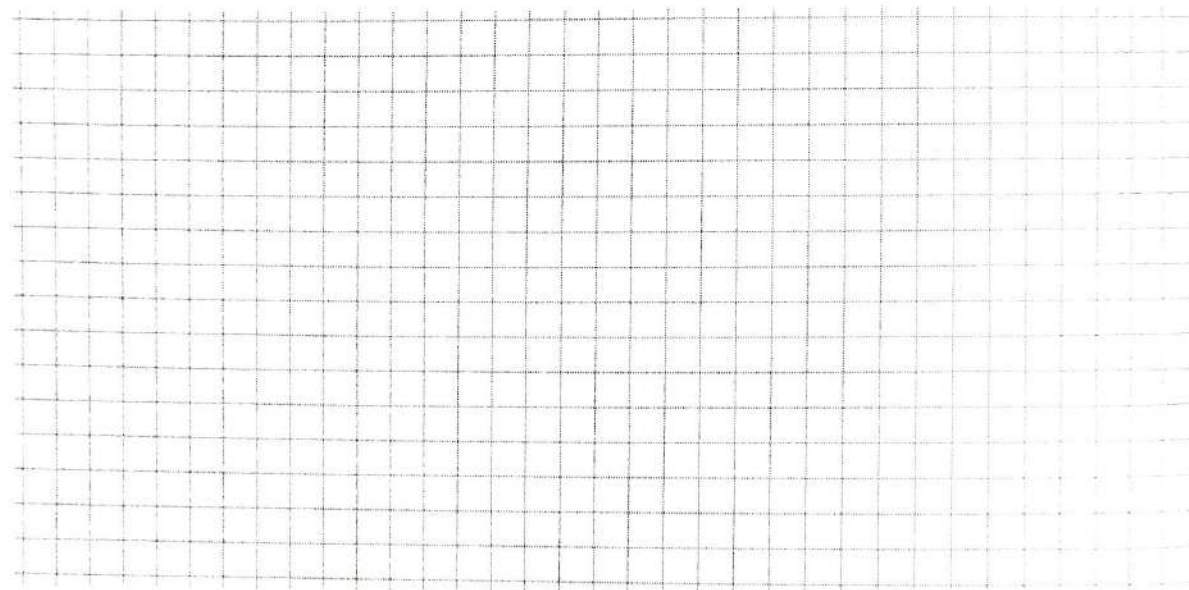
Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż nierówność: $\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)^2 \leq \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 8. (0–3)**

Kąty trójkąta mają miary α , β , γ oraz $1 - \cos \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta$.

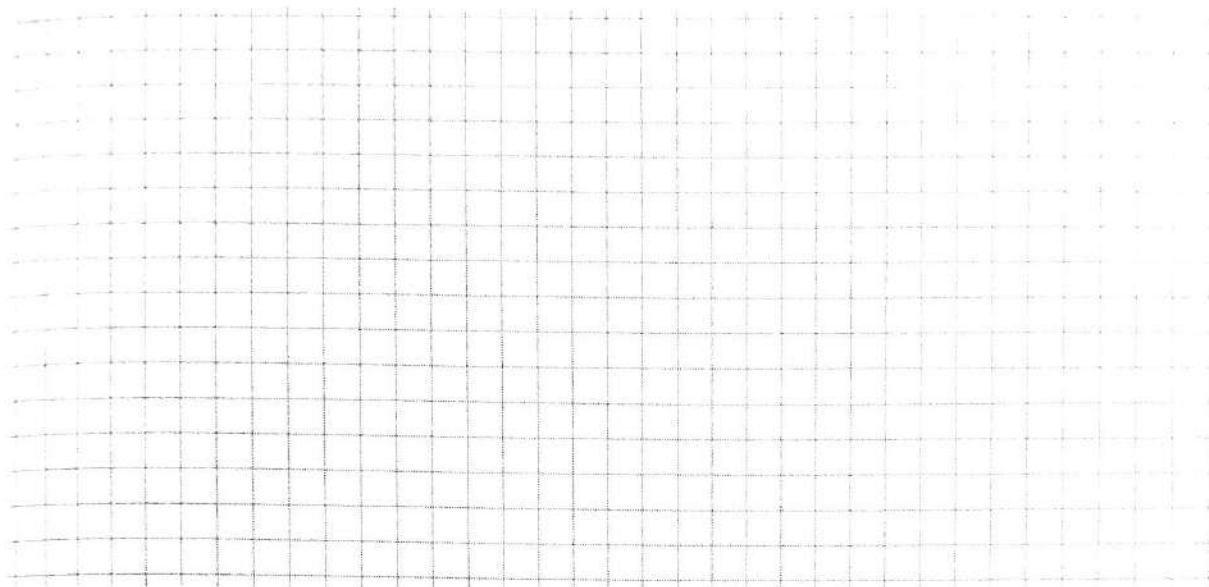
Wykaż, że ten trójkąt jest równoramienny.



Zadanie 9. (0–4)

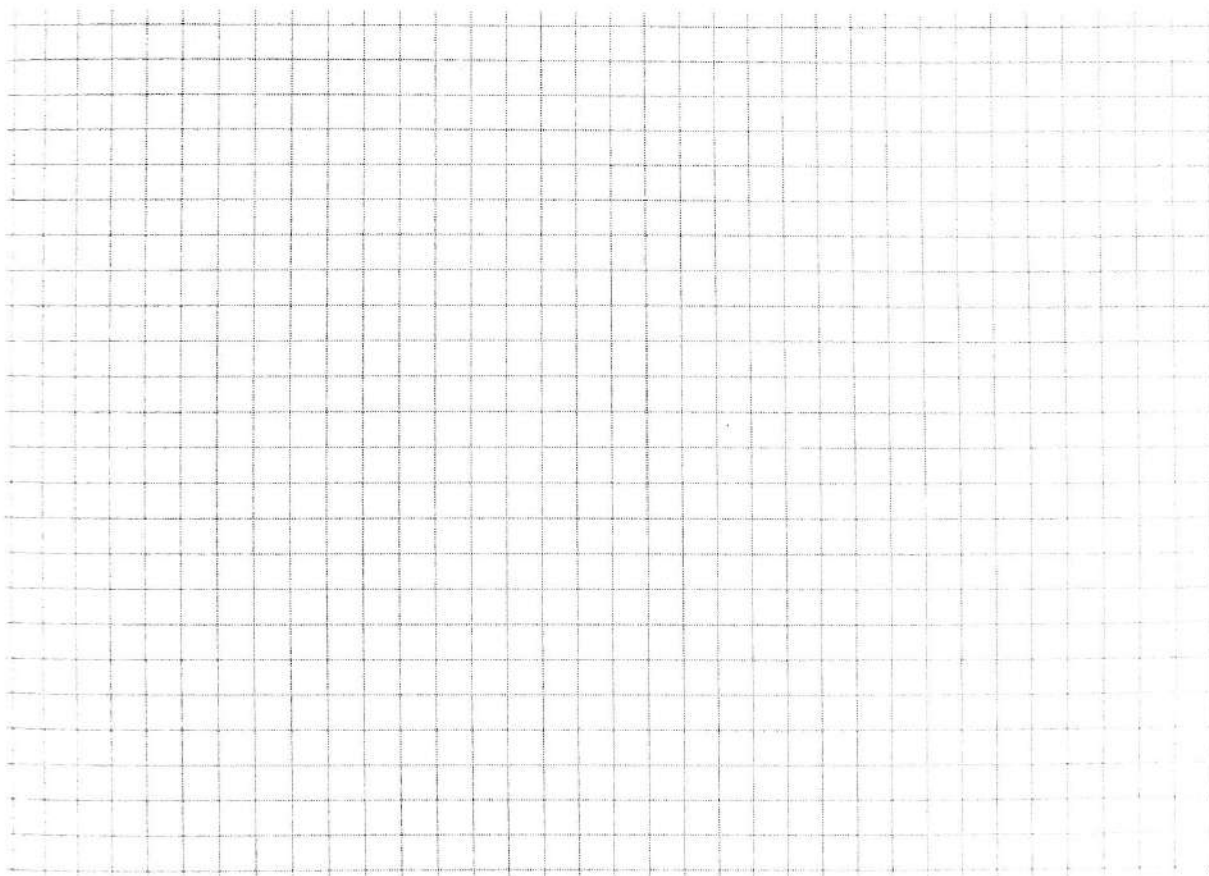
W trójkącie ABC środkowe przecinają się w punkcie $S = (3, 2)$. Ponadto dane są: $C = (5, 8)$ i $\overline{AC} = [9, 11]$.

Oblicz współrzędne wierzchołków A i B trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 10. (0–5)**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 20, a ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i prostopadłą do przeciwległej ściany bocznej. Zapisz obliczenia.



Zadanie 11. (0–4)

Doświadczenie polega na dwunastokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry.

Oblicz prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie wypadło 6 oczek, jeżeli wiadomo, że w dwunastu rzutach 6 oczek wypadło cztery razy. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–4)

Funkcja f jest określona wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (k - m - 1)x^2 + (2m - k - 2)x + 7$$

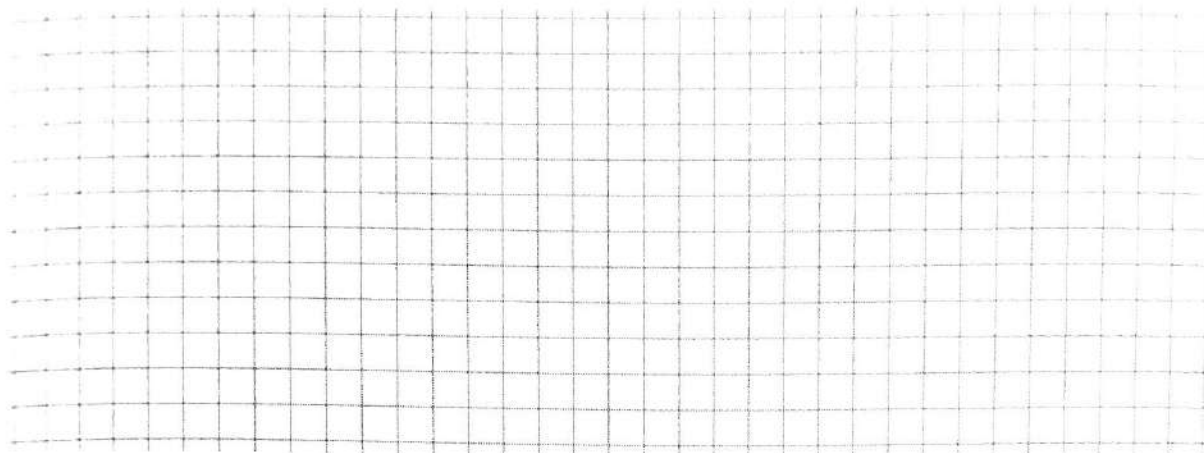
Wyznacz wszystkie wartości parametrów k i m , dla których funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 1)$ oraz $(5; \infty)$ i malejąca w przedziale $(1; 5)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-3)

Funkcja f jest określona wzorem:

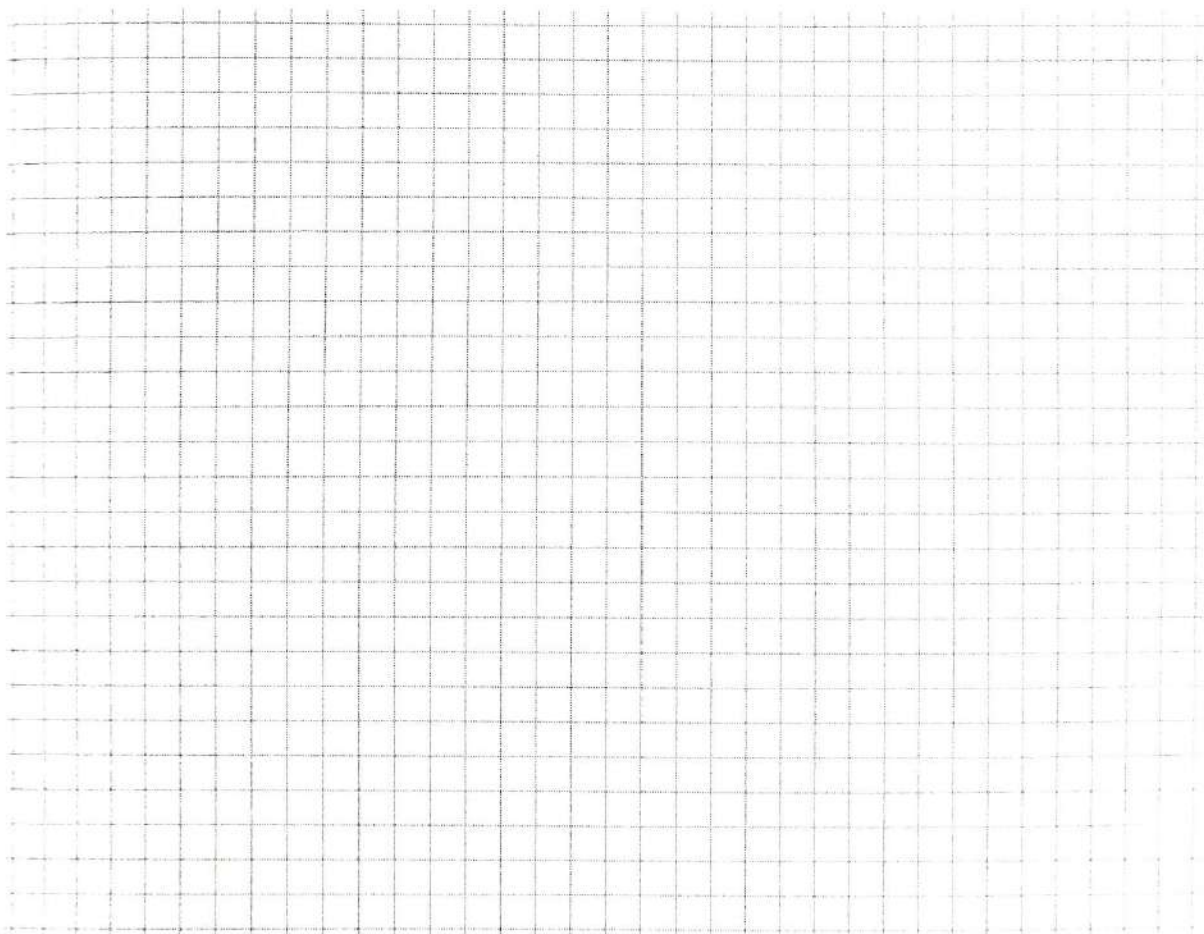
$$f(x) = \frac{x^2 - x}{3x + 2}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P = (-4, -2)$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 14. (0-6)**

Dana jest parabola o równaniu $y = -x^2 + 4$. Rozważamy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki należą do paraboli, a dwa pozostałe należą do odcinka KL , gdzie K i L są punktami przecięcia prostej o równaniu $y = -5$ z parabolą.

Oblicz długości boków tego z prostokątów, którego pole jest największe. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.



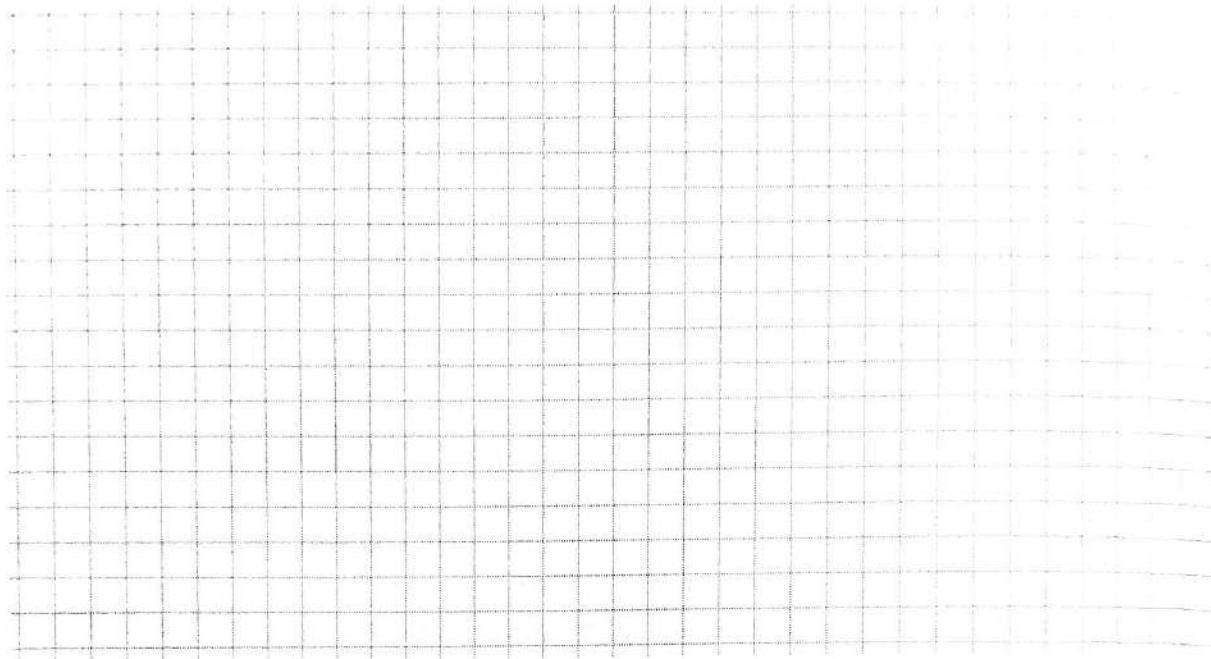
Zadanie 1. (0–4)

Dane są liczby x , y oraz z :

$$x = \log_{a\sqrt{a}}(a+1) \quad y = \log_{a^2+a} a \quad z = \log_{a^3+a^2} \sqrt{a}$$

gdzie a jest liczbą dodatnią i spełnia warunek $a^2 = a + 1$.

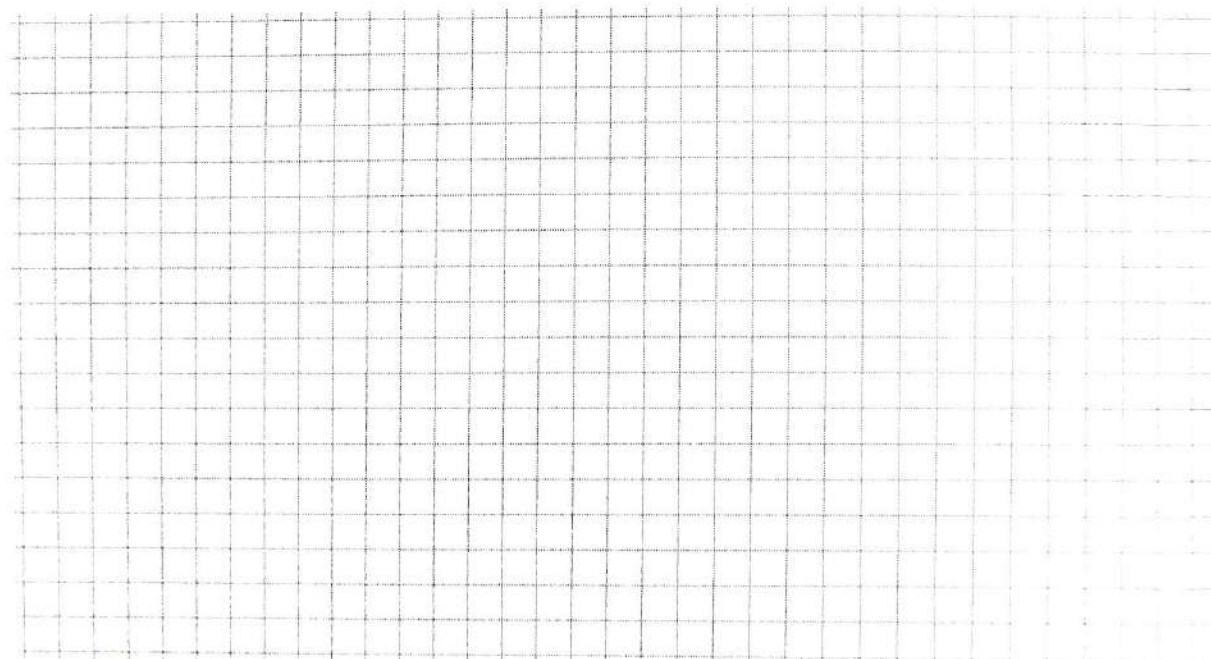
Oblicz różnicę między największą i najmniejszą z liczb x , y oraz z . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 2. (0–4)**

Dany jest wielomian określony wzorem:

$$W(x) = (x^2 - 66x + a^2 + a - 26)(x + 2) + (3a^2 - a)(x + 2)x$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci sześciianu pewnego dwumianu. Zapisz obliczenia.

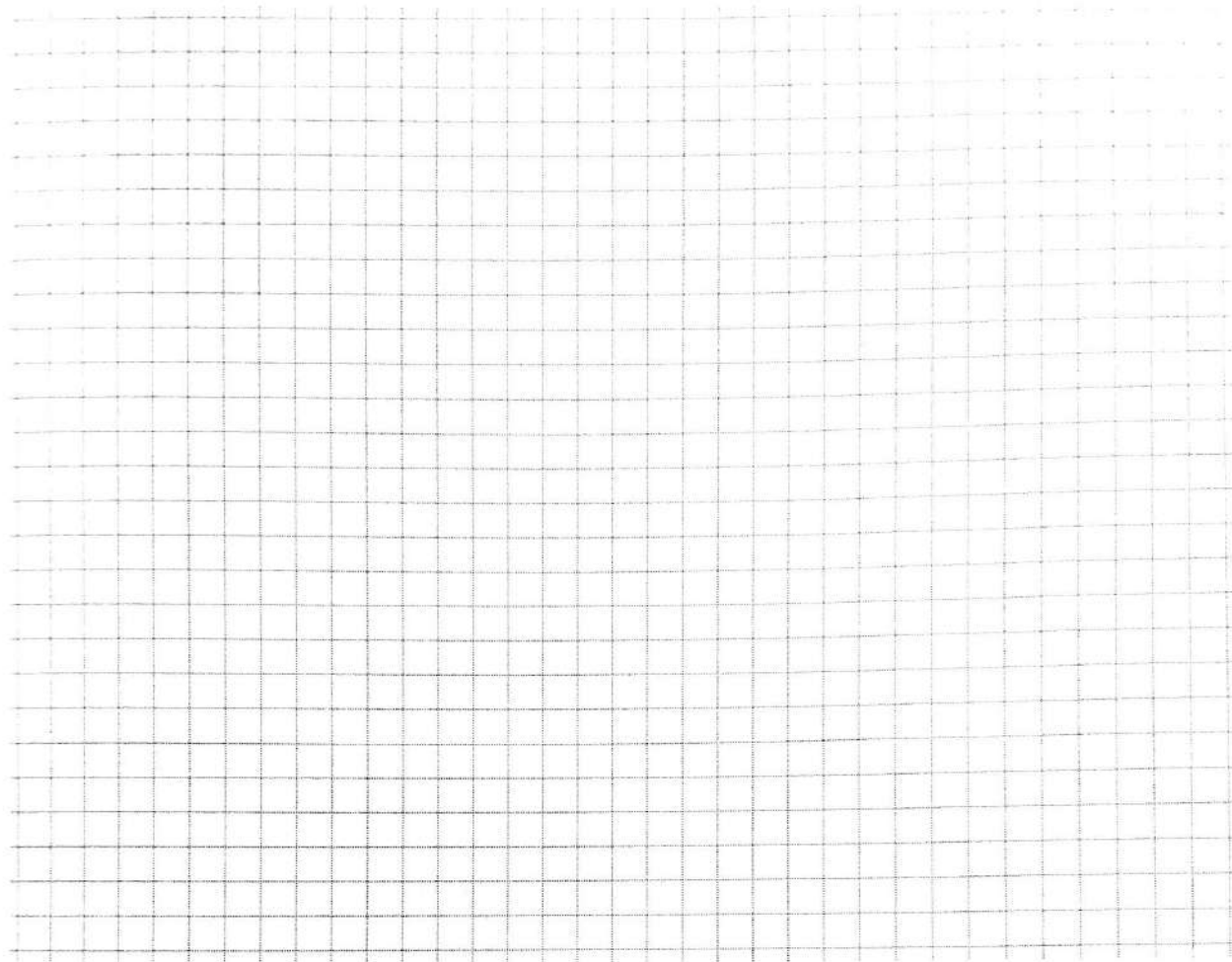


Zadanie 3. (0–4)

Dane jest równanie z niewiadomą x :

$$x^2 + 2mx + 2 = 0$$

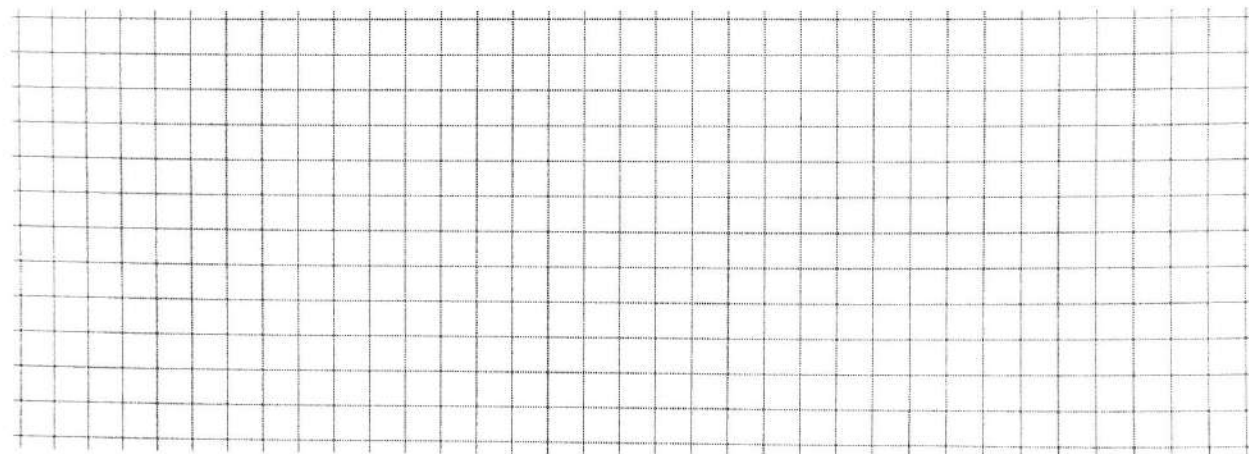
Wyznacz wszystkie liczby całkowite m , dla których równanie ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 , spełniające warunek $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 16$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 4. (0–2)**

Funkcja liniowa f spełnia warunek:

$$f(6) = \frac{7+f(7)}{7} = \frac{5+f(5)}{5}$$

Wyznacz wzór funkcji f . Zapisz obliczenia.



Zadanie 5. (0–3)

W pewnym skończonym ciągu geometrycznym (a_n) pierwszy wyraz jest równy $1\frac{1}{2}$, a ostatni 96. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $190\frac{1}{2}$.

Wyznacz iloraz ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

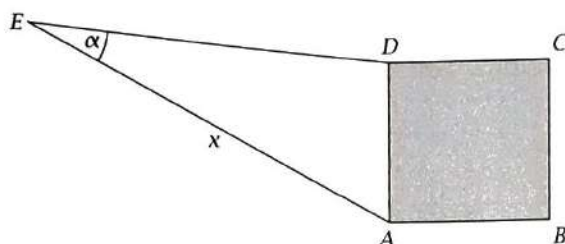
Zadanie 6. (0–4)

Trzy odcinki mają długości: $n-1$, n , $n+1$, gdzie n jest liczbą naturalną i $n > 2$. Odcinki te mają wspólny środek i każde dwa przecinają się pod kątem 60° , a ich końce są wierzchołkami sześciokąta, którego pole oznaczamy symbolem P_n . Ponadto symbol S_n oznacza pole sześciokąta foremnego, którego bok ma długość n .

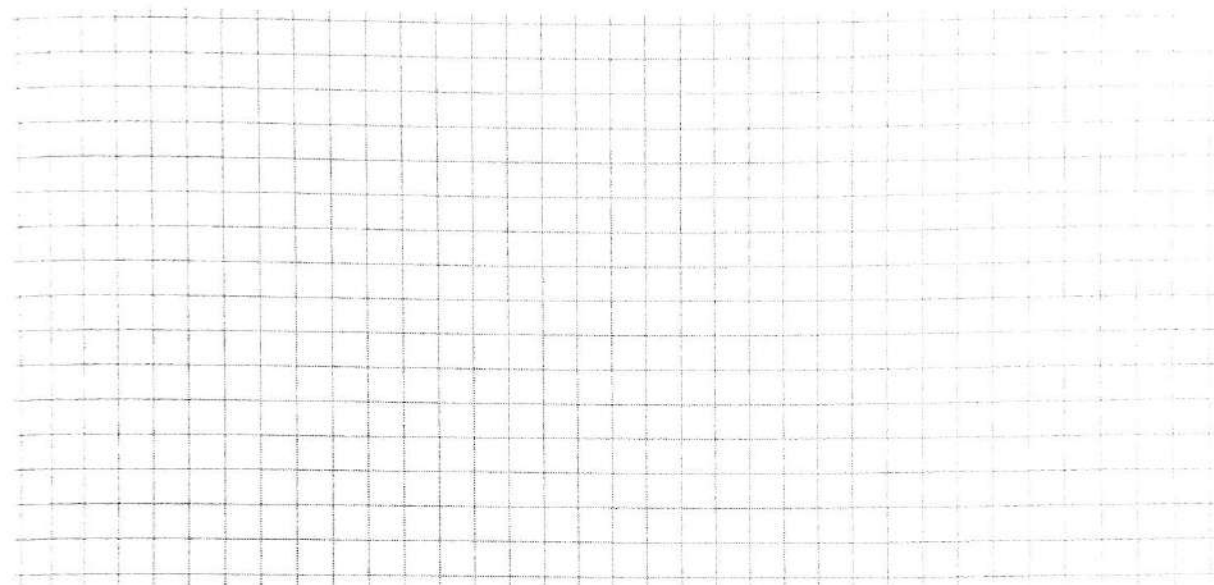
Wyznacz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{P_n}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–5)

Suma długości odcinków EA i ED wynosi 1, a sinus kąta ostrego α jest równy 0,28 (zobacz rysunek).

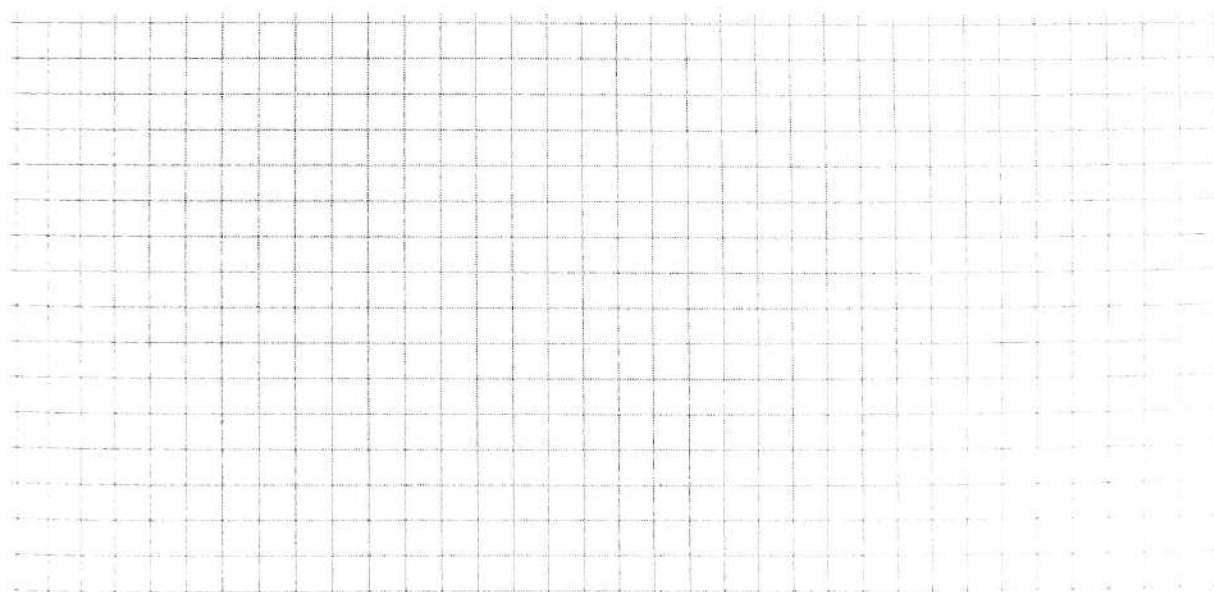


Oblicz, dla jakich wartości x pole kwadratu $ABCD$ jest większe od 0,02. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 8. (0–5)**

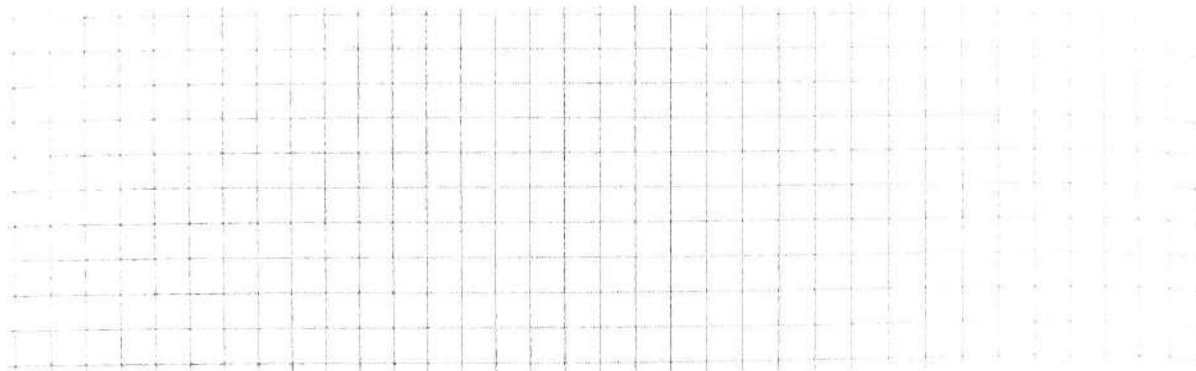
Trójkąt prostokątny o bokach x , y , z , gdzie $x < y < z$, jest podobny do trójkąta o bokach $\sqrt{x^2 + 1}$, $\sqrt{y^2 + 2}$, $\sqrt{z^2 + 3}$. Niech α będzie większym, a β mniejszym z dwóch kątów ostrych w tych trójkątach.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$. Zapisz obliczenia.



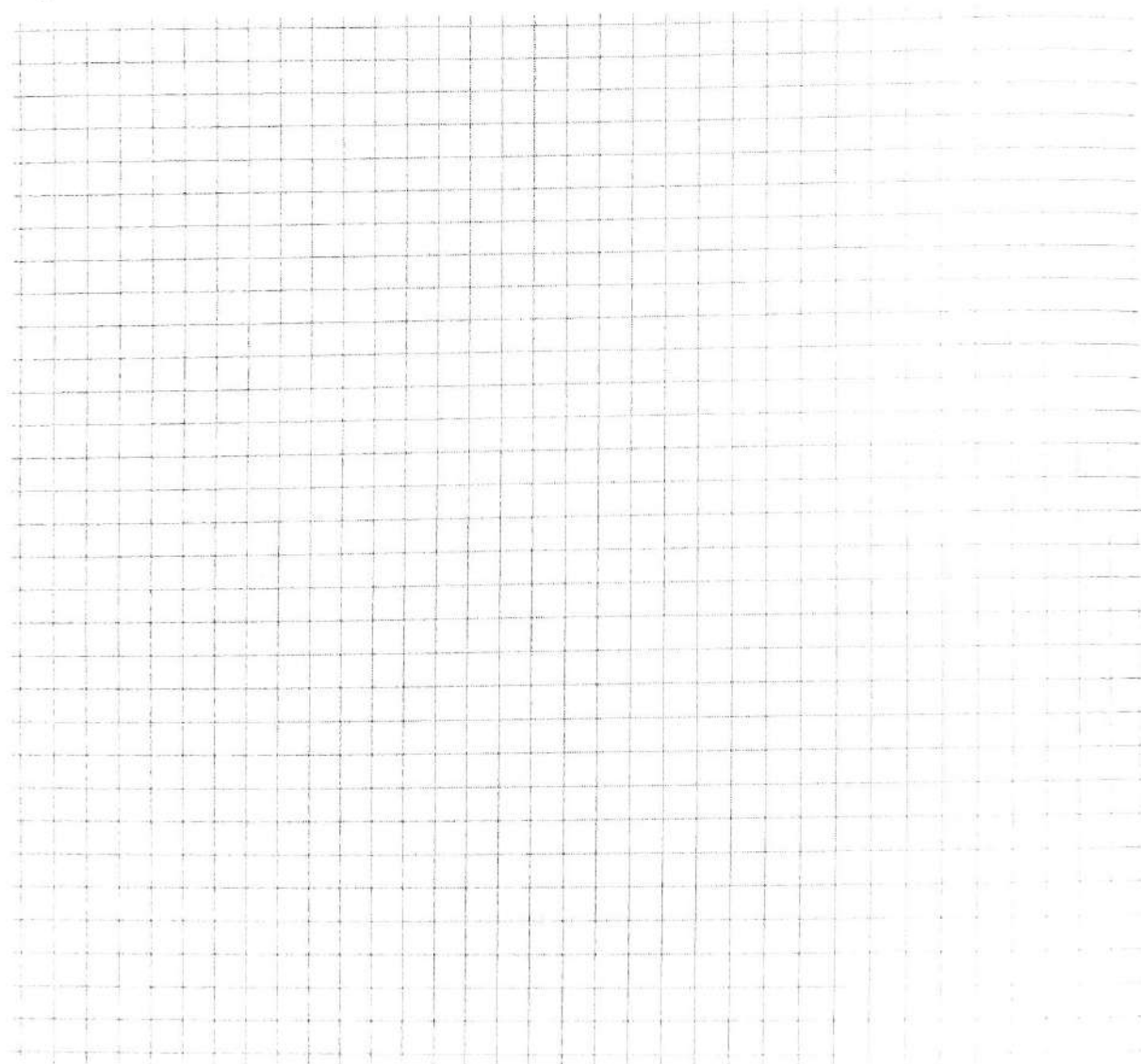
Zadanie 9. (0-2)

Wykaż, że każdy punkt należący do paraboli o równaniu $y = 2x^2$ jest jednakowo odległy od punktu $F = (0, \frac{1}{8})$ i od prostej o równaniu $y = -\frac{1}{8}$.

**Zadanie 10. (0-6)**

Na wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wybrano taki punkt G , którego odległość od każdego z pięciu wierzchołków tego ostrosłupa jest taka sama i stanowi $\frac{4}{3}$ odległości punktu G od podstawy ostrosłupa.

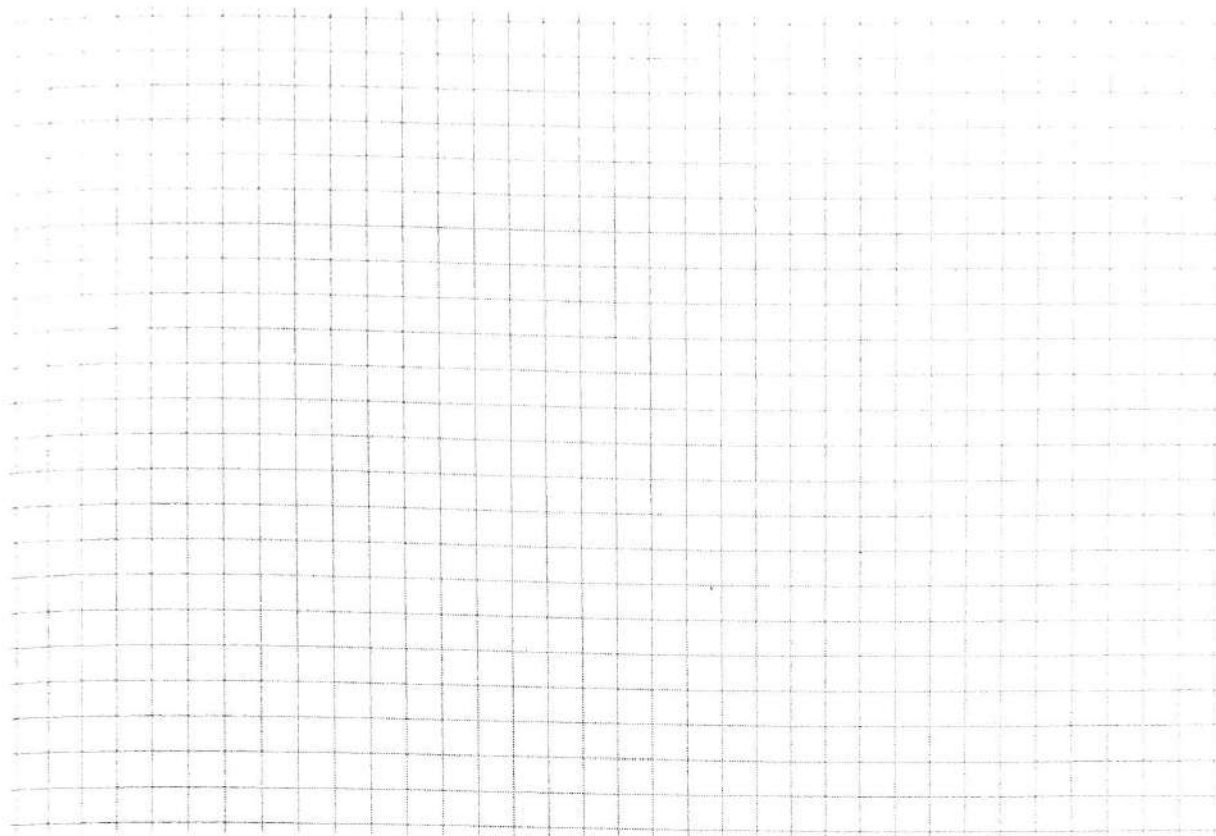
Oblicz, ile razy krawędź boczna tego ostrosłupa jest dłuższa od krawędzi jego podstawy. Zapisz obliczenia.



Zadanie 11. (0–3)

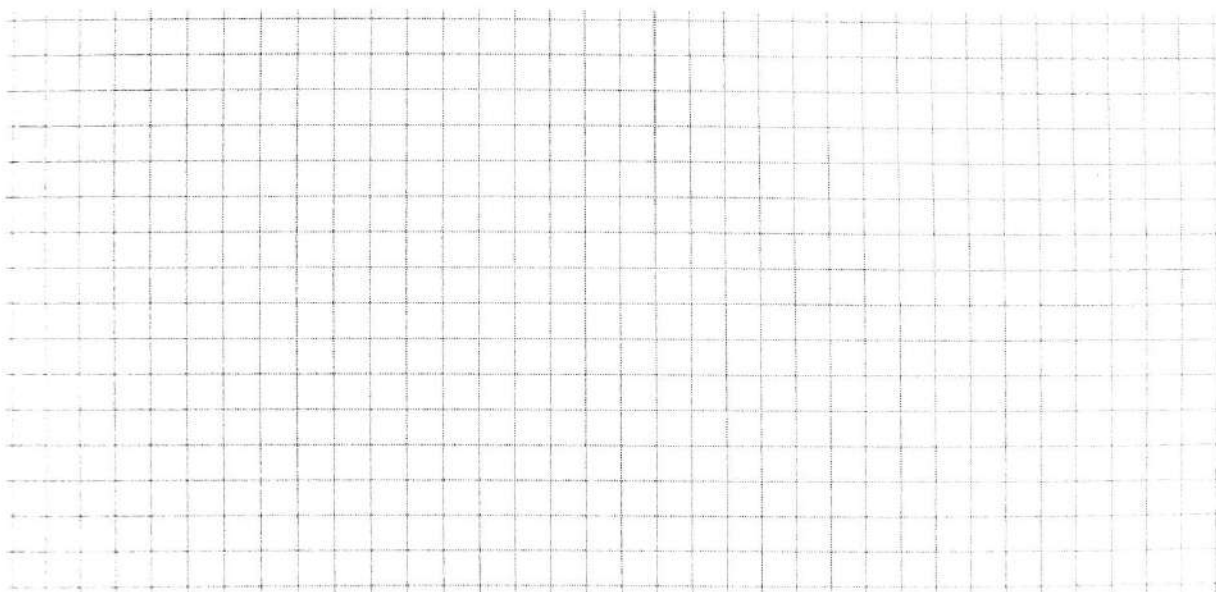
W pudełku były czekoladki — każda o innym smaku. Z tego pudełka można było wyjąć trzy czekoladki na pewną liczbę sposobów. Po wzięciu trzech czekoladek z pudełka, liczba tych sposobów zmniejszyła się o 136.

Oblicz, ile czekoladek było początkowo w tym pudełku. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 12. (0–2)**

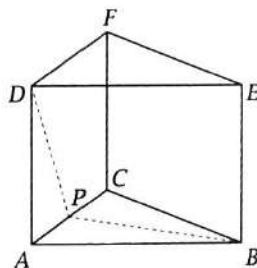
W koszu jest 12 klocków żółtych i 8 czerwonych.

Oblicz, ile co najwyżej czerwonych klocków należy dołożyć do tego kosza, aby prawdopodobieństwo wylosowania z niego jednego czerwonego klocka było mniejsze niż $\frac{2}{3}$. Zapisz obliczenia.



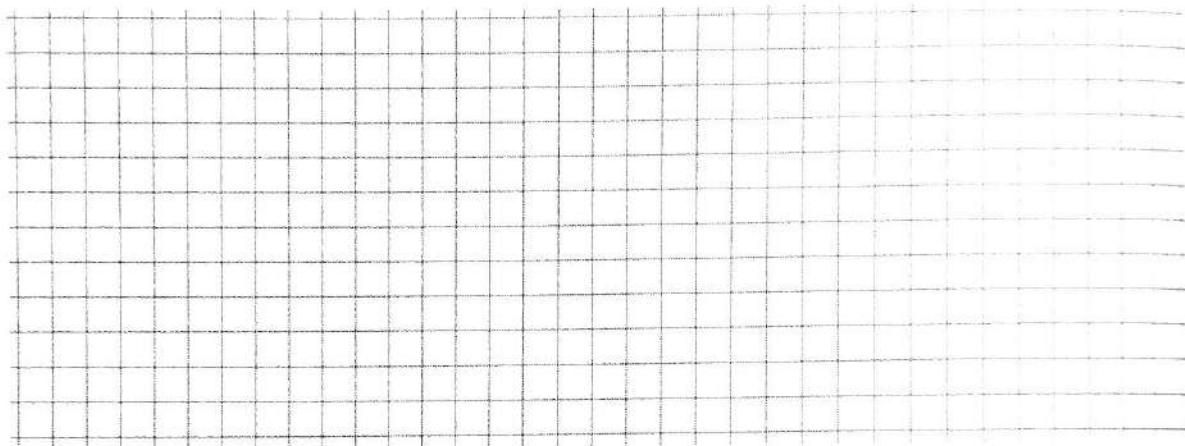
Zadanie 13.

Punkt P jest środkiem krawędzi podstawy AC graniastoslupa prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$. Suma długości odcinków PB i PD jest równa 1 (zobacz rysunek).

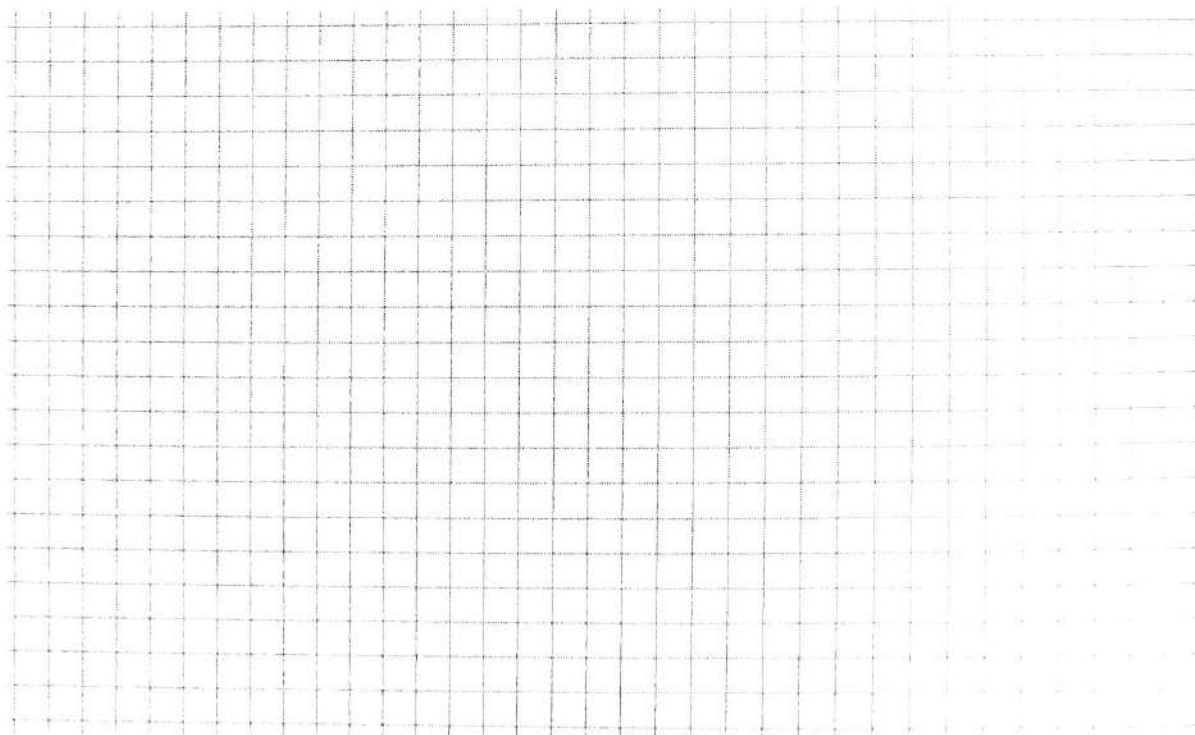
**Zadanie 13.1. (0-2)**

Wykaż, że objętość graniastoslupa $ABCDEF$ wyraża się wzorem:

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}, \text{ gdzie } x \text{ oznacza długość odcinka } PB$$

**Zadanie 13.2. (0-4)**

Wyznacz taką wartość x , dla której graniastosłup $ABCDEF$ ma największą objętość. Zapisz obliczenia.

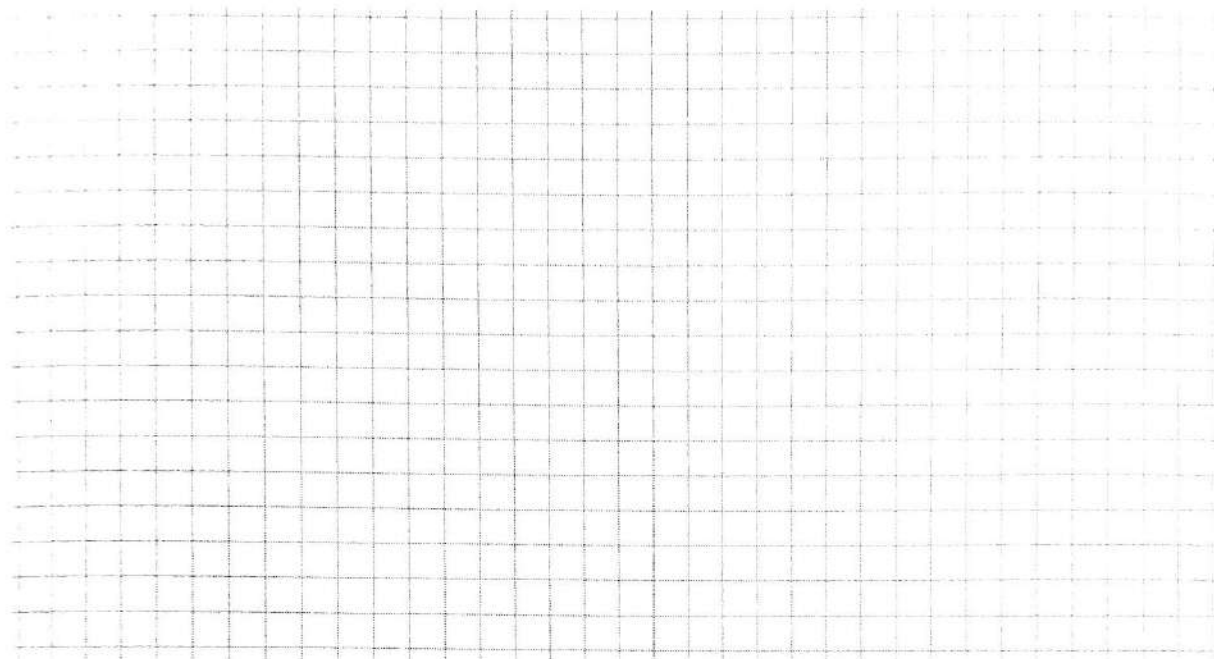


Zadanie 1. (0-3)

Dane jest wyrażenie:

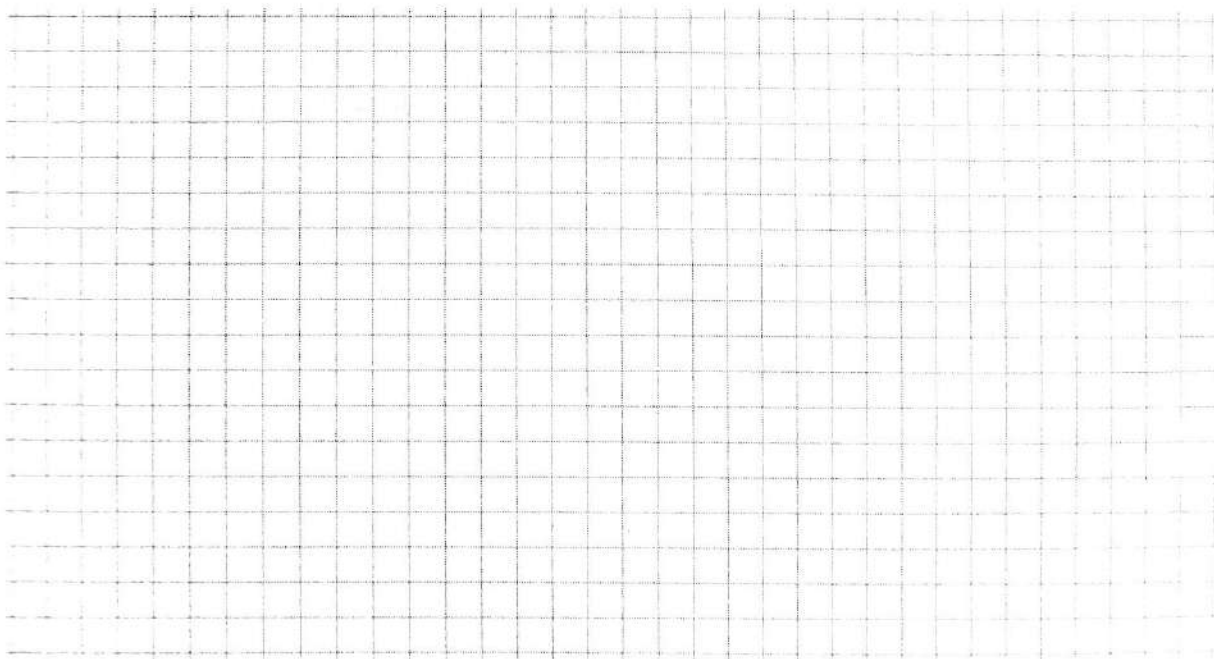
$$W = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \log_{\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}}} (xy^3) + \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{\sqrt{x^3 y^2}}{\sqrt{y^3}}$$

Wykaż, że dla dodatnich liczb x i y spełniających warunek $x^3 \neq y^2$ wyrażenie W przyjmuje stałą wartość. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 2. (0-3)**

Prosta o równaniu $x = 1$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + 1$.

Rozwiąż nierówność $f(x) < 1 - x^3$. Zapisz obliczenia.

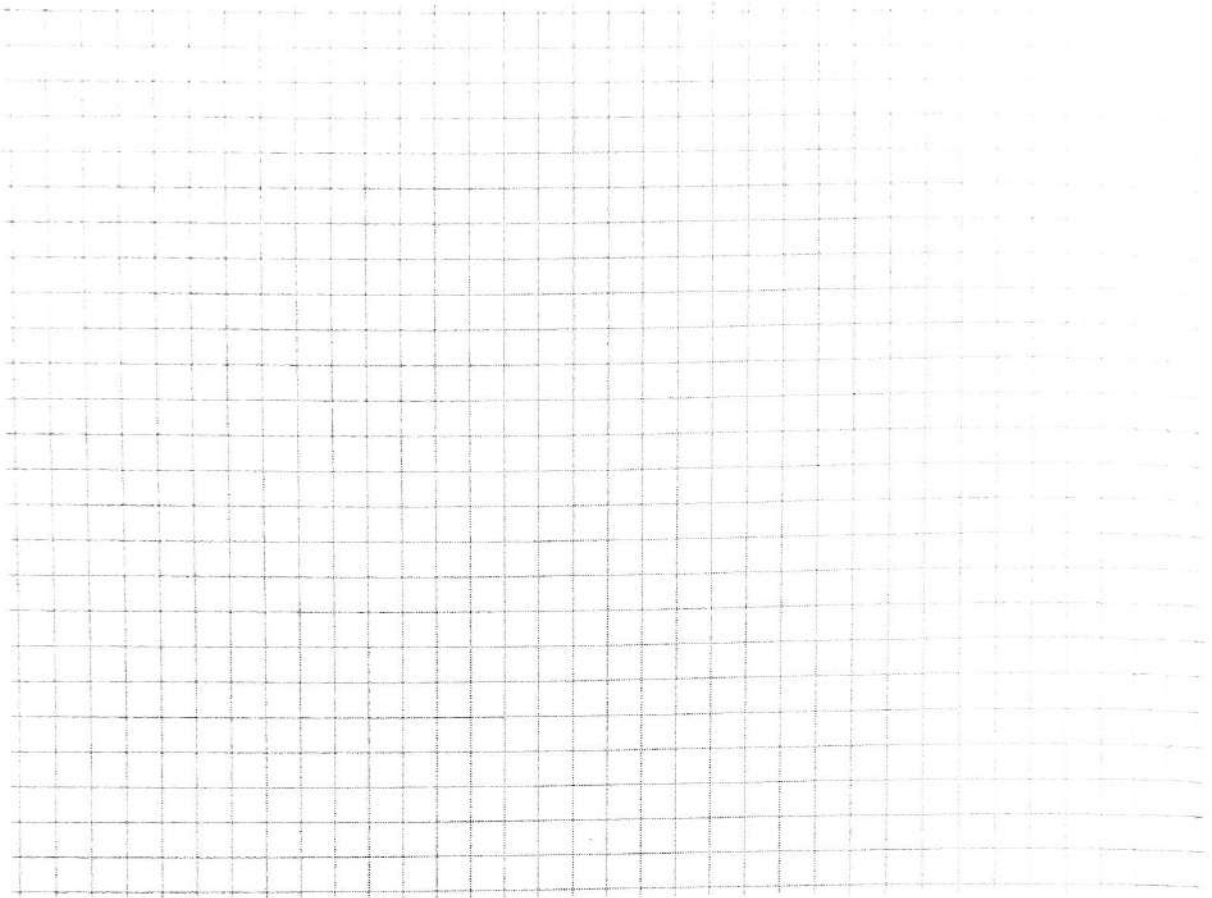


Zadanie 3. (0–5)

Dane jest równanie z niewiadomą x :

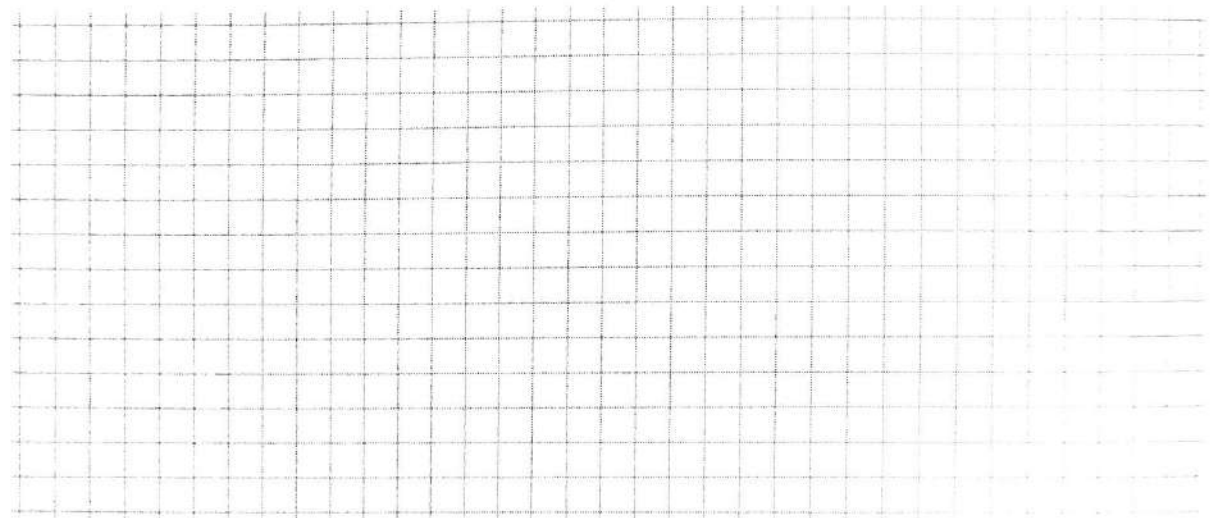
$$x^2 + mx + m - 2 = 0$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których to równanie ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 takie, że wyrażenie $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ przyjmuje najmniejszą wartość. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 4. (0–4)**

Suma wszystkich wyrazów pewnego nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 9, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $16\frac{1}{5}$.

Oblicz sumę sześciątów wszystkich wyrazów ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.



Zadanie 5. (0–2)

Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o wszystkich wyrazach dodatnich.

Wyznacz wartość ilorazu $\frac{S_{9n}}{S_{5n} - S_{4n}}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–5)

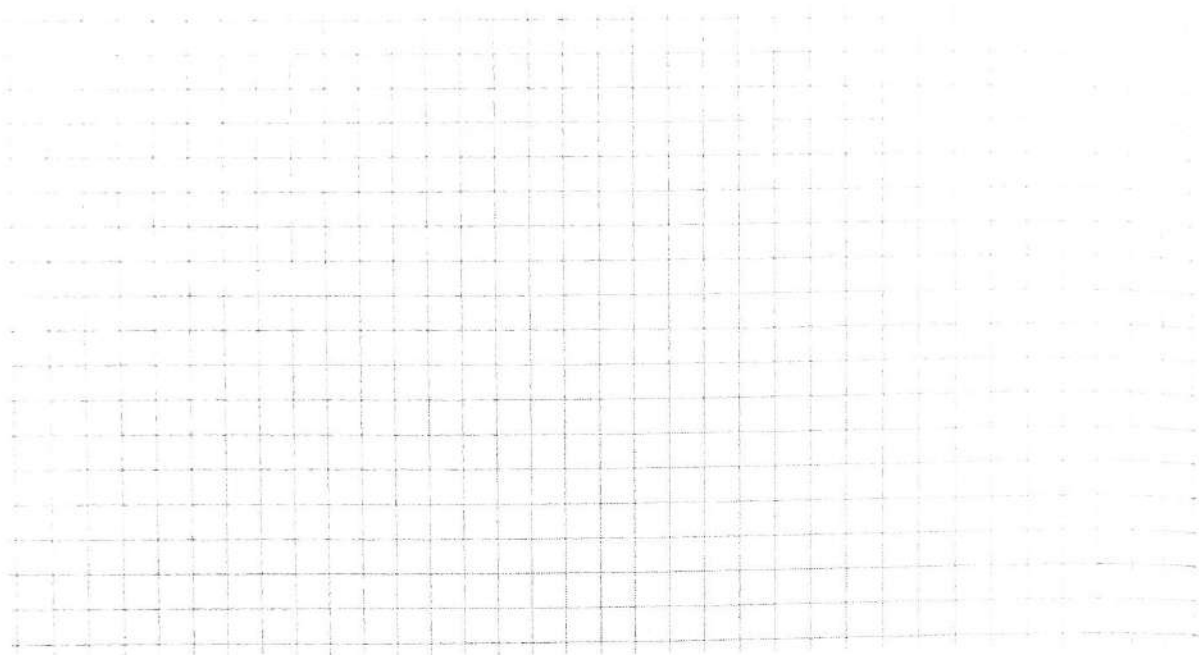
Dane są ciągi (a_n) i (b_n) określone dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorami:

$$a_n = \frac{(p^2 - 9p - 10)n^2 + 3n}{4n + 3n^2} \qquad b_n = \frac{(|6 - p| - 2)\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n+2} + 2}$$

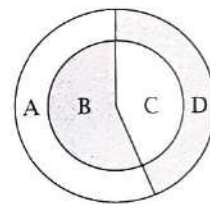
Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których iloczyn granic ciągów (a_n) i (b_n) jest liczbą ujemną. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–3)

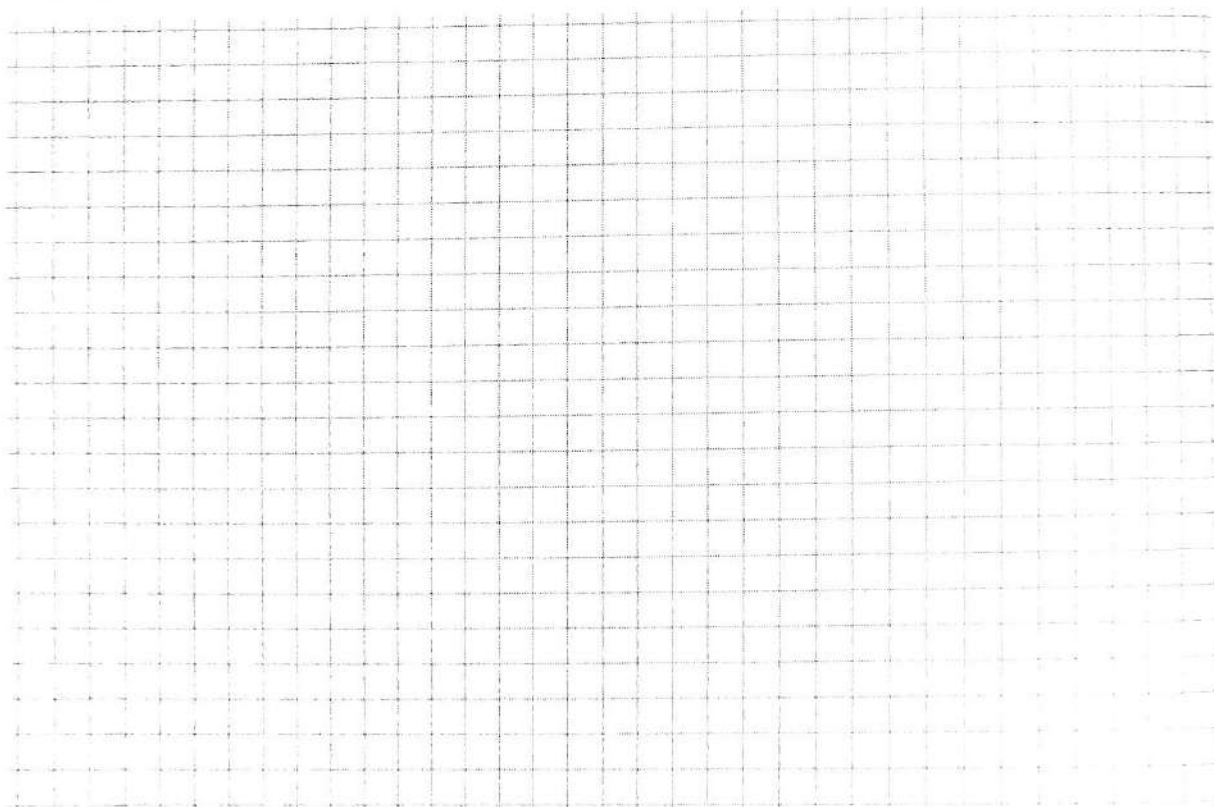
Rozwiąż równanie $\sin^2 2x = \cos 2x + 1$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 8. (0–4)**

W figurze przedstawionej na rysunku stosunek promienia większego okręgu do promienia mniejszego okręgu jest równy $\frac{3}{2}$. Figury B i D (zaznaczone kolorem szarym) mają równe pola.



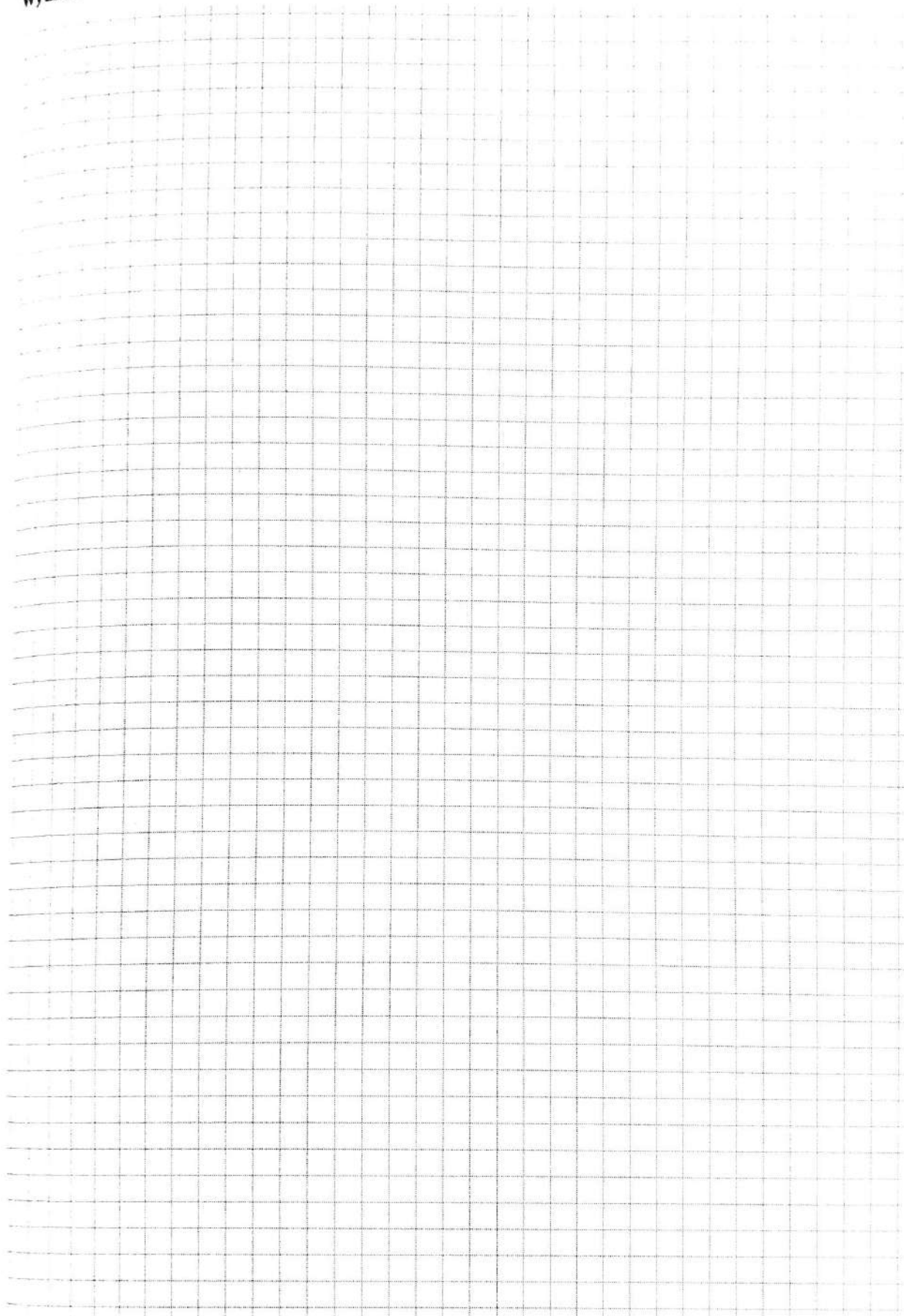
Oblicz stosunek pola figury A do pola figury C. Zapisz obliczenia.



Zadanie 9. (0-5)

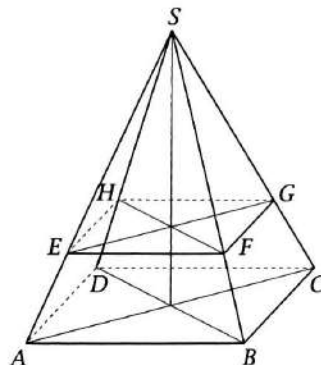
Punkt $A = (-2, 16)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Wiadomo, że punkt $P = (6, 12)$ jest środkiem boku AB , a punkt $Q = (-5, 5)$ jest środkiem odcinka CP .

Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC . Zapisz obliczenia.

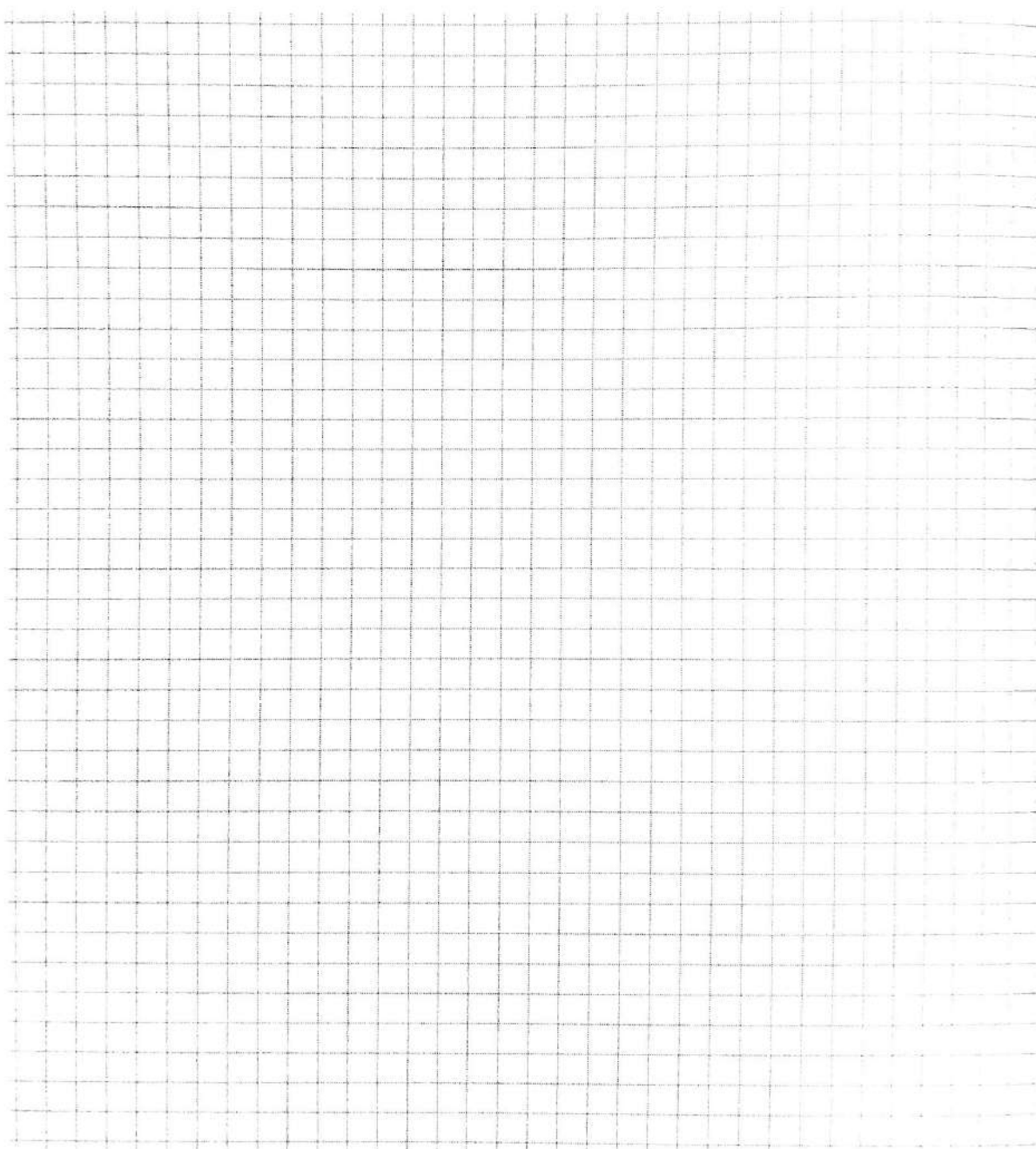


Zadanie 10. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD S$ ściana boczna i podstawa mają równe pola. Płaszczyzną równoległą do podstawy odcięto mniejszy ostrosłup $EFGH S$ w taki sposób, że pole czworokąta $EFGH$ jest równe polu czworokąta $ABFE$ (zobacz rysunek).



Oblicz stosunek objętości ostrosłupa $ABCD S$ do objętości ostrosłupa $EFGH S$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 11. (0–3)

W pewnej grupie jest dwukrotnie więcej dziewcząt niż chłopców. Obliczono, że liczba możliwości wybrania trzech chłopców z tej grupy stanowi $\frac{20}{11}\%$ liczby wszystkich możliwości wyboru trzech osób.

Oblicz, ile osób jest w tej grupie. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–4)

W trzech kopertach są banknoty 10-złotowe i 20-złotowe. Liczby banknotów w poszczególnych kopertach przedstawiono w tabeli.

Nominał banknotu \ Nr koperty	Nr koperty		
	I	II	III
10 zł	7	8	5
20 zł	3	2	11

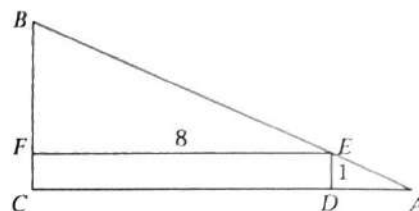
Z losowo wybranej koperty należy wylosować dwa banknoty. O wyborze koperty decyduje trzykrotny rzut symetryczną monetą. Jeśli orzeł wypadnie trzy razy, banknoty są losowane z pierwszej koperty, jeśli dokładnie dwa razy — z drugiej koperty. W pozostałych wypadkach odbędzie się losowanie z trzeciej koperty.

Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana kwota pieniędzy będzie większa niż 20 zł. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.

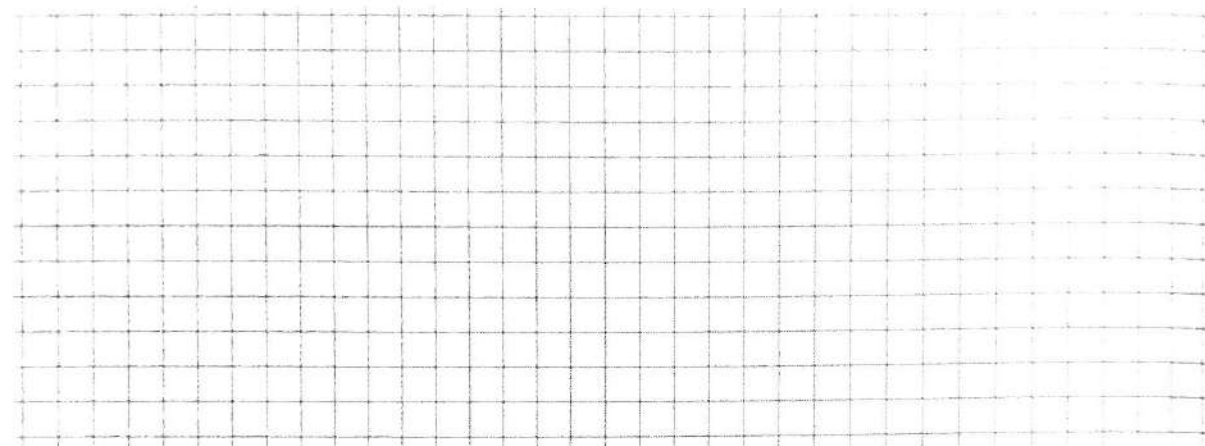
Na prostokącie $CDEF$ o wymiarach 8×1 opisano trójkąt prostokątny ABC w sposób przedstawiony na rysunku.

Dwa sąsiednie boki prostokąta $CDEF$ zawierają się w przyprostokątnych trójkąta ABC , a wierzchołek nienależący do tych boków leży na przeciwprostokątnej.

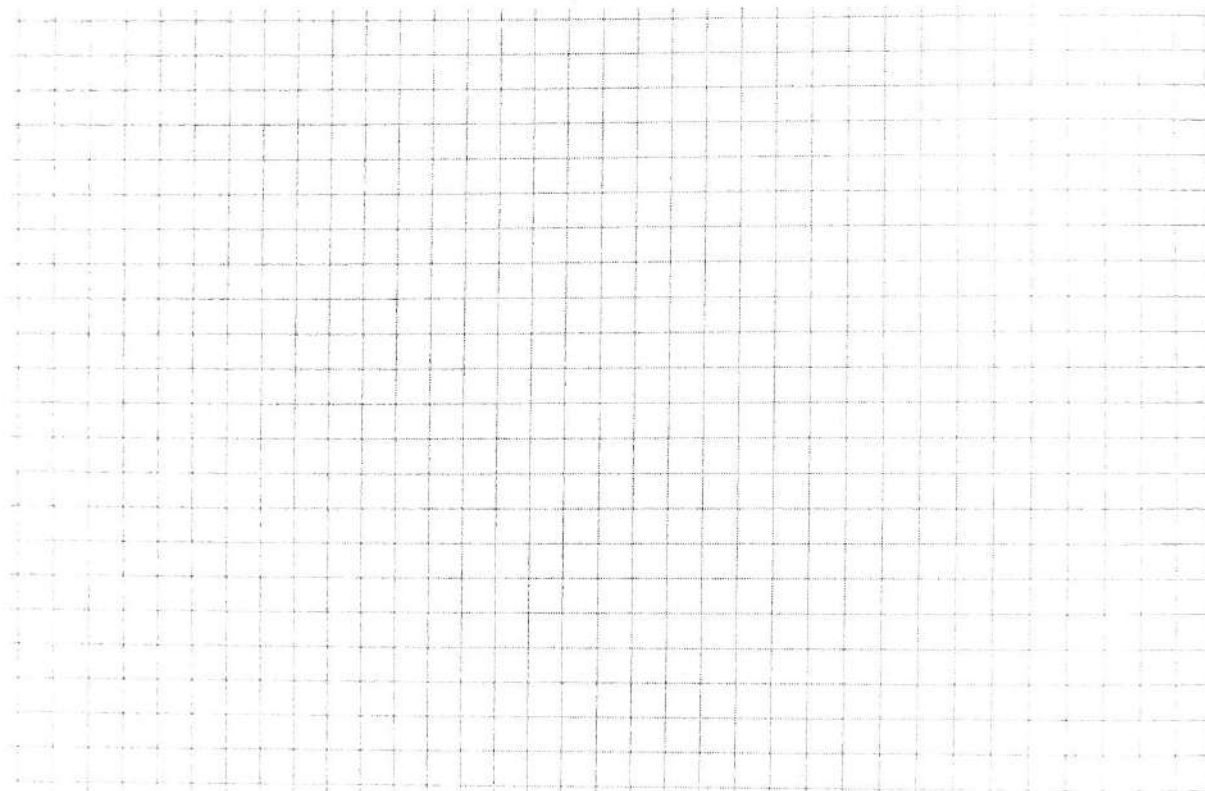
**Zadanie 13.1. (0-2)**

Wykaż, że długość przeciwprostokątnej trójkąta ABC wyraża się wzorem:

$$c(x) = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}, \text{ gdzie } x \text{ oznacza długość odcinka } BF$$

**Zadanie 13.2. (0-4)**

Wyznacz najmniejszą długość, jaką może mieć przeciwprostokątna trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 1. (0–2)

Wartość wyrażenia $(\sqrt{2})^{2024} \cdot (\sqrt[3]{5})^{3015}$ jest liczbą naturalną.

Ustal, ile cyfr ma zapis dziesiętny tej liczby. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–5)

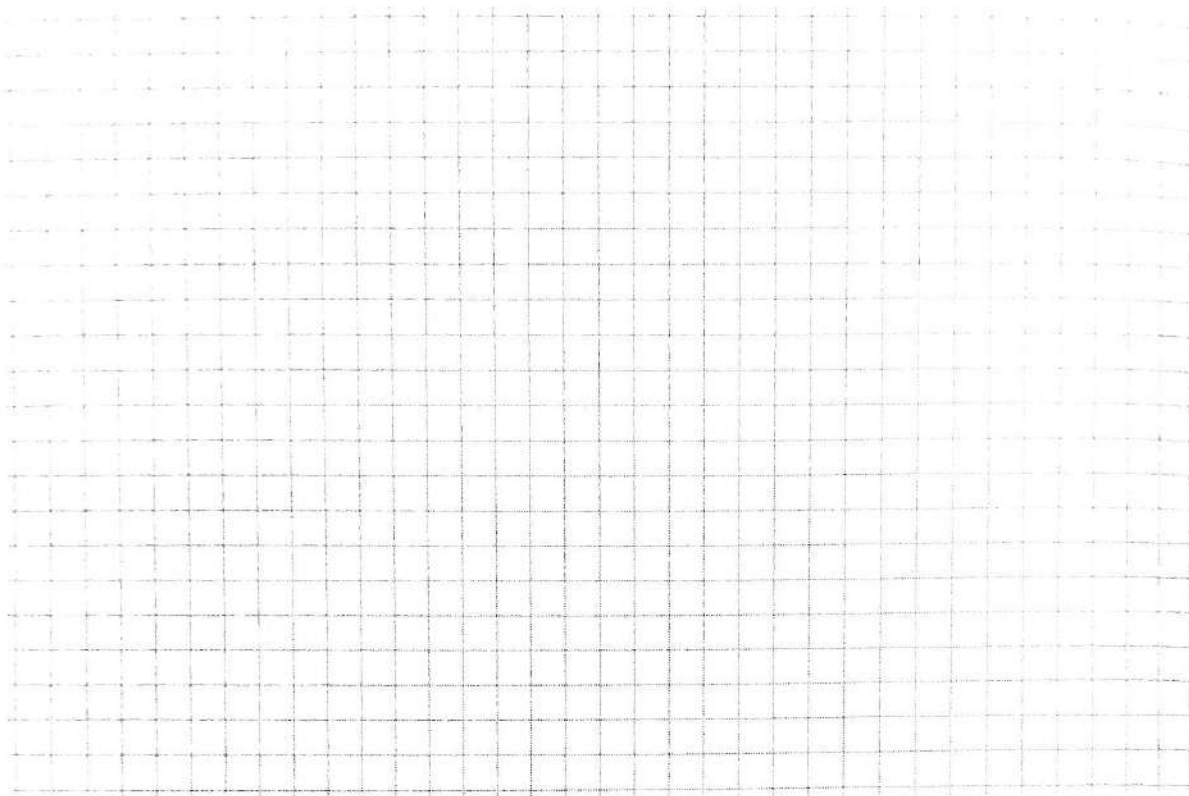
Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \log_{7\sqrt{7}} |x - 42|$. Ponadto zbiór A jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $-24 \leq (x - 1)(x + 4)(x + 6) \leq 0$.

Zapisz zbiór A za pomocą sumy przedziałów oraz wyznacz wartość funkcji f dla najmniejszej liczby należącej do zbioru A . Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0-5)

Funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2 - 13x + k$ ma dwa różne miejsca zerowe x_1 i x_2 . Miejscami zerowymi funkcji g określonej wzorem $g(x) = x^2 + px + q$ są liczby $\sqrt{x_1}$ i $\sqrt{x_2}$.

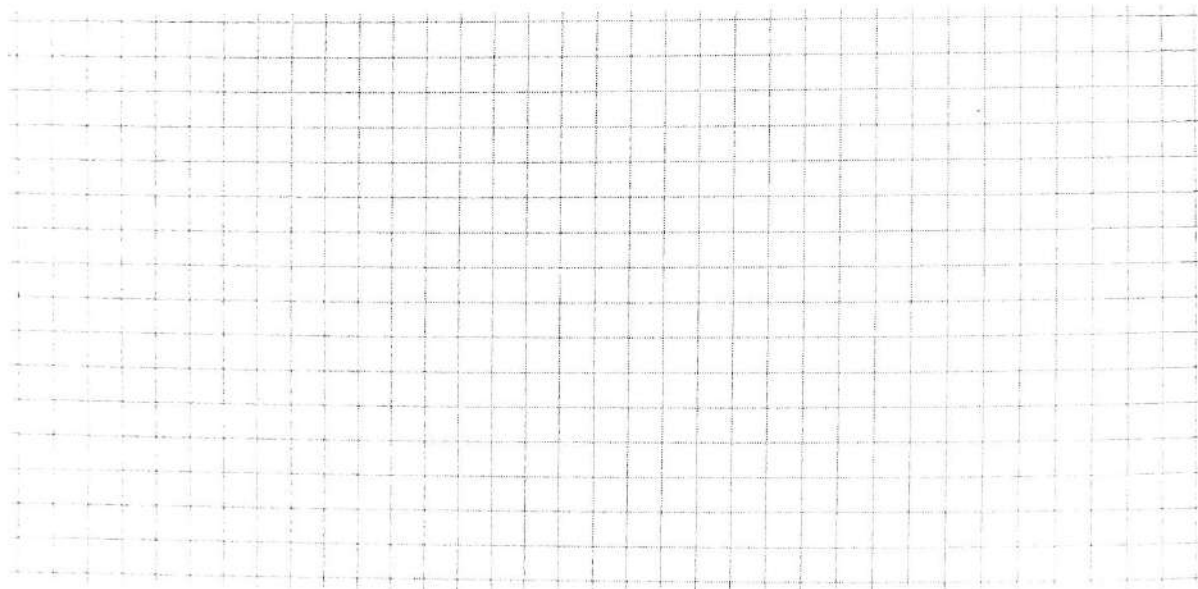
Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których zachodzi związek $p^2 + 2q = 37$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 4. (0-3)**

Dany jest układ równań z niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x - 1 = 0 \\ x + |y| = 3 \end{cases}$$

Wyznacz wszystkie pary liczb x i y , które spełniają ten układ równań. Zapisz obliczenia.



Zadanie 5. (0–3)

Kładąc obok siebie dwa jednakowe prostokątne kartoniki P , które nie są kwadratami, można na dwa sposoby ułożyć nowy prostokąt. Przekątna jednego z otrzymanych w ten sposób prostokątów ma długość $2\sqrt{13}$, a drugiego $-\sqrt{73}$.

Oblicz, jaką długość ma przekątna prostokąta P . Zapisz obliczenia.

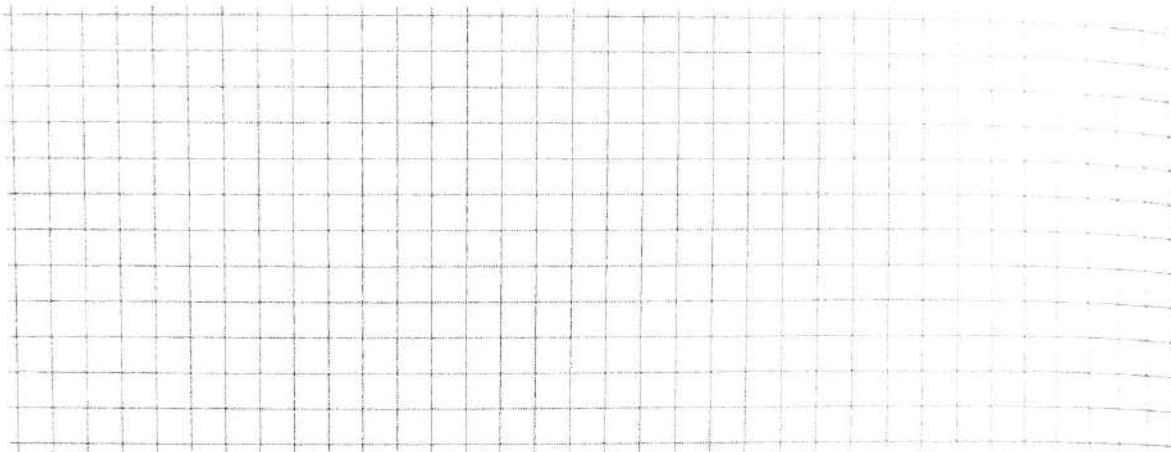
Zadanie 6. (0–5)

Na paraboli, będącej wykresem funkcji $f(x) = x^2$ zaznaczono trzy punkty A , B i C o pierwszych współrzędnych odpowiednio równych 2, m oraz 6, gdzie $m \in (2; 6)$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których pole trójkąta ABC jest mniejsze od 4. Zapisz obliczenia.

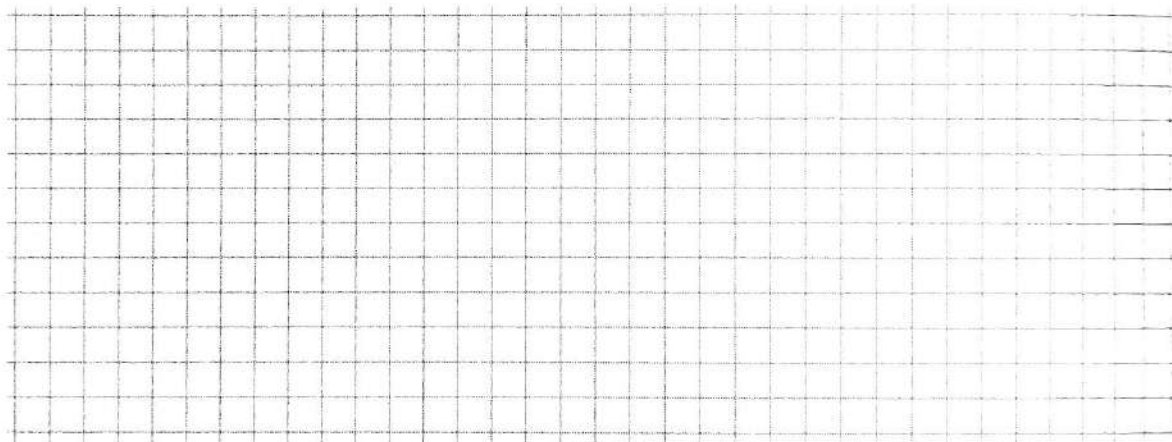
Zadanie 7. (0-3)

Określ przedziały monotoniczności funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 6x + 5$ w zbiorze, w którym funkcja g określona wzorem $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ przyjmuje wartości nieujemne. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 8. (0-3)**

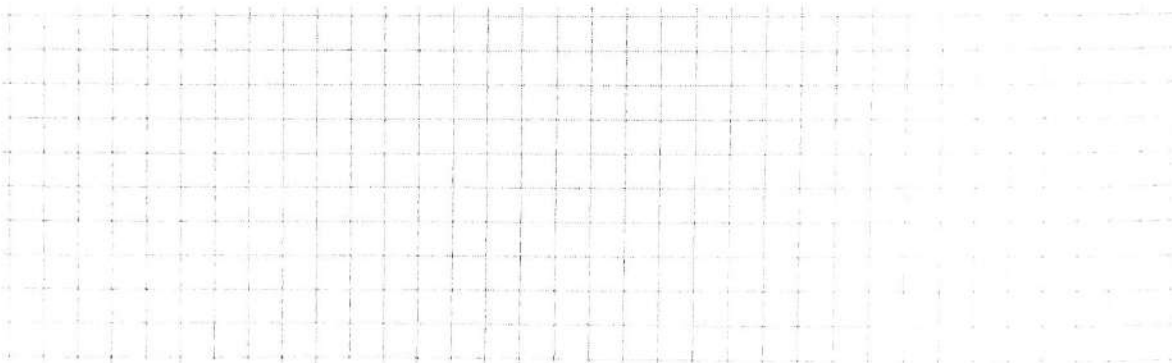
Ciąg (a_n) , w którym $a_1 \neq 0$, spełnia warunek $a_n \cdot a_{n+1} = -\frac{a_n^2}{3} - \frac{3a_{n+1}^2}{4}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oblicz granicę ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 9. (0-2)**

Wykaż, że dla każdego kąta ostrego α zachodzi nierówność:

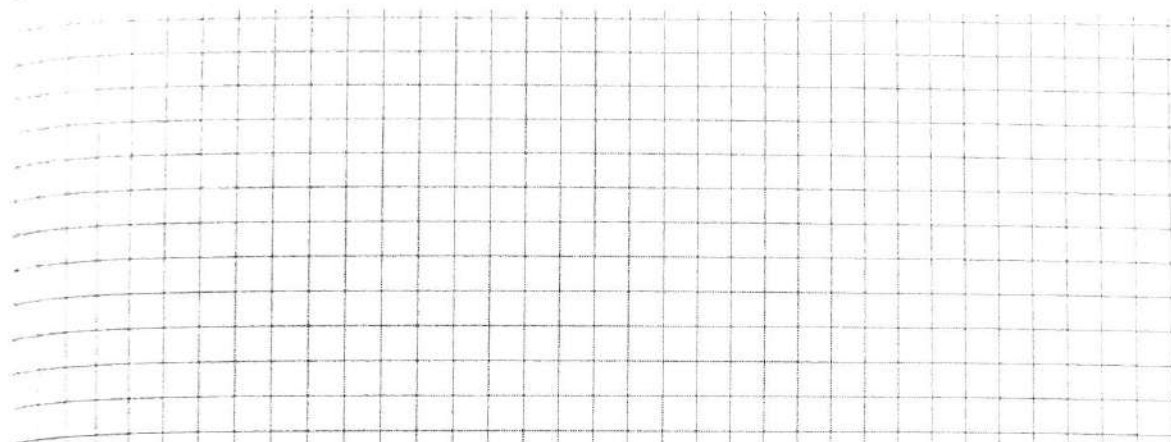
$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + 1)^2 + (\cos \alpha + 1)^2 > 6$$



Zadanie 10. (0–3)

Prostopadłościan o wymiarach $8 \times a \times b$, gdzie $8 \leq a \leq b$, ma objętość równą 1728. Ściany, dla których krawędź o długości a jest wspólna, są prostokątami podobnymi.

Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Zapisz obliczenia.

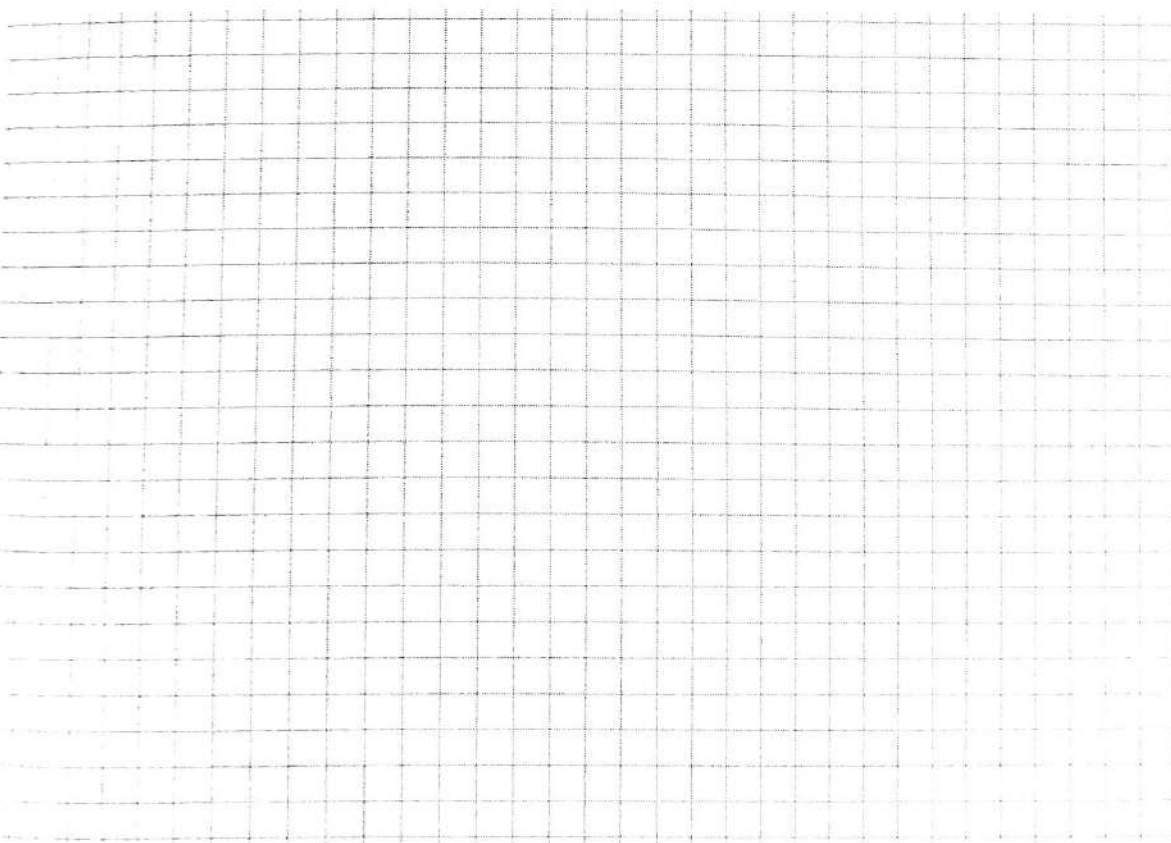
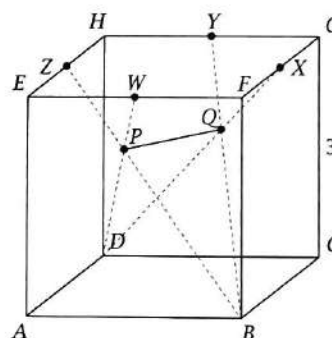


Zadanie 11. (0–4)

Punkty W, X, Y, Z są środkami odpowiednio krawędzi EF, FG, GH, HE sześcianu $ABCDEFGH$, którego krawędź ma długość 3 (zobacz rysunek).

Odcinki BZ i DW przecinają się w punkcie P , a odcinki BY i DX przecinają się w punkcie Q .

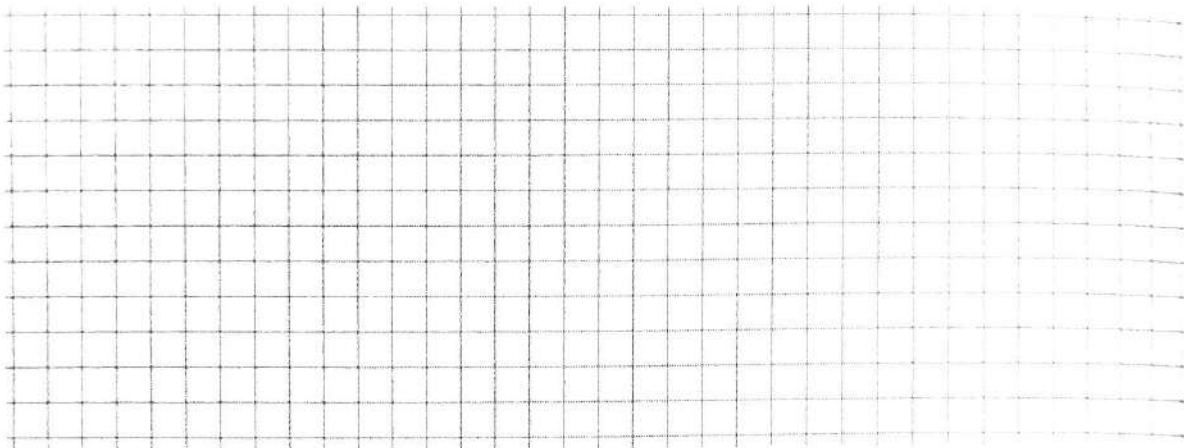
Wykaż, że odcinek PQ ma długość $\sqrt{2}$.



Zadanie 12. (0–2)

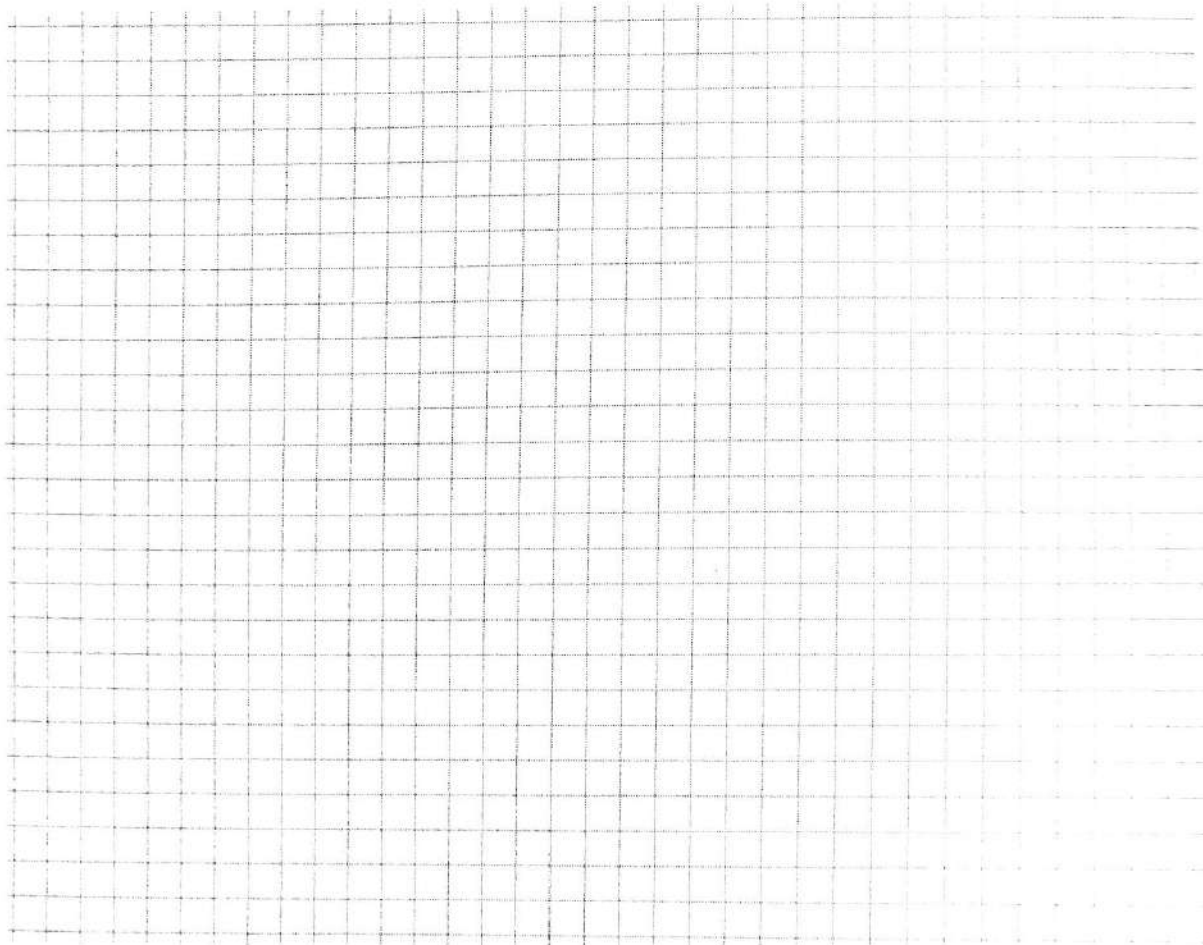
Na ławce jest 7 miejsc dla zawodników rezerwowych. Podczas meczu zasiądzie na niej siedmiu zawodników wśród których są: rezerwowy bramkarz i kapitan zespołu.

Oblicz, na ile sposobów siedmiu zawodników może zająć te miejsca, jeśli rezerwowy bramkarz i kapitan nie mogą siedzieć obok siebie. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 13. (0–4)**

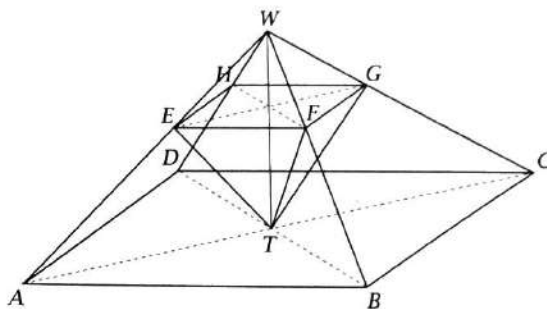
W pojemniku są kule białe i czarne, przy czym czarnych jest dwa razy więcej niż białych. Z tego pojemnika są losowane kolejno, bez zwracania, dwie kule. Obliczono, że prawdopodobieństwo wylosowania za drugim razem kuli czarnej pod warunkiem, że za pierwszym razem wylosowano kulę białą, jest równe 0,7.

Oblicz, ile wszystkich kul jest w tym pojemniku. Zapisz obliczenia.



Zadanie 14. (0–6)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDW$ wszystkie krawędzie mają długość 6. W ostrosłupie tym umieszczono ostrosłup prawidłowy czworokątny $EFGHT$ tak, że każdy wierzchołek jego podstawy leży na innej krawędzi bocznej ostrosłupa $ABCDW$, a jego wierzchołek T jest punktem przecięcia przekątnych podstawy ostrosłupa $ABCDW$ (zobacz rysunek).



Wyznacz największą objętość, jaką może mieć ostrosłup $EFGHT$. Zapisz obliczenia.

Grid area for calculations.

SCHEMATY ROZWIĄZAŃ ZADAŃ OTWARTYCH

(zakres podstawowy)

Arkusz egzaminacyjny nr 1

Zadanie 6. (0-2)

n — dowolna liczba naturalna, $n \geq 1$

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$$

Liczba n^2 jest naturalna, czyli $3n^2$ jest liczbą naturalną podzielną przez 3.

Liczba 2 jest niepodzielna przez 3.

Suma liczby podzielnej przez 3 i niepodzielnej przez 3 jest liczbą niepodzielną przez 3, więc $3n^2 + 2$ nie dzieli się przez 3.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — zapisanie sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych w postaci równoważnej wyrażeniu $3n^2 + 2$

Zadanie 13. (0-3)

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 8 + 2p + q = 9 \\ 27 + 3p + q = 8 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} p = -20 \\ q = 41 \end{cases}$$

$$W(x) = x^3 - 20x + 41$$

$$W(-1) = (-1)^3 - 20 \cdot (-1) + 41 = 60$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wartości wielomianu dla $x = -1$: $W(-1) = 60$

2 p. — wyznaczenie wartości p i q : $p = -20$, $q = 41$

1 p. — zapisanie układu równań $\begin{cases} 8 + 2p + q = 9 \\ 27 + 3p + q = 8 \end{cases}$

Zadanie 15. (0-1)

Odpowiedź: (3, 2)

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 21. (0-3)

Sprawdzamy ilorazy sąsiednich liczb:

$$\frac{12}{6} = 2 \quad \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

Druga, trzecia i czwarta liczba są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q = \frac{3}{2}$.

$$a_1 \cdot \frac{3}{2} = 12, \text{ stąd } a_1 = 8$$

Zatem liczbę 6 należy zamienić na liczbę 8.

Wzór ogólny ciągu (a_n) to:

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \text{ czyli } a_n = \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu (a_n) : $a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

2 p. — wyznaczenie pierwszego wyrazu ciągu (a_n) : $a_1 = 8$

1 p. — wyznaczenie ilorazu ciągu (a_n) : $q = \frac{3}{2}$

Zadanie 28. (0–2)

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - (-0,6)^2} = 0,8, \text{ gdzie } \alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot 0,8 = 24$$

Zasady oceniania:2 p. — obliczenie pola trójkąta: $P = 24$ 1 p. — obliczenie sinusa kąta α : $\sin \alpha = 0,8$ **Zadanie 29. (0–2)**

Odpowiedź: 60, 2

Zasady oceniania:

2 p. — podanie dwóch poprawnych odpowiedzi

1 p. — podanie jednej poprawnej odpowiedzi

Zadanie 33. (0–4) $P(x)$ — pole figury F (w cm^2)

$$P(x) = 60^2 - 2x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (60 - x)(60 - x) = -3x^2 + 120x$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 30)$.Funkcja kwadratowa $y = -3x^2 + 120x$ osiąga największą wartość dla $x = \frac{-120}{2 \cdot (-3)} = 20$.Ponieważ $20 \in (0; 30)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 30)$ przyjmuje największą wartość dla $x = 20$ i jest ona równa $P(20) = 1200$.Największe pole, jakie może mieć figura F , to 1200 cm^2 .**Zasady oceniania:**4 p. — obliczenie możliwie największego pola figury F : $P = 1200 \text{ cm}^2$ 3 p. — wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja P osiąga największą wartość: $x = 20$ 2 p. — zapisanie wzoru funkcji P i wyznaczenie jej dziedziny1 p. — zapisanie wzoru funkcji P : $P(x) = -3x^2 + 120x$ **Arkusz egzaminacyjny nr 2****Zadanie 9. (0–3)**

Ustalamy, że:

- pól z wpisaną liczbą 4 jest $(n - 2)^2$,
- pól z wpisaną liczbą 3 jest $4(n - 2)$,
- są 4 pola z wpisaną liczbą 2.

Rozwiązujemy równanie:

$$4 \cdot (n - 2)^2 + 3 \cdot 4(n - 2) + 4 \cdot 2 = 22\,200$$

$$4n^2 - 4n - 22\,200 = 0$$

 $n = 75$ lub $n = -74$ ($n = -74$ nie spełnia warunków zadania, bo n jest liczbą naturalną i $n > 1$).**Zasady oceniania:**3 p. — obliczenie wartości n : $n = 75$ 2 p. — zapisanie równania z niewiadomą n w postaci $4n^2 - 4n - 22\,200 = 0$

1 p. — ustalenie, ile jest pól z liczbą 4, 3 i 2

Zadanie 11. (0-3) J — obecny wiek Joanny K — obecny wiek Katarzyny

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} J - 8 = 1,6 \cdot \frac{12 + K - 8}{2} \\ K + 8 = 0,8 \cdot \frac{28 + J + 8}{2} \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} J = 24 \\ K = 16 \end{cases}$$

Obliczamy, jakim procentem obecnej średniej arytmetycznej wieku Joanny i Katarzyny jest obecny wiek Wojciecha:

$$\frac{\frac{20}{\frac{24+16}{2}}}{2} \cdot 100\% = 100\%$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie, jakim procentem obecnej średniej arytmetycznej wieku Joanny i Katarzyny jest obecny wiek Wojciecha: 100%

2 p. — obliczenie obecnego wieku Joanny i Katarzyny: 24 i 16

1 p. — zapisanie układu dwóch równań, w którym niewiadome to obecny wiek Joanny i obecny wiek Katarzyny

Zadanie 19. (0-2) $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4}$ — pięć kolejnych wyrazów ciągu, których suma jest równa 180, gdzie $n \geq 1$
W ciągu arytmetycznym (a_n) : $a_1 = 10, a_2 = 12$, więc $r = 2$.

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} = 180$$

$$(2n + 8) + (2n + 10) + (2n + 12) + (2n + 14) + (2n + 16) = 180$$

$$10n + 60 = 180, \text{ stąd } n = 12$$

Szukane wyrazy ciągu to:

$$a_{12} = 32 \quad a_{13} = 34 \quad a_{14} = 36 \quad a_{15} = 38 \quad a_{16} = 40$$

Zasady oceniania:2 p. — wyznaczenie pięciu szukanych wyrazów ciągu: $a_{12} = 32, a_{13} = 34, a_{14} = 36, a_{15} = 38, a_{16} = 40$ 1 p. — zapisanie równania z niewiadomą n **Zadanie 22. (0-4)**

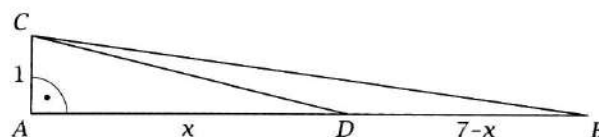
$$\frac{\operatorname{tg} \angle ACB}{\operatorname{tg} \angle ACD} = \frac{7}{x} \quad \text{ i } \quad \frac{\operatorname{tg} \angle ACB}{\operatorname{tg} \angle ACD} = 1,75$$

$$\frac{7}{x} = 1,75, \text{ czyli } x = 4$$

$$|BC| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|CD| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$\frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ACD} = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{7\sqrt{34}}{40}$$

**Zasady oceniania:**4 p. — wyznaczenie wartości wyrażenia $\frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ACD} = \frac{7\sqrt{34}}{40}$ 3 p. — wyznaczenie długości odcinków BC, AD i CD : $5\sqrt{2}, 4, \sqrt{17}$ 2 p. — wyznaczenie długości odcinka AD : 41 p. — zapisanie zależności $\frac{\operatorname{tg} \angle ACB}{\operatorname{tg} \angle ACD} = \frac{7}{|AD|}$

LUB

— wyznaczenie długości odcinka BC : $5\sqrt{2}$

Zadanie 24. (0-2)

Odpowiedź: 30, 150

Zasady oceniania:

2 p. — podanie dwóch poprawnych odpowiedzi

1 p. — podanie jednej poprawnej odpowiedzi

Zadanie 31. (0-2)

a — krawędź podstawy ostrosłupa

α — kąt między krawędzią boczną a podstawą ostrosłupa

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{a\sqrt{2}}$ i $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$, czyli $\frac{24}{a\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, stąd $a = 6$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 12 = 144$$

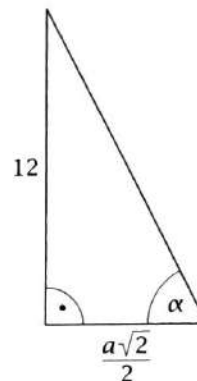
Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 144$

1 p. — obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 6$

LUB

— obliczenie długości przekątnej podstawy: $6\sqrt{2}$



Zadanie 32. (0-1)

Odpowiedź: 8,5

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Arkusz egzaminacyjny nr 3

Zadanie 5. (0-2)

Z założenia wynika, że $(a+b)^2 = 16ab$.

Zatem:

$$2 \log \frac{a+b}{4} = \log \frac{(a+b)^2}{16} = \log(ab) = \log a + \log b$$

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — zapisanie lewej strony równości w postaci $\log \frac{(a+b)^2}{16}$ i przekształcenie założenia do postaci $(a+b)^2 = 16ab$

LUB

— zapisanie prawej strony równości w postaci $\log ab$ i przekształcenie założenia do postaci $(a+b)^2 = 16ab$

Zadanie 12.1. (0-1)

Odpowiedź: $x \in \langle -5; 10 \rangle$, $y \in \langle -2; 4 \rangle$

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 12.2. (0-1)

Odpowiedź: 6

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 12.3. (0-1)

Odpowiedź: Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -3; -1 \rangle$, $\langle 5; 10 \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -5; -3 \rangle$, $\langle 2; 5 \rangle$, stała w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$.

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 13.1. (0-1)Do wykresu funkcji $g(x) = ax + b$ należą punkty $(2, 4)$ i $(0, -2)$.Zatem $a = \frac{4+2}{2-0} = 3$ i $b = -2$. Stąd $g(x) = 3x - 2$.

Zasady oceniania:

1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji g : $g(x) = 3x - 2$ **Zadanie 13.2. (0-2)**Skoro $g(x) > 0$ dla $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, to $g(x) < 0$ dla $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. $f(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x - 2 < 0$, czyli $x \in (-3; +\infty)$

Zatem:

$$x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cap (-3; +\infty), \text{ czyli } x \in \left(-3; \frac{2}{3}\right)$$

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie zbioru argumentów, dla których wartości funkcji f i g są jednocześnie ujemne:
 $-3 < x < \frac{2}{3}$

1 p. — wyznaczenie zbioru argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne: $x > -3$
 LUB

— wyznaczenie zbioru argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości ujemne: $x < \frac{2}{3}$

Zadanie 26. (0-3)Z twierdzenia cosinusów: $\cos \sphericalangle BAC = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}$.Z jedynki trygonometrycznej: $\sin \sphericalangle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$.Pole trójkąta ABC jest równe: $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$.Promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest równy:

$$r = \frac{2P_{\triangle ABC}}{|AB| + |BC| + |AC|} = \frac{\frac{15\sqrt{7}}{2}}{15} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC : $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 2 p. — obliczenie pola trójkąta ABC : $P_{\triangle ABC} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$

1 p. — obliczenie cosinusa jednego z kątów trójkąta ABC : $\cos \sphericalangle BAC = \frac{9}{16}$ lub $\cos \sphericalangle ACB = \frac{1}{8}$ lub
 $\cos \sphericalangle ABC = \frac{3}{4}$

Zadanie 30. (0-2)Odpowiedź: 60° , $16\sqrt{3}$

Zasady oceniania:

2 p. — podanie dwóch poprawnych odpowiedzi

1 p. — podanie jednej poprawnej odpowiedzi

Zadanie 33. (0-4) $P(x)$ — pole powierzchni całkowitej graniastoslupa x — długość krawędzi podstawy H — wysokość graniastoslupa

$$4H + 8x = 56, \text{ czyli } H = -2x + 14$$

$$P(x) = 2x^2 \cdot \sin 30^\circ + 4x(-2x + 14) = -7x^2 + 56x$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 7)$.Funkcja kwadratowa $y = -7x^2 + 56x$ osiąga największą wartość dla $x = \frac{-56}{2 \cdot (-7)} = 4$.Ponieważ $4 \in (0; 7)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 7)$ przyjmuje największą wartość dla $x = 4$. Wówczas $H = 6$, a największe pole powierzchni całkowitej to $P(4) = 112$.

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie długości krawędzi podstawy i wysokości graniastoslupa o największym polu powierzchni całkowitej oraz wyznaczenie największego pola powierzchni całkowitej graniastoslupa: $x = 4$, $H = 6$, $P = 112$ 3 p. — obliczenie długości krawędzi podstawy o największym polu powierzchni całkowitej: $x = 4$
LUB— obliczenie wysokości graniastoslupa o największym polu powierzchni całkowitej: $H = 6$ 2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni graniastoslupa od długości krawędzi podstawy i zapisanie dziedziny funkcji: $P(x) = -7x^2 + 56x$, $x \in (0; 7)$
LUB— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni graniastoslupa od wysokości graniastoslupa i zapisanie dziedziny funkcji: $P(H) = -\frac{7}{4}H^2 + 21H + 49$, $H \in (0; 14)$ 1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni graniastoslupa od długości krawędzi podstawy: $P(x) = -7x^2 + 56x$
LUB— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni graniastoslupa od wysokości graniastoslupa: $P(H) = -\frac{7}{4}H^2 + 21H + 49$
LUB— wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 7)$ lub $H \in (0; 14)$ **Arkusz egzaminacyjny nr 4****Zadanie 6. (0-2)**

$$a = 4n + 1, b = 4n + 2, c = 4n + 3, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}$$

$$(a + b + c)^2 = (12n + 6)^2 = 36(4n^2 + 4n + 1)$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ wartość wyrażenia $4n^2 + 4n + 1$ jest liczbą naturalną, czyli liczba $36(4n^2 + 4n + 1)$ jest podzielna przez 36.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — zapisanie liczby $(a + b + c)^2$ w postaci $144n^2 + 144n + 36$

Zadanie 14. (0-1)Odpowiedź: $y = \frac{1}{20}x$

Zasady oceniania:

1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 19. (0-3)

$$a_3 - a_2 = 60 \text{ i } a_1 = 3$$

Z równania $3q^2 - 3q - 60 = 0$ wynika, że $q = 5$ lub $q = -4$ ($q = -4$ nie spełnia warunków zadania, bo ciąg (a_n) jest rosnący).Wzór ogólny ciągu (a_n) to $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$.

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wzoru ogólnego ciągu a_n : $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ 2 p. — rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą q : $q = 5$ lub $q = -4$ 1 p. — zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą q : np. $3q^2 - 3q = 60$ **Zadanie 23. (0-2)**Z twierdzenia cosinusów: $\cos \sphericalangle ABC = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7}$.Z jedynki trygonometrycznej: $\sin \sphericalangle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$. h — wysokość trójkąta ABC poprowadzoną na bok BC Kąt ABC jest ostry, ponieważ $\cos \sphericalangle ABC > 0$.

$$\sin \sphericalangle ABC = \frac{h}{|AB|}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{h}{7}, \text{ czyli } h = 2\sqrt{6}$$

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie wysokości trójkąta ABC poprowadzonej na bok BC : $h = 2\sqrt{6}$ 1 p. — obliczenie cosinusa kąta ABC lub cosinusa kąta ACB : $\cos \sphericalangle ABC = \frac{5}{7}$ lub $\cos \sphericalangle ACB = \frac{1}{5}$ **Zadanie 26. (0-2)****I sposób**Współczynnik kierunkowy prostej AB jest równy $a = \frac{1-3}{4+2} = -\frac{1}{3}$, a więc symetralna odcinka AB ma równanie $l: y = 3x + b$. Do prostej l należy punkt $S = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1, 2)$.Zatem $2 = 3 \cdot 1 + b$, a wobec tego $b = -1$.Rozwiązujemy układ równań, w celu wyznaczenia współrzędnych punktu P :

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 7 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = 3 \\ y = 8 \end{cases}, \text{ czyli } P = (3, 8)$$

II sposób

$$P = \left(x, \frac{1}{3}x + 7\right)$$

$$\text{Zatem } |AP| = \sqrt{\frac{10}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 20} \text{ i } |BP| = \sqrt{\frac{10}{9}x^2 - 4x + 52}.$$

Z równości $|AP| = |BP|$ otrzymujemy równanie: $\frac{10}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 20 = \frac{10}{9}x^2 - 4x + 52$, z którego wynika, że $x = 3$.Druga współrzędna punktu P to $y = \frac{1}{3} \cdot 3 + 7 = 8$.

Zasady oceniania:

2 p. – wyznaczenie współrzędnych punktu P : $P = (3, 8)$

1 p. – (I sposób) wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB : $y = 3x - 1$

LUB

– (II sposób) zapisanie długości odcinków AP i BP w zależności od pierwszej współrzędnej

punktu P : $|AP| = \sqrt{\frac{10}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 20}$ i $|BP| = \sqrt{\frac{10}{9}x^2 - 4x + 52}$

Zadanie 30. (0–3)

Ze wzoru na przekątną kwadratu:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{6}, \text{ czyli } a = 8$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = (4\sqrt{6})^2 - 8^2 = 32, \text{ czyli } H = 4\sqrt{2}$$

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa to:

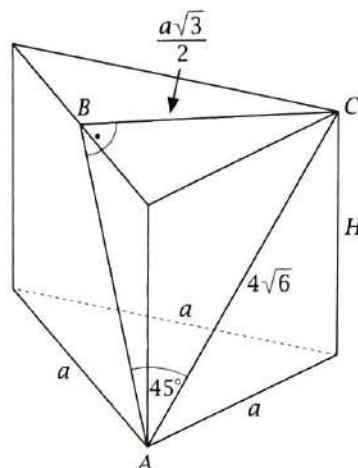
$$6a + 3H = 48 + 12\sqrt{2}$$

Zasady oceniania:

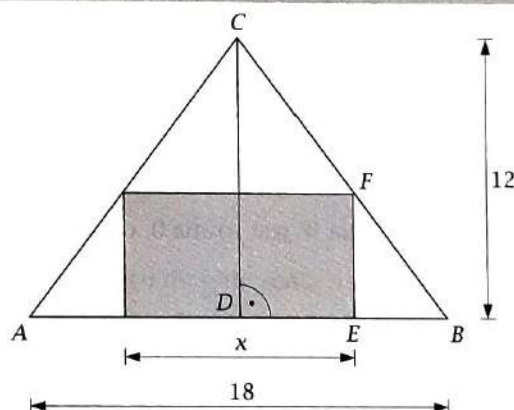
3 p. – obliczenie sumy długości wszystkich krawędzi graniastosłupa: $48 + 12\sqrt{2}$

2 p. – obliczenie długości krawędzi podstawy: $a = 8$

1 p. – wskazanie trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC (zobacz rysunek) i stwierdzenie, że jego przeciwprostokątna ma długość $4\sqrt{6}$, a długość przyprostokątnych można opisać wyrażeniem $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Zadanie 33. (0–4)



P – pole prostokąta

x – długość boku prostokąta zawartego w podstawie AB trójkąta

z – długość boku prostokąta prostopadłego do podstawy AB trójkąta

Z podobieństwa trójkątów DBC i EBF (cecha kkk) wynika: $\frac{x}{18} = \frac{12-z}{12}$, stąd $z = 12 - \frac{2}{3}x$.

$$P(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 12x$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 18)$.

Funkcja kwadratowa $y = -\frac{2}{3}x^2 + 12x$ osiąga największą wartość dla $x = \frac{-12}{2 \cdot (-\frac{2}{3})} = 9$.

Ponieważ $9 \in (0; 18)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 18)$ przyjmuje swoją największą wartość dla $x = 9$. Wówczas $z = 6$, a największe pole prostokąta to $P(9) = 54$.

Zasady oceniania:

- 4 p. — obliczenie długości boków prostokąta o największym polu oraz wyznaczenie największego pola prostokąta: $x = 9$, $z = 6$, $P = 54$
- 3 p. — obliczenie długości jednego z boków prostokąta o największym polu: $x = 9$ lub $z = 6$
- 2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola prostokąta w zależności od boku zawartego w podstawie AB trójkąta wraz z dziedziną: $P(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 12x$, $x \in (0; 18)$
LUB
— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola prostokąta w zależności od boku prostopadłego do podstawy AB trójkąta wraz z dziedziną: $P(z) = -\frac{3}{2}z^2 + 18z$, $z \in (0; 12)$
- 1 p. — wyznaczenie zależności między długościami boków prostokąta: $z = 12 - \frac{2}{3}x$ lub $x = 18 - \frac{3}{2}z$
LUB
— wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 18)$ lub $z \in (0; 12)$

Arkusz egzaminacyjny nr 5**Zadanie 14. (0-2)**

$$S_{20} = 50 \text{ i } a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 40$$

Zatem rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{2a_1+19r}{2} \cdot 20 = 50 \\ 5a_1 + 20r = 40 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} a_1 = 12 \\ r = -1 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

- 2 p. — obliczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu (a_n) : $a_1 = 12$ i $r = -1$
- 1 p. — zapisanie układu równań prowadzącego do obliczenia pierwszego wyrazu i różnicy ciągu (a_n)

Zadanie 19. (0-2)

$$W = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

Zatem:

$$W = \frac{\sin^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} + 1 = -\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Dla każdego kąta ostrego α wartość wyrażenia W jest równa 0, czyli nie zależy ona od miary tego kąta.

Zasady oceniania:

- 2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu
- 1 p. — doprowadzenie wyrażenia W do postaci, w której występują tylko wyrażenia $\sin^2 \alpha$ i $\cos^2 \alpha$

Zadanie 23. (0-2)

Z podobieństwa trójkątów ABP i DCP (cecha kkk) wynika:

$$\frac{h}{2} = \frac{6}{4}, \text{ stąd } h = 3$$

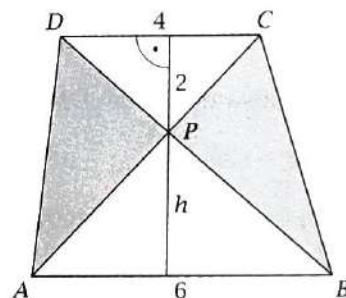
$$P_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$

$$P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (2 + 3) = 15$$

$$P_{\triangle APD} = P_{\triangle BPC} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABP} = 6$$

Zasady oceniania:

- 2 p. — obliczenie pól trójkątów APD i BPC : $P_{\triangle APD} = P_{\triangle BPC} = 6$
- 1 p. — obliczenie wysokości trójkąta ABP poprowadzonej na bok AB : $h = 3$



Zadanie 29. (0-3)

H – wysokość graniastosłupa

d – długość krótszej przekątnej równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa

α – kąt ostry równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa

P_c – pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$\sin 60^\circ = \frac{H}{10}, \text{ stąd } H = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{d}{10}, \text{ stąd } d = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

Z twierdzenia cosinusów wynika:

$$\cos \alpha = \frac{(4\sqrt{2})^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 45^\circ$$

Zatem:

$$P_c = 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \sin 45^\circ + 2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 56 + 70\sqrt{3} + 40\sqrt{6}$$

Zasady oceniania:

3 p. – obliczenie pola powierzchni całkowitej graniastosłupa: $P_c = 56 + 70\sqrt{3} + 40\sqrt{6}$

2 p. – obliczenie wysokości graniastosłupa i cosinusa kąta ostrego równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa: $H = 5\sqrt{3}$ i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

1 p. – obliczenie wysokości graniastosłupa i długości krótszej przekątnej równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa: $H = 5\sqrt{3}$ i $d = 5$

LUB

– obliczenie cosinusa kąta ostrego równoległoboku będącego podstawą graniastosłupa: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 31. (0-3)

A – Wylosowano jedną kulę czarną z pierwszego pudełka.

B – Wylosowano jedną kulę białą z drugiego pudełka.

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{2}{n+2}, \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}$$

$$P(A) = P(B) - 0,2$$

Rozwiązujemy równanie: $\frac{1}{5} = \frac{2}{n+2} - 0,2$, z którego wynika, że $n = 3$.

Zasady oceniania:

3 p. – wyznaczenie wartości n : $n = 3$

2 p. – zapisanie równania prowadzącego do obliczenia n : $\frac{1}{5} = \frac{2}{n+2} - 0,2$

1 p. – wyznaczenie prawdopodobieństw zdarzeń A i B: $P(A) = \frac{1}{5}$, i $P(B) = \frac{2}{n+2}$

Zadanie 32. (0-1)

Odpowiedź: $a = 7$ i $b = 4$

Zasady oceniania:

1 p. – podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 33. (0-4)

I sposób

$P(x)$ – pole trójkąta KLM

Trójkąty KBL, MLC i AKM są przystające (cecha bkb).

$$P_{\Delta KBL} = P_{\Delta MLC} = P_{\Delta AKM} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (8-x) \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} (8x - x^2)$$

$$P_{\Delta ABC} = 16\sqrt{3}, \text{ czyli } P(x) = 16\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4}(8x - x^2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 8)$.

Funkcja kwadratowa $y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}$ osiąga najmniejszą wartość dla $x = \frac{6\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}} = 4$.

Ponieważ $4 \in (0; 8)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 8)$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $x = 4$. Wówczas najmniejsze pole trójkąta to $P(4) = 4\sqrt{3}$.

II sposób

$P(x)$ — pole trójkąta KLM

Trójkąty KBL , MLC i AKM są przystające (cecha bkb), więc trójkąt KLM jest równoboczny.

a — długość boku trójkąta KLM

Z twierdzenie cosinusów wynika:

$$a^2 = x^2 + (8-x)^2 - 2x \cdot (8-x) \cdot \cos 60^\circ, \text{ czyli } a^2 = 3x^2 - 24x + 64$$

$$\text{Zatem } P(x) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}.$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 8)$.

Funkcja kwadratowa $y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}$ osiąga najmniejszą wartość dla $x = \frac{6\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}} = 4$. Ponieważ $4 \in (0; 8)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 8)$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $x = 4$. Wówczas najmniejsze pole trójkąta to $P(4) = 4\sqrt{3}$.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie wartości x , dla której pole trójkąta KLM jest najmniejsze oraz obliczenie możliwie najmniejszego pola trójkąta KLM : $x = 4$, $P = 4\sqrt{3}$

3 p. — wyznaczenie wartości x , dla której pole trójkąta KLM jest najmniejsze: $x = 4$

2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej pole trójkąta KLM w zależności od wielkości x wraz z dziedziną $P(x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 6\sqrt{3}x + 16\sqrt{3}$ $x \in (0; 8)$

1 p. — (I sposób) wyznaczenie wzoru na pola trójkątów KBL , MLC i AKM w zależności od wielkości x :

$$P_{\Delta KBL} = P_{\Delta MLC} = P_{\Delta AKM} = \frac{\sqrt{3}}{4}(8x - x^2)$$

LUB

— (II sposób) wyznaczenie wzoru na kwadrat boku trójkąta KLM w zależności od wielkości x :

$$a^2 = 3x^2 - 24x + 64$$

LUB

— wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 8)$

Arkusz egzaminacyjny nr 6

Zadanie 3.2. (0–2)

$$a \cdot b = (1 - 4\sqrt{2}) \cdot (3 + 2\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} - 8 \cdot 2 - 12\sqrt{2} = -13 - 10\sqrt{2}$$

Skoro $a \cdot b < 0$, to:

$$|a \cdot b| = |-13 - 10\sqrt{2}| = 13 + 10\sqrt{2}$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie wartości bezwzględnej iloczynu liczb a i b : $13 + 10\sqrt{2}$

1 p. — obliczenie iloczynu a i b : $-13 - 10\sqrt{2}$

LUB

— zapisanie wartości bezwzględnej iloczynu liczb a i b w postaci $(4\sqrt{2} - 1)(3 + 2\sqrt{2})$

Zadanie 6. (0-2)

$$W(x) = -9x^3 + 18x^2 + x - 2 = -9x^2(x-2) + 1(x-2) = (-9x^2 + 1)(x-2) = (1-3x)(1+3x)(x-2)$$

Zasady oceniania:

2 p. — zapisanie wielomianu $W(x)$ w postaci iloczynu trzech czynników liniowych: $(1-3x)(1+3x)(x-2)$

1 p. — zapisanie wielomianu $W(x)$ w postaci iloczynu dwóch czynników: np. $(-9x^2 + 1)(x-2)$

Zadanie 12.2. (0-2)

Współczynniki a i b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wyznaczamy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 9 = -3a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases}, \text{ z którego wynika } \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Miejsce zerowe funkcji f jest rozwiązaniem równania $-2x + 3 = 0$. Zatem $x = 1,5$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie miejsca zerowego funkcji f : $x = 1,5$

1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f : $f(x) = -2x + 3$

Zadanie 17. (0-4)

n — liczba kwadransów, podczas których ślimak pokonywał dystans

Sytuacja przedstawiona w treści zadania może być opisana za pomocą ciągu arytmetycznego (a_n) o wyrazach dodatnich w którym:

$$a_1 = 90 \text{ cm} \quad r = -1,5 \text{ cm} \quad S_n = 2257,5 \text{ cm}$$

Wykorzystujemy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i otrzymujemy równanie:

$$\frac{180 + (n-1) \cdot (-1,5)}{2} \cdot n = 2257,5, \text{ stąd } n^2 - 121n + 3010 = 0$$

Zatem $n = 35$ lub $n = 86$.

Drugie rozwiązanie należy odrzucić, ponieważ $a_{86} = 90 + 85 \cdot (-1,5) = -37,5 < 0$. Ślimak szedł więc 35 kwadransów, czyli 8 godzin i 45 minut, a wędrówkę zakończył o godzinie 13:05.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie godziny, o której ślimak zakończył wędrówkę: 13:05

3 p. — rozwiązanie równania kwadratowego $n^2 - 121n + 3010 = 0$ i odrzucenie jednego rozwiązania: $n = 86$

2 p. — zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą n w postaci ogólnej: np. $n^2 - 121n + 3010 = 0$

1 p. — podstawienie do wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego odpowiednich wartości za a_1 , r oraz S_n : np. $\frac{180 + (n-1) \cdot (-1,5)}{2} \cdot n = 2257,5$

Zadanie 22. (0-3)

Ze wzoru na pole trapezu wynika: $\frac{(a+a-20) \cdot 0,75a}{2} = 2250$,

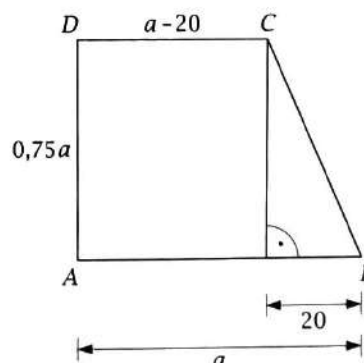
a wobec tego rozwiązujemy równanie $a^2 - 10a - 3000 = 0$.

Zatem $a = 60$ lub $a = -50$. Drugie rozwiązanie należy odrzucić, ponieważ $a \in (20; +\infty)$. Dla $a = 60$ otrzymujemy:

$$|AB| = 60 \text{ m}, |CD| = 40 \text{ m}, |AD| = 45 \text{ m}$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$|BC| = \sqrt{20^2 + 45^2} = 5\sqrt{97} \approx 49,2 \text{ m}$$



Zatem obwód trapezu (działki) jest równy:

$$|AB| + |AD| + |CD| + |BC| = 145 + 5\sqrt{97} \approx 194,2 \text{ m}$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie obwodu trapezu (działki) w przybliżeniu do części dziesiątych metra: 194,2 m

2 p. — wyznaczenie długości dłuższej podstawy trapezu: 60 m

LUB

— wyznaczenie długości krótszej podstawy trapezu: 40 m

LUB

— wyznaczenie długości dłuższego ramienia trapezu: $5\sqrt{97}$ m

LUB — wyznaczenie długości krótszego ramienia trapezu: 45 m

1 p. — zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest długość jednego z boków trapezu: np.

$$\frac{(2a-20) \cdot 0,75a}{2} = 2250$$

Zadanie 25. (0-2)

Odpowiedź: 6; 640, 800

Zasady oceniania:

2 p. — podanie dwóch poprawnych odpowiedzi

1 p. — podanie jednej poprawnej odpowiedzi

Zadanie 29. (0-2)

A — iloraz liczby x przez liczbę y jest liczbą całkowitą.

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest równa: $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$.

Zaznaczamy w tabeli zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A:

$y \backslash x$	-3	-2	1	2	3	4
-3						
-2						
1						
2						
3						
4						

Liczba wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu A jest równa $|A| = 17$.

Zatem $P(A) = \frac{17}{36}$.

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{17}{36}$

1 p. — wypisanie wszystkich wyników doświadczenia

LUB

— podanie liczby wszystkich wyników doświadczenia: $|\Omega| = 36$

LUB

— wypisanie wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu A

LUB

— podanie liczby wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 17$

Arkusz egzaminacyjny nr 7

Zadanie 5. (0-2)

$k = 4z + 3$, gdzie $z \in \mathbb{Z}$

Zatem $k^2 = 16z^2 + 24z + 9 = 8(2z^2 + 3z + 1) + 1$.

Dla $z \in \mathbb{Z}$ liczba $2z^2 + 3z + 1$ też jest liczbą całkowitą, a więc $k^2 = 8w + 1$, gdzie $w \in \mathbb{Z}$.

Zatem liczba k^2 przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1.

Zasady oceniania:

2 p. – przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. – zapisanie liczby k^2 w postaci $16z^2 + 24z + 9$

Zadanie 8.1. (0-1)

Odpowiedź: 10

Zasady oceniania:

1 p. – podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 8.2. (0-1)

$$W(x) = x(2x^2 + 5x - 3) = 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$$

Zatem pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby: 0, $\frac{1}{2}$ i -3 .

Zasady oceniania:

1 p. – wyznaczenie wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x)$: $x \in \left\{-3, 0, \frac{1}{2}\right\}$

Zadanie 11. (0-2)

Przekształcamy nierówność do postaci $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ i wyznaczamy miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 + 3x - 4$:

$$f(x) = 0 \text{ dla } x \in \{-4, 1\}$$

Na podstawie schematycznego wykresu funkcji f odczytujemy zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne:

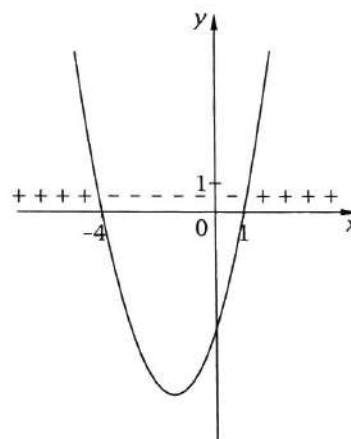
$$f(x) \geq 0 \text{ dla } x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$$

Zasady oceniania:

2 p. – wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności:

$$x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$$

1 p. – przekształcenie nierówności do postaci $f(x) \geq 0$ i wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f : $x \in \{-4, 1\}$

**Zadanie 14. (0-4)**

P – pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu

$x, 2x$ – długości krawędzi podstawy prostopadłościanu

H – wysokość prostopadłościanu

$$12x + 4H = 240, \text{ stąd } H = 60 - 3x$$

$$P(x) = -14x^2 + 360x$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 20)$.

Funkcja kwadratowa $y = -14x^2 + 360x$ osiąga największą wartość dla $x = \frac{-360}{2 \cdot (-14)} = \frac{90}{7}$.

Ponieważ $\frac{90}{7} \in (0; 20)$, więc funkcja P określona w przedziale $(0; 20)$ przyjmuje największą wartość dla $x = \frac{90}{7}$. Zatem prostopadłościan o największym polu powierzchni całkowitej ma wymiary $\frac{90}{7} \text{ cm} \times \frac{180}{7} \text{ cm} \times \frac{150}{7} \text{ cm}$, a jego pole powierzchni całkowitej to $P = \frac{16200}{7} \text{ cm}^2$.

Zasady oceniania:

- 4 p. — obliczenie wymiarów prostopadłościanu o największym polu powierzchni całkowitej oraz wyznaczenie pola powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu: $\frac{90}{7} \text{ cm} \times \frac{180}{7} \text{ cm} \times \frac{150}{7} \text{ cm}$, $P = \frac{16200}{7} \text{ cm}^2$
- 3 p. — obliczenie długości jednej z krawędzi prostopadłościanu o największym polu powierzchni całkowitej: $\frac{90}{7} \text{ cm}$ lub $\frac{180}{7} \text{ cm}$ lub $\frac{150}{7} \text{ cm}$
- 2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu od długości jednej z krawędzi podstawy wraz z dziedziną: np.: $P(x) = -14x^2 + 360x$, $x \in (0; 20)$
LUB
— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu od wysokości prostopadłościanu wraz z dziedziną: $P(H) = -\frac{14}{9}H^2 + \frac{200}{3}H + 1600$, $H \in (0; 60)$
- 1 p. — wyznaczenie zależności między długościami krawędzi prostopadłościanu: $H = 60 - 3x$ lub $x = 20 - \frac{1}{3}H$
LUB
— wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 20)$ lub $H \in (0; 60)$

Zadanie 17.2. (0-2)

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy:

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{\frac{1}{4}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8}$$

Zatem:

$$S_{16} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - (\sqrt{2})^{16}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{255(1 + \sqrt{2})}{8} \approx 77$$

Zasady oceniania:

- 2 p. — obliczenie sumy szesnastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) w zaokrągleniu do całości: $S_{16} \approx 77$
- 1 p. — zapisanie sumy szesnastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) w postaci wyrażenia z pierwiastkiem w dowolnej postaci: np. $S_{16} = \frac{255(1 + \sqrt{2})}{8}$

Zadanie 21. (0-3)

Promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie przeciwprostokątnej tego trójkąta, zatem:

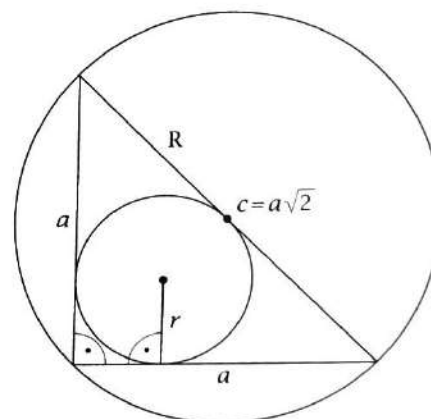
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Promień koła wpisanego w trójkąt to iloraz pola trójkąta przez połowę jego obwodu, zatem:

$$r = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}a(2 + \sqrt{2})} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$$

Stosunek pola koła opisanego do pola wpisanego w trójkąt jest więc równy:

$$\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{2}} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$$



Zasady oceniania:3 p. – wyznaczenie stosunku pól kół: $3 + 2\sqrt{2}$

2 p. – wyznaczenie pól obu kół w zależności od długości przyprostokątnych trójkąta:

$$\frac{\pi a^2}{2}, \frac{\pi a^2(3-2\sqrt{2})}{2}$$

LUB

– wyznaczenie pól obu kół w zależności od długości przeciwprostokątnej trójkąta:

$$\frac{\pi c^2}{4}, \frac{\pi c^2(3-2\sqrt{2})}{4}$$

1 p. – wyznaczenie pola koła opisanego na trójkącie w zależności od długości przyprostokątnych trójkąta: $\frac{\pi a^2}{2}$

LUB

– wyznaczenie pola koła opisanego na trójkącie w zależności od długości przeciwprostokątnej trójkąta: $\frac{\pi c^2}{4}$

LUB

– wyznaczenie pola koła wpisanego w trójkąt w zależności od długości przyprostokątnych trójkąta: $\frac{\pi a^2(3-2\sqrt{2})}{2}$

LUB

– wyznaczenie pola koła wpisanego w trójkąt w zależności od długości przeciwprostokątnej trójkąta: $\frac{\pi c^2(3-2\sqrt{2})}{4}$ **Zadanie 25. (0–2)** H – wysokość graniastosłupa

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{H}{9}, \text{ czyli } H = 9 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Zatem objętość graniastosłupa jest równa: } V = P_p \cdot H = \frac{4 \cdot 9}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 54\sqrt{3}.$$

Zasady oceniania:2 p. – wyznaczenie objętości graniastosłupa: $V = 54\sqrt{3}$ 1 p. – wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $H = 3\sqrt{3}$ **Arkusz egzaminacyjny nr 8****Zadanie 6. (0–2)**

$$2^{40} + 4^{21} + 8^{13} = 2^{39} (1 + 2 + 2^3) = 2^{39} \cdot 11 = 2^{36} \cdot 88$$

Z faktu, że 2^{36} jest liczbą naturalną wynika, że liczba $2^{36} \cdot 88$ jest podzielna przez 88.**Zasady oceniania:**

2 p. – przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. – zapisanie liczby $2^{40} + 4^{21} + 8^{13}$ w postaci iloczynu, w którym jeden czynnik jest potęgą liczby 2**Zadanie 18. (0–2)**

Odpowiedź: 9; 0 i 3

Zasady oceniania:

2 p. – podanie dwóch poprawnych odpowiedzi

1 p. – podanie jednej poprawnej odpowiedzi

Zadanie 19. (0–3)Zakładamy, że: $f(x) = ax + b$ Z warunku $f(x+2) - f(x) = 3$ wynika:

$$a(x+2) + b - ax - b = 3, \text{ czyli } a = \frac{3}{2}$$

Skoro $f(-4) = 1$, to $1 = \frac{3}{2} \cdot (-4) + b$, czyli $b = 7$.

Funkcja f określona jest więc wzorem $f(x) = \frac{3}{2}x + 7$.

Wartości funkcji f są nieujemne dla x spełniających nierówność $\frac{3}{2}x + 7 \geq 0$, stąd $x \in \left[-\frac{14}{3}; +\infty\right)$.

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f oraz zbioru argumentów, dla których $f(x) \geq 0$: $f(x) = \frac{3}{2}x + 7$,
 $x \in \left[-\frac{14}{3}; +\infty\right)$

2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f : $f(x) = \frac{3}{2}x + 7$

1 p. — obliczenie wartości współczynnika a : $a = \frac{3}{2}$

LUB

— obliczenie wartości współczynnika b : $b = 7$

Zadanie 22. (0-2)

$$a_{n+1} = (n+1)^2 - 4(n+1) + 2 = n^2 - 2n - 1$$

$$a_{n+1} - a_n = n^2 - 2n - 1 - (n^2 - 4n + 2) = 2n - 3$$

Zasady oceniania:

2 p. — zapisanie różnicy $a_{n+1} - a_n$ w postaci wyrażenia $an + b$: $a_{n+1} - a_n = 2n - 3$

1 p. — zapisanie $(n+1)$ -go wyrazu ciągu w najprostszej postaci: $a_{n+1} = n^2 - 2n - 1$

Zadanie 27. (0-2)

Łączne pole odciętych czterech wycinków kół jest równe $\frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 8 = 20$.

Zatem $\pi r^2 = 20$, czyli $r = \sqrt{\frac{20}{\pi}} \approx 2,5$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie promienia r z dokładnością do części dziesiętnych: $r \approx 2,5$

1 p. — obliczenie łącznego pola czterech odciętych wycinków kół: 20

LUB

— zapisanie równania z niewiadomą r : np. $80 - \pi r^2 = \frac{3}{4} \cdot 80$

Zadanie 29. (0-4)

I sposób

W celu wyznaczenia współrzędnych punktu A , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}, \text{ czyli } A = (2, 6)$$

Punkt C należy do prostej k , czyli $C = (x, 2x + 2)$.

$$\text{Zatem: } |AB| = \sqrt{(-4-2)^2 + (9-6)^2} = 3\sqrt{5} \quad |AC| = \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2}$$

Z równości $|AB| = |AC|$ wynika:

$$3\sqrt{5} = \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2}, \text{ a wobec tego } x^2 - 4x - 5 = 0, \text{ czyli } x \in \{-1, 5\}$$

Punkt C może więc mieć współrzędne $(-1, 0)$ lub $(5, 12)$.

II sposób (metoda wykorzystuje umiejętności z zakresu rozszerzonego)

Proste k i l są prostopadłe, ponieważ $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Długość odcinka AB jest równa odległości punktu $B = (-4, 9)$ od prostej k : $-2x + y - 2 = 0$. Zatem:

$$|AB| = \frac{|(-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 9 - 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 3\sqrt{5}$$

Długość odcinka AC jest równa odległości punktu $C = (x, 2x + 2)$ od prostej $l: x + 2y - 14 = 0$. Zatem:

$$|AC| = \frac{|x + 2(2x + 2) - 14|}{\sqrt{5}} = \frac{|5x - 10|}{\sqrt{5}}$$

Z równości $|AB| = |AC|$ wynika:

$$3\sqrt{5} = \frac{|5x - 10|}{\sqrt{5}}, \text{ a wobec tego } |5x - 10| = 15, \text{ czyli } x \in \{-1, 5\}$$

Punkt C może więc mieć współrzędne $(-1, 0)$ lub $(5, 12)$.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C = (-1, 0)$ lub $C = (5, 12)$

3 p. — zapisanie równania kwadratowego w postaci $ax^2 + bx + c = 0$, w którym niewiadomą jest jedna ze współrzędnych punktu C : np. $x^2 - 4x - 5 = 0$

LUB

— zapisanie równania z wartością bezwzględną w postaci $|ax + b| = c$, w którym niewiadomą jest jedna ze współrzędnych punktu C : np. $|5x - 10| = 15$

2 p. — wyznaczenie długości odcinka AB : $|AB| = 3\sqrt{5}$

LUB

— zapisanie długości odcinka AC w postaci wyrażenia, w którym zmienną jest jedna ze współrzędnych punktu C : np. $|AC| = \sqrt{(x - 2)^2 + (2x - 4)^2}$ lub $|AC| = \frac{|x + 2(2x + 2) - 14|}{\sqrt{5}}$

1 p. — wyznaczenie współrzędnych punktu A : $A = (2, 6)$

LUB

— wykorzystanie równania prostej k do zapisu współrzędnych punktu C : $C = (x, 2x + 2)$

LUB

— uzasadnienie, że proste k i l są prostopadłe

Zadanie 33. (0–2)

C — Wybrana para skarpet jest czarna.

NC — Wybrana para skarpet nie jest czarna.

D — Wybrana para skarpet jest dziurawa.

A — Wybrana para skarpet nie jest ani czarna, ani dziurawa.

$$|\Omega| = 20, \quad |C| = 14, \quad |NC| = 6, \quad |D| = 5$$

Zatem:

$$|C \cap D| = 2$$

$$|NC \cap D| = |D| - |C \cap D| = 5 - 2 = 3$$

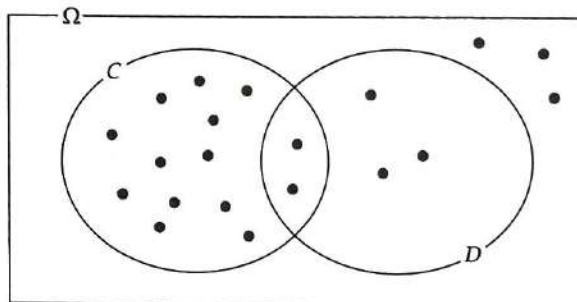
$$|A| = |NC| - |NC \cap D| = 6 - 3 = 3$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{20}$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{3}{20}$

1 p. — obliczenie liczby par skarpet, które nie są ani czarne, ani dziurawe: $|A| = 3$



Arkusz egzaminacyjny nr 9

Zadanie 14.1. (0–2)

$$\text{Odpowiedź: } s(t) = \begin{cases} 24t & \text{dla } t \in \langle 0; 1,5 \rangle \\ 0 & \text{dla } t \in \langle 1,5; 2,5 \rangle \\ 18t & \text{dla } t \in \langle 2,5; 5 \rangle \end{cases}$$

Zasady oceniania:

- 2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej drogę rowerzysty w zależności od czasu
- 1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej drogę rowerzysty przed postojem w zależności od czasu: $y = 24t$
LUB
— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej drogę rowerzysty po postoju w zależności od czasu: $y = 18t$

Zadanie 14.3. (0-1)

Odpowiedź: 81

Zasady oceniania:

- 1 p. — podanie poprawnej odpowiedzi

Zadanie 16. (0-4)

Skoro $S_{10} = 170$, to $2a_1 + 9r = 34$, czyli $a_1 = 17 - \frac{9}{2}r$.

Zatem: $b_1 = a_3 = 17 - \frac{5}{2}r$, $b_2 = a_4 = 17 - \frac{3}{2}r$, $b_3 = a_8 = 17 + \frac{5}{2}r$.

Ciąg (b_n) jest geometryczny, więc:

$$\left(17 - \frac{3}{2}r\right)^2 = \left(17 - \frac{5}{2}r\right)\left(17 + \frac{5}{2}r\right), \text{ stąd } r(r-6) = 0, \text{ czyli } r \in \{0, 6\}$$

Dla $r = 0$ otrzymujemy: $a_1 = b_1 = b_2 = b_3 = 17$, czyli $q = \frac{b_2}{b_1} = 1$.

Dla $r = 6$ otrzymujemy: $a_1 = -10$, $b_1 = 2$, $b_2 = 8$, $b_3 = 32$, czyli $q = \frac{b_2}{b_1} = 4$.

Zasady oceniania:

- 4 p. — wyznaczenie ilorazu ciągu (b_n) : $q \in \{1, 4\}$
- 3 p. — wyznaczenie a_1 : $a_1 \in \{-10, 17\}$
LUB
— wyznaczenie r : $r \in \{0, 6\}$
- 2 p. — zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą a_1 lub r :
np. $\left(17 - \frac{3}{2}r\right)^2 = \left(17 - \frac{5}{2}r\right)\left(17 + \frac{5}{2}r\right)$
- 1 p. — zapisanie w dowolnej postaci równania z niewiadomymi a_1 i r , wynikającego z podanej sumy ciągu (a_n) : np. $2a_1 + 9r = 34$
LUB
— zapisanie w dowolnej postaci równania z niewiadomymi a_1 i r , wynikającego z faktu, że ciąg (b_n) jest geometryczny: np. $5r^2 + 3a_1r = 0$

Zadanie 19. (0-3)

x — wysokość drzewa (w metrach)

y — długość cienia drzewa podczas pierwszego pomiaru (w metrach)

Z trójkąta prostokątnego BCD wynika: $y = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

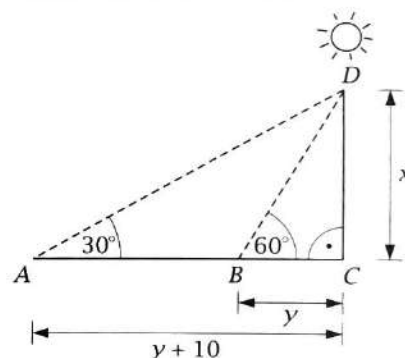
Z trójkąta prostokątnego ACD wynika: $y = x\sqrt{3} - 10$.

Zatem:

$$\frac{x\sqrt{3}}{3} = x\sqrt{3} - 10, \text{ czyli } x = 5\sqrt{3} \approx 8,7 \text{ m}$$

Zasady oceniania:

- 3 p. — obliczenie wysokości drzewa z dokładnością do części dziesiętnych metra: około 8,7 m
- 2 p. — zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest wysokość drzewa lub długość jego cienia: np. $\frac{x\sqrt{3}}{3} = x\sqrt{3} - 10$ lub $3y = y + 10$
- 1 p. — zapisanie jednej zależności między wysokością drzewa, a długością jego cienia: np. $y = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ lub $y = x\sqrt{3} - 10$



Zadanie 22. (0-3)

Jeżeli $|AD| = |CD| = x$, to:

$$|AB| = |BC| = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Zatem:

$$|AD| + |CD| + |AC| = 2x + x\sqrt{3}$$

Zatem:

$$x\sqrt{3} + 2x = 18 + 12\sqrt{3}, \text{ stąd } x = 6\sqrt{3}$$

Pole trójkąta ACD jest więc równe:

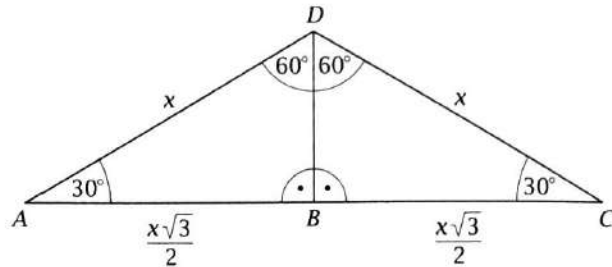
$$P = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 108 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie pola trójkąta ACD : $P = 27\sqrt{3}$

2 p. — obliczenie długości jednego z boków trójkąta ACD : $|AD| = 6\sqrt{3}$ lub $|AC| = 18$

1 p. — zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest długość boku trójkąta ACD :
np. $x\sqrt{3} + 2x = 18 + 12\sqrt{3}$



Zadanie 26. (0-2)

Obliczamy objętość prostopadłościanu, który zostanie wypełniony ziemią:

$$V = 50 \cdot 50 \cdot 55 = 137\,500 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Masa ziemi, która zmieści się do donicy to:

$$137\,500 \cdot 0,4 = 55\,000 \text{ [g]} = 55 \text{ [kg]}$$

Skoro $55 : 10 = 5,5$, zatem trzeba zakupić co najmniej 6 pełnych worków ziemi.

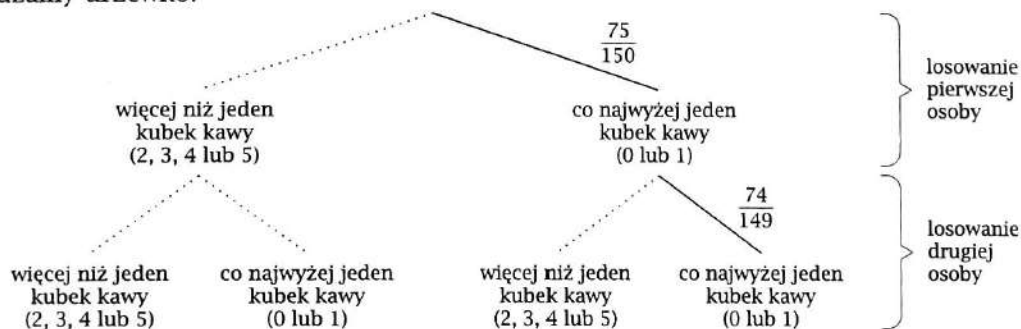
Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie liczby worków ziemi: co najmniej 6 pełnych worków

1 p. — obliczenie objętości prostopadłościanu, który zostanie wypełniony ziemią: $V = 137\,500 \text{ cm}^3$

Zadanie 29.2. (0-2)

Sporządzamy drzewko:



A — Wylosowano dwie osoby, które w dniu poprzedzającym ankietę wypili co najwyżej jeden kubek kawy.

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{75}{150} \cdot \frac{74}{149} = \frac{37}{149}.$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{37}{149}$

1 p. — sporządzenie drzewka z zaznaczonymi istotnymi gałęziami i odpowiadającymi im prawdopodobieństwami.

LUB

— obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 2775$

— obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 11\,175$

Arkusz egzaminacyjny nr 10

Zadanie 11. (0-2)

Rozwiązujemy alternatywę dwóch nierówności:

$$x + \frac{1}{6} \leq -\frac{11}{6} \quad \text{lub} \quad x + \frac{1}{6} \geq \frac{11}{6}, \quad \text{czyli } x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$$

Do zbioru $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$ nie należą trzy liczby całkowite, a są to: $-1, 0, 1$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną i wskazanie wszystkich liczb całkowitych, które nie należą do tego zbioru: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right); \{-1, 0, 1\}$

1 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$

Zadanie 15. (0-2)

Prosta $x = 3$ przechodzi przez jej wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f , a więc:

$$\frac{b}{4} = 3, \quad \text{czyli } b = 12.$$

Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = -2x^2 + 12x - 1$ są liczby: $x_1 = \frac{6 - \sqrt{34}}{2}, x_2 = \frac{6 + \sqrt{34}}{2}$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f : $x_1 = \frac{6 - \sqrt{34}}{2}, x_2 = \frac{6 + \sqrt{34}}{2}$

1 p. — wyznaczenie współczynnika b we wzorze funkcji f : $b = 12$

Zadanie 21. (0-1)

$$(\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha + 1)(1 - \sin \alpha) = (\sin \alpha + 1)(1 - \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

Zasady oceniania:

1 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

Zadanie 25. (0-3)

$$|AO| = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \text{ [km]} \quad |AK| = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{ [km]}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta OAK wynika:

$$|OK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos 120^\circ = \frac{37}{36}$$

$$\text{Zatem } |OK| = \frac{\sqrt{37}}{6} \text{ km} \approx 1 \text{ km.}$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie odległości między punktem O a punktem K z dokładnością do części dziesiątych kilometra: około 1 km

2 p. — obliczenie kwadratu długości odcinka OK : $|OK|^2 = \frac{37}{36}$

1 p. — obliczenie długości odcinków AO i AK : $|AO| = \frac{2}{3} \text{ km}, |AK| = \frac{1}{2} \text{ km}$

Zadanie 28. (0-4)

$$l: y = a_l x + b_l, \quad \text{gdzie } a_l = \frac{9-3}{-1-2} = -2$$

Punkt $B = (2, 3)$ należy do prostej l , więc $3 = (-2) \cdot 2 + b_l$, stąd $b_l = 7$.

Zatem prosta l ma równanie $y = -2x + 7$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = -x + 1 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = 6 \\ y = -5 \end{cases}, \text{ czyli } P = (6, -5)$$

Długość odcinka AP jest równa: $|AP| = \sqrt{(-1-6)^2 + (9+5)^2} = 7\sqrt{5}$.

Symetralna odcinka BP , którą opisujemy równaniem $y = ax + b$ przechodzi przez środek odcinka BP , czyli punkt $S = \left(\frac{2+6}{2}, \frac{3-5}{2}\right) = (4, -1)$ oraz jest prostopadła do prostej l .

Zatem:

$$a = -\frac{1}{a_l} = \frac{1}{2} \text{ oraz } b = y - ax = -1 - \frac{1}{2} \cdot 4 = -3$$

Symetralna odcinka BP ma więc równanie $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Zasady oceniania:

- 4 p. — wyznaczenie długości odcinka AP oraz równania symetralnej odcinka BP : $|AP| = 7\sqrt{5}$,
 $y = \frac{1}{2}x - 3$
- 3 p. — wyznaczenie długości odcinka AP : $|AP| = 7\sqrt{5}$
 LUB
 — wyznaczenie równania symetralnej odcinka BP : $y = \frac{1}{2}x - 3$
- 2 p. — wyznaczenie współrzędnych punktu P : $P = (6, -5)$
- 1 p. — wyznaczenie równania prostej l : $y = -2x + 7$

Zadanie 30. (0–2)

H — długość krawędzi SD w ostrosłupie (wysokość ostrosłupa)

x — długość krawędzi SB w ostrosłupie (najdłuższa krawędź boczna ostrosłupa)

$$\frac{1}{3} \cdot 32 \cdot H = \frac{160}{3}, \text{ czyli } H = 5$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD wynika:

$$|DB| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBS wynika:

$$x = \sqrt{5^2 + (4\sqrt{5})^2} = \sqrt{105}$$

Zasady oceniania:

- 2 p. — wyznaczenie długości krawędzi SB : $|SB| = \sqrt{105}$
- 1 p. — wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $H = 5$
 LUB
 — wyznaczenie wysokości ostrosłupa w zależności od długości krawędzi SB : $H = \sqrt{x^2 - 80}$

Zadanie 33. (0–3)

Mediana zestawu danych przedstawionych w tabeli jest równa 4, a więc 6 uczniów klasy 4A uzyskało ocenę wyższą niż mediana.

Ocena	2	3	4	5	6
Liczba ocen	3	7	9	5	1

A — Wybranie dwóch uczniów klasy 4A z ocenami wyższymi niż 4.

$$|\Omega| = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

$$|A| = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{20}.$$

Zasady oceniania:

- 3 p. — wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{1}{20}$
- 2 p. — wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|\Omega| = 300$, $|A| = 15$
LUB
— sporządzenie drzewka z zaznaczonymi istotnymi gałęziami i odpowiadającymi im prawdopodobieństwami
- 1 p. — wyznaczenie liczby uczniów z oceną wyższą niż mediana: 6
LUB
— wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 300$

SCHEMATY ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

(zakres rozszerzony)

Arkusz egzaminacyjny nr 11

Zadanie 1. (0–3)

$$a = \left(\frac{9^{-18} + 9^{-16}}{82} \right)^{\frac{1}{9}} = \left(\frac{9^{-18} \cdot (1 + 9^2)}{82} \right)^{\frac{1}{9}} = (9^{-18})^{\frac{1}{9}} = 9^{-2}$$

$$b = \log_9 64 - \log_{27} 64 = \log_9 64 - \frac{\log_9 64}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \log_9 64 = \log_9 64^{\frac{1}{3}} = \log_9 4$$

$$a^b = 9^{-2 \log_9 4} = 9^{\log_9 \frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wartości potęgi a^b : $\frac{1}{16}$

2 p. — zapisanie liczby a w postaci potęgi i liczby b w postaci logarytmu: np. $a = 9^{-2}$ i $b = \log_9 4$

1 p. — zapisanie liczby a w postaci potęgi: np. $a = 9^{-2}$

LUB

— zapisanie liczby b w postaci logarytmu: np. $b = \log_9 4$

Zadanie 2. (0–4)

Z nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ wynika:

$$\begin{cases} x < -2 \\ -2x - 4 - x + 1 \leq 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ 2x + 4 - x + 1 \leq 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x + 4 + x - 1 \leq 12 \end{cases}$$

Rozwiązujemy każdy układ nierówności:

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \geq -5 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ x \leq 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases}, \quad \text{czyli: } x \in \langle -5; -2 \rangle \cup \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$$

Zatem $x \in \langle -5; 3 \rangle$.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$: $x \in \langle -5; 3 \rangle$

3 p. — rozwiązanie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ w każdym z przedziałów $(-\infty; -2)$, $\langle -2; 1 \rangle$, $\langle 1; +\infty \rangle$: $x \in \langle -5; -2 \rangle$, $x \in \langle -2; 1 \rangle$, $x \in \langle 1; 3 \rangle$

2 p. — rozwiązanie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ w dwóch spośród trzech przedziałów $(-\infty; -2)$, $\langle -2; 1 \rangle$, $\langle 1; +\infty \rangle$

LUB

— przekształcenie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ do postaci:

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \geq -5 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ x \leq 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

1 p. — rozwiązanie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ w jednym z przedziałów $(-\infty; -2)$, $\langle -2; 1 \rangle$, $\langle 1; +\infty \rangle$

LUB

— przekształcenie nierówności $|2x + 4| + |x - 1| \leq 12$ do postaci alternatywy trzech układów nierówności:

$$\begin{cases} x < -2 \\ -2x - 4 - x + 1 \leq 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ 2x + 4 - x + 1 \leq 12 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x + 4 + x - 1 \leq 12 \end{cases}$$

Zadanie 3. (0–5)

Ustalamy warunki, jakie powinien spełniać parametr m :

$$\begin{cases} a \neq 0 & (1) \\ \Delta > 0 & (2) \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 & (3) \end{cases}$$

Z warunków (1) i (2) otrzymujemy:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ 12m^2 - 56m + 60 > 0 \end{cases} \quad \text{stad} \quad \begin{cases} m \neq 1 \\ m \in (-\infty; \frac{5}{3}) \cup (3; +\infty) \end{cases}$$

Z warunku (3) otrzymujemy:

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0, \quad \text{stad} \quad \frac{6-2m}{m-1} < 0, \quad \text{czyli} \quad m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$$

Podsumowanie:

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ m \in (-\infty; \frac{5}{3}) \cup (3; +\infty), \quad \text{czyli} \quad m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \end{cases}$$

Zasady oceniania:

- 5 p. – wyznaczenie zbioru, do którego należą wartości parametru m : $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$
- 4 p. – rozpatrzenie wszystkich warunków, które musi spełniać parametr m : $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \in (-\infty; \frac{5}{3}) \cup (3; +\infty) \\ m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \end{cases}$
- 3 p. – ustalenie warunków, jakie powinien spełniać parametr m oraz rozpatrzenie warunku (3)
LUB
– rozpatrzenie warunków (1) i (2) oraz przekształcenie warunku (3) do postaci, w której można zastosować wzory Viète'a
- 2 p. – rozpatrzenie warunku (3): $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$
LUB
– ustalenie warunków, jakie powinien spełniać parametr m i rozpatrzenie warunków (1) i (2)
LUB
– ustalenie warunków, jakie powinien spełniać parametr m oraz przekształcenie warunku (3) do postaci, w której można zastosować wzory Viète'a
- 1 p. – ustalenie warunków, jakie powinien spełniać parametr m
LUB
– rozpatrzenie warunków (1) i (2): $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \in (-\infty; \frac{5}{3}) \cup (3; +\infty) \end{cases}$
LUB
– przekształcenie warunku (3) do postaci, w której można zastosować wzory Viète'a:
np. $x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$

Zadanie 4. (0-2)

Argumenty funkcji f spełniają warunki:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 & (1) \\ (x-1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Z warunku (1) wynika: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Z warunku (2) wynika: $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$.

Podsumowanie:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle \end{cases}$$

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór: $(-\infty; -4) \cup \langle -2; -1 \rangle \cup (-1; 1) \cup \langle 2; +\infty \rangle$.

Zasady oceniania:

- 2 p. – wyznaczenie dziedziny funkcji f : $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; -1 \rangle \cup (-1; 1) \cup \langle 2; +\infty \rangle$
- 1 p. – zapisanie warunków, jakie spełniają argumenty funkcji f : $x^2 - 1 \neq 0$ i $(x-1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) \geq 0$
LUB
– wyznaczenie rozwiązań nierówności $(x-1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) \geq 0$:
 $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$

Zadanie 5. (0-4)

Rozwiązujemy układ równań, przy założeniu $q \in (0; 1)$:

$$\begin{cases} a_1(1+q) = 6 \\ \frac{a_1}{1-q} = 8 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{1}{2} \in (0; 1) \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 12 \\ q = -\frac{1}{2} \notin (0; 1) \end{cases}$$

Skoro $S_n = 4 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, więc rozwiązujemy nierówność:

$$\left| -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \right| < \frac{1}{512}, \text{ a wobec tego } \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^{12}, \text{ czyli } n > 12$$

Najmniejsza liczba naturalna spełniająca podaną nierówność to 13.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie najmniejszej liczby naturalnej spełniającej nierówność: 13

3 p. — zapisanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) : $S_n = 8 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

2 p. — wyznaczenie a_1 i q z uwzględnieniem monotoniczności ciągu (a_n) : $a_1 = 4, q = \frac{1}{2}$

1 p. — ustalenie warunków, jakie spełniają a_1 i q : $a_1(1+q) = 6, \frac{a_1}{1-q} = 8$

Zadanie 6. (0-3)

$$4 \cos 4x \cos x = 2 \cos 5x + \sqrt{3} \text{ i } x \in \langle -\pi; \pi \rangle$$

$$4 \cos 4x \cos x = 2 \cos 4x \cos x - 2 \sin 4x \sin x + \sqrt{3}$$

$$2 \cos 4x \cos x + 2 \sin 4x \sin x = \sqrt{3}$$

$$2 \cos(4x - x) = \sqrt{3}$$

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \text{ lub } x = -\frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Skoro } x \in \langle -\pi; \pi \rangle, \text{ to } x \in \left\{ -\frac{13}{18}\pi, -\frac{11}{18}\pi, -\frac{1}{18}\pi, \frac{1}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi \right\}.$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie rozwiązań równania w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$:

$$x \in \left\{ -\frac{13}{18}\pi, -\frac{11}{18}\pi, -\frac{1}{18}\pi, \frac{1}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi \right\}$$

2 p. — wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania: $x \in \left\{ -\frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi, \frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

1 p. — przekształcenie równania do postaci $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 7. (0-3)

R — promień okręgu opisanego na trapezie i jednocześnie na trójkącie ABD

Jeśli na trapezie można opisać okrąg, to jest on równoramienny, czyli $|AD| = |BC|$ oraz $|AE| = |FB| = 12$.

Jeśli w ten trapez można wpisać okrąg, to:

$$|AD| + |BC| = 12 + 36, \text{ czyli } |AD| = |BC| = 24$$

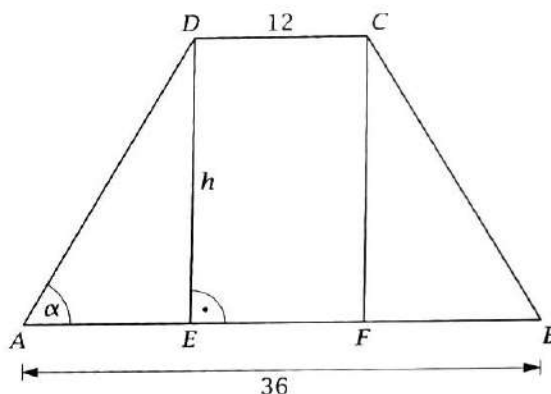
$$\cos \alpha = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{1}{2}, \text{ wobec tego } \alpha = 60^\circ, \text{ czyli } h = 12\sqrt{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika:

$$|DB| = \sqrt{(12\sqrt{3})^2 + 24^2}, \text{ czyli } |DB| = 12\sqrt{7}$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABD wynika:

$$2R = \frac{|DB|}{\sin 60^\circ} = 8\sqrt{21}$$



Zasady oceniania:

- 3 p. – obliczenie długości średnicy okręgu opisanego na trapezie: $8\sqrt{21}$
- 2 p. – obliczenie wysokości trapezu: $12\sqrt{3}$
- 1 p. – obliczenie długości ramion trapezu: 24

Zadanie 8. (0–4)

Rozwiązujemy układ równań, którego rozwiązaniem są współrzędne punktu przecięcia prostych:

$$\begin{cases} x + my - m - 2 = 0 \\ mx + y - m = 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = \frac{m-2}{m-1} \\ y = \frac{m}{m-1} \end{cases}, \text{ gdzie } m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Jeżeli $x \cdot y \geq 0$, to $\frac{m(m-2)}{(m-1)^2} \geq 0$ i $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Zatem $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Zasady oceniania:

- 4 p. – wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których $x \cdot y \geq 0$:
 $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; +\infty)$
- 3 p. – zapisanie warunku $x \cdot y \geq 0$ w postaci nierówności $\frac{m(m-2)}{(m-1)^2} \geq 0$ wraz z założeniem:
 $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- 2 p. – wyznaczenie x i y w zależności od parametru m wraz z założeniem:
 $\begin{cases} x = \frac{m-2}{m-1} \\ y = \frac{m}{m-1} \end{cases}, \text{ gdzie } m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- 1 p. – zapisanie równania z parametrem m i niewiadomą x : np. $x(m^2 - 1) = m^2 - m - 2$
LUB
– zapisanie równania z parametrem m i niewiadomą y : np. $y(m^2 - 1) = m^2 + m$

Zadanie 9. (0–4)

B, D – punkty przecięcia okręgu z osią x układu współrzędnych

A, C – punkty przecięcia okręgu z prostą $y = x + 1$

P – pole czworokąta $ABCD$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 17 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

Zatem $D = (-3, 0)$, $B = (5, 0)$.

Rozwiązujemy układ równań:

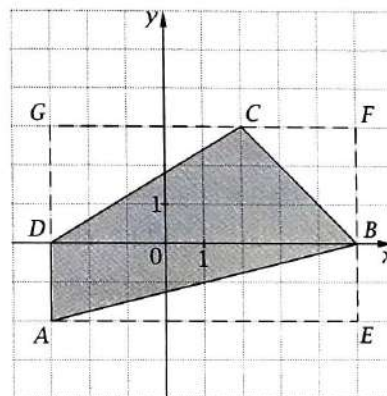
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 17 \\ y = x + 1 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Zatem $C = (2, 3)$, $A = (-3, -2)$.

$$P = P_{\square A E F G} - (P_{\triangle A E B} + P_{\triangle B F C} + P_{\triangle D C G}) = 40 - (8 + 4,5 + 7,5) = 20$$

Zasady oceniania:

- 4 p. – obliczenie pola czworokąta $ABCD$: $P = 20$
- 3 p. – wyznaczenie współrzędnych wierzchołków czworokąta $ABCD$: $(-3, 0)$, $(5, 0)$, $(2, 3)$, $(-3, -2)$
- 2 p. – wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia okręgu z prostą $y = x + 1$: $(2, 3)$, $(-3, -2)$
LUB
– wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia okręgu z osią x układu współrzędnych i zapisanie równania kwadratowego, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna punktu przecięcia tego okręgu z prostą $y = x + 1$: $(-3, 0)$, $(5, 0)$ oraz $x^2 + x - 6 = 0$



LUB

- wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia okręgu z osią x układu współrzędnych i zapisanie równania kwadratowego, w którym niewiadomą jest druga współrzędna punktu przecięcia tego okręgu z prostą $y = x + 1$: $(-3, 0)$, $(5, 0)$ oraz $y^2 - y - 6 = 0$

- 1 p. – wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia okręgu z osią x układu współrzędnych: $(-3, 0)$, $(5, 0)$

LUB

- zapisanie równania kwadratowego, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna punktu przecięcia okręgu z prostą $y = x + 1$: $x^2 + x - 6 = 0$

LUB

- zapisanie równania kwadratowego, w którym niewiadomą jest druga współrzędna punktu przecięcia okręgu z prostą $y = x + 1$: $y^2 - y - 6 = 0$

Zadanie 10. (0–3)

S – punkt przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$

$$\vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AC} = [10, 5], \text{ czyli } |AS| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\vec{SD} = \frac{1}{2}\vec{BD} = [-2, 1], \text{ czyli } |SD| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{AD} = \vec{AS} + \vec{SD} = [8, 6], \text{ czyli } |AD| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ASD wynika:

$$\cos \sphericalangle ASD = \frac{(\sqrt{5})^2 + (5\sqrt{5})^2 - 10^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

Zasady oceniania:

- 3 p. – obliczenie cosinusa kąta ASD : $\cos \sphericalangle ASD = \frac{3}{5}$

- 2 p. – obliczenie długości odcinków AS , SD i AD : $|AS| = 5\sqrt{5}$, $|SD| = \sqrt{5}$, $|AD| = 10$

- 1 p. – obliczenie długości odcinków AS i SD : $|AS| = 5\sqrt{5}$, $|SD| = \sqrt{5}$

LUB

- obliczenie długości odcinka AD : $|AD| = 10$

Zadanie 11. (0–4)

α – kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy

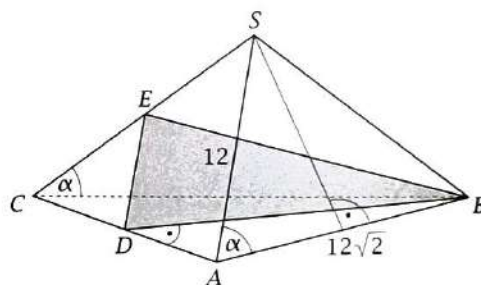
$$|DB| = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{6}$$

$$|DE| = \frac{1}{2}|AS| = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|AS|} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ stąd } \alpha = 45^\circ, \text{ więc } \sphericalangle CSB = 90^\circ$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ESB wynika:

$$|BE| = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$$



Zatem obwód trójkąta DBE jest równy: $|DE| + |BE| + |DB| = 6(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})$.

Zasady oceniania:

- 4 p. – obliczenie obwodu przekroju: $6(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})$

- 3 p. – obliczenie długości trzech boków trójkąta DBE : 6 , $6\sqrt{5}$, $6\sqrt{6}$

- 2 p. – obliczenie długości dwóch boków trójkąta DBE

- 1 p. – obliczenie długości jednego boku trójkąta DBE

Zadanie 12. (0–3)

A – Wylosowano dwie liczby, których iloczyn jest liczbą parzystą

$$|\Omega| = \binom{55}{2} = 27 \cdot 55$$

$$|A| = \binom{27}{2} + \binom{27}{1} \cdot \binom{28}{1} = 27 \cdot 41$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{41}{55}$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{41}{55}$

2 p. — wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|\Omega| = 1485$, $|A| = 1107$

1 p. — wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 1485$
LUB

— wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A : $|A| = 1107$

Zadanie 13. (0-2)

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x}{x^3 + 5x^2} = \frac{x(x+6)}{x^2(x+5)} = \frac{x+6}{x(x+5)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty$$

Skoro $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$, to granica funkcji w punkcie $x = -5$ nie istnieje.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego uzasadnienia

1 p. — obliczenie granic jednostronnych funkcji f w punkcie $x = -5$

Zadanie 14. (0-6)

r — promień podstawy walca

H — wysokość walca

V — objętość walca

$$2r + H = 12, \text{ czyli } H = 12 - 2r$$

$$V(r) = \pi(12r^2 - 2r^3)$$

Dziedzina funkcji V : $r \in (0; 6)$

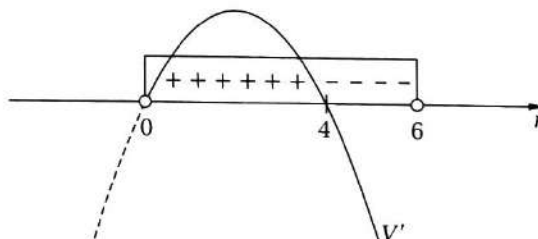
$$V'(r) = \pi(24r - 6r^2)$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ lub } r = 4$$

Funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0; 4)$, a malejąca w przedziale $(4; 6)$. Zatem funkcja V osiąga w punkcie $r = 4$ maksimum, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Wówczas $H = 4$, a największa objętość to $V(4) = 64\pi$.

maksimum
 $V(4)$



Zasady oceniania:

6 p. — obliczenie promienia podstawy i wysokości walca o największej objętości oraz wyznaczenie objętości tego walca: $r = H = 4$, $V = 64\pi$

5 p. — wyznaczenie promienia podstawy walca o największej objętości wraz z uzasadnieniem: $r = 4$
LUB

— wyznaczenie wysokości walca o największej objętości wraz z uzasadnieniem: $H = 4$

4 p. — rozwiązanie równania $V'(r) = 0$ lub równania $V'(H) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji V

3 p. — wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji V

LUB

— rozwiązanie równania $V'(r) = 0$ lub równania $V'(H) = 0$ bez uwzględniania dziedziny funkcji V

2 p. — obliczenie pochodnej funkcji V : $V'(r) = \pi(24r - 6r^2)$ lub $V'(H) = \pi\left(\frac{3}{4}H^2 - 12H + 36\right)$

1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność objętości walca od promienia podstawy:

$$V(r) = \pi(12r^2 - 2r^3)$$

LUB

— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność objętości walca od wysokości walca:

$$V(H) = \pi\left(\frac{1}{4}H^3 - 6H^2 + 36H\right)$$

LUB

— wyznaczenie dziedziny funkcji V : $r \in (0; 6)$ lub $H \in (0; 12)$

Arkusz egzaminacyjny nr 12

Zadanie 1. (0-2)

$$a = \log_4 8$$

$$b = \log_4 24$$

$$c = \log_4 48$$

Zatem:

$$a + c - b = \log_4 8 + \log_4 48 - \log_4 24 = \log_4 \left(\frac{8 \cdot 48}{24} \right) = \log_4 16 = 2$$

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie wartości liczbowej wyrażenia $a + c - b$: 2

1 p. — zapisanie liczb a , b i c w postaci logarytmu o tej samej podstawie: np. $a = \log_4 8$, $b = \log_4 24$, $c = \log_4 48$

Zadanie 2. (0-2)

Przekształcamy nierówność $x^3 - x^2y \geq xy^2 - y^3$ do postaci równoważnej:

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \geq 0$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) \geq 0$$

$$(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$(x + y)(x - y)^2 \geq 0$$

Skoro dla $x \neq y$ zachodzi: $x + y \geq 0$ oraz $(x - y)^2 > 0$, więc iloczyn liczby nieujemnej i liczby dodatniej jest liczbą nieujemną.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — przekształcenie tezy do postaci $(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$

Zadanie 3. (0-3)

$$g(-3) = \left| \log_{\frac{1}{2}} 1 \right| = 0$$

$$g(12) = \left| \log_{\frac{1}{2}} 16 \right| = 4$$

Jeżeli $x \in \langle -3; 12 \rangle$, to $g(x) \in \langle 0; 4 \rangle$.

Zasady oceniania:

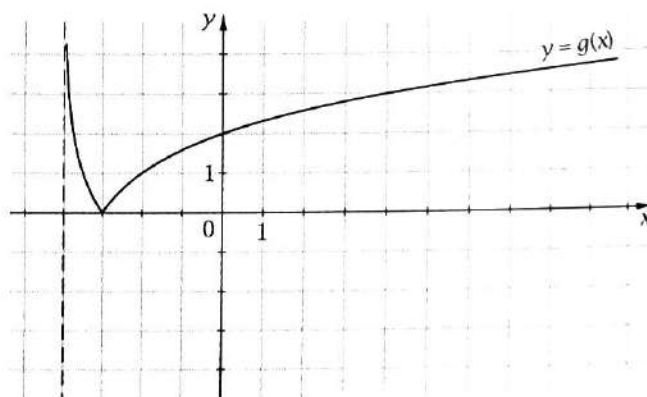
3 p. — naszkicowanie wykresu funkcji g oraz wyznaczenie zbioru wartości funkcji g dla $x \in \langle -3; 12 \rangle$: $g(x) \in \langle 0; 4 \rangle$

2 p. — naszkicowanie wykresu funkcji g

1 p. — naszkicowanie wykresu funkcji f

LUB

— wyznaczenie wartości funkcji g na końcach przedziału $\langle -3; 12 \rangle$: $g(-3) = 0$, $g(12) = 4$



Zadanie 4. (0-2)

$$S_m = S_k, \text{ czyli } \frac{2a_1 + (m-1)r}{2} \cdot m = \frac{2a_1 + (k-1)r}{2} \cdot k$$

Z poniższego równania wynika:

$$(m-k)(2a_1 + (m+k-1)r) = 0$$

Skoro $m \neq k$, więc:

$$2a_1 + (m+k-1)r = 0$$

Stąd:

$$a_{m+k} = a_1 + (m+k-1)r = -a_1$$

Zatem:

$$S_{m+k} = \frac{a_1 + a_{m+k}}{2} \cdot (m+k) = \frac{a_1 - a_1}{2} \cdot (m+k) = 0$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie sumy $(m+k)$ początkowych wyrazów ciągu (a_n) : $S_{m+k} = 0$

1 p. — zapisanie równania $2a_1 + (m+k-1)r = 0$

Zadanie 5. (0-3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = k^3 - k^2 - 4k$$

Zatem rozwiązujemy równanie:

$$k^3 - k^2 - 4k + 4 = 0, \text{ stąd } (k-1)(k-2)(k+2) = 0, \text{ czyli } k \in \{-2, 1, 2\}$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie wartości parametru k : $k \in \{-2, 1, 2\}$

2 p. — przekształcenie wielomianu $W(k) = k^3 - k^2 - 4k + 4$ do postaci iloczynowej:
np. $W(k) = (k-1)(k^2-4)$

LUB

— wyznaczenie jednego z pierwiastków wielomianu $W(x)$

1 p. — zapisanie równania z niewiadomą k : np. $k^3 - k^2 - 4k = -4$

Zadanie 6. (0-5)

a_n — długość boku n -tego trójkąta równobocznego

r_n — promień okręgu wpisanego w n -ty trójkąt równoboczny

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ i } r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n \text{ dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1$$

Promienie kolejnych okręgów tworzą nieskończony ciąg geometryczny (r_n) o ilorazie $q = \frac{1}{2}$ ($|q| < 1$).

Zatem:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots = \frac{r_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Suma długości wszystkich okręgów jest równa:

$$S = 2\pi(r_1 + r_2 + r_3 + \dots) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$$

Skoro $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$, czyli $\frac{a_{n+1}\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n\sqrt{3}}{6}$, to $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.

$a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Długości boków kolejnych trójkątów równobocznych tworzą nieskończony ciąg geometryczny o ilorazie $q' = \frac{1}{2}$ ($|q'| < 1$). Zatem:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1-q'} = 2$$

Suma obwodów wszystkich trójkątów równobocznych jest więc równa:

$$S' = 3(a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = 6$$

$$\text{Zatem } \frac{S'}{S} = \frac{6}{\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Zasady oceniania:

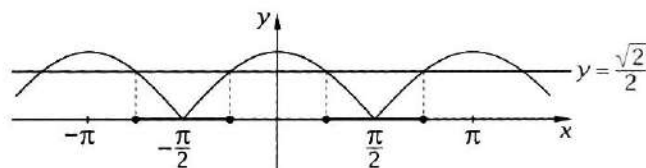
- 5 p. — wyznaczenie ilorazu sumy obwodów wszystkich trójkątów równobocznych przez sumę długości wszystkich okręgów: $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$
- 4 p. — obliczenie sumy długości wszystkich okręgów i sumy obwodów wszystkich trójkątów równobocznych: $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}, 6$
- 3 p. — obliczenie sumy długości wszystkich okręgów i ustalenie związku między długościami boków kolejnych trójkątów równobocznych: $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$
LUB
— obliczenie sumy obwodów wszystkich trójkątów równobocznych i ustalenie związku między promieniami kolejnych okręgów: $6, r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$
- 2 p. — ustalenie związku między promieniami kolejnych okręgów i długościami boków kolejnych trójkątów równobocznych: $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$ i $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$
LUB
— obliczenie sumy długości wszystkich okręgów: $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$
LUB
— obliczenie sumy obwodów wszystkich trójkątów równobocznych: 6
- 1 p. — ustalenie związku między promieniami kolejnych okręgów: $r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n$
LUB
— ustalenie związku między długościami boków kolejnych trójkątów równobocznych: $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

Zadanie 7. (0-4)

$$\frac{1}{4} - \cos x + \cos^2 x \leq -\cos x + \frac{3}{4}, \text{ czyli } \cos^2 x \leq \frac{1}{2}$$

Z nierówności $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}$ wynika, że $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Z wykresu funkcji $y = |\cos x|$ odczytujemy rozwiązania nierówności $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Zbiór rozwiązań nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych to: $x \in \left\langle \frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$.

Zasady oceniania:

- 4 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych:
np. $x \in \left\langle \frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$
- 3 p. — wyznaczenie jednego z przedziałów ze zbioru rozwiązań nierówności:
np. $x \in \left\langle \frac{1}{4}\pi; \frac{3}{4}\pi \right\rangle$
- 2 p. — zapisanie nierówności w postaci: $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 1 p. — przekształcenie nierówności do postaci, która zawiera tylko jedną funkcję trygonometryczną zmiennej x : np. $\frac{1}{4} - \cos x + \cos^2 x \leq -\cos x + \frac{3}{4}$

Zadanie 8. (0-3)

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta), \text{ a więc } \cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{Zatem: } 1 - (-\cos(\alpha + \beta)) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

$$1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta = 0$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1, \text{ gdzie } \alpha - \beta \in (-180^\circ; 180^\circ)$$

$$\text{Zatem } \alpha - \beta = 0^\circ, \text{ czyli } \alpha = \beta.$$

Zasady oceniania:

3 p. – przeprowadzenie pełnego dowodu

 2 p. – przekształcenie założenia do postaci $\cos(\alpha - \beta) = 1$

 1 p. – przekształcenie założenia do postaci, w której występują tylko kąty α i β :
 np. $1 - (-\cos(\alpha + \beta)) = 2 \cos \alpha \cos \beta$
Zadanie 9. (0–4)

$$A = (x_A, y_A)$$

$$B = (x_B, y_B)$$

 D – środek odcinka AC

$$\overrightarrow{AC} = [5 - x_A, 8 - y_A] = [9, 11], \text{ stąd } x_A = -4 \text{ i } y_A = -3$$

$$\text{Zatem } A = (-4, -3).$$

$$D = \left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-3+8}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BD}, \text{ gdzie } \overrightarrow{BS} = [3 - x_B, 2 - y_B] \text{ i } \overrightarrow{BD} = \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B \right]$$

$$[3 - x_B, 2 - y_B] = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B \right], \text{ stąd } x_B = 8 \text{ i } y_B = 1$$

$$\text{Zatem } B = (8, 1).$$

Zasady oceniania:

 4 p. – wyznaczenie współrzędnych wierzchołków A i B : $A = (-4, -3)$ i $B = (8, 1)$

 3 p. – wyznaczenie związku między współrzędnymi wektorów $\overrightarrow{BS}$ i $\overrightarrow{BD}$ uzależnionymi od x_B i y_B :
 $[3 - x_B, 2 - y_B] = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B \right]$

 2 p. – wyznaczenie współrzędnych wektorów $\overrightarrow{BS}$ i $\overrightarrow{BD}$ w zależności od x_B i y_B : $\overrightarrow{BS} = [3 - x_B, 2 - y_B]$
 i $\overrightarrow{BD} = \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B \right]$

 1 p. – wyznaczenie współrzędnych wierzchołka A : $A = (-4, -3)$

LUB

 – wyznaczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{BD}$ w zależności od x_B i y_B : $\overrightarrow{BD} = \left[\frac{1}{2} - x_B, \frac{5}{2} - y_B \right]$
Zadanie 10. (0–5)

 Czworokąt $BCKL$ jest trapezem równoramiennym.

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

 W trójkącie prostokątnym EOS zachodzi:

$$\cos \alpha = \frac{|EO|}{|ES|}, \text{ czyli } |ES| = \frac{10}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = 10\sqrt{10}$$

 W trójkącie prostokątnym EFH zachodzi:

$$\cos \alpha = \frac{|EH|}{|EF|}, \text{ czyli } |EH| = 2\sqrt{10}$$

 Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EFH wynika:

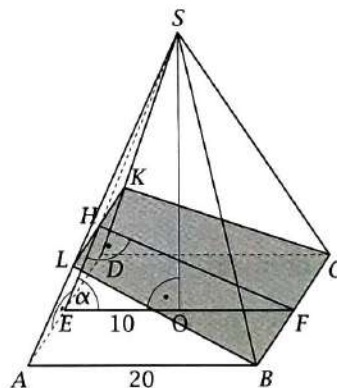
$$|HF| = \sqrt{20^2 - (2\sqrt{10})^2} = 6\sqrt{10}$$

 Z podobieństwa trójkątów LKS i ADS (cecha kkk) wynika:

$$\frac{|LK|}{|AD|} = \frac{|ES| - |EH|}{|ES|}, \text{ czyli } |LK| = 16$$

 Pole trapezu $BCKL$ jest więc równe:

$$P = \frac{|BC| + |LK|}{2} \cdot |HF| = \frac{20 + 16}{2} \cdot 6\sqrt{10} = 108\sqrt{10}$$



Zasady oceniania:5 p. — obliczenie pola przekroju: $P = 108\sqrt{10}$ 4 p. — obliczenie długości odcinków HF i LK : $|HF| = 6\sqrt{10}$ i $|LK| = 16$ 3 p. — obliczenie długości odcinków ES , EH i LK : $|ES| = 10\sqrt{10}$, $|EH| = 2\sqrt{10}$ i $|LK| = 16$

LUB

— obliczenie długości odcinków ES , EH i HF : $|ES| = 10\sqrt{10}$, $|EH| = 2\sqrt{10}$ i $|HF| = 6\sqrt{10}$ 2 p. — obliczenie długości odcinka HF : $|HF| = 6\sqrt{10}$

LUB

— obliczenie długości odcinka LK : $|LK| = 16$

LUB

— obliczenie długości odcinków ES i EH : $|ES| = 10\sqrt{10}$ i $|EH| = 2\sqrt{10}$ 1 p. — obliczenie długości odcinka ES : $|ES| = 10\sqrt{10}$

LUB

— obliczenie długości odcinka EH : $|EH| = 2\sqrt{10}$ **Zadanie 11. (0–4)**

Próba Bernoullego: jednokrotny rzut symetryczną sześcienną kostką do gry.

Liczba prób Bernoullego: $n = 12$.

Sukces w próbie Bernoullego: wypadło sześć oczek.

Prawdopodobieństwo sukcesu: $p = \frac{1}{6}$.Prawdopodobieństwo porażki: $q = \frac{5}{6}$.

Oznaczenia:

 A — W pierwszym rzucie kostką wypadło sześć oczek. B — W dwunastu rzutach kostką sześć oczek wypadło cztery razy. $A \cap B$ — W pierwszym rzucie kostką wypadło sześć oczek i w pozostałych jedenastu, sześć oczek wypadło trzy razy. $A|B$ — W pierwszym rzucie kostką wypadło sześć oczek, jeżeli wiadomo, że w dwunastu rzutach sześć oczek wypadło cztery razy.

$$P(B) = \binom{12}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 495 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \binom{11}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 = 165 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{165 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8}{495 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8} = \frac{1}{3}$$

Zasady oceniania:4 p. — obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A|B$: $P(A|B) = \frac{1}{3}$ 3 p. — wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzeń B i $A \cap B$: $P(B) = 495 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$
i $P(A \cap B) = 165 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$

LUB

— wyznaczenie liczebności zdarzeń B i $A \cap B$: $|B| = 495 \cdot 5^8$ i $|A \cap B| = 165 \cdot 5^8$ 2 p. — wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B : $P(B) = 495 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$

LUB

— wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cap B$: $P(A \cap B) = 165 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$

LUB

– wyznaczenie liczebności zdarzenia B : $|B| = 495 \cdot 5^8$

LUB

– wyznaczenie liczebności zdarzenia $A \cap B$: $|A \cap B| = 165 \cdot 5^8$

1 p. – obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu i porażki oraz wyznaczenie liczby prób w schemacie Bernoulliego: $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 12$

Zadanie 12. (0–4)

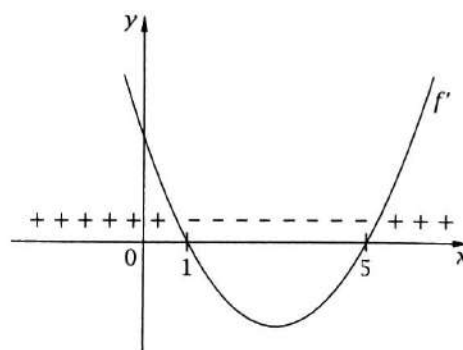
$$f'(x) = x^2 + 2(k - m - 1)x + (2m - k - 2)$$

Skoro funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty; 1)$ oraz $(5; +\infty)$ i malejąca w przedziale $(1; 5)$, to:

$$f'(x) = 0 \text{ dla } x \in \{1, 5\}$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (1; 5)$$



Ze wzorów Viète'a otrzymujemy:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(k - m - 1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - k - 2 \end{cases}, \text{ gdzie } x_1 = 1 \text{ i } x_2 = 5$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} -2(k - m - 1) = 6 \\ 2m - k - 2 = 5 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} m = 5 \\ k = 3 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

4 p. – obliczenie wartości parametrów m i k : $m = 5$ i $k = 3$

3 p. – zapisanie układu dwóch równań z niewiadomymi m i k : np. $\begin{cases} -2(k - m - 1) = 6 \\ 2m - k - 2 = 5 \end{cases}$

2 p. – obliczenie pochodnej funkcji f oraz wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f' i ustalenie znaków wartości funkcji f' w podanych przedziałach monotoniczności

1 p. – obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = x^2 + 2(k - m - 1)x + (2m - k - 2)$

LUB

– wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f' i ustalenie znaków wartości funkcji f' w podanych przedziałach monotoniczności

Zadanie 13. (0–3)

$y = ax + b$ – równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = -4$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x+2) - 3(x^2-x)}{(3x+2)^2} = \frac{3x^2+4x-2}{(3x+2)^2}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

$$a = f'(-4) = \frac{3 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 2}{(3 \cdot (-4) + 2)^2} = \frac{3}{10}$$

Do stycznej należy punkt $(-4, -2)$, więc spełnione jest równanie:

$$-2 = \frac{3}{10} \cdot (-4) + b, \text{ stąd } b = -\frac{4}{5}$$

Zatem styczna ma równanie: $y = \frac{3}{10}x - \frac{4}{5}$.

Zasady oceniania:

3 p. – wyznaczenie równania stycznej: $y = \frac{3}{10}x - \frac{4}{5}$

2 p. – wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej: $a = \frac{3}{10}$

1 p. – obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = \frac{3x^2+4x-2}{(3x+2)^2}$

Zadanie 14. (0-6)

W celu wyznaczenia współrzędnych punktów K i L rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = -5 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$$

Zatem $K = (-3, -5)$, $L = (3, -5)$.

$A = (-x, -5)$, $B = (x, -5)$, $C = (x, -x^2 + 4)$,

$D = (-x, -x^2 + 4)$, gdzie $x \in (0; 3)$

$$|AB| = |CD| = 2|x| = 2x$$

$$|BC| = |AD| = |-x^2 + 4 - (-5)| = -x^2 + 9$$

P — pole prostokąta

$$P(x) = |AB| \cdot |BC| = -2x^3 + 18x$$

Dziedzina funkcji P : $x \in (0; 3)$

$$P'(x) = -6x^2 + 18$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ lub } x = \sqrt{3}$$

Funkcja P jest rosnąca w przedziale $(0; \sqrt{3})$, a malejąca w przedziale $(\sqrt{3}; 3)$. Zatem funkcja P osiąga w punkcie $x = \sqrt{3}$ maksimum, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Wówczas $|AB| = |CD| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = |AD| = 6$, a największe pole to $P(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$.

Zasady oceniania:

6 p. — obliczenie długości boków prostokąta o największym polu oraz wyznaczenie pola tego prostokąta: $|AB| = |CD| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = |AD| = 6$, $P = 12\sqrt{3}$

5 p. — wyznaczenie punktu, w którym funkcja P osiąga wartość największą wraz z uzasadnieniem: $x = \sqrt{3}$

4 p. — rozwiązanie równania $P'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji P : $x = \sqrt{3}$

3 p. — wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji P : $x \in (0; 3)$, $P'(x) = -6x^2 + 18$
LUB

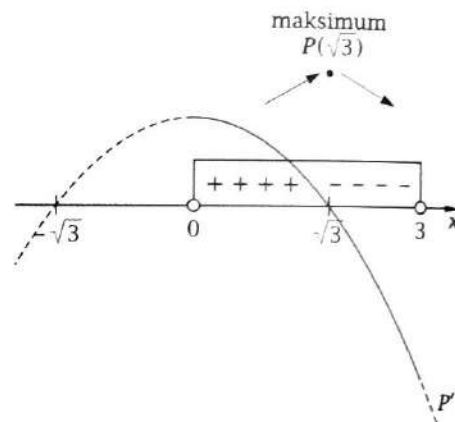
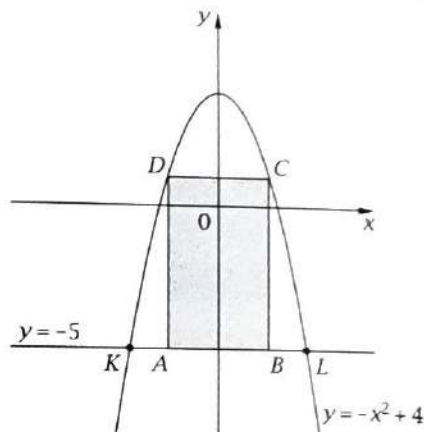
— rozwiązanie równania $P'(x) = 0$ bez uwzględniania dziedziny funkcji P

2 p. — obliczenie pochodnej funkcji P : $P'(x) = -6x^2 + 18$

1 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność pola prostokąta od współrzędnych jego wierzchołków: $P(x) = -2x^3 + 18x$

LUB

— wyznaczenie dziedziny funkcji P : $x \in (0; 3)$

**Arkusz egzaminacyjny nr 13****Zadanie 1. (0-4)**

Skoro liczba dodatnia a spełnia warunek $a^2 = a + 1$, to:

$$a^2 + a = a(a + 1) = a^3 \text{ oraz } a^3 + a^2 = a^2(a + 1) = a^4$$

Zatem:

$$x = \log_{a\sqrt{a}} a^2 = \frac{4}{3}$$

$$y = \log_{a^2+a} a = \log_{a^3} a = \frac{1}{3}$$

$$z = \log_{a^3+a^2} a^{\frac{1}{2}} = \log_{a^4} a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$z < y < x, \text{ więc } x - z = \frac{4}{3} - \frac{1}{8} = 1\frac{5}{24}$$

Zasady oceniania:

4 p. – obliczenie różnicy $x - z$: $1\frac{5}{24}$

3 p. – obliczenie wartości liczb x , y i z : $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ i $z = \frac{1}{8}$

2 p. – obliczenie wartości dwóch spośród trzech liczb x , y i z

1 p. – obliczenie wartości jednej spośród trzech liczb x , y i z

Zadanie 2. (0–4)

$$W(x) = (x+2)(x^2 + (3a^2 - a - 66)x + a^2 + a - 26) = (x+2)^3$$

Zatem:

$$3a^2 - a - 66 = 4 \quad \text{oraz} \quad a^2 + a - 26 = 4$$

Z pierwszego równania wynika, że $a \in \{-\frac{14}{3}, 5\}$, a z drugiego – $a \in \{-6, 5\}$.

Stąd $W(x) = (x+2)^3$ dla $a = 5$.

Zasady oceniania:

4 p. – wyznaczenie wartości parametru a : $a = 5$

3 p. – rozwiązywanie równań $3a^2 - a - 66 = 4$ i $a^2 + a - 26 = 4$: $a \in \{-\frac{14}{3}, 5\}$ i $a \in \{-6, 5\}$

2 p. – zapisanie równań $3a^2 - a - 66 = 4$ i $a^2 + a - 26 = 4$

1 p. – przekształcenie wielomianu $W(x)$ do postaci $W(x) = (x+2)(x^2 + (3a^2 - a - 66)x + a^2 + a - 26)$

Zadanie 3. (0–4)

Ustalamy warunki, jakie powinien spełniać parametr m :

$$\begin{cases} \Delta > 0 & (1) \\ x_1 \neq 0 \text{ i } x_2 \neq 0 & (2) \\ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} < 16 & (3) \\ m \in \mathbb{Z} & (4) \end{cases}$$

Z warunku (1) otrzymujemy:

$$4m^2 - 8 > 0, \text{ czyli } m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$$

Warunek (2) jest spełniony dla każdego $m \in \mathbb{R}$, ponieważ współczynnik $c = 2 \neq 0$.

Rozpatrujemy warunek (3):

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} < 16, \text{ stąd } \frac{(-2m)^2 - 2 \cdot 2}{2} < 16, \text{ czyli } m^2 - 9 < 0, \text{ zatem } m \in (-3; 3)$$

Podsumowanie warunków (1)–(4):

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \\ m \in \mathbb{R} \\ m \in (-3; 3) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ czyli } m \in \{-2, 2\}$$

Zasady oceniania:

4 p. – wyznaczenie zbioru, do którego należą wszystkie wartości parametru m : $m \in \{-2, 2\}$

3 p. – rozpatrzenie wszystkich warunków, które musi spełniać parametr m :

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \\ m \in \mathbb{R} \\ m \in (-3; 3) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2 p. — rozpatrzenie warunku (3): $m \in (-3; 3)$

LUB

— rozpatrzenie warunków (1) i (2) oraz przekształcenie warunku (3) do postaci umożliwiającej zastosowanie wzorów Viète'a:

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \\ m \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ i } \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} < 16$$

1 p. — rozpatrzenie warunków (1) i (2):

$$\begin{cases} m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \\ m \in \mathbb{R} \end{cases}$$

LUB

— przekształcenie warunku (3) do postaci umożliwiającej zastosowanie wzorów Viète'a:

$$\text{np. } \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} < 16$$

Zadanie 4. (0-2)

$$f(x) = ax + b$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 7 + 7a + b = 7(6a + b) \\ 5 + 5a + b = 5(6a + b) \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases}$$

Zatem funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{5}x$.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji f : $f(x) = \frac{1}{5}x$

1 p. — zapisanie układu dwóch równań z niewiadomymi a i b : np. $\begin{cases} 7 + 7a + b = 7(6a + b) \\ 5 + 5a + b = 5(6a + b) \end{cases}$

Zadanie 5. (0-3)

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} 96 = 1,5q^{n-1} \\ \frac{1-q^n}{1-q} = 127 \end{cases}$, gdzie q oznacza iloraz ciągu (a_n) .

Zatem:

$$\begin{cases} q^{n-1} = 64 \\ \frac{1-q \cdot q^{n-1}}{1-q} = 127 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^{n-1} = 64 \\ 1 - 64q = 127(1-q) \end{cases}, \text{ czyli } q = 2$$

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie ilorazu ciągu (a_n) : $q = 2$

2 p. — zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest q : np. $1 - 64q = 127(1-q)$

1 p. — zapisanie układu równań z niewiadomymi q i n : $\begin{cases} 96 = 1,5q^{n-1} \\ \frac{1-q^n}{1-q} = 127 \end{cases}$

Zadanie 6. (0-4)

Pole sześciokąta foremnego o boku n jest równe $S_n = \frac{3n^2\sqrt{3}}{2}$.

Pole sześciokąta, utworzonego według zasady opisanej w zadaniu jest równe:

$$P_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n}{2} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \right) \cdot \sin 60^\circ = \frac{(3n^2-1)\sqrt{3}}{8}$$

Zatem $\frac{S_n}{P_n} = \frac{12n^2}{3n^2-1}$, czyli $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{P_n} = 4$.

Zasady oceniania:

4 p. — wyznaczenie granicy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{P_n}$: 4

3 p. — zapisanie wzoru na $\frac{S_n}{P_n}$: $\frac{S_n}{P_n} = \frac{12n^2}{3n^2-1}$

2 p. — zapisanie wzorów na S_n i P_n : $S_n = \frac{3n^2\sqrt{3}}{2}$, $P_n = \frac{(3n^2-1)\sqrt{3}}{8}$

1 p. — zapisanie wzoru na S_n : $S_n = \frac{3n^2\sqrt{3}}{2}$

LUB

— zapisanie wzoru na P_n : $P_n = \frac{(3n^2-1)\sqrt{3}}{8}$

Zadanie 7. (0-5)

Skoro $\sin \alpha = 0,28$, więc $\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,28^2} = 0,96$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADE :

$$|AD|^2 = x^2 + (1-x)^2 - 2 \cdot x \cdot (1-x) \cdot 0,96$$

$$|AD|^2 = 3,92x^2 - 3,92x + 1, \text{ gdzie } x \in (0; 1)$$

Pole kwadratu $ABCD$ ma być większe od 0,02, zatem:

$$|AD|^2 > 0,02, \text{ czyli } 3,92x^2 - 3,92x + 1 > 0,02, \text{ stąd } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Po uwzględnieniu założenia $x \in (0; 1)$, otrzymujemy $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1)$.

Zasady oceniania:

5 p. — obliczenie wartości x : $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 1)$

4 p. — rozwiązanie nierówności $3,92x^2 - 3,92x + 1 > 0,02$: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3 p. — zapisanie pola kwadratu $ABCD$ w postaci trójmianu kwadratowego ze zmienną x :
 $3,92x^2 - 3,92x + 1$

2 p. — zapisanie pola kwadratu $ABCD$ w postaci dowolnego wyrażenia algebraicznego ze zmienną x :
np. $x^2 + (1-x)^2 - 2 \cdot x \cdot (1-x) \cdot 0,96$

1 p. — obliczenie wartości $\cos \alpha$: $\cos \alpha = 0,96$

Zadanie 8. (0-5)

Z podobieństwa trójkątów wynika:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{y^2+2}}, \text{ czyli } y = \sqrt{2}x \text{ oraz } \frac{x}{z} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{z^2+3}}, \text{ czyli } z = \sqrt{3}x$$

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β :

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{y}{z} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{x}{z} = \frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{2}, \text{ czyli } \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obliczamy wartości sinusa i cosinusa dla kąta $(\alpha - \beta)$:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Zatem:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{9}$$

Zasady oceniania:

5 p. — obliczenie wartości wyrażenia $\frac{\sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$: $\frac{4}{9}$

4 p. — obliczenie wartości sinusa i cosinusa dla kąta $(\alpha - \beta)$: $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

3 p. — obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych kątów α i β : $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}, \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 2 p. — wyznaczenie długości dwóch boków pierwszego trójkąta w zależności od długości trzeciego boku: $y = \sqrt{2}x$, $z = \sqrt{3}x$
- 1 p. — zapisanie dwóch proporcji wynikających z podobieństwa trójkątów, umożliwiających wyznaczenie długości dwóch boków pierwszego trójkąta w zależności od długości trzeciego boku:
np. $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{y^2+2}}$ i $\frac{x}{z} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{z^2+3}}$

Zadanie 9. (0–2)

$A = (t, 2t^2)$ — dowolny punkt należący do paraboli o równaniu $y = 2x^2$, $t \in \mathbb{R}$

d — odległość punktu A od prostej o równaniu $y = -\frac{1}{8}$

Odległość punktu $A = (t, 2t^2)$ od prostej o równaniu $y = -\frac{1}{8}$ można opisać wzorem $d = 2t^2 + \frac{1}{8}$.

Odległość punktu $A = (t, 2t^2)$ od punktu $F = (0, \frac{1}{8})$ jest równa:

$$|FA| = \sqrt{(t-0)^2 + (2t^2 - \frac{1}{8})^2} = \sqrt{4t^4 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64}} = \sqrt{(2t^2 + \frac{1}{8})^2} = |2t^2 + \frac{1}{8}| = 2t^2 + \frac{1}{8}$$

Zatem $d = |FA|$.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — wyznaczenie odległości punktu A od prostej o równaniu $y = -\frac{1}{8}$ w zależności od jednej współrzędnej punktu A : $d = 2t^2 + \frac{1}{8}$

LUB

— wyznaczenie odległości punktu A od punktu F w zależności od jednej współrzędnej punktu A : $|FA| = 2t^2 + \frac{1}{8}$

Zadanie 10. (0–6)

a — długość krawędzi podstawy

y — długość odcinka EG

P — środek odcinka EB

$x = \frac{|EB|}{|AB|}$, stąd $|EB| = ax$

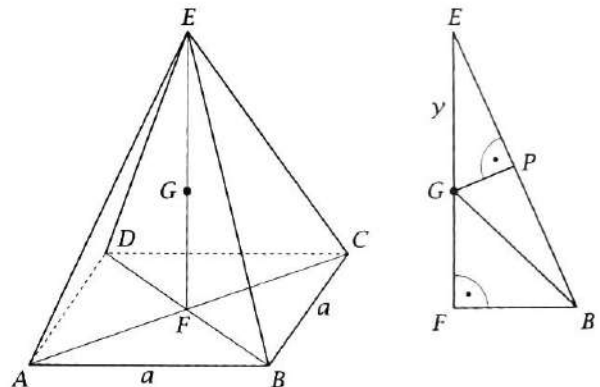
$|EP| = \frac{1}{2}|EB| = \frac{ax}{2}$

$|FB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$|GF| = \frac{3}{4}y$

$|GB| = |EG| = y$

$|EF| = |EG| + |GF| = \frac{7}{4}y$



Z podobieństwa trójkątów GPE i BEF (cecha kkk) wynika:

$$\frac{|EF|}{|EB|} = \frac{|EP|}{|EG|}, \text{ stąd } \frac{\frac{7}{4}y}{ax} = \frac{\frac{ax}{2}}{y}, \text{ czyli } y^2 = \frac{2}{7}a^2x^2$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BEF wynika:

$$\left(\frac{7}{4}y\right)^2 = (ax)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ stąd } 49y^2 = 16a^2x^2 - 8a^2$$

Przekształcamy układ równań:

$$\begin{cases} y^2 = \frac{2}{7}a^2x^2 \\ 49y^2 = 16a^2x^2 - 8a^2 \end{cases}, \text{ stąd } x^2 = 4, \text{ czyli } x = 2$$

Zasady oceniania:

6 p. — obliczenie, ile razy krawędź boczna jest dłuższa od krawędzi podstawy z pełnym uzasadnieniem: 2 razy

- 5 p. — obliczenie, ile razy krawędź boczna jest dłuższa od krawędzi podstawy bez uzasadnienia podobieństwa trójkątów GPE i BEF : 2 razy
LUB
— wyznaczenie związków $49y^2 = 16a^2x^2 - 8a^2$ i $y^2 = \frac{2}{7}a^2x^2$ wraz z uzasadnieniem podobieństwa trójkątów GPE i BEF
- 4 p. — wyznaczenie związku $49y^2 = 16a^2x^2 - 8a^2$ wraz z uzasadnieniem podobieństwa trójkątów GPE i BEF
LUB
— wyznaczenie związków $49y^2 = 16a^2x^2 - 8a^2$ i $y^2 = \frac{2}{7}a^2x^2$ bez uzasadnienia podobieństwa trójkątów GPE i BEF
LUB
— wyznaczenie związków $\left(\frac{7}{4}y\right)^2 = (ax)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$ i $y^2 = \frac{2}{7}a^2x^2$ wraz z uzasadnieniem podobieństwa trójkątów GPE i BEF
- 3 p. — wyznaczenie związku $49y^2 = 16a^2x^2 - 8a^2$
LUB
— wyznaczenie związku $y^2 = \frac{2}{7}a^2x^2$ wraz z uzasadnieniem podobieństwa trójkątów GPE i BEF
LUB
— wyznaczenie związków $\left(\frac{7}{4}y\right)^2 = (ax)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$ i $y^2 = \frac{2}{7}a^2x^2$ bez uzasadnienia podobieństwa trójkątów GPE i BEF
- 2 p. — wyznaczenie związku $y^2 = \frac{2}{7}a^2x^2$ bez uzasadnienia podobieństwa trójkątów GPE i BEF
LUB
— wyznaczenie związku $\left(\frac{7}{4}y\right)^2 = (ax)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$
LUB
— uzależnienie długości odcinków EB , EP i FB od zmiennych a i x oraz — odcinków GF i EF od zmiennej y wraz z uzasadnieniem podobieństwa trójkątów GPE i BEF : $|EB| = ax$, $|EP| = \frac{ax}{2}$, $|FB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|GF| = \frac{3}{4}y$ i $|EF| = \frac{7}{4}y$
- 1 p. — uzależnienie długości odcinków EB , EP i FB od zmiennych a i x oraz — odcinków GF i EF od zmiennej y : $|EB| = ax$, $|EP| = \frac{ax}{2}$, $|FB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|GF| = \frac{3}{4}y$ i $|EF| = \frac{7}{4}y$
LUB
— uzasadnienie, że trójkąty GPE i BEF są podobne

Zadanie 11. (0–3)

n — liczba czekoladek znajdujących się początkowo w pudełku, $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 6$

Rozwiązujemy równanie:

$$\binom{n}{3} - \binom{n-3}{3} = 136, \text{ stąd } n^2 - 5n - 84 = 0, \text{ czyli } n \in \{-7, 12\}$$

Skoro liczba n spełnia warunek $n \geq 6$, to $n = 12$.

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie liczby czekoladek znajdujących się początkowo w pudełku: 12

2 p. — zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą n : np. $n^2 - 5n - 84 = 0$

1 p. — zapisanie równania $\binom{n}{3} - \binom{n-3}{3} = 136$

Zadanie 12. (0–2)

n — liczba dołożonych czerwonych klocków, $n \in \mathbb{N}$

A — wylosowanie z kosza, zawierającego $(n+8)$ klocków czerwonych i 12 żółtych, jednego czerwonego klocka

$$\text{Zatem } P(A) = \frac{n+8}{n+8+12} = \frac{n+8}{n+20}.$$

Skoro $P(A) < \frac{2}{3}$, więc rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{n+8}{n+20} < \frac{2}{3}, \text{ stąd } n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$$

Do kosza należy dołożyć co najwyżej 15 czerwonych klocków.

Zasady oceniania:

2 p. — wyznaczenie możliwie największej liczby dołożonych klocków czerwonych: 15

1 p. — zapisanie nierówności $\frac{n+8}{n+20} < \frac{2}{3}$ **Zadanie 13.1. (0-2)** a — długość krawędzi podstawy H — wysokość graniastosłupa $ABCDEF$ $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, stąd $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$, czyli $|AP| = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta APD wynika:

$$H = \sqrt{(1-x)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}x^2 - 2x + 1}$$

Zatem:

$$V(x) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^2 - 2x + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}$$

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — wyznaczenie wysokości graniastosłupa $ABCDEF$ w zależności od x : $H = \sqrt{\frac{2}{3}x^2 - 2x + 1}$ **Zadanie 13.2. (0-4)**Wyznaczamy dziedzinę funkcji V określonej wzorem $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}$:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ \frac{2}{3}x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}, \text{ czyli } x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$$

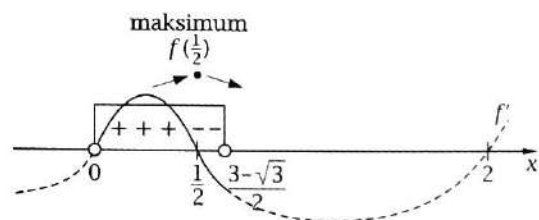
Funkcja $V(x) = a \cdot \sqrt{f(x)}$ (gdzie $a > 0$) przyjmuje największą wartość w punkcie, w którym $f(x) > 0$ i funkcja f przyjmuje największą wartość.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4 \text{ dla } x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$f'(x) = 4x^5 - 10x^4 + 4x^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 2\right\}$$

Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(0; \frac{1}{2}\right)$,
 a malejąca w przedziale $\left(\frac{1}{2}; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$. Zatem
 funkcja f osiąga w punkcie $x = \frac{1}{2}$ maksimum,
 które jest jednocześnie największą wartością
 funkcji f i funkcji V .

**Zasady oceniania:**4 p. — wyznaczenie wartości x , dla której graniastosłup $ABCDEF$ ma największą objętość: $x = \frac{1}{2}$ 3 p. — rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji V : $x = \frac{1}{2}$
LUB— rozwiązanie równania $V'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji V : $x = \frac{1}{2}$ 2 p. — wyznaczenie dziedziny funkcji V i pochodnej funkcji f : $x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $f'(x) = 4x^5 - 10x^4 + 4x^3$
LUB— wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji V : $x \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2x^5 - 5x^4 + 2x^3}{\sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}}$

LUB

— rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji V : $x \in \left\{0, \frac{1}{2}, 2\right\}$

LUB

– rozwiązanie równania $V'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji V : $x \in \{0, \frac{1}{2}, 2\}$

1 p. – obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = 4x^5 - 10x^4 + 4x^3$

LUB

– obliczenie pochodnej funkcji V : $V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2x^5 - 5x^4 + 2x^3}{\sqrt{\frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + x^4}}$

LUB

– wyznaczenie dziedziny funkcji V : $x \in \left(0; \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)$

Arkusz egzaminacyjny nr 14

Zadanie 1. (0-3)

Zakładamy, że liczby x i y są dodatnie i spełniają warunek $x^3 \neq y^2$.

Ze wzoru na zamianę podstaw logarytmu wynika równość:

$$\log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} (xy^3) = -\log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} (xy^3)$$

Zatem:

$$W = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{\frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x^3 y^2}}{\sqrt{y^3}}}{xy^3} = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{x^3}{y^2} = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}\right)^6 = 6$$

Wartość wyrażenia W jest równa 6, więc wyrażenie to przyjmuje stałą wartość, która nie zależy ani od x ani od y .

Zasady oceniania:

3 p. – przeprowadzenie pełnego dowodu

2 p. – zapisanie wyrażenia W za pomocą jednego logarytmu: np. $W = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{\frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x^3 y^2}}{\sqrt{y^3}}}{xy^3}$

1 p. – zapisanie wyrażenia W w postaci sumy lub różnicy logarytmów o tych samych podstawach:

$$\text{np. } W = \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{x^3 \sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} (xy^3) + \log_{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}} \frac{\sqrt{x^3 y^2}}{\sqrt{y^3}}$$

Zadanie 2. (0-3)

Skoro $-\frac{b}{2a} = 1$ i $a = 1$, więc $b = -2$. Zatem $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$x^2 - 2x + 1 < 1 - x^3, \text{ stąd } x(x+2)(x-1) < 0, \text{ czyli } x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1)$$

Zasady oceniania:

3 p. – wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności $f(x) < 1 - x^3$: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1)$

2 p. – przekształcenie nierówności $f(x) < 1 - x^3$ do postaci $x(x+2)(x-1) < 0$

LUB

– wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu $x^3 + x^2 - 2x$: $x \in \{-2, 0, 1\}$

1 p. – wyznaczenie wzoru funkcji f : np. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Zadanie 3. (0-5)

Sprawdzamy, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki:

$$\Delta = m^2 - 4m + 8 > 0, \text{ czyli } m \in \mathbb{R}$$

$$(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2 = 25(x_1^2 + x_2^2) = 25(x_1 + x_2)^2 - 50x_1x_2$$

Ze wzorów Viète'a wynika:

$$(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2 = 25 \left(\frac{-m}{1} \right)^2 - 50 \left(\frac{m-2}{1} \right) = 25m^2 - 50m + 100$$

Funkcja $f(m) = 25m^2 - 50m + 100$ określona dla $m \in \mathbb{R}$ przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie $m = -\frac{(-50)}{2 \cdot 25} = 1$. Zatem tylko dla $m = 1$ podane równanie spełnia warunki zadania.

Zasady oceniania:

- 5 p. — wyznaczenie takiej wartości parametru m , dla której równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ spełnia warunki zadania: $m = 1$
- 4 p. — wyznaczenie takiej wartości parametru m , dla której funkcja $f(m) = 25m^2 - 50m + 100$ przyjmuje najmniejszą wartość: $m = 1$
LUB
— sprawdzenie, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki oraz zapisanie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej m : $m \in \mathbb{R}$, $f(m) = 25m^2 - 50m + 100$
- 3 p. — zapisanie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej m : $f(m) = 25m^2 - 50m + 100$
LUB
— sprawdzenie, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki oraz zapisanie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ w postaci dowolnego wyrażenia zmiennej m : np. $m \in \mathbb{R}$, $25 \left(\frac{-m}{1} \right)^2 - 50 \left(\frac{m-2}{1} \right)$
- 2 p. — zapisanie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ w postaci dowolnego wyrażenia zmiennej m : np. $25 \left(\frac{-m}{1} \right)^2 - 50 \left(\frac{m-2}{1} \right)$
LUB
— sprawdzenie, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki oraz przekształcenie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ do postaci, dla której można zastosować wzory Viète'a: $m \in \mathbb{R}$, $25(x_1 + x_2)^2 - 50x_1x_2$
- 1 p. — sprawdzenie, dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki: $m \in \mathbb{R}$
LUB
— przekształcenie wyrażenia $(3x_1 + 4x_2)^2 + (4x_1 - 3x_2)^2$ do postaci, dla której można zastosować wzory Viète'a: np. $25(x_1 + x_2)^2 - 50x_1x_2$

Zadanie 4. (0-4)

q — iloraz ciągu geometrycznego (a_n)

S — suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n)

S' — suma kwadratów wszystkich wyrazów ciągu (a_n)

S'' — suma sześciątów wszystkich wyrazów ciągu (a_n)

Zatem dla $q \in (-1; 1)$:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{oraz} \quad S' = \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1}{1-q} \cdot \frac{a_1}{1+q} = S \cdot \frac{a_1}{1+q}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 9 = \frac{a_1}{1-q} \\ \frac{81}{5} = 9 \cdot \frac{a_1}{1+q} \end{cases}, \quad \text{stad} \quad \begin{cases} a_1 + 9q = 9 \\ 5a_1 - 9q = 9 \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = \frac{2}{3} \in (-1; 1) \end{cases}$$

Zatem:

$$S'' = \frac{a_1^3}{1-q^3} = \frac{3^3}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = 38\frac{7}{19}$$

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie sumy sześciątów wszystkich wyrazów ciągu (a_n): $38\frac{7}{19}$

3 p. — obliczenie a_1 i q : $a_1 = 3$ i $q = \frac{2}{3}$

- 2 p. – przekształcenie równania $\frac{81}{5} = \frac{a_1^2}{1-q^2}$ do postaci $\frac{81}{5} = 9 \cdot \frac{a_1}{1+q}$
 LUB
 – zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą q : $3q^2 - 5q + 2 = 0$
 LUB
 – zapisanie równania kwadratowego z niewiadomą a_1 : $\frac{1}{5} = \frac{a_1}{18-a_1}$

1 p. – zapisanie układu równań
$$\begin{cases} 9 = \frac{a_1}{1-q} \\ \frac{81}{5} = \frac{a_1^2}{1-q^2} \end{cases}$$

Zadanie 5. (0-2)

r – różnica ciągu arytmetycznego (a_n)

$$S_{9n} = \frac{2a_1 + (9n-1)r}{2} \cdot 9n \text{ oraz } S_{5n} - S_{4n} = \frac{2a_1 + (5n-1)r}{2} \cdot 5n - \frac{2a_1 + (4n-1)r}{2} \cdot 4n = \frac{2a_1 + (9n-1)r}{2} \cdot n$$

$$\frac{S_{9n}}{S_{5n} - S_{4n}} = \frac{\frac{2a_1 + (9n-1)r}{2} \cdot 9n}{\frac{2a_1 + (9n-1)r}{2} \cdot n} = 9$$

Zasady oceniania:

2 p. – obliczenie wartości wyrażenia $\frac{S_{9n}}{S_{5n} - S_{4n}}$: 9

1 p. – zapisanie sum S_{9n} , S_{5n} i S_{4n} w postaci wyrażen o zmiennych a_1 , r i n : $S_{9n} = \frac{2a_1 + (9n-1)r}{2} \cdot 9n$,
 $S_{5n} = \frac{2a_1 + (5n-1)r}{2} \cdot 5n$ i $S_{4n} = \frac{2a_1 + (4n-1)r}{2} \cdot 4n$

Zadanie 6. (0-5)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{p^2 - 9p - 10}{3} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = |6 - p| - 2$$

Skoro $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n < 0$, więc:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \frac{p^2 - 9p - 10}{3} > 0 \\ |6 - p| - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \textcircled{2} \begin{cases} \frac{p^2 - 9p - 10}{3} < 0 \\ |6 - p| - 2 > 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ $\textcircled{1}$:

$$\begin{cases} p \in (-\infty; -1) \cup (10; +\infty) \\ p \in (4; 8) \end{cases}, \text{ stąd } p \in \emptyset$$

Rozwiązujemy układ $\textcircled{2}$:

$$\begin{cases} p \in (-1; 10) \\ p \in (-\infty; 4) \cup (8; +\infty) \end{cases}, \text{ stąd } p \in (-1; 4) \cup (8; 10)$$

Zatem $p \in (-1; 4) \cup (8; 10)$.

Zasady oceniania:

5 p. – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości parametru p , dla których spełnione są warunki zadania: $p \in (-1; 4) \cup (8; 10)$

4 p. – wyznaczenie zbioru wszystkich wartości parametru p , dla których $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < 0$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n > 0$:
 $p \in (-1; 4) \cup (8; 10)$

LUB

– ustalenie, że nie istnieją takie wartości parametru p , dla których $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n < 0$

3 p. – wyznaczenie granic ciągów a_n i b_n oraz stwierdzenie, że iloczyn granic ciągów jest liczbą ujemną, jeżeli granice te są liczbami o przeciwnych znakach:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{p^2 - 9p - 10}{3} \text{ i } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = |6 - p| - 2$$

2 p. — wyznaczenie granic ciągów a_n i b_n : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{p^2 - 9p - 10}{3}$ i $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = |6 - p| - 2$

LUB

— rozwiązanie obu nierówności: $\frac{p^2 - 9p - 10}{3} > 0$ i $\frac{p^2 - 9p - 10}{3} < 0$

LUB

— rozwiązanie obu nierówności $|6 - p| - 2 < 0$ i $|6 - p| - 2 > 0$

1 p. — wyznaczenie granicy ciągu a_n : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{p^2 - 9p - 10}{3}$

LUB

— wyznaczenie granicy ciągu b_n : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = |6 - p| - 2$

LUB

— zauważenie, że iloczyn granic ciągów jest liczbą ujemną, jeżeli granice te są liczbami o przeciwnych znakach

Zadanie 7. (0-3)

I sposób

$$\sin^2 2x = \cos 2x + 1$$

$$4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1 + 1$$

$$\cos^2 x (2 \sin^2 x - 1) = 0$$

$$\cos^2 x = 0 \text{ lub } \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

Jeżeli $\cos^2 x = 0$, to $\cos x = 0$, stąd $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Jeżeli $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, to $\sin x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, stąd $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

II sposób

$$\sin^2 2x = \cos 2x + 1$$

$$1 - \cos^2 2x = \cos 2x + 1$$

$$\cos 2x (1 + \cos 2x) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \text{ lub } \cos 2x = -1$$

Jeżeli $\cos 2x = 0$, to $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, stąd $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Jeżeli $\cos 2x = -1$, to $2x = \pi + 2k\pi$, stąd $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zasady oceniania:

3 p. — wyznaczenie zbioru rozwiązań równania $\sin^2 2x = \cos 2x + 1$: $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

2 p. — rozwiązanie równania $\cos^2 x = 0$ lub równania $\cos 2x = -1$: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

LUB

— rozwiązanie równania $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ lub równania $\cos 2x = 0$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

1 p. — zapisanie równania $\sin^2 2x = \cos 2x + 1$ w postaci $a \cdot b = 0$: np. $\cos^2 x (2 \sin^2 x - 1) = 0$ lub $\cos 2x (1 + \cos 2x) = 0$

Zadanie 8. (0-4)

r — promień mniejszego okręgu

$1,5r$ — promień większego okręgu

α — miara kąta środkowego wycinka C (w stopniach)

P_F — pole figury F, gdzie $F \in \{A, B, C, D\}$

$$P_B = \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$P_D = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2)$$

Skoro $P_B = P_D$, więc:

$$\frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2), \text{ skąd } \alpha = 160^\circ$$

Zatem:

$$\frac{P_A}{P_C} = \frac{\frac{360^\circ - 160^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2)}{\frac{160^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{25}{16}$$

Zasady oceniania:

4 p. – obliczenie stosunku pól figur A i B: $\frac{25}{16}$

3 p. – obliczenie miary kąta środkowego wycinka C: 160°

LUB

– obliczenie miary kąta środkowego wycinka B: 200°

2 p. – zapisanie pola figury B i pola figury D w postaci wyrażenia o zmiennych α i r :

$$\text{np. } P_B = \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2, P_D = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2)$$

1 p. – zapisanie pola figury B w postaci wyrażenia o zmiennych α i r : np. $P_B = \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$

LUB

– zapisanie pola figury D w postaci wyrażenia o zmiennych α i r :

$$\text{np. } P_D = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot ((1,5r)^2 - r^2)$$

Zadanie 9. (0–5)

S_{BC} – środek odcinka BC

a_{AB} – współczynnik kierunkowy prostej AB

a_{BC} – współczynnik kierunkowy prostej BC

k – symetralna odcinka AB

l – symetralna odcinka BC

$S = (a, b)$ – środek okręgu opisanego na trójkącie ABC

r – promień okręgu opisanego na trójkącie ABC

I sposób

Wyznaczamy współrzędne wierzchołków B i C oraz współrzędne środka odcinka BC (punktu S_{BC}):

$$B = (x_B, y_B) = (2x_P - x_A, 2y_P - y_A) = (14, 8)$$

$$C = (x_C, y_C) = (2x_Q - x_P, 2y_Q - y_P) = (-16, -2)$$

$$S_{BC} = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = (-1, 3)$$

Środek okręgu opisanego na trójkącie ABC jest punktem przecięcia symetralnych k i l .

Prosta k jest prostopadła do prostej AB i należy do niej punkt $P = (6, 12)$, więc:

$$k: y = -\frac{1}{a_{AB}}x + b_1, \text{ gdzie } a_{AB} = \frac{16-8}{-2-14} = -\frac{1}{2}$$

$$k: y = 2x + b_1$$

$$12 = 2 \cdot 6 + b_1, \text{ stąd } b_1 = 0, \text{ czyli } k: y = 2x$$

Prosta l jest prostopadła do prostej BC i należy do niej punkt $S_{BC} = (-1, 3)$, więc:

$$l: y = -\frac{1}{a_{BC}}x + b_2, \text{ gdzie } a_{BC} = \frac{8+2}{14+16} = \frac{1}{3}$$

$$l: y = -3x + b_2$$

$$3 = -3 \cdot (-1) + b_2, \text{ stąd } b_2 = 0, \text{ czyli } l: y = -3x$$

Proste określone równaniami $y = 2x$ i $y = -3x$ przecinają się w punkcie $S = (0, 0)$. Jest to środek okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC ma długość:

$$r = |AS| = \sqrt{(0+2)^2 + (0-16)^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$$

Zatem okrąg opisany na trójkącie ABC ma równanie: $x^2 + y^2 = 260$.

II sposób

Wyznaczamy współrzędne wierzchołków B i C :

$$B = (x_B, y_B) = (2x_P - x_A, 2y_P - y_A) = (14, 8)$$

$$C = (x_C, y_C) = (2x_Q - x_P, 2y_Q - y_P) = (-16, -2)$$

Punkty A , B i C należą do okręgu opisanego na trójkącie ABC , rozwiązujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} (-2-a)^2 + (16-b)^2 = r^2 \\ (14-a)^2 + (8-b)^2 = r^2 \\ (-16-a)^2 + (-2-b)^2 = r^2 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3a+b=0 \end{cases}, \text{ czyli } a=b=0 \text{ oraz } r^2 = (-2-0)^2 + (16-0)^2 = 260$$

Zatem okrąg opisany na trójkącie ABC ma równanie: $x^2 + y^2 = 260$.

Zasady oceniania:

5 p. — wyznaczenie równania okręgu opisanego na trójkącie ABC : $x^2 + y^2 = 260$

4 p. — wyznaczenie współrzędnych środka okręgu opisanego na trójkącie ABC : $S = (0, 0)$

3 p. — (I sposób) wyznaczenie równań symetralnych dwóch boków trójkąta ABC : np. $y = 2x$ i $y = -3x$
LUB

— (II sposób) zapisanie układu dwóch równań liniowych z niewiadomymi a i b :

$$\text{np. } \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3a+b=0 \end{cases}$$

2 p. — (I sposób) wyznaczenie równania symetralnej jednego z boków trójkąta ABC :

$$y = 2x \text{ lub } y = 3x \text{ lub } y = -\frac{7}{9}x$$

LUB

— (II sposób) zapisanie układu trzech równań z niewiadomymi a , b i r :

$$\text{np. } \begin{cases} (-2-a)^2 + (16-b)^2 = r^2 \\ (14-a)^2 + (8-b)^2 = r^2 \\ (-16-a)^2 + (-2-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

1 p. — wyznaczenie wierzchołków B i C trójkąta ABC : $B = (14, 8)$, $C = (-16, -2)$

Zadanie 10. (0-4)

h — wysokość ściany bocznej ostrosłupa $ABCD$ poprowadzona z punktu S

w — wysokość ściany bocznej ostrosłupa $EFGH$ poprowadzona z punktu S

a — krawędź podstawy ostrosłupa $ABCD$

x — krawędź podstawy ostrosłupa $EFGH$

Z równości pól ścian ostrosłupa $ABCD$ wynika:

$$a^2 = \frac{1}{2}ah, \text{ czyli } h = 2a$$

Z podobieństwa trójkątów EFS i ABS (cecha kkk) wynika:

$$\frac{w}{x} = \frac{h}{a}, \text{ czyli } \frac{w}{x} = \frac{2a}{a}, \text{ więc } w = 2x$$

Z równości pól ścian $ABFE$ i $EFGH$ wynika:

$$x^2 = \frac{a+x}{2} \cdot (h-w)$$

Skoro $h = 2a$ i $w = 2x$, to:

$$x^2 = a^2 - x^2, \text{ czyli } a = x\sqrt{2}$$

Ostrosłupy $ABCD$ i $EFGH$ są podobne, więc:

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{EFGH}} = \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{x}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

Zasady oceniania:

4 p. — obliczenie stosunku objętości ostrosłupa $ABCD$ do objętości ostrosłupa $EFGH$: $2\sqrt{2}$

3 p. — wyznaczenie związku między długościami krawędzi podstawy ostrosłupów $ABCD$ i $EFGH$:
 $a = x\sqrt{2}$

2 p. — wyznaczenie związku między wysokością ściany bocznej ostrosłupa $EFGH$ a długością krawędzi jego podstawy: $w = 2x$

1 p. — wyznaczenie związku między wysokością ściany bocznej ostrosłupa $ABCD$ a długością krawędzi jego podstawy: $h = 2a$

Zadanie 11. (0-3)

n – liczba chłopców w grupie

$2n$ – liczba dziewcząt w grupie

Dla liczby naturalnej $n \geq 3$ zachodzi równość:

$$\frac{\binom{n}{3}}{\binom{3n}{3}} \cdot 100 = \frac{20}{11}, \text{ czyli } \frac{100(n-2)(n-1)}{3(3n-2)(3n-1)} = \frac{20}{11}, \text{ stąd } n = 4$$

Liczba osób w grupie jest równa $n + 2n = 12$.

Zasady oceniania:

3 p. – obliczenie liczby osób w grupie: 12

2 p. – zapisanie równania bez użycia symbolu Newtona i symbolu silni, w którym niewiadomą jest liczba chłopców, liczba dziewcząt lub liczba wszystkich osób w grupie:

np. $\frac{100(n-2)(n-1)}{3(3n-2)(3n-1)} = \frac{20}{11}$

1 p. – zapisanie równania z użyciem symbolu Newtona, w którym niewiadomą jest liczba chłopców, liczba dziewcząt lub liczba wszystkich osób w grupie:

np. $\frac{\binom{n}{3}}{\binom{3n}{3}} \cdot 100 = \frac{20}{11}$

Zadanie 12. (0-4)

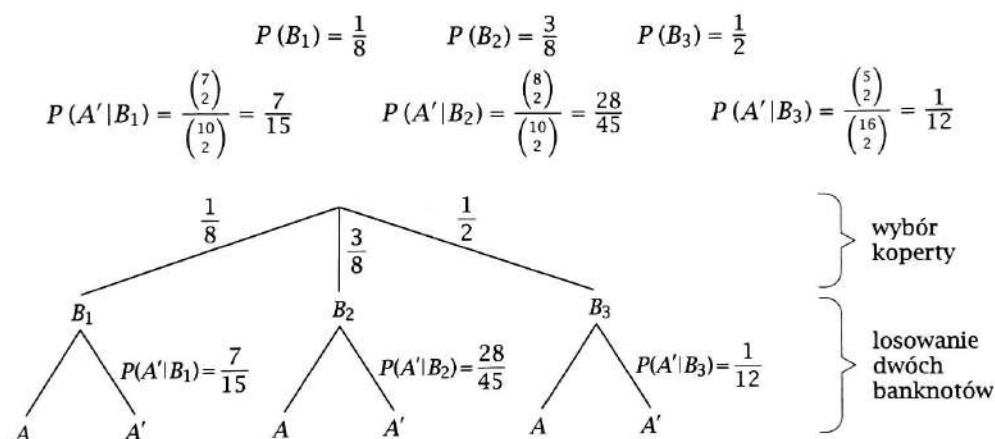
A – Wylosowana kwota pieniędzy jest większa niż 20 zł.

A' – Wylosowano dwa banknoty o nominale 10 zł.

B_1 – W trzykrotnym rzucie symetryczną monetą orzeł wypadł trzy razy.

B_2 – W trzykrotnym rzucie symetryczną monetą orzeł wypadł dokładnie dwa razy.

B_3 – W trzykrotnym rzucie symetryczną monetą orzeł wypadł dokładnie raz lub ani razu.



Zatem:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{7}{15} + \frac{3}{8} \cdot \frac{28}{45} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \right) = \frac{2}{3}$$

Zasady oceniania:

4 p. – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{2}{3}$

3 p. – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzeń B_1, B_2 i B_3 oraz $A'|B_1, A'|B_2$ i $A'|B_3$:

$P(B_1) = \frac{1}{8}, P(B_2) = \frac{3}{8}, P(B_3) = \frac{1}{2}, P(A'|B_1) = \frac{7}{15}, P(A'|B_2) = \frac{28}{45}, P(A'|B_3) = \frac{1}{12}$

2 p. – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzeń $A'|B_1, A'|B_2$ i $A'|B_3$:

$P(A'|B_1) = \frac{7}{15}, P(A'|B_2) = \frac{28}{45}, P(A'|B_3) = \frac{1}{12}$

LUB

– obliczenie dwóch spośród trzech iloczynów $P(A'|B_n) \cdot P(B_n)$, gdzie $n \in \{1, 2, 3\}$

1 p. – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzeń B_1, B_2 i B_3 : $P(B_1) = \frac{1}{8}, P(B_2) = \frac{3}{8}, P(B_3) = \frac{1}{2}$

LUB

- zapisanie prawdopodobieństwa zdarzeń $A'|B_1$, $A'|B_2$ i $A'|B_3$ z użyciem symbolu Newtona:

$$P(A'|B_1) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}, P(A'|B_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}}, P(A'|B_3) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{16}{2}}$$

LUB

- obliczenie iloczynu $P(A'|B_1) \cdot P(B_1)$: $\frac{7}{120}$

LUB

- obliczenie iloczynu $P(A'|B_2) \cdot P(B_2)$: $\frac{7}{30}$

LUB

- obliczenie iloczynu $P(A'|B_3) \cdot P(B_3)$: $\frac{1}{24}$

Zadanie 13.1. (0-2)

Z podobieństwa trójkątów ABC i EBF wynika:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+1}{|AC|}, \text{ czyli } |AC| = \frac{8(x+1)}{x}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC wynika:

$$|AB| = \sqrt{|BC|^2 + |AC|^2}$$

Zatem:

$$c(x) = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}$$

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — wyznaczenie długości przeciwprostokątnej AC w zależności od x : $|AC| = \frac{8(x+1)}{x}$

Zadanie 13.2. (0-4)

Funkcja $c(x) = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}$ określona jest dla $x \in (0; +\infty)$.

Niech $f(x) = (x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}$.

Funkcja $c(x) = \sqrt{f(x)}$ przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie, w którym $f(x) > 0$ i funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość.

$$f(x) = (x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2} = \frac{(x+1)^2(x^2+64)}{x^2} \text{ dla } x \in (0; +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{(2(x+1)(x^2+64) + 2x(x+1)^2)x^2 - 2x(x+1)^2(x^2+64)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^3-64)}{x^3}$$

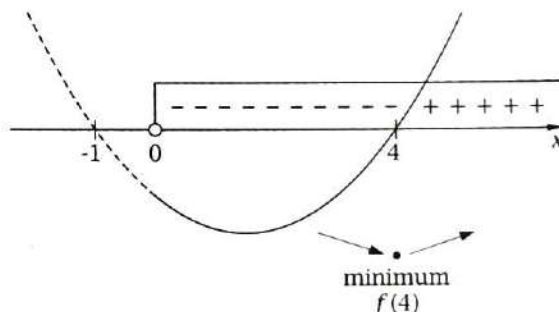
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 4\}$$

Skoro $x^3 > 0$ dla każdego $x \in (0; +\infty)$, więc o znaku funkcji f' decyduje tylko licznik.

Funkcja f jest malejąca w przedziale $(0; 4)$, a rosnąca w przedziale $(4; +\infty)$. Zatem funkcja f osiąga w punkcie $x = 4$ minimum, które jest jednocześnie najmniejszą wartością funkcji f i funkcji c .

Najmniejsza długość, jaką może mieć przeciwprostokątna AB to:

$$c(4) = \sqrt{(4+1)^2 + \frac{64(4+1)^2}{4^2}} = 5\sqrt{5}$$



Zasady oceniania:

- 4 p. – obliczenie możliwie najmniejszej długości przeciwprostokątnej trójkąta ABC : $5\sqrt{5}$
- 3 p. – rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji c : $x = 4$
LUB
– rozwiązanie równania $c'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji c : $x = 4$
- 2 p. – wyznaczenie dziedziny funkcji c i pochodnej funkcji f : $x \in (0; +\infty)$, $f'(x) = \frac{2(x+1)(x^3-64)}{x^3}$
LUB
– wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji c : $x \in (0; +\infty)$, $c'(x) = \frac{(x+1)(x^3-64)}{x^3 \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}}$
LUB
– rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji c : $x \in \{-1, 4\}$
LUB
– rozwiązanie równania $c'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji c : $x \in \{-1, 4\}$
- 1 p. – obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = \frac{2(x+1)(x^3-64)}{x^3}$
LUB
– obliczenie pochodnej funkcji c : $c'(x) = \frac{(x+1)(x^3-64)}{x^3 \sqrt{(x+1)^2 + \frac{64(x+1)^2}{x^2}}}$
LUB
– wyznaczenie dziedziny funkcji c : $x \in (0; +\infty)$

Arkusz egzaminacyjny nr 15

Zadanie 1. (0-2)

$$(\sqrt{2})^{2024} \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^{3015} = 2^{1012} \cdot 5^{1005} = 128 \cdot 10^{1005}$$

Liczba cyfr liczby $128 \cdot 10^{1005}$ wynosi: $3 + 1005 = 1008$.

Zasady oceniania:

- 2 p. – wyznaczenie liczby cyfr podanej liczby: 1008
- 1 p. – zapisanie wyrażenia w postaci $128 \cdot 10^{1005}$

Zadanie 2. (0-5)

Rozwiązujemy nierówność:

$$(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0, \text{ czyli } x \in (-\infty; -6] \cup \langle -4; 1 \rangle$$

Rozwiązujemy nierówność:

$$(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24, \text{ stąd } x(x+2)(x+7) \geq 0, \text{ czyli } x \in \langle -7; -2 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$$

$$\text{Zatem } A = \langle -7; -6 \rangle \cup \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle \text{ oraz } f(-7) = \log_{7\sqrt{7}} |-7-42| = \frac{4}{3}.$$

Zasady oceniania:

- 5 p. – zapisanie za pomocą sumy przedziałów zbioru A oraz obliczenie $f(-7)$:
 $A = \langle -7; -6 \rangle \cup \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$, $f(-7) = \frac{4}{3}$
- 4 p. – zapisanie za pomocą sumy przedziałów zbioru A : $A = \langle -7; -6 \rangle \cup \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$
- 3 p. – rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0$ i nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24$:
 $x \in (-\infty; -6] \cup \langle -4; 1 \rangle$ i $x \in \langle -7; -2 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$
- 2 p. – rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24$: $x \in \langle -7; -2 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$
LUB
– rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0$ i przekształcenie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24$ do postaci $x(x+2)(x+7) \geq 0$: $x \in (-\infty; -6] \cup \langle -4; 1 \rangle$

LUB

- rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0$ i wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu $(x-1)(x+4)(x+6)+24$: $x \in (-\infty; -6) \cup (-4; 1)$ i $x \in \{-7, -2, 0\}$

- 1 p. – rozwiązanie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \leq 0$: $x \in (-\infty; -6) \cup (-4; 1)$

LUB

- przekształcenie nierówności $(x-1)(x+4)(x+6) \geq -24$ do postaci $x(x+2)(x+7) \geq 0$

LUB

- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu $(x-1)(x+4)(x+6)+24$: $x \in \{-7, -2, 0\}$

Zadanie 3. (0-5)

Ustalamy warunki, jakie powinien spełniać parametr k :

$$\begin{cases} \Delta > 0 & (1) \\ x_1 + x_2 \geq 0 & (2) \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

Z warunku (1) otrzymujemy:

$$169 - 4k > 0, \text{ czyli } k \in (-\infty; 42\frac{1}{4})$$

Warunek (2) jest spełniony dla każdego $k \in \mathbb{R}$, bo $x_1 + x_2 = 13 \geq 0$.

Z warunku (3) otrzymujemy: $x_1 \cdot x_2 = k \geq 0$.

Podsumowanie warunków (1)-(3):

$$\begin{cases} k \in (-\infty; 42\frac{1}{4}) \\ k \in \mathbb{R} \\ k \in \langle 0; +\infty \rangle \end{cases}, \text{ czyli } k \in \langle 0; 42\frac{1}{4} \rangle$$

Wyznaczamy sumę i iloczyn miejsc zerowych funkcji g :

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p \text{ i } \sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$$

Zatem:

$$\left(-(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) \right)^2 + 2 \cdot \sqrt{x_1 \cdot x_2} = 37, \text{ czyli } 13 + 4\sqrt{k} = 37, \text{ stąd } k = 36 \text{ i } 36 \in \langle 0; 42\frac{1}{4} \rangle$$

Warunki zadania są spełnione dla $k = 36$.

Zasady oceniania:

- 5 p. – wyznaczenie tych wartości parametru k , dla których spełnione są warunki zadania: $k = 36$

- 4 p. – zapisanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$ i wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe będące liczbami nieujemnymi: $k \in \langle 0; 42\frac{1}{4} \rangle$

- 3 p. – wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe będące liczbami nieujemnymi i wyznaczenie sumy i iloczynu miejsc zerowych funkcji g : $k \in \langle 0; 42\frac{1}{4} \rangle$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p$, $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$

LUB

- zapisanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$ i wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe: $k \in (-\infty; 42\frac{1}{4})$

LUB

- zapisanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$ i wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których miejsca zerowe funkcji f są liczbami nieujemnymi: $k \in \langle 0; +\infty \rangle$

LUB

- rozwiązanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$: $k = 36$

- 2 p. – wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe będące liczbami nieujemnymi: $k \in \langle 0; 42\frac{1}{4} \rangle$

LUB

- wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe i wyznaczenie sumy i iloczynu miejsc zerowych funkcji g : $k \in (-\infty; 42\frac{1}{4})$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p$, $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$

LUB

- wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których miejsca zerowe funkcji f są liczbami nieujemnymi i wyznaczenie sumy i iloczynu miejsc zerowych funkcji g : $k \in \langle 0; +\infty \rangle$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p$, $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$

LUB

– zapisanie równania $13 + 4\sqrt{k} = 37$ 1 p. – wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe: $k \in (-\infty; 42\frac{1}{4})$

LUB

– wyznaczenie zbioru tych wartości parametru k , dla których miejsca zerowe funkcji f są liczbami nieujemnymi: $k \in \langle 0; +\infty \rangle$

LUB

– wyznaczenie sumy i iloczynu miejsc zerowych funkcji g : $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = -p$, $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = q$ **Zadanie 4. (0–3)**Równanie $|y| = 3 - x$ ma rozwiązania, jeżeli spełniony jest warunek $x \leq 3$.Po podniesieniu równania $|y| = 3 - x$ stronami do kwadratu otrzymujemy równanie $y^2 = (3 - x)^2$.Wyznaczamy niewiadomą x , rozwiązując równanie:

$$x^2 - (3 - x)^2 - 2x - 1 = 0, \quad \text{stąd } x = 2\frac{1}{2}$$

Wyznaczamy niewiadomą y , rozwiązując równanie:

$$|y| = \frac{1}{2}, \quad \text{czyli } y \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

Rozwiązaniami układu równań są pary liczb:

$$\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zasady oceniania:3 p. – rozwiązanie podanego układu równań: $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 2 p. – wyznaczenie niewiadomej x : $x = 2\frac{1}{2}$

LUB

– wyznaczenie niewiadomej y : $y \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ 1 p. – zapisanie równania z niewiadomą x : np. $x^2 - (3 - x)^2 - 2x - 1 = 0$

LUB

– zapisanie równania z niewiadomą y : np. $-4|y| + 2 = 0$ **Zadanie 5. (0–3)** x, y – długości boków prostokąta P d – długość przekątnej prostokąta P

Z twierdzenia Pitagorasa wynika układ równań:

$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = (2\sqrt{13})^2 \\ x^2 + (2y)^2 = (\sqrt{73})^2 \end{cases}$$

Stąd po przekształceniu otrzymujemy związek $x^2 + y^2 = 25$.Zatem $d = \sqrt{x^2 + y^2} = 5$.**Zasady oceniania:**3 p. – obliczenie długości przekątnej prostokąta P : $d = 5$ 2 p. – wyznaczenie sumy kwadratów długości boków prostokąta P : $x^2 + y^2 = 25$

LUB

– obliczenie długości boków prostokąta P : $x = 4, y = 3$ 1 p. – zapisanie układu równań $\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = (2\sqrt{13})^2 \\ x^2 + (2y)^2 = (\sqrt{73})^2 \end{cases}$

Zadanie 6. (0-5) $P_{\Delta ABC}$ — pole trójkąta ABC

$A = (2, 4), B = (m, m^2), C = (6, 36)$

$A_0 = (2, 0), B_0 = (m, 0), C_0 = (6, 0)$

$P_{\Delta ABC} = P_{A_0C_0CA} - P_{A_0B_0BA} - P_{B_0C_0CB}$

$P_{A_0C_0CA} = \frac{(36+4) \cdot 4}{2} = 80$

$P_{A_0B_0BA} = \frac{(m^2+4)(m-2)}{2}$

$P_{B_0C_0CB} = \frac{(36+m^2)(6-m)}{2}$

$P_{\Delta ABC} = -2m^2 + 16m - 24 \text{ i } m \in (2; 6)$

Skoro $P_{\Delta ABC} < 4$, to:

$-2m^2 + 16m - 28 < 0, \text{ stąd } m \in (-\infty; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty)$

Po uwzględnieniu założenia $m \in (2; 6)$, otrzymujemy:

$$m \in (2; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; 6)$$

Zasady oceniania:5 p. — wyznaczenie wszystkich wartości parametru m , dla których pole trójkąta ABC jest mniejsze od 4:

$$m \in (2; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; 6)$$

4 p. — rozwiązanie nierówności $P_{\Delta ABC} < 4$ bez uwzględnienia założenia $m \in (2; 6)$:

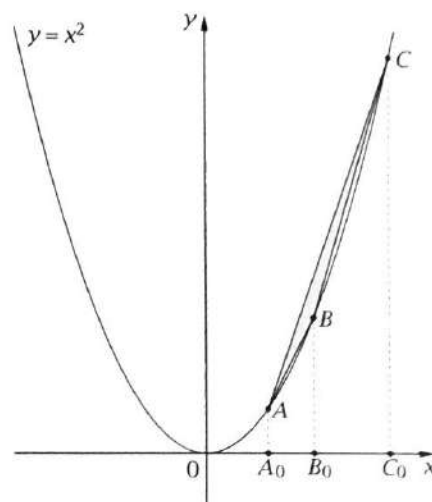
$$m \in (-\infty; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; +\infty)$$

3 p. — zapisanie pola trójkąta ABC w postaci trójmianu kwadratowego o zmiennej m :

$$P_{\Delta ABC} = -2m^2 + 16m - 24$$

2 p. — zapisanie pola trójkąta ABC w postaci wyrażenia ze zmienną m :

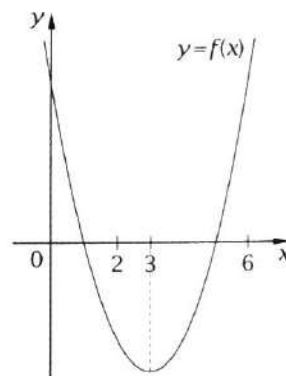
$$\text{np. } P_{\Delta ABC} = \frac{(36+4) \cdot 4}{2} - \frac{(m^2+4)(m-2)}{2} - \frac{(36+m^2)(6-m)}{2}$$

1 p. — wyznaczenie współrzędnych wierzchołków trójkąta ABC : $A = (2, 4), B = (m, m^2), C = (6, 36)$ **Zadanie 7. (0-3)**Rozwiązujemy nierówność $g(x) \geq 0$:

$$-x^2 + 8x - 12 \geq 0, \text{ czyli } x \in \langle 2; 6 \rangle$$

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f to:

$$x_w = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3 \text{ i } x_w \in \langle 2; 6 \rangle$$

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 2; 3 \rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 3; 6 \rangle$ (zobacz rysunek).**Zasady oceniania:**3 p. — wyznaczenie przedziałów monotoniczności funkcji f w zbiorze $\langle 2; 6 \rangle$:funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 2; 3 \rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 3; 6 \rangle$ 2 p. — rozwiązanie nierówności $g(x) \geq 0$ i wyznaczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 5$: $x \in \langle 2; 6 \rangle, x_w = 3$ 1 p. — rozwiązanie nierówności $g(x) \geq 0$: $x \in \langle 2; 6 \rangle$

LUB

— wyznaczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 5$: $x_w = 3$

Zadanie 8. (0-3)

Z równości $a_n \cdot a_{n+1} = -\frac{a_n^2}{3} - \frac{3a_{n+1}^2}{4}$ wynika:

$$4a_n^2 + 12a_n \cdot a_{n+1} + 9a_{n+1}^2 = 0, \text{ stąd } (2a_n + 3a_{n+1})^2 = 0, \text{ czyli } \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{2}{3}$$

Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = -\frac{2}{3}$ i pierwszym wyrazie $a_1 \neq 0$.

$$\text{Stąd } a_n = a_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0.$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie granicy ciągu (a_n) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

2 p. — obliczenie wartości ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$: $-\frac{2}{3}$

1 p. — zapisanie równości $(2a_n + 3a_{n+1})^2 = 0$

Zadanie 9. (0-2)

Przekształcamy lewą stronę nierówności:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + 1)^2 + (\cos \alpha + 1)^2 = 4 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$$

Przekształcamy nierówność:

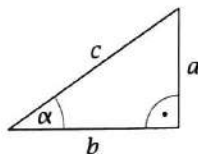
$$4 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha > 6$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha > 1$$

Dla każdego kąta ostrego α (zobacz rysunek) zachodzi:

① $\sin \alpha > 0$ i $\cos \alpha > 0$, więc $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$

② $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} > 1$



Z ① i ② wynika, że zachodzi nierówność $\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha > 1$, czyli prawdziwa jest również nierówność $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + 1)^2 + (\cos \alpha + 1)^2 > 6$.

Zasady oceniania:

2 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

1 p. — zapisanie tezy w postaci nierówności $\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha > 1$

Zadanie 10. (0-3)

Z podobieństwa prostokątów będących ścianami prostopadłościanu wynika:

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{a}, \text{ czyli } b = \frac{a^2}{8}$$

Wyznaczamy a i b :

$$8 \cdot a \cdot b = 1728, \text{ więc } a^3 = 1728, \text{ czyli } a = 12 \text{ i } b = 18$$

Zatem pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe:

$$P_c = 2 \cdot (8 \cdot 12 + 8 \cdot 18 + 12 \cdot 18) = 912$$

Zasady oceniania:

3 p. — obliczenie pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu: $P_c = 912$

2 p. — wyznaczenie a i b : $a = 12$ i $b = 18$

1 p. — wyznaczenie związku między a i b : np. $b = \frac{a^2}{8}$ lub $ab = 216$

Zadanie 11. (0-4)

Każdy z odcinków BD , WZ i XY jest równoległy do odcinka FH , zatem $BD \parallel WZ$ oraz $BD \parallel XY$. Wynika stąd, że trójkąt DBP jest podobny do trójkąta WZP oraz trójkąt DBQ jest podobny do trójkąta XYQ (cecha kkk), a ponieważ $2|WZ| = |FH| = |BD|$, więc skale podobieństwa tych trójkątów są równe 2.

Trójkąty BQP i BYZ mają wspólny kąt przy wierzchołku B oraz $\frac{|BP|}{|BZ|} = \frac{|BQ|}{|BY|} = \frac{2}{3}$ (cecha bkb), a więc trójkąt BQP jest podobny do trójkąta BYZ w skali $\frac{2}{3}$.

Zatem:

$$|PQ| = \frac{2}{3} |YZ| = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Zasady oceniania:

4 p. — przeprowadzenie pełnego dowodu

3 p. — uzasadnienie podobieństwa trójkątów DBP i WZP , trójkątów DBQ i XYQ oraz BQP i BYZ wraz z obliczeniem skal tych podobieństw: 2, 2, $\frac{2}{3}$

LUB

— obliczenie długości odcinka PQ bez uzasadnienia podobieństw odpowiednich trójkątów: $\sqrt{2}$

2 p. — uzasadnienie podobieństwa trójkątów DBP i WZP oraz DBQ i XYQ oraz obliczenie skal tych podobieństw: 2, 2

LUB

— obliczenie skal podobieństwa trójkątów DBP i WZP , trójkątów DBQ i XYQ oraz BQP i BYZ bez uzasadnienia tych podobieństw: 2, 2, $\frac{2}{3}$

1 p. — uzasadnienie podobieństwa trójkątów DBP i WZP oraz DBQ i XYQ

LUB

— obliczenie skal podobieństwa trójkątów DBP i WZP oraz DBQ i XYQ bez uzasadnienia tych podobieństw: 2, 2

Zadanie 12. (0–2)

I sposób

Obliczamy, ile jest sposobów zajęcia 7 miejsc na ławce, w których dwie z góry ustalone osoby (rezerwowy bramkarz i kapitan) będą siedziały obok siebie:

$$2 \cdot 6 \cdot 5! = 1440$$

Obliczamy, ile jest sposobów zajęcia 7 miejsc na ławce, w których dwie z góry ustalone osoby (rezerwowy bramkarz i kapitan) nie będą siedziały obok siebie:

$$7! - 1440 = 3600$$

II sposób

Liczba wolnych miejsc między kapitanem a bramkarzem	Liczba możliwości zajęcia 7 miejsc na ławce
1	$2 \cdot 5 \cdot 5! = 1200$
2	$2 \cdot 4 \cdot 5! = 960$
3	$2 \cdot 3 \cdot 5! = 720$
4	$2 \cdot 2 \cdot 5! = 480$
5	$2 \cdot 5! = 240$

Zatem:

$$10 \cdot 5! + 8 \cdot 5! + 6 \cdot 5! + 4 \cdot 5! + 2 \cdot 5! = 30 \cdot 5! = 3600$$

Zasady oceniania:

2 p. — obliczenie liczby sposobów zajęcia 7 miejsc na ławce, w których dwie z góry ustalone osoby nie będą siedziały obok siebie: 3600

1 p. — (I sposób) obliczenie liczby sposobów zajęcia 7 miejsc na ławce, w których dwie z góry ustalone osoby będą siedziały obok siebie: 1440

LUB

— (II sposób) stwierdzenie, że aby dwie z góry ustalone osoby nie siedziały obok siebie może być między nimi jedno, dwa, trzy, cztery lub pięć wolnych miejsc i obliczenie liczby usadzeń przynajmniej w jednym z tych wariantów: $10 \cdot 5!$, $8 \cdot 5!$, $6 \cdot 5!$, $4 \cdot 5!$ lub $2 \cdot 5!$

Zadanie 13. (0-4)

A – Za drugim razem wylosujemy kulę czarną.

B – Za pierwszym razem wylosujemy kulę białą.

k – liczba białych kul w pojemniku

$2k$ – liczba czarnych kul w pojemniku

Wyznaczamy liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniom $A \cap B$ i B :

$$|A \cap B| = 2k^2 \quad |B| = k(3k - 1)$$

$$\text{Zatem } P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2k}{3k - 1}.$$

Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{2k}{3k - 1} = 0,7, \text{ stąd } k = 7 \text{ oraz } 3k = 21$$

W pojemniku jest 21 kul.

Zasady oceniania:

4 p. – wyznaczenie liczby wszystkich kul w pojemniku: 21

3 p. – wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A|B$ w zależności od liczby kul białych w pojemniku: $P(A|B) = \frac{2k}{3k - 1}$

2 p. – wyznaczenie liczebności zdarzeń $A \cap B$ i B w zależności od liczby kul białych w pojemniku: $2k^2, k(3k - 1)$

1 p. – wyznaczenie liczebności zdarzenia $A \cap B$ w zależności od liczby kul białych w pojemniku: $2k^2$
LUB

– wyznaczenie liczebności zdarzenia B w zależności od liczby kul białych w pojemniku: $k(3k - 1)$

Zadanie 14. (0-6)

h – wysokość ostrosłupa $EFGHT$

x – długość przekątnej podstawy ostrosłupa $EFGHT$

V – objętość ostrosłupa $EFGHT$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta TBW wynika:

$$|WT| = \sqrt{|BW|^2 - |TB|^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

Z podobieństwa trójkątów EGW i ACW (cecha bkb) wynika:

$$\frac{x}{|AC|} = \frac{|WT| - h}{|WT|}, \text{ stąd } \frac{x}{6\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - h}{3\sqrt{2}}, \text{ czyli } x = 6\sqrt{2} - 2h$$

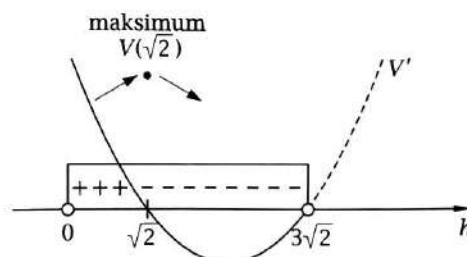
$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot h = \frac{2}{3}h^3 - 4\sqrt{2}h^2 + 12h$$

Dziedzina funkcji V : $h \in (0; 3\sqrt{2})$

$$V'(h) = 2h^2 - 8\sqrt{2}h + 12$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{2} \text{ lub } h = 3\sqrt{2}$$

Funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0; \sqrt{2})$, a malejąca w przedziale $(\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$. Zatem funkcja V osiąga w punkcie $h = \sqrt{2}$ maksimum, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji. Wówczas największa objętość ostrosłupa $EFGHT$ to $V(\sqrt{2}) = \frac{16\sqrt{2}}{3}$.



Zasady oceniania:

6 p. – wyznaczenie największej objętości ostrosłupa $EFGHT$ wraz z pełnym uzasadnieniem:

$$V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

5 p. – rozwiązanie równania $V'(h) = 0$ lub równania $V'(x) = 0$ z uwzględnieniem dziedziny funkcji V :
 $h = \sqrt{2}$ lub $x = 4\sqrt{2}$

4 p. — wyznaczenie dziedziny i pochodnej funkcji V :

$$h \in (0; 3\sqrt{2}), V'(h) = 2h^2 - 8\sqrt{2}h + 12 \text{ lub } x \in (0; 6\sqrt{2}), V'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \sqrt{2}x$$

LUB

— rozwiązanie równania $V'(h) = 0$ lub równania $V'(x) = 0$ bez uwzględnienia dziedziny funkcji V

3 p. — obliczenie pochodnej funkcji V : $V'(h) = 2h^2 - 8\sqrt{2}h + 12$ lub $V'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \sqrt{2}x$

2 p. — wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność objętości ostrosłupa $EFGHT$ od jego wysokości: $V(h) = \frac{2}{3}h^3 - 4\sqrt{2}h^2 + 12h$

LUB

— wyznaczenie wzoru funkcji opisującej zależność objętości ostrosłupa $EFGHT$ od długości przekątnej jego podstawy: $V(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$

1 p. — ustalenie związku między wysokością ostrosłupa $EFGHT$ a długością przekątnej jego podstawy: np. $x = 6\sqrt{2} - 2h$

LUB

— wyznaczenie dziedziny funkcji V : $h \in (0; 3\sqrt{2})$ lub $x \in (0; 6\sqrt{2})$

ODPOWIEDZI

Arkusz egzaminacyjny nr 1

1. D. 2. D. 3. A. 4. C. 5. C. 7. B. 8. A. 9. FP. 10. A. 11. A. 12. A. 13. 60. 14. C1. 15. (3, 2).
16. DG. 17. D. 18. EB. 19. D. 20. C. 21. $a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. 22. A. 23. B. 24. DH. 25. C. 26. A.
27. D. 28. $P = 24$. 29. 60; 2. 30. B. 31. C. 32. PF. 33. $x = 20$ cm, $P = 1200$ cm².

Arkusz egzaminacyjny nr 2

1. B. 2. C. 3. D. 4. PP. 5. D. 6. D. 7. FP. 8. A. 9. $n = 75$. 10. DE. 11. 100%. 12. C. 13. C. 14. FF.
15. ED. 16. C. 17. B. 18. A. 19. $a_{12} = 32$, $a_{13} = 34$, $a_{14} = 36$, $a_{15} = 38$, $a_{16} = 40$. 20. CH. 21. DF.
22. $\frac{7\sqrt{34}}{40}$. 23. PP. 24. 30; 150. 25. D. 26. D. 27. B2. 28. C. 29. D. 30. D. 31. $V = 144$. 32. 8,5.

Arkusz egzaminacyjny nr 3

1. C. 2. A. 3. B. 4. D. 6. A. 7. C. 8. C. 9. B. 10. A. 11. B. 12. $x \in \langle -5; 10 \rangle$, $y \in \langle -2; 4 \rangle$; 6;
funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -3; -1 \rangle$, $\langle 5; 10 \rangle$, malejąca w każdym
z przedziałów: $\langle -5; -3 \rangle$, $\langle 2; 5 \rangle$, stała w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$. 13. $g(x) = 3x - 2$, $x \in \left(-3; \frac{2}{3}\right)$.
14. A. 15. CG. 16. A. 17. C2. 18. FP. 19. A. 20. C. 21. C. 22. B. 23. B. 24. D. 25. B. 26. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$.
27. AE. 28. PP. 29. C. 30. 60°, $16\sqrt{3}$. 31. A. 32. C. 33. Krawędź podstawy graniastosłupa: 4,
wysokość graniastosłupa: 6, $P = 112$.

Arkusz egzaminacyjny nr 4

1. D. 2. C. 3. A. 4. B. 5. A. 7. PF. 8. B. 9. C. 10. DF. 11. C. 12. B. 13. B. 14. $\frac{1}{20}x$. 15. D. 16. A.
17. B. 18. B. 19. $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$. 20. FP. 21. A. 22. D. 23. $2\sqrt{6}$. 24. C. 25. BH. 26. $P = (3, 8)$. 27. C.
28. D. 29. A. 30. $48 + 12\sqrt{2}$. 31. AF. 32. A. 33. 9×6 , $P = 54$.

Arkusz egzaminacyjny nr 5

1. B. 2. C. 3. B. 4. A. 5. D. 6. D. 7. FP. 8. D. 9. FP. 10. C. 11. C. 12. D. 13. A. 14. $a_1 = 12$, $r = -1$.
15. PP. 16. B. 17. B. 18. DE. 20. C2. 21. B. 22. FP. 23. $P_{\triangle APD} = P_{\triangle BPC} = 6$. 24. CE. 25. A. 26. D.
27. CH. 28. D. 29. $P_c = 56 + 70\sqrt{3} + 40\sqrt{6}$. 30. A. 31. $n = 3$. 32. $a = 7$, $b = 4$. 33. $x = 4$, $P = 4\sqrt{3}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 6

1. C. 2. A. 3. CF; $13 + 10\sqrt{2}$. 4. A. 5. C. 6. $W(x) = (1 - 3x)(1 + 3x)(x - 2)$. 7. PF. 8. C. 9. D. 10. D.
11. B. 12. DF; $x = 1,5$. 13. PF. 14. A. 15. B. 16. B. 17. 13:05. 18. FP. 19. AF. 20. D. 21. A.
22. $145 + 5\sqrt{97} \approx 194,2$ m. 23. CF. 24. C. 25. 6; 640, 800. 26. C. 27. D. 28. BF. 29. $\frac{17}{36}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 7

1. PF; C. 2. A. 3. DF. 4. A. 6. B. 7. C. 8. 10; $x \in \left\{-3, 0, \frac{1}{2}\right\}$. 9. A. 10. B.
11. $x \in (-\infty; -4) \cup \langle 1; +\infty \rangle$. 12. BH. 13. C1. 14. $\frac{90}{7}$ cm $\times$ $\frac{180}{7}$ cm $\times$ $\frac{150}{7}$ cm, $P = \frac{16200}{7}$ cm². 15. B.
16. PP; AG. 17. A; $S_{16} \approx 77$. 18. D. 19. A. 20. PF. 21. $3 + 2\sqrt{2}$. 22. CH. 23. C. 24. B; PP.
25. $V = 54\sqrt{3}$. 26. B. 27. A. 28. C.

Arkusz egzaminacyjny nr 8

1. A. 2. C. 3. A. 4. A. 5. B. 7. C. 8. B. 9. B. 10. FP. 11. D. 12. D. 13. D. 14. C. 15. D; PF.
 16. C. 17. B. 18. 9; 0 i 3. 19. $f(x) = \frac{3}{2}x + 7, x \in \left(-\frac{14}{3}; +\infty\right)$. 20. PF. 21. C. 22. $a_{n+1} - a_n = 2n - 3$.
 23. BG. 24. D. 25. AF. 26. C. 27. Około 2,5. 28. B. 29. $C = (-1, 0)$ lub $C = (5, 12)$ 30. A. 31. D.
 32. C. 33. $\frac{3}{20}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 9

1. B. 2. A. 3. C. 4. C. 5. PP. 6. D. 7. B. 8. C. 9. D. 10. FF. 11. D. 12. D. 13. AG.

$$14. s(t) = \begin{cases} 24t & \text{dla } t \in \langle 0; 1,5 \rangle \\ 0 & \text{dla } t \in \langle 1,5; 2,5 \rangle; \text{ PF; 81.} \\ 18t & \text{dla } t \in \langle 2,5; 5 \rangle \end{cases}$$

15. C. 16. $q = 1$ lub $q = 4$. 17. A. 18. B. 19. Około 8,7 m. 20. A. 21. BF. 22. $P = 27\sqrt{3}$. 23. A.
 24. FP. 25. D. 26. Co najmniej 6. 27. C. 28. D. 29. AH; $\frac{37}{149}$. 30. C.

Arkusz egzaminacyjny nr 10

1. C. 2. FP. 3. B. 4. A. 5. B. 6. D. 7. PP; A. 8. D. 9. A. 10. B. 11. $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$;
 $\{-1, 0, 1\}$ 12. D. 13. A. 14. B. 15. $x_1 = \frac{6-\sqrt{34}}{2}, x_2 = \frac{6+\sqrt{34}}{2}$. 16. FP. 17. D. 18. A. 19. B. 20. C.
 22. C. 23. D. 24. B; PP. 25. Około 1 km. 26. A. 27. B. 28. $|AP| = 7\sqrt{5}, y = \frac{1}{2}x - 3$. 29. CG.
 30. $|SB| = \sqrt{105}$. 31. C. 32. C. 33. $\frac{1}{20}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 11

1. $a^b = \frac{1}{16}$. 2. $x \in \langle -5; 3 \rangle$. 3. $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.
 4. $x \in (-\infty; -4) \cup \langle -2; -1 \rangle \cup (-1; 1) \cup \langle 2; +\infty \rangle$. 5. 13.
 6. $x \in \left\{-\frac{13}{18}\pi, -\frac{11}{18}\pi, -\frac{1}{18}\pi, \frac{1}{18}\pi, \frac{11}{18}\pi, \frac{13}{18}\pi\right\}$. 8. $m \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup \langle 2; +\infty \rangle$.
 9. $P = 20$. 10. $\cos \angle ASD = \frac{3}{5}$. 11. $6(1 + \sqrt{5} + \sqrt{6})$. 12. $\frac{41}{55}$. 14. $r = H = 4, V = 64\pi$.

Arkusz egzaminacyjny nr 12

1. $a + c - b = 2$. 3. $g(x) \in \langle 0; 4 \rangle$. 4. $S_{m+k} = 0$. 5. $k \in \{-2, 1, 2\}$. 6. $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ razy (około 1,65).
 7. $x \in \left\langle \frac{1}{4}\pi + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$. 9. $A = (-4, -3), B = (8, 1)$. 10. $P = 108\sqrt{10}$. 11. $\frac{1}{3}$.
 12. $m = 5, k = 3$. 13. $y = \frac{3}{10}x - \frac{4}{5}$. 14. $|AB| = |CD| = 2\sqrt{3}, |BC| = |AD| = 6, P = 12\sqrt{3}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 13

1. $x - z = 1\frac{5}{24}$. 2. $a = 5$. 3. $m \in \{-2, 2\}$. 4. $f(x) = \frac{1}{5}x$. 5. $q = 2$. 6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{P_n} = 4$.
 7. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. 8. $\frac{4}{9}$. 10. 2 razy. 11. 12. 12. Co najwyżej 15. 13. $x = \frac{1}{2}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 14

2. $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1)$. 3. $m = 1$. 4. $38\frac{7}{19}$. 5. 9. 6. $p \in (-1; 4) \cup (8; 10)$.
 7. $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. 8. $\frac{25}{16}$. 9. $x^2 + y^2 = 260$. 10. $2\sqrt{2}$. 11. 12. 12. $\frac{2}{3}$.
 13. $c = 5\sqrt{5}$.

Arkusz egzaminacyjny nr 15

1. 1008. 2. $A = x \langle -7; -6 \rangle \cup \langle -4; -2 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle, f(-7) = \frac{4}{3}$. 3. $k = 36$. 4. $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$
 5. 5. 6. $m \in (2; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}; 6)$. 7. Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle 2; 3 \rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 3; 6 \rangle$. 8. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. 10. 912. 12. 3600. 13. 21. 14. $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$.