Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

MATEMATYKA 3

Podręcznik do liceów i techników

ZAKRES ROZSZERZONY

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Spis treści

Wstęp 6

1. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych 7
Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych 12
Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych 17
Działania na ułamkach algebraicznych 21
Równania wymierne 26
Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych 32
Nierówności wymierne 38
Zadania na dowodzenie z zastosowaniem średniej arytmetycznej, średniej geometrycznej i średniej kwadratowej kilku liczb 43
Funkcja homograficzna 50
Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach 57
Funkcje wymierne 64
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1. 70

2. Ciągi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów 73
Monotoniczność ciągów 80
Ciąg arytmetyczny 85
Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 93
Ciąg geometryczny 100
Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 110
Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne 117
Lokaty pieniężne i kredyty bankowe 121
Granica ciągu liczbowego 131
Obliczanie granic ciągów zbieżnych 138
Wybrane własności ciągów zbieżnych 145
Ciągi rozbieżne do nieskończoności 150
Szereg geometryczny 156
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2. 163

3. Kombinatoryka. Dwumian Newtona. Trójkąt Pascala

Reguła mnożenia i reguła dodawania 166
Wariacje 173
Permutacje 179
Kombinacje 186
Kombinatoryka – zadania różne 194
Symbol Newtona. Wzór Newtona. Trójkąt Pascala 201
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3. 208

4. Geometria płaska – czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy 212
Trapezy 215
Równoległoboki 222
Okrąg opisany na czworokącie 230
Okrąg wpisany w czworokąt 237
Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie 242
Podobieństwo. Czworokąty podobne 245
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4. 252

5. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu 255
Pole równoległoboku. Pole rombu 259
Pole trapezu 264
Pole czworokąta – zadania różne 268
Pola figur podobnych 274
Mapa. Skala mapy 278
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5. 280

6. Elementy analizy matematycznej

Granica funkcji w punkcie 283
Obliczanie granicy funkcji w punkcie 289
Granice jednostronne funkcji w punkcie 293
Granica funkcji w nieskończoności 297
Granica niewłaściwa funkcji 301
Ciągłość funkcji w punkcie 307
Ciągłość funkcji w zbiorze 312
Asymptoty wykresu funkcji 320
Pochodna funkcji w punkcie 327
Funkcja pochodna 336
Funkcja złożona. Pochodna funkcji złożonej 345
Styczna do wykresu funkcji 353
Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji 359
Ekstrema lokalne funkcji 364
Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale 374
Zadania optymalizacyjne 380
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6. 387

7. Trygonometria

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej – powtórzenie wiadomości z klasy 2 390
Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych 398
Równania trygonometryczne, cz. 1. 402
Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy 411

Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta 420
Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych 425
Równania trygonometryczne, cz. 2. 430
Nierówności trygonometryczne 436
Pochodne funkcji trygonometrycznych 442
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 7. 449

8. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka 451
Kąt między niezerowymi wektorami 456
Proste w układzie współrzędnych 461
Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi 467
Pole trójkąta. Pole wielokąta 472
Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu 476
Wzajemne położenie dwóch okręgów 483
Zadania różne z geometrii analitycznej 488
Wybrane przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych 496
Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej 505
Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 8. 511

Skorowidz 514

Odpowiedzi do zadań 515

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych 568

Wstęp

Materiał zamieszczony w tym podręczniku jest kontynuacją i rozwinięciem zagadnień matematycznych, przedstawionych w podręcznikach do nauczania matematyki w klasie pierwszej i drugiej.

Klasę trzecią rozpoczynamy od omówienia działań na ułamkach algebraicznych i rozwiązywania zadań z wykorzystaniem równań i nierówności wymiernych. Następnie omawiamy własności ciągów. W trzecim rozdziale omawiamy metody zliczania obiektów w różnych sytuacjach kombinatorycznych oraz zastosowanie wzoru Newtona. W kolejnych dwóch rozdziałach omawiamy własności czworokątów. Rozdział szósty poświęcony jest elementom analizy matematycznej. Omawiamy w nim pojęcie granicy funkcji i własności funkcji ciągłych. Następnie zajmujemy się pochodną i zastosowaniem pochodnej w rozwiązywaniu zadań. W rozdziale siódmym wprowadzamy wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumę i różnicę sinusów, cosinusów i tangensów różnych kątów oraz ich zastosowania. Ostatni rozdział poświęcony jest geometrii analitycznej, gdzie przypominamy i pogłębiamy wiadomości o prostych i okręgach, wprowadzamy wzór na odległość punktu od prostej.

Niektóre zagadnienia omawiane w naszym podręczniku przeznaczone są dla uczniów szczególnie zainteresowanych matematyką. Należą do nich: dowodzenie z zastosowaniem średnich (str. 43-49), dowodzenie z definicji zbieżności ciągu (przykłady 2, 3, twierdzenie 1, str. 135-136), dowód twierdzenia 4., str. 140, sprawdzanie z definicji, czy ciąg jest rozbieżny do nieskończoności (przykłady 1, 2, str. 150-151), wyznaczanie asymptot wykresu funkcji (str. 320-326), niektóre dowody dotyczące własności pochodnych (dowód twierdzenia 2, str. 433, dowód twierdzenia 1, str. 348), pochodne funkcji trygonometrycznych, str. 442-448), kąt między niezerowymi wektorami (str. 456-460).

Podobnie jak w klasach poprzednich, ważne definicje i twierdzenia zostały oznaczone kolorowymi ramkami z jasnoszarym tłem. Inne istotne informacje, na które warto zwrócić uwagę, zostały oznaczone jasnobrązowym tłem. Głębsze zrozumienie omawianych zagadnień umożliwiają rozwiązane przykłady oraz ćwiczenia przeznaczone do samodzielnego rozwiązania. Każdy temat kończy się zestawem zadań, zatytułowanym *Sprawdź, czy rozumiesz*. Na końcu każdego rozdziału znajdują się zadania powtórzeniowe zatytułowane *Sprawdź, czy umiesz*. Wszystkie zadania na dowodzenie zostały oznaczone symbolem **D**. Na końcu podręcznika znajdują się odpowiedzi do większości zadań.

Życzymy dalszych sukcesów w uczeniu się matematyki!

Autorzy

Ułamek $\frac{x^3+3x}{x^2+3}$ po skróceniu przyjmuje postać x, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Ćwiczenie 3. Skróć dany ułamek algebraiczny:

a) $\frac{15-5x}{10x^2-90}$ b) $\frac{x^2+3}{x^3+2x^2+3x+6}$ c) $\frac{x^3+1}{x^3+2x^2+3x+2}$

Rozszerzanie ułamków algebraicznych

Aby rozszerzyć ułamek algebraiczny:

- zapisujemy dziedzinę danego ułamka,
- wykonujemy mnożenie w liczniku i mianowniku danego ułamka przez ten sam niezerowy wielomian,
- określamy dziedzinę otrzymanego ułamka.

Przykład 3.

Rozszerzymy ułamek $\frac{x-3}{x^2}$, gdzie $x \neq 0$, tak, aby:

a) jego licznik był równy $(x-3)(x+1)$

b) jego mianownik był równy $x^4 - 5x^3$.

Ad a)

- Dziedziną ułamka jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$.
- Licznik i mianownik danego ułamka mnożymy przez dwumian $x + 1$, gdzie $x \neq -1$:

$$\frac{x-3}{x^2} = \frac{(x-3)\cdot(x+1)}{x^2\cdot(x+1)}$$

- Podajemy dziedzinę ułamka po rozszerzeniu:

$D = \boldsymbol{R} - \{-1, 0\}$

- Porządkujemy wielomiany w liczniku i mianowniku ułamka:

$$\frac{(x-3)\cdot(x+1)}{x^2\cdot(x+1)} = \frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2}$$

Ułamek $\frac{x-3}{x^2}$ po rozszerzeniu ma postać $\frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2}$, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \{-1, 0\}$.

Ad b)

- Rozkładamy wielomian $x^4 - 5x^3$ na czynniki:

$x^4 - 5x^3 = x^2 \cdot x \cdot (x-5)$

Skracanie ułamków algebraicznych

Aby skrócić ułamek algebraiczny, wykonujemy następujące czynności:

- przedstawiamy wielomiany, występujące w liczniku i mianowniku ułamka, w postaci iloczynu czynników możliwie najniższego stopnia – jeśli to możliwe,
- określamy dziedzinę ułamka przed jego skróceniem,
- dzielimy licznik i mianownik ułamka przez ich wspólne czynniki.

Przykład 1.

Skrócimy ułamek algebraiczny $\frac{3x^3+6x^2}{x^4-4x^2}$.

- Rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku ułamka na czynniki:

$$\frac{3x^3+6x^2}{x^4-4x^2}=\frac{3x^2(x+2)}{x^2(x-2)(x+2)}$$

$3x^3 + 6x^2 = 3x^2(x + 2)$ oraz
$x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$

- Wyznaczamy dziedzinę ułamka:

$x^2(x-2)(x+2)\neq 0$ czyli

$x\neq 0 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq -2$ zatem

$D=\boldsymbol{R}-\{-2, 0, 2\}$.

- Na koniec dzielimy licznik i mianownik ułamka przez ich wspólne czynniki.

$$\frac{3\cdot \overset{1}{\cancel{x^2}}\cdot \cancel{(x+2)}^{1}}{\underset{1}{\cancel{x^2}}\cdot(x-2)\cdot \underset{1}{\cancel{(x+2)}}}=\frac{3}{x-2}$$

Ułamek $\frac{3x^3+6x^2}{x^4-4x^2}$ po skróceniu ma postać $\frac{3}{x-2}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{-2, 0, 2\}$.

Zauważ, że wyrażenia z licznika i mianownika ułamka z przykładu 1. przed skróceniem to wielomiany podzielne przez wielomiany x^2 oraz $x + 2$, a liczby 0 i -2 są wspólnymi pierwiastkami tych wielomianów.

Przykład 2.

Skrócimy ułamek $\frac{x^3+3x}{x^2+3}$.

Wielomian występujący w mianowniku ułamka nie ma pierwiastków. Zatem dziedziną ułamka jest zbiór liczb rzeczywistych.
Skracamy ułamek, wyłączając najpierw x poza nawias w liczniku ułamka:

$$\frac{x^3+3x}{x^2+3}=\frac{x(x^2+3)}{x^2+3}=x$$

Ułamek $\frac{x^3+3x}{x^2+3}$ po skróceniu przyjmuje postać x, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Ćwiczenie 3. Skróć dany ułamek algebraiczny:

a) $\frac{15-5x}{10x^2-90}$ b) $\frac{x^2+3}{x^3+2x^2+3x+6}$ c) $\frac{x^3+1}{x^3+2x^2+3x+2}$

Rozszerzanie ułamków algebraicznych

Aby rozszerzyć ułamek algebraiczny:

- zapisujemy dziedzinę danego ułamka,
- wykonujemy mnożenie w liczniku i mianowniku danego ułamka przez ten sam niezerowy wielomian,
- określamy dziedzinę otrzymanego ułamka.

Przykład 3.

Rozszerzymy ułamek $\frac{x-3}{x^2}$, gdzie $x \neq 0$, tak, aby:

a) jego licznik był równy $(x-3)(x+1)$

b) jego mianownik był równy $x^4 - 5x^3$.

Ad a)

- Dziedziną ułamka jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$.
- Licznik i mianownik danego ułamka mnożymy przez dwumian $x + 1$, gdzie $x \neq -1$:

$$\frac{x-3}{x^2} = \frac{(x-3)\cdot(x+1)}{x^2\cdot(x+1)}$$

- Podajemy dziedzinę ułamka po rozszerzeniu:

$D = \boldsymbol{R} - \{-1, 0\}$

- Porządkujemy wielomiany w liczniku i mianowniku ułamka:

$$\frac{(x-3)\cdot(x+1)}{x^2\cdot(x+1)} = \frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2}$$

Ułamek $\frac{x-3}{x^2}$ po rozszerzeniu ma postać $\frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2}$, gdzie $D = \boldsymbol{R} - \{-1, 0\}$.

Ad b)

- Rozkładamy wielomian $x^4 - 5x^3$ na czynniki:

$x^4 - 5x^3 = x^2 \cdot x \cdot (x-5)$

- Rozszerzamy ułamek, mnożąc jego licznik i mianownik przez $x\cdot(x-5)$, gdzie $x \neq 0$ oraz $x \neq 5$.

$$\frac{(x-3)\cdot x\cdot(x-5)}{x^2\cdot x\cdot(x-5)}$$

- Dziedziną ułamka po rozszerzeniu jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{0, 5\}$.
- Wykonujemy działania:

$$\frac{(x-3)\cdot x\cdot(x-5)}{x^2\cdot x\cdot(x-5)} = \frac{(x^2-3x)(x-5)}{x^4-5x^3} = \frac{x^3-8x^2+15x}{x^4-5x^3}$$

Ułamek po rozszerzeniu ma postać $\frac{x^3-8x^2+15x}{x^4-5x^3}$, gdzie $D = \boldsymbol{R}-\{0, 5\}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz dziedzinę ułamka algebraicznego:

a) $\frac{3x^2}{x}$ b) $\frac{2}{x^2-5}$ c) $\frac{3x^2+5}{7+x^4}$ d) $\frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

e) $\frac{3x-7}{x^3+8}$ f) $\frac{5x^2+8}{x^2+3x-4}$ g) $\frac{8x^2+1}{(x^2-9)x^2}$ h) $\frac{2x^3+5x-1}{x^3-x+6}$

2. Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest zbiór:

a) $\boldsymbol{R}$ b) $\boldsymbol{R}-\{2\}$ c) $\boldsymbol{R}-\{0, 1\}$ d) $\boldsymbol{R}-\{-1, 1, 5\}$

3. Skróć dany ułamek algebraiczny; podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3x^{10}}{9x^{12}}$ b) $\frac{18(-x)^3}{9x^2}$ c) $\frac{(-2x)^3-3(-x)^3}{5(-x)^6}$

d) $\frac{2x^2-32}{-3x+12}$ e) $\frac{25x^2-1}{(1+5x)^2}$ f) $\frac{8x^3+27}{6x+9}$

g) $\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$ h) $\frac{8-x^3}{x^2+2x+4}$

4. Skróć dany ułamek algebraiczny; podaj konieczne założenia.

a) $\frac{(x-2)(x+8)-x+2}{3x^2-12}$ b) $\frac{7x-21-(2x+3)(x-3)}{2-x}$

c) $\frac{3x^7+81x^4}{x^2-3x+9}$ d) $\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}$

5. Skróć dany ułamek algebraiczny. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{(1-x)^4}$

b) $\frac{3x(x^2+2x+1)}{x^3+x^2+5x+5}$

c) $\frac{x^4-1}{x^3+3x^2-x-3}$

d) $\frac{2x^3+5x^2-4x-3}{2x^2+7x+3}$

e) $\frac{x^4-13x^2+36}{x^3+x^2-6x}$

f) $\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-4x+4}$

6. Skróć dany ułamek algebraiczny i oblicz jego wartość dla podanej obok ułamka liczby.

a) $\frac{5x^2+19x-4}{2x+8}$, $\sqrt{2}$

b) $\frac{x^2+2x+4}{4x^3-32}$, $2-\sqrt{3}$

c) $\frac{9x^2-6x+1}{3x^2-x}$, $\sqrt[3]{5}$

d) $\frac{4x+12}{6-x-x^2}$, $\sqrt[3]{3}$

7. Rozszerz ułamek tak, aby miał wskazany licznik (mianownik). Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{2}{x}=\frac{}{3x^3}$

b) $\frac{x+1}{2x-3}=\frac{x^2-1}{}$

c) $\frac{3+x}{3-x}=\frac{}{x^2-9}$

d) $\frac{2x+1}{x^2-3x+9}=\frac{}{x^3+27}$

e) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{2x^3-6x^2}{}$

f) $\frac{3x}{2x-2}=\frac{}{2x^2+12x-14}$

8. Rozszerz ułamek tak, aby miał wskazany licznik (mianownik). Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x}{x-1}=\frac{x^3+5x}{}$

b) $\frac{x}{x+6}=\frac{}{x(x^2+5x-6)}$

c) $\frac{2x-1}{3x+5}=\frac{}{3x^2-x-10}$

d) $\frac{x^2+3}{x+2}=\frac{x^3-2x^2+3x-6}{}$

e) $\frac{x+3}{4x}=\frac{x^3+2x^2-9x-18}{}$

f) $\frac{x-1}{x^2+2x+4}=\frac{}{8x-x^4}$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych wykonujemy podobnie jak dodawanie i odejmowanie ułamków arytmetycznych.

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych o jednakowych mianownikach

Sumą dwóch ułamków algebraicznych o tym samym mianowniku jest ułamek algebraiczny, którego licznik jest sumą wielomianów występujących w licznikach tych ułamków, a mianownik jest wielomianem występującym w mianowniku każdego ze składników. Dziedziną otrzymanego ułamka algebraicznego jest dziedzina każdego z ułamków składowych.

Podobnie, wykonując odejmowanie dwóch ułamków algebraicznych o tym samym mianowniku, otrzymujemy ułamek algebraiczny, którego licznik jest różnicą wielomianu występującego w liczniku pierwszego ułamka i wielomianu występującego w liczniku drugiego ułamka, a mianownik jest wielomianem występującym w mianowniku każdego z ułamków.

Przykład 1.

Wykonamy odejmowanie ułamków: $\frac{2x-3}{x^2-x}-\frac{x+7}{x^2-x}$.

Określamy dziedzinę wyrażenia:

$x^2-x\neq 0$ czyli $x(x-1)\neq 0$ stąd $x\neq 0$ i $x\neq 1$

$D=\boldsymbol{R}-\{0,1\}$

Zapisujemy odejmowanie ułamków na wspólnej kresce ułamkowej i wykonujemy działania:

$$\frac{2x-3}{x^2-x}-\frac{x+7}{x^2-x}=\frac{2x-3-(x+7)}{x^2-x}=\frac{2x-3-x-7}{x^2-x}=\frac{x-10}{x^2-x}$$

Różnica $\frac{2x-3}{x^2-x}-\frac{x+7}{x^2-x}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{0,1\}$, jest równa $\frac{x-10}{x^2-x}$.

Ćwiczenie 1. Wykonaj działania:

a) $\frac{5x-7}{x^2-9}+\frac{4-x-x^2}{x^2-9}$

b) $\frac{x^2+6x-8}{4x^3-x}-\frac{x^2+4x-9}{4x^3-x}$.

Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny danego wyrażenia.

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych o różnych mianownikach

Dowolną sumę lub różnicę ułamków algebraicznych o różnych mianownikach można przedstawić w postaci jednego ułamka.

Dziedziną sumy lub różnicy ułamków algebraicznych jest część wspólna dziedzin ułamków, które dodajemy lub odejmujemy.

Przykład 2.

Wyznaczymy dziedzinę wyrażenia $\frac{3x}{(x+2)^2}+\frac{1}{x^2-5}$.

Mianownik ułamka $\frac{3x}{(x+2)^2}$ jest różny od 0, jeśli $x \neq -2$. Mianownik ułamka $\frac{1}{x^2-5}$ jest różny od 0, jeśli $x \neq -\sqrt{5}$ i $x \neq \sqrt{5}$. W takim razie dziedziną sumy $\frac{3x}{(x+2)^2}+\frac{1}{x^2-5}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}-\left\{-\sqrt{5},-2,\sqrt{5}\right\}$.

Aby dodać lub odjąć ułamki algebraiczne o różnych mianownikach, sprowadzamy te ułamki do wspólnego mianownika. Następnie dodajemy lub odejmujemy ułamki o tych samych mianownikach.

Ułamki algebraiczne sprowadzamy do wspólnego mianownika w następujący sposób:

- Rozkładamy wielomiany występujące w mianownikach ułamków na czynniki możliwie najniższego stopnia, jeśli jest to możliwe.
- Ustalamy wspólny mianownik ułamków możliwie najniższego stopnia. Wspólny mianownik dwóch ułamków jest iloczynem wszystkich czynników mianownika jednego ułamka i tych czynników mianownika drugiego ułamka, których nie ma w mianowniku pierwszego ułamka.
- Rozszerzamy ułamki do ich wspólnego mianownika.

Przykład 3.

Wykonamy działania:

a) $\frac{3}{x^2+x}-\frac{2x}{x^2-1}$

b) $3+\frac{5}{4-x}+\frac{1}{4+x}$.

Ad a)

Rozkładamy mianowniki obu ułamków na czynniki:

$x^2 + x = x\cdot(x+1)$ oraz $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Wyznaczamy dziedzinę wyrażenia $\frac{3}{x(x+1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)}$.

$x \neq 0 \quad \wedge \quad x+1 \neq 0 \quad \wedge \quad x-1 \neq 0$

$D = \boldsymbol{R} - \{0, -1, 1\}$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest iloczyn $x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$. Doprowadzamy te ułamki do wspólnego mianownika:

$$\frac{3}{x^2+x} = \frac{3\cdot(x-1)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} \quad \text{oraz} \quad \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x\cdot x}{(x+1)(x-1)\cdot x}$$

Wykonujemy działania w licznikach otrzymanych ułamków i obliczamy różnicę.

$$\frac{3(x-1)}{x(x+1)(x-1)} - \frac{2x\cdot x}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3x-3}{x(x+1)(x-1)} - \frac{2x^2}{x(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{-2x^2+3x-3}{x(x+1)(x-1)}$$

Wyrażenie $\frac{3}{x^2+x} - \frac{2x}{x^2-1}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{0, -1, 1\}$, jest równe $\frac{-2x^2+3x-3}{x(x-1)(x+1)}$.

Ad b)

Wyznaczamy dziedzinę wyrażenia $3 + \frac{1}{4+x} + \frac{5}{4-x}$.

$4 + x \neq 0 \quad$ oraz $\quad 4 - x \neq 0$

$D = \boldsymbol{R} - \{-4, 4\}$

Wspólnym mianownikiem dwóch ułamków występujących w sumie jest iloczyn

$(4+x)(4-x)$

Liczbę 3 można również zapisać w postaci ułamka algebraicznego o mianowniku $(4+x)(4-x)$:

$$3 = \frac{3(x+4)(4-x)}{(x+4)(4-x)}, \quad \text{gdzie } x \in \boldsymbol{R} - \{-4, 4\}.$$

Doprowadzamy składniki sumy do wspólnego mianownika i wykonujemy dodawanie:

$$3 + \frac{1}{4+x} + \frac{5}{4-x} = \frac{3(4+x)(4-x)}{(4+x)(4-x)} + \frac{4-x}{(4+x)(4-x)} + \frac{5(4+x)}{(4+x)(4-x)} =$$

$$= \frac{3(16-x^2)}{(4+x)(4-x)} + \frac{4-x}{(4+x)(4-x)} + \frac{20+5x}{(4+x)(4-x)} =$$

$$= \frac{48-3x^2+4-x+20+5x}{(4+x)(4-x)} = \frac{-3x^2+4x+72}{(4+x)(4-x)}$$

Suma $3+\frac{1}{4+x}+\frac{5}{4-x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-4, 4\}$, jest równa $\frac{-3x^2+4x+72}{(4+x)(4-x)}$.

Ćwiczenie 2. Wykonaj działania. Podaj dziedzinę danego wyrażenia.

a) $x-\frac{3-2x^2}{x+5}$ b) $\frac{2}{x+1}+\frac{x+5}{x^2-1}$ c) $\frac{3}{x^2-2x}-\frac{1}{x^3+x^2}$.

Przykład 4.

Wykonamy odejmowanie ułamków $\frac{x+3}{2x^2+5x-3}-\frac{4x+1}{10x-5}$.

Rozkładamy mianownik pierwszego ułamka na czynniki, znajdując pierwiastki trójmianu $2x^2 + 5x - 3$.

$\Delta = 25 + 4\cdot 2\cdot 3 = 49$, $\sqrt{\Delta}=7$, $x_1 = -3$, $x_2=\frac{1}{2}$, zatem

$$2x^2+5x-3=2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x+3)(2x-1)$$

Wyznaczamy dziedzinę różnicy ułamków:

$x+3\neq 0 \ \wedge \ 2x-1\neq 0 \ \wedge \ 10x-5\neq 0$, stąd $D=\boldsymbol{R}-\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$ Zapisujemy:

$$\frac{x+3}{2x^2+5x-3}-\frac{4x+1}{10x-5}=\frac{1\cdot(x+3)}{(2x-1)(x+3)}-\frac{4x+1}{5(2x-1)}$$

Zauważamy, że w liczniku i w mianowniku pierwszego ułamka występuje taki sam czynnik $x + 3$, który jednocześnie nie występuje w mianowniku drugiego ułamka. W tym przypadku możemy skrócić pierwszy ułamek.

$$\frac{1\cdot\cancel{(x+3)}^{\,1}}{(2x-1)\cancel{(x+3)}_{\,1}}-\frac{4x+1}{5(2x-1)}=\frac{1}{2x-1}-\frac{4x+1}{5(2x-1)}=\frac{5\cdot 1}{5\cdot(2x-1)}-\frac{4x+1}{5(2x-1)}=$$

$$=\frac{5-(4x+1)}{5(2x-1)}=\frac{-4x+4}{5(2x-1)}.$$

Wyrażenie $\frac{x+3}{2x^2+5x-3}-\frac{4x+1}{10x-5}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$, jest równe $\frac{-4x+4}{5(2x-1)}$.

Ćwiczenie 3. Wykonaj odejmowanie z przykładu 4., doprowadzając dane ułamki do mianownika $5(x + 3)(2x - 1)$. Następnie porównaj oba rozwiązania.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wykonaj wskazane działania. Podaj dziedzinę otrzymanego ułamka.

a) $\frac{2+5x}{3}-\frac{3x+9}{3}$ b) $\frac{(x-1)(x+1)}{2}+\frac{6-x^2}{4}$ c) $\frac{(x-2)x}{3}-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{5}{x}$

d) $5-\frac{x}{x+1}$ e) $\frac{5}{2-x}+2x$ f) $\frac{6-x}{x-1}-3$

2. Wykonaj działania. Podaj dziedzinę otrzymanego ułamka.

a) $\frac{x^2+5x}{x-2}-\frac{x}{3}$ b) $\frac{x^2+3}{6-x}-\frac{2x-3}{x-6}$ c) $\frac{x+8}{x^2-1}+\frac{5}{x+1}$

d) $\frac{2x+6}{x^2-9}-\frac{7}{x-3}$ e) $\frac{x+5}{4x^2-8x}-\frac{2}{x^2}$ f) $\frac{x+2}{x^2-x-6}-\frac{4x-1}{x-3}$

3. Wykonaj działania. Podaj dziedzinę otrzymanego ułamka.

a) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2+x}$ b) $\frac{3x-2}{2x+4}+\frac{x+6}{x+2}$ c) $\frac{5}{x^2-5x+6}-\frac{x+1}{x^2-9}$

d) $\frac{16-2x}{x^2-16}+\frac{3}{x+4}$ e) $\frac{x-2}{x^3-x^2}-\frac{2}{x^2}$ f) $\frac{6x-3}{2x^2+5x-3}-\frac{4}{x+3}$

4. Wykonaj działania. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego i określ jego dziedzinę.

a) $\frac{2x^2+11x+5}{x^2+10x+25}-\frac{2x-1}{x+5}$ b) $\frac{6x^2+15x+6}{2x^2-8}+\frac{3x-1}{2-x}$

c) $\frac{2x}{3x-1}-\frac{x^2+10x+25}{3x^2+14x-5}$ d) $\frac{5x^2-10}{2x^2-x-3}-\frac{2x+3}{x+1}$

e) $\frac{2}{x+2}-\frac{x+4}{x^2-2x+4}$ f) $\frac{x^2+1}{2x^3-2}-\frac{1}{3x-3}$

5. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x^2}{(x^2-3)(x-5)}-\frac{x^2}{(x-5)^2(x+2)}$ b) $\frac{5x^2-2x}{(x^2+1)(x^2-9)}-\frac{x-2}{x^3+x}$

c) $\frac{1}{x^3-x^2-x-2}+\frac{1}{1-x^3}$ d) $\frac{3}{x^3-4x^2-x+4}-\frac{2}{x^3-7x^2+8x+16}$

e) $\frac{x+1}{2x^2-x}+\frac{x+3}{2x^3+7x^2+2x-3}$ f) $\frac{6}{x^2+6x+9}-\frac{x-1}{x^3+x^2-5x+3}$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych wykonujemy podobnie jak mnożenie i dzielenie ułamków arytmetycznych.

Mnożenie ułamków algebraicznych

Iloczyn ułamków algebraicznych jest ułamkiem algebraicznym o liczniku równym iloczynowi liczników i mianowniku równym iloczynowi mianowników tych ułamków.

Dziedziną iloczynu ułamków jest zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wielomiany występujące w mianownikach obu ułamków nie przyjmują wartości równej zero.

Aby pomnożyć ułamek algebraiczny przez drugi ułamek algebraiczny wykonujemy następujące czynności.

- Rozkładamy wielomiany w licznikach i mianownikach ułamków na czynniki możliwie najniższego stopnia.
- Ustalamy dziedzinę iloczynu ułamków.
- Zapisujemy ułamek algebraiczny, którego licznikiem jest iloczyn czynników występujących w licznikach obu ułamków, zaś mianownikiem – iloczyn czynników występujących w mianownikach tych ułamków.
- Szukamy wspólnych czynników dla licznika i mianownika powstałego ułamka. Jeśli istnieją takie czynniki, to skracamy ułamek.
- Mnożymy w liczniku pozostałe po skróceniu czynniki.

Przykład 1.

Wykonamy mnożenie ułamków:

a) $\frac{3x}{x^2-1}\cdot\frac{x^3+1}{3x-6}$ b) $\frac{2x^2-10x+8}{x^2-8x+16}\cdot\frac{x^2-16}{2x-2}$.

Ad a)

Rozkładamy mianowniki obu ułamków oraz licznik drugiego ułamka na czynniki.

1) $x^2-1=(x-1)(x+1)$

2) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, $3x-6=3(x-2)$

Wówczas

$$\frac{3x}{x^2-1}\cdot\frac{x^3+1}{3x-6}=\frac{3x}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{3(x-2)}.$$

Ustalamy dziedzinę iloczynu:

$x \neq 1 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 2$

$D = \boldsymbol{R} - \{-1, 1, 2\}$

Zapisujemy iloczyn liczników i mianowników ułamków w postaci jednego ułamka. Następnie skracamy otrzymany ułamek i wykonujemy mnożenie w liczniku.

$$\frac{3x}{x^2-1}\cdot\frac{x^3+1}{3x-6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot x\cdot\overset{1}{\cancel{(x+1)}}\cdot\left(x^2-x+1\right)}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot(x-1)\cdot\underset{1}{\cancel{(x+1)}}\cdot(x-2)}=\frac{x^3-x^2+x}{(x-1)(x-2)}$$

Iloczyn $\frac{3x}{x^2-1}\cdot\frac{x^3+1}{3x-6}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1, 2\}$, jest równy $\frac{x^3-x^2+x}{(x-1)(x-2)}$.

Ad b)

Rozkładamy liczniki i mianowniki obu ułamków na czynniki.

1) $2x^2 - 10x + 8 = 2(x-1)(x-4)$ oraz $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

$\Delta = 36,\ x_1 = \frac{10-6}{4} = 1,\ x_2 = \frac{10+6}{4} = 4$

2) $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$ oraz $2x - 2 = 2(x-1)$

Zatem

$$\frac{2x^2-10x+8}{x^2-8x+16}\cdot\frac{x^2-16}{2x-2}=\frac{2(x-1)(x-4)(x-4)(x+4)}{2(x-4)^2(x-1)}$$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{1, 4\}$.

Skracamy otrzymany ułamek:

$$\frac{2x^2-10x+8}{x^2-8x+16}\cdot\frac{x^2-16}{2x-2}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{1}{\cancel{(x-1)}}\cdot\overset{1}{\cancel{(x-4)}}\cdot\overset{1}{\cancel{(x-4)}}\cdot(x+4)}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\underset{1}{\cancel{(x-4)}}\cdot\underset{1}{\cancel{(x-4)}}\cdot\underset{1}{\cancel{(x-1)}}}=x+4$$

Iloczyn $\frac{2x^2-10x+8}{x^2-8x+16}\cdot\frac{x^2-16}{2x-2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{1, 4\}$, jest równy $x + 4$.

Ćwiczenie 1. Wykaż, że jeśli $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 0, 1, 2\}$, to $\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-2x}\cdot\frac{x}{x^2+x-2} = 1$.

Dzielenie ułamków algebraicznych

Ilorazem dwóch ułamków algebraicznych jest ułamek algebraiczny, który jest iloczynem pierwszego ułamka i odwrotności drugiego ułamka.

Dziedziną ilorazu ułamków jest zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wielomiany występujące w mianownikach obu ułamków oraz wielomian występujący w liczniku dzielnika nie przyjmują wartości zero.

Aby podzielić ułamek algebraiczny przez ułamek algebraiczny, wykonujemy następujące czynności.

- Rozkładamy wielomiany w licznikach i mianownikach ułamków na czynniki możliwie najniższego stopnia.
- Ustalamy dziedzinę ilorazu ułamków.
- Mnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego ułamka, zgodnie z zasadą mnożenia ułamków algebraicznych.

Przykład 2.

Wykonamy dzielenie ułamków: $\frac{x^2-25}{2x^3+8x^2}:\frac{x+5}{3x^2+12x}$.

Rozkładamy na czynniki wielomiany, występujące w licznikach i mianownikach ułamków.

$$\frac{x^2-25}{2x^3+8x^2}:\frac{x+5}{3x^2+12x}=\frac{(x-5)(x+5)}{2x^2(x+4)}:\frac{x+5}{3x(x+4)}$$

Ustalamy dziedzinę ilorazu:

$$2x^2(x+4)\neq 0 \quad \wedge \quad x+5\neq 0 \quad \wedge \quad 3x(x+4)\neq 0$$
$$x\neq 0 \ \wedge \ x\neq -4 \quad \wedge \quad x\neq -5 \quad \wedge \quad x\neq 0 \ \wedge \ x\neq -4$$
$$D=\boldsymbol{R}-\{-5,-4,0\}$$

Teraz mnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego ułamka i zapisujemy mnożenie na wspólnej kresce ułamkowej. Następnie skracamy otrzymany ułamek.

$$\frac{(x-5)(x+5)}{2x^2(x+4)}:\frac{x+5}{3x(x+4)}=\frac{(x-5)(x+5)}{2x^2(x+4)}\cdot\frac{3x(x+4)}{x+5}=$$

$$=\frac{(x-5)\,\cancel{(x+5)}^{1}\,3\,\cancel{x}^{1}\,\cancel{(x+4)}^{1}}{2\,\cancel{x^2}^{x}\,\cancel{(x+4)}^{1}\,\cancel{(x+5)}^{1}}=\frac{3(x-5)}{2x}$$

Iloraz $\frac{x^2-25}{2x^3+8x^2}:\frac{x+5}{3x^2+12x}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-4,-5,0\}$, jest równy $\frac{3(x+5)}{2x}$.

Ćwiczenie 2. Wykonaj dzielenie $\frac{3x^2+3x}{2x-5}:\frac{x^2+2x+1}{2x^2-3x-5}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wykonaj mnożenie ułamków algebraicznych. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{2}x$ b) $\frac{x-1}{2}\cdot\frac{4}{x}$ c) $\frac{5x}{2x-2}\cdot\frac{8}{x^2}$

d) $\frac{3}{x-2}\cdot\frac{10-5x}{9}$ e) $\frac{3x^2}{x+1}\cdot\frac{2x+2}{x^3}$ f) $\frac{2x-1}{7}\cdot\frac{28x}{4x^2-1}$

g) $\frac{x+6}{2x^3}\cdot\frac{4x^5}{x^2+6x}$ h) $\frac{3}{2-x}\cdot\frac{x^4-4x^2}{9x^2}$ i) $\frac{-5-3x}{9x^2-1}\cdot\frac{7+21x}{6x+10}$

2. Wykonaj mnożenie ułamków algebraicznych. Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{3-x}{x-2}\cdot\frac{2-x}{x-3}$ b) $\frac{x+3}{2-x}\cdot\frac{x^2-4x+4}{9-x^2}$ c) $\frac{x^3-216}{81x^2-9}\cdot\frac{1-3x}{x-6}$

d) $\frac{2x^2-8x}{6x-3}\cdot\frac{2x-1}{4-x}$ e) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-4x}\cdot\frac{2x-8}{3x+9}$ f) $\frac{x^3+8}{x^3-1}\cdot\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+4}$

3. Wykonaj mnożenie ułamków algebraicznych. Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{2x+10}{x^2+4x-5}\cdot\frac{3x^2-3}{x^2+2x+1}$ b) $\frac{2x^2+7x-4}{8x-16}\cdot\frac{x^2-4x+4}{x^2+7x+12}$

c) $\frac{3x^2+x-2}{3x^2+7x-6}\cdot\frac{2x^2-18}{x^2-4x-5}$ d) $\frac{3x^3-24}{x^2+2x+4}\cdot\frac{x^3+2x^2+4x}{2x-4}$

e) $\frac{x^3-x^2+4x-4}{x^3+4x}\cdot\frac{x^2-9}{x^2+2x-3}$ f) $\frac{2x^3-5x^2-2x+5}{x^3+6x-7}\cdot\frac{3x^2+3x+21}{2x^2-3x-5}$

4. Wykonaj dzielenie ułamków algebraicznych. Podaj konieczne założenia.

a) $4:\frac{2x}{x+1}$ b) $\frac{2x^2}{x+1}:\frac{4x^3}{x^2+2x+1}$ c) $\frac{x^2-25}{x+2}:\frac{x+5}{x^2-4}$

5. Wykonaj dzielenie ułamków algebraicznych. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{5x-15}{2x+10}:(2x-6)$ b) $(x^3-27):\frac{x^2+3x+9}{5}$

c) $(3x^2-5x-2):\frac{2x^2-9x+10}{x}$ d) $(x^2-2x+1):\frac{x^3-x^2+6x-6}{x^3+6x}$

6. Wykonaj dzielenie ułamków algebraicznych. Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{2x^2+5x-3}{8x^3-1}:\frac{x+3}{4x^2-4x+1}$ b) $\frac{4x^2-12x+9}{x^2-1}:\frac{4x^2-9}{x+1}$

c) $\frac{x^3+2x-3}{x^2-3x-18}:\frac{x-1}{x^2-36}$ d) $\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-81}:\frac{x^2+1}{x+9}$

Działania na ułamkach algebraicznych

Aby wykonać kilka działań na ułamkach algebraicznych, należy przestrzegać odpowiedniej kolejności.

– Najpierw wykonujemy działania na ułamkach zapisane w nawiasach, które nie zawierają innych nawiasów.
– Następnie wykonujemy mnożenie i dzielenie ułamków w takiej kolejności, w jakiej są zapisane.
– Na końcu wykonujemy dodawanie i odejmowanie ułamków w kolejności ich występowania, od lewej do prawej.

Przykład 1.

Doprowadzimy dane wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x}:\frac{3}{x+2}$ b) $\frac{(x+1)^2}{x+3}\cdot\left(\frac{x+5}{x+1}-\frac{2}{x+1}\right)$

Ad a) Dziedziną wyrażenia $\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x}:\frac{3}{x+2}$ jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{-2, 0\}$.

W tym przypadku jako pierwsze wykonamy dzielenie $\frac{2}{x}:\frac{3}{x+2}$.

Następnie otrzymany ułamek odejmiemy od ułamka $\frac{x+1}{x}$

$$\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x}:\frac{3}{x+2}=\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x}\cdot\frac{(x+2)}{3}=\frac{x+1}{x}-\frac{2x+4}{3x}=\frac{3x+3-(2x+4)}{3x}=\frac{x-1}{3x}$$

Wyrażenie $\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x}:\frac{3}{x+2}$ jest równe $\frac{x-1}{3x}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-2, 0\}$.

Ad b) Dziedziną wyrażenia $\frac{(x+1)^2}{x+3}\cdot\left(\frac{x+5}{x+1}-\frac{2}{x+1}\right)$ jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{-3, -1\}$.

Najpierw wykonujemy odejmowanie ułamków widoczne w nawiasie, a w drugiej kolejności mnożenie pierwszego ułamka przez otrzymany wynik odejmowania.

$$\frac{(x+1)^2}{x+3}\cdot\left(\frac{x+5}{x+1}-\frac{2}{x+1}\right)=\frac{(x+1)^2}{x+3}\cdot\frac{x+3}{x+1}=x+1$$

Ćwiczenie 1. Doprowadź wyrażenie $4x-\frac{3}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{2x^2-3x+1}$ do najprostszej postaci.

Przykład 2.

Zapiszemy za pomocą jednego ułamka poniższe wyrażenia:

a) $5 : 3 \cdot x + 1$ b) $5:3\cdot(x+1)$ c) $5 : (3x) + 1$ d) $5 : (3x + 1)$.

Mamy:

a) $5 : 3 \cdot x + 1 = \frac{5}{3}\cdot x+1=\frac{5x}{3}+\frac{3}{3}=\frac{5x+3}{3}$

b) $5:3\cdot(x+1)=\frac{5}{3}\cdot(x+1)=\frac{5(x+1)}{3}$

c) $5 : (3x) + 1 = \frac{5}{3x}+1=\frac{5+3x}{3x}$, $x \neq 0$

d) $5 : (3x + 1) = \frac{5}{3x+1}$

Ćwiczenie 2. Zapisz za pomocą jednego ułamka:

a) $4 : x : x^3 + 1$ b) $4 : x : (x^3 + 1)$ c) $4:\left[x:\left(x^3+1\right)\right]$.

Czasami w liczniku lub w mianowniku danego ułamka algebraicznego znajduje się kolejny ułamek algebraiczny. Wówczas kreska ułamkowa danego ułamka jest dłuższa od kreski ułamkowej ułamka umieszczonego w liczniku lub mianowniku danego ułamka i jest zapisana na wysokości znaku „ = ”. Każdy taki piętrowy ułamek można doprowadzić do postaci, w której licznik i mianownik są wielomianami.

Przykład 3.

Zapiszemy w prostszej postaci ułamki: a) $\frac{\frac{3}{x+2}}{x^2-4}$ b) $\frac{x-1}{x+\frac{1}{x-2}}$

Ad a) Licznik ułamka jest równy $\frac{3}{x+2}$, a mianownik wynosi $x^2 - 4$. Pamiętając, że mianownik każdego ułamka jest różny od 0, mamy $x + 2 \neq 0$ i $x^2 - 4 \neq 0$, czyli $x \neq -2$ i $x \neq 2$.

Obliczamy:

$$\frac{\frac{3}{x+2}}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}:\left(x^2-4\right)=\frac{3}{x+2}\cdot\frac{1}{x^2-4}=\frac{3}{(x+2)^2(x-2)},\ \text{gdzie}\ x\in\boldsymbol{R}-\{-2,2\}$$

Ułamek $\frac{\frac{3}{x+2}}{x^2-4}$ jest równy $\frac{3}{(x+2)^2(x-2)}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$.

Ad b) Licznik danego ułamka jest równy $x-1$, a mianownik wynosi $x+\frac{1}{x-2}$.

Przekształcamy mianownik danego ułamka:

$$x+\frac{1}{x-2}=\frac{x(x-2)+1}{x-2}=\frac{x^2-2x+1}{x-2},\quad \text{zatem } x-2\neq 0 \text{ i } x^2-2x+1\neq 0,$$

czyli $x\neq 2$ i $x\neq 1$.

Upraszczamy dany ułamek:

$$\frac{x-1}{x+\frac{1}{x-2}}=\frac{x-1}{\frac{x^2-2x+1}{x-2}}=(x-1)\cdot\frac{x-2}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{x-1},\quad \text{gdzie } x\in \boldsymbol{R}-\{1,2\}$$

Ułamek $\frac{x-1}{x+\frac{1}{x-2}}$ jest równy $\frac{x-2}{x-1}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{1,2\}$.

Przykład 4.

Wykażemy, że jeśli $a\neq 0$, $b\neq 0$ i $a\neq b$, to $\frac{b}{a}+\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right):\frac{a-b}{b}=1$.

Dowód:

Przekształcamy lewą stronę równości, wykonując najpierw działania w nawiasie, następnie dzielenie ułamków i na koniec dodawanie.

$$\mathrm{L}=\frac{b}{a}+\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right):\frac{a-b}{b}=\frac{b}{a}+\left(\frac{a^2}{ab}-\frac{2ab}{ab}+\frac{b^2}{ab}\right):\frac{a-b}{b}=$$

$$=\frac{b}{a}+\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}:\frac{a-b}{b}=\frac{b}{a}+\frac{(a-b)^{\cancel{2}}}{a\cancel{b}_{1}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{b}}}{\underset{1}{\cancel{(a-b)}}}=$$

$$=\frac{b}{a}+\frac{a-b}{a}=\frac{b+a-b}{a}=\frac{a}{a}=1=\mathrm{P},\qquad \text{co kończy dowód}$$

Przykład 5.

Wyznaczymy dwa wielomiany $P(x)$ oraz $Q(x)$, gdzie st. $P(x)=1$ i st. $Q(x)=0$, dla których $\frac{P(x)}{x-3}-\frac{Q(x)}{x+2}=\frac{2x^2-x+15}{x^2-x-6}$.

Sprawdzamy, że $(x-3)(x+2)=x^2-x-6$. Określamy dziedzinę wyrażenia:

$D=\boldsymbol{R}-\{-2,3\}$.

Ponieważ st. $P(x)=1$ oraz st. $Q(x)=0$, więc możemy przyjąć, że $P(x)=ax+b$, gdzie $a\neq 0$ oraz $Q(x)=c$, gdzie $c\neq 0$.

Przekształcamy lewą stronę danej równości:

$$\frac{P(x)}{x-3}-\frac{Q(x)}{x+2}=\frac{ax+b}{x-3}-\frac{c}{x+2}=\frac{(ax+b)(x+2)-c\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)}=$$

$$=\frac{ax^2+2ax+bx+2b-cx+3c}{x^2-x-6}=\frac{ax^2+(2a+b-c)x+2b+3c}{x^2-x-6}.$$

Dana równość jest prawdziwa wtedy, gdy wielomiany $ax^2+(2a+b-c)x+2b+3c$ oraz $2x^2-x+15$ są równe. Wówczas

$$a=2 \quad \wedge \quad \begin{matrix}2a+b-c=-1\\ b-c=-5\end{matrix} \quad \wedge \quad 2b+3c=15$$

Po rozwiązaniu układu równań $\begin{cases}b-c=-5\\ 2b+3c=15\end{cases}$ otrzymamy: $b=0$, $c=5$.

Szukane wielomiany to: $P(x)=2x$ i $Q(x)=5$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $1-\frac{1}{x}:\left(x:\frac{1}{2x}\right)$

b) $1-\frac{1}{x}:x:\frac{1}{2x}$

c) $\left(1-\frac{1}{x}\right):\left(x:\frac{1}{2x}\right)$

d) $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{4}{x+2}$

e) $\left(1+\frac{5}{x-3}\right):(2x+4)$

f) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$

2. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{3}{x+1}-\left(\frac{x+1}{x}-\frac{3x}{x+1}\right)$

b) $\frac{3}{x-5}\cdot\frac{x^2-10x+25}{x}+\frac{1}{x^3+x^2}:\frac{2}{x+1}$

c) $\frac{2-x}{x-3}-\left(\frac{x-3}{x+2}+\frac{2x-5}{3-x}\right)$

d) $\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2+4x-5}{2x^2-2}$

e) $1-\frac{x^2+2x+1}{3x}:\frac{x^2-2x-3}{x}$

f) $\frac{x-2}{x-1}-\frac{x+3}{x-1}\cdot\frac{x-4}{x^2+5x+6}$

3. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $\frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{x^2+6x+9}{x^2}}$

b) $\frac{2x+2}{\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}}$

c) $\frac{\frac{2}{3}+\frac{x+1}{x}}{\frac{6}{x}+10}$

d) $\dfrac{\dfrac{2x^2+8x+6}{x^2-x-2}}{-x-3}$ e) $\dfrac{\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{x-2}{x}}{x-4}$ f) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x}\right)^2}{\dfrac{2x-8}{x^2}}$

4. Dane wyrażenie doprowadź do najprostszej postaci. Następie oblicz jego wartość dla liczby podanej obok tego wyrażenia.

a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{a^2-4}{a^3+2a^2}:\dfrac{a^2-4a+4}{2a}$, $\sqrt{2}$

b) $\dfrac{b^3+1}{(b+1)^3}:\left(\dfrac{b-1}{b}-\dfrac{b}{b+1}\right):\left(\dfrac{1+2b^2}{b+1}-b\right)$, -3

D 5. Wykaż, że jeśli $a \in \boldsymbol{R}-\{-1, 0, 1\}$, to $\left(\dfrac{2}{a-1}+\dfrac{2}{a+1}\right)\cdot\dfrac{a^3+a^2-a-1}{4a^2+4a}=1$.

D 6. Wykaż, że jeśli $x \in \boldsymbol{R}-\{-2, 2\}$ oraz $x+4y=2$, to

$$\frac{x^2-2x}{4}:\frac{4-x^2}{2x+4}=\left(2y^3-y^2+6y-3\right):\left(y^2+3\right).$$

D 7. Wykaż, że jeśli $x=\dfrac{a+b}{2}$ oraz $x \neq a$ i $x \neq b$, to $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{b}{b-x}=2$.

D 8. Wykaż, że jeśli $\dfrac{a-3}{b+2}=3$ i $b \neq -2$, to $(a-3b)^2=81$.

D 9. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$ oraz $a^2-4ab+4b^2=0$, to $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^3}{8b^3}=\dfrac{8}{5}$.

D 10. Wykaż, że jeśli $a \neq -1$, $b \neq -1$ i $a \neq b$, to $\dfrac{ab+a+b+1}{a-b}:\dfrac{1}{\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{1}{b+1}}+1=0$.

D 11. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $c \neq 0$, to

$$\left(1-\frac{a-b}{a}\right)\left(1+\frac{a-b}{b}\right)+\left(1-\frac{c-b}{c}\right)\left(1+\frac{c-b}{b}\right)=2.$$

12. Wyznacz wielomiany $P(x)$ oraz $Q(x)$ gdzie st. $P(x)=0$ i st. $Q(x)=1$, dla których

$$\frac{P(x)}{5x-1}+\frac{Q(x)}{x+3}=\frac{15x^2-25x-2}{5x^2+14x-3},$$ gdzie $x \neq -3$ i $x \neq \dfrac{1}{5}$.

Równania wymierne

Definicja 1.

Równaniem wymiernym z niewiadomą x nazywamy równanie, które można przekształcić równoważnie do postaci $\frac{W(x)}{P(x)}=0$, gdzie $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x)\neq 0$.

Ułamek algebraiczny $\frac{W(x)}{P(x)}$ przyjmuje wartość równą zero wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w liczniku ułamka przyjmuje wartość zero i wielomian w mianowniku ułamka jest różny od zera, czyli:

$$\frac{W(x)}{P(x)}=0 \Leftrightarrow \left[W(x)=0 \wedge P(x)\neq 0\right].$$

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie: $\frac{x^2-x-6}{2x+4}=0.$

Określamy dziedzinę równania:

$D = \boldsymbol{R} - \{-2\}.$

Rozwiązujemy to równanie,

$$\frac{x^2-x-6}{2x+4}=0$$ Przyrównujemy licznik ułamka do zera.

$$x^2-x-6=0$$ Znajdujemy rozwiązania równania kwadratowego.

$\Delta = 25, \quad x_1=-2, \quad x_2=3$ Sprawdzamy, czy otrzymane liczby należą do dziedziny równania.

$-2 \notin D, \quad 3 \in D$

Równanie $\frac{x^2-x-6}{2x+4}=0$ ma jedno rozwiązanie. Tym rozwiązaniem jest liczba 3.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{(2x-9)\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+2)}=0$

b) $\frac{4x^2-4x+1}{6x-3}=0.$

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie: $\frac{16-x^2}{x^3-8}=\frac{1}{x^2+2x+4}+\frac{3-x}{x-2}$.

Zgodnie ze wzorem skróconego mnożenia $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ mamy:

$x^3-8=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$ trójmian x^2+2x+4 nie ma miejsc zerowych

Określamy dziedzinę równania: $D=\boldsymbol{R}-\{2\}$.

Równanie sprowadzamy do postaci $\frac{W(x)}{P(x)}=0$. W tym celu wyrażenia występujące po prawej stronie równania przenosimy ze znakiem przeciwnym na lewą stronę:

$$\frac{16-x^2}{x^3-8}-\frac{1}{x^2+2x+4}-\frac{3-x}{x-2}=0$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika x^3-8 i wykonujemy działania:

$$\frac{16-x^2}{x^3-8}-\frac{1(x-2)}{\left(x^2+2x+4\right)(x-2)}-\frac{(3-x)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=0$$

$$\frac{16-x^2-(x-2)-(3-x)\left(x^2+2x+4\right)}{x^3-8}=0$$

$$\frac{16-x^2-x+2-\left(3x^2+6x+12-x^3-2x^2-4x\right)}{x^3-8}=0$$

$$\frac{18-x^2-x+x^3-x^2-2x-12}{x^3-8}=0$$

$$\frac{x^3-2x^2-3x+6}{x^3-8}=0$$

Teraz rozwiązujemy równanie:

$$x^3-2x^2-3x+6=0$$

$x^2(x-2)-3(x-2)=0$ Stosujemy metodę grupowania wyrazów.

$$(x-2)\left(x^2-3\right)=0$$

$$(x-2)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0$$

$$x-2=0 \ \vee \ x-\sqrt{3}=0 \ \vee \ x+\sqrt{3}=0$$

$$x=2 \ \vee \ x=\sqrt{3} \ \vee \ x=-\sqrt{3}$$

Liczba 2 nie należy do dziedziny równania.

Równanie ma dwa rozwiązania: $-\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 2. Sprowadź równanie $\frac{x}{x+2}=\frac{3}{x}-1$ równoważnie do postaci $\frac{W(x)}{P(x)}=0$. Następnie wyznacz rozwiązania tego równania.

Przy rozwiązywaniu równań wymiernych można również korzystać z własności proporcji.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $\frac{x}{x+2}=\frac{3}{x}-1$, korzystając z własności proporcji.

Ustalamy dziedzinę: $x+2\neq 0$ oraz $x\neq 0$, więc $D=\boldsymbol{R}-\{-2, 0\}$. Mamy:

$$\frac{x}{x+2}=\frac{3-x}{x}$$

Własność proporcji:

jeśli $b\neq 0$ i $d\neq 0$, to $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$

$x\cdot x=(3-x)\cdot(x+2)$ Porządkujemy równanie.

$2x^2-x-6=0$ Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$\Delta=49,\ x_1=-1\frac{1}{2},\ x_2=2$

Liczby $-1\frac{1}{2}$ oraz 2 należą do dziedziny równania, więc są rozwiązaniami tego równania.

Niektóre równania wymierne możemy sprowadzić do równań kwadratowych przez wprowadzenie zmiennej pomocniczej.

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $x^2+2x=\frac{3}{(x+2)x}+2$.

Ustalamy dziedzinę równania: $D=\boldsymbol{R}-\{-2, 0\}$. Rozwiązujemy równanie.

$$x^2+2x=\frac{3}{x^2+2x}+2$$

Wprowadzamy zmienną pomocniczą t, $t=x^2+2x$. Mamy:

$$t=\frac{3}{t}+2$$

Zatem

$$\frac{t}{1}=\frac{3+2t}{t}$$

Korzystamy z własności proporcji.

$$t^2 = 3 + 2t$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t.

$$t = 3 \vee t = -1$$

Teraz wracamy do podstawienia:

$$x^2 + 2x = 3 \quad \vee \quad x^2 + 2x = -1$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad x^2 + 2x + 1 = 0$$

Wyznaczamy rozwiązania równania wymiernego, rozwiązując dwa równania kwadratowe.

$$(x + 3)(x - 1) = 0 \qquad (x + 1)^2 = 0$$

$$x + 3 = 0 \vee x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0$$

$$x = -3 \vee x = 1 \vee x = -1$$

Liczby –3, –1 oraz 1 należą do dziedziny równania.

Równanie $x^2+2x=\frac{3}{(x+2)x}+2$ ma trzy rozwiązania: –3, –1 oraz 1.

Ćwiczenie 3. Rozwiąż równanie z przykładu 4. bez wprowadzenia zmiennej pomocniczej.

Przykład 5.

Rozwiążemy równanie

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}=1$$

Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{-5, -4, -3, -2, -1\}$.

W tym przypadku nie będziemy sprowadzać ułamków występujących po lewej stronie równania do wspólnego mianownika. Skorzystamy z następującej własności:

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Równanie zapisujemy w postaci:

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)=1$$

Otrzymujemy:

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}-1=0$$

$$\frac{x+5-x-1}{(x+1)(x+5)}-\frac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x+5)}=0$$

$$4-\left(x^2+5x+x+5\right)=0$$

$-x^2-6x-1=0 \qquad \Delta=32, \qquad \sqrt{\Delta}=4\sqrt{2}$

$x=-3-2\sqrt{2} \quad \vee \quad x=-3+2\sqrt{2} \qquad D=\boldsymbol{R}-\{-5,-4,-3,-2,-1\}$

Równanie ma dwa rozwiązania: $-3-2\sqrt{2}$ oraz $-3+2\sqrt{2}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż równanie, pamiętając o koniecznych założeniach:

a) $\frac{2x}{x^2+1}=0$

b) $\frac{3}{x^2+2x+1}=0$

c) $\frac{2x+8}{3x+12}=0$

d) $\frac{(x-3)(2x+1)}{2x^2-8}=0$

e) $\frac{3x^2+3}{(x-2)(x+1)}=0$

f) $\frac{1-\frac{1}{4}x^2}{5x^2-5x-30}=0$.

2. Rozwiąż równanie, pamiętając o koniecznych założeniach:

a) $\frac{(x-1)(x+2)(2x-3)}{x^2+x-2}=0$

b) $\frac{x^3-4x^2+3x}{x(x-1)}=0$

c) $\frac{x^3+4x^2-4x-16}{(2x-3)(x+4)}=0$

d) $\frac{(2x^2-8)(3x^2-27)}{x^2-5x+6}=0$

e) $\frac{x^4-2x^2-15}{x^2+2x+8}=0$

f) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x^2+2x+5}=0$.

3. Rozwiąż równanie, pamiętając o koniecznych założeniach:

a) $\frac{x-1}{2x+3}=\frac{8x+2}{1-2x}$

b) $\frac{4x-1}{x}=2x+5$

c) $\frac{3}{x-1}=1+\frac{4}{x}$

d) $\frac{x-4}{x^2-1}-\frac{5}{x^3-x}=0$

e) $2-\frac{3}{x+1}=\frac{3x-1}{2x+1}$

f) $x-2=\frac{19}{x^2+2x+4}$

4. Rozwiąż równanie, pamiętając o koniecznych założeniach:

a) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}=\frac{5}{2}$

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{x-1}{x-3}=3\frac{4}{5}$

c) $\frac{2x+2}{3x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$

d) $\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+4}=\frac{5x+7}{x^2+x-12}$

e) $x-\frac{1}{x}=\frac{x}{x-3}+\frac{x}{2}$

f) $(2x-1)\cdot x+18=\frac{9}{x}$

5. Rozwiąż równanie, pamiętając o koniecznych założeniach:

a) $\frac{3}{x+5}+\frac{x+5}{3}=2$

b) $x^2-4+\frac{4}{x^2-4}+5=0$

c) $x^2+4x=\frac{20}{x^2+4x}+1$

d) $\frac{x^2-2x}{9}+\frac{5}{x^2-2x}=2$

6. Wyznacz liczbę p wiedząc, że liczba 1 jest rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{x+p}=4$.

7. Wyznacz liczbę p, dla której rozwiązaniem równania $\frac{2x-5}{x+2p}=\frac{x-1}{p}$ jest liczba 3. Uzasadnij, że dla znalezionej wartości p dane równanie ma jeszcze jedno rozwiązanie. Znajdź to rozwiązanie.

8. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których rozwiązaniem równania $\frac{p-x}{x+p}=\frac{2x+13}{2x+p}$ jest liczba –2. Dla znalezionych wartości p podaj wszystkie rozwiązania tego równania.

9. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{1}{(x-3)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}+\frac{1}{(x-1)x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{5}{6}$

b) $\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{2}{(x+3)(x+5)}+\frac{2}{(x+5)(x+7)}+\frac{2}{(x+7)(x+9)}=\frac{x+1}{3x+2}$.

10. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{3}{|x-1|-1}=2$

b) $\frac{4}{|x+3|}=\frac{1}{|x-5|}$

c) $\frac{|x-1|}{3}-\frac{1}{|2x+3|}=0$

d) $\frac{x}{|x-1|}-\frac{2}{x}=\frac{5}{6}$

e) $\frac{8}{|x|}+|x-2|=x$

f) $\frac{|x+2|}{x^2+x-2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{|x+1|}$.

Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych

Przykład 1.

W pewnej książce na każdej stronie znajduje się jednakowa liczba wersów, przy czym wszystkich wersów w książce jest 8400. Gdyby tę książkę wydrukowano w takim formacie, że na każdej stronie byłoby o 5 takich wersów więcej, to liczba stron zmniejszyłaby się o 30. Ile wersów jest na każdej stronie i ile stron ma ta książka?

Analiza:

x – liczba wersów na stronie, $x \in \boldsymbol{N}_+$

$\frac{8400}{x}$ – liczba stron w książce

$\frac{8400}{x+5}$ – liczba stron w książce w zmienionym formacie

$\frac{8400}{x}-30$ – liczba stron w książce w zmienionym formacie

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$\frac{8400}{x}-30=\frac{8400}{x+5}, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{N}_+$$

$$\frac{8400-30x}{x}=\frac{8400}{x+5}$$

$$(8400-30x)(x+5)=8400x$$

$$x^2+5x-1400=0$$

$$x=-40 \vee x=35$$

Liczba –40 nie spełnia warunku $x \in \boldsymbol{N}_+$, bo $-40 \notin \boldsymbol{N}_+$.

Wyznaczamy liczbę stron książki: 8400 : 35 = 240.

Sprawdzenie:

Książka w początkowym formacie liczyła 240 stron, a na każdej stronie było 35 wersów, więc książka zawierała 240 · 35, czyli 8400 wersów. Po zmianie formatu na jednej stronie znalazłoby się 35 + 5, czyli 40 wersów. Wówczas liczba stron książki byłaby równa 8400 : 40, czyli 210. Zatem liczba stron byłaby mniejsza o 30 niż w formacie początkowym.

Odpowiedź:

Książka liczy 240 stron, a na każdej jej stronie jest 35 wersów.

Przykład 2.

Z miast *A* i *B* odległych o 440 km wyjechały naprzeciw siebie (po sąsiednich torach) dwa pociągi towarowe. Pociąg jadący z miasta *A* wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta *B* i jechał z prędkością o 11 km/h mniejszą. Pociągi spotkały się w połowie drogi. Obliczymy, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

Analiza:

v – prędkość pociągu jadącego z miasta *B* do miasta *A* (km/h); $v > 0$

t – czas jazdy (do chwili spotkania) pociągu jadącego z miasta *B* do miasta *A* (h); $t > 0$

$v - 11$ – prędkość pociągu jadącego z miasta *A* do miasta *B* (km/h)

$t + 1$ – czas (do chwili spotkania) jazdy pociągu jadącego z miasta *A* do miasta *B* (h)

vt – długość drogi, jaką przebył pociąg jadący z miasta *B* do chwili, w której pociągi się spotkały (km)

$(v - 11)(t + 1)$ – długość drogi, jaką przebył pociąg jadący z miasta *A* do chwili, kiedy pociągi się spotkały (km)

220 – długość drogi (km), jaką pokonał każdy z pociągów do chwili spotkania.

Ułożenie i rozwiązanie równania:

Mamy układ warunków:

$$\begin{cases} vt = 220 \\ (v-11)(t+1) = 220 \end{cases}$$

Wyznaczamy z pierwszego równania t, $t = \frac{220}{v}$ i podstawiamy do drugiego równania; otrzymujemy równanie wymierne z niewiadomą v:

$$(v-11)\left(\frac{220}{v}+1\right) = 220 \quad / \cdot v$$

$$(v - 11)(220 + v) = 220v$$

$$v^2 - 11v - 2420 = 0$$

$$v = -44 \quad \vee \quad v = 55$$

Liczba -44 nie spełnia założenia $v > 0$, bo $-44 < 0$.

Obliczamy prędkość pociągu, który wyjechał z miasta *A*: $55 - 11 = 44$ (km/h).

Sprawdzenie:

Pociąg jadący z miasta *B* rozwijał prędkość 55 km/h, zaś pociąg jadący z miasta *A* – prędkość 44 km/h. Pociągi te minęły się w połowie drogi. Czas przejazdu do momentu spotkania dla pociągu jadącego z miasta *B* wyniósł 220 (km) : 55 (km/h),

czyli 4 (h), zaś dla pociągu jadącego z miasta *A* był równy 220 (km) : 44 (km/h), czyli 5 (h). To oznacza, że pociąg jadący z miasta *A* wyjechał o godzinę wcześniej.

Odpowiedź:

Pociągi jechały z prędkością 55 km/h oraz 44 km/h.

Przykład 3.

Studenci Maciek i Krzysiek myją raz w miesiącu okna w salonie samochodowym. Pracując we dwóch, potrzebują 6 godzin na realizację tego zlecenia. Pewnego dnia po dwóch godzinach wspólnej pracy Krzysiek zachorował i Maciek dokończył mycie okien w czasie kolejnych 10 godzin. Obliczymy, ile godzin potrzebowałby każdy z nich na samodzielne wykonanie tej pracy.

Analiza:

Oznaczmy pracę do wykonania jako całość, czyli 1. Studenci na wykonanie zlecenia potrzebują 6 godzin, czyli pracując razem, wykonują $\frac{1}{6}$ część umowy w czasie 1 godziny. Ponieważ feralnego dnia pracowali razem przez 2 godziny, wykonali wspólnie $\frac{1}{3}$ zlecenia. Pozostałą do realizacji część umowy, czyli $\frac{2}{3}$ pracy wykonał samodzielnie Maciek w czasie 10 godzin.

Niech:

x – oznacza liczbę godzin potrzebnych na samodzielne wykonanie zlecenia przez Maćka, gdzie $x > 6$

y – oznacza liczbę godzin potrzebnych na samodzielne wykonanie zlecenia przez Krzyśka, gdzie $y > 6$

$\frac{1}{x}$ – część pracy, jaką wykona samodzielnie Maciek w czasie 1 godziny,

$\frac{1}{y}$ – część pracy, jaką wykona samodzielnie Krzysiek w czasie 1 godziny,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – część pracy, jaką wykonują wspólnie Maciek i Krzysiek w czasie 1 godziny.

Ułożenie i rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} 10\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{3} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=30 \\ \frac{1}{y}=\frac{x-6}{6x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=\frac{6x}{x-6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=10 \end{cases}.$$

Sprawdzenie:

Maciek na samodzielne wykonanie pracy potrzebuje 15 godzin, a Krzysiek 10 godzin, czyli w czasie 1 godziny Maciek wykona $\frac{1}{15}$ pracy, zaś Krzysiek $\frac{1}{10}$ tej pracy. W czasie 6 godzin, pracując razem, wykonaliby całą pracę.

$$6\cdot\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right)=6\cdot\frac{1}{6}=1$$

Przez 2 godziny chłopcy pracowali wspólnie, potem przez 10 godzin Maciek pracował sam. Wykonali wówczas całą pracę.

$$2\cdot\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right)+10\cdot\frac{1}{15}=2\cdot\frac{5}{30}+\frac{10}{15}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

Odpowiedź:

Maciek sam wykona pracę w czasie 15 godzin, a Krzysiek w czasie 10 godzin.

Przykład 4.

Basen napełniany jest wodą przez dwa krany. Jeśli woda wpływa do basenu tylko pierwszym kranem, to czas napełniania jest o 4 godziny krótszy, niż gdy wpływa tylko drugim kranem. Jeśli natomiast basen napełniany jest z wykorzystaniem obu kranów jednocześnie, to czas napełniania jest o 7 godzin i 12 minut krótszy, niż gdyby woda wpływała do niego tylko przez drugi kran. Obliczymy, ile godzin będzie trwało napełnienie basenu z wykorzystaniem tylko pierwszego kranu, a ile z wykorzystaniem tylko drugiego kranu.

Analiza:

1 – pojemność basenu

x – czas (h) potrzebny do napełnienia basenu z wykorzystaniem tylko pierwszego kranu, $x > 0$

$x + 4$ – czas (h) potrzebny do napełnienia basenu z wykorzystaniem tylko drugiego kranu

$\frac{1}{x}$ – taka część basenu zostanie wypełniona wodą wpływającą tylko z pierwszego kranu, w czasie 1 godziny

$\frac{1}{x+4}$ – taka część basenu zostanie wypełniona wodą wpływającą tylko z drugiego kranu, w czasie 1 godziny

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}$ – taka część basenu zostanie w czasie 1 godziny wypełniona wodą wpływającą jednocześnie z obu kranów

$(x+4)-7\frac{1}{5}$ – czas (h) potrzebny do napełnienia basenu wodą z obu kranów.

Ułożenie i rozwiązanie równania:

$$\left[(x+4)-7\frac{1}{5}\right]\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)=1$$

$$(x-3{,}2)\cdot\frac{2x+4}{x(x+4)}=1$$

$$(x-3{,}2)\cdot(2x+4)=x(x+4)$$

$$2x^2-2{,}4x-12{,}8=x^2+4x$$

$$x^2-6{,}4x-12{,}8=0 \qquad \Delta=92{,}16 \qquad \sqrt{\Delta}=9{,}6$$

$$x_1=-1{,}6 \qquad x_2=8$$

Liczba $-1{,}6$ nie spełnia założenia $x>0$. Czas napełniania basenu przez pierwszy kran wynosi 8 godzin, a przez drugi kran jest o 4 godziny dłuższy i wynosi 12 godzin.

Sprawdzenie:

Jeśli basen napełniany jest przez dwa krany jednocześnie, to czas napełniania wynosi: $4\frac{4}{5}$ h, bo $12\,\text{h}-7\frac{1}{5}\,\text{h}=4\frac{4}{5}\,\text{h}$

Sprawdzamy, czy w tym czasie basen zostanie napełniony.

$$4\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)=\frac{24}{5}\cdot\frac{2+3}{24}=\frac{24}{5}\cdot\frac{5}{24}=1$$

Odpowiedź:

Czas napełniania basenu przez pierwszy kran jest równy 8 godzin, a przez drugi – 12 godzin.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Suma licznika i mianownika ułamka należącego do przedziału $(0, 1)$ jest równa 8. Jeśli licznik tego ułamka zwiększymy o 3, a mianownik zwiększymy o 5, to otrzymamy ułamek równy początkowemu. Wyznacz ten ułamek.
2. Ułamek zwykły jest liczbą dodatnią, a jego licznik jest o 3 większy od mianownika. Różnica tego ułamka i podwojonej jego odwrotności jest równa 0,35. Wyznacz ten ułamek.
3. Suma dwóch liczb jest równa 5. Suma odwrotności tych liczb wynosi $\frac{80}{91}$. Wyznacz te liczby.
4. Turysta przebył na rowerze trasę 240 km, pokonując każdego dnia taką samą liczbę kilometrów. Gdyby codziennie pokonywał o 6 km mniej, to byłby w drodze o 2 dni dłużej. Ile dni był turysta w drodze?

5. W sali konferencyjnej ustawiono krzesła dla 680 osób, w kilkunastu rzędach, po tyle samo krzeseł w każdym rzędzie. Gdyby rzędów krzeseł było o 3 więcej, to w każdym rzędzie siedziałoby o 6 osób mniej. Ile rzędów krzeseł ustawiono? Ile było krzeseł w jednym rzędzie?

6. Właściciel kilku restauracji zlecił dwóm zakładom stolarskim wykonanie 128 stolików. Pierwszy zakład, zatrudniający więcej pracowników, miał wykonać 72 stoliki, a drugi 56 stolików. Pierwszy zakład wykonuje dziennie o 4 stoliki więcej niż drugi. Drugi zakład wykonał zamówienie w terminie, zaś pierwszy o jeden dzień wcześniej niż ustalono. Ile stolików dziennie wykonywał każdy z tych zakładów?

7. Ada i Monika mieszkają w dwóch różnych miejscowościach odległych o 48 km. Obie postanowiły spotkać się w połowie drogi. Monika wyjechała na rowerze o godzinę wcześniej niż Ada. Ada jechała na skuterze z prędkością o 32 km/h większą niż Monika. Oblicz, z jakimi prędkościami jechały dziewczyny.

8. Prędkość własna motorówki wynosi 15 km/h. Motorówka wyruszyła z przystani rzecznej *A* i po przypłynięciu do przystani *B* od razu zawróciła, kierując się do przystani *A*. Trasę od *A* do *B* i z powrotem, o łącznej długości 120 km, pokonała w czasie 8 godzin i 20 minut. Jaką prędkość ma prąd rzeki?

9. Kucharz i jego uczeń obierają wspólnie ziemniaki. Uczniowi pracującemu samodzielnie zajęłoby to o 40 minut dłużej niż kucharzowi. Pracując wspólnie wykonali tę pracę w ciągu 15 minut. Ile czasu zajęłoby uczniowi samodzielne obranie tych ziemniaków?

10. Zbiornik można napełnić za pomocą dwóch kranów. Pierwszy kran napełnia zbiornik o 20 minut dłużej niż drugi kran. Jeśli oba krany pracują razem, to czas napełniania zbiornika wynosi 24 minuty. Oblicz, w jakim czasie każdy z kranów napełni ten zbiornik.

11. Zbiornik wodny można opróżnić za pomocą dwóch pomp o różnej wydajności. Pierwsza pompa, pracując samodzielnie, opróżnia zbiornik w czasie o 3 godziny dłuższym niż druga pompa. Pewnego dnia pierwsza pompa pracowała samodzielnie przez 1,5 godziny, a następnie opróżnianie zbiornika dokończyły obie pompy, pracując razem przez 5,5 godziny. Oblicz, ile godzin potrzeba, aby pierwsza pompa samodzielnie opróżniła zbiornik.

12. Studenci Marek i Piotr założyli dwuosobową firmę zajmującą się myciem okien w biurowcach. Ostatnio podjęli się zlecenia, które wspólnie mieli wykonać w ciągu 12 godzin. Niestety po 7 godzinach wspólnej pracy Marek źle się poczuł i Piotr, pracując samodzielnie, potrzebował jeszcze $8\frac{3}{4}$ godziny na realizację tego zlecenia. W ciągu ilu godzin każdy z nich, pracując samodzielnie, mógłby wykonać tę pracę?

Nierówności wymierne

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie rozwiązywanie nierówności wielomianowych. Rozwiąż nierówności:

a) $-3x+6>0$ b) $-2x^2+3x+2\leqslant 0$ c) $(x+4)^2(x-1)^3(3-x)<0$.

W tym temacie omówimy sposoby rozwiązywania nierówności wymiernych.

Definicja 1.

Nierównością wymierną z jedną niewiadomą x nazywamy każdą z nierówności, którą można przekształcić równoważnie do jednej z czterech postaci:

$$\frac{W(x)}{P(x)}<0,\qquad \frac{W(x)}{P(x)}\leqslant 0,\qquad \frac{W(x)}{P(x)}>0 \quad \text{lub} \quad \frac{W(x)}{P(x)}\geqslant 0,$$

gdzie $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x)\not\equiv 0$.

Dziedziną nierówności wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych za wyjątkiem tych liczb, które są pierwiastkami wielomianu $P(x)$, znajdującego się w mianowniku ułamka.

Przykład 1.

Rozpatrzmy nierówność $\frac{6-2x}{x+5}\leqslant 0$, której dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{-5\}$.

Rozwiążemy tę nierówność dwoma sposobami.

I sposób – badamy znaki licznika i mianownika ułamka algebraicznego.

Po lewej stronie nierówności występuje iloraz dwóch wyrażeń $6-2x$ oraz $x+5$. Każde z tych wyrażeń może przyjmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Dodatkowo wyrażenie $6-2x$ przyjmuje wartość 0, jeśli $x=3$.

Iloraz $\frac{6-2x}{x+5}$ jest zatem ujemny lub równy 0 w dwóch przypadkach:

$$1)\ \begin{cases}6-2x\geqslant 0\\ x+5<0\end{cases} \quad \text{lub} \quad 2)\ \begin{cases}6-2x\leqslant 0\\ x+5>0\end{cases}.$$

Rozwiązujemy każdy z otrzymanych układów nierówności:

$$1)\ \begin{cases}6-2x\geqslant 0\\ x+5<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 3\\ x<-5\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty,-5)$$

$$2)\ \begin{cases}6-2x\leqslant 0\\ x+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 3\\ x>-5\end{cases}\Leftrightarrow x\in\langle 3,+\infty)$$

Otrzymujemy:

$$\frac{6-2x}{x+5}\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,-5)\cup\langle 3,+\infty)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{6-2x}{x+5}\leqslant 0$ jest zbiór $(-\infty,-5)\cup\langle 3,+\infty)$.

II sposób – korzystamy z następującej własności:

Jeśli nierówność pomnożymy stronami przez wyrażenie o znaku dodatnim, to otrzymamy nierówność równoważną danej nierówności.

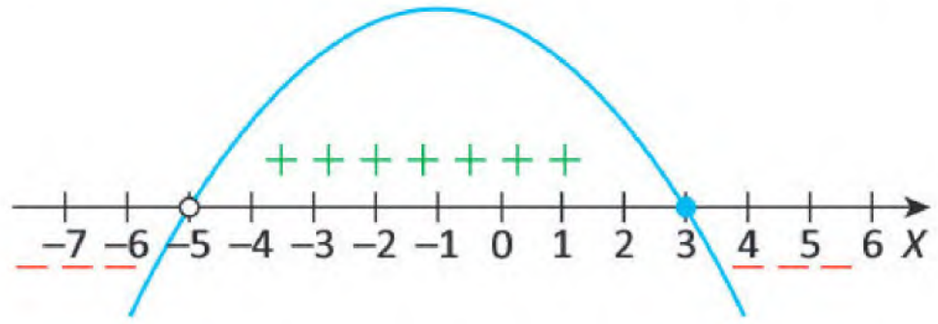
Zauważ, że jeśli $x \neq -5$, to $(x+5)^2 > 0$. Zatem obie strony nierówności możemy pomnożyć przez $(x+5)^2$ i wówczas otrzymamy nierówność równoważną danej.

$$\frac{6-2x}{x+5}\leqslant 0 \quad /\cdot(x+5)^2, \qquad x\neq -5$$

$$\frac{(6-2x)\cdot(x+5)^{2_1}}{\cancel{x+5}_1}\leqslant 0, \qquad x\neq -5$$

$$(6-2x)(x+5)\leqslant 0, \qquad x\neq -5$$

Szkicujemy wykres funkcji $y=(6-2x)(x+5)$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{-5\}$.



Odczytujemy przedziały, w których ta funkcja przyjmuje wartości niedodatnie:

$$x\in(-\infty,-5)\cup\langle 3,+\infty)$$

Otrzymaliśmy: $\frac{6-2x}{x+5}\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,-5)\cup\langle 3,+\infty)$.

Sposób II jest najczęściej stosowanym sposobem rozwiązywania nierówności wymiernych. W tym sposobie mnożymy obie strony uporządkowanej nierówności wymiernej przez kwadrat mianownika.

Nierówność $\frac{W(x)}{P(x)}\leqslant 0$, gdzie $P(x)\not\equiv 0$, można pomnożyć stronami przez kwadrat mianownika, czyli przez $\left[P(x)\right]^2$. Wówczas otrzymujemy nierówność równoważną danej nierówności, mającą postać $W(x)\cdot P(x)\leqslant 0$, gdzie $P(x)\neq 0$.

Analogicznie mnożymy przez kwadrat mianownika nierówności typu $\frac{W(x)}{P(x)}<0$, $\frac{W(x)}{P(x)}\geqslant 0$ lub $\frac{W(x)}{P(x)}>0$.

Przykład 2.

Rozwiążemy nierówność $\frac{x-4}{x} \geqslant \frac{x+2}{x+3}$.

Ustalamy dziedzinę nierówności: $D = \boldsymbol{R} - \{-3, 0\}$.

Teraz daną nierówność sprowadzamy do postaci $\frac{W(x)}{P(x)} \geqslant 0$. Następnie mnożymy strony otrzymanej nierówności przez kwadrat mianownika.

$$\frac{x-4}{x} - \frac{x+2}{x+3} \geqslant 0$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest wielomian $x(x+3)$.

$$\frac{(x-4)(x+3)-x(x+2)}{x(x+3)} \geqslant 0$$

Porządkujemy licznik. Mianownik pozostawiamy w postaci iloczynowej.

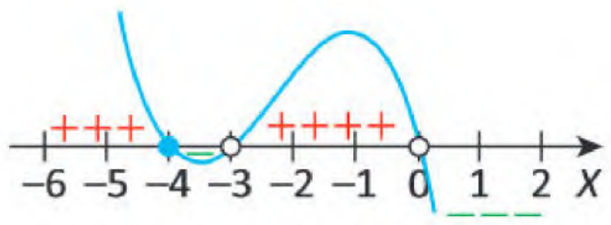
$$\frac{-3x-12}{x(x+3)} \geqslant 0 \quad / \cdot \left[x(x+3)\right]^2$$

Obie strony nierówności mnożymy przez kwadrat mianownika.

$$-3(x+4) \cdot x(x+3) \geqslant 0$$

Otrzymujemy nierówność wielomianową.

Szkicujemy przybliżony wykres funkcji $y = -3(x+4)x(x+3)$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, 0\}$. Z wykresu odczytujemy argumenty, dla których ta funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



$$x \in (-\infty, -4\rangle \cup (-3, 0)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x-4}{x} \geqslant \frac{x+2}{x+3}$ jest zbiór $(-\infty, -4\rangle \cup (-3, 0)$.

UWAGA: Jeśli stwierdzimy, rozwiązując nierówność wymierną, że mianownik ułamka algebraicznego występującego w tej nierówności, w całej dziedzinie przyjmuje tylko wartości dodatnie, to możemy pomnożyć strony nierówności przez mianownik.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż nierówność wymierną:

a) $\frac{2x+1}{x^2} \geqslant 0$

b) $\frac{8-2x}{x^2-x+1} < 0$

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $\frac{-x^2}{(x+4)^2}-2\frac{x}{x+4}+3>0$.

Wyznaczamy dziedzinę nierówności: $D = \boldsymbol{R} - \{-4\}$.

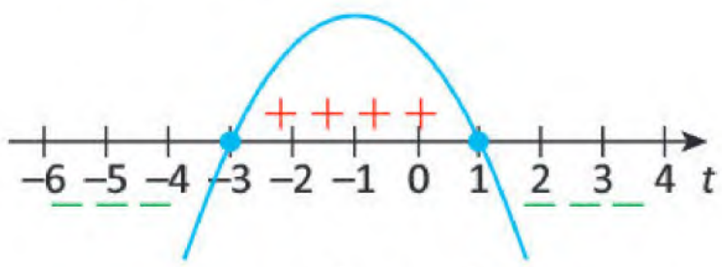
- Dokonujemy podstawienia $t=\frac{x}{x+4}$. Otrzymujemy nierówność kwadratową z niewiadomą t:

$-t^2-2t+3>0$

$-1(t-1)(t+3)>0$

$\Delta = 16, \qquad \sqrt{\Delta}=4$

$t = 1 \quad$ lub $\quad t = -3$



$t \in (-3, 1)$

Nierówność $-1(t-1)(t+3)>0$ jest równoważna nierówności podwójnej:

$-3 < t < 1$

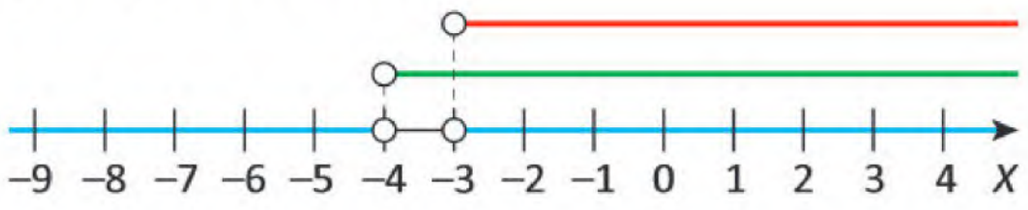
- Wracamy do podstawienia i rozwiązujemy nierówność podwójną:

$-3<\frac{x}{x+4}<1$ gdzie $x \neq -4$

$\frac{x}{x+4}>-3 \quad \wedge \quad \frac{x}{x+4}<1$

$x \in (-\infty,-4)\cup(-3,+\infty) \quad \wedge \quad x \in (-4,+\infty)$

Znajdujemy część wspólną obu zbiorów.



$\left[(-\infty,-4)\cup(-3,+\infty)\right]\cap(-4,+\infty)=(-3,+\infty)$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{-x^2}{(x+4)^2}-2\frac{x}{x+4}+3>0$ jest przedział $(-3, +\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{4}{2-x}<0$ b) $\frac{2x+5}{1-x}\geqslant 0$ c) $\frac{5-x}{x}\leqslant 0$

d) $\frac{x^2}{-x^2-1}\geqslant 0$ e) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}>0$ f) $\frac{-3}{x^2-16}\geqslant 0$

2. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{x^2-4x}{x+1}\leqslant 0$

b) $\frac{x-5}{x+2}\leqslant\frac{3x}{x+2}$

c) $\frac{x-1}{x+3}<\frac{x}{x+2}$

d) $\frac{x}{x-3}\geqslant\frac{-1}{(x-3)(x+2)}$

e) $\frac{x^3+x^2+x}{9x^2-25}\geqslant 0$

f) $\frac{2x^2+3x-4}{x^2+x-6}>2$

3. Rozwiąż daną nierówność.

a) $x^2+3x-1<\frac{3}{x}$

b) $\frac{x+5}{x^2+10x+25}\geqslant\frac{1}{x+5}$

c) $3-\frac{2x}{x-3}\geqslant\frac{7}{9-6x+x^2}$

d) $\frac{1+x}{1+2x}<\frac{1-2x}{x+1}-1$

e) $\frac{(x^2-3x+2)(x-5)^2}{x^3-8}\leqslant 0$

f) $\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x+1}{x-1}>0$

4. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{x-2}{x-3}-\frac{2}{x-1}-\frac{8}{x^2-4x+3}<0$

b) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-2}\geqslant\frac{x-14}{x^2+2x-8}-1$

c) $\frac{2-x}{x^3+x^2}\geqslant\frac{1-2x}{x^3-3x^2}$

d) $\frac{x^2-3x+5}{x^3+27}\geqslant\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x^2-3x+9}$

5. Rozwiąż daną nierówność.

a) $\frac{25}{x^2}+3\cdot\frac{5}{x}-4<0$

b) $\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)<0$

c) $\frac{x^4}{x^2+4x+4}\geqslant\frac{x^2}{x+2}$

d) $\frac{(x-5)^2}{x^2}+\frac{2(x-5)}{x}+1>0$

e) $\left(2-\frac{3}{x+7}\right)\left(2+\frac{1}{x+7}\right)\leqslant 0$

f) $\frac{x^2}{(x-3)^2}-\frac{4x}{x-3}\geqslant 5$

6. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{2}{|x+2|}\geqslant\frac{1}{3}$

b) $\left|\frac{x+4}{3x-5}\right|>1$

c) $\left|\frac{x-1}{x+6}\right|\leqslant 2$

d) $|x+2|>\frac{3}{|x|}$

e) $\frac{x^2+3|x|+2}{x^2+2x+1}>0$

f) $\frac{|3x-1|}{3x^2+14x-5}\leqslant 1.$

Zadania na dowodzenie z zastosowaniem średniej arytmetycznej, średniej geometrycznej i średniej kwadratowej kilku liczb

W klasie pierwszej poznaliśmy pojęcie średniej arytmetycznej i pojęcie średniej geometrycznej. Przypomnijmy:

1) **Średnia arytmetyczna** liczb $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jest równa S_a, gdzie

$$S_a = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$$

2) **Średnia geometryczna** liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jest równa S_g, gdzie

$$S_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Między średnią arytmetyczną S_a i średnią geometryczną S_g liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ zachodzi następująca zależność:

$$S_a \geqslant S_g$$

przy czym równość występuje tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

Średnia arytmetyczna liczb dodatnich jest nie mniejsza od średniej geometrycznej tych liczb. Udowodnimy tę własność kolejno dla dwóch, czterech i trzech liczb dodatnich.

Przykład 1.

Wykażemy, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Założenie: $a > 0$ i $b > 0$ Teza: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

Dowód: Przekształcimy różnicę $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ i zbadamy jej znak. Z założenia wiemy, że liczby a i b są dodatnie. Zatem istnieją liczby $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ oraz

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2}$$

Otrzymaliśmy równość $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2}$

Wiemy, że $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$, więc $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geqslant 0$. Prawa strona otrzymanej równości jest nieujemna, zatem lewa strona też jest nieujemna.

$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geqslant 0$ skąd $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, co kończy dowód.

Przykład 2.

Pokażemy, że jeśli liczby a, b, c, d są dodatnie, to $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

Założenie: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$

Teza: $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$

Dowód: Z przykładu 1. wynika, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $d > 0$, to

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ oraz $\frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{cd}$. Zatem

$\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$

Korzystamy z własności:
jeśli $a > b$ i $c > d$, to $a + b > c + d$.

$\frac{a+b+c+d}{2} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd} \quad /:2$

$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$

Ale liczba $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}$ jest średnią arytmetyczną liczb dodatnich $\sqrt{ab}$ i $\sqrt{cd}$, więc

$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$

Z przykładu 1.

$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{abcd}}$

Korzystamy z własności:

jeśli $a \geqslant 0$ i $n, m \in \boldsymbol{N} - \{0, 1\}$, to $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

$\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$

Otrzymaliśmy:

$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$, stąd

$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$, co kończy dowód.

Przykład 3.

Pokażemy, że jeśli liczby a, b i c są dodatnie, to $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

Założenie: $a > 0, b > 0, c > 0$

Teza: $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$

Dowód: Zastosujemy własność udowodnioną w przykładzie 2. Zauważamy, że

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{\frac{4}{3}(a+b+c)}{4} = \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}$$

Średnią arytmetyczną trzech dodatnich liczb a, b, c przedstawiliśmy jako średnią arytmetyczną czterech liczb dodatnich: a, b, c oraz $\frac{a+b+c}{3}$.

Mamy

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3}}$$

Na podstawie przykładu 2.

stąd

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{a+b+c}{3}}$$

Ponieważ obie strony nierówności są dodatnie, więc po podniesieniu stron nierówności do potęgi czwartej otrzymujemy nierówność równoważną danej.

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqslant abc\frac{a+b+c}{3}$$

Teraz dzielimy obie strony nierówności przez dodatnie wyrażenie $\frac{a+b+c}{3}$. Znak nierówności pozostaje bez zmiany. Otrzymujemy

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc,$$

zatem

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$ co kończy dowód.

W dowodzie własności z przykładu 2. wykorzystaliśmy własność udowodnioną w przykładzie 1. W dowodzie własności z przykładu 3. zastosowaliśmy własność udowodnioną w przykładzie 2. Teraz się przekonasz, że własność średniej arytmetycznej i średniej geometrycznej kilku liczb dodatnich można stosować w dowodzeniu innych zależności między tymi liczbami.

Przykład 4.

Wykażemy, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi, to $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$.

Założenie: $a>0$ i $b>0$ Teza: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$

Dowód: Z założenia $a>0$ i $b>0$, więc liczby $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$ też są dodatnie. Wówczas

$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}$, czyli Zobacz przykład 1.

$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\geqslant 1$, stąd $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 1. Udowodnij nierówność z przykładu 4. bez stosowania nierówności z przykładu 1.

Ćwiczenie 2. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$. Skorzystaj z zależności udowodnionej w przykładzie 3.

Przykład 5.

Pokażemy, że jeśli $a>0$, to $a^3+a+\frac{10}{a^2}\geqslant 8$.

Założenie: $a>0$

Teza: $a^3+a+\frac{10}{a^2}\geqslant 8$

Dowód: Liczbę $\frac{10}{a^2}$ przedstawiamy w postaci sumy: $\frac{8}{a^2}+\frac{2}{a^2}$. Ponieważ $a>0$, więc możemy skorzystać z nierówności, udowodnionej w przykładzie 2.

$$\frac{a^3+a+\frac{8}{a^2}+\frac{2}{a^2}}{4}\geqslant\sqrt[4]{a\cdot a^3\cdot\frac{8}{a^2}\cdot\frac{2}{a^2}}$$ stąd

$$\frac{a^3+a+\frac{8}{a^2}+\frac{2}{a^2}}{4}\geqslant\sqrt[4]{16}\quad /\cdot 4$$

$$a^3+a+\frac{10}{a^2}\geqslant 2\cdot 4 \quad \text{czyli}$$

$a^3+a+\frac{10}{a^2}\geqslant 8$, co kończy dowód.

Teraz poznasz pojęcie średniej kwadratowej.

Średnią kwadratową liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$.

Przykład 6.

Obliczymy średnią kwadratową pięciu liczb: $-4, -1, 0, 3, 3$. Mamy:

$$\sqrt{\frac{(-4)^2+(-1)^2+0^2+3^2+3^2}{5}}=\sqrt{\frac{16+1+0+9+9}{5}}=\sqrt{7}$$

Ćwiczenie 3. Porównaj średnią arytmetyczną i średnią kwadratową następujących liczb:

a) $-4, 6, 9, 15$ b) $8, 8, 8$.

Jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie, to średnia kwadratowa jest nie mniejsza od średniej arytmetycznej tych liczb. Równość zachodzi tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są równe, czyli wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

Udowodnimy powyższą własność dla trzech liczb dodatnich.

Przykład 7.

Wykażemy, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to $\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Założenie: $a > 0, b > 0, c > 0$

Teza: $\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

Dowód: Tezę przekształcimy równoważnie. Ponieważ liczby a, b, c są dodatnie, więc obie strony nierówności są dodatnie. Po podniesieniu obu stron nierówności do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną danej. Mamy:

$$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{9}\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\geqslant 0$$

Teraz wystarczy udowodnić, że różnica $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$ jest nieujemna.
Mamy:

$$3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=$$
$$=3a^2+3b^2+3c^2-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)=$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=$$
$$=(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)=$$
$$=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$$

Ponieważ $(a-b)^2\geqslant 0$, $(a-c)^2\geqslant 0$ oraz $(b-c)^2\geqslant 0$, więc

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geqslant 0$, czyli $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\geqslant 0$

Stąd $\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, co kończy dowód.

Przykład 8.

Pokażemy, że jeśli liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówność $a+b+c>\frac{5}{2}$, to $a^2+b^2+c^2>\frac{25}{12}$.

Założenie: $a>0, b>0, c>0$, $a+b+c>\frac{5}{2}$ Teza: $a^2+b^2+c^2>\frac{25}{12}$

Dowód: Ponieważ $a+b+c>\frac{5}{2}$, więc $\frac{a+b+c}{3}>\frac{5}{6}$.

Wówczas:

$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geqslant\frac{a+b+c}{3}>\frac{5}{6}$ Korzystamy z nierówności z przykładu 7.

$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}>\frac{5}{6}$ stąd Podnosimy strony nierówności do kwadratu.

$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}>\frac{25}{36}$, czyli

$a^2+b^2+c^2>\frac{25}{12}$, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi i $a + b = 5$, to $ab \leqslant 6\frac{1}{4}$.

D 2. Wykaż, że jeśli a, b, c, d są liczbami dodatnimi, to $\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd} \geqslant 4$.

D 3. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c, d są dodatnie, to $\frac{cd}{ab}+\frac{ad}{bc}+\frac{ab}{cd}+\frac{bc}{ad} \geqslant 4$.

D 4. Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $a^3+\frac{1}{a^2}+\frac{125}{a} \geqslant 15$.

D 5. Wykaż, że jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi, to $\frac{3a}{b}+\frac{8b}{c}+\frac{c}{3a} \geqslant 6$.

D 6. Wykaż, że jeśli a, b oraz c są liczbami dodatnimi, to
$\frac{a+b+3c}{c}+\frac{b+c+3a}{a}+\frac{a+c+3b}{b} \geqslant 15$.

D 7. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geqslant 9$.

D 8. Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi, to $3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right) \geqslant 8\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-10$.

D 9. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to $a^4+\frac{12}{a^2} \geqslant 9$.

D 10. Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $ab = 81$, to $(1 + a)(1 + b) \geqslant 100$.

D 11. Wykaż, że jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi i $abc = 36$,
to $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geqslant 48$.

D 12. Wykaż, że jeśli $a \cdot b \neq 0$ i $a^2+b^2 \geqslant \frac{3}{2}$, to $2\left(a^4+b^4\right) > 9$.

D 13. Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\left(1+a+a^2\right)^2 \leqslant 3\left(1+a^2+a^4\right)$.

D 14. Wykaż, że jeśli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz
$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a + b + c) = 42$, to $a+b+c+3 \leqslant \sqrt{135}$.

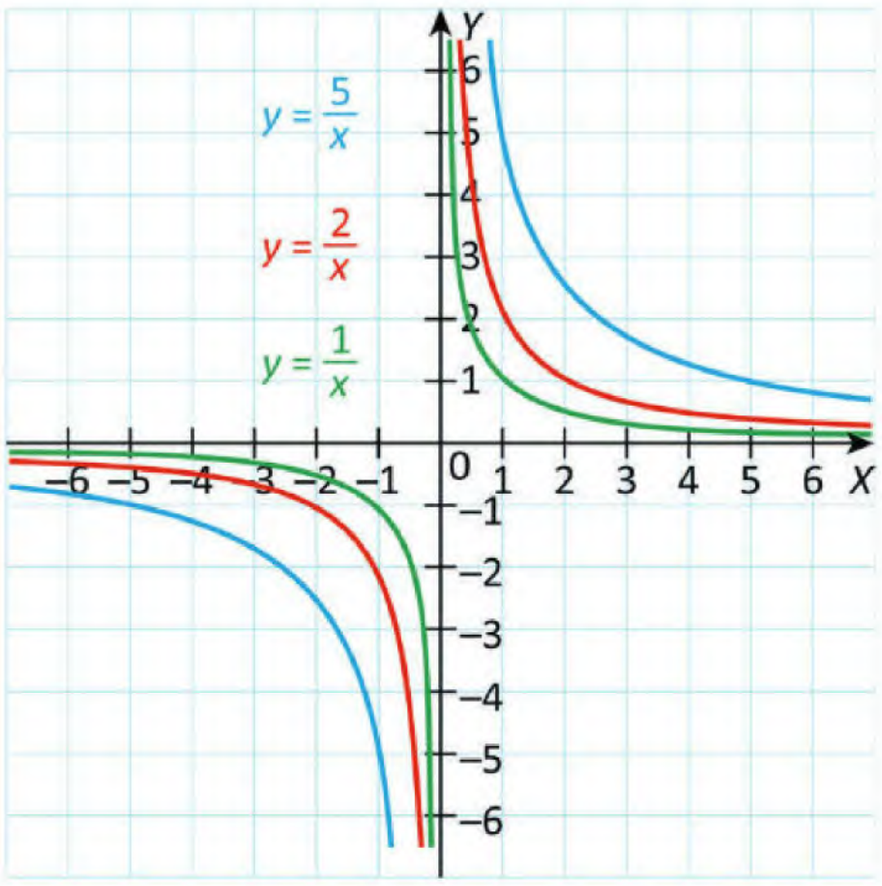
Funkcja homograficzna

W klasie pierwszej omawialiśmy własności różnych funkcji. Wśród tych funkcji były też takie, których wzór ma postać

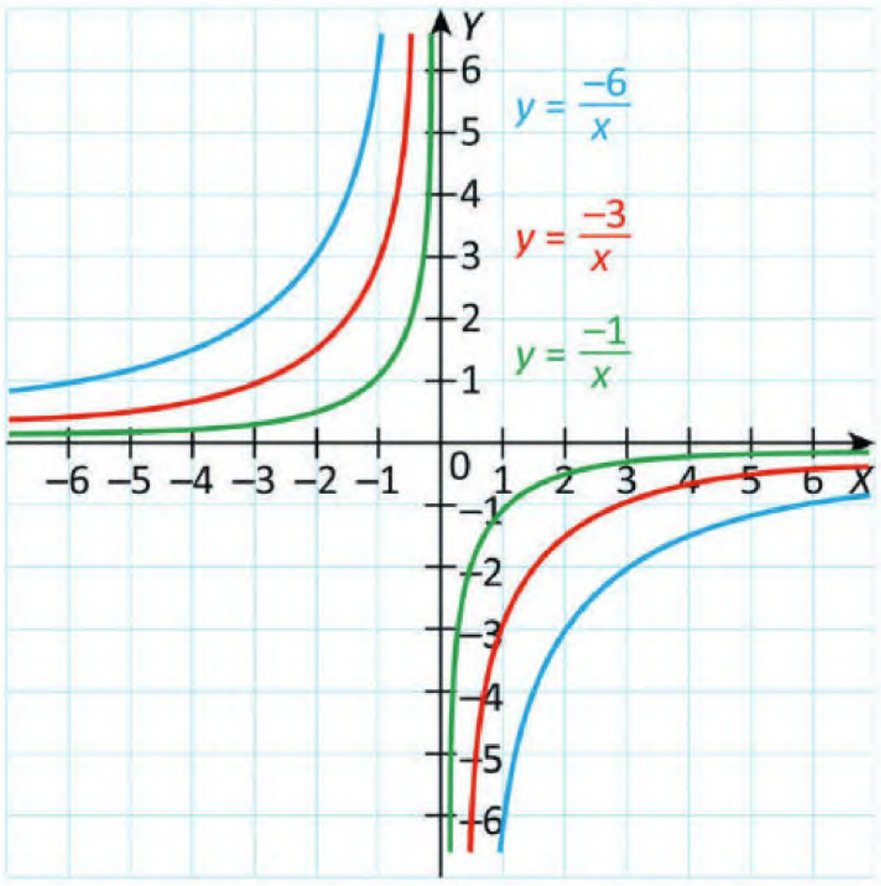
$y=\frac{a}{x}$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą i $a \neq 0$ oraz $x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$.

Każdą funkcję określoną takim wzorem nazywamy proporcjonalnością odwrotną. Poniżej przypominamy wykresy kilku proporcjonalności odwrotnych w przypadku, gdy $a>0$ oraz gdy $a<0$.

a) $y=\frac{a}{x}$, $a>0$



b) $y=\frac{a}{x}$, $a<0$



Wykresem funkcji $y=\frac{a}{x}$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą i $a \neq 0$ oraz $x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$, jest hiperbola. Wykres ten składa się z dwóch gałęzi i jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$. Z wykresu odczytujemy następujące własności proporcjonalności odwrotnej:

- zbiór wartości funkcji jest równy $\boldsymbol{R}-\{0\}$;
- funkcja nie ma ani wartości największej, ani wartości najmniejszej;
- funkcja nie ma miejsc zerowych;
- jeśli $a>0$, to funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$;
- jeśli $a<0$, to ta funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

Ćwiczenie 1. Wyznacz współczynnik a we wzorze funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$, jeśli do wykresu tej funkcji należy punkt $A(-4, 1)$. Następnie naszkicuj wykres funkcji f w układzie współrzędnych.

Teraz omówimy przesunięcie równoległe wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie $x \neq 0$, wzdłuż osi *OX* oraz wzdłuż osi *OY*. Zastanowimy się, jakim wzorem można opisać funkcję, której wykres otrzymamy po wykonaniu takiego przekształcenia. W tym celu przypomnijmy z klasy drugiej trzy twierdzenia, dotyczące przesunięć równoległych wykresów funkcji.

1) Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy równolegle o wektor $[p, 0]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - p)$.
2) Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy równolegle o wektor $[0, q]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x) + q$.
3) Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy równolegle o wektor $[p, q]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - p) + q$.

Przykład 1.

a) Jeśli wykres funkcji $f(x)=\frac{2}{x}$, $x \neq 0$, przesuniemy równolegle o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor $[3, 0]$, to otrzymamy wykres funkcji $g(x) = f(x - 3)$, czyli $g(x)=\frac{2}{x-3}$, $x \neq 3$.

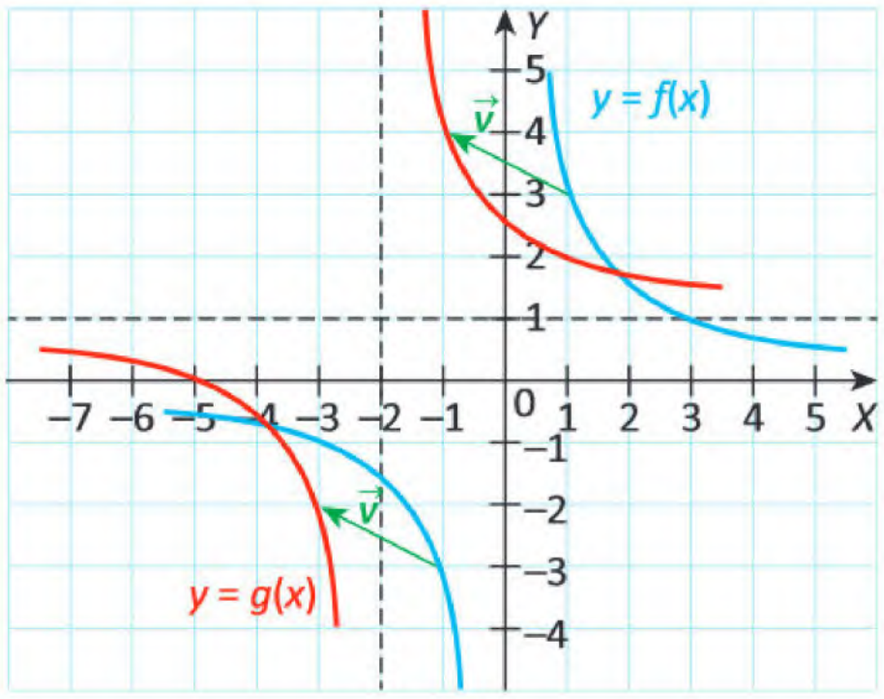
b) Jeśli wykres funkcji $f(x)=\frac{-1}{x}$, $x \neq 0$, przesuniemy równolegle o 3 jednostki w dół, czyli o wektor $[0, -3]$, to otrzymamy wykres funkcji $g(x) = f(x) - 3$, czyli $g(x)=\frac{-1}{x}-3$, $x \neq 0$.

Ćwiczenie 2. Naszkicuj wykres funkcji *f* oraz wykres funkcji *g* z przykładu 1a) we wspólnym układzie współrzędnych. Kolorem zaznacz przykładowy wektor przesunięcia. Podobnie wykonaj wykresy funkcji z przykładu 1b).

Przykład 2.

Wykres funkcji $f(x)=\frac{3}{x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$, przesuniemy równolegle o wektor $\vec{v}$, $\vec{v}=[-2,1]$ i otrzymamy wykres funkcji *g*. Podamy dziedzinę funkcji *g* i jej zbiór wartości. Następnie wyznaczymy wzór funkcji *g*.

Przesunięcie wykresu funkcji $f(x)=\frac{3}{x}$ o wektor $\vec{v}$, $\vec{v}=[-2,1]$, oznacza przesunięcie tego wykresu o 2 jednostki w lewo, a następnie przesunięcie otrzymanego wykresu o 1 jednostkę w górę. Na rysunku poniżej przedstawione są dwa wykresy: wykres funkcji *f* – w kolorze niebieskim oraz wykres funkcji *g* – w kolorze czerwonym.



Z wykresu funkcji g odczytujemy dziedzinę i zbiór wartości funkcji g.

$$D_g = \boldsymbol{R} - \{-2\} \qquad ZW_g = \boldsymbol{R} - \{1\}$$

Wyznaczamy wzór funkcji g:

$$g(x) = f(x-(-2)) + 1, \quad \text{czyli}$$

$$g(x) = \frac{3}{x-(-2)} + 1,$$

$$g(x) = \frac{3}{x+2} + 1$$

Jeśli wykres funkcji $y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$, przesuniemy równolegle o wektor $[p, q]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{a}{x-p} + q$. Dziedziną otrzymanej funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{p\}$, zaś zbiorem wartości jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{q\}$.

Zapiszmy teraz wzór funkcji $g(x) = \frac{3}{x+2} + 1$, gdzie $x \neq -2$, w postaci ułamka algebraicznego.

$$g(x) = \frac{3+(x+2)}{x+2} \qquad g(x) = \frac{x+5}{x+2}$$

Okazuje się, że wzór funkcji g można wyrazić za pomocą ilorazu wielomianów stopnia pierwszego.

Definicja 1.

Funkcją homograficzną nazywamy funkcję $y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$, gdzie $C \neq 0$ i $AD - CB \neq 0$.

Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\boldsymbol{R} - \left\{-\frac{D}{C}\right\}$.

Funkcja homograficzna jest ilorazem dwóch funkcji liniowych, którego nie można sprowadzić do funkcji liniowej. O tym mówią warunki $C \neq 0$ i $AD - CB \neq 0$.

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola, która przecina

- oś OX w punkcie $\left(\frac{-B}{A}, 0\right)$ – jeśli $A \neq 0$
- oś OY w punkcie $\left(0, \frac{B}{D}\right)$ – jeśli $D \neq 0$.

Przykładami funkcji homograficznych są wspomniane już w tym temacie funkcje:

1) $y=\frac{-1}{x}$, $x\neq 0$ 2) $y=\frac{2}{x-3}$, $x\neq 3$ 3) $y=\frac{-3x-1}{x}$, $x\neq 0$ 4) $y=\frac{x+5}{x+2}$, $x\neq -2$.

Ćwiczenie 3. Dla każdej z powyższych funkcji podaj współczynniki A, B, C, D. Następnie wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresów tych funkcji z osiami układu współrzędnych – jeśli takie punkty istnieją.

Ćwiczenie 4. Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $y=\frac{1}{x-3}-2$. Następnie doprowadź wzór tej funkcji do postaci $y=\frac{Ax+B}{Cx+D}$ i oblicz miejsce zerowe.

Przykład 3.

a) Funkcja $f(x)=\frac{4x+8}{x+2}$ nie jest funkcją homograficzną, bowiem zachodzi równość $4\cdot 2-1\cdot 8=0$. Mamy $\frac{4x+8}{x+2}=\frac{4(x+2)}{x+2}=4$, zatem $f(x)=4$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{-2\}$. Wykresem tej funkcji jest prosta $y=4$ bez punktu $(-2, 4)$.

b) Funkcja $g(x)=\frac{2x-4}{4}$ nie jest funkcją homograficzną, bo mianownik nie jest wielomianem stopnia pierwszego. Funkcja ta jest funkcją liniową.

Przykład 4.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x)=\frac{4x+13}{x+2}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{-2\}$.

Najpierw doprowadzimy wzór funkcji f do postaci $f(x)=\frac{a}{x-p}+q$, gdzie $a\neq 0$.

I sposób – przekształcamy licznik ułamka występującego we wzorze funkcji

$$f(x)=\frac{4x+13}{x+2}, \text{ gdzie } x\neq -2$$

W liczniku ułamka zapisujemy iloczyn liczby 4 przez mianownik $(x+2)$ i otrzymane wyrażenie uzupełniamy, dodając liczbę 5 – żeby otrzymać wielomian $4x+13$.

$$f(x)=\frac{4(x+2)+5}{x+2}$$

Dany ułamek zapisujemy w postaci sumy ułamków o mianowniku $(x+2)$.

$$f(x)=\frac{4(x+2)}{x+2}+\frac{5}{x+2}$$

Skracamy pierwszy składnik sumy.

$$f(x)=4+\frac{5}{x+2}$$

II sposób – dzielimy wielomian $4x + 13$ przez wielomian $x + 2$.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 4 \\ \hline (4x+13) : (x+2) \\ -4x - 8 \\ \hline = \qquad 5 \end{array}$$

Jeśli podzielimy wielomian $4x + 13$ przez dwumian $x + 2$, to otrzymamy iloraz 4 i resztę 5.

Zatem wzór funkcji f jest następujący: $f(x) = 4 + \dfrac{5}{x+2}$.

Jeśli wykres funkcji $y = \dfrac{5}{x}$ przesuniemy równolegle o wektor $[-2, 4]$ – czyli o 2 jednostki w lewo i 4 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji

$$f(x) = \frac{4x+13}{x+2}, \text{ gdzie } x \neq -2.$$

Aby dokładniej naszkicować wykres funkcji f, warto również wyznaczyć współrzędne punktów wspólnych wykresu z osiami układu współrzędnych.

- Z osią OX:

$$B = 13, \quad A = 4, \quad \frac{-B}{A} = -3\frac{1}{4}$$

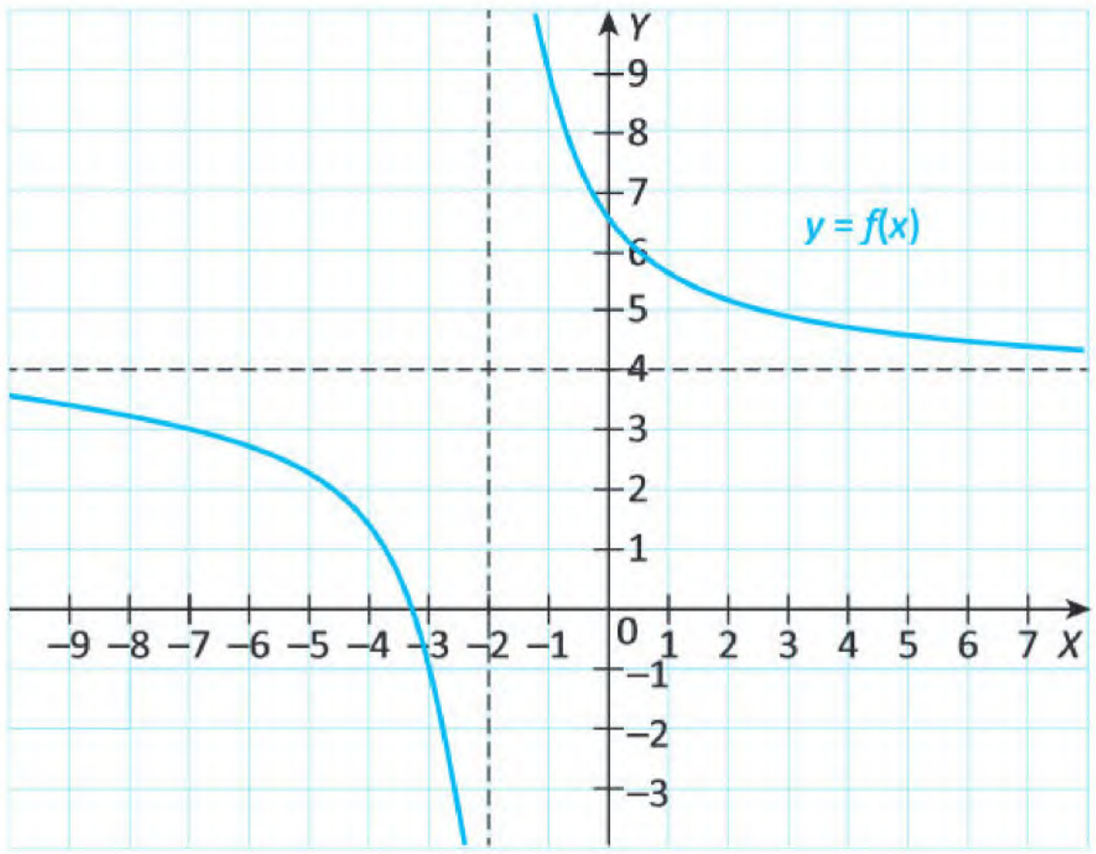
Wykres przecina oś OX w punkcie $\left(-3\frac{1}{4},\ 0\right)$.

- Z osią OY:

$$B = 13, \quad D = 2, \quad \frac{B}{D} = 6\frac{1}{2}$$

Wykres przecina oś OY w punkcie $\left(0,6\frac{1}{2}\right)$.

Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku poniżej. Zauważ, że wykres ten jest symetryczny względem punktu $(-2, 4)$.



Ćwiczenie 5. Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{4x+13}{x+2}$ z przykładu 4. podaj:

a) zbiór wartości funkcji f,

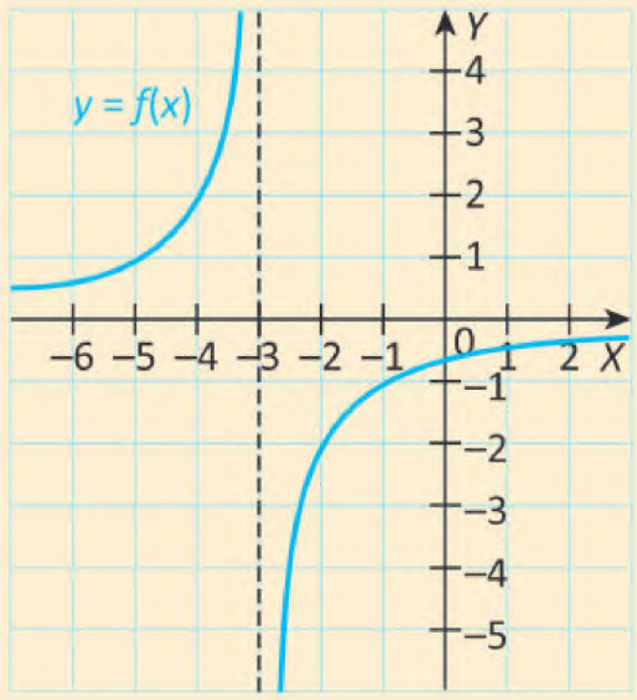
b) przedziały monotoniczności funkcji f,

c) zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, oraz zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wykres funkcji $y=\frac{3}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przesunięto równolegle wzdłuż osi *OY* o 2 jednostki w górę i otrzymano wykres funkcji *f*.
   a) Napisz wzór funkcji *f* i naszkicuj jej wykres w układzie współrzędnych.
   b) Podaj zbiór wartości funkcji *f*.
   c) Oblicz miejsce zerowe funkcji *f*.
   d) Wyznacz argument, dla którego wartość funkcji *f* jest równa 5.

2. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji *f*, której wykres otrzymano, przesuwając równolegle wzdłuż osi *OX* wykres proporcjonalności odwrotnej $y=\frac{-2}{x}$. Do dziedziny funkcji *f* nie należy liczba –3.
   a) Napisz wzór funkcji *f* i podaj jej dziedzinę.
   b) Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.
   c) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji *f* i osi *OY*.



3. Wykres proporcjonalności odwrotnej $y=\frac{4}{x}$, gdzie $x \neq 0$, przesunięto równolegle o 3 jednostki w prawo wzdłuż osi *OX*. Następnie powstały wykres przesunięto o 1 jednostkę w dół wzdłuż osi *OY* i otrzymano wykres funkcji *g*.
   a) Napisz wzór funkcji *g* w postaci ilorazu wielomianów pierwszego stopnia. Podaj dziedzinę tej funkcji.
   b) Oblicz współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji *g* z osiami układu współrzędnych.
   c) Naszkicuj wykres funkcji *g*. Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja *g* przyjmuje wartości ujemne.

4. Dany jest wzór funkcji homograficznej *f*. Podaj jej dziedzinę oraz zbiór wartości. Następnie oblicz współrzędne punktów przecięcia się wykresu tej funkcji z osiami układu współrzędnych – jeżeli istnieją.

   a) $f(x)=\frac{-5}{x+2,5}$
   b) $f(x)=\frac{-9}{x}+1$
   c) $f(x)=\frac{14}{x+7}+2$
   d) $f(x)=\frac{6x}{x-3}$
   e) $f(x)=\frac{x-10}{x+2}$
   f) $f(x)=\frac{2x+8}{x}$

5. Wykres funkcji f otrzymamy, przesuwając równolegle wykres proporcjonalności odwrotnej $y=\frac{a}{x}$, $a \neq 0$, o wektor $\vec{u}$. Wyznacz współczynnik a oraz współrzędne wektora $\vec{u}$, jeśli:

a) $f(x)=\frac{x+5}{x+3}$ b) $f(x)=\frac{3x-5}{x-2}$

c) $f(x)=\frac{x+1}{x+4}$ d) $f(x)=\frac{-5x+13}{x-3}$

e) $f(x)=\frac{4x}{5-x}$ f) $f(x)=\frac{2x-5}{3-x}$.

6. Funkcja $f(x)=\frac{-x+b}{x+5}$, gdzie $x \neq -5$, jest funkcją homograficzną. Do wykresu funkcji f należy punkt $P\left(-3, \frac{1}{2}\right)$.

a) Oblicz współczynnik b.

b) Naszkicuj wykres funkcji f i omów własności tej funkcji.

c) Wyznacz argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość -7.

7. Funkcja homograficzna $f(x)=\frac{x+b}{x+d}$ jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 3), (3, +\infty)$. Wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie o rzędnej $-\frac{1}{3}$.

Wyznacz:

a) współczynniki b i d,

b) zbiór wartości funkcji f,

c) argument, dla którego wartość funkcji f jest równa $\sqrt{2}$.

8. Środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej $f(x)=\frac{Ax-5}{x+D}$ jest punkt $P(-1, -2)$. Wyznacz:

a) współczynniki A i D,

b) miejsce zerowe funkcji f,

c) punkty wspólne wykresu funkcji f i wykresu funkcji liniowej $y=1-2x$.

9. Funkcja homograficzna $f(x)=\frac{-3x+b}{x+d}$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -4)$ oraz $(-4, +\infty)$, a jej wykres przecina oś OY w punkcie o rzędnej $-3\frac{3}{4}$.

a) Oblicz współczynniki b i d.

b) Naszkicuj wykres funkcji f w układzie współrzędnych.

c) Wyznacz punkty wspólne wykresu funkcji f i wykresu funkcji $g(x)=\frac{x+1}{3}$.

Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

Przykład 1.

Wykażemy, na podstawie definicji, że funkcja homograficzna określona wzorem $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -3)$.

Założenia: $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$, $x_1 \in (-\infty, -3)$, $x_2 \in (-\infty, -3)$, $x_1 < x_2$

Teza: $f(x_1) < f(x_2)$

Dowód: Obliczamy różnicę wartości funkcji f dla argumentów x_1, x_2:

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1-1}{x_1+3}-\frac{2x_2-1}{x_2+3}=\frac{(2x_1-1)\cdot(x_2+3)-(x_1+3)\cdot(2x_2-1)}{(x_1+3)\cdot(x_2+3)}=$$

$$=\frac{2x_1x_2+6x_1-x_2-3-2x_1x_2+x_1-6x_2+3}{(x_1+3)\cdot(x_2+3)}=\frac{7x_1-7x_2}{(x_1+3)\cdot(x_2+3)}=\frac{7(x_1-x_2)}{(x_1+3)\cdot(x_2+3)}$$

Otrzymaliśmy:

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{7(x_1-x_2)}{(x_1+3)\cdot(x_2+3)}.$$

Na podstawie założeń określamy znak otrzymanego ułamka. Mamy:

- $x_1 < x_2$ czyli $x_1 - x_2 < 0$, więc $7(x_1-x_2) < 0$
- $(x_1 < -3$ i $x_2 < -3)$, czyli $(x_1 + 3 < 0$ i $x_2 + 3 < 0)$, zatem $(x_1 + 3)\cdot(x_2 + 3) > 0$

W takim razie $\frac{7(x_1-x_2)}{(x_1+3)\cdot(x_2+3)} < 0$, więc $f(x_1)-f(x_2) < 0$, czyli $f(x_1) < f(x_2)$, zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -3)$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 1. Wykaż, na podstawie definicji, że funkcja $f(x)=\frac{-2}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-3, +\infty)$. Czy ta funkcja jest rosnąca w zbiorze $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$? Odpowiedź uzasadnij.

Przykład 2.

Z równania $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y-2}=1$ wyznaczymy y jako funkcję zmiennej x, a następnie naszkicujemy wykres tej funkcji.

Równanie $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y-2}=1$ jest określone wtedy i tylko wtedy, gdy $x \neq -3$ i $y \neq 2$.

Wyznaczamy z równania niewiadomą y:

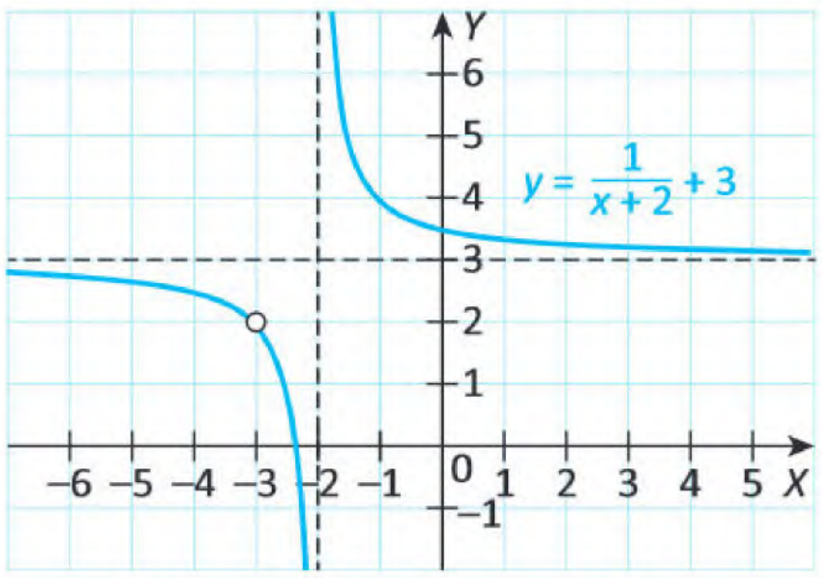
$$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y-2}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{y-2}=1-\frac{1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{1}{y-2}=\frac{x+2}{x+3}$$

Liczba $\frac{1}{y-2}$ jest różna od 0, więc również $x + 2 \neq 0$. Mamy

$$y-2=\frac{x+3}{x+2}, \text{ gdzie } x \neq -2$$

$$y=\frac{x+3}{x+2}+2 \Leftrightarrow y=\frac{1+(x+2)}{x+2}+2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{x+2}+3$$

Wykresem funkcji $y=\frac{1}{x+2}+3$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{-3,-2\}$, jest hiperbola bez punktu $(-3, 2)$ na rysunku poniżej.

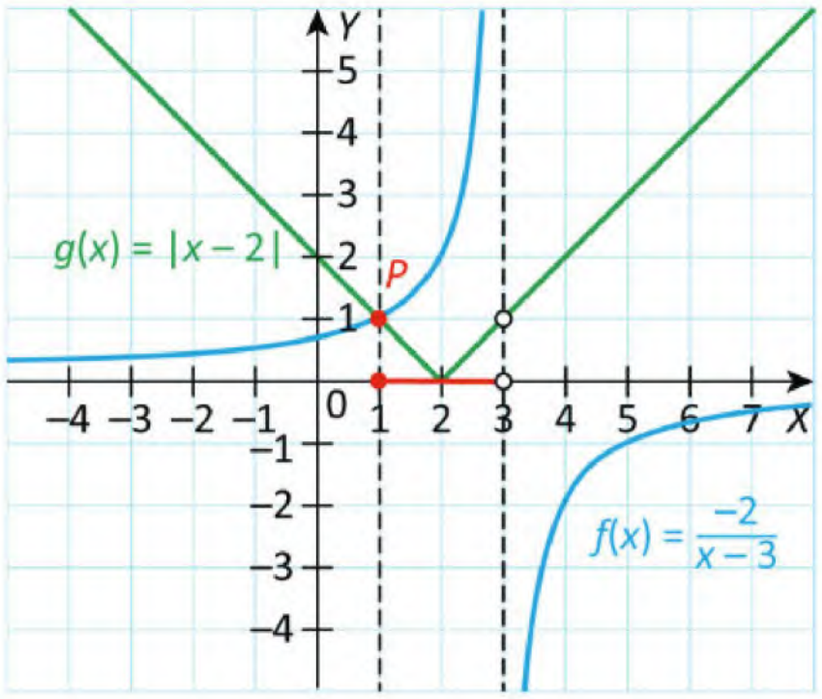


Przykład 3.

Rozwiążemy graficznie nierówność $\frac{-2}{x-3} \geqslant |x-2|$.

Dziedziną nierówności jest zbiór $\boldsymbol{R}-\{3\}$. We wspólnym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji $f(x)=\frac{-2}{x-3}$ oraz $g(x)=|x-2|$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{3\}$.

Następnie szukamy argumentów, dla których $f(x) \geqslant g(x)$.



Odczytujemy współrzędne punktu wspólnego P obu wykresów:

$P(1, 1)$

Sprawdzamy:

$$f(1)=\frac{-2}{1-3}=1$$

$$g(1)=|1-2|=1$$

Analizujemy wykresy funkcji w przedziałach, wyznaczonych na osi OX przez liczby 1 i 3:

– jeśli $x \in (-\infty, 1)$, to $f(x)<g(x)$

– jeśli $x \in \langle 1, 3)$, to $f(x)\geqslant g(x)$

– jeśli $x \in (3, +\infty)$, to $f(x)<g(x)$

Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{-2}{x-3}\geqslant|x-2|$ jest przedział $\langle 1, 3)$.

Przykład 4.

Wyznaczymy trzy liczby pierwsze o tej własności, że ich iloczyn jest równy siedmiokrotnej sumie tych liczb.

Oznaczamy szukane liczby pierwsze przez p_1, p_2, p_3. Liczby te spełniają warunek:

$(*)$ $\quad p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 7 \cdot (p_1 + p_2 + p_3)$

Wyrażenie po lewej stronie znaku równości przedstawia liczbę w rozkładzie na czynniki pierwsze. Siódemka po prawej stronie znaku równości jest liczbą pierwszą, zatem jest jedną z liczb p_1, p_2, p_3. Możemy przyjąć, że $p_3 = 7$.

Wtedy równanie $(*)$ sprowadza się do równania:

$(**)$ $\quad p_1 \cdot p_2 = p_1 + p_2 + 7$

Wyznaczamy z powyższego równania p_2. Otrzymujemy:

$$p_1 \cdot p_2 - p_2 = p_1 + 7$$

$$p_2(p_1 - 1) = p_1 + 7$$

Zauważ, że $p_1 \neq 1$, bo p_1 jest liczbą pierwszą.

$$p_2=\frac{p_1+7}{p_1-1}=1+\frac{8}{p_1-1}$$

Zatem $p_2=1+\frac{8}{p_1-1}$, gdzie p_1 jest liczbą pierwszą.

Liczba pierwsza p_2 jest sumą liczby naturalnej 1 i liczby $\frac{8}{p_1-1}$, więc liczba $\frac{8}{p_1-1}$ też jest liczbą naturalną. Wobec tego (p_1-1) jest naturalnym dzielnikiem liczby 8. Naturalne dzielniki liczby 8, to: 1, 2, 4, 8. Otrzymujemy:

$$p_1-1=1 \vee p_1-1=2 \vee p_1-1=4 \vee p_1-1=8, \quad \text{stąd}$$

$$p_1=2 \quad \vee \quad p_1=3 \quad \vee \quad p_1=5 \quad \vee \quad p_1=9$$

Liczba 9 jest liczbą złożoną. Pozostałe otrzymane liczby są liczbami pierwszymi.

Teraz obliczamy p_2:

– jeśli $p_1=2$, to $p_2=1+\frac{8}{2-1}=9$ – nie spełnia warunków zadania

– jeśli $p_1=3$, to $p_2=5$

– jeśli $p_1=5$, to $p_2=3$.

Warunki zadania spełniają trzy liczby pierwsze: 3, 5, 7.

Ćwiczenie 2. Wyznacz wszystkie punkty należące do wykresu funkcji $f(x)=\frac{2}{x}-7$, których obie współrzędne są całkowite.

Przykład 5.

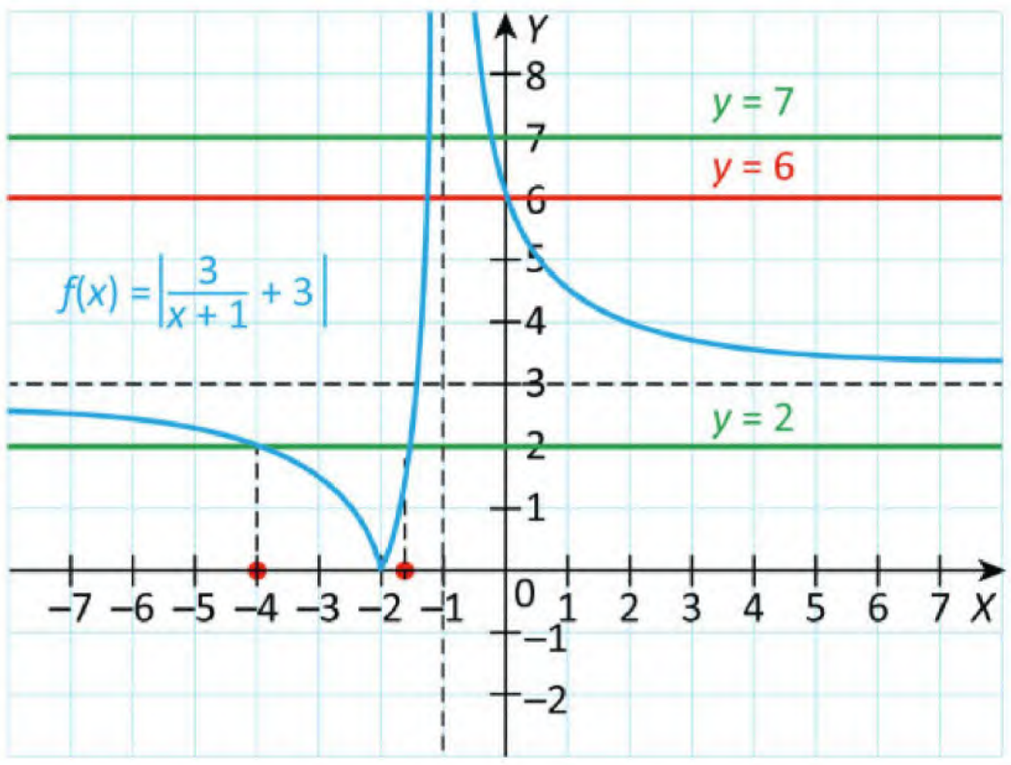
Wyznaczymy wszystkie wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $\left|\frac{3}{x+1}+3\right|=\frac{k}{4}$, gdzie $x \neq -1$, ma dwa rozwiązania. Następnie ustalimy, dla jakich wartości parametru k te dwa rozwiązania są ujemne.

Niech $f(x)=\left|\frac{3}{x+1}+3\right|$, gdzie $x \neq -1$ oraz $g(x)=\frac{k}{4}$, $k \in \boldsymbol{R}$. Równanie

$$\left|\frac{3}{x+1}+3\right|=\frac{k}{4}$$

ma dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy wykresy funkcji f i g przecinają się w dwóch punktach.

Aby otrzymać wykres funkcji $f(x)=\left|\frac{3}{x+1}+3\right|$, szkicujemy najpierw wykres funkcji $y=\frac{3}{x+1}+3$, a następnie część otrzymanego wykresu, znajdującą się poniżej osi OX, przekształcamy przez symetrię względem tej osi. Na rysunku poniżej wykres funkcji f jest zaznaczony kolorem niebieskim.



Przeanalizujmy wykres funkcji *f*.

1) Zbiór wartości funkcji *f* jest równy $\langle 0, +\infty)$.

2) Funkcja *f* przyjmuje wartość 0 tylko dla argumentu –2. Podobnie funkcja *f* przyjmuje wartość 3 tylko jeden raz.

3) Każdą inną wartość funkcja *f* przyjmuje dla dwóch argumentów.

Funkcja $g(x)=\frac{k}{4}$ jest funkcją stałą i przyjmuje wartość $\frac{k}{4}$ dla dowolnej liczby rzeczywistej *x*. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi *OX*. Rozpatrujemy wszystkie takie proste, bo $k \in \boldsymbol{R}$. Proste równoległe do osi *OX* mają dwa punkty wspólne z wykresem funkcji *f* tylko wtedy, gdy są położone powyżej osi *OX* i nie przechodzą przez punkt $(0, 3)$. To znaczy, że

$$\frac{k}{4} \in (0,3) \cup (3,+\infty)$$

Rozwiązujemy nierówności:

$$0 < \frac{k}{4} < 3 \quad \vee \quad \frac{k}{4} > 3$$

$$0 < k < 12 \quad \vee \quad k > 12$$

Równanie $\left|\frac{3}{x+1}+3\right| = \frac{k}{4}$ ma dwa rozwiązania, jeśli $k \in (0, 12) \cup (12, +\infty)$.

Przyjrzyjmy się tym rozwiązaniom dokładniej. Jeśli $\frac{k}{4} \in (0,3)$, to prosta $y = \frac{k}{4}$ przecina wykres w dwóch punktach, których odcięte są ujemne. Przykładem jest prosta $y = 2$. Odcięte punktów przecięcia tej prostej z wykresem funkcji *f* są liczbami ujemnymi, zaznaczonymi na osi *OX* kolorem czerwonym. Są one również rozwiązaniami równania $\left|\frac{3}{x+1}+3\right| = 2$.

Podobnie, jeśli $\frac{k}{4} > 6$, np. $\frac{k}{4} = 7$, to prosta $y = \frac{k}{4}$ przecina wykres funkcji *f* w dwóch punktach, których odcięte są ujemne.

Natomiast prosta $y = 6$ przecina wykres funkcji *f* w dwóch punktach, z których jeden ma odciętą równą 0. To znaczy, że jednym z dwóch rozwiązań równania $\left|\frac{3}{x+1}+3\right| = 6$

jest liczba 0. A jeśli $\frac{k}{4}\in(3,6)$, to równanie $\left|\frac{3}{x+1}+3\right|=\frac{k}{4}$ ma dwa rozwiązania, z których jedno jest ujemne, a drugie dodatnie.

Ostatecznie, równanie $\left|\frac{3}{x+1}+3\right|=\frac{k}{4}$ ma dwa rozwiązania ujemne, jeśli

$0<\frac{k}{4}<3$ lub $\frac{k}{4}>6$, czyli wtedy, gdy $k\in(0,12)\cup(24,+\infty)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, na podstawie definicji, że funkcja homograficzna określona wzorem:

a) $f(x)=\frac{-5}{x+1}+2$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty,-1),(-1,+\infty)$

b) $f(x)=\frac{-3x}{4-x}$ jest malejąca w przedziałach $(-\infty,4),(4,+\infty)$

c) $f(x)=\frac{4x-7}{2x-6}$ jest malejąca w przedziałach $(-\infty,3),(3,+\infty)$.

2. Funkcja homograficzna $f(x)=\frac{b-12x}{3x+d}$ jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty,1),(1,+\infty)$. Do wykresu funkcji f należy punkt $A\left(2,\ -3\frac{1}{3}\right)$.

a) Oblicz współczynniki b i d.

b) Rozwiąż nierówność $f(x)\geqslant -x-4\frac{2}{3}$.

3. Funkcję homograficzną opisuje wzór $f(x)=\frac{2+Ax}{4x+1}$, $x\in\boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{4}\right\}$. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 2.

a) Oblicz współczynnik A.

b) Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja homograficzna $g(x)=\frac{2x+1}{1+4x}$, gdzie $x\neq -\frac{1}{4}$.

4. Z danego równania wyznacz y jako funkcję zmiennej x.
Następnie wyznacz dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.

a) $\frac{2}{x}+\frac{4}{y}=2$ b) $\frac{5}{x}+\frac{1}{y-3}=1$ c) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{y+1}=1$

5. Rozwiąż dane równanie, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $(x-2)^2=\frac{2}{x-3}+2$ b) $\frac{1}{x-1}=|x|-1$ c) $\left|\frac{3}{x+2}\right|=|x|$

6. Rozwiąż daną nierówność, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji.

a) $\frac{2}{x-1}+2\geqslant x^2$ b) $\frac{6}{x}+4<|x+3|$ c) $\frac{-4}{x+2}\geqslant|x|-2$

7. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające równanie:

a) $y=\frac{-2}{x}+3$ b) $y=\frac{5}{x-1}$ c) $x+y-4=xy$.

8. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych (x, y), spełniające równanie:

a) $y+2=\frac{4}{x}$ b) $y=\frac{3}{x-5}+2$ c) $x-y-3=xy$.

D 9. Wykaż, że istnieją cztery pary (x, y) liczb naturalnych o tej własności, że ich iloczyn jest równy potrojonej sumie tych liczb.

10. Wyznacz trzy liczby pierwsze o tej własności, że ich iloczyn jest jedenaście razy większy od ich sumy.

11. Na podstawie wykresu funkcji $y=\frac{4}{|x-1|}$, gdzie $x\neq 1$, wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p\in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $\frac{4}{|x-1|}=p^2$ ma dwa rozwiązania dodatnie.

12. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2+x}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{-1, 0\}$. Następnie ustal, dla jakich wartości parametru m, $m\in \boldsymbol{R}$, równanie $|f(x)|=m^2-1$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

13. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, $k\in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja $h(x)=\frac{kx-2k-3}{x-k}$, gdzie $x\neq k$, jest funkcją homograficzną, malejącą w przedziałach $(-\infty, k)$, $(k, +\infty)$.

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a\in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja $f(x)=\frac{4x+2a^2-a-12}{x-3}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{3\}$, jest funkcją homograficzną, rosnącą w przedziałach $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$.

15. Funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{4}{x-1}+2$, gdzie $x\neq 1$. Naszkicuj wykres funkcji $h(x)=\frac{|f(x)|}{f(x)}$.

Funkcje wymierne

Definicja 1.

Funkcję $y=\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$, gdzie $W_1(x)$, $W_2(x)$ są wielomianami i $W_2(x)\neq 0$, nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem tych liczb, które są pierwiastkami wielomianu $W_2(x)$, czyli $D = \boldsymbol{R} - \{x:\ W_2(x) = 0\}$.

Oto przykłady funkcji wymiernych:

a) $y = -7x^3 + 6x - 1$, $D = \boldsymbol{R}$

b) $y=\frac{5x-3}{x+2}$, $D = \boldsymbol{R} - \{-2\}$

c) $y=\frac{x^4-4x+6}{x^2-1}$, $D = \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$

d) $y=\frac{3}{x^2+2x+5}$, $D = \boldsymbol{R}$

Zauważ, że funkcje wielomianowe oraz funkcje homograficzne są funkcjami wymiernymi. W kilku przykładach omówimy niektóre własności wybranych funkcji wymiernych.

Przykład 1.

Wyznaczymy wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których dziedziną funkcji wymiernej $f(x)=\frac{2x-3}{(m^2-1)x^2+(m+1)x-5}$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych tylko wtedy, gdy wielomian

$$W_2(x) = (m^2 - 1)x^2 + (m + 1)x - 5$$

nie przyjmuje wartości równej zero. Rozpatrzymy dwa przypadki ze względu na wartość współczynnika przy x^2.

I. $m^2 - 1 = 0$

$m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m + 1) = 0 \Leftrightarrow (m = 1 \vee m = -1)$

– Jeśli $m = 1$, to $W_2(x) = 2x - 5$. Wielomian $W_2(x)$ przyjmuje wartość równą zero dla argumentu równego 2,5. Zatem nie są spełnione warunki zadania.

– Jeśli $m = -1$, to $W_2(x) = -5$. Wielomian $W_2(x)$ jest stałą różną od zera. Zatem są spełnione warunki zadania.

II. $m^2 - 1 \neq 0$, czyli $m \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$

Wówczas wielomian $W_2(x)$ jest trójmianem kwadratowym i nie przyjmuje wartości równej zero wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik jest ujemny, czyli $\Delta < 0$.

Rozwiązujemy nierówność:

$$(m+1)^2 - 4(m^2-1)(-5) < 0$$

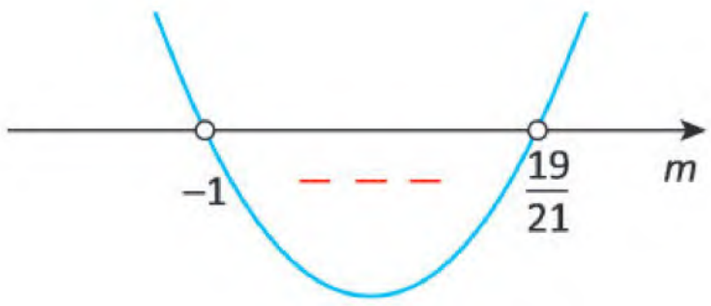
$$(m+1)^2 + 20(m-1)(m+1) < 0$$ Wyłączamy wspólny czynnik $(m+1)$ poza nawias.

$$(m+1)(m+1+20m-20) < 0$$

Otrzymujemy:

$$(m+1)(21m-19) < 0$$

$$m \in \left(-1, \frac{19}{21}\right)$$



Z przypadków **I.** i **II.** wynika, że dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{2x-3}{(m^2-1)x^2 + (m+1)x - 5}$ jest zbiór liczb rzeczywistych wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in \left\langle -1, \dfrac{19}{21}\right)$.

Ćwiczenie 1. Wykaż, że istnieje tylko jedna wartość parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla której dziedziną funkcji $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2 - (k+3)x + k^2}$ jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{1\}$.

Przykład 2.

Liczba 4 jest miejscem zerowym funkcji wymiernej $g(x) = \dfrac{x^3 - ax - 12}{(x+2)(x+3)}$. Obliczymy współczynnik a. Następnie wyznaczymy zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Dziedziną funkcji g jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{-3, -2\}$. Liczba 4 jest miejscem zerowym funkcji g, czyli $g(4) = 0$. Obliczamy:

$$g(4) = 0 \Leftrightarrow \frac{4^3 - a \cdot 4 - 12}{(4+2)(4+3)} = 0 \Leftrightarrow 64 - 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 13$$

Współczynnik a jest równy 13. Wówczas $g(x) = \dfrac{x^3 - 13x - 12}{(x+2)(x+3)}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, -2\}$.

Aby wyznaczyć argumenty, dla których funkcja g przyjmuje wartości ujemne, wystarczy rozwiązać nierówność

$$\frac{x^3-13x-12}{(x+2)(x+3)}<0, \text{ gdzie } x\in \boldsymbol{R}-\{-3,-2\}.$$

Rozkładamy wielomian $x^3 - 13x - 12$ na czynniki. Jednym z pierwiastków tego wielomianu jest liczba 4. Z twierdzenia Bézouta wynika, że omawiany wielomian jest podzielny przez dwumian $(x-4)$. Znajdujemy iloraz tego dzielenia.

$$\begin{array}{r} x^2+4x+3 \\ \hline (x^3-13x-12):(x-4) \\ \underline{-x^3+4x^2} \\ =\quad 4x^2-13x-12 \\ \quad \underline{-4x\ \ +16x} \\ \quad\ =\quad 3x-12 \\ \quad\quad \underline{-3x+12} \\ \quad\quad\ =\quad = \end{array}$$

Ilorazem z podzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-4)$ jest trójmian kwadratowy $x^2 + 4x + 3$. Znajdujemy jego postać iloczynową.

$$\Delta = 4, \quad \sqrt{\Delta} = 2$$

$$x = -3 \quad \text{lub} \quad x = -1$$

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

Otrzymujemy

$$x^3 - 13x - 12 = (x-4)(x+3)(x+1)$$

Teraz nierówność ma postać:

$$\frac{(x+1)\overset{1}{\cancel{(x+3)}}(x-4)}{(x+2)\underset{1}{\cancel{(x+3)}}}<0, \qquad x\in \boldsymbol{R}-\{-3,-2\} \qquad \text{stąd}$$

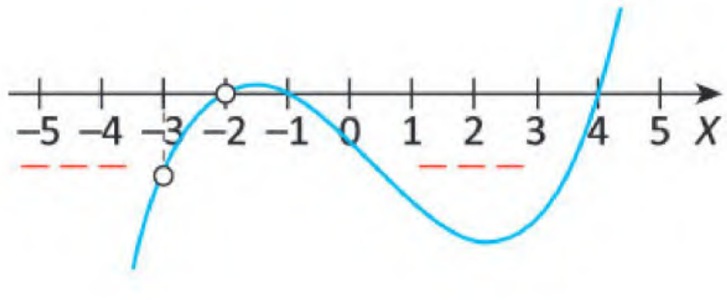
$$\frac{(x+1)(x-4)}{x+2}<0 \quad / \cdot (x+2)^2$$

Mnożymy obie strony nierówności przez kwadrat mianownika.

Mamy:

$$(x+1)(x-4)(x+2)<0$$

oraz $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, -2\}$.



Zatem

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2) \cup (-1, 4).$$

Funkcja g przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2) \cup (-1, 4)$.

Ćwiczenie 2. Wielomian $x^3 - 13x - 12$ rozłóż na czynniki, bez wykonywania dzielenia.

Przykład 3.

Pokażemy, że funkcja $f(x)=\frac{14}{2x^2+x+1}$ przyjmuje największą wartość, równą 16.

Ułamek $\frac{14}{2x^2+x+1}$ przyjmuje największą wartość wtedy, gdy trójmian kwadratowy $2x^2 + x + 1$ występujący w mianowniku tego ułamka przyjmuje najmniejszą wartość dodatnią.

Niech $g(x) = 2x^2 + x + 1$, $x \in \boldsymbol{R}$. Określamy zbiór wartości funkcji kwadratowej g.

1) Współczynnik przy x^2 jest dodatni: $a = 2$. Wyróżnik trójmianu kwadratowego jest ujemny: $\Delta = -7$. Wykres funkcji g jest położony nad osią OX. Zatem funkcja g przyjmuje tylko wartości dodatnie, a wśród tych wartości jest wartość najmniejsza.
2) Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji g:

$$x_w=\frac{-1}{4}, \qquad y_w=g\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8} \qquad \text{stąd} \qquad ZW_g=\left\langle\frac{7}{8},+\infty\right)$$

Zatem funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość dodatnią, równą $\frac{7}{8}$.

Obliczamy największą wartość ułamka $\frac{14}{2x^2+x+1}$.

$$\frac{14}{\frac{7}{8}}=14\cdot\frac{8}{7}=16$$

Pokazaliśmy, że funkcja f przyjmuje największą wartość, równą 16, co kończy dowód.

Przykład 4.

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji $h(x)=\frac{4x}{x^2+1}$.

Dziedziną funkcji wymiernej h jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$. Wyznaczymy wszystkie wartości funkcji h. To znaczy znajdziemy wszystkie liczby y, dla których istnieją takie argumenty x należące do dziedziny funkcji h, że $y = h(x)$.
Oznaczmy wartości funkcji literą y.

$y=\frac{4x}{x^2+1} \quad / \cdot (x^2+1)$ Przekształcamy wzór funkcji.

$yx^2 + y = 4x$

$yx^2 - 4x + y = 0$ Równanie z niewiadomą x i parametrem y.

Teraz ustalimy, dla jakich wartości y istnieją rozwiązania powyższego równania z niewiadomą x. Zatem y traktujemy jak parametr.

I. $y = 0$. Wówczas równanie jest liniowe: $-4x = 0$, stąd $x = 0$. To znaczy, że dla argumentu x równego 0, funkcja h przyjmuje wartość y, równą 0.

II. $y \neq 0$. Wówczas równanie jest kwadratowe. Istnieją rozwiązania tego równania tylko wtedy, gdy $\Delta \geqslant 0$, gdzie $\Delta = 16 - 4 \cdot y \cdot y$.

Rozwiązujemy nierówność:

$16 - 4y^2 \geqslant 0$, gdzie $y \neq 0$

$y^2 \leqslant 4 \quad \wedge \quad y \neq 0$

$y \in \langle -2, 2\rangle \quad \wedge \quad y \neq 0$

$y \in \langle -2, 0) \cup (0, 2\rangle$

Z rozważań przypadków **I.** i **II.** wynika, że $y = 0$ lub $y \in \langle -2, 0) \cup (0, 2\rangle$. Ostatecznie otrzymujemy

$y \in \langle -2, 2\rangle$

Zbiorem wartości funkcji wymiernej $h(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ jest przedział $\langle -2, 2\rangle$.

Ćwiczenie 3. Wykaż, że jeśli $x \in \boldsymbol{R}$, to $\left|\frac{6x}{x^2+9}\right| \leqslant 1$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dany jest wzór funkcji wymiernej. Określ dziedzinę tej funkcji.

   a) $f(x)=\frac{x^2-4}{8x^3-125}$ b) $g(x)=\frac{2x}{x^4+2x^2-15}$ c) $h(x)=\frac{3}{x^3-x^2-4}$

2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których dziedziną danej funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych.

   a) $f(x)=\frac{2x+7}{mx^2+mx-9}$

   b) $f(x)=\frac{x^2+mx}{(m+2)x^2+(m^2-4)x+m-2}$

3. Liczba -6 jest miejscem zerowym funkcji wymiernej $f(x)=\frac{x^3+ax^2-4x-24}{x+2}$.

   a) Oblicz współczynnik a.

   b) Wyznacz pozostałe miejsca zerowe funkcji f, jeśli istnieją.

   c) Podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

   d) Naszkicuj wykres funkcji f.

4. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja wymierna $f(x)=\dfrac{mx(x-m)}{x^3-4x^2-5x}$ nie ma miejsc zerowych. Dla wyznaczonych wartości m:
   a) naszkicuj wykres funkcji f;
   b) rozwiąż graficznie i algebraicznie nierówność $f(x) \geqslant 5+mx$.

5. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, $p \in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja wymierna $f(x)=\dfrac{(p-x)(x-1)}{x^3-4x^2+3x}$ ma tylko jedno miejsce zerowe.

6. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, dla których funkcja wymierna $f(x)=\dfrac{2x^2-(a+1)x+2a+2}{(x-1)(x+2)(x-2)}$ ma dwa miejsca zerowe.

7. Wyznacz największą wartość funkcji wymiernej f, jeśli istnieje. Dla jakiego argumentu ta wartość jest przyjmowana?
   a) $f(x)=\dfrac{11}{5x^2+3x+1}-13$
   b) $f(x)=\dfrac{3x^2-6x+23}{x^2-2x+6}$

8. Dany jest wzór funkcji wymiernej f. Wykaż, że funkcja f jest nieparzysta. Następnie wyznacz zbiór wartości tej funkcji.
   a) $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$
   b) $f(x)=\dfrac{-8x}{x^2+25}$

9. Dana jest funkcja wymierna $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{6+x-x^2}$.
   a) Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.
   D b) Wykaż, że funkcja f jest różnowartościowa.

D 10. Dana jest funkcja wymierna $f(x)=\dfrac{4x^2}{(x+5)(x-5)}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{-5, 5\}$. Wykaż, że:
   a) funkcja f jest parzysta;
   b) liczba 4 nie należy do zbioru wartości funkcji f.

D 11. Wykaż na podstawie definicji, że:
   a) w przedziale $(-1, 1)$ funkcja wymierna $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$ jest rosnąca,
   b) w przedziale $\langle 0, +\infty)$ funkcja wymierna $g(x)=\dfrac{-4}{x^2+3}$ jest malejąca.

D 12. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x:
   a) $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{5x}{x^2+25} \leqslant \dfrac{1}{2}$
   b) $3 \leqslant \dfrac{4x^2+2x+4}{x^2+1} \leqslant 5$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1.

Test

1. Dziedziną ułamka algebraicznego $\frac{x+2}{x^2-3x}$ jest zbiór:

A. $\boldsymbol{R}-\{-2\}$ B. $\boldsymbol{R}-\{3\}$ C. $\boldsymbol{R}-\{-2, 0\}$ D. $\boldsymbol{R}-\{0, 3\}$

2. Jeśli $x=2-\sqrt{2}$, to ułamek $\frac{x+1}{3-x}$ jest równy:

A. $\frac{3-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ B. $4\sqrt{2}-5$ C. $5-4\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}-1$

3. Po skróceniu ułamka $\frac{2x^2-5x+3}{1-x^2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$, otrzymamy:

A. $\frac{3-2x}{x+1}$ B. $\frac{2x-3}{x-1}$ C. $\frac{2x-3}{x+1}$ D. $\frac{2x+3}{x-1}$

4. Po rozszerzeniu ułamka $\frac{1}{x-2}$, gdzie $x \neq 2$, otrzymano ułamek o mianowniku x^3-2x^2+3x-6. Zatem licznik otrzymanego ułamka jest równy:

A. $3x^2-6x$ B. $3x-6$ C. x^2+3 D. x^2-3

5. Suma rozwiązań równania $\frac{(3x-1)(3x+4)(x+2)}{x^2-4}=0$ jest równa:

A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

6. Równanie $\frac{x-2}{x+1}=\frac{x-1}{x-2}$:

A. ma tylko jedno rozwiązanie
B. ma dwa rozwiązania
C. jest sprzeczne
D. jest tożsamościowe

7. Wykres funkcji $y=\frac{3}{x}$ przesunięto równolegle o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX i otrzymano wykres funkcji g. Zatem:

A. $g(x)=\frac{3}{x}+2$ B. $g(x)=\frac{3}{x-2}$ C. $g(x)=\frac{3}{x}-2$ D. $g(x)=\frac{3}{x+2}$

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

Zadania otwarte

8. Wykonaj działania. Podaj konieczne założenia.

a) $4+\left(x-\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\frac{6}{x-2}+\frac{x}{2-x}\right)+x$ b) $1-\frac{8}{x^2-9}\cdot\left(1-\frac{x^2+9}{6x}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)$

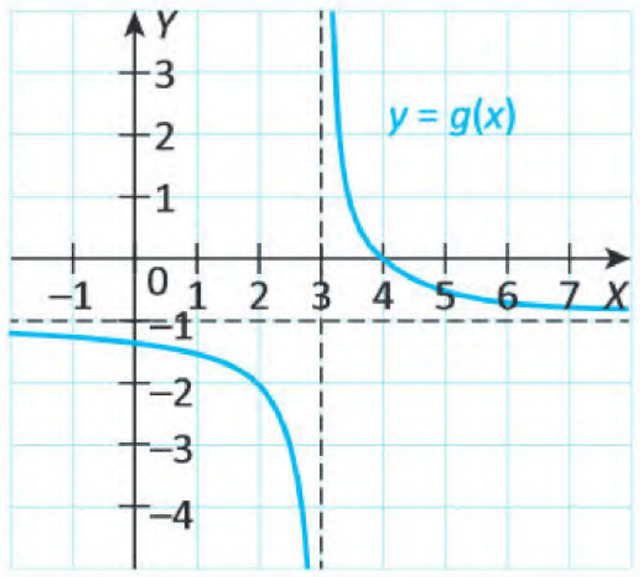
9. Rozwiąż równanie pamiętając o koniecznych założeniach:

a) $\frac{\left(x^2+1\right)(2x-5)(x+2)}{x^3+2x^2+x+2}=0$ b) $\frac{1}{2-x}=\frac{x^2+2x+4}{7}$

c) $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{2x+1}=\frac{2x-1}{2}$

10. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji homograficznej

$g(x)=\frac{a}{x+b}+c$, gdzie $a\neq 0$ i $x\neq -b$.



Wykres ten przecina oś OY w punkcie $\left(0,-1\frac{1}{3}\right)$.

Podaj:

a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji g

b) współczynniki a, b, c

c) przedziały monotoniczności tej funkcji

d) miejsce zerowe funkcji g oraz zbiór argumentów, dla których ta funkcja przyjmuje wartości ujemne.

11. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykres funkcji homograficznej $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{-1\}$ oraz wykres funkcji kwadratowej $g(x)=\frac{1}{2}x^2-1$.

Następnie oblicz współrzędne punktów wspólnych obu wykresów.

12. Wyznacz wszystkie liczby całkowite ujemne, dla których funkcja homograficzna $f(x)=\frac{6}{x+5}+1$, gdzie $x\neq -5$, przyjmuje wartości, będące liczbami naturalnymi.

D 13. Wykaż, że jeśli $x\in \boldsymbol{R}-\{0\}$, $y\in \boldsymbol{R}-\{0\}$, $y\neq -3x$ oraz $\frac{x-2y}{3x+y}=\frac{1}{4}$, to $\frac{x+6y}{x+y}=\frac{3}{2}$.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

14. Jan i Piotr podjęli się wykonania pewnego zlecenia. Po trzech godzinach wspólnej pracy Piotr wrócił do domu. Dokończenie zlecenia zajęło Janowi jeszcze 1 godzinę i 12 minut. Oblicz, ile godzin potrzebowałby Jan, a ile Piotr na samodzielne wykonanie tej pracy, jeśli wiadomo, że Piotr pracowałby samodzielnie o 4 godziny dłużej niż Jan.

D 15. Wykaż, że funkcja $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 2)$.

D 16. Wykaż, że funkcja $f(x)=\frac{x^2+5x}{x-7}$ nie jest różnowartościowa.

17. Zbadaj parzystość funkcji $f(x)=\frac{(3-x)(3+x)}{x^3+x}$.

18. Rozwiąż równanie:

a) $\frac{x^2+x-3}{2}-1=\frac{3}{2x^2+2x-6}$ b) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2-x+5}=1$

19. Rozwiąż nierówność:

a) $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\leqslant\frac{1-2x}{x^3+1}$ b) $\left|\frac{x+4}{3x-5}\right|>1$

D 20. Wykaż, że funkcja $f(x)=\frac{5}{0,5x^2-x+8}$ przyjmuje największą wartość równą $\frac{2}{3}$.
Dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje tę wartość?

21. Wyznacz zbiór wartości funkcji wymiernej $f(x)=\frac{3x^2-4x+12}{x^2+4}$.

D 22. Wykaż, że jeśli liczby x i y są dodatnie oraz $x^3+y^2+8y=27$, to $xy\leqslant 4\frac{1}{2}$.

D 23. Wykaż, że jeśli liczby dodatnie x, y, z spełniają nierówność $x+y+z\geqslant 1$, to $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$.

D 24. Wykaż, że jeśli $x\in \boldsymbol{R}-\{0\}$, to:

a) $\frac{3}{x^2}+1>\frac{2}{x}$ b) $x^2+\frac{3}{x^2}+4\geqslant 2x+\frac{6}{x}$

25. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{3|x|-9}{|x|-2}$. Następnie zbadaj liczbę rozwiązań równania $\frac{3|x|-9}{|x|-2}=1-m$ w zależności od wartości parametru m, $m\in \boldsymbol{R}$.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

2. Ciągi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów

Rozpatrzmy dwa numery telefonów komórkowych dwóch różnych abonentów:

I. 934 202 117 oraz **II.** 943 220 711

Obydwa numery składają się z takich samych dziewięciu cyfr, tylko niektóre są zamienione miejscami. Jednak mamy pewność, że wybierając jeden z tych numerów, połączymy się telefonicznie z innym abonentem, niż gdybyśmy wybrali drugi. Możemy stwierdzić, że kolejność cyfr w numerze telefonu jest istotna.

Zauważ, że każdy numer telefonu przedstawia pewną funkcję, która liczbom naturalnym od 1 do 9 – oznaczającym kolejność cyfr w danym numerze – przyporządkowuje daną cyfrę. Jednocześnie zapisany jest dużo prościej, niż wymagałby tego od nas zapis funkcyjny:

I.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	9	3	4	2	0	2	1	1	7

II.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	9	4	3	2	2	0	7	1	1

Jeśli dziedziną funkcji jest zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, to tę funkcję nazwiemy ciągiem skończonym. Jeśli dziedziną funkcji jest zbiór $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, to powiemy, że ta funkcja jest ciągiem nieskończonym.

Definicja 1.

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest skończony podzbiór kolejnych, początkowych liczb naturalnych dodatnich.

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.

Wartości zdefiniowanych powyżej funkcji nazywamy **wyrazami ciągu**.

Ciąg liczbowy to ciąg, którego wyrazy są liczbami rzeczywistymi.

Numery telefonów komórkowych są ciągami liczbowymi dziewięciowyrazowymi. Kolejność wyrazów danego ciągu podkreślamy poprzez wypisanie kolejno tych wyrazów w nawiasach okrągłych:

(9, 3, 4, 2, 0, 2, 1, 1, 7) oraz (9, 4, 3, 2, 2, 0, 7, 1, 1)

Zwróć uwagę na to, że zapis ciągu różni się od zapisu zbioru. Elementy zbioru wypisujemy w dowolnej kolejności, używając nawiasów klamrowych:

{9, 3, 4, 2, 0, 1, 7}.

Przykładem skończonego ciągu nie będącego ciągiem liczbowym jest kompletna lista nazwisk uczniów danej klasy w dzienniku lekcyjnym. Kolejnym liczbom naturalnym przyporządkowane są nazwiska uczniów tej klasy.

Ciągiem nieskończonym jest na przykład ciąg kolejnych liczb pierwszych:

(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...)

Z powyższego zapisu wynika na przykład, że dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy 29.

Ćwiczenie 1. Podaj szesnasty wyraz ciągu kolejnych liczb pierwszych.

Jeśli ciąg ma wiele wyrazów, to powyższy zapis ciągu jest niewystarczający. Na przykład wtedy, gdy interesuje nas setny wyraz ciągu, a nie wszystkie wyrazy stojące przed nim, czyli mające miejsce od 1 do 99. Częściej ciągi oznaczamy następująco: (a_n), (b_n), (c_n) itd. Wówczas zapis a_1 oznacza pierwszy wyraz ciągu (a_n), zapis a_9 oznacza dziewiąty wyraz tego ciągu, a zapis a_{100} – setny wyraz ciągu (a_n).

Ćwiczenie 2. Zapisz swój numer telefonu w zeszycie. Oznacz ten ciąg (a_n), gdzie $n \in \{1, 2, 3, ..., 9\}$. Wypisz wyrazy $a_1, a_2, a_3, ..., a_9$ tego ciągu.

Przykład 1.

Rozważmy funkcję f, która każdej liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowuje liczbę dwa razy większą. Wówczas zapisywaliśmy:

$f(\mathbf{1}) = 2$ $f(\mathbf{2}) = 4$ $f(\mathbf{3}) = 6$ ... $f(\mathbf{n}) = 2n$.

Ta funkcja jest ciągiem, który możemy oznaczyć (a_n). Wówczas:

$a_{\mathbf{1}} = 2$ $a_{\mathbf{2}} = 4$ $a_{\mathbf{3}} = 6$ ... $a_{\mathbf{n}} = 2n$.

Wyraz a_n, określający wzór ciągu (a_n), nazywamy **wyrazem ogólnym** tego ciągu. Pełni on taką rolę, jak wzór funkcji i umożliwia wyznaczenie dowolnego wyrazu ciągu.

Przykład 2.

Dany jest wyraz ogólny ciągu (a_n): $a_n = \frac{n^2}{n+6}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Obliczymy wyrazy: a_1, a_2, a_{n+1} oraz a_{2k}, jeśli $k \in \mathbf{N}_+$.

Wyraz a_1 to wartość wyrażenia $\frac{n^2}{n+6}$ dla n równego 1. Obliczamy:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+6} = \frac{1}{7}$$

Podobnie:

$$a_2 = \frac{2^2}{2+6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)+6} = \frac{(n+1)^2}{n+7} = \frac{n^2+2n+1}{n+7}$$

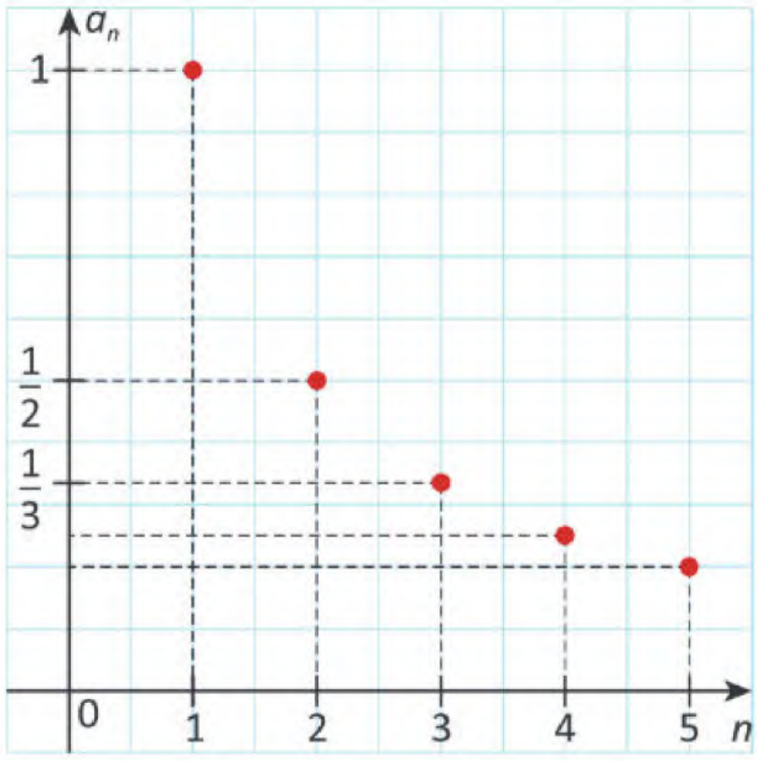
$$a_{2k} = \frac{(2k)^2}{2k+6} = \frac{4k^2}{2(k+3)} = \frac{2k^2}{k+3}$$

Ćwiczenie 3. Dany jest nieskończony ciąg (b_n), w którym $b_n = \frac{n-1}{2n+8}$.
Oblicz b_5, b_{n+1}, b_{3n}.

Przykład 3.

Przedstawimy w układzie współrzędnych wykres ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{1}{n}$ i $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ciąg (a_n) ma pięć wyrazów: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$.



Wykres ciągu (a_n) składa się z pięciu punktów:

$$(1,1)\ \left(2,\frac{1}{2}\right)\ \left(3,\frac{1}{3}\right)\ \left(4,\frac{1}{4}\right)\ \left(5,\frac{1}{5}\right)$$

Ćwiczenie 4. Przedstaw w dwóch różnych układach współrzędnych wykresy dwóch ośmiowyrazowych ciągów, w których występuje taka sama liczba dwójek i jedynek: (2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1) oraz (2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2). Czy wykresy tych ciągów są jednakowe?

Przykład 4.

Dany jest ciąg (a_n), w którym $a_n = \frac{4n^2+3n-8}{n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wyznaczymy wszystkie wyrazy tego ciągu, które są liczbami naturalnymi.

Ciąg (a_n) jest nieskończony. Wyrażenie $\frac{4n^2+3n-8}{n}$ zapisujemy w postaci:

$4n+3-\frac{8}{n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Zauważ, że liczba $4n+3-\frac{8}{n}$ jest naturalna tylko wtedy, gdy $\frac{8}{n}$ jest liczbą naturalną i $4n+3-\frac{8}{n} \geqslant 0$. Wyrażenie $\frac{8}{n}$ jest liczbą naturalną, jeśli $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Sprawdzamy, czy wyrazy a_1, a_2, a_4, a_8 są liczbami nieujemnymi:

$a_1 = 4 + 3 - 8 = -1$ $a_2 = 4 \cdot 2 + 3 - 4 = 7$ $a_4 = 17$ $a_8 = 34$.

Ciąg (a_n) ma trzy wyrazy naturalne: $a_2 = 7$, $a_4 = 17$, $a_8 = 34$.

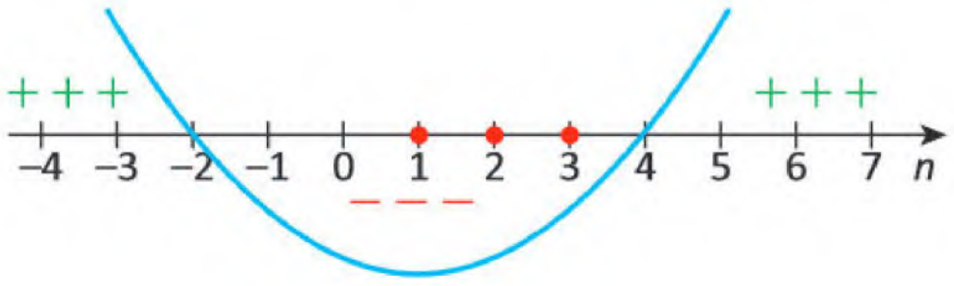
Przykład 5.

Wyznaczymy wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = n^2 - 2n - 8$, które są liczbami ujemnymi.

Szukamy wyrazów ciągu (b_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, które spełniają warunek: $b_n < 0$.

$n^2 - 2n - 8 < 0$

$(n - 4)(n + 2) < 0$



Rozwiązujemy nierówność kwadratową.

$n \in (-2, 4) \cap \boldsymbol{N}_+$

$n \in \{1, 2, 3\}$

Tylko wyrazy b_1, b_2 i b_3 są ujemne. Obliczamy ich wartość: $b_1 = -9$, $b_2 = -8$, $b_3 = -5$.

Ciągi można również opisać za pomocą **wzoru rekurencyjnego**. Wówczas podany jest pierwszy wyraz ciągu lub kilka początkowych wyrazów tego ciągu, a wzór na kolejny dowolny wyraz ciągu jest wyrażony poprzez wyrazy poprzednie.

Oto przykłady tak zdefiniowanych ciągów:

1) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1}, \text{ jeśli } n > 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 3 \\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

Poniższy przykład pokazuje, w jaki sposób obliczać kolejne wyrazy ciągu zdefiniowanego wzorem rekurencyjnym.

Przykład 6.

Obliczymy czwarty wyraz ciągu (c_n) określonego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n + 8n, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Znamy pierwszy wyraz ciągu: $c_1 = 1$.

Aby wyznaczyć wyraz c_4, musimy obliczyć kolejno wyrazy c_2 i c_3.

- Jeśli do wzoru $c_{n+1} = c_n + 8n$ wstawimy w miejsce ***n*** liczbę **1**, to otrzymamy: $c_{1+1} = c_1 + 8 \cdot 1$, stąd $c_2 = 1 + 8 = 9$
- Jeśli $n = 2$, to $c_3 = c_2 + 8 \cdot 2$ $\quad c_3 = 9 + 16 = 25$
- jeśli $n = 3$, to $c_4 = c_3 + 8 \cdot 3$ $\quad c_4 = 25 + 24 = 49$

Czwarty wyraz ciągu (c_n) jest równy 49.

Ćwiczenie 5. Oblicz czwarte wyrazy ciągów (a_n) i (b_n), których wzory rekurencyjne są podane powyżej przykładu 6.

Zauważ, że kolejne wyrazy ciągu (c_n) określonego w przykładzie 6. wzorem rekurencyjnym są kwadratami kolejnych liczb naturalnych nieparzystych:

$c_1 = 1^2$ $\quad c_2 = 3^2$ $\quad c_3 = 5^2$ $\quad c_4 = 7^2$

Można udowodnić, że wyraz ogólny ciągu (c_n) ma postać:

$c_n = (2n - 1)^2$, jeśli $n \geqslant 1$

UWAGA: Ustalenie wyrazu ogólnego ciągu na podstawie jego wzoru rekurencyjnego jest często bardzo trudne. Najpierw na podstawie kilku początkowych wyrazów ciągu należy ustalić pewną regułę, według której powstają kolejne jego wyrazy, a następnie podać ogólny wyraz ciągu. Oczywiście konieczne jest uzasadnienie, że oba wzory opisują ten sam ciąg. Z metodami dowodzenia równoważności wzoru rekurencyjnego i wzoru ogólnego danego ciągu możesz zapoznać się na studiach.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Nieskończony ciąg (a_n) jest określony za pomocą wyrazu ogólnego. Podaj pięć początkowych wyrazów tego ciągu.

   a) $a_n = -n^2 + 3n$ b) $a_n = \frac{n+2}{6n-1}$ c) $a_n = (-1)^n \cdot n + 2$.

2. Naszkicuj wykres ciągu (c_n), jeśli:

   a) $c_n = (-1)^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   b) $c_n = \frac{1}{2}(n-2)(n-5)$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

3. Nieskończony ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = (n^2 + 1)(n^2 - 3)(n^2 - 5)$. Sprawdź, czy ten ciąg ma wyrazy równe zero.

4. Wyznacz wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu określonego wzorem:

   a) $a_n = (n + 1)^2$, których wartość jest równa 64

   b) $b_n = n^4 - 13n^2$, których wartość jest równa –36

   c) $c_n = n^3 - 12n^2 + 39n$, których wartość jest równa 28.

5. Dany jest wyraz ogólny ciągu (a_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Które wyrazy tego ciągu są liczbami ujemnymi?

   a) $a_n = \frac{5-2n}{2n+3}$ b) $a_n = |n-5| - 1$ c) $a_n = n^2 - 4n - 45$.

6. Ciąg (c_n) określony jest wzorem $c_n = \frac{3n}{16} - 9$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

   a) Czy wśród wyrazów tego ciągu znajduje się liczba 9?

   b) Ile wyrazów ciągu (c_n) należy do przedziału $\left\langle -\frac{1}{4}, 1 \right\rangle$?

D 7. Dany jest nieskończony ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{6n^2 + n - 2}{3n + 2}$. Wykaż, że dziewięć wyrazów tego ciągu należy do przedziału $(4, 21\rangle$.

8. Wyznacz wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), będące liczbami naturalnymi, jeśli:

a) $a_n = \frac{5n-6}{n}$ b) $a_n = \frac{7n^2-25n+10}{n}$

9. Wyznacz wszystkie całkowite wyrazy nieskończonego ciągu (c_n), jeśli $c_n = \frac{n-5}{n+1}$.

D 10. Dany jest ciąg (b_n), gdzie $b_n = \frac{20n^2+11n-3}{4n+3}$ i $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są liczbami naturalnymi.

11. Dany jest wyraz ogólny ciągu (b_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Oblicz wyrazy: b_{n+1}, b_{n+3} oraz b_{4k} i b_{2k-1}, jeśli $k \in \boldsymbol{N}_+$.

a) $b_n = \frac{3n-5}{2}$ b) $b_n = 2^{2n+1}$ c) $b_n = \frac{1-2n}{n+3}$.

12. Ciąg (b_n) jest określony za pomocą wzoru rekurencyjnego. Wyznacz b_5.

a) $\begin{cases} b_1 = -32 \\ b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = 3b_n - 8, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} b_1 = -1 \\ b_n = b_{n-1}^2 + 2n, \text{ jeśli } n \geqslant 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_2 = -1 \\ b_{n+2} = n \cdot b_n - 3b_{n+1}, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$

13. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wyrazy tego ciągu powstały według pewnej reguły. Wyznacz wyraz ogólny tego ciągu.

a) $(6,\ 5+2^1,\ 5+2^2,\ 5+2^3, \ldots)$ b) $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$

c) $\left(1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \ldots\right)$ d) $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{5}, \ldots\right)$

14. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Podaj wyraz ogólny tego ciągu. Następnie zapisz wzór rekurencyjny ciągu (a_n).

a) $(5, -5, 5, -5, 5, \ldots)$ b) $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$

c) $(2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ d) $(-7, -5, -3, -1, \ldots)$

15. Zapisz wzór rekurencyjny d*an*ego ciągu. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

a) $(2, 4, 16, 256, \ldots)$ b) $(2, -3, -6, 18, \ldots)$

Monotoniczność ciągów

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie definicję funkcji rosnącej, funkcji malejącej, funkcji stałej.

Mówimy potocznie, że funkcja jest rosnąca, gdy wraz ze wzrostem argumentów rosną też wartości funkcji. Ciąg jest funkcją, której argumentami są kolejne liczby naturalne dodatnie. Zatem ciąg liczbowy jest rosnący, jeśli każdy kolejny wyraz tego ciągu jest większy od wyrazu go poprzedzającego.

Definicja 1.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem rosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

*An*alogicznie definiujemy ciąg malejący i stały.

Definicja 2.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem malejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Definicja 3.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem stałym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n$.

Przykład 1.

a) Ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 1, n \geqslant 1 \end{cases}$ jest rosnący – bowiem każdy kolejny wyraz tego ciągu jest o 1 większy od wyrazu go poprzedzającego.

b) Ciąg (b_n) określony wzorem ogólnym: $b_n = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, jest malejący – bowiem im większy jest mianownik ułamka przy stałym liczniku równym 1, tym ułamek jest mniejszy.

c) Ciąg (c_n), dany wzorem ogólnym $c_n = \sqrt{2}$ jest stały, bowiem wszystkie jego wyrazy są równe.

d) Ciąg (d_n), gdzie $d_n = (-1)^n$, nie jest monotoniczny. Można go przedstawić w postaci: (–1, 1, –1, 1, –1, 1, ...).

Przykład 2.

Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n), $a_n = \frac{n+5}{2n-1}$. Pokażemy na podstawie definicji 2., że ciąg (a_n) jest malejący.

Zbadamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ dla dowolnej liczby naturalnej n, $n \geqslant 1$. Mamy:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+5}{2(n+1)-1} - \frac{n+5}{2n-1} = \frac{n+6}{2n+1} - \frac{n+5}{2n-1} =$$

$$= \frac{(n+6)(2n-1)-(n+5)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{2n^2+11n-6-\left(2n^2+11n+5\right)}{(2n+1)(2n-1)} =$$

$$= \frac{-11}{(2n+1)(2n-1)}$$

Ponieważ $n \in \boldsymbol{N}_+$, więc $2n + 1 > 0$ oraz $2n - 1 > 0$, stąd $(2n + 1)(2n - 1) > 0$. Licznik jest ujemny, więc $\frac{-11}{(2n+1)(2n-1)} < 0$.

Pokazaliśmy, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} - a_n < 0$, czyli $a_{n+1} < a_n$. Zatem ciąg (a_n) jest malejący.

Ćwiczenie 2. Wykaż, że nieskończony ciąg (b_n), określony wzorem $b_n = 1 - \frac{3}{2n}$ jest rosnący.

Przykład 3.

Zbadamy monotoniczność ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 9n$, $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Badamy znak różnicy:

$a_{n+1} - a_n = [(n + 1)^2 - 9(n + 1)] - (n^2 - 9n) = n^2 + 2n + 1 - 9n - 9 - n^2 + 9n = 2n - 8$

Okazuje się, że jeśli $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, to $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$, natomiast jeśli $n \in \{5, 6, 7, ...\}$, to $a_{n+1} - a_n > 0$. Tak więc ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.

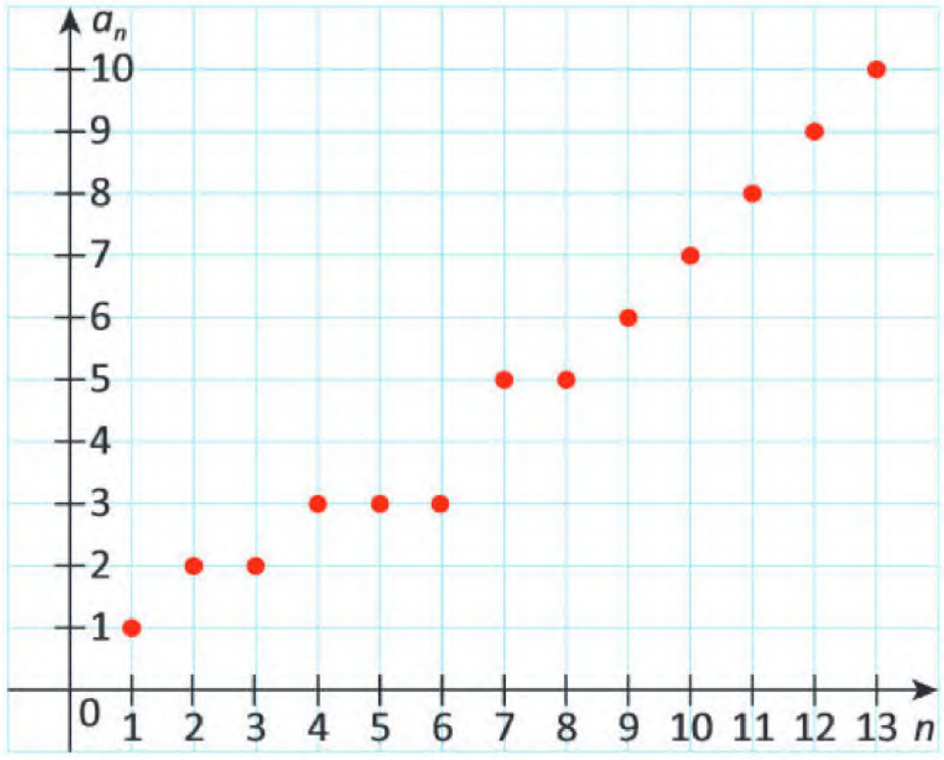
Ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

Definicja 4.

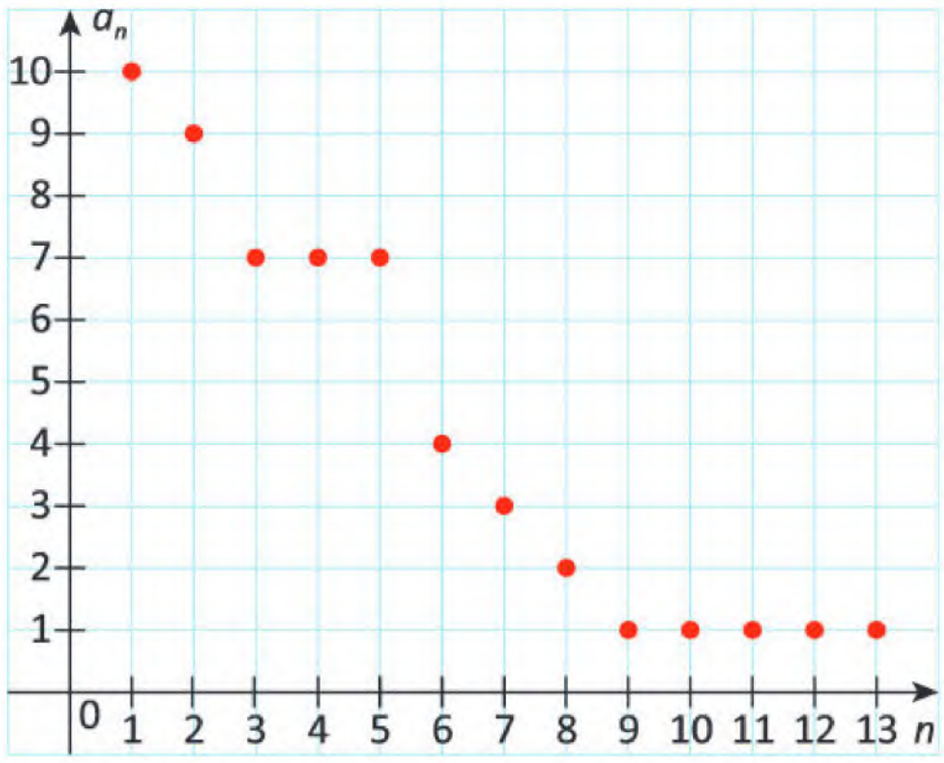
1) Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem niemalejącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \geqslant a_n$.
2) Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem nierosnącym** wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} \leqslant a_n$.

Oczywiście, każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym i każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym. Poniżej pokazujemy przykład ciągu niemalejącego, który nie jest rosnący i przykład ciągu nierosnącego, który nie jest malejący.

Ciągiem niemalejącym jest na przykład ciąg:
(1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 7, 8, ...).
Jego wykres przedstawia rysunek poniżej.



Ciągiem nierosnącym jest na przykład ciąg:
(10, 9, 7, 7, 7, 4, 3, 2, 1, 1, 1, ...).
Jego wykres przedstawia rysunek poniżej.



Ciągi niemalejące i nierosnące nazywamy **ciągami monotonicznymi**.

Ćwiczenie 3. Sprawdź, czy ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{n^4}{10} - \frac{9n^3}{10} + \frac{13n^2}{5} - \frac{12n}{5} + 3$ i $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jest nierosnący, niemalejący czy niemonotoniczny. W tym celu wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu.

Podczas badania monotoniczności ciągu o wyrazach dodatnich możemy również korzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Niech wszystkie wyrazy ciągu (a_n) będą dodatnie. Jeśli dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} mamy:

1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący;

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to ciąg (a_n) jest malejący;

3) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to ciąg (a_n) jest stały.

Przykład 4.

Zbadamy monotoniczność ciągu (a_n), określonego wzorem $a_n = \frac{2^n}{n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie. Znajdujemy wyraz a_{n+1},

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

Przekształcamy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} : \frac{2^n}{n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} = \frac{(n+1)+(n-1)}{n+1} = 1 + \frac{n-1}{n+1}$$

Jeśli $n \geqslant 2$, to $\frac{n-1}{n+1} > 0$. Wówczas $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Jeśli $n = 1$, to $\frac{n-1}{n+1} = 0$ oraz $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

To znaczy, że wyrazy a_1 i a_2 mają jednakową wartość. Natomiast kolejne wyrazy, zaczynając od wyrazu trzeciego, są większe od wyrazów bezpośrednio je poprzedzających. Ciąg (a_n) jest niemalejący.

Ćwiczenie 4. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{1+n}{n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wykaż, korzystając z twierdzenia 1., że ciąg (a_n) jest malejący.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (b_n). Wykaż na podstawie definicji, że ten ciąg jest rosnący.

a) $b_n = n^2$ b) $b_n = 4n - 5$ c) $b_n = \frac{-3}{n}$ d) $b_n = \frac{3n+4}{n+2}$

D 2. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (c_n). Wykaż na podstawie definicji, że ten ciąg jest malejący.

a) $c_n = 5 - n$ b) $c_n = -8n - n^2$ c) $c_n = \frac{2}{n+1}$ d) $c_n = -n^3$

3. Zbadaj monotoniczność nieskończonego ciągu (a_n), jeśli:

a) $a_n = n^2 - 3n + 2$ b) $a_n = \frac{4-n}{n+3}$ c) $a_n = \frac{n}{3+2n}$ d) $a_n = n^3 - 3n$.

4. Podaj przykład:

a) rosnącego ciągu o wyrazach większych od –2,

b) malejącego ciągu o wyrazach większych od 1,

c) niemalejącego ciągu o wyrazach ujemnych,

d) nierosnącego ciągu o wyrazach nie mniejszych od 3.

5. Dany jest wyraz ogólny ciągu (a_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Sprawdź, czy ten ciąg jest monotoniczny.

a) $a_n = (-1)^{2n+1}$ b) $a_n = (n+1)^2$ c) $a_n = n^{-2}$ d) $a_n = (-2)^n$

6. Zbadaj monotoniczność nieskończonego ciągu (b_n), jeśli:

a) $\begin{cases} b_1 = -3 \\ b_{n+1} = 5b_n, n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = -\frac{b_n}{2}, n \geqslant 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_{n+1} = -2n + b_n, n \geqslant 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} b_1 = \sqrt{3} \\ b_{n+1} = \left(2 + n^2\right) b_n, n \geqslant 1 \end{cases}$

7. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n), gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, jeśli:

a) $a_n = 2^{0,5n}$ b) $a_n = 4^{1-n}$ c) $a_n = n^{-1} \cdot 3^n$ d) $a_n = n \cdot 2^{-n}$.

Ciąg arytmetyczny

Ćwiczenie 1. Sprawdź, czy różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami danego ciągu skończonego jest stała.

a) (–7, –3, 1, 5, 9) b) (–1, –2, –4, –7, –11, –16) c) (–5, –5, –5, –5)

d) (3, –3, 3, –3) e) $\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)$ f) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right)$

Ćwiczenie 2. Podaj wzór rekurencyjny ciągu:

a) (3, 5, 7, 9, 11, 13, ...) b) (6, 2, –2, –6, –10, –14, ...)

Określenie ciągu arytmetycznego i monotoniczność tego ciągu

Definicja 1.

Niech (a_n) będzie ciągiem, który ma co najmniej trzy wyrazy.

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg (a_n), w którym każdy wyraz, oprócz pierwszego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego tej samej liczby. Liczbę tę oznaczamy literą ***r*** i nazywamy **różnicą ciągu arytmetycznego**.

Definicję 1. możemy zapisać krócej za pomocą wzoru rekurencyjnego.

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a i różnicy r wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$.

Przykład 1.

Dany jest wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego (a_n):

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = a_n + 8, \text{ jeśli } n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Podamy drugi, trzeci i czwarty wyraz tego ciągu.

b) Pokażemy, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Ad a) Obliczamy:

$a_2 = -5 + 8 = 3$ $a_3 = 3 + 8 = 11$ $a_4 = 11 + 8 = 19$

Szukane wyrazy to: $a_2 = 3$, $a_3 = 11$, $a_4 = 19$.

Ad b) Ze wzoru rekurencyjnego mamy:

$a_{n+1} = a_n + 8$, czyli

$a_{n+1} - a_n = 8$

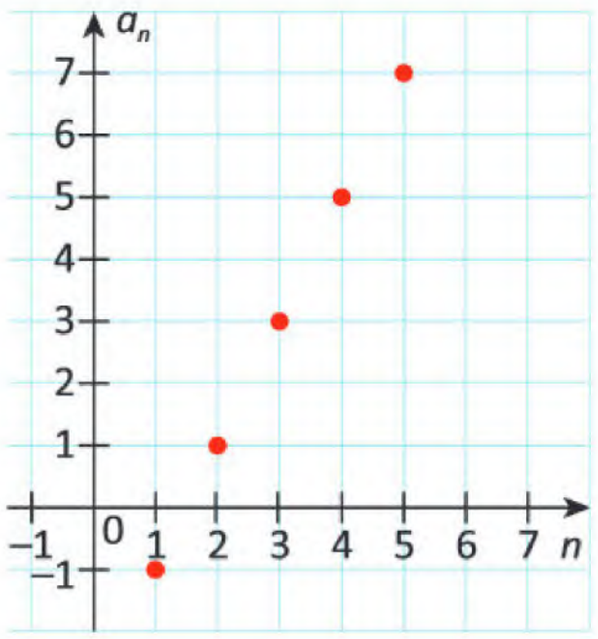
$a_{n+1} - a_n > 0$ dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

To znaczy, że ciąg (a_n) jest rosnący.

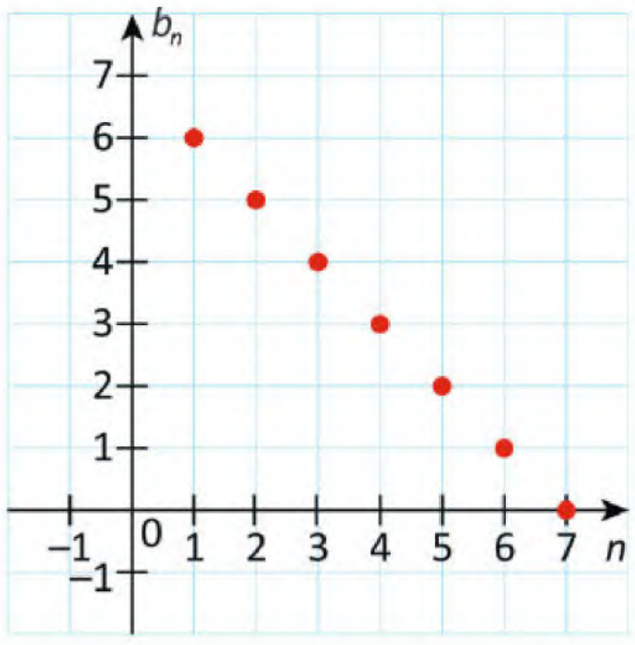
1) Ciąg co najmniej trzywyrazowy (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} - a_n = r$ dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.
2) Ciąg arytmetyczny (a_n) jest ciągiem monotonicznym, przy czym:
   a) jeśli $r > 0$, to ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym,
   b) jeśli $r < 0$, to ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym,
   c) jeśli $r = 0$, to ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.

Ćwiczenie 3. Na rysunkach poniżej przedstawione są fragmenty wykresów trzech ciągów arytmetycznych: (a_n), (b_n) i (c_n). Podaj pierwszy wyraz i różnicę każdego z tych ciągów. Określ monotoniczność tego ciągu.

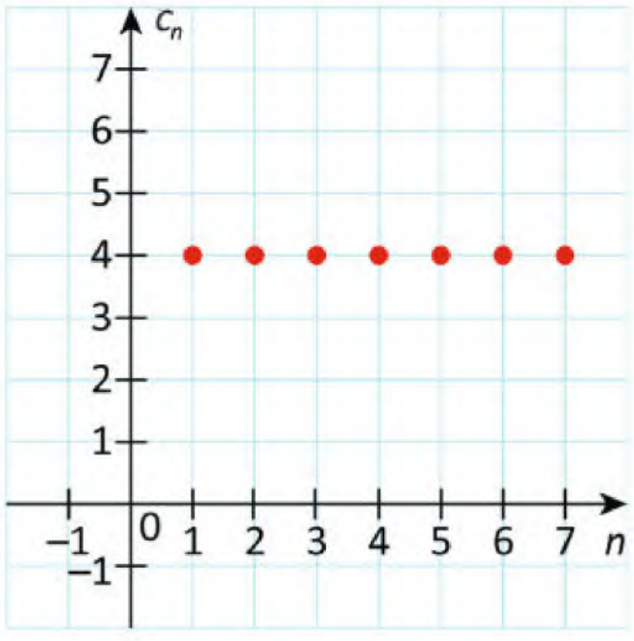
a)



b)



c)



Zauważ, że wykres ciągu arytmetycznego składa się z co najmniej trzech punktów, położonych na jednej prostej w jednakowych odległościach od siebie.

Przykład 2.

Dany jest wyraz ogólny ciągu (a_n), $a_n = -3n + 2$ oraz wyraz ogólny ciągu (b_n), $b_n = n^2$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Pokażemy, że:

a) ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym,

b) ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

Ad a)

Wystarczy pokazać, że różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n, czyli że jest liczbą, która nie zależy od n. Obliczamy wyraz a_{n+1}:

$$a_{n+1} = -3(n + 1) + 2 = -3n - 3 + 2 = -3n - 1$$

Teraz wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = -3n - 1 - (-3n + 2) = -3n - 1 + 3n - 2 = -3$$

Otrzymaliśmy, że różnica między dwoma kolejnymi sąsiednimi wyrazami ciągu jest zawsze równa –3. Zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

Ad b)

Wystarczy pokazać, że różnice pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu są różne.

I sposób: Badamy różnicę $b_{n+1} - b_n$.

$$b_{n+1} - b_n = (n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Otrzymana różnica zależy od n. To znaczy, że dla różnych wyrazów ciągu (b_n) ta różnica ma inną wartość. Zatem ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

II sposób: Obliczamy kolejne wyrazy ciągu.

$$b_1 = 1^2 = 1, \qquad b_2 = 4 \qquad b_3 = 9$$

Wyznaczamy różnice:

$$b_2 - b_1 = 3 \qquad \text{oraz} \qquad b_3 - b_2 = 5$$

Ponieważ $b_2 - b_1 \neq b_3 - b_2$, więc ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.

Ćwiczenie 4. Dany jest ogólny wyraz nieskończonego ciągu (a_n), $a_n = 4n - 11$.

Zbadaj różnicę $a_{n+1} - a_n$. Następnie rozstrzygnij, czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Czy ten ciąg jest rosnący, malejący, czy stały?

Ogólny wyraz ciągu arytmetycznego

Ćwiczenie 5. W siedmiowyrazowym ciągu arytmetycznym dane są: $a_1 = -9$, $r = 5$. Wyznacz pozostałe wyrazy tego ciągu. Zapisz ten ciąg. O ile różnią się kolejne wyrazy tego ciągu od wyrazu a_1?

Zauważ, że z definicji ciągu arytmetycznego mamy:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$$
$$a_5 = a_4 + r = (a_1 + 3r) + r = a_1 + 4r$$
$$\ldots\ldots\ldots

Twierdzenie 1.

Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r, to

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

Przykład 3.

Jeśli pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 7, a różnica tego ciągu wynosi 5, to ogólny wyraz tego ciągu jest następujący:

$$a_n = 7 + (n-1) \cdot 5, \qquad \text{czyli} \qquad a_n = 5n + 2.$$

Ćwiczenie 6. Wyznacz ogólny wyraz ciągu arytmetycznego, opisanego wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = a_n - 2, \ n \geqslant 1 \end{cases}$

Aby znaleźć ogólny wyraz nieskończonego ciągu arytmetycznego, wystarczy znać pierwszy wyraz a_1 i różnicę r tego ciągu. Wyznaczyć ciąg arytmetyczny, to znaczy obliczyć a_1 i r.

Przykład 4.

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 5$ oraz $a_{11} = -19$. Wyznaczymy ten ciąg.

Wystarczy obliczyć a_1 i r. Korzystamy z twierdzenia 1. i otrzymujemy:

$$a_3 = a_1 + 2r \qquad a_{11} = a_1 + 10r$$

Z warunków zadania wynika, że:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 5 \\ a_1 + 10r = -19 \end{cases} \quad -$$

$$-8r = 24$$

$$r = -3$$

Teraz obliczamy a_1, podstawiając do równania $a_1 + 2r = 5$ w miejsce r liczbę -3.

$$a_1 + 2 \cdot (-3) = 5$$

$$a_1 = 11$$

W ciągu arytmetycznym (a_n) mamy: $\begin{cases} a_1 = 11 \\ r = -3 \end{cases}$.

Ćwiczenie 7. Wyznacz nieskończony ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_5 + a_8 = -7$ oraz $a_2 = 1$.

Związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego

Wypiszmy wzory na trzy kolejne wyrazy a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ciągu arytmetycznego, jeśli $n \geqslant 2$:

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)\cdot r, \qquad a_n = a_1 + (n-1)\cdot r, \qquad a_{n+1} = a_1 + n\cdot r$$

Wówczas:

$$a_{n-1} + a_{n+1} = a_1 + (n-2)\cdot r + a_1 + n\cdot r = 2a_1 + 2nr - 2r = 2\cdot[a_1 + (n-1)\cdot r], \text{ stąd}$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2\cdot a_n, \qquad \text{czyli}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Pokazaliśmy, że jeśli ciąg jest arytmetyczny, to każdy jego wyraz jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich – jeśli takie istnieją.

Niech teraz wyrazy pewnego ciągu (a_n) spełniają warunek $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ dla wszystkich liczb naturalnych większych od 1.

Wówczas:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \qquad \text{stąd}$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \quad \text{gdzie} \quad n \geqslant 2$$

Różnica między kolejnymi wyrazami jest stała. A to znaczy, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Twierdzenie 2.

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz tego ciągu, oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego – jeśli taki istnieje – jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.

Przykład 5.

Pokażemy, że ciąg $\left(3\sqrt{2}-4, \frac{1}{\sqrt{2}+1}, 2-\sqrt{2}\right)$ jest arytmetyczny.

Wystarczy wykazać, że $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$. Obliczamy:

$$\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{3\sqrt{2}-4+2-\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$$

$$a_2=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$$

Ponieważ $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$, więc na mocy twierdzenia 2. ciąg $\left(3\sqrt{2}-4,\frac{1}{\sqrt{2}+1},2-\sqrt{2}\right)$ jest arytmetyczny.

Przykład 6.

Ciąg $(k^2, 3, -k)$ jest arytmetyczny. Obliczymy k.

Ciąg jest trójwyrazowy. Z twierdzenia 2. wynika, że średnia arytmetyczna wyrazów skrajnych tego ciągu jest równa środkowemu wyrazowi.

$\frac{a_1+a_3}{2}=a_2$, zatem

$\frac{k^2+(-k)}{2}=3$, stąd

$k^2-k-6=0,\ \Delta=25,\ \sqrt{\Delta}=5,\ k=-2 \vee k=3$

Ciąg $(k^2, 3, -k)$ jest ciągiem arytmetycznym wtedy, gdy $k=-2$ lub $k=3$.

Sprawdzenie: Jeśli $k=-2$, to otrzymujemy ciąg arytmetyczny: (4, 3, 2) o różnicy -1.
Jeśli $k=3$, to mamy ciąg arytmetyczny (9, 3, –3), którego różnica jest równa -6.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n=-4n+8$, gdzie $n\in \mathbf{N}_+$.
   a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
   b) Wyznacz wyraz pierwszy i różnicę tego ciągu.
   c) Podaj wzór rekurencyjny ciągu (a_n).

2. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n=\frac{6-5n}{7}$, gdzie $n\in \mathbf{N}_+$.
   a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
   b) Zbadaj monotoniczność tego ciągu.
   c) Oblicz $a_{21}-a_{14}$.

3. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_1 = -2\frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{2}$. Oblicz:
   a) wyrazy a_5, a_{12} oraz a_{19}
   b) wyraz ogólny a_n
   c) różnicę $a_{n+3} - a_n$.

4. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 11n$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$.
   a) Wykaż, że ciąg (a_n) nie jest ciągiem arytmetycznym.
   b) Wyraz pierwszy oraz wyraz czwarty ciągu (a_n) są odpowiednio równe trzeciemu i szóstemu wyrazowi pewnego nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n). Wyznacz wyraz ogólny ciągu (b_n).

5. Między liczby 65 i 35 wstaw dziewięć liczb tak, aby wraz z danymi liczbami tworzyły malejący ciąg arytmetyczny.

6. Ciąg arytmetyczny ma piętnaście wyrazów. Ostatni wyraz jest równy 25, a przedostatni wynosi 19. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

7. Liczby 18 oraz $14\frac{2}{3}$ są kolejno dwoma początkowymi wyrazami pewnego skończonego ciągu arytmetycznego. Ostatnim wyrazem tego ciągu jest liczba –72. Ile wyrazów ma ten ciąg?

8. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego, w którym:
   a) $a_{13} = 0$ oraz $a_{29} = 8$
   b) $a_3 + a_8 = -22$ oraz $a_5 - a_{11} = 24$.

9. Oblicz, ile jest liczb naturalnych:
   a) mniejszych od 100, które są podzielne przez 6
   b) należących do przedziału (135, 1000), które są podzielne przez 5
   c) należących do przedziału $\langle 150, 600 \rangle$, których reszta z dzielenia przez 8 jest równa 1.

D 10. Wykaż, że ciąg $\left(\sqrt{7}-3, \sqrt{7}, \frac{2}{3-\sqrt{7}}\right)$ jest ciągiem arytmetycznym.

11. Oblicz liczbę k, dla której ciąg $(k^2 + k, 2k, k - 3)$ jest ciągiem arytmetycznym. Dla wyznaczonej liczby k podaj wyrazy tego ciągu.

12. Wyznacz liczby a i b tak, aby ciąg $(16, a, b, 28)$ był ciągiem arytmetycznym.

13. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego, wiedząc, że tworzą one ciąg arytmetyczny o różnicy 3.

D 14. Wykaż, że jeżeli miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, to co najmniej jeden kąt tego trójkąta ma miarę 60°.

D 15. Ciąg arytmetyczny (a_n) ma siedem wyrazów. Wykaż, że:

a) $\frac{a_1 + a_7}{2} = a_4$

b) suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa $7 \cdot a_4$.

16. Wyznacz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (c_n), jeśli $c_5 - c_1 = 20$ i $c_3 \cdot c_7 = 224$.

17. Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 17, zaś suma dwóch ostatnich wyrazów tego ciągu wynosi 171. Wiedząc, że ósmy wyraz ma wartość 54, oblicz pierwszy wyraz tego ciągu i liczbę jego wyrazów.

18. Jednym z rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ jest liczba $-0{,}2$. Suma wszystkich współczynników trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ jest równa 24. Wiedząc, że ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym, oblicz drugie rozwiązanie tego równania.

D 19. Wykaż, że jeśli (a_n) jest malejącym ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n), gdzie $b_n = 10 - 4a_n$ jest ciągiem arytmetycznym rosnącym.

D 20. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n), gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg o wyrazie ogólnym $b_n = a_{3n}$ też jest ciągiem arytmetycznym.

Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Niech (a_n) oznacza dowolny ciąg liczbowy. Symbolem S_n oznaczamy sumę n początkowych wyrazów tego ciągu. Tak więc:

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

.....

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$

Dodatkowo przyjmujemy, że $S_1 = a_1$.

Przykład 1.

Dany jest niekończony ciąg (a_n), w którym $a_n = 1 - n^2$. Wyznaczymy S_4.

Wyznaczamy cztery początkowe wyrazy ciągu (a_n):

$a_1 = 1 - 1^2 = 0$, $a_2 = 1 - 2^2 = -3$, $a_3 = 1 - 9 = -8$, $a_4 = 1 - 16 = -15$

Obliczamy S_4:

$S_4 = 0 + (-3) + (-8) + (-15) = -26$

Przykład 2.

O pewnym ciągu (a_n) wiadomo, że $S_{29} = 18$ oraz $S_{30} = 23$. Obliczymy a_{30}.

Zauważ, że $S_2 = S_1 + a_2$, $S_3 = S_2 + a_3$, $S_4 = S_3 + a_4$ i tak dalej. Ogólnie $S_n = S_{n-1} + a_n$.

Wobec tego

$a_{30} = S_{30} - S_{29} = 23 - 18 = 5.$

Trzydziesty wyraz tego ciągu jest równy 5.

Ćwiczenie 1. W ciągu (a_n) dane są: $S_{11} = 10$ oraz $S_{13} = 7$. Oblicz $a_{12} + a_{13}$.

O wybitnym matematyku niemieckim Karolu Gaussie, żyjącym na przełomie *X*VIII i *X*I*X* wieku, opowiada się następującą anegdotę. Jako bardzo młody uczeń znalazł metodę szybkiego sumowania liczb naturalnych od 1 do 40, czym zwrócił na siebie uwagę nauczyciela.

Przypatrzmy się tej metodzie. Poniżej zapisane są liczby od 1 do 40 w porządku rosnącym, a następnie te same liczby są ustawione poniżej, ale w porządku malejącym.

1	2	3	4	...	38	39	40
40	39	38	37	...	3	2	1
41	41	41	41	...	41	41	41

Powstało 40 kolumn, a w każdej kolumnie suma liczb nad kreską jest równa 41.

Zatem

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 38 + 39 + 40) = 41 \cdot 40$$

stąd

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 38 + 39 + 40 = \frac{41 \cdot 40}{2} = 820$$

Postępując podobnie, wyznaczymy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n). Wypisujemy w rzędzie kolejno wyrazy od a_1 do a_n, a poniżej – kolejno wyrazy od a_n do a_1.

a_1	$a_1 + r$	$a_1 + 2r$	...	$a_n - 2r$	$a_n - r$	a_n
a_n	$a_n - r$	$a_n - 2r$	...	$a_1 + 2r$	$a_1 + r$	a_1
$(a_1 + a_n)$	$(a_1 + a_n)$	$(a_1 + a_n)$	...	$(a_1 + a_n)$	$(a_1 + a_n)$	$(a_1 + a_n)$

Mamy n kolumn. W każdej kolumnie suma wyrazów nad kreską jest równa $(a_1 + a_n)$. Zatem:

$$2 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n) = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Otrzymaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n suma n początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Przykład 3.

Obliczymy sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, które są podzielne przez 7.

Liczby te tworzą ciąg arytmetyczny (a_n), w którym $a_1 = 0$, $r = 7$, a ostatnim wyrazem jest liczba 98. Obliczamy liczbę wyrazów tego ciągu:

$0 + (n-1)\cdot 7 = 98$, bo $a_1 + (n-1)\cdot r = a_n$

$n - 1 = 14$

$n = 15$

Korzystamy z twierdzenia 1.

$$S_{15} = \frac{0+98}{2}\cdot 15 = 735$$

Szukana suma jest równa 735.

Ćwiczenie 2. Wykaż, że suma wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest równa 4905.

Przykład 4.

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest opisany wzorem $a_n = 4n - 7$.

a) Znajdziemy sumę n kolejnych, początkowych wyrazów tego ciągu.

b) Obliczymy sumę $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{19}$.

Ad a)

Obliczamy pierwszy wyraz tego ciągu:

$a_1 = 4 - 7 = -3$.

Wyznaczamy S_n:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \frac{(-3+4n-7)n}{2} = 2n^2 - 5n$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 - 5n$.

Ad b)

Zauważamy, że

$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{19} = S_{19} - S_{10}$.

Obliczamy:

$S_{19} = 2\cdot 361 - 95 = 627$, $S_{10} = 2\cdot 100 - 50 = 150$

$S_{19} - S_{10} = 627 - 150 = 477$

Suma $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{19}$ jest równa 477.

Przykład 5.

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^2 - 2n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wykażemy, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Wystarczy pokazać, że różnica między wyrazami ciągu jest stała. W tym celu wyznaczymy wyrazy a_n oraz a_{n+1}. Mamy:

$a_n = S_n - S_{n-1}$, jeśli $n \geqslant 2$

$a_n = n^2 - 2n - [(n-1)^2 - 2(n-1)] = n^2 - 2n - (n^2 - 4n + 3) = 2n - 3$, wówczas

$a_{n+1} = 2(n+1) - 3 = 2n - 1$, zatem

$a_{n+1} - a_n = (2n-1) - (2n-3) = 2$, jeśli $n \geqslant 2$

Pokazaliśmy, że różnica między kolejnymi wyrazami ciągu (a_n), począwszy od różnicy $a_3 - a_2$, jest stała i równa 2. Pozostaje sprawdzić, jaka jest różnica między a_2 i a_1. Obliczamy:

$a_1 = S_1 = -1$ $\qquad$ $a_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ $\qquad$ $a_2 - a_1 = 2$

Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała, więc ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Ćwiczenie 3. Wyznacz wyraz a_{n+1} ciągu (a_n) z przykładu 5., korzystając z zależności: $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$.

Przykład 6.

Ciąg arytmetyczny (a_n) ma n wyrazów. Wiedząc, że $a_1 = -28$, $r = 3$ oraz $S_n = 5840$, obliczymy n.

Ponieważ $a_n = a_1 + (n-1)r$, więc wzór na sumę n początkowych wyrazów przyjmuje postać:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n, \quad \text{czyli} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Po podstawieniu danych, otrzymujemy równanie z niewiadomą n, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

$$5840 = \frac{2 \cdot (-28) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n, \quad \text{stąd}$$

$3n^2 - 59n - 11680 = 0 \quad \Delta = 143641 \quad \sqrt{\Delta} = 379$

$n_1 = -53\frac{1}{3}, \quad n_2 = 73$

Liczba $-53\frac{1}{3}$ nie jest liczbą naturalną. Ciąg (a_n) ma 73 wyrazy.

Ćwiczenie 4. Po lewej stronie równania $3 + 5 + 7 + \ldots + x = 195$ występuje suma wszystkich wyrazów pewnego skończonego ciągu arytmetycznego. Oblicz x. Ile wyrazów ma ten ciąg?

Przykład 7.

W ciągu arytmetycznym (a_n) o nieparzystej liczbie wyrazów, suma wyrazów stojących na miejscach nieparzystych jest równa 98, a suma pozostałych wyrazów wynosi 84. Wyznaczymy:

a) liczbę wyrazów tego ciągu b) środkowy wyraz ciągu.

Ad a)

Przyjmijmy, że ciąg (a_n) ma $2n + 1$ wyrazów. Z danych zadania wynika, że:

1) $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} = 98$ oraz 2) $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2n} = 84$.

1) Ciąg $(a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n+1})$ ma $n + 1$ wyrazów, a różnica tego ciągu jest równa $2r$.

Zatem

$$\frac{a_1 + a_{2n+1}}{2} \cdot (n+1) = 98$$

$$\frac{a_1 + a_1 + n \cdot 2r}{2} \cdot (n+1) = 98$$

$$(a_1 + nr) \cdot (n+1) = 98$$

2) Ciąg $(a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n})$ ma n wyrazów. Różnica tego ciągu też jest równa $2r$. Mamy:

$$\frac{a_2 + a_{2n}}{2} \cdot n = 84$$

$$\frac{a_2 + a_2 + (n-1) \cdot 2r}{2} \cdot n = 84$$

$$[a_2 + (n-1)r] \cdot n = 84$$

$$(a_1 + r + nr - r) \cdot n = 84$$

$$(a_1 + nr) \cdot n = 84$$

Z 1) i 2) wynika, że

$$\frac{98}{n+1} = \frac{84}{n} \quad \text{stąd} \quad 98n = 84n + 84, \quad \text{czyli} \quad n = 6.$$

Liczba wyrazów ciągu jest równa $2 \cdot 6 + 1$, czyli 13.

Ad b)

Środkowy wyraz ciągu to a_7. Aby obliczyć jego wartość, skorzystamy z sumy wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

$$S_{13} = 98 + 84 = 182$$

$$\frac{a_1 + a_1 + 12r}{2} \cdot 13 = 182$$

$$a_1 + 6r = 182:13$$

$$a_7 = 14$$

Ciąg (a_n) ma 13 wyrazów, środkowy wyraz ciągu jest równy 14.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. O pewnym ciągu (a_n) wiadomo, że $S_n = n^3$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Oblicz:
   a) a_5 b) $a_4 + a_5 + a_6$
   c) $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ d) a_n.
   Czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij.

2. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem: $S_n = 4n + n^2$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wyznacz:
   a) a_1, r b) ogólny wyraz tego ciągu.

D 3. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa $3n - 2n^2$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.
   a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
   b) Oblicz $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$.

4. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^2$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.
D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.
   b) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

5. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli:
   a) $a_1 = 2, r = -3$ b) $a_n = 8n + 5$.

6. Ile razy zegar, bijący tylko godziny w układzie dwunastogodzinnym, uderzy w ciągu doby?

7. Kiedy cesarz Karol V odwiedził w 1541 r. Norymbergę, miasto podarowało mu złoty puchar, w którym znajdowało się 100 sztuk złota. Pierwsza z nich miała wartość jednego dukata, druga – dwóch, trzecia – trzech itd., aż do setnej mającej wartość 100 dukatów. Jaką wartość przedstawiał dar, nie licząc pucharu?

8. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych:
   a) nieparzystych
   b) podzielnych przez 3
   c) których reszta z dzielenia przez 4 jest równa 1.

9. Suma dwudziestu siedmiu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 2241. Wiedząc, że $a_{27} = 148$, oblicz a_1 i r.

10. W skończonym ciągu arytmetycznym wyraz pierwszy jest równy –10, a różnica tego ciągu wynosi $2\frac{1}{3}$. Wiedząc, że suma wszystkich wyrazów ciągu jest równa 775, wyznacz liczbę wyrazów tego ciągu.

11. Suma kolejnych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2, jest równa 930. Wyznacz największą liczbę należącą do tej sumy, jeśli najmniejszą jest liczba 27.

12. Pola powierzchni prostokątnych kartek papieru tworzą ciąg arytmetyczny. Pole powierzchni pierwszej kartki wynosi 12 cm^2, siódmej zaś 39 cm^2. Wszystkie kartki pocięto na kawałki, które nałożono jedna obok drugiej na kwadrat o boku długości 2,1 dm, zakrywając nimi całą powierzchnię kwadratu. Ile było prostokątnych kartek papieru?

13. Miary kątów wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny, którego różnica wynosi 4°, a miara największego kąta jest równa 172°. Jaka jest liczba boków tego wielokąta?

14. Rozwiąż równanie, wiedząc, że po lewej stronie tego równania występuje suma początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego:
   a) $3 + 8 + 13 + 18 + \ldots + x = 366$
   b) $2 + 3 + 4 + \ldots + (x + 1) = 350$

15. Ciąg arytmetyczny (a_n) ma siedemnaście wyrazów. Wiedząc, że $S_{17} = 510$, oblicz:
   a) środkowy wyraz tego ciągu
   b) $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$.

D 16. Nieskończony ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Wykaż, że jeśli $a_{111} = 37$, to $S_{221} = 407$.

17. Wyznacz liczbę k, dla której suma $2k$ początkowych wyrazów ciągu (4, 7, 10, 13, 16, ...) jest równa sumie k początkowych wyrazów ciągu (44, 45, 46, 47, 48, ...). Jaka to suma?

D 18. Dany jest nieskończony ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{2+9+16+23+\ldots+(7n-5)}{7n^2+4n-3}$.

Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący. Czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym?

19. Ciąg arytmetyczny (a_n) ma nieparzystą liczbę wyrazów. Suma wyrazów stojących na miejscach parzystych jest równa 261, zaś suma wyrazów stojących na miejscach nieparzystych jest równa 290. Wyznacz:
   a) liczbę wyrazów ciągu (a_n)
   b) środkowy wyraz ciągu (a_n).

Ciąg geometryczny

Definicja ciągu geometrycznego. Monotoniczność tego ciągu

Ćwiczenie 1. Wyrazy poniższych ciągów są utworzone według pewnej reguły.

I. $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$

II. $\left(\frac{1}{81}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, \ldots\right)$

Podaj kilka kolejnych wyrazów każdego z tych ciągów.

Definicja 1.

Niech (a_n) będzie ciągiem co najmniej trójwyrazowym.

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg (a_n), w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę. Liczbę tę oznaczamy q i nazywamy **ilorazem ciągu geometrycznego**.

Definicję 1. możemy zapisać krócej za pomocą wzoru rekurencyjnego.

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a i ilorazie q wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$, jeśli $n \geqslant 1$

Ćwiczenie 2. Ciąg geometryczny (b_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$\begin{cases} b_1 = -16 \\ b_{n+1} = -\frac{1}{4} b_n \end{cases}$, jeśli $n \geqslant 1$. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.

Przeanalizujmy poniższe przykłady ciągów.

ciąg geometryczny (a_n)	a_1	q	monotoniczność ciągu
$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, \frac{81}{2}, \ldots\right)$	$\frac{1}{2}$	3	ciąg rosnący
$\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$	2	$\frac{1}{2}$	ciąg malejący

ciąg geometryczny (a_n)	a_1	q	monotoniczność ciągu
$\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-\frac{9}{2},-\frac{27}{2},-\frac{81}{2},\ldots\right)$	$-\frac{1}{2}$	3	ciąg malejący
$\left(-2,-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\ldots\right)$	–2	$\frac{1}{2}$	ciąg rosnący
(4, 4, 4, 4, 4, ...)	4	1	ciąg stały
$\left(8,-4,2,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\ldots\right)$	8	$-\frac{1}{2}$	ciąg niemonotoniczny

O monotoniczności ciągu geometrycznego decydują: wyraz pierwszy i iloraz tego ciągu.

Twierdzenie 1.

Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Jeśli:

1) $a_1 > 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący,
2) $a_1 > 0$ i $q \in (0, 1)$, to ciąg (a_n) jest malejący,
3) $a_1 < 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest malejący,
4) $a_1 < 0$ i $q \in (0, 1)$, to ciąg (a_n) jest rosnący,
5) $q = 1$, to ciąg (a_n) jest stały, a jeśli $q = 0$ – to ciąg stały od co najmniej drugiego wyrazu,
6) $q < 0$, to ciąg (a_n) nie jest ciągiem monotonicznym.

Udowodnimy przykładowo punkt 1).

Załóżmy, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, w którym $a_1 > 0$ oraz $q > 1$. Wówczas wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Z definicji ciągu geometrycznego mamy:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \qquad \text{gdzie } n \geqslant 1, \text{ zatem } \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q .$$

Ponieważ z założenia $q > 1$ oraz $a_n > 0$ dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n, więc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \ / \cdot a_n \qquad \text{stąd}$$

$$a_{n+1} > a_n$$

To dowodzi, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Ćwiczenie 3. Wykaż, że jeśli $a_1 < 0$ oraz $q \in (0, 1)$, to ciąg (a_n) jest rosnący.

Ogólny wyraz ciągu geometrycznego

Na podstawie definicji ciągu geometrycznego (a_n) możemy ustalić ogólny wyraz tego ciągu. Zauważamy, że

$a_2 = a_1 \cdot q^1$

$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$

$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^4$

.....

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ – ogólny wyraz ciągu geometrycznego (a_n)

Wyraz a_n ciągu geometrycznego (a_n) jest iloczynem wyrazu a_1 przez iloraz q do potęgi $n-1$.

Twierdzenie 2.

Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, gdzie $q \neq 0$, to

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

Z powyższego twierdzenia wynika, że aby wyznaczyć nieskończony ciąg geometryczny, wystarczy obliczyć pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Przykład 1.

Wyznaczymy pierwszy wyraz i iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), w którym dane są: $a_3 = \frac{16}{27}$, $a_5 = \frac{4}{3}$.

Na podstawie twierdzenia 2. mamy:

$a_3 = a_1 \cdot q^2$ oraz $a_5 = a_1 \cdot q^4$.

Ponieważ dane wyrazy są różne od 0, więc $a_1 \neq 0$ oraz $q \neq 0$. Dzielimy piąty wyraz ciągu (a_n) przez trzeci wyraz tego ciągu i otrzymujemy:

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{a_1 q^4}{a_1 q^2} = q^2 \quad \text{zatem} \quad q^2 = \frac{4}{3} : \frac{16}{27}$$

$$q^2 = \frac{9}{4}$$

$$q = -\frac{3}{2} \vee q = \frac{3}{2}$$

W obu przypadkach pierwszy wyraz ciągu jest taki sam:

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2}, \text{ czyli } a_1 = \frac{\frac{16}{27}}{\frac{9}{4}} = \frac{64}{243}$$

Dwa ciągi spełniają warunki zadania: I. $a_1 = \frac{64}{243}, q = -\frac{3}{2}$ oraz II. $a_1 = \frac{64}{243}, q = \frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 4. Zapisz w zeszycie ogólny wyraz każdego z wyznaczonych w przykładzie 1. ciągów. Który z tych ciągów jest monotoniczny?

Przykład 2.

Pokażemy, że nieskończony ciąg określony wzorem:

a) $a_n = 3 \cdot 2^{2n+1}$ jest ciągiem geometrycznym

b) $b_n = n \cdot 5^n$ nie jest ciągiem geometrycznym.

Ad a) Wystarczy wykazać, że istnieje liczba rzeczywista q taka, że $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n. Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są różne od 0, więc wystarczy udowodnić, że iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Znajdujemy wyraz a_{n+1}.

$$a_{n+1} = 3 \cdot 2^{2(n+1)+1} = 3 \cdot 2^{2n+3}$$

Wówczas:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^{2n+3}}{3 \cdot 2^{2n+1}} = 4$$

Iloraz dowolnych dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest liczbą rzeczywistą, równą 4. To znaczy, że ciąg (a_n) jest geometryczny.

Ad b) Wystarczy wyznaczyć trzy kolejne wyrazy ciągu (b_n) i pokazać, że iloraz drugiego z wyznaczonych wyrazów przez pierwszy wyraz jest różny od ilorazu trzeciego z wyznaczonych wyrazów przez drugi wyraz.

Wyznaczmy, na przykład, trzy początkowe wyrazy ciągu (b_n). Mamy:

$b_1 = 1 \cdot 5^1 = 5$ $\quad b_2 = 2 \cdot 5^2 = 50$ $\quad b_3 = 3 \cdot 5^3 = 375$

$\frac{b_2}{b_1} = \frac{50}{5} = 10$ $\quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{375}{50} = 7\frac{1}{2}$ $\quad$ zatem $\quad \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{b_3}{b_2}$

To znaczy, że ciąg (b_n) nie jest geometryczny.

Ćwiczenie 5. Czy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 3$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, jest ciągiem geometrycznym? Odpowiedź uzasadnij.

Przykład 3.

Ciąg geometryczny (a_n) jest ciągiem skończonym, a ostatni jego wyraz jest równy 8748. Obliczymy, ile wyrazów ma ten ciąg, wiedząc, że $a_1 = 12$, $q = 3$.

Oznaczamy ostatni wyraz ciągu jako a_n. Wówczas:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Z danych zadania mamy:

$$8748 = 12 \cdot 3^{n-1} \quad / : 12$$

$$729 = 3^{n-1}$$

Ponieważ $729 = 3^6$, więc

$$n - 1 = 6$$

$$n = 7$$

Ciąg (a_n) ma siedem wyrazów.

Przykład 4.

Wyznaczymy pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n), wiedząc, że $a_6 - a_4 = 1512$ oraz $a_5 + a_4 = 756$.

Korzystając z twierdzenia 2., możemy zapisać:

$$a_6 = a_1 \cdot q^5, \quad a_5 = a_1 \cdot q^4 \quad \text{oraz} \quad a_4 = a_1 \cdot q^3$$

gdzie q jest ilorazem ciągu geometrycznego (a_n). Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 q^5 - a_1 q^3 = 1512 \\ a_1 q^4 + a_1 q^3 = 756 \end{cases}$$

Po lewej stronie każdego równania wyłączamy $a_1 q^3$ poza nawias.

$$\begin{cases} a_1 q^3 \left(q^2 - 1\right) = 1512 \\ a_1 q^3 \left(q + 1\right) = 756 \end{cases}$$

$q^2 - 1 = (q + 1)(q - 1)$

$$\begin{cases} a_1 q^3 \left(q + 1\right)\left(q - 1\right) = 1512 \\ a_1 q^3 \left(q + 1\right) = 756 \end{cases}$$

Do pierwszego równania w miejsce $a_1q^3(q+1)$ wstawiamy 756.

$$\begin{cases} 756\cdot(q-1)=1512 \ /:756 \\ a_1q^3(q+1)=756 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q-1=2 \\ a_1q^3(q+1)=756 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q=3 \\ a_1=7 \end{cases}$$

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 7, a iloraz tego ciągu jest równy 3.

Związek między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego

Wypiszmy wzory na trzy kolejne wyrazy a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ciągu geometrycznego (a_n), gdzie $n \geqslant 2$.

$$a_{n-1} = a_1 \cdot q^{n-2} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$$

Wówczas:

$$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-2} \cdot a_1 \cdot q^n = a_1^2 \cdot q^{2n-2} = (a_1q^{n-1})^2 = a_n^2, \quad \text{czyli}$$

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

W ciągu geometrycznym kwadrat każdego wyrazu, oprócz pierwszego i ewentualnie ostatniego, jest równy iloczynowi wyrazu poprzedniego i wyrazu następnego. Otrzymaną równość można również zapisać w postaci:

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \text{ jeśli } n > 1$$

Jeśli ciąg jest geometryczny, to wartość bezwzględna każdego wyrazu, oprócz pierwszego i ewentualnie ostatniego, jest równa średniej geometrycznej wyrazu poprzedniego i wyrazu następnego.

Z kolei, jeśli dla dowolnej liczby naturalnej n większej od 1 pewien ciąg (a_n) spełnia warunek:

$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ i każdy wyraz tego ciągu jest różny od 0,

to ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, ponieważ ilorazy kolejnych wyrazów ciągu są równe:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Z własności proporcji.

Twierdzenie 3.

Niech (a_n) oznacza ciąg o wyrazach różnych od zera. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat każdego wyrazu ciągu (a_n), oprócz wyrazu pierwszego i ewentualnie ostatniego, jest równy iloczynowi wyrazu poprzedniego i następnego.

Przykład 5.

Wykażemy, że ciąg $\left(5-\sqrt{13}, 2\sqrt{3}, 5+\sqrt{13}\right)$ jest geometryczny.

Dany ciąg ma trzy wyrazy: $a_1 = 5-\sqrt{13}$, $a_2 = 2\sqrt{3}$, $a_3 = 5+\sqrt{13}$. Wystarczy pokazać, że $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$. Obliczamy:

$$a_2^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$a_1 \cdot a_3 = \left(5-\sqrt{13}\right)\left(5+\sqrt{13}\right) = 25-13 = 12$$

Otrzymaliśmy, że $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$. Zatem ciąg $\left(5-\sqrt{13}, 2\sqrt{3}, 5+\sqrt{13}\right)$ jest geometryczny.

Przykład 6.

Wyznaczymy liczbę a tak, aby ciąg $(a-4, a+2, 5a+2)$ był rosnącym ciągiem geometrycznym.

Na podstawie twierdzenia 3. ciąg $(a-4, a+2, 5a+2)$ jest ciągiem geometrycznym o wyrazach różnych od zera wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(a+2)^2 = (a-4)(5a+2)$$

$$a^2 + 4a + 4 = 5a^2 + 2a - 20a - 8$$ Rozwiązujemy równanie z niewiadomą a.

$$2a^2 - 11a - 6 = 0$$

$$\Delta = 169, \quad \sqrt{\Delta} = 13$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ lub } a = 6$$

Zapiszmy ciągi dla otrzymanych wartości a.

- Jeśli $a = -\frac{1}{2}$, to mamy ciąg geometryczny $\left(-4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ o ilorazie $q = -\frac{1}{3}$.
  Ciąg ten nie jest monotoniczny.

- Jeśli $a = 6$, to otrzymujemy ciąg geometryczny (2, 8, 32) o ilorazie $q = 4$. Ciąg ten jest rosnący.

Ciąg $(a - 4, a + 2, 5a + 2)$ jest rosnącym ciągiem geometrycznym tylko wtedy, gdy $a = 6$.

Przykład 7.

Niech ciąg (a_1, a_2, a_3, a_4) będzie ciągiem geometrycznym o wyrazach ujemnych. Wykażemy, że $a_1 + a_4 \leqslant a_2 + a_3$.

Dany ciąg jest ciągiem geometrycznym, więc możemy przyjąć oznaczenia:

$$a_2 = a_1 \cdot q \qquad a_3 = a_1 \cdot q^2 \qquad a_4 = a_1 \cdot q^3$$

– gdzie q jest ilorazem ciągu geometrycznego (a_1, a_2, a_3, a_4). Wówczas:

$$a_1 + a_4 - a_2 - a_3 = (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) = (a_1 - a_1 q) - (a_1 q^2 - a_1 q^3) =$$

$$= a_1(1-q) - a_1 q^2 (1-q) = (1-q) \cdot (a_1 - a_1 q^2) = (1-q) \cdot a_1 \cdot (1 - q^2) =$$

$$= a_1 (1-q)(1-q)(1+q) = a_1 (1-q)^2 (1+q)$$

Badamy znak otrzymanego iloczynu.

- Z założenia wszystkie wyrazy ciągu są ujemne, więc $a_1 < 0$ oraz $q > 0$, stąd $a_1 < 0$ oraz $1 + q > 0$.
- Kwadrat dowolnego wyrażenia jest nieujemny, więc $(1-q)^2 \geqslant 0$.

Zatem

$$a_1 (1-q)^2 (1+q) \leqslant 0,$$

a to znaczy, że $a_1 + a_4 - a_2 - a_3 \leqslant 0$, czyli $a_1 + a_4 \leqslant a_2 + a_3$, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Zbadaj, który z ciągów (a_n), (b_n), (c_n) jest geometryczny, gdzie:

a) $a_n = 3^{n+1} \cdot 5^n$ b) $b_n = \begin{cases} -1, \text{ jeśli } n = 2k, k \in \mathbf{N}_+ \\ 1, \text{ jeśli } n = 2k-1, k \in \mathbf{N}_+ \end{cases}$ c) $c_n = \frac{2^n}{n}$

2. Wyznacz wyraz ogólny ciągu geometrycznego, określonego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, n \geqslant 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = (-3) \cdot b_{n-1}, n > 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} c_1 = -4,5 \\ c_{n+1} = -c_n, n \geqslant 1 \end{cases}$

3. Wyznacz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n), wiedząc, że:

   a) $a_6 = \frac{32}{27}$, $q = -\frac{2}{3}$

   b) $a_4 = 3 - 2\sqrt{2}$, $q = \sqrt{2} - 1$

4. Piłka, odbijając się od ziemi, osiągała za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{2}{3}$ poprzedniej. Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po szóstym odbiła się wysokość 32 cm?

5. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego (a_n), wiedząc, że:

   a) $a_1 = -0{,}75$ oraz $a_4 = -\frac{128}{243}$

   b) $a_3 = 1{,}5$ oraz $a_5 = \frac{3}{8}$.

6. Ciąg (a_n) jest skończonym ciągiem geometrycznym, w którym $a_1 = 25$, $q = -3$, a ostatni wyraz jest równy 2025. Ile wyrazów ma ten ciąg?

D 7. W nieskończonym ciągu geometrycznym (b_n) dane są: $b_5 = -1$ i $b_8 = -\frac{8}{27}$. Oblicz b_n. Następnie wykaż, że ciąg (b_n) jest rosnący.

8. Objętość prostopadłościennego pudełka jest równa 512 cm^3, a długości jego trzech różnych krawędzi wyrażone w centymetrach, tworzą ciąg geometryczny.

   D a) Wykaż, że jedna z krawędzi tego pudełka ma długość 8 cm.

   b) Wiedząc dodatkowo, że długości dwóch pozostałych krawędzi są w stosunku 1:16, oblicz pole powierzchni całkowitej tego pudełka.

9. Ciąg geometryczny ma cztery wyrazy. Jeśli od sumy dwóch pierwszych wyrazów odejmiemy trzeci wyraz, to otrzymamy 30. Jeśli od sumy jego środkowych wyrazów odejmiemy jego ostatni wyraz, to otrzymamy 15. Wyznacz ten ciąg.

10. W czterowyrazowym ciągu geometrycznym iloczyn wyrazu pierwszego i trzeciego jest równy 4, zaś iloczyn wyrazu drugiego i czwartego wynosi $\frac{4}{9}$. Wyznacz ten ciąg.

11. Wyznacz pierwszy wyraz oraz iloraz ciągu geometrycznego (c_n), jeśli:

   a) $c_5 - c_3 = 96$ i $c_4 + c_3 = 96$

   b) $c_7 - c_3 = \frac{45}{4}$ i $c_7 - c_5 = 9$.

D 12. Wykaż, że liczby $\frac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$, $4\sqrt{5}+6$, $10\sqrt{5}+26$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.

13. Liczby $x + 7$, $x + 4$, $2x$ w danej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x. Wyznacz ten ciąg.

D 14. Wykaż, że jeśli ciąg (378, a, b, 14) jest geometryczny, to suma $a + b$ jest liczbą naturalną podzielną przez 4.

D 15. Wykaż, że nieskończony ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 6 \cdot 5^{n+1} - 10 \cdot 5^n$ jest ciągiem geometrycznym. Podaj iloraz tego ciągu.

16. Pierwszy wyraz niemonotonicznego ciągu geometrycznego (b_n) jest równy 3 oraz dla pewnej liczby naturalnej k mamy: $b_k = 36$ oraz $b_{k+2} = 432$. Wyznacz:
a) wyrazy b_7 i b_8 b) liczbę k.

D 17. Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są różne. Wykaż, że jeśli różnica między siódmym i szóstym wyrazem tego ciągu jest cztery razy większa od różnicy między wyrazem ósmym i siódmym, to iloraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{4}$.

D 18. Ciąg geometryczny (a_n) ma 9 wyrazów. Wykaż, że jeśli $a_5 = 2$, to iloczyn wszystkich wyrazów tego ciągu jest równy 512.

D 19. Dany jest ogólny wyraz nieskończonego ciągu (a_n). Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.
a) $a_n = 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n$ b) $a_n = 5 \cdot 2^{-2n} + 4^{1-n}$

D 20. Wykaż, że jeśli ciąg (x_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 3, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = 2^{x_n}$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 8.

D 21. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_{2n+1}$ też jest ciągiem geometrycznym.

D 22. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest geometryczny oraz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0$, to $a_1 + a_2 > 0$.

D 23. Ciąg geometryczny (a_n) ma co najmniej pięć wyrazów. Wykaż, że jeśli iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest ujemny, to $\frac{a_1 - a_5}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} > 1$.

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n).

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n ,$$

więc

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

I przypadek: $q = 1$. Wówczas

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1 + a_1}_{n \text{ składników}} = n \cdot a_1$$

II przypadek: $q \neq 1$, czyli $q - 1 \neq 0$. Wówczas

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} = a_1 \cdot \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}\right).$$

W obliczeniu sumy w nawiasie, oznaczonej kolorem niebieskim, skorzystamy ze wzoru, który udowodniliśmy w klasie drugiej:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Jeśli $a = 1$, $b = q$, to otrzymujemy:

$$1 - q^n = (1 - q)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}\right)$$

Ponieważ z założenia $q \neq 1$, więc ostatnią równość można podzielić stronami przez $1 - q$. Otrzymujemy:

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}$$

Zatem

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Twierdzenie 1.

Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n wyraża się wzorem:

a) $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ – jeśli $q \neq 1$

b) $S_n = n \cdot a_1$ – jeśli $q = 1$.

Przykład 1.

Legenda głosi, że twórca szachów zażyczył sobie od władcy Indii – któremu gra bardzo się spodobała – następującej zapłaty. Miał otrzymać tyle ziaren zboża, ile zmieści się na szachownicy, jeśli ziarna będzie się układać według następującej reguły: na pierwszym polu 1 ziarno, na drugim 2 ziarna, na trzecim 4 ziarna, na czwartym 8 ziaren i na każdym następnym polu dwa razy więcej ziaren, niż na polu poprzednim – aż do ostatniego pola. Czy władca Indii mógł spełnić życzenie twórcy szachów?

Szachownica ma 64 pola, więc na ostatnim polu powinno znaleźć się 2^{63} ziaren. Liczby kolejnych ziaren tworzą ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie 1 i ilorazie 2. Liczba wszystkich ziaren jest równa sumie 64 początkowych wyrazów tego ciągu.

$$S_{64} = 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63} = 1\cdot\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64}-1 =$$

$$= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Taka ilość zboża przekracza roczne zbiory z całej naszej planety.

Przykład 2.

Obliczymy sumę $-\frac{1}{81}+\frac{1}{27}+\left(-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}+(-1)+\ldots+2187$.

Kolejne składniki sumy są początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = -\frac{1}{81}$, $q = -3$, a wyrazem o numerze n jest liczba 2187, równa 3^7. Wyznaczamy n, korzystając ze wzoru:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$2187 = -\frac{1}{81}\cdot(-3)^{n-1} \quad /\cdot(-81)$$

$$-3^4 \cdot 3^7 = (-3)^{n-1}$$

$$(-3)^{11} = (-3)^{n-1}$$

$$n-1 = 11$$

$$n = 12$$

Obliczamy sumę $-\frac{1}{81}+\frac{1}{27}+\left(-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}+(-1)+\ldots+2187$:

$$S_{12} = -\frac{1}{81}\cdot\frac{1-(-3)^{12}}{1-(-3)} = \frac{1}{81}\cdot\frac{3^{12}-1}{4} = \frac{531440}{81\cdot 4} = \frac{132860}{81} = 1640\frac{20}{81}$$

Szukana suma jest równa $1640\frac{20}{81}$.

Ćwiczenie 1. Oblicz sumę $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$.

Przykład 3.

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 729, a ostatni 96. Wiedząc, że suma wyrazów tego ciągu wynosi 1995, obliczymy iloraz tego ciągu.

Oznaczmy ciąg geometryczny przez (a_n). Niech n będzie liczbą jego wyrazów. Wówczas

$$a_1 = 729, \quad a_n = 96, \quad S_n = 1995$$

Przekształcamy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego w następujący sposób:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q}{1-q} = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Podstawiamy do otrzymanej zależności dane wielkości:

$$1995 = \frac{729 - 96 \cdot q}{1-q} \quad / \cdot (1-q)$$

$$1995 - 1995q = 729 - 96q$$

$$1266 = 1899q$$

$$q = \frac{2}{3}$$

Iloraz ciągu (a_n) jest równy $\frac{2}{3}$.

Ćwiczenie 2. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 128, a ostatni 972. Wiedząc, że suma wszystkich wyrazów wynosi 2660, oblicz iloraz i liczbę wyrazów tego ciągu.

Przykład 4.

Udowodnimy, że suma $1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ cyfr}}$ jest równa $\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$.

Rozpatrzmy na przykład czwarty składnik tej sumy, czyli liczbę 1111. Liczbę tę można zapisać w postaci sumy czterech wyrazów ciągu geometrycznego, którego pierwszy wyraz jest równy 1, a iloraz wynosi 10. Wówczas:

$$1111 = 1 + 10 + 100 + 1000 = \frac{1\cdot\left(1-10^4\right)}{1-10} = \frac{10^4-1}{9}$$

Podobnie:

$$111 = \frac{10^3-1}{9},\quad 11 = \frac{10^2-1}{9},\quad 1 = \frac{10^1-1}{9}$$

Ogólnie, liczba $\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ cyfr}}$ jest sumą n wyrazów ciągu geometrycznego, którego pierwszy wyraz jest równy 1, a iloraz wynosi 10. Zatem $\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ cyfr}} = \frac{10^n-1}{9}$.

Obliczamy teraz sumę takich liczb od 1 do $\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ cyfr}}$.

$$1+11+111+1111+\ldots+\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ cyfr}} =$$

$$= \frac{10^1-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \frac{10^4-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9} =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left[10^1+10^2+10^3+10^4+\ldots+10^n+(-1)\cdot n\right]$$

Wyrażenie $10^1+10^2+10^3+10^4+\ldots+10^n$ to suma n wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 10$ i $q = 10$. Stosujemy twierdzenie 1.

$$10^1+10^2+10^3+10^4+\ldots+10^n = 10\cdot\frac{1-10^n}{1-10} = 10\cdot\frac{10^n-1}{9} = \frac{10^{n+1}-10}{9}$$

Mamy:

$$1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ cyfr}} = \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{10^{n+1}-10-9n}{9} =$$

$$= \frac{10^{n+1}-9n-10}{81},$$

co kończy dowód.

Przykład 5.

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) suma czterech początkowych wyrazów jest równa 40, a suma czterech następnych wyrazów jest równa 3240. Wyznaczymy iloraz tego ciągu q i wyraz a_1.

Zauważ, że ciąg (a_n) nie jest stały. To znaczy, że $q \neq 1$. Mamy:

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 40 \quad \text{oraz} \quad a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + a_1q^7 = 3240$$

Z twierdzenia 1. wynika, że

$$a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 40 \quad \text{oraz} \quad a_1 \cdot q^4 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 3240$$

Podstawiamy do drugiej równości liczbę 40 w miejsce $a_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q}$:

$$40 \cdot q^4 = 3240$$

$$q^4 = 81$$

$$q = 3 \text{ lub } q = -3$$

Jeśli $q = -3$, to ciąg nie jest monotoniczny ($a_1 \neq 0$).

Jeśli $q = 3$, to ciąg jest monotoniczny; obliczamy a_1.

$$a_1 \cdot \frac{1-81}{1-3} = 40$$

$$a_1 = 1$$

Ponieważ $a_1 > 0$ i $q > 1$, więc ciąg (a_n) jest rosnący.

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 1, a iloraz tego ciągu jest równy 3.

Przykład 6.

Rozważmy dwa ciągi, gdzie $x > 0$:

(1) $1,\ 1+x,\ (1+x)^2,\ (1+x)^3,\ (1+x)^4,\ (1+x)^5, \ldots$

(2) $1,\ 1+x,\ 1+2x,\ 1+3x,\ 1+4x,\ 1+5x, \ldots$

Pierwszy ciąg jest ciągiem geometrycznym, a drugi – ciągiem arytmetycznym. Pierwsze dwa wyrazy tych ciągów są jednakowe. Pokażemy, że wyrazy ciągu geometrycznego – począwszy od trzeciego, są większe od odpowiednich wyrazów ciągu arytmetycznego.

Założenie:

$n \in \boldsymbol{N},\ n \geqslant 2,\ x > 0$

Teza:

$(1+x)^n > 1 + nx$

Dowód:

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 1, a iloraz ciągu jest równy $1 + x$. Rozważmy sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

Mamy

$$S_n = 1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots+(1+x)^{n-1}$$

Pierwszy składnik sumy S_n jest równy 1. Ponieważ $x > 0$, więc każdy kolejny składnik tej sumy jest większy od 1. Zatem

$1+(1+x)+\ldots+(1+x)^{n-1} > n$, czyli

$S_n > n$

Z twierdzenia 1. wynika, że

$$S_n = \frac{1-(1+x)^n}{1-(1+x)} = \frac{(1+x)^n-1}{x}, \text{ więc}$$

$$\frac{(1+x)^n-1}{x} > n \quad / \cdot x, \quad \text{bo } x > 0$$

$(1+x)^n - 1 > nx$ i ostatecznie

$(1+x)^n > 1+nx$, co kończy dowód.

Nierówność $(1+x)^n > 1+nx$, gdzie $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, $x > 0$, nazywa się **nierównością Bernoullego**.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Pchła Szachrajka w pierwszym skoku pokonała odległość 1 m, w drugim skoku pół metra i w każdym następnym skoku połowę długości skoku poprzedniego. Czy pchła pokona odległość 2 m w dziesięciu skokach? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

2. Ktoś wymyślił plotkę i w ciągu jednego dnia przekazał ją trzem osobom. Następnego dnia każda z tych trzech osób przekazała plotkę trzem innym osobom, które tej plotki nie znały. Każdego kolejnego dnia każda osoba, która poznała dzień wcześniej plotkę, przekazywała ją trzem osobom, które tej plotki jeszcze nie znały. Oblicz, w ciągu ilu dni tę plotkę poznało 9840 osób, nie licząc osoby, która ją wymyśliła.

3. Dany jest malejący ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 27$, $a_3 = 12$.
   a) Wyznacz iloraz tego ciągu.
   b) Zapisz ogólny wyraz a_n tego ciągu, jeśli $n \geqslant 1$.
   c) Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

4. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n), jeśli wiadomo, że suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $2\frac{1}{8}$, a iloraz tego ciągu wynosi $\frac{1}{4}$.

5. Dany jest ciąg geometryczny (a_n), którego $a_1 = 8$, $q = 1{,}5$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać liczbę 65?

6. Oblicz sumę, wiedząc, że kolejne składniki sumy to wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Ile wyrazów ma ten ciąg?

   a) $60\frac{3}{4} + 81 + 108 + \ldots + 256$ b) $40 - 20 + 10 - 5 + \ldots + \frac{5}{8}$

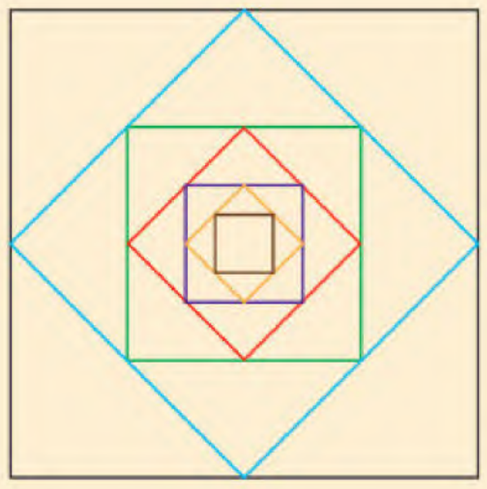
7. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: a_1, a_n oraz S_n. Oblicz iloraz q i n.

   a) $a_1 = \frac{1}{8},\ a_n = 2,\ S_n = 1\frac{3}{8}$ b) $a_1 = 7\frac{1}{9},\ a_n = 54,\ S_n = 147\frac{7}{9}$

8. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 2,8. Wiedząc, że pierwszy wyraz jest równy $\frac{2}{5}$, oblicz iloraz tego ciągu.

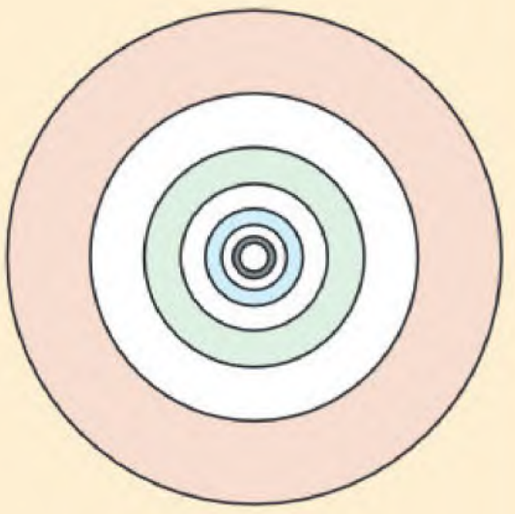
9. Ciąg geometryczny (a_n) ma cztery wyrazy, których suma jest równa 255. Średnia arytmetyczna wyrazów środkowych tego ciągu jest równa 30. Wyznacz wyrazy tego ciągu.

10. Kwadrat K_1 ma bok o długości 8 cm.
    Środki boków kwadratu K_1 są wierzchołkami kwadratu K_2.
    Środki kwadratu K_2 są wierzchołkami kwadratu K_3 itd.
    Oblicz sumę:
    a) obwodów b) pól
    kwadratów $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7$.



D 11. Budujemy łamaną z tysiąca odcinków. Pierwszy odcinek ma długość 18 cm, a długość każdego następnego odcinka stanowi $\frac{2}{3}$ długości poprzedniego odcinka. Wykaż, że łamana ma długość mniejszą od 54 cm.

D 12. Rysunek obok przedstawia cztery pierścienie, wyznaczone przez osiem współśrodkowych kół. Promień największego koła jest równy r. Promień drugiego koła stanowi $\frac{2}{3}$ promienia największego koła, promień trzeciego stanowi $\frac{2}{3}$ promienia drugiego koła, itd. Wykaż, że suma pól czterech pierścieni jest równa $\frac{9\pi r^2}{13} \cdot \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^8\right]$.



D 13. Dany jest ciąg dwunastu kół, z których każde kolejne ma promień o 25% dłuższy od promienia poprzedniego koła. Wykaż, że suma obwodów kół o numerach nieparzystych stanowi 80% sumy obwodów kół o numerach parzystych.

D 14. Wykaż, nie używając kalkulatora, że liczba 99 980 001 jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

D 15. Wykaż, że liczba $\underbrace{111\ldots1}_{\text{10 cyfr}}0\underbrace{888\ldots8}_{\text{10 cyfr}}9$ jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne

Przykład 1.

Wykażemy, że jeśli liczby x, y, z są liczbami rzeczywistymi, różnymi od zera, i ciąg (xy, y^2, z^2) jest arytmetyczny, to ciąg $(y, z, 2y - x)$ jest geometryczny.

Z założenia ciąg (xy, y^2, z^2) jest ciągiem arytmetycznym. Na podstawie twierdzenia 2. ze str. 89 mamy:

$$y^2 = \frac{xy + z^2}{2}, \quad \text{stąd} \quad 2y^2 = xy + z^2 \quad \text{zatem}$$

$$y(2y - x) = z^2$$

Kwadrat wyrazu środkowego ciągu $(y, z, 2y - x)$ jest iloczynem wyrazów skrajnych. Zatem na podstawie twierdzenia 3. ze str. 106 ten ciąg jest ciągiem geometrycznym.

Ćwiczenie 1. Wykaż, że jeśli trzy liczby rzeczywiste a, b, c w podanej kolejności tworzą jednocześnie ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny, to $a = b = c$.

Przykład 2.

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (b_n) jest równy 40. Wiedząc, że ciąg $(14, b_2 - 8, b_3)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym, obliczymy iloraz ciągu (b_n).

Ciąg $(14, b_2 - 8, b_3)$ jest arytmetyczny tylko wtedy, gdy

$$b_2 - 8 = \frac{14 + b_3}{2} \quad \text{czyli} \quad 14 + b_3 = 2b_2 - 16 \quad \text{więc}$$

$$b_3 - 2b_2 + 30 = 0.$$

Niech q będzie ilorazem ciągu geometrycznego (b_n). Wówczas $b_2 = 40q$, $b_3 = 40q^2$ i powyższa równość przyjmuje postać

$$40q^2 - 80q + 30 = 0$$

$$4q^2 - 8q + 3 = 0 \qquad \Delta = 16, \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad q = \frac{3}{2}$$

1) Jeśli $q=\frac{1}{2}$, to ciąg arytmetyczny ma postać (14, 12, 10). Jest to ciąg malejący o różnicy 2.

2) Jeśli $q=\frac{3}{2}$, to mamy ciąg arytmetyczny (14, 52, 90), który jest ciągiem rosnącym, więc nie spełnia warunków zadania.

Iloraz ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{2}$.

Przykład 3.

Trzy różne liczby tworzą ciąg geometryczny, a ich suma jest równa 21. Wyznaczymy te liczby, wiedząc, że pierwsza z nich jest jednocześnie pierwszym, druga – drugim, a trzecia – szóstym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego.

Niech ciąg (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy r. Ciąg (a_1, a_2, a_6) jest ciągiem geometrycznym, w którym

$a_2 = a_1 + r$, $a_6 = a_1 + 5r$ i $r \neq 0$ – bo liczby a_1, a_2, a_6 są różne.

Na podstawie twierdzenia 3. ze str. 106 mamy:

$a_2^2 = a_1 \cdot a_6$, czyli

$(a_1 + r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 5r)$.

Z warunków zadania wiemy również, że

$a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 5r) = 21$, czyli

$3a_1 + 6r = 21$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} (a_1 + r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 5r) \\ 3a_1 + 6r = 21 \end{cases} \quad \text{więc} \quad \begin{cases} a_1^2 + 2a_1 r + r^2 = a_1^2 + 5a_1 r \\ a_1 + 2r = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 r - r^2 = 0 \quad / : r \\ a_1 + 2r = 7 \end{cases}$$

Pierwsze równanie można podzielić stronami przez r, bo $r \neq 0$.

$$\begin{cases} 3a_1 - r = 0 \\ a_1 + 2r = 7 \end{cases} \quad \text{skąd otrzymujemy} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 3 \end{cases}$$

Obliczamy pozostałe dwa wyrazy ciągu geometrycznego.

$a_2 = 1 + 3 = 4$ $a_6 = 1 + 5 \cdot 3 = 16$

Liczby tworzące ciąg geometryczny to: 1, 4, 16.

Przykład 4.

O nieskończonym ciągu (x_n) wiadomo, że $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{20} = 480$ oraz ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 4^{x_n}$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 16. Obliczymy x_1.

1) Pokażemy, że ciąg (x_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 16, zatem

$a_{n+1} = 16 \cdot a_n$ – z definicji ciągu geometrycznego

Z określenia ciągu (a_n) mamy

$a_n = 4^{x_n}$ stąd $a_{n+1} = 4^{x_{n+1}}$

Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej *n* otrzymujemy:

$4^{x_{n+1}} = 16 \cdot 4^{x_n} \quad / : 4^{x_n}$

$4^{x_{n+1} - x_n} = 4^2$ – z własności potęg: $a^m : a^n = a^{m-n}$, jeśli $a \neq 0$

$x_{n+1} - x_n = 2$

To znaczy, że ciąg (x_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 2.

2) Obliczamy x_1. Wiemy, że

$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{20} = 480$ oraz $x_{20} = x_1 + 19 \cdot 2 = x_1 + 38$.

Wówczas

$\frac{x_1 + (x_1 + 38)}{2} \cdot 20 = 480 \quad / : 10$ – suma początkowych dwudziestu wyrazów ciągu arytmetycznego

$2x_1 + 38 = 48$ skąd $x_1 = 5$

Pierwszy wyraz ciągu (x_n) jest równy 5.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Ciąg $(x, y, 4)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $(4, x, y)$ jest ciągiem geometrycznym. Oblicz x, y.
2. Ciąg $(1, a, b)$ jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg $\left(b-5, 2\sqrt{6}, 3a\right)$ jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz a i b.
3. Trzy liczby, których suma jest równa 51, tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Jeśli liczbę środkową zmniejszymy o 9, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz ciąg arytmetyczny.
4. Trzy liczby tworzą malejący ciąg arytmetyczny, a ich suma jest równa 12. Jeśli pierwszy wyraz tego ciągu zwiększymy o 2, a drugi zmniejszymy o 1, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz ciąg geometryczny.

5. Trzeci, czwarty i piąty wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego o różnicy 4. Wyznacz ciąg geometryczny. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

6. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 35. Wyrazy: pierwszy, drugi i trzeci tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz ciąg geometryczny.

7. Pierwszy, czwarty i trzynasty wyraz nieskończonego rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n), w podanej kolejności, są trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n). Wiedząc, że ich suma jest równa 39, wyznacz wyraz ogólny ciągu (a_n) oraz wyraz ogólny ciągu (b_n).

8. W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), wyraz dwunasty jest o 36 mniejszy od wyrazu trzeciego. Średnia arytmetyczna wyrazu czwartego, szóstego i jedenastego jest równa 12.
   a) Wyznacz ciąg (a_n).
   b) Wiedząc dodatkowo, że dla pewnej liczby naturalnej dodatniej k liczby a_k, a_{k+2}, a_{k+3} są w danej kolejności trzema początkowymi wyrazami nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n), oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu (b_n).

9. Suma n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 3n^2 - n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Dla pewnej naturalnej liczby k, wyrazy a_k, a_{3k}, a_{10k+2} są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz liczbę k oraz iloraz ciągu geometrycznego.

D 10. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 3, to ciąg (b_n) zdefiniowany wzorem $b_n = 5^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 125.

D 11. Dany jest nieskończony ciąg (a_n). Wykaż, że jeśli ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = 3^{a_n}$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $\sqrt{3}$, to ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $\frac{1}{2}$.

12. Suma dziesięciu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (x_n) jest równa 145. Ciąg (a_n) – określony wzorem $a_n = 3^{x_n}$, gdzie $n \geqslant 1$ – jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 27. Oblicz x_1.

D 13. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, $b \neq 0$ oraz ciąg $(a, b, 3)$ jest arytmetyczny i ciąg $(a, b, a + b + 3)$ jest geometryczny, to $a + b = 2{,}4$.

D 14. Trzy różne liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny (a, b, c). Wykaż, że jeśli ciąg (a, c, b) jest geometryczny, to $a - c = 6b$.

Lokaty pieniężne i kredyty bankowe

W tym temacie omówimy dwa sposoby naliczania odsetek, występujące przy różnych operacjach finansowych. Jednym z nich jest oprocentowanie proste – zwane procentem prostym; drugim oprocentowanie złożone – zwane procentem składanym.

Procent prosty

Procent prosty to rodzaj oprocentowania polegający na tym, że roczne odsetki obliczane od złożonego wkładu nie podlegają dalszemu oprocentowaniu w kolejnych latach. To znaczy odsetki z poprzednich okresów nie zwiększają włożonego kapitału, od którego nalicza się odsetki w kolejnych okresach.

Załóżmy, że w pewnym banku roczne oprocentowanie lokat wynosi $p\%$, a lokatę trwającą n lat można założyć na procent prosty. Niech kapitał początkowy na tej lokacie wynosi K_0. W lokacie założonej na procent prosty odsetki po każdym roku oszczędzania są stałe i wynoszą $p\% \cdot K_0$, czyli $\frac{p}{100} \cdot K_0$.

Wartość lokaty:

– po pierwszym roku oszczędzania jest równa: $K_0 + 1 \cdot \frac{p}{100} \cdot K_0$

– po dwóch latach oszczędzania jest równa: $K_0 + 2 \cdot \frac{p}{100} \cdot K_0$

– po trzech latach oszczędzania jest równa: $K_0 + 3 \cdot \frac{p}{100} \cdot K_0$

.....

– po n latach oszczędzania wynosi: $K_0 + n \cdot \frac{p}{100} \cdot K_0$

Wartość kapitału K_n po n latach oszczędzania na procent prosty wyraża się wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right),$$

gdzie K_0 – początkowa wartość kapitału, $p\%$ – roczne oprocentowanie lokaty.

Jeśli bank jest zobowiązany do odliczania podatku od dochodów kapitałowych, wówczas od naliczonych odsetek potrąca kwotę podatku. Na przykład, po uwzględnieniu podatku wynoszącego 19% dochodów, kapitał końcowy na lokacie na procent prosty po n latach oszczędzania będzie wynosił $K_0\left(1 + n \cdot \frac{0{,}81p}{100}\right)$.

Przykład 1.

Pan Jan założył lokatę w wysokości 10 000 zł na procent prosty. Roczne oprocentowanie tej lokaty jest równe 6%. Obliczymy, jaka kwota będzie na lokacie po pięciu latach oszczędzania, jeśli:

a) pominiemy podatek od dochodów kapitałowych

b) uwzględnimy podatek od dochodów kapitałowych w wysokości 19%.

Ad a) Mamy:

$K_0 = 10\,000$ zł, $p = 6$, $n = 5$

$K_5 = 10\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}06) = 10\,000 \cdot 1{,}3 = 13\,000$ (zł)

Jeśli pominiemy podatek, to po pięciu latach oszczędzania na lokacie będzie 13 000 zł.

Ad b) Po uwzględnieniu podatku w wysokości 19% otrzymujemy:

$$K_5 = 10000 \cdot \left(1 + 5 \cdot \frac{0{,}81 \cdot 6}{100}\right) = 10\,000 \cdot 1{,}243 = 12\,430 \text{ (zł)}$$

Jeśli uwzględnimy 19-procentowy podatek, to po pięciu latach oszczędzania na lokacie będzie 12 430 zł.

Ćwiczenie 1. Pani Monika założyła lokatę na procent prosty, wpłacając na trzy lata kwotę 15 000 zł. Roczne oprocentowanie tej lokaty wynosiło 4%. Oblicz wartość lokaty po trzech latach oszczędzania, jeśli:

a) nie uwzględnimy podatku od dochodów kapitałowych

b) uwzględnimy 20-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

UWAGA: Bank może nam zaproponować umowę, w której odsetki doliczane są po krótszym okresie oszczędzania niż rok. Jeśli np. bank dolicza odsetki:

– co pół roku, to roczne oprocentowanie lokaty (p%) dzieli się przez dwa, a po pół roku do początkowej kwoty K_0 dolicza się odsetki w wysokości $\frac{p}{2 \cdot 100} \cdot K_0$

– co kwartał, to roczne oprocentowanie lokaty dzieli się przez cztery, a po kwartale do początkowej kwoty K_0 dolicza się odsetki w wysokości $\frac{p}{4 \cdot 100} \cdot K_0$.

Przykład 2.

Obliczymy, jaka kwota będzie na lokacie na procent prosty po osiemnastu miesiącach oszczędzania, jeśli kapitał początkowy jest równy 20 000 zł, roczne oprocentowanie lokaty wynosi 8%, a odsetki są dopisywane co kwartał. Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.

Wiemy, że $K_0 = 20\,000$ zł, $p = 8$. Okres oszczędzania jest równy 18 miesięcy, czyli 6 kwartałów. Odsetki są dopisywane do kwoty początkowej sześć razy, stąd $n = 6$. Mamy:

$$K_6 = 20\,000 \cdot \left(1 + 6 \cdot \frac{8}{4 \cdot 100}\right) = 20\,000 \cdot 1{,}12 = 22\,400 \text{ (zł)}$$

Ćwiczenie 2. Oblicz, jaka kwota będzie na lokacie założonej na procent prosty po 2,5 roku oszczędzania, jeśli kapitał początkowy jest równy 10 000 zł, roczne oprocentowanie lokaty wynosi 6%, a odsetki są dopisywane co pół roku. Uwzględnij 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

Procent składany

Procent składany to rodzaj oprocentowania polegający na tym, że odsetki z jednego okresu oszczędzania są doliczane do kapitału początkowego i wraz z tym kapitałem są podstawą do naliczania odsetek w następnym okresie oszczędzania. Doliczanie odsetek do lokaty nazywa się **kapitalizacją odsetek**. Czas, po którym dolicza się odsetki, nazywamy **okresem kapitalizacji**.

Załóżmy, że w banku można założyć lokatę na procent składany, z roczną kapitalizacją odsetek. Jeśli kapitał początkowy jest równy K_0, roczne oprocentowanie wynosi p%, to wartość lokaty

– po pierwszym roku jest równa : $K_1 = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1$

– po dwóch latach jest równa: $K_2 = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$

– po trzech latach jest równa: $K_3 = K_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$

.....

– po n latach wynosi: $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Wartość kapitału K_n po n latach oszczędzania na procent składany z roczną kapitalizacją odsetek wyraża się wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

gdzie K_0 – początkowa wartość kapitału, p% – roczne oprocentowanie lokaty.

Podatek dochodowy odlicza się po każdej kapitalizacji odsetek. Jeśli na przykład wysokość tego podatku jest równa 19%, to po każdej kapitalizacji odsetek do lokaty dopisuje się kwotę odsetek pomniejszoną o 19%, czyli kwotę równą 81% naliczonych odsetek. Wówczas wartość kapitału na lokacie z roczną kapitalizacją odsetek po n latach oszczędzania będzie równa $K_0 \cdot \left(1+0{,}81 \cdot \frac{p}{100}\right)^n$.

Bank ma w swojej ofercie także lokaty odnawialne, trwające krócej niż rok. Po okresie trwania takiej lokaty klient może ją zakończyć i wypłacić pieniądze lub pozostawić środki na kolejny taki sam okres.

Załóżmy, że klient wpłacił kwotę K_0 na dwumiesięczną lokatę odnawialną. Następnie złożone środki były na lokacie przez czternaście miesięcy. Wówczas bank kapitalizował odsetki co dwa miesiące, czyli siedem razy. Jeśli roczne oprocentowanie lokaty wynosiło $p\%$, to oprocentowanie dwumiesięczne było równe $\frac{2}{12} \cdot p\%$, czyli $\frac{p\%}{6}$.

Po czternastu miesiącach kapitał końcowy na tej lokacie wynosił $K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{6 \cdot 100}\right)^7$.

Gdyby klient wpłacił kwotę K_0 na miesięczną lokatę odnawialną o rocznym oprocentowaniu $p\%$, to po czternastu miesiącach wartość lokaty wynosiłaby $K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{12 \cdot 100}\right)^{14}$.

Podsumujmy nasze rozważania.

Niech K_0 – zainwestowana kwota na procent składany
n – liczba wszystkich okresów kapitalizacji odsetek
$p\%$ – roczna stopa procentowa
m – liczba okresów kapitalizacji odsetek w ciągu roku
K_n – kapitał końcowy po n okresach oszczędzania, bez potrącania podatku

Wówczas:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^n$$

Przykład 3.

W banku założono lokatę w wysokości 10 000 zł na procent składany. Roczne oprocentowanie tej lokaty jest równe 6%. Jaką kwotę wypłaci bank po wygaśnięciu lokaty, jeśli została ona założona:

a) na 5 lat, z roczną kapitalizacją odsetek,
b) na 1,5 roku, z kwartalną kapitalizacją odsetek?

Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.

Ad a) Jeśli lokata trwa pięć lat, a kapitalizacja odsetek odbywa się po każdym roku oszczędzania, to mamy pięć okresów kapitalizacji odsetek. Korzystamy ze wzoru

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^n$$, gdzie $K_0 = 10\,000$, $p = 6$, $m = 1$, $n = 5$

Zatem

$$K_5 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 10\,000 \cdot 1{,}06^5 \approx 13\,382{,}26 \text{ (zł)}$$

Po 5 latach oszczędzania bank wypłaci kwotę 13 382,26 zł.

Ad b) Rok składa się z czterech kwartałów. Półtora roku oszczędzania to sześć kwartałów. W tym przypadku mamy sześć okresów kapitalizacji odsetek.

$K_0 = 10\,000$, $p = 6$, $m = 4$, $n = 6$, zatem

$$K_6 = 10000 \cdot \left(1 + \frac{6}{4 \cdot 100}\right)^6 = 10000 \cdot 1{,}015^6 \approx 10934{,}43 \text{ (zł)}$$

Po 1,5 roku oszczędzania bank wypłaci kwotę 10 934,43 zł.

Ćwiczenie 3. Wykonaj obliczenia dotyczące przykładu 3., uwzględniające 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

Porównajmy dwa sposoby naliczania odsetek od tej samej kwoty początkowej: na procent prosty i na procent składany. Załóżmy, że kapitał początkowy jest równy 10 000 zł, oprocentowanie lokaty wynosi 6%, a odsetki liczone są co miesiąc. W tabeli poniżej przedstawiony został zysk z inwestycji w dwóch przypadkach:

1) lokata jest założona na procent prosty

2) lokata jest założona na procent składany, z miesięczną kapitalizacją odsetek.

Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.

	Czas trwania inwestycji					
	5 lat	10 lat	15 lat	20 lat	25 lat	30 lat
Zysk z inwestycji na procent prosty	3 000 zł	6 000 zł	9 000 zł	12 000 zł	15 000 zł	18 000 zł
Zysk z inwestycji na procent składany	3 488 zł	8 194 zł	14 541 zł	23 102 zł	34 650 zł	50 225 zł

Zauważ, że przy ustalonej rocznej stopie procentowej lokaty na wysokość odsetek wpływa sposób oprocentowania. Lokata na procent składany przynosi większy zysk niż lokata założona na procent prosty. Różnica jest tym większa, im dłuższy jest czas trwania inwestycji i im większa jest częstotliwość kapitalizacji odsetek na lokacie założonej na procent składany.

Przykład 4.

Bank oferuje lokatę terminową z kwartalną kapitalizacją odsetek i roczną stopą procentową równą 5,2%. Jaki kapitał wystarczy zainwestować, aby po trzech latach

a) mieć na lokacie 5 000 zł b) otrzymać 5 000 zł zysku?

Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.

Ad a) Korzystamy ze wzoru $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^n$, gdzie

$p = 5{,}2$ $m = 4$ $n = 3 \cdot 4 = 12$ $K_{12} = 5\,000$ zł

K_0 – wielkość szukana

Mamy:

$$5\,000 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{5{,}2}{4 \cdot 100}\right)^{12}$$

$$5\,000 = K_0 \cdot (1 + 0{,}013)^{12}$$

$$5\,000 = K_0 \cdot (1{,}013)^{12}$$

$$K_0 = \frac{5\,000}{(1{,}013)^{12}}$$

$$K_0 \approx 4\,282{,}10 \text{ (zł)}$$

Wystarczy zainwestować 4 283 zł.

Ad b) Zysk to różnica między kwotą zainwestowaną i kwotą otrzymaną po okresie oszczędzania na lokacie. Zatem

$$\text{Zysk} = K_{12} - K_0 = K_0 \cdot (1{,}013)^{12} - K_0 = K_0\left(1{,}013^{12} - 1\right)$$

$$5\,000 = K_0\left(1{,}013^{12} - 1\right)$$

$$5\,000 \approx K_0 \cdot 0{,}1677$$

$$K_0 \approx 29\,815{,}15 \text{ (zł)}$$

Aby po trzech latach oszczędzania na tej lokacie mieć zysk w wysokości 5 000 zł, wystarczy zainwestować 29 816 zł.

Kredyty bankowe

Przykład 5.

Pewna firma wzięła w banku kredyt w wysokości 100 000 zł. Kredyt ma być spłacony w czterech równych ratach kapitałowo-odsetkowych, po pierwszym, drugim, trzecim i czwartym kwartale. Oprocentowanie kredytu wynosi 20% w skali roku. Obliczymy wysokość raty i łączną wartość zapłaconych odsetek.

Oznaczmy wartość jednej spośród czterech równych rat kapitałowo-odsetkowych przez K_R. Każda rata składa się z części kredytu i odsetek naliczonych od tej części kredytu. Niech kolejne cztery części kredytu mają oznaczenia K_1, K_2, K_3, K_4. Te części są różne, bowiem odsetki od nich będą kapitalizowane w różnych okresach.

Pierwsza rata zostanie spłacona po pierwszym kwartale. W tej racie mamy część kredytu K_1 oraz odsetki naliczone dla części K_1 za jeden kwartał. Te odsetki to czwarta część rocznego oprocentowania kwoty K_1, więc są równe 5% kwoty K_1.

$$K_R = K_1 \cdot (1+0{,}05), \quad \text{stąd}$$

$$K_1 = \frac{K_R}{1+0{,}05}$$

Druga rata zostanie spłacona po dwóch kwartałach. Do części kredytu K_2 doliczamy odsetki z dwóch kwartałów, które są kapitalizowane dwukrotnie – po pierwszym i po drugim kwartale. Zatem

$$K_R = K_2 \cdot (1+0{,}05)^2, \text{ stąd}$$

$$K_2 = \frac{K_R}{(1+0{,}05)^2}$$

Podobnie obliczamy trzecią i czwartą część kredytu:

$$K_3 = \frac{K_R}{(1+0{,}05)^3} \qquad \text{oraz} \qquad K_4 = \frac{K_R}{(1+0{,}05)^4}$$

Suma kwot K_1, K_2, K_3 i K_4, to wysokość udzielonego firmie kredytu.

Zatem

$$\frac{K_R}{1+0{,}05} + \frac{K_R}{(1+0{,}05)^2} + \frac{K_R}{(1+0{,}05)^3} + \frac{K_R}{(1+0{,}05)^4} = 100\,000$$

$$K_R \cdot \left(\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}05^2} + \frac{1}{1{,}05^3} + \frac{1}{1{,}05^4} \right) = 100\,000$$

W nawiasie mamy sumę czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = q = \frac{1}{1{,}05} = \frac{20}{21}$. Stąd

$$K_R = \frac{100\,000}{S_4}, \text{ gdzie } S_4 = \frac{20}{21} \cdot \frac{1-\left(\frac{20}{21}\right)^4}{1-\frac{20}{21}} \approx 3{,}54595$$

$$K_R \approx 28\,201{,}19 \text{ (zł)}$$

Firma spłaci kredyt wraz z odsetkami w czterech ratach – po 28 201,19 zł każda rata. Łącznie wpłaci do banku kwotę 112 804,76 zł. Odsetki od udzielonego kredytu są równe 12 804,76 zł.

Przykład 6.

Pewna firma wzięła w banku kredyt w wysokości 100 000 zł. Kredyt ma zostać spłacony w czterech ratach malejących, odpowiednio po pierwszym, drugim, trzecim i czwartym kwartale. Oprocentowanie kredytu wynosi 20% w skali roku. Obliczymy wysokość każdej raty i łączną wartość zapłaconych odsetek.

W malejących ratach kapitałowo-odsetkowych, część kredytu w każdej racie jest taka sama. Raty różnią się wysokością naliczonych odsetek. Każda rata zawiera odsetki od niespłaconej części kredytu. W tym przypadku mamy cztery raty. W skład pierwszej raty K_1 wchodzą: 25 000 zł i kwartalne odsetki od niespłaconego kredytu, czyli 5% ze 100 000 złotych. Mamy:

$$K_1 = 25\,000 + 5\% \cdot 100\,000 = 25\,000 + 5000 = 30\,000$$

Po spłaceniu jednej czwartej części kredytu pozostał niespłacony kredyt w wysokości 75 000 zł, od którego po drugim kwartale naliczamy kwartalne odsetki. Niech K_2 oznacza drugą ratę kredytu. Wówczas:

$$K_2 = 25\,000 + 5\% \cdot 75\,000 = 25\,000 + 3750 = 28\,750$$

Podobnie obliczamy drugą i trzecią ratę.

$$K_3 = 25\,000 + 5\% \cdot 50\,000 = 25\,000 + 2500 = 27\,500$$

$$K_4 = 25\,000 + 5\% \cdot 25\,000 = 25\,000 + 1250 = 26\,250$$

Kolejne raty są odpowiednio równe 30 000 zł, 28 750 zł, 27 500 zł, 26 250 zł. Wartość odsetek jest równa 5000 + 3750 + 2500 + 1250 (zł), czyli 12 500 zł.

Zauważ, że spłacając kredyt w ratach malejących jak w powyższym przykładzie, firma zapłaci mniejsze odsetki niż w przypadku, gdy raty są równe jak w przykładzie 5. Jednak pierwsza rata w przykładzie 6. jest większa, niż pierwsza rata w przykładzie 5. To znaczy, że system kredytowy w przykładzie 6. wymaga od kredytobiorcy większych możliwości spłat początkowych rat, niż system opisany w przykładzie 5.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Pan Michał założył w banku lokatę na procent prosty w wysokości 8000 zł. Oprocentowanie roczne lokaty jest równe 10%, a odsetki od lokaty są dopisywane co pół roku. Oblicz, jaką kwotę będzie miał pan Michał na tej lokacie po sześciu latach oszczędzania, jeśli:
   a) pominiemy podatek od dochodów kapitałowych
   b) uwzględnimy 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

2. Pani Joanna założyła lokatę na procent prosty, której oprocentowanie roczne było równe 12%. Oblicz, po ilu latach pani Joanna będzie miała na lokacie kwotę o 60% większą od kwoty zainwestowanej, jeśli uwzględnimy 18-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

3. Kapitał początkowy na lokacie na procent prosty jest równy 40 000 zł. Roczne oprocentowanie tej lokaty wynosi 9%. Oblicz, jaka kwota będzie na tej lokacie:
   a) po 9 miesiącach oszczędzania, jeśli odsetki są naliczane co miesiąc,
   b) po 15 miesiącach oszczędzania, jeśli odsetki są naliczane co kwartał.
   Uwzględnij 20-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

4. Pani Marta wpłaciła na lokatę 20 000 zł na procent prosty. Roczne oprocentowanie lokaty wynosiło 8%. Bank dopisywał odsetki co kwartał.
   a) Oblicz, jaka kwota była na lokacie po czterech latach oszczędzania. Uwzględnij 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.
   b) Jak długo trzeba byłoby oszczędzać, aby przy powyższych warunkach stan lokaty się podwoił?

5. Z okazji 10. urodzin Kasi dziadkowie założyli lokatę w banku, wpłacając 5000 zł na procent składany, z półroczną kapitalizacją odsetek. Roczne oprocentowanie tej lokaty jest równe 4%. Jaką kwotę otrzyma Kasia z chwilą ukończenia 18 lat? Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

6. Na kwartalną lokatę odnawialną wpłacono kwotę 50 000 zł. Oprocentowanie roczne lokaty wynosi 8%. Odsetki są kapitalizowane po każdym kwartale. Oblicz, jaka kwota będzie na tej lokacie po upływie:
   a) 10 kwartałów b) dwóch lat c) dziewięciu miesięcy.
   Uwzględnij 19-procentowy podatek od dochodów kapitałowych.

7. Panowie Marek i Darek założyli trzyletnie lokaty na procent składany w różnych bankach. Każdy z nich wpłacił na lokatę taką samą kwotę. Pan Marek wybrał bank, w którym roczne oprocentowanie lokaty wynosi 6%, a kapitalizacja odsetek odbywa się co pół roku. Pan Darek wybrał bank, w którym oprocentowanie lokaty wynosi 5%, a odsetki są naliczane co miesiąc. Który z panów wybrał korzystniejszą ofertę? Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.

8. Pani Barbara wpłaciła pewną kwotę na trzyletnią lokatę z roczną kapitalizacją odsetek. Roczne oprocentowanie tej lokaty wynosiło 5%. Po trzech latach oszczędzania pani Barbara otrzymała 23 152,50 zł. Oblicz kwotę, którą pani Barbara wpłaciła na lokatę. Pomiń podatek od dochodów kapitałowych.

9. Pani Maria założyła w banku lokatę w wysokości 30 000 zł na okres 4 lat, z kwartalną kapitalizacją odsetek. W dniu wygaśnięcia lokaty pani Maria otrzymała 48 141,19 zł. Oblicz, jakie było oprocentowanie roczne tej lokaty. Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.

10. Przedsiębiorca wziął w banku kredyt w wysokości 40 000 zł. Kredyt będzie spłacał co dwa miesiące w sześciu równych ratach. Oprocentowanie roczne kredytu wynosi 12%. Oblicz:
    a) wysokość raty
    b) wartość zapłaconych odsetek.

11. Pani Ada wzięła w banku kredyt w wysokości 20 000 zł. Kredyt ten ma spłacać co kwartał w czterech malejących ratach. Roczne oprocentowanie kredytu wynosi 16%. Oblicz:
    a) wysokość każdej raty
    b) wartość zapłaconych odsetek.

12. Sklep sprzedaje zestawy kina domowego za gotówkę po 9500 zł oraz na kredyt, spłacany co kwartał w czterech ratach po 2500 zł, przy czym pierwszą ratę należy spłacić po trzech miesiącach od daty zakupu. Pan Jerzy ma na koncie oszczędnościowym 9500 zł, którego roczne oprocentowanie wynosi 12%, z kwartalną kapitalizacją odsetek. Która forma zakupu kina domowego będzie dla pana Jerzego bardziej korzystna?

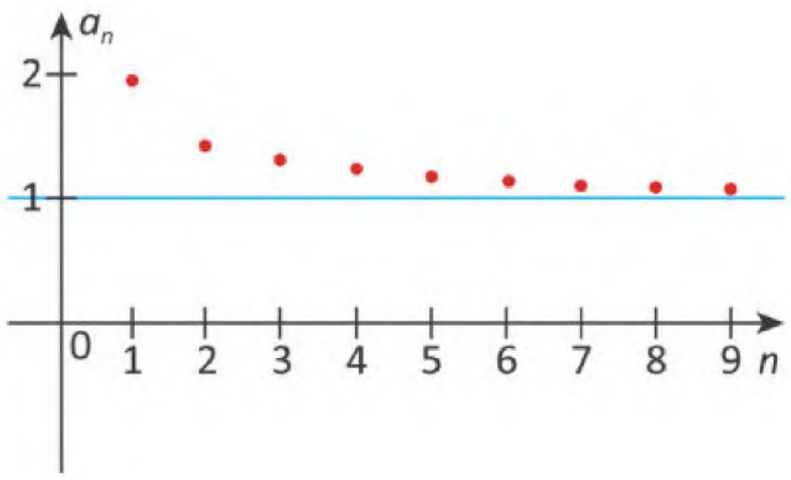
Granica ciągu liczbowego

Ćwiczenie 1. Zapisz za pomocą nierówności z wartością bezwzględną zdanie: „Odległość liczby x od liczby -2 na osi liczbowej jest mniejsza od 3”. Następnie rozwiąż tę nierówność.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż nierówność $\left|\frac{-23}{n+1}\right|<5$, jeśli $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Przeanalizujmy wykresy trzech nieskończonych ciągów (a_n), (b_n), (c_n).

a) $a_n=\frac{n+1}{n}$

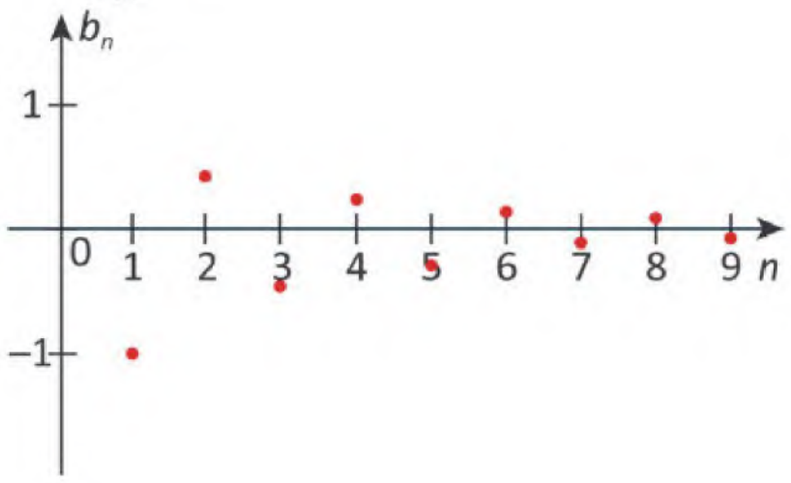


Ciąg (a_n)

$$\left(2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, \ldots\right)$$

Zauważ, że im większa jest liczba n, tym wyrazy a_n znajdują się bliżej liczby 1.

b) $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$

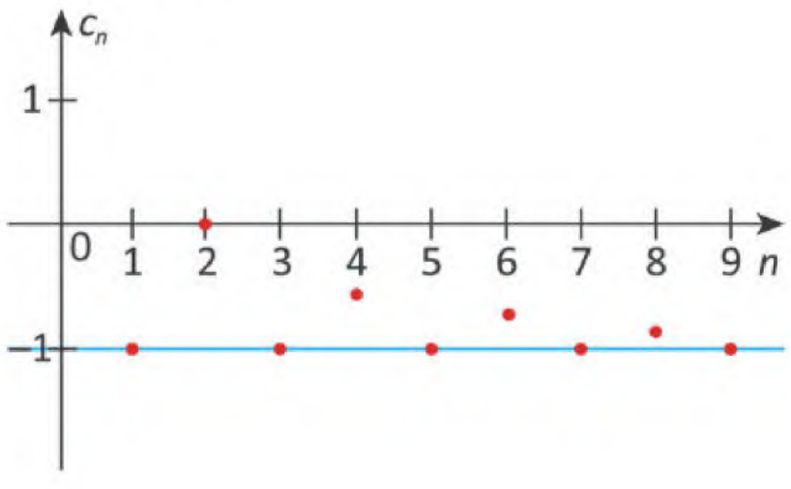


Ciąg (b_n)

$$\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots\right)$$

Kolejne wyrazy ciągu (b_n) zbliżają się do liczby 0. Im większa jest liczba n, tym odległość między wyrazem b_n, a liczbą 0 jest mniejsza.

c) $c_n=\frac{1-(-1)^{n+1}}{n}-1$



Ciąg (c_n)

$$\left(-1, 0, -1, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{2}{3}, -1, \ldots\right)$$

Wyrazy c_n o numerach nieparzystych są równe -1, a wyrazy c_n o numerach parzystych zbliżają się do liczby -1 wraz ze wzrostem wartości n.

Możemy intuicyjnie stwierdzić, że wyrazy ciągu (a_n) dążą do liczby 1, wyrazy ciągu (b_n) dążą do liczby 0, wyrazy ciągu (c_n) dążą do liczby –1. Zapisujemy krótko:

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$.

Liczbę, do której dążą wyrazy nieskończonego ciągu, nazywamy **granicą ciągu**.

W matematyce słowo granica oznaczamy symbolem „lim", który jest skrótem łacińskiego słowa *limes* (= *miedza*, *granica*). Zdanie „Granicą nieskończonego ciągu (a_n) jest liczba g", będziemy zapisywać następująco: $\lim a_n = g$.

W przypadku rozważanych trzech ciągów mamy:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} c_n = -1$

Spróbujemy dokładnie określić, kiedy nieskończony ciąg liczbowy ma granicę. Będziemy używać sformułowania „prawie wszystkie wyrazy ciągu".

Jeśli w nieskończonym ciągu (a_n) pominiemy skończoną liczbę wyrazów, to o pozostałych wyrazach powiemy, że stanowią one **prawie wszystkie wyrazy ciągu**. Sformułowanie „prawie wszystkie wyrazy ciągu" oznacza też „**wszystkie wyrazy ciągu od pewnego miejsca**".

Przykład 1.

a) Prawie wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+1}{n}$, znajdują się w odległości mniejszej niż $\frac{1}{7}$ od liczby 1, czyli spełniają nierówność $|a_n - 1| < \frac{1}{7}$ – bowiem tylko wyrazy a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 jej nie spełniają.

$$\underbrace{2, 1\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{3}, 1\tfrac{1}{4}, 1\tfrac{1}{5}, 1\tfrac{1}{6}, 1\tfrac{1}{7}}_{\text{skończona liczba wyrazów}}, \underbrace{1\tfrac{1}{8}, 1\tfrac{1}{9}, 1\tfrac{1}{10}, 1\tfrac{1}{11}, 1\tfrac{1}{12}, \ldots}_{\text{prawie wszystkie wyrazy ciągu}}$$

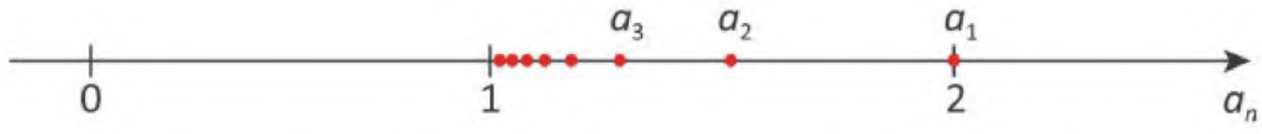
b) Prawie wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu (b_n), gdzie $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, spełniają nierówność $|b_n - 0| < \frac{1}{5}$ – bowiem tylko pięć początkowych wyrazów jej nie spełnia:

$$-1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, \ldots$$

c) Nierówność $|c_n - (-1)| < 0{,}15$ spełniają wszystkie wyrazy ciągu (c_n) oprócz wyrazów: c_2, c_4, c_6, c_8, c_{10}, c_{12}, czyli wszystkie wyrazy od wyrazu c_{13}.

Dalsze rozważania przeprowadzimy dla ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \geqslant 1$.

Zaznaczamy wyrazy tego ciągu na osi liczbowej.



Oznaczmy literą grecką ε (epsilon) pewną liczbę dodatnią. Sprawdzimy, które wyrazy ciągu (a_n) są oddalone od liczby 1 o mniej niż ε – czyli dla jakich wartości n spełniona jest nierówność $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Mamy:

$$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n+1-n}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Jeśli na przykład dodatnia liczba ε jest równa $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ lub $\frac{1}{10000}$ – to nierówność $|a_n - 1| < \varepsilon$ jest spełniona przez wszystkie wyrazy ciągu o numerach większych odpowiednio od liczby 10, 100, 1000, 10 000 (te liczby będziemy oznaczać symbolem δ – delta).

W każdym przypadku nierówność $|a_n - 1| < \varepsilon$ jest spełniona przez prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n). To znaczy, że dla liczby dodatniej ε prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) znajdują się w odległości mniejszej niż ε od liczby 1.

Definicja 1.

Liczba g jest **granicą** nieskończonego ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) znajdują się w odległości mniejszej niż ε od liczby g.

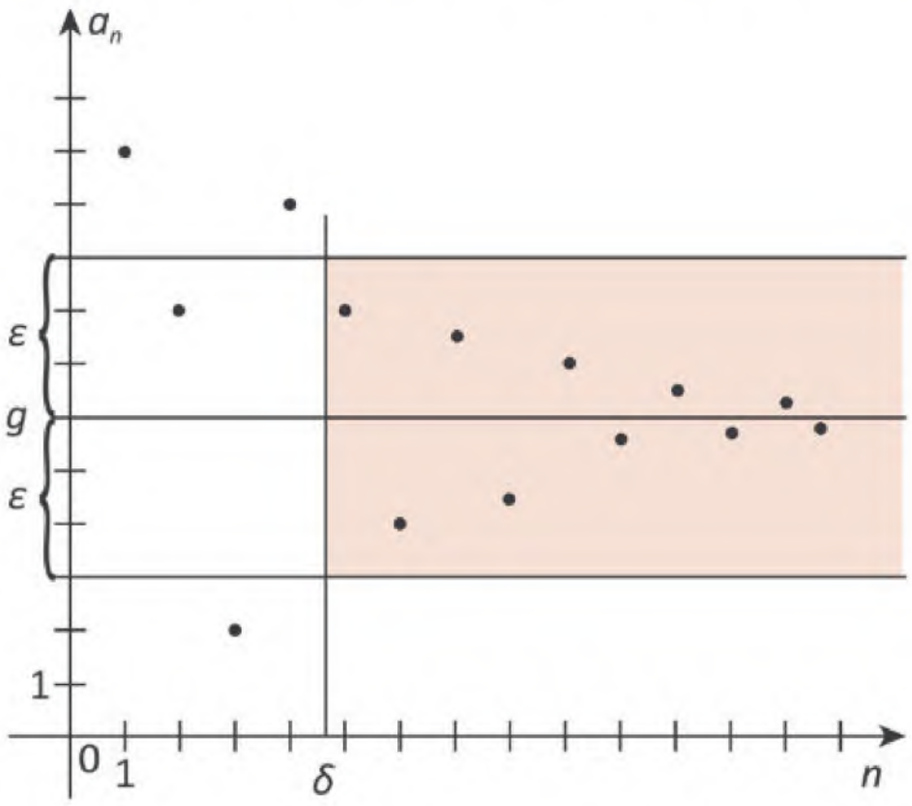
Powyższa definicja jest równoważna definicji 1'.

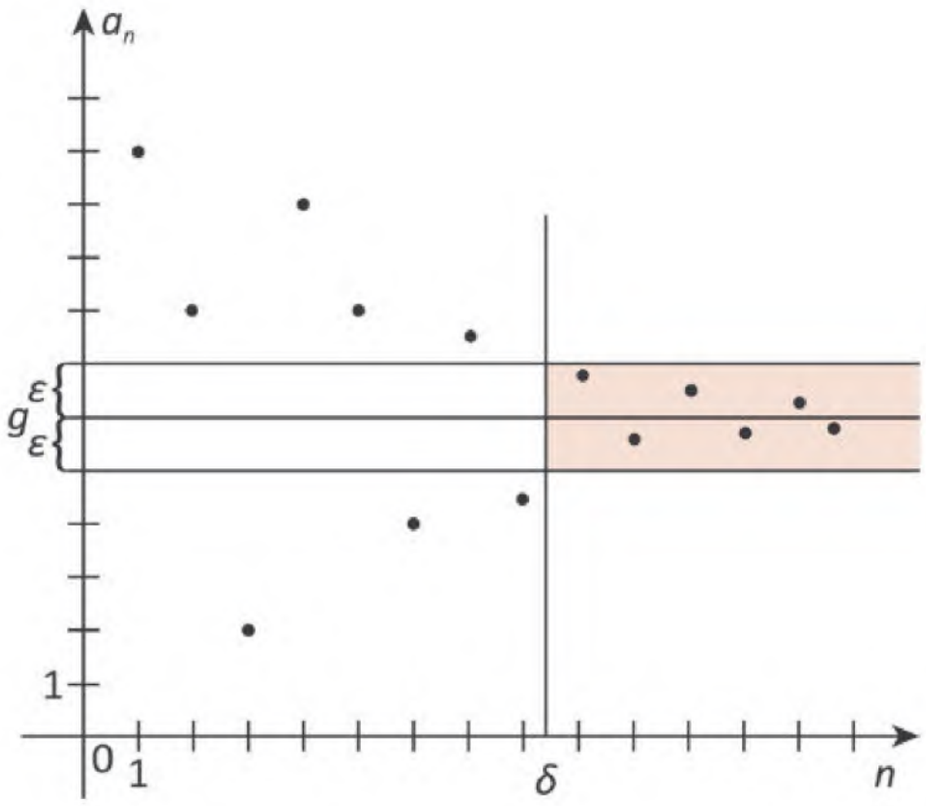
Definicja 1'.

Liczba g jest **granicą** nieskończonego ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

Zapis symboliczny: $\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n>\delta} |a_n - g| < \varepsilon$

Liczba δ zależy od tego, jaką wartość ma liczba ε. Najczęściej, im mniejsza jest dodatnia liczba ε, tym większa jest liczba δ.





W przypadku ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$ najprościej jest przyjąć, że $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$.

Przeanalizuj poniższą tabelę danych dla tego ciągu.

ε	$\delta = \frac{1}{\varepsilon}$	wyrazy ciągu (a_n) spełniające nierówność $\lvert a_n - 1\rvert < \varepsilon$
$\frac{1}{7}$	7	$a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, \ldots$
0,01	100	$a_{101}, a_{102}, a_{103}, a_{104}, a_{105}, a_{106}, a_{107}, \ldots$
$\frac{17}{120000}$	7058	$a_{7059}, a_{7060}, a_{7061}, a_{7062}, a_{7063}, \ldots$
$\frac{1}{1000000}$	1 000 000	$a_{1000001}, a_{1000002}, a_{1000003}, a_{1000004}, \ldots$

Ćwiczenie 3. Wskaż taką liczbę δ, dla której każdy wyraz nieskończonego ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{n+1}{n}$, mający numer większy od δ, jest oddalony od liczby 1 o mniej niż ε, jeśli: a) $\varepsilon = 0{,}0013$ b) $\varepsilon = 0{,}000125$.

Ciąg nieskończony, który ma granicę będącą liczbą rzeczywistą, nazywamy **ciągiem zbieżnym**. W dowodzeniu zbieżności nieskończonych ciągów często stosujemy szacowanie nierówności.

Przykład 2.

Wykażemy, że nieskończony ciąg (c_n) o wyrazie ogólnym $c_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n} - 1$ jest zbieżny do liczby –1.

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Mamy pokazać, że istnieje taka liczba δ, że wszystkie wyrazy ciągu o numerach większych od δ spełniają nierówność $|c_n - (-1)| < \varepsilon$. Mamy:

$$|c_n - (-1)| = \left|\frac{1-(-1)^{n+1}}{n} - 1 - (-1)\right| = \left|\frac{1-(-1)^{n+1}}{n}\right| .$$

Zauważamy, że $\left|\frac{1-(-1)^{n+1}}{n}\right| \leqslant \frac{2}{n}$ dla dowolnej liczby naturalnej n, $n \geqslant 1$.
Otrzymujemy:

$$\frac{2}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Jeśli dla każdej liczby dodatniej ε przyjmiemy $\delta = \frac{2}{\varepsilon}$, to dla dowolnej liczby naturalnej n większej od δ otrzymamy: $|c_n - (-1)| < \varepsilon$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Przykład 3.

Wykażemy, że ciąg nieskończony (b_n), $b_n = \frac{5n^2+3}{n^2+2n}$ jest zbieżny do liczby 5.

Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas:

$$|b_n - 5| = \left|\frac{5n^2+3}{n^2+2n} - 5\right| = \left|\frac{5n^2+3-5n^2-10n}{n^2+2n}\right| = \left|\frac{3-10n}{n^2+2n}\right| = \frac{10n-3}{n^2+2n}$$

Szacujemy otrzymany ułamek:

$$\frac{10n-3}{n^2+2n} < \frac{10n}{n^2+2n} = \frac{10}{n+2} < \frac{10}{n}, \text{ czyli } |b_n - 5| = \left|\frac{5n^2+3}{n^2+2n} - 5\right| < \frac{10}{n}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Wówczas:

$$\frac{10}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{10}{\varepsilon}$$

Dla każdej liczby dodatniej ε przyjmiemy $\delta = \frac{10}{\varepsilon}$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej *n* większej od δ spełniona jest nierówność $\left|\frac{5n^2+3}{n^2+2n} - 5\right| < \varepsilon$,

co kończy dowód.

Na koniec pokażemy, że ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Twierdzenie 1.

Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Dowód: Załóżmy przeciwnie: niech ciąg nieskończony (a_n) będzie zbieżny do granic *a* i *b*, gdzie $a > b$. Weźmy $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, wówczas $\varepsilon > 0$. Zgodnie z definicją granicy ciągu:

– prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $|a_n - a| < \varepsilon$, czyli $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Wówczas prawie wszystkie wyrazy ciągu a_n są większe od liczby $a - \varepsilon$, gdzie $a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

– prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) spełniają nierówność $|a_n - b| < \varepsilon$, czyli $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$. Wtedy prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od liczby $b + \varepsilon$, gdzie $b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz, które wyrazy nieskończonego ciągu (a_n), gdzie $a_n = \frac{3n}{2n-1}$, są oddalone od liczby $1\frac{1}{2}$ o mniej niż $\frac{1}{50}$.

2. Nieskończony ciąg (c_n), gdzie $c_n = \frac{2+5n}{3n+1}$, jest zbieżny do liczby $1\frac{2}{3}$.

Ile wyrazów ciągu (c_n) nie spełnia nierówności $\left|c_n - 1\frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, jeśli $\varepsilon = \frac{1}{3600}$?

3. Granicą nieskończonego ciągu (a_n), określonego wzorem $a_n = \frac{-n}{3n+5}$, jest liczba $-\frac{1}{3}$. Oblicz, ile wyrazów ciągu (a_n) nie spełnia warunku $\left|a_n + \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$, jeśli:

a) $\varepsilon = \frac{1}{8}$ b) $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

4. Nieskończony ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = \frac{1}{2n^2}$. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną δ, tak aby każdy wyraz ciągu (b_n) o numerze n, $n > \delta$, był oddalony od liczby 0 o mniej niż 0,002.

5. Nieskończony ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{4n}{5n+1}$. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną δ taką, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) o numerach n, $n > \delta$, spełniają nierówność $\left|a_n - \frac{4}{5}\right| < \frac{1}{60}$.

D 6. Ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$. Wykaż na podstawie definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

D 7. Korzystając z definicji granicy ciągu, wykaż, że:

a) liczba 4 jest granicą nieskończonego ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{4n+3}{n}$

b) nieskończony ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = \frac{4+(-1)^n}{5n+1}$ jest zbieżny do 0.

D 8. Wykaż, że:

a) jeśli $c_n = \frac{1-2n}{3n+4}$ dla $n \in \mathbf{N}_+$, to $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\frac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-5}{1+3n+2n^2} = 1$.

Obliczanie granic ciągów zbieżnych

Podstawowe twierdzenia, ułatwiające obliczanie granic ciągów zbieżnych

Twierdzenie 1.

Jeśli nieskończony ciąg (a_n) jest ciągiem stałym i $a_n = a$, to ciąg (a_n) jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Twierdzenie 2.

Jeśli a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to ciąg nieskończony (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{a}{n}$ jest zbieżny do 0.

Twierdzenie 3.

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $a_n \geqslant 0$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Przykład 1.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+6n}{n(n+2)}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n^2+n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{5n^2+3}{n^2+2n}}$

Mamy:

Ad a) $\frac{3n^2+6n}{n(n+2)} = \frac{3\,\cancel{n(n+2)}^{\,1}}{\cancel{n(n+2)}_{\,1}} = 3$ i $\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3$ tw.1, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+6n}{n(n+2)} = 3$

Ad b) $\frac{2n+2}{n^2+n} = \frac{2\,\cancel{(n+1)}^{\,1}}{\cancel{n(n+1)}_{\,1}} = \frac{2}{n}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ tw.2, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n^2+n} = 0$

Ad c) Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n

$$\frac{5n^2+3}{n^2+2n}>0 \qquad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3}{n^2+2n}=5$$ – z przykładu 3. ze str. 135

więc z twierdzenia 3. wynika, że $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{5n^2+3}{n^2+2n}}=\sqrt{5}$.

Ćwiczenie 1. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2}{n^2+3n}}$.

Działania na granicach ciągów zbieżnych

Ciągi nieskończone można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Dane są dwa nieskończone ciągi (a_n) i (b_n). Ciąg (c_n) jest:

- sumą ciągów (a_n) i (b_n), jeśli $c_n = a_n + b_n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$
- różnicą ciągów (a_n) i (b_n), jeśli $c_n = a_n - b_n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$
- iloczynem ciągów (a_n) i (b_n), jeśli $c_n = a_n \cdot b_n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$
- ilorazem ciągu (a_n) przez (b_n), jeśli $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ i $b_n \neq 0$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Przykład 2.

Dane są dwa nieskończone ciągi (a_n) i (b_n), gdzie $a_n = 6n^2$ oraz $b_n = \frac{3}{n}$. Znajdziemy ogólny wyraz ciągu będącego:

a) sumą ciągów a_n i b_n b) iloczynem ciągów a_n i b_n.

Ad a) Niech ciąg (c_n) będzie sumą ciągów (a_n) i (b_n). Wówczas

$a_1 = 6 \cdot 1^2 = 6$, $b_1 = \frac{3}{1} = 3$, $c_1 = a_1 + b_1 = 6 + 3 = 9$

$a_2 = 6 \cdot 2^2 = 24$, $b_2 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $c_2 = a_2 + b_2 = 24 + 1\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$

Ogólnie $c_n = 6n^2 + \frac{3}{n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Ad b) Jeśli ciąg (d_n) jest iloczynem ciągów (a_n) i (b_n), to

$$d_n = 6n^2 \cdot \frac{3}{n} = 18n$$

Ogólny wyraz ciągu (d_n) jest następujący: $d_n = 18n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Ćwiczenie 2. Niech ciągi (c_n) i (d_n) będą zdefiniowane następująco:

$c_n = a_n - b_n$ oraz $d_n = \frac{a_n}{b_n}$, gdzie $a_n = n^2 - 9$, $b_n = n^2 + 3n$ i $n \in \boldsymbol{N}_+$.

a) Wyznacz ogólny wyraz ciągu (c_n) i ogólny wyraz ciągu (d_n).

b) Oblicz c_7 i d_8.

c) Czy istnieje ciąg, będący ilorazem ciągu (b_n) przez ciąg (a_n)?

Jeśli ciąg jest sumą, różnicą czy iloczynem ciągów zbieżnych, to ten ciąg też jest ciągiem zbieżnym. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. *O działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżych*

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to istnieją granice ciągów: $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ oraz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ – przy dodatkowym założeniu, że $b \neq 0$ i $b_n \neq 0$ dla każdej liczby naturalnej dodatniej n – i prawdziwe są następujące równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

Udowodnimy punkt a): Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zatem istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, spełnione są nierówności:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{oraz} \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mamy:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ czyli}$$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon .$$

W oszacowaniu powyżej wykorzystaliśmy własność wartości bezwzględnej

$|x+y| \leqslant |x|+|y|$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$.

Pokazaliśmy, że dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba δ taka, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, spełniona jest nierówność $\left|(a_n+b_n)-(a+b)\right|<\varepsilon$. To dowodzi, że

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$$

Pozostałe punkty twierdzenia przyjmiemy bez dowodu.

Przykład 3.

Obliczymy granice:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{4n^2+5}$.

Ad a) Ciąg o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n}+2$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, jest sumą dwóch ciągów zbieżnych: ciągu o wyrazie ogólnym $-$ oraz ciągu stałego o wyrazach równych 2. Mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty}2=2$$

Na mocy twierdzenia 1a) istnieje granica nieskończonego ciągu o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n}+2$. Obliczamy tę granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}2=0+2=2 \ .$$

Ad b) Wiemy, że $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$. Zatem istnieje granica ciągu o wyrazie ogólnym $\frac{6}{n^2}$ równym $\frac{6}{n}\cdot\frac{1}{n}$.

Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

Ad c) Dzielimy licznik i mianownik ułamka $\frac{2n^2-3n}{4n^2+5}$ przez liczbę n w najwyższej potędze, jaka występuje w mianowniku. W tym przypadku dzielimy przez n^2:

$$\frac{2n^2-3n}{4n^2+5}=\frac{2-\frac{3}{n}}{4+\frac{5}{n^2}}$$

Nieskończone ciągi o wyrazach ogólnych 2, $\frac{3}{n}$, 4, $\frac{5}{n^2}$ są zbieżne oraz $4+\frac{5}{n^2}\neq 0$ dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{4n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{4+\frac{5}{n^2}}=\frac{2-0}{4+0}=\frac{1}{2}$$

(pod $\frac{3}{n}$ jest 0, pod $\frac{5}{n^2}$ jest 0)

Ćwiczenie 3. Oblicz granice. Wskaż twierdzenia, z których korzystasz.

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{2+5n}{2n-1}$ b) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9n}{4n^2+1}}$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-12n^3}{4n^3+5n+8}$

Przykład 4.

Obliczymy granice: a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+1}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

Ad a) W liczniku ułamka wyłączamy n^2 spod znaku pierwiastka (czyli najwyższą potęgę liczby n jaka występuje pod pierwiastkiem), a w mianowniku wyłączamy n:

$$\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+1}=\frac{\sqrt{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}}{n+1}=\frac{n\cdot\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}$$

Obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{2-0}}{1+0}=\sqrt{2}\quad\text{więc}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+1}=\sqrt{2}$$

Ad b) Wyrażenie $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ mnożymy i dzielimy przez wyrażenie $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}$.

Następnie w liczniku stosujemy wzór $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

Teraz dzielimy licznik i mianownik wyrażenia przez $\sqrt{n}$:

$$\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}+1}=\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n}}+1}=\frac{\sqrt{\frac{4}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{1}+1}=0 \quad \text{więc} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=0$$

Ćwiczenie 4. Oblicz granice: a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+8}+2}{3n-4}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+7n}\right)$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są różne od 2 i ciąg (a_n) jest zbieżny do 2. Oblicz:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+5}{a_n-1}$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+a_n-6}{a_n-2}$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3-8}{3a_n-6}$.

2. Wiedząc, że $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-2\frac{1}{2}$ oraz $a_n+b_n\neq 0$ gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$, oblicz:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-4b_n\right)$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\cdot b_n}{a_n+b_n}$ c) $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^3-\frac{43}{25}b_n^3\right)$.

3. Dane są nieskończone ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach ogólnych:

$a_n=\frac{2n}{3n+1}$, $b_n=\frac{n+5}{4n+2}$. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

a) $c_n=a_n-b_n$ b) $d_n=a_n\cdot b_n$ c) $g_n=\frac{a_n}{b_n}$

4. Oblicz granice, wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n}-1\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\frac{12}{n+5}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-1}{3-2n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{1-4n^2}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(n-4)}{2+8n+9n^2}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{2n+1}\right)^3$

5. Oblicz granice, wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(6+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)\cdot\left(3-\frac{n+2}{n^2}\right)\right]$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+4n-1}{(3n-1)(4+n)(1-5n)}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+5n^2}{3n^2+8n+5}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+5n^2-2n^3}{(9n^2-1)(n^2+8)}$.

6. Oblicz granice, wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{9}{n^2}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9n-7}{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+8}{\sqrt{9n^2+1}}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{5}{4n^2}+3}}{\sqrt{\frac{9n^2+4n}{n^2}}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+4}{8n+1}}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+27}}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{25n^4+3}}$.

7. Oblicz granice, wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n-3}-\sqrt{2n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4n-\sqrt{16n^2+5n}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$.

8. Wyznacz wartości parametru k, gdzie $k\in\boldsymbol{R}$, dla których ciąg o wyrazie ogólnym $a_n=\frac{\left(k^2-k\right)n^2+n}{5n^2+4}$, $n\in\boldsymbol{N}_+$, ma granicę równą:

a) $1\frac{1}{5}$ b) 0.

Wybrane własności ciągów zbieżnych

Udowodnimy twierdzenie, które jest szczególnie istotne w przypadku nieskończonych ciągów geometrycznych.

Twierdzenie 1.

Jeśli $|q|<1$, to ciąg nieskończony (a_n), gdzie $a_n = q^n$, jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Dowód: Jeśli $q = 0$, to twierdzenie jest oczywiste.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $q \neq 0$ oraz $|q|<1$. Wówczas $\frac{1}{|q|}>1$. Oznaczmy $x=\frac{1}{|q|}-1$. Wówczas $x > 0$. Mamy

$$\frac{1}{|q|}=1+x, \text{ stąd } \frac{1}{|q|^n}=(1+x)^n$$

Szacujemy prawą stronę równości. Korzystamy z nierówności Bernoullego (zobacz str. 115).

$$(1+x)^n > 1+x\cdot n > x\cdot n$$

Zatem

$$\frac{1}{|q|^n} > x\cdot n \text{ oraz } x\cdot n > 0, \text{ stąd}$$

$$|q|^n < \frac{1}{x\cdot n}$$

Niech $\varepsilon > 0$ oraz $\delta = \frac{1}{x\cdot\varepsilon}$. Wówczas dla $n > \delta$ mamy:

$$|q|^n < \frac{1}{x\cdot n} < \frac{1}{x\cdot\delta}$$

Ponieważ $\frac{1}{x\cdot\delta} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x\cdot\varepsilon}{1} = \varepsilon$, więc

$|q|^n < \varepsilon$ czyli $|q^n - 0| < \varepsilon$, co kończy dowód.

Przykład 1.

Korzystając z ostatniego twierdzenia, mamy:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, bo $\left|\frac{1}{2}\right|<1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(-0{,}99)^n = 0$, bo $|-0{,}99|<1$

Przykład 2.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 81 \\ a_{n+1} = \dfrac{-a_n}{3}, n \geqslant 1 \end{cases}$$

Obliczymy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, bowiem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{3}, \text{ gdzie } n \in \boldsymbol{N}_+$$

Zatem ogólny wyraz ciągu (a_n) jest następujący:

$$a_n = 81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Obliczamy granicę ciągu (a_n):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[-243\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right] = -243 \cdot 0 = 0$$

Jeśli iloraz q nieskończonego ciągu geometrycznego spełnia warunek $|q| < 1$, to ten ciąg jest zbieżny do 0.

Przykład 3.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7 \cdot 3^n}{9^{n-1}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 \cdot 8^{n+1} + 11}{4 \cdot 8^n - 3^n}$.

Ad a) Obliczamy

$$\frac{7 \cdot 4^n}{9^{n-1}} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 4^n}{9^n} = 63 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \text{skąd} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{7 \cdot 4^n}{9^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left[63 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] = 63 \cdot 0 = 0$$

Ad b) Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez 8^n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 8^{n+1} + 11}{4 \cdot 8^n - 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 8 + 11 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n}{4 - \left(\frac{3}{8}\right)^n} = \frac{5 \cdot 8 + 11 \cdot 0}{4 - 0} = 10$$

Ćwiczenie 1. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{7-4^{n+1}}{2^{2n}}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wykaż, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -4$.

Twierdzenie 2.

Jeśli $a > 0$, to ciąg nieskończony (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt[n]{a}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$ i $n > 1$, jest zbieżny oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Ćwiczenie 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5\cdot 4^n}$.

Zastosowanie twierdzenia o trzech ciągach

Twierdzenie 3. *O trzech ciągach*

Jeśli dane są trzy ciągi nieskończone (a_n), (b_n), (c_n), $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$ oraz istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ prawdziwa jest nierówność

$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Przykład 4.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(n^2+1\right)}{2n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n}$.

Ad a) Zauważ, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest zależność:

$$-1 \leqslant \sin\left(n^2+1\right) \leqslant 1 \quad \text{stąd} \quad \frac{-1}{2n} \leqslant \frac{\sin\left(n^2+1\right)}{2n} \leqslant \frac{1}{2n}$$

Niech $a_n = \frac{-1}{2n}$ i $c_n = \frac{1}{2n}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$. Ciągi (a_n) i (c_n) mają wspólną granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(n^2+1\right)}{2n} = 0$.

Ad b) Zwróć uwagę, że dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwa jest zależność:

$$7^n < 3^n + 5^n + 7^n < 7^n + 7^n + 7^n$$

Jeśli dodatkowo $n \geqslant 2$, to

$$\sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 7^n}$$

czyli

$$7 < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < 7 \cdot \sqrt[n]{3}$$

Niech $a_n = 7$ i $c_n = 7 \cdot \sqrt[n]{3}$ gdzie $n \geqslant 2$. Wówczas ciągi (a_n) i (c_n) mają wspólną granicę:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 7 = 7 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(7 \cdot \sqrt[n]{3}\right) = \lim_{n\to\infty} 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 7 \cdot 1 = 7$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} = 7$.

Ćwiczenie 3. Oblicz granice:

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2\cos(5n-1)}{n^2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

Liczba e

Rozpatrzymy ciąg nieskończony (e_n), gdzie $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Ciąg ten jest zbieżny, a jego granica jest liczbą niewymierną.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045\ldots$$

Granicę ciągu (e_n) oznaczamy literą e. Oznaczenie to wprowadził w 1736 r. szwajcarski matematyk Leonhard Euler.

Liczba *e* ma duże znaczenie w matematyce i w innych naukach. Występuje bowiem w wielu modelach matematycznych opisujących procesy społeczne i przyrodnicze. Dokładniej przedstawimy interpretację liczby e w ekonomii.

Niech bank za roczny depozyt proponuje klientowi 100% zysku.

Jeśli depozyt wynosi 1 zł i następuje roczna kapitalizacja odsetek, to po roku oszczędzania na koncie kwota się podwoi:

1 zł + 1 zł = 2 zł.

Gdyby odsetki były naliczane:

– co pół roku, to po roku byłaby na koncie kwota

$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$ zł, czyli 2,25 zł

– co kwartał, wówczas po roku mielibyśmy kwotę

$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \approx 2,44$ (zł)

– co miesiąc, to po roku mielibyśmy kwotę

$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \approx 2,61$ [zł].

– codziennie, to mielibyśmy po roku oszczędzania kwotę

$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2,71$ [zł].

Gdyby kapitalizacja odsetek odbywała się w sposób ciągły – czyli liczba okresów kapitalizacji dążyłaby do nieskończoności – wówczas po roku mielibyśmy na koncie kwotę równą

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, czyli e zł.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz granice, wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3^n}+1\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{7^n}-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n-1}{1+3^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{4n}+8}{5+16^n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{27^n-7\cdot 8^n}{3^{3n+1}}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(2^{n+3}+3^n\right)\left(2^{n+3}-3^n\right)}{3^{2n+1}+4^n}$.

2. Oblicz granice, wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+5+7+9+\ldots+(2n+1)}{7n^2-3n+1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{4}$.

3. Oblicz granice, wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+3^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n}$

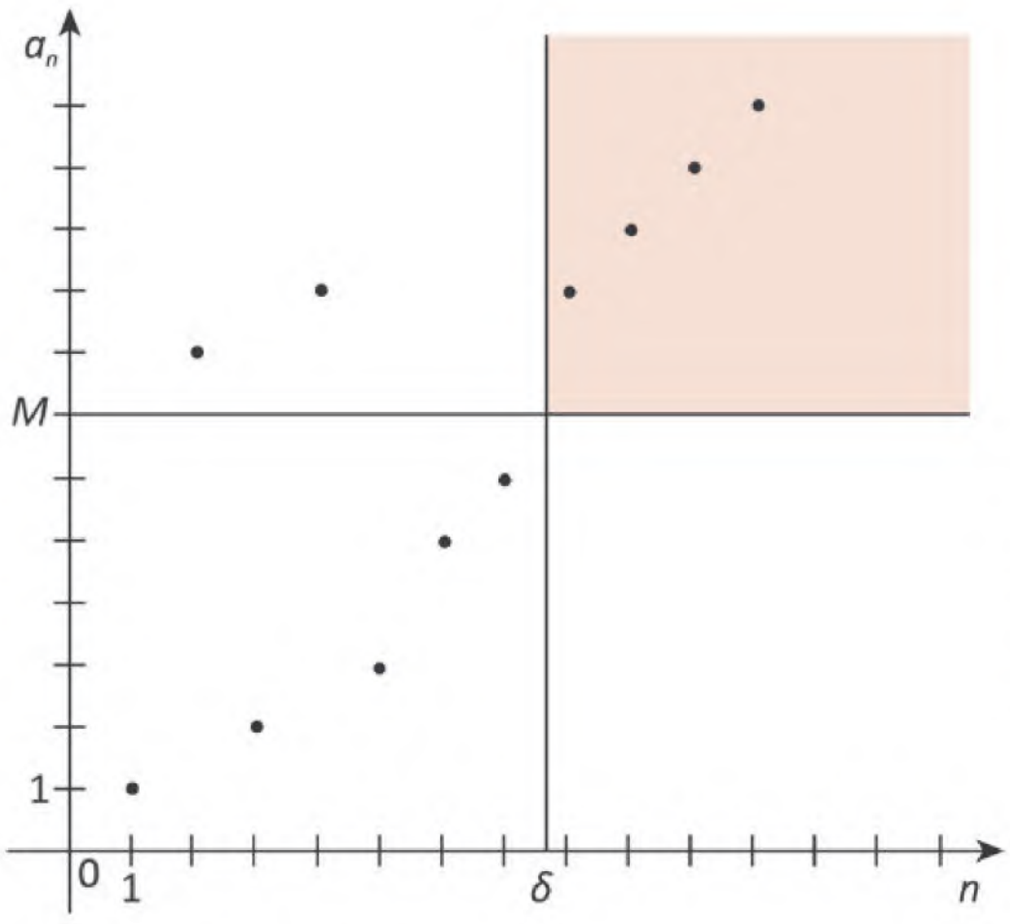
c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos(n+8)}{3n-1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sin\left(2n^2\right)}{4n^2+9}$.

Ciągi rozbieżne do nieskończoności

Powiemy, że ciąg nieskończony jest rozbieżny do $+\infty$ wtedy, gdy jego wyrazy „wzrastają nieograniczenie". Dokładniej mówiąc – prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie wybranej liczby M.

Definicja 1.

Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy **ciągiem rozbieżnym do plus nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, spełniona jest nierówność $a_n > M$.



Zapis symboliczny:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{n>\delta} a_n > M$$

O ciągu rozbieżnym do plus nieskończoności mówimy też, że ten ciąg ma granicę niewłaściwą $+\infty$.

Przykładami ciągów rozbieżnych do plus nieskończoności są ciągi określone wzorami: $a_n = 2n - 1$, $b_n = n^2$, $c_n = 3^n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Przykład 1.

Wykażemy, że $\lim_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$.

Niech M oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Mamy wskazać taką liczbę δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, spełniona jest nierówność $2n - 1 > M$. Mamy

$$2n-1>M \Leftrightarrow 2n>M+1 \Leftrightarrow n>\frac{M+1}{2}$$

Możemy przyjąć, że

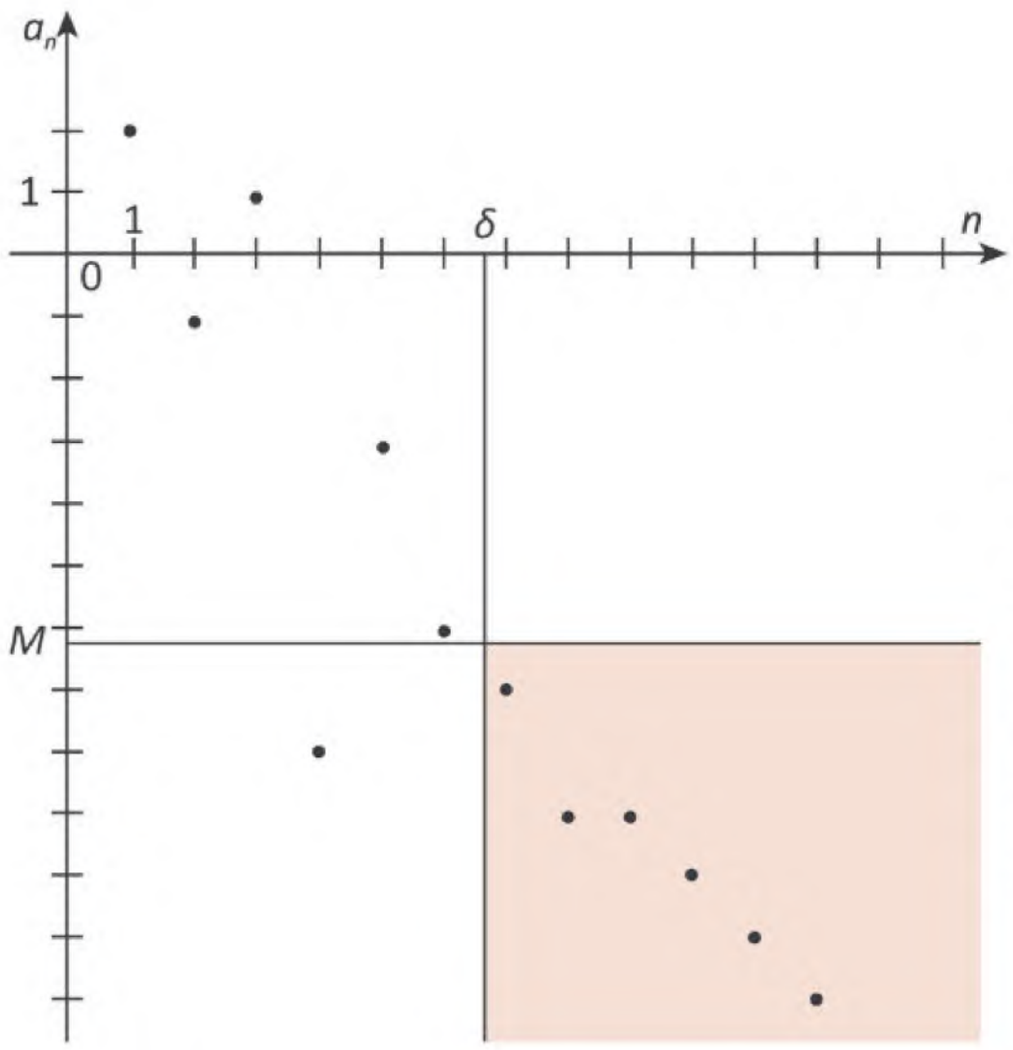
$$\delta=\frac{M+1}{2}$$

Dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, na przykład $\delta = \frac{M+1}{2}$, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, spełniona jest nierówność $2n - 1 > M$.

To dowodzi, że $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1) = +\infty$.

Definicja 2.

Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy **ciągiem rozbieżnym do minus nieskończoności** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, spełniona jest nierówność $a_n < M$.



Zapis symboliczny:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{M}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{n>\delta} a_n < M$$

O ciągu rozbieżnym do minus nieskończoności powiemy również, że ma on granicę niewłaściwą $-\infty$.

Prawie wszystkie wyrazy takiego ciągu są mniejsze od dowolnie wybranej liczby M.

Przykładami ciągów rozbieżnych do minus nieskończoności są ciągi: $a_n = -n$, $b_n = 1 - n^2$, $c_n = -4^n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Przykład 2.

Pokażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(1-n^2) = -\infty$.

Niech M oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Mamy wskazać taką liczbę δ, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, spełniona jest nierówność $1 - n^2 < M$. Mamy

$$1-n^2 < M \Leftrightarrow -n^2 < M-1 \Leftrightarrow n^2 > 1-M$$

Możemy przyjąć, że $\delta = \sqrt{|1-M|}$

Dla każdej liczby M istnieje taka liczba δ, na przykład $\delta = \sqrt{|1-M|}$, że dla każdej liczby naturalnej n większej od δ, spełniona jest nierówność

$n^2 > |1-M|$, więc Korzystamy z własności: $|x| \geqslant x$ dla $x \in \boldsymbol{R}$

$n^2 > 1-M$.

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-n^2\right) = -\infty$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 1. Wykaż z definicji, że: a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-n\right) = -\infty$.

Teraz podamy kilka twierdzeń dotyczących ciągów, które mają granicę niewłaściwą i omówimy na przykładach ich zastosowanie.

Twierdzenie 1.

Jeśli dany jest ciąg nieskończony (a_n), dla którego $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$.

Przykład 3.

Ciąg nieskończony (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n\cdot(-1)^n$ nie ma granicy. Natomiast ciąg o wyrazie ogólnym $b_n = \left|n\cdot(-1)^n\right|$ ma granicę niewłaściwą:

$$\lim_{n\to\infty}\left|n\cdot(-1)^n\right| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Wówczas na podstawie twierdzenia 1. mamy: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot(-1)^n} = 0$.

Twierdzenie 2.

Jeśli dany jest ciąg nieskończony (a_n), dla którego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|} = +\infty$.

Przykład 4.

Wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{3n} = 0$. Z twierdzenia 2. wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} 3n = +\infty$.

Ćwiczenie 2. Podaj przykład pokazujący, że nie można opuścić znaku wartości bezwzględnej w tezie twierdzenia 2.

Twierdzenie 3.

Dane są ciągi nieskończone (a_n) i (b_n), dla których $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Wówczas:

1) jeśli $b > 0$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$

2) jeśli $b < 0$, to $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Przykład 5.

Obliczymy granicę $\lim_{n\to\infty}\left(2n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 1\right)$.

Wyłączamy poza nawias najwyższą potęgę n, czyli liczbę n^4.

$$2n^4 - 3n^3 - 2n^2 + 1 = n^4\left(2 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)$$

Wiemy, że $\lim_{n\to\infty} n^4 = +\infty$ oraz $\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right) = 2$.

Z twierdzenia 3. wynika, że $\lim_{n\to\infty}\left[n^4 \cdot \left(2 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)\right] = +\infty$

Ćwiczenie 3. Sformułuj analogiczne twierdzenie do twierdzenia 3. w przypadku, gdy ciągi (a_n) i (b_n) spełniają założenia: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, gdzie $b \neq 0$.

Przykład 6.

Obliczymy granicę: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 + 3n^2 + 1}{9 - 4n}$.

Dzielimy licznik i mianownik przez n. Następnie z licznika wyłączamy przed nawias liczbę n^3.

$$\frac{2n^4 + 3n^2 + 1}{9 - 4n} = \frac{2n^3 + 3n + \frac{1}{n}}{\frac{9}{n} - 4} = \frac{n^3 \cdot \left(2 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)}{\frac{9}{n} - 4}$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)=2$ oraz $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{n}-4\right)=-4$, więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+3n^2+1}{9-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\cdot\left(2+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{9}{n}-4}=-\infty$$

Ćwiczenie 4. Oblicz granice: a) $\lim_{n\to\infty}\left(-6n^3+2n^2-9n\right)$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^2-7}$

Załóżmy teraz, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Zastanowimy się, jaka może być granica ciągu (c_n), jeśli $c_n = a_n \cdot b_n$. W tym celu przeanalizujemy pięć przykładów umieszczonych w poniższej tabeli.

	$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$	$\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right)$
1.	$a_n = n^4$	$b_n = \frac{1}{n}$	$\lim_{n\to\infty}\left(n^4 \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty$
2.	$a_n = n$	$b_n = \frac{1}{n^2}$	$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$
3.	$a_n = n^2$	$b_n = \frac{1}{n^2}$	$\lim_{n\to\infty}\left(n^2 \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$
4.	$a_n = n$	$b_n = \frac{-2}{n}$	$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{-2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(-2) = -2$
5.	$a_n = n^3$	$b_n = \frac{-1}{n}$	$\lim_{n\to\infty}\left(n^3 \cdot \frac{-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-n^2\right) = -\infty$

Z informacji, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ nie można wyciągać wniosków, jaka jest granica $\lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot b_n\right)$.

Ćwiczenie 5. Podaj przykład ciągów (a_n) i (b_n) takich, że $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ i jednocześnie granica ciągu (c_n), gdzie $c_n = a_n - b_n$, jest równa:

a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) -1.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Które wyrazy ciągu nieskończonego (a_n) są większe od liczby M, jeśli:
   a) $a_n = 2n - 500$, $M = 1000$ b) $a_n = n^2 - 6n + 5$, $M = 7$?

2. Które wyrazy ciągu nieskończonego (b_n) są mniejsze od liczby M, jeśli:
   a) $b_n = 71 - 3n^2$, $M = 1$ b) $b_n = \frac{5 - n^4}{n^2}$, $M = -4$?

D 3. Wykaż na podstawie definicji, że:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-4n) = -\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3 - 5) = +\infty$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}(8 - 2n^2) = -\infty$.

4. Wyznacz granice:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}(15n - 2)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-3n)(5+4n)}{3}$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2(n-3)^2 - 4n^2\right]$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}(4n^4 - 3n^3 + 2n^2 - 3)$
   e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n^3-1)^2 - (n^2+1)^3\right]$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{3-n}{3}\cdot\frac{1+n}{5}\right)$.

5. Wyznacz granice:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2 - 3n + 1}{2n + 3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9 - n^4}{3n^2 + 8n + 2}$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n^3 + n^2 + 5n + 8}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-3n)(5-n)(2+7n)}{(1-2n)^3}$
   e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{n+8}\right)$.

6. Wyznacz granice:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{4} - \frac{n+5}{3}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2 - \frac{4n^3 + 6}{2n}\right)$
   c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{n} + \frac{4n + 3n^3}{n^2}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + n - \frac{n^3 + 2n + 1}{n^2}\right)$
   e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{2} - \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}\right]$
   f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+7+10+\ldots+(3n+1)}{2n}$.

Szereg geometryczny

Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem liczbowym. Wyrażenie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

nazywamy sumą częściową szeregu (a_n) i oznaczamy S_n.
Ciąg sum częściowych (S_n) będziemy nazywać **szeregiem liczbowym** o wyrazach a_n i oznaczać

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots$$

Jeśli ciąg sum częściowych (S_n) ma granicę S, czyli

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

to mówimy, że szereg liczbowy jest zbieżny, a liczba S jest sumą tego szeregu. Wówczas zapisujemy

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots$$

W przeciwnym wypadku powiemy, że szereg liczbowy jest rozbieżny.

Przykład 1.

Dany jest szereg liczbowy: $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots$

Obliczymy kilka kolejnych, początkowych sum częściowych tego szeregu:

$$S_1 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$$

$$S_4 = \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

Zauważ, że sumę częściową n składników można zapisać następująco:

$$S_n = \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

Ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

Zatem dany szereg jest zbieżny oraz $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots = \frac{1}{2}$.

Przykład 2.

Szereg $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots$ nazywa się szeregiem harmonicznym. Sumy częściowe tego szeregu wzrastają nieograniczenie, chociaż bardzo powoli. Szereg harmoniczny jest rozbieżny.

W ogólnym przypadku wyznaczenie sumy szeregu lub tylko ustalenie, czy szereg jest zbieżny, bywa zadaniem bardzo trudnym. W szkole zajmujemy się dokładniej **szeregiem geometrycznym**. Jest to szereg utworzony ze wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego.

Przykład 3.

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny o wyrazie ogólnym $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

a) Utworzymy ciąg sum częściowych (S_1, S_2, S_3, ...) tego ciągu.

b) Napiszemy wyraz ogólny S_n ciągu (S_n) i obliczymy $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Ad a) Mamy

$S_1 = a_1 = 1$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1+\frac{1}{3}=1\frac{1}{3}$

$S_3 = S_2 + a_3 = 1\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=1\frac{4}{9}$

$S_4 = S_3 + a_4 = 1\frac{4}{9}+\frac{1}{27}=1\frac{13}{27}$

$S_5 = S_4 + a_5 = 1\frac{13}{27}+\frac{1}{81}=1\frac{40}{81}$

Ciąg sum częściowych ciągu (a_n) jest następujący:

$$\left(1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{4}{9}, 1\frac{13}{27}, 1\frac{40}{81}, \ldots\right).$$

Ad b) Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) wyraża się wzorem:

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, gdzie q jest ilorazem ciągu (a_n).

W naszym przypadku $a_1 = 1$, $q=\frac{1}{3}$, więc

$$S_n = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

Wiemy, że jeśli $|q| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ istnieje oraz

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2} \cdot \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{3}{2} \cdot (1-0) = 1\frac{1}{2}$$

Szereg $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ jest zbieżny. Suma tego szeregu jest równa $1\frac{1}{2}$.

Twierdzenie 1.

Jeśli (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q, który spełnia warunek $|q| < 1$, to szereg geometryczny

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \ldots$$

jest zbieżny i jego sumę wyraża wzór $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Dowód: Przekształcamy wzór na sumę częściową szeregu geometrycznego.

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 \cdot q^n}{1-q}$$

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 \cdot q^n}{1-q} \right)$$

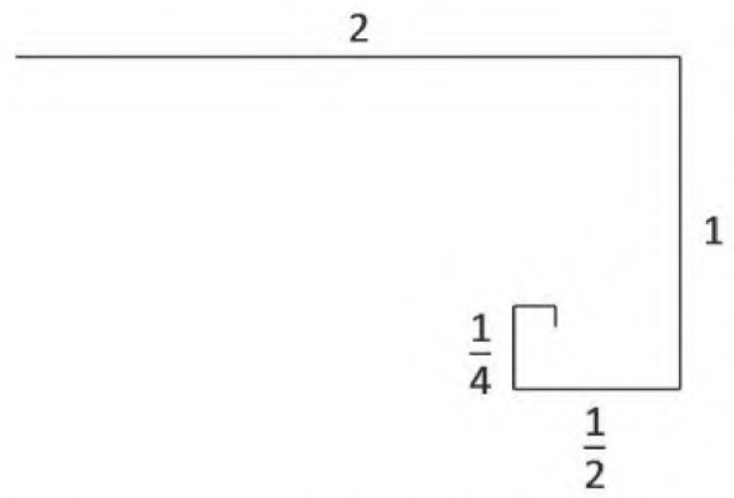
Z założenia $|q| < 1$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 \cdot q^n}{1-q} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - 0 = \frac{a_1}{1-q}$$

Tak więc szereg $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \ldots$ jest zbieżny, a jego suma jest równa $\frac{a_1}{1-q}$, co kończy dowód.

Przykład 4.

Obliczymy długość linii łamanej, zbudowanej z nieskończenie wielu odcinków, z których najdłuższy ma długość 2, a każdy następny odcinek jest o połowę krótszy od poprzedniego odcinka.



Suma długości odcinków tworzy szereg geometryczny. Wprowadzamy oznaczenia:

$$a_1 = 2, \quad q = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, więc szereg geometryczny $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ jest zbieżny.

Obliczamy sumę długości odcinków:

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

Linia łamana ma długość 4.

Ćwiczenie 1. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment linii, składającej się z nieskończonej liczby półokręgów. Promień największego półokręgu ma długość 8, a każdy następny półokrąg ma promień dwa razy krótszy od poprzedniego.



a) Oblicz długość trzech największych półokręgów.

b) Zapisz sumę S_n długości n początkowych półokręgów.

c) Wyznacz długość linii składającej się ze wszystkich półokręgów.

Przykład 5.

Ułamki okresowe:

a) 0,(7) b) 1,1(28)

zapiszemy w postaci ilorazu liczb naturalnych.

Ad a) Ułamek 0,(7) można zapisać tak:

$$0,77777\ldots=\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{7}{10000}+\ldots,$$

czyli w postaci szeregu geometrycznego, w którym $a_1=\frac{7}{10}$ i $q=\frac{1}{10}$.

Ponieważ $|q|<1$, więc szereg geometryczny jest zbieżny. Obliczamy sumę tego szeregu:

$$S=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{7}{9},\ \text{czyli}\ \frac{7}{9}.$$

Zatem $0,(7)=\frac{7}{9}$.

Ad b) W tym przypadku mamy:

$$1,1(28)=1,128282828\ldots=1,1+\left(0,028+0,00028+0,0000028+\ldots\right)$$

Suma $0,028+0,00028+0,0000028+\ldots$ jest szeregiem geometrycznym zbieżnym, bowiem $a_1 = 0,028$, $q = 0,01$, $|q| < 1$. Zatem

$$1,1(28)=1,1+\frac{0,028}{1-0,01}=1,1+\frac{0,028}{0,99}=\frac{11}{10}+\frac{28}{990}=\frac{1089+28}{990}=\frac{1117}{990}$$

Otrzymaliśmy, że $1,1(28)=\frac{1117}{990}$.

Ćwiczenie 2. Przedstaw w postaci ułamka zwykłego liczbę –3,12(5).

Przykład 6.

Rozwiążemy nierówność:

$$x + x(x + 2) + x(x + 2)^2 + x(x + 2)^3 + \ldots \leqslant -3$$

Określamy najpierw dziedzinę nierówności. Lewa strona tej nierówności jest szeregiem geometrycznym, w którym

$$a_1 = x \ \text{i}\ q = x + 2.$$

Aby szereg był zbieżny, musi być spełniony warunek $|q|<1$.

Otrzymujemy:

$$|q|<1 \iff |x+2|<1 \iff x\in(-3,-1)$$

Dziedziną nierówności jest przedział (–3, –1).

Stosujemy wzór na sumę szeregu geometrycznego i otrzymujemy nierówność

$$\frac{x}{1-(x+2)} \leqslant -3$$

Zauważamy, że dla każdej liczby x należącej do przedziału $(-3, -1)$ **mianownik** ułamka po lewej stronie nierówności **jest dodatni**. Zatem obie strony tej nierówności możemy pomnożyć przez mianownik, nie zmieniając znaku nierówności.

$$\frac{x}{1-(x+2)} \leqslant -3 \quad / \cdot\left[1-(x+2)\right] \qquad \wedge \qquad x \in (-3,-1)$$

$$x \leqslant -3+3x+6$$

$$-2x \leqslant 3 \quad / \ :(-2)$$

$$x \geqslant \frac{-3}{2} \qquad \wedge \qquad x \in (-3,-1) \qquad \text{zatem}$$

$$x \in \left\langle -\frac{3}{2}, -1 \right)$$

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left\langle -1\frac{1}{2}, -1 \right)$.

Ćwiczenie 3. Rozwiąż równanie: $\frac{3}{x-1}+\frac{6}{(x-1)^2}+\frac{12}{(x-1)^3}+\ldots=2x-5$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz sumę szeregu geometrycznego:

   a) $9+1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\ldots$

   b) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{2\sqrt{2}+2}+\ldots$

2. Zapisz dane ułamki okresowe w postaci ilorazu liczb całkowitych.

   a) $-0,(63)$ b) $2,2(9)$ c) $0,(102)$ d) $-1,2(34)$

3. Wyznacz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, którego pierwszy wyraz jest równy $1\frac{1}{3}$, a suma wszystkich jego wyrazów jest równa 4. Zapisz ogólny wyraz tego ciągu.

4. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 16. Wiedząc, że iloraz tego ciągu wynosi $\frac{-3}{4}$, oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu (S_n), gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

5. Wyznacz wszystkie wartości x, $x \in \boldsymbol{R}$, dla których szereg geometryczny $1+\frac{x+2}{x-3}+\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2+\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^3+\ldots$ jest zbieżny.

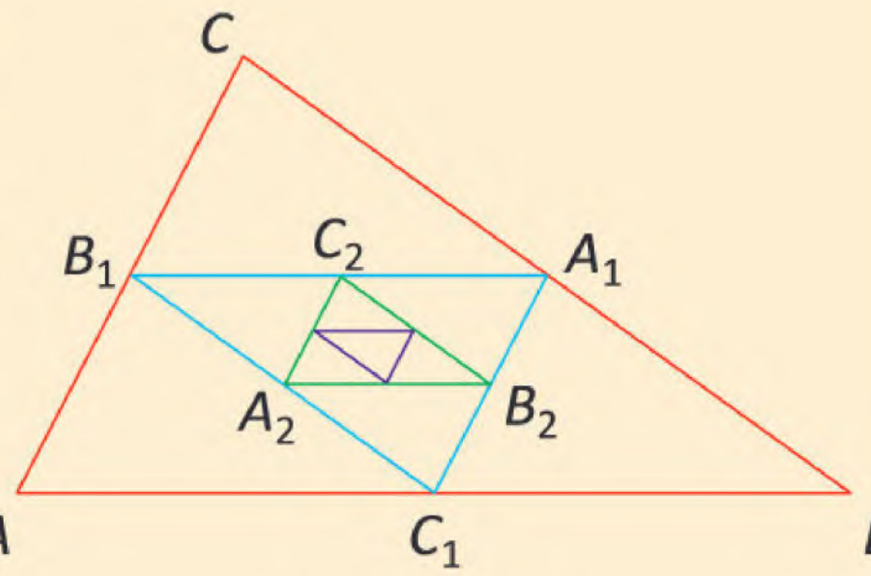
6. Suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego $\left(a, \frac{a}{a-1}, \frac{a}{(a-1)^2}, \ldots\right)$ jest równa $-2{,}4$. Oblicz a.

7. Rozwiąż równanie:
   a) $1 + 3(x-1) + 9(x-1)^2 + \ldots = 2x - 1$
   b) $x+\frac{x^2}{2x+1}+\frac{x^3}{(2x+1)^2}+\ldots=1\frac{1}{2}$

8. Rozwiąż nierówność:
   a) $x+\frac{x}{x-1}+\frac{x}{(x-1)^2}+\ldots<6$
   b) $\frac{1}{x+2}+(x+2)+(x+2)^3+\ldots\leqslant\frac{-8}{15}$

9. Dany jest wzór funkcji f. Naszkicuj wykres tej funkcji i podaj jej zbiór wartości.
   a) $f(x)=\frac{x+4}{x}+\left(\frac{x+4}{x}\right)^2+\left(\frac{x+4}{x}\right)^3+\ldots$
   b) $f(x)=1+\frac{2x}{x+3}+\left(\frac{2x}{x+3}\right)^2+\ldots$
   c) $f(x)=(x+1)+\frac{(x+1)x}{x+2}+\frac{(x+1)x^2}{(x+2)^2}+\ldots$

10. W trójkącie ABC o polu równym 27 cm^2 połączono środki boków i otrzymano trójkąt $A_1B_1C_1$. W trójkącie $A_1B_1C_1$ również połączono środki boków i otrzymano trójkąt $A_2B_2C_2$. Postępując podobnie dalej, otrzymano nieskończony ciąg trójkątów. Oblicz sumę pól wszystkich trójkątów.



D 11. Nieskończony ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym zbieżnym, którego pierwszy wyraz i iloraz są różne od zera. Wykaż, że jeśli dowolny wyraz ciągu (a_n) jest równy siedmiokrotnej sumie wszystkich wyrazów ciągu, które po nim występują, to iloraz ciągu (a_n) jest równy 0,125.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2.

Test

1. Ciąg $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{11}, \ldots\right)$ można opisać wzorem, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$:

A. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ B. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ C. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ D. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

2. Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 7n - 8$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$?

A. siedem B. osiem C. dziewięć D. dziesięć

3. Suma wszystkich całkowitych wyrazów nieskończonego ciągu (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = 6 - \frac{8}{n+1}$ jest równa:

A. 12 B. 7 C. 9 D. 11

4. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3 = 16$ i $a_{10} = -12$. Różnica tego ciągu jest równa:

A. 4 B. –3 C. –4 D. –2

5. W ciągu geometrycznym malejącym (a_n) dane są: $a_4 = \frac{1}{2}$ i $a_2 = \frac{1}{8}$. Iloraz tego ciągu jest równy:

A. –2 lub 2 B. 2 C. –2 D. 0,5

6. Suma ośmiu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu (c_n), gdzie $c_n = 2^{n-5}$, jest równa:

A. 2^4 B. $\frac{255}{16}$ C. $15\frac{7}{8}$ D. $15\frac{3}{4}$

7. Klientka banku wpłaciła kwotę K na dwuletnią lokatę terminową, z kwartalną kapitalizacją odsetek. Oprocentowanie lokaty wynosi 0,12%. Jeżeli uwzględnimy 20-procentowy podatek od dochodów kapitałowych, to po dwóch latach na lokacie będzie kwota:

A. $K \cdot (1 + 0{,}8 \cdot 0{,}03)^8$ B. $K \cdot (1 + 0{,}2 \cdot 0{,}12)^8$

C. $K \cdot (1 + 0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^{-4})^8$ D. $K \cdot \left(1 + \frac{2{,}4}{100}\right)^8$

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

Zadania otwarte

8. Dany jest ciąg (a_n): (1, 9, 25, 49, ...) oraz ciąg (b_n) określony wzorem $\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_{n+1} = 4b_n - 5,\ n \geqslant 1 \end{cases}$. Oblicz $a_6 - b_5$.

9. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{3n+1}{2n+7}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

D a) Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący.

b) Które wyrazy ciągu (a_n) należą do przedziału $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$?

10. Dany jest ciąg (b_n), gdzie $b_n = \frac{2n^2 + n - 15}{n+3}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$.

D a) Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są liczbami całkowitymi.

D b) Wykaż, że ciąg (b_n) jest ciągiem arytmetycznym.

c) Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu (b_n).

11. Sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu (c_n) określa wzór $S_n = 2n^2 + 5n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$ i $c_1 = S_1$.

a) Oblicz $c_{10} + c_{11} + c_{12} + ... + c_{25}$.

b) Wyznacz wyraz ogólny ciągu (c_n).

D 12. Suma początkowych wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego o różnicy 2 jest o 50 mniejsza od sumy takiej samej liczby pozostałych wyrazów tego ciągu. Wykaż, że ten ciąg ma dziesięć wyrazów.

13. Ciąg geometryczny (b_n) jest ciągiem monotonicznym. Wiedząc, że $b_3 = 12$ oraz $b_7 = \frac{3}{64}$, oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu. Suma ilu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $255\frac{3}{4}$?

14. Ciąg $(x, 12, y)$ jest ciągiem geometrycznym, a ciąg $(x - 16, 12, y)$ jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz x i y. Następnie wyznacz iloraz ciągu geometrycznego i różnicę ciągu arytmetycznego.

15. Ciąg (a_1, a_2, a_3) jest rosnącym ciągiem geometrycznym, a suma jego wyrazów jest równa 84. Jednocześnie a_1 jest pierwszym wyrazem, a_2 – piątym wyrazem, zaś a_3 – dwudziestym pierwszym wyrazem nieskończonego ciągu arytmetycznego (b_n).

a) Wyznacz ciąg geometryczny. b) Podaj wyraz ogólny ciągu (b_n).

D 16. Niech a, b, c będą różnymi liczbami dodatnimi. Wykaż, że jeśli ciąg (a^2, b^2, c^2) jest ciągiem arytmetycznym, to również ciąg $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right)$ jest ciągiem arytmetycznym.

17. Wyrazy ciągu geometrycznego (c_1, c_2, c_3) są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + kx^2 - 6x + 8$.

a) Oblicz k.

b) Wyznacz ten ciąg.

18. Z czterech różnych liczb ustawionych jedna za drugą, trzy początkowe tworzą ciąg arytmetyczny, a trzy końcowe ciąg geometryczny. Suma liczby pierwszej i ostatniej jest równa 32, a suma drugiej i trzeciej wynosi 16. Wyznacz te liczby.

19. Dany jest nieskończony ciąg (a_n), gdzie $a_n = \frac{5}{n} - \frac{2+5+8+11+\ldots+(3n-1)}{n^2}$.

D a) Wykaż, że $a_n = \frac{9-3n}{2n}$ dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

D b) Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejący.

D c) Wykaż na podstawie definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{-3}{2}$.

20. Wyznacz granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4 - n^2 + 8}{(n+1)(3n+5)(1-4n)}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 3n}{n+1} - \frac{n^2 - 3}{n+2}\right)$

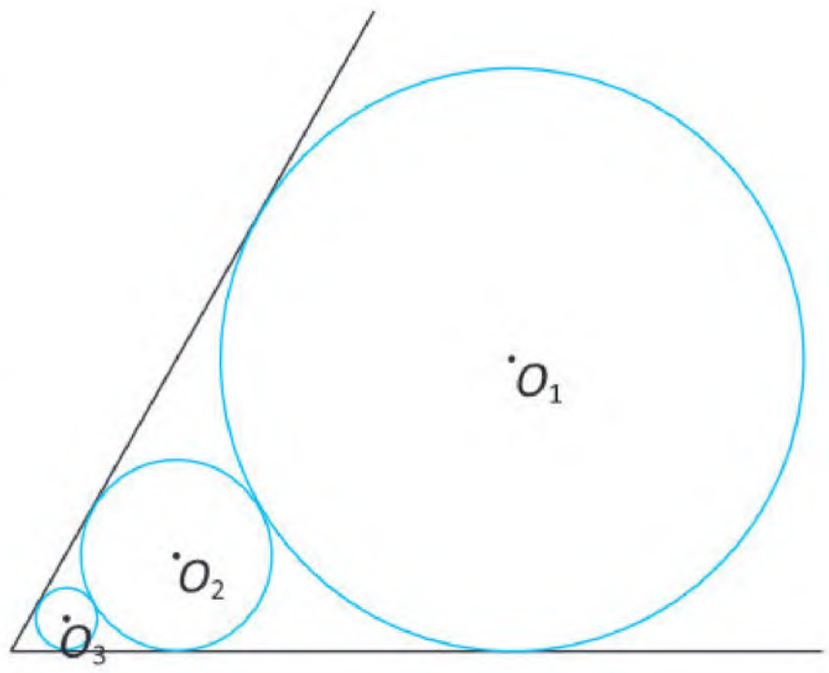
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3^n - 1)(2^n + 1)}{5^n + 8}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+9+27+\ldots+3^n}{4\cdot 3^n + 5}$

D 21. W kąt o mierze 60° wpisano okrąg $o(O_1, r_1)$, następnie w ten kąt wpisano okrąg $o(O_2, r_2)$, $r_2 < r_1$, który jest styczny zewnętrznie do $o(O_1, r_1)$. Potem w ten kąt wpisano okrąg $o(O_3, r_3)$, $r_3 < r_2$, styczny zewnętrznie do okręgu $o(O_2, r_2)$, i tak dalej. Niech (S_n) oznacza sumę obwodów n początkowych okręgów. Wykaż, że jeśli $r_1 = \frac{2}{\pi}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 6$.



Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

3. Kombinatoryka. Dwumian Newtona. Trójkąt Pascala

Reguła mnożenia i reguła dodawania

Kombinatoryka zajmuje się ustalaniem liczebności zbiorów skończonych. Aby rozwiązać zadanie dotyczące liczebności pewnego zbioru skończonego, tworzymy odpowiedni model matematyczny, który ułatwi wyznaczenie liczby elementów tego zbioru.

Przykład 1.

W grupie są 3 dziewczynki i 5 chłopców. Z tej grupy trzeba wybrać delegację złożoną z jednej dziewczynki i jednego chłopca. Ile jest możliwości dokonania wyboru takiej delegacji?

Wprowadźmy oznaczenia:

X_1, X_2, X_3 – dziewczynki

Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 – chłopcy

I sposób

Liczba możliwości dokonania wyboru delegacji jest oczywiście równa liczbie par składających się z jednej dziewczynki i jednego chłopca. Aby ustalić tę liczbę, można posłużyć się tabelą.

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
X_1	(X_1, Y_1)	(X_1, Y_2)	(X_1, Y_3)	(X_1, Y_4)	(X_1, Y_5)
X_2	(X_2, Y_1)	(X_2, Y_2)	(X_2, Y_3)	(X_2, Y_4)	(X_2, Y_5)
X_3	(X_3, Y_1)	(X_3, Y_2)	(X_3, Y_3)	(X_3, Y_4)	(X_3, Y_5)

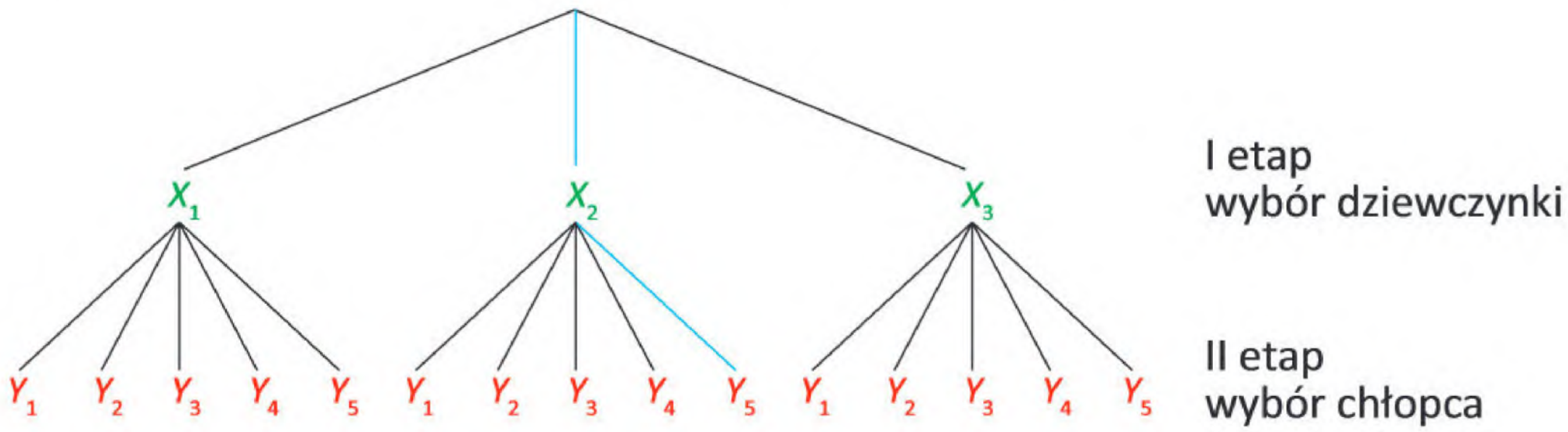
Liczba możliwych par jest równa liczbie białych komórek w tabeli, czyli

$3 \cdot 5$

Jest 15 możliwości dokonania wyboru delegacji.

II sposób

W rozwiązaniu tego zadania można również posłużyć się rysunkiem, który nazywa się **drzewem**. Zauważ, że wybór pary spełniającej warunki zadania może przebiegać w dwóch etapach: pierwszym etapem może być na przykład wybór dziewczynki, a drugim – wybór chłopca. Na drzewie te etapy przedstawiamy tak:



Odcinki na tym diagramie nazywamy **krawędziami**, które spotykają się w punktach zwanych **węzłami**. Każdy ciąg krawędzi od pierwszego do ostatniego etapu nazywamy **gałęzią**. Tak więc gałąź składa się z tylu krawędzi, ile etapów przedstawia drzewo.

Gałąź zaznaczona kolorem niebieskim odpowiada parze (X_2, Y_5).

Każda dziewczynka może być w parze z jednym z 5 chłopców, może więc utworzyć 5 par. W grupie są 3 dziewczynki, zatem wszystkich par jest

$$3 \cdot 5$$

Jest 15 możliwości dokonania wyboru delegacji.

Ćwiczenie 1. Wykonaj drzewo do zadania z przykładu 1., gdzie pierwszym etapem będzie wybór chłopca, a drugim – wybór dziewczynki. Czy to drzewo będzie miało taką samą liczbę gałęzi, jak drzewo przedstawione w przykładzie 1.?

Podsumujmy dotychczasowe rozważania.

Reguła mnożenia.

Załóżmy, że dokonywany przez nas wybór przebiega w dwóch etapach. W I etapie możemy podjąć decyzję na k_1 sposobów, a w II etapie – na k_2 sposobów. Wówczas liczba wszystkich wyników tego dwuetapowego wyboru jest równa

$$k_1 \cdot k_2$$

Powyższą regułę można uogólnić na większą liczbę etapów.

Przykład 2.

Restauracja oferuje swoim gościom: 5 rodzajów zup, 10 rodzajów drugich dań i 6 rodzajów napojów. Ile różnych zestawów obiadowych złożonych z zupy, drugiego dania i napoju można zamówić w tej restauracji?

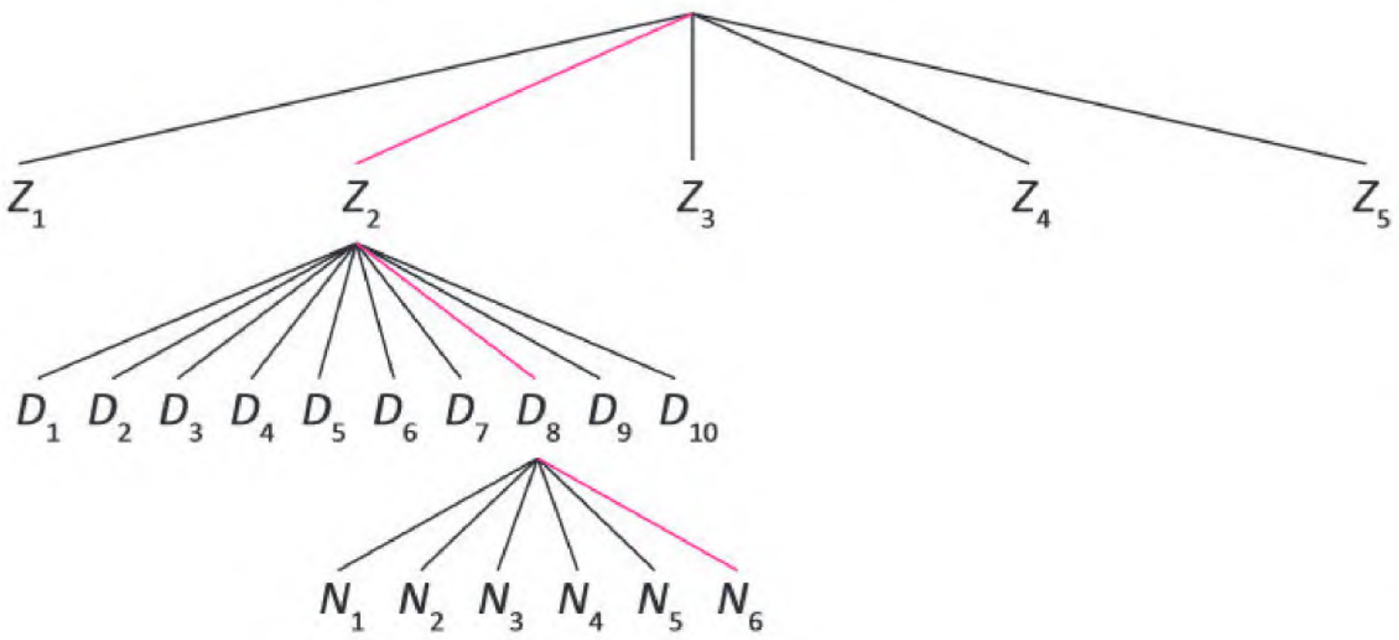
Oznaczmy:

$Z_1, \ldots, Z_5$ – rodzaje zup

$D_1, \ldots, D_{10}$ – rodzaje drugich dań

$N_1, \ldots, N_6$ – rodzaje napojów

Wyboru zestawu obiadowego możemy dokonać w trzech etapach. Szkicujemy częściowe drzewo przedstawiające te etapy.



Na drzewie kolorem czerwonym zaznaczono gałąź odpowiadającą zestawowi obiadowemu złożonemu z drugiej zupy, ósmego dania drugiego i szóstego napoju.

Zupę możemy wybrać na 5 sposobów. Do każdej tak wybranej zupy możemy wybrać drugie danie na 10 sposobów. Zatem możemy utworzyć $5 \cdot 10$ zestawów złożonych z zupy i drugiego dania. Do każdego z 50 takich zestawów możemy wybrać napój na 6 sposobów. W restauracji można więc zamówić

$5 \cdot 10 \cdot 6$, czyli 300

różnych zestawów obiadowych.

Jeśli dokonywany przez nas wybór przebiega w trzech etapach i w I etapie możemy podjąć decyzję na k_1 sposobów, w II etapie – na k_2 sposobów, a w III etapie – na k_3 sposobów, to liczba wszystkich wyników tego trójetapowego wyboru jest równa $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$.

Przykład 3.

W szafie Ani wisi sześć różnych bluzek: 4 niebieskie i 2 zielone, oraz trzy różne spódnice: 2 niebieskie i 1 zielona.

a) Ile Ania ma możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy?

b) Ile Ania ma możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy tak, by bluzka i spódnica były w tym samym kolorze?

Ad a) Ania do każdej z 6 bluzek może wybrać jedną z 3 spódnic, zatem wszystkich możliwości wyboru jest

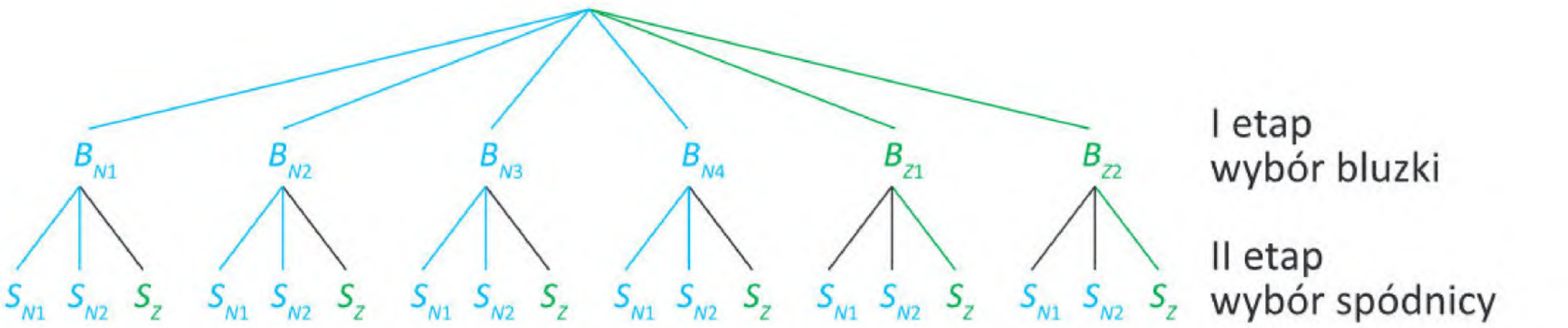
$$6 \cdot 3$$

Ania ma 18 możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy.

Ad b) Narysujemy drzewo ilustrujące wybór bluzki i spódnicy. Oznaczymy:

B_{N1}, B_{N2}, B_{N3}, B_{N4} – bluzki niebieskie B_{Z1}, B_{Z2} – bluzki zielone

S_{N1}, S_{N2} – spódnice niebieskie S_Z – spódnica zielona



Zbiór wyników wyboru bluzki i spódnicy w tym samym kolorze można podzielić na dwa rozłączne podzbiory:

- wybrana bluzka i spódnica są niebieskie
- wybrana bluzka i spódnica są zielone

Taki podział ułatwia obliczenia. Mamy bowiem:

- Do każdej z 4 niebieskich bluzek Ania może dobrać jedną z 2 niebieskich spódnic. Zatem zestawów: niebieska bluzka i niebieska spódnica jest

  $$4 \cdot 2, \text{ czyli } 8$$

- Do każdej z 2 zielonych bluzek Ania może dobrać tylko 1 zieloną spódnicę. Zatem liczba zestawów: zielona bluzka i zielona spódnica jest równa

  $$2 \cdot 1, \text{ czyli } 2$$

Ania ma 8 + 2, czyli 10 możliwości wyboru jednej bluzki i jednej spódnicy tak, by były one w tym samym kolorze.

W punkcie b) ostatniego przykładu posłużyliśmy się regułą dodawania.

Reguła dodawania
Jeśli zbiór wszystkich wyników podzielimy na dwa rozłączne podzbiory i w pierwszym podzbiorze jest m_1 wyników, a w drugim podzbiorze jest m_2 wyników, to wszystkich wyników jest $m_1 + m_2$.

Regułę dodawania można uogólnić na większą niż dwa liczbę podzbiorów. Należy wówczas założyć, że dowolne dwa podzbiory są rozłączne.

Przykład 4.

Mamy zbiory: $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $Z = \{8, 9, 10, 11\}$. Niech $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. Obliczymy, na ile sposobów można wybrać trójkę liczb (x, y, z) taką, że suma $x + y + z$ jest liczbą nieparzystą.

Suma $x + y + z$ jest nieparzysta w następujących przypadkach:

1) liczba x jest parzysta, liczba y jest parzysta, liczba z jest nieparzysta.
   Takich trójek liczb mamy:
   $2 \cdot 2 \cdot 2$ czyli 8.
2) liczba x jest nieparzysta, liczba y jest parzysta, liczba z jest parzysta.
   Liczba takich trójek jest równa:
   $1 \cdot 2 \cdot 2$ czyli 4.
3) liczba x jest parzysta, liczba y jest nieparzysta, liczba z jest parzysta.
   Takich trójek jest
   $2 \cdot 3 \cdot 2$ czyli 12.
4) liczby x, y, z są nieparzyste. Tych trójek jest:
   $1 \cdot 3 \cdot 2$ czyli 6.

Ostatecznie suma $x + y + z$ będzie nieparzysta w $8 + 4 + 12 + 6$, czyli 30 przypadkach.
Mamy 30 możliwości wyboru takiej trójki liczb.

Ćwiczenie 2. Niech x, y, z będą elementami zbiorów odpowiednio X, Y, Z opisanych w przykładzie 4. Korzystając z reguły mnożenia i z reguły dodawania oblicz, na ile sposobów można wybrać trójkę liczb (x, y, z) taką, że suma $x + y + z$ jest liczbą parzystą. Jak można rozwiązać to zadanie, znając rozwiązanie zadania z przykładu 4.?

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dane są zbiory: $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tworzymy parę (x, y) taką, że $x \in X$, $y \in Y$. Wykonaj drzewo ilustrujące wszystkie możliwości utworzenia takiej pary. Ile jest tych możliwości?

2. Dane są zbiory: $X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$. Tworzymy liczbę dwucyfrową, gdzie x jest cyfrą dziesiątek, $x \in X$, a y – cyfrą jedności, $y \in Y$. Wykonaj drzewo, ilustrujące wszystkie sposoby utworzenia takiej liczby. Na ile sposobów otrzymamy liczbę dwucyfrową:
   a) parzystą
   b) podzielną przez 10
   c) podzielną przez 3
   d) podzielną przez 8?

3. Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tworzymy liczby dwucyfrowe w ten sposób, że cyfra dziesiątek należy do zbioru A, zaś cyfra jedności należy do zbioru B. Wykonaj tabelę ilustrującą te liczby. Ile jest wśród nich:
   a) liczb parzystych
   b) liczb podzielnych przez 5
   c) liczb większych od 20
   d) liczb mniejszych od 37?

4. Proste k i l są równoległe. Na prostej k zaznaczono 4 punkty, a na prostej l zaznaczono 7 punktów. Ile odcinków wyznaczają te punkty, jeśli jeden koniec każdego odcinka należy do prostej k, a drugi do prostej l?

5. Pani Julia ma 5 kapeluszy i 8 apaszek. Na ile sposobów może włożyć kapelusz wraz z apaszką?

6. Pan Antoni ma 7 różnych koszul, 6 różnych krawatów i 3 różne marynarki. Na ile sposobów może włożyć:
   a) koszulę z marynarką bez krawata
   b) koszulę, marynarkę i krawat?

7. Pan Jacek ma 4 jasne koszule, 3 pary jasnych spodni i 3 pary jasnych butów oraz 5 ciemnych koszul, 6 ciemnych par spodni i 2 pary ciemnych butów. Na ile sposobów może wybrać:
   a) koszulę, parę spodni i parę butów
   b) ciemną koszulę, ciemną parę spodni i ciemną parę butów
   c) koszulę, spodnie i buty w tej samej tonacji kolorystycznej
   d) ciemną koszulę, jasne spodnie i parę butów w dowolnym kolorze?

8. W szufladzie znajdują się różne czapki: 3 białe, 4 czerwone, 2 szare oraz różne szaliki: 2 białe, 5 szarych i 1 szalik czarny. Na ile sposobów można wybrać:
   a) jedną czapkę i jeden szalik

b) czapkę czerwoną i jeden dowolny szalik
c) czapkę i szalik w kolorze białym
d) czapkę i szalik w jednym kolorze?

9. W szafce znajdują się różne kubki: 3 białe, 4 żółte, 5 niebieskich oraz różne talerze: 2 białe, 3 żółte i 4 niebieskie. Ile jest możliwości wyboru jednego talerza i jednego kubka tak, aby:
a) kubek był żółty, a talerz w dowolnym kolorze
b) talerz nie był biały, a kubek nie był niebieski
c) kubek i talerz były w jednym kolorze
d) kubek i talerz były w różnych kolorach?

10. Mamy dwie sześcienne kostki do gry w dwóch kolorach: zieloną i czerwoną. Na ściankach każdej kostki są oczka w liczbie od 1 do 6. Rzucamy każdą kostką jeden raz. Na ile sposobów możemy otrzymać:
a) taką samą liczbę oczek na obu kostkach
b) liczbę oczek większą na kostce zielonej niż na kostce czerwonej
c) sumę oczek, która jest liczbą nieparzystą
d) iloczyn oczek, który jest liczbą pierwszą?

11. Dane są zbiory: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{o, p\}$. Tworzymy trzyliterowy napis, w którym pierwsza litera należy do zbioru A, druga do zbioru B, a trzecia do zbioru C.
a) Wykonaj drzewo, ilustrujące wszystkie możliwości utworzenia takiego napisu. Ile jest tych możliwości?
b) Na ile sposobów można utworzyć napis, w którym występuje co najmniej jedna samogłoska?

12. Dane są trzy zbiory: $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$, $C = \{0, 1, 9\}$. Wybieramy jedną cyfrę ze zbioru A, jedną ze zbioru B i jedną ze zbioru C. Na ile sposobów otrzymamy trójkę cyfr, z których:
a) dwie są nieparzyste, a jedna parzysta
b) tylko jedna cyfra jest większa od 5?

13. Dane są zbiory $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6\}$, $Z = \{7, 8, 9, 10, 11\}$. Wybieramy trójkę liczb x, y, z, gdzie $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. Na ile sposobów otrzymamy iloczyn $x \cdot y \cdot z$ będący:
a) liczbą nieparzystą
b) liczbą parzystą?

14. Dane są zbiory: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$, $C = \{12, 13, 14\}$. Na ile sposobów można utworzyć trójkę liczb a, b, c, gdzie $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ takich, że suma $a + b + c$ jest liczbą:
a) parzystą
b) mniejszą od 22?

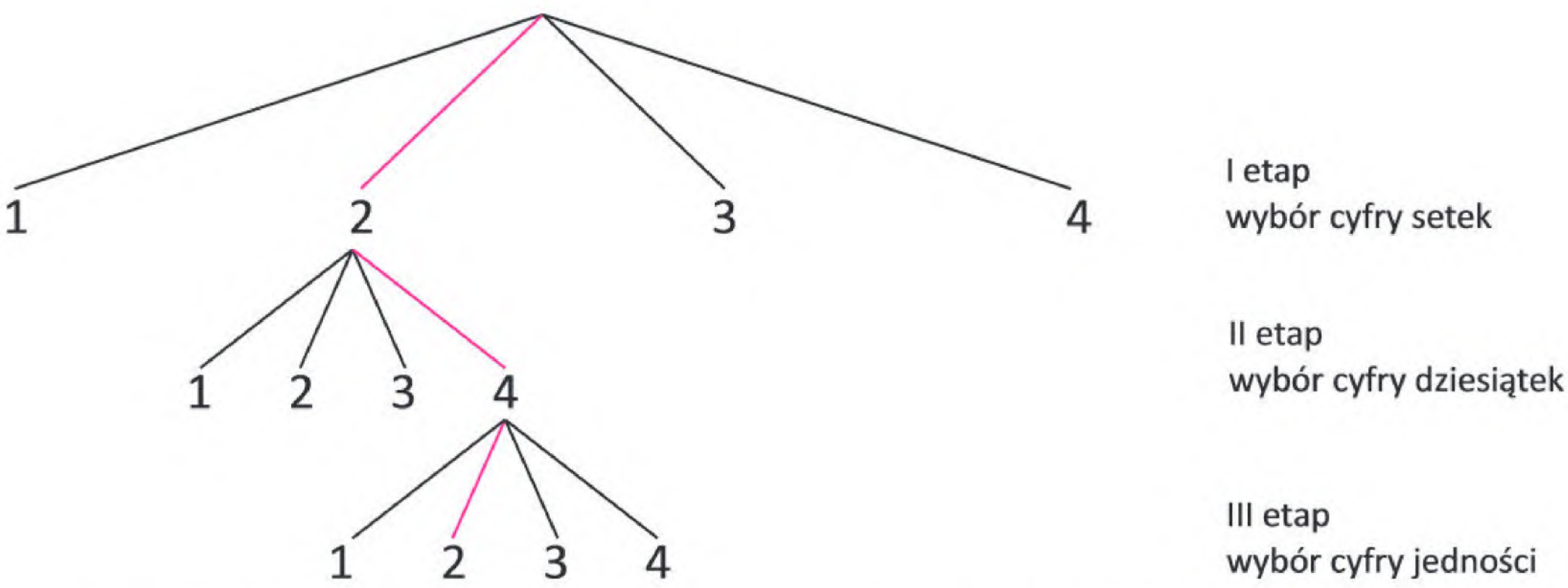
Wariacje

W tym temacie zajmiemy się wyborami wieloetapowymi, w których na każdym etapie wybór będzie dokonywany z tego samego zbioru.

Przykład 1.

Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

Aby utworzyć liczbę trzycyfrową, wystarczy wskazać cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności. Częściowe drzewo przedstawione poniżej pokazuje etapy tworzenia liczby trzycyfrowej.



Kolorem czerwonym zaznaczona została gałąź odpowiadająca liczbie 242.

Cyfrę setek możemy wybrać na 4 sposoby. Do każdej tak wybranej cyfry setek cyfrę dziesiątek możemy wybrać również na 4 sposoby. Do każdej z tak otrzymanych par możemy dobrać cyfrę jedności na 4 sposoby. Ostatecznie – zgodnie z regułą mnożenia – wszystkich liczb trzycyfrowych jest

$4 \cdot 4 \cdot 4$, czyli 4^3

Możemy utworzyć 64 liczby trzycyfrowe.

Zauważ, że w rozpatrywanym przykładzie:

– kolejność wybieranych cyfr jest istotna. Na przykład wybierając najpierw 2, następnie 4 i na końcu znowu 2 otrzymujemy liczbę 242, natomiast wybierając najpierw 4, potem 2 i znowu 2 uzyskamy liczbę 422.

– cyfry tworzące liczbę trzycyfrową mogą, choć nie muszą się powtarzać.

Rozważając wybory wieloetapowe, możemy zatem mówić o pewnych przyporządkowaniach. Na przykład przyporządkowanie odpowiadające utworzeniu liczby 242 jest następujące:

I etap → 2		1. → 2
II etap → 4	co można też zapisać	2. → 4
III etap → 2		3. → 2

Znasz już przyporządkowania, w których kolejnym, początkowym liczbom naturalnym dodatnim przypisuje się elementy z danego zbioru. To są ciągi.

Można zatem stwierdzić, że liczb trzycyfrowych, zbudowanych z cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4} jest tyle, ile trójwyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru {1, 2, 3, 4}.

Definicja 1.

Wariacją *k*-wyrazową z powtórzeniami *n*-elementowego zbioru *A*, gdzie $k \in \boldsymbol{N}_+$, $n \in \boldsymbol{N}_+$, nazywamy każdy *k*-wyrazowy ciąg elementów zbioru *A*, które mogą się powtarzać.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Liczba *k*-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru *n*-elementowego jest równa n^k.

Przykład 2.

Pięć osób wsiada do pociągu. Każda osoba wybiera losowo jeden z sześciu wagonów. Na ile sposobów te osoby mogą zająć miejsca w wagonach tego pociągu?

Pasażerów można oznaczyć cyframi od 1 do 5. Każdemu z nich przyporządkujemy numer wagonu, do którego wsiadł. Jeśli pierwszy z nich wsiadł do wagonu 2., pasażerowie drugi i trzeci do wagonu 4., pasażer czwarty do wagonu 5., a pasażer piąty do wagonu 6., to tę sytuację można opisać ciągiem

(2, 4, 4, 5, 6).

Liczba sposobów, w jakie pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach pociągu, jest równa liczbie pięciowyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru

{1, 2, 3, 4, 5, 6}, czyli 6^5.

Pasażerowie mogą zająć miejsca w wagonach na 6^5 sposobów.

Ćwiczenie 1. Ile różnych napisów czteroliterowych można utworzyć, dysponując literami należącymi do zbioru {A, B, C}?

Przykład 3.

Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru {0, 1, 2, 3}?

Zadanie wydaje się takie samo jak zadanie z przykładu 1. Różnica polega na tym, że cyfra setek nie może być równa 0. Zatem liczb trzycyfrowych, spełniających warunki zadania jest tyle, ile trójwyrazowych ciągów o wyrazach należących do zbioru {0, 1, 2, 3} i jednocześnie o pierwszym wyrazie różnym od 0.

Cyfrę setek możemy wybrać na 3 sposoby, a każdą z dwóch pozostałych cyfr na 4 sposoby. Zgodnie z regułą mnożenia wszystkich takich liczb trzycyfrowych mamy

$3 \cdot 4^2$, czyli 48.

Możemy utworzyć 48 takich liczb.

Przykład 4.

Ile można utworzyć różnych numerów rejestracyjnych, składających się kolejno z 3 liter i 5 cyfr, jeśli przyjmiemy, że alfabet składa się z 24 liter i posługujemy się tylko dużymi literami?

Część numeru rejestracyjnego złożonego z 3 liter można utworzyć na

24^3 sposobów, bowiem

tyle jest trójwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 24-elementowego.

Część numeru rejestracyjnego złożonego z 5 cyfr można utworzyć na

10^5 sposobów, ponieważ

tyle jest pięciowyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru 10-elementowego.

Zgodnie z regułą mnożenia – wszystkich numerów rejestracyjnych jest

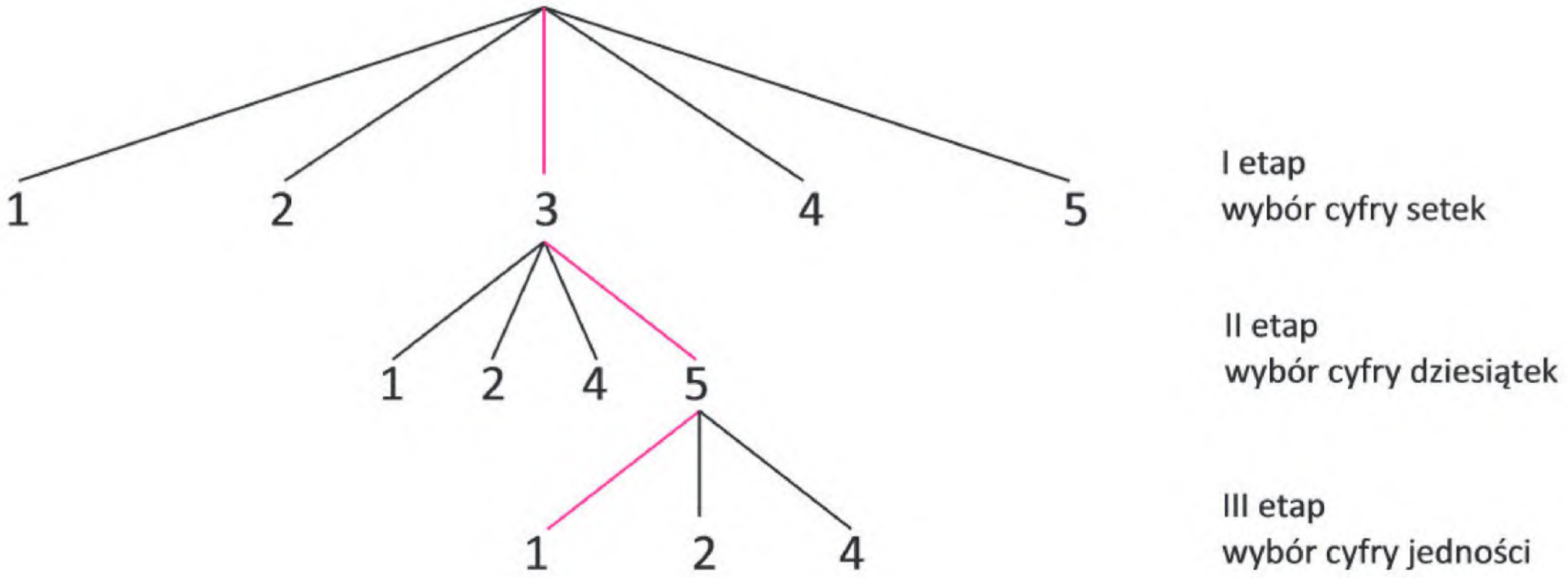
$24^3 \cdot 10^5$.

Poniższy przykład dotyczy wyboru trzyetapowego, gdzie wyniki kolejnych etapów są różne.

Przykład 5.

Ile liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru {1, 2, 3, 4, 5}?

Naszkicujemy częściowe drzewo przedstawiające etapy tworzenia liczby trzycyfrowej o różnych cyfrach.



Kolejność wybieranych cyfr jest istotna, cyfry nie mogą się powtarzać. Cyfrę setek możemy wybrać na 5 sposobów. Jeśli wybraliśmy cyfrę setek, to cyfrę dziesiątek wybieramy na 4 sposoby – spośród cyfr różnych od cyfry setek. Natomiast cyfrę jedności możemy wybrać już tylko na 3 sposoby, spośród cyfr różnych od wybranych cyfr setek i dziesiątek. Przykładem tak wybranej liczby jest 351.

Zgodnie z regułą mnożenia wszystkich takich liczb trzycyfrowych jest

$5 \cdot 4 \cdot 3$, czyli 60.

Można utworzyć 60 liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5}.

Definicja 2.

Wariacją *k*-wyrazową bez powtórzeń *n*-elementowego zbioru *A*, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, $n \in \mathbf{N}_+$ i $k \leqslant n$, nazywamy każdy *k*-wyrazowy ciąg różnych elementów zbioru *A*.

Twierdzenie 2.

Liczba *k*-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru *n*-elementowego, gdzie $k \in \mathbf{N}_+$, $n \in \mathbf{N}_+$ i $k \leqslant n$, jest równa $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Ćwiczenie 2. Pięciu pasażerów wsiada do pociągu, wybierając jeden z sześciu wagonów. Na ile sposobów pasażerowie mogli ulokować się w tych wagonach, jeśli każdy z nich wybrał inny wagon?

Przykład 6.

Obliczymy, ile jest liczb czterocyfrowych większych od 3500, zbudowanych z cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, jeśli cyfry w liczbie nie mogą się powtarzać.

Korzystamy z reguły dodawania i dzielimy interesujące nas liczby na dwie rozłączne grupy.

I. Liczby większe od 4000.

Te liczby tworzą czterowyrazowe ciągi, w których:

– pierwszym wyrazem jest cyfra ze zbioru {4, 5, 6, 7}, więc można ją wybrać na
4 sposoby

– pozostałe trzy wyrazy ciągu, to dowolnie wybrane trzy różne cyfry ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} pomniejszonego o jedną cyfrę wybraną jako pierwszy wyraz ciągu, bo cyfry nie mogą się powtarzać. Te trzy cyfry można wybrać na
$6 \cdot 5 \cdot 4$, czyli 120 sposobów.

Z reguły mnożenia wynika, że mamy $4 \cdot 120$, czyli 480 takich ciągów.

II. Liczby, których cyfra tysięcy jest równa 3.

Te liczby tworzą czterowyrazowe ciągi takie, że:

– pierwszy wyraz jest równy 3. Wybieramy ten wyraz na 1 sposób.

– drugi wyraz może być równy 5 lub 6 lub 7, więc można go wybrać na 3 sposoby.

– pozostałe dwa wyrazy, to dowolne dwie różne cyfry ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, które są także różne od dwóch wcześniej wybranych cyfr. Można je wybrać na
$5 \cdot 4$, czyli 20 sposobów.

Z reguły mnożenia wynika, że istnieje $1 \cdot 3 \cdot 20$, czyli 60 takich liczb.

Na koniec sumujemy otrzymane w dwóch przypadkach wyniki:

$480 + 60 = 540$

Istnieje 540 liczb spełniających warunki zadania.

Ćwiczenie 3. Oblicz, ile jest liczb czterocyfrowych większych od 3500, zbudowanych z cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, jeśli cyfry w liczbie mogą się powtarzać.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Z pewnej miejscowości prowadzi pięć szlaków na szczyt górski. Na ile sposobów turyści mogą wybrać:
   a) trasę wycieczki na górę i z powrotem
   b) trasę wycieczki na górę i z powrotem, jeśli powrót odbędzie się innym szlakiem niż wejście na górę?

2. Budynek ma parter i 10 pięter. Na parterze tego wieżowca do windy wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą wysiąść z windy:
   a) każda osoba na dowolnym piętrze
   b) każda osoba na innym piętrze
   c) wszystkie osoby na tym samym piętrze? Nie uwzględniamy kolejności wyjścia.

3. Sześciu pasażerów wsiada do pociągu, wybierając losowo jeden z ośmiu wagonów. Na ile sposobów mogą oni zająć miejsca w wagonach pociągu, jeśli:
   a) każdy pasażer może wybrać dowolny wagon
   b) każdy z pasażerów wybrał inny wagon?

4. Przedsiębiorca produkuje chorągiewki składające się z czterech pionowych pasów, kolejno od najszerszego do najwęższego pasa. Ma do dyspozycji 7 kolorów. Ile rodzajów takich chorągiewek może wyprodukować, jeśli:
   a) każdy pas jest w innym kolorze
   b) kolory pasów są dowolne?

5. Cztery kule: białą, czerwoną, niebieską i zieloną, wrzucamy do pięciu szuflad, ponumerowanych od 1 do 5. Ile jest takich rozmieszczeń kul w szufladach, że:
   a) każda kula trafiła do innej szuflady
   b) wszystkie kule trafiły do jednej z szuflad o numerach 1, 2, 3
   c) każda kula trafiła do szuflady o numerze parzystym?

6. Ile napisów pięcioliterowych można utworzyć, dysponując literami należącymi do zbioru $\{E, F, G, H, I, J, K\}$, jeśli:
   a) litery mogą się powtarzać
   b) litery nie mogą się powtarzać
   c) na początku i na końcu napisu nie może wystąpić litera E i litery mogą się powtarzać?

7. Ile liczb czterocyfrowych większych od 5000 można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{0, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, jeśli cyfry w liczbie:
   a) mogą się powtarzać
   b) nie mogą się powtarzać?

Permutacje

W tym temacie zajmiemy się szczególnym rodzajem wariacji bez powtórzeń. Będą to różnowartościowe ciągi n-wyrazowe o wartościach ze zbioru mającego n elementów. Taki ciąg nazwiemy permutacją bez powtórzeń.

Definicja 1.

Permutacją bez powtórzeń n-elementowego zbioru A, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru A.

Przykład 1.

Jeśli $A = \{a, b, c\}$, to ciągi:

(b, a, c), (a, c, b), (c, a, b)

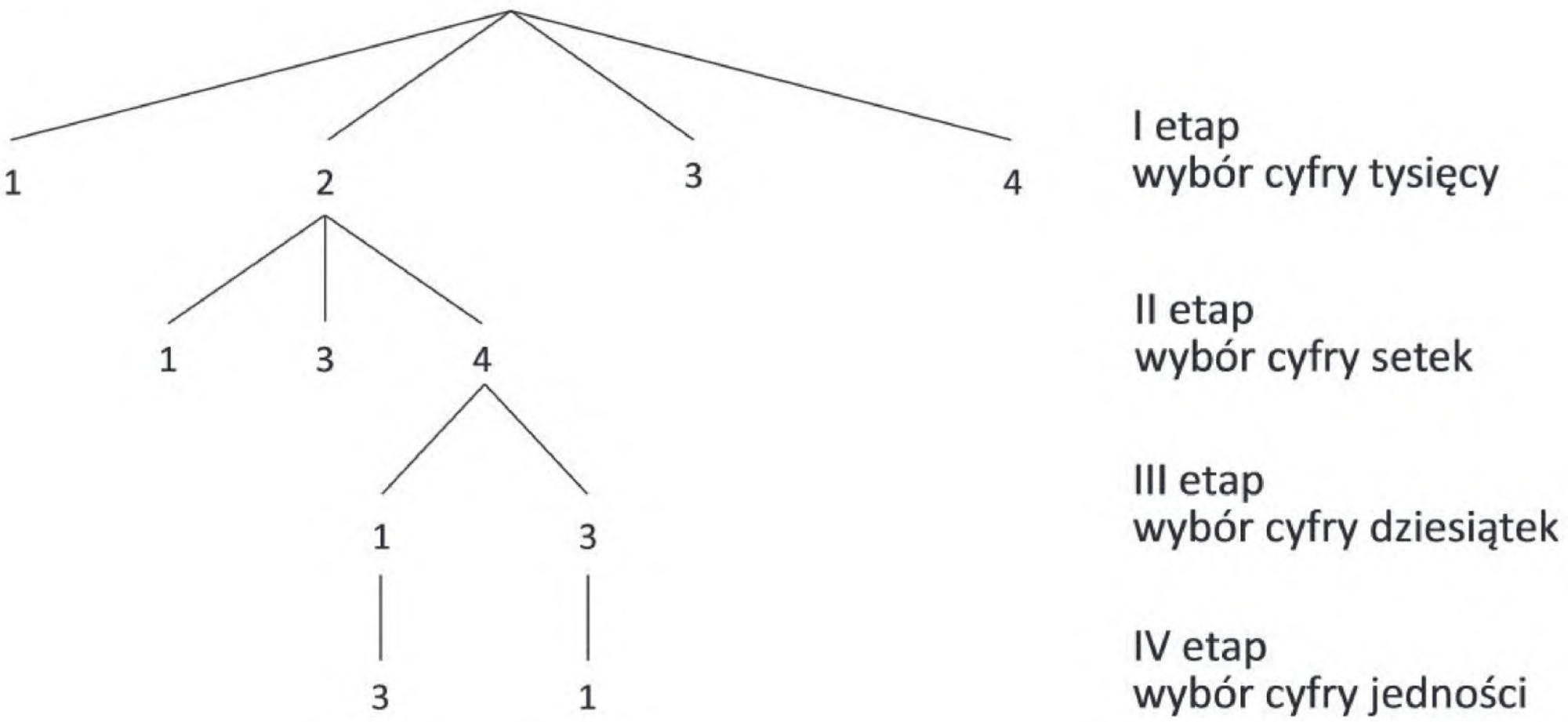
są przykładami permutacji trzyelementowych zbioru A.

Ćwiczenie 1. Wypisz pozostałe permutacje bez powtórzeń zbioru A. Ile jest wszystkich permutacji bez powtórzeń zbioru trzyelementowego?

Przykład 2.

Ile liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach można utworzyć, dysponując cyframi należącymi do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$?

Naszkicujmy częściowe drzewo przedstawiające etapy tworzenia liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach.



Kolejność wybieranych cyfr jest istotna, cyfry nie mogą się powtarzać. W każdej liczbie czterocyfrowej występować będą wszystkie cztery cyfry. Cyfrę tysięcy możemy wybrać na 4 sposoby, cyfrę setek – na 3 sposoby, cyfrę dziesiątek – na 2 sposoby. Ostatnią cyfrę wybieramy już tylko na 1 sposób. Zatem wszystkich takich liczb jest

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, czyli 24

Możemy utworzyć 24 liczby czterocyfrowe.

Tworzone w przykładzie 2. liczby odpowiadają permutacjom bez powtórzeń z czteroelementowego zbioru {1, 2, 3, 4}.

Twierdzenie 1.

Liczba permutacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, jest równa

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$

Iloczyn kolejnych liczb naturalnych od n do 1 oznaczamy symbolem:

$n!$ (czytaj: „n silnia”).

Definicja 2.

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, jeśli $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$

Przyjmujemy dodatkowo, że:

$0! = 1$ $1! = 1$

Przykład 3.

Wykonamy działania:

a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $7 \cdot 6! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$

c) $7! - 5! = 7 \cdot 6 \cdot 5! - 5! = 5!(42 - 1) = 41 \cdot 5!$

d) $\frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$

UWAGA: Zgodnie z twierdzeniem 2. ze str. 176 liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$ i $k \leqslant n$, jest równa

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Liczbę tę można również zapisać tak: $\frac{n!}{(n-k)!}$. W szczególności, jeśli $k = n$, to:

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Przykład 4.

Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Wówczas:

a) liczbę pięciocyfrową o różnych cyfrach należących do zbioru A można utworzyć na $\frac{9!}{(9-5)!}$ sposobów, czyli na $\frac{9!}{4!}$ sposobów

b) liczbę zbudowaną ze wszystkich cyfr zbioru A bez powtórzeń można utworzyć na 9! sposobów.

Ćwiczenie 2. Dany jest zbiór: $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Korzystając z symbolu $n!$ zapisz, na ile sposobów można:

a) ustawić w jednym rzędzie wszystkie litery należące do tego zbioru

b) utworzyć pięcioliterowy napis z różnych liter należących do tego zbioru.

W kolejnych przykładach pokażemy zastosowanie twierdzenia 1. w zadaniach.

Przykład 5.

Pięcioro przyjaciół: Ania, Bartek, Cezary, Dorota i Ela kupiło bilety do kina. Mają oni zająć pięć kolejnych miejsc w jednym rzędzie.

a) Na ile sposobów mogą zająć te miejsca?

b) Na ile sposobów mogą zająć te miejsca tak, by Ania i Bartek siedzieli obok siebie?

Ad a) Pierwsze miejsce może być zajęte na 5 sposobów, drugie – na 4 sposoby, trzecie – na 3 sposoby, czwarte – na 2 sposoby i piąte – na 1 sposób. Wszystkich możliwości jest

5!, czyli 120.

Pięcioro przyjaciół może zająć miejsca w kinie na 120 sposobów.

Ad b) To zadanie rozwiążemy w trzech etapach.

I etap – wybieramy dwa sąsiednie miejsca dla Ani i Bartka:

(□, □, , ,) lub (, □, □, ,) lub (, , □, □,) lub (, , , □, □)

Są 4 możliwości wybrania dwóch sąsiednich miejsc.

II etap – ustalamy, w jakiej kolejności Ania i Bartek zajmą ustalone miejsca.

(A, B, , ,) lub (B, A, , ,)

Na ustalonych dwóch sąsiednich miejscach Ania i Bartek mogą usiąść w kolejności (A, B) lub w kolejności (B, A) – czyli na 2 sposoby.

III etap – Wybieramy miejsca dla pozostałych trzech osób.

(☐, A, B, ☐,☐)

Przy ustalonych miejscach dla Ani i Bartka pozostałe osoby mają do dyspozycji trzy miejsca w jednym rzędzie. Trzy osoby mogą zająć te miejsca na 3! sposobów.

Obliczamy liczbę wszystkich możliwości wyboru miejsc:

$$4 \cdot 2 \cdot 3! = 8 \cdot 6 = 48$$

Pięcioro przyjaciół może zająć miejsca w kinie tak, by Ania i Bartek siedzieli obok siebie, na 48 sposobów.

Ćwiczenie 3. Oblicz, na ile sposobów pięcioro przyjaciół z przykładu 5. może zająć pięć kolejnych miejsc w jednym rzędzie tak, aby:

a) Ania, Dorota i Ela siedziały obok siebie

b) dziewczyny i chłopcy siedzieli na zmianę: dziewczyna, chłopiec, dziewczyna, chłopiec, dziewczyna?

Ćwiczenie 4. Siedmioro przyjaciół udało się do kina; wśród nich Alicja i Beata. Mają trzy bilety w IX rzędzie i cztery bilety w X rzędzie. Na ile sposobów mogą zająć te miejsca tak, aby Alicja i Beata siedziały obok siebie?

Przykład 6.

Obliczymy, ile jest sposobów zajęcia miejsc przy okrągłym stole przez:

a) 3 osoby b) 10 osób.

Rozwiązanie tego zadania zależy od sprecyzowania, jakie dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne. Rozpatrzmy dwa modele.

Model 1.

Dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne, jeśli co najmniej dwie osoby będą siedziały na innych krzesłach. W takim wypadku liczba rozmieszczeń przy okrągłym stole jest taka sama, jak liczba rozmieszczeń tych osób w szeregu.

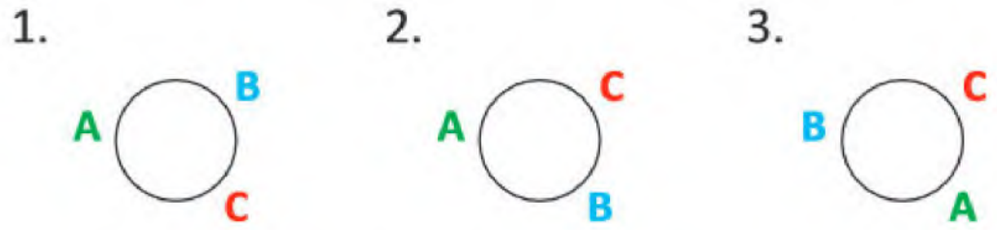
Model 2.

Dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne, jeśli co najmniej jedna osoba będzie mieć innego sąsiada co najmniej po jednej stronie.

Ad a)

Model 1.

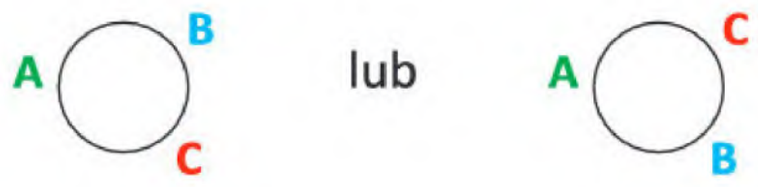
Liczba rozmieszczeń jest równa 3!, czyli 6. Rysunek poniżej przedstawia te rozmieszczenia; osoby zostały oznaczone literami *A*, *B*, *C*.



Model 2.

Zauważ, że na rysunkach 1., 3. i 5. każda osoba siedząca przy stole ma takich samych sąsiadów po tej samej stronie. Dzieje się tak wówczas, gdy każdą osobę przesadzimy na kolejne miejsce w ustalonym kierunku. W modelu 2. takie rozmieszczenia uznajemy za identyczne.

Podobnie jest w przypadku rysunków 2., 4. i 6. Każda z osób przedstawionych na tych rysunkach ma takich samych sąsiadów po tych samych stronach, więc te rozmieszczenia też uznajemy za identyczne. Ostatecznie, w modelu 2. są dwa różne rozmieszczenia trzech osób przy okrągłym stole:



Ad b)

Model 1.

Liczba rozmieszczeń 10 osób przy okrągłym stole jest równa liczbie ustawień 10 krzeseł w szeregu i wynosi 10!.

Model 2.

Dla pierwszej osoby wybieramy miejsce przy okrągłym stole i ta osoba nie zmienia tego miejsca – tak, jak osoba A w punkcie a), model 2. Pozostałych 9 osób może zmieniać miejsce na 9! sposobów. Każda zmiana miejsc przez te osoby spowoduje, że co najmniej jedna osoba będzie miała innych sąsiadów co najmniej po jednej stronie.

W modelu 2. liczba rozmieszczeń 10 osób przy okrągłym stole jest równa 9!.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Zapisz wyrażenia w prostszej postaci:
   a) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!$ b) $n!\,(n+1)\,(n+2)$ c) $\frac{7!}{4!}$
   d) $\frac{8!}{7!}$ e) $\frac{n!}{(n-2)!}$ f) $\frac{(n+3)!}{(n+3)(n+2)}$

2. Oblicz:
   a) $3! + 4!$ b) $6! - 4!$ c) $2! \cdot 3! \cdot 4!$ d) $10! : 8!$

3. Ile jest różnych liczb siedmiocyfrowych utworzonych z cyfr należących do zbioru {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, jeśli:
   a) cyfry w liczbie się nie powtarzają
   b) cyfry w liczbie się nie powtarzają, a dziewiątka jest czwartą cyfrą tej liczby?

4. Ile jest różnych liczb sześciocyfrowych parzystych, utworzonych z cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6}, jeśli:
   a) cyfry w liczbie się nie powtarzają
   b) cyfry w liczbie się nie powtarzają, a cyfra dziesiątek jest nieparzysta?

5. W zespole tanecznym jest 5 dziewczynek i 5 chłopców. Tworzymy pary do tańca (dziewczynka, chłopiec). Na ile sposobów można utworzyć:
   a) jedną parę taneczną
   b) pięć par tanecznych?

6. Na ile sposobów Marta może wysłać cztery różne pocztówki z wakacji do czterech przyjaciółek?

7. Na ile sposobów może wejść do autokaru jednym wejściem 7 osób, wśród których są trzy kobiety i czterech mężczyzn, jeśli:
   a) najpierw wsiadają kobiety
   b) kobiety i mężczyźni wchodzą na zmianę: mężczyzna, kobieta, mężczyzna, kobieta itd.?

8. Na ile sposobów można ustawić w szeregu 4 chłopców i 4 dziewczęta, tak aby dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

9. Ustawiamy na jednej półce 6 książek, jedna obok drugiej. Na ile sposobów można ustawić je tak, aby:
   a) książki A i B nie stały obok siebie
   b) pomiędzy książkami A i B stały dwie inne książki?

10. Krzysiek ustawia na półce 7 książek jedna obok drugiej. Wśród tych książek znajdują się książki A, B i C. Ile jest możliwości ustawienia wszystkich książek tak, żeby książki A, B, C:
    a) stały w podanej kolejności obok siebie
    b) były rozdzielone pojedynczymi książkami i stały w dowolnej kolejności?

11. Siedmioro przyjaciół: Asia, Basia, Czarek, Darek, Ewa, Filip i Grażyna wybrało się razem do kina. Mają oni zająć siedem kolejnych miejsc w jednym rzędzie.
    a) Na ile sposobów mogą zająć te miejsca?
    b) Na ile sposobów mogą zająć te miejsca tak, aby Basia i Czarek siedzieli obok siebie?
    c) Na ile sposobów mogą zająć te miejsca tak, aby Basia i Czarek siedzieli obok siebie oraz Darek i Ewa siedzieli obok siebie?

12. Zakupiono 16 biletów do teatru, w tym 10 biletów na miejsca od 1. do 10. w jedenastym rzędzie oraz 6 biletów na miejsca od 11. do 16. w siedemnastym rzędzie. Na ile sposobów 16 osób może usiąść na tych miejscach:
    a) dowolnie
    b) tak, aby dwie ustalone osoby siedziały obok siebie
    c) tak, aby cztery ustalone osoby siedziały obok siebie w jedenastym rzędzie?

13. Siedmioro przyjaciół: Asia, Basia, Czarek, Darek, Ewa, Filip i Grażyna ma usiąść przy okrągłym stole. Dwa rozmieszczenia osób przy stole uznamy za różne, jeśli co najmniej jedna osoba będzie mieć innego sąsiada co najmniej po jednej stronie.
    a) Na ile sposobów przyjaciele mogą zająć miejsca przy stole?
    b) Na ile sposobów przyjaciele mogą zająć te miejsca tak, by Basia i Czarek siedzieli obok siebie?
    c) Na ile sposobów przyjaciele mogą zająć te miejsca tak, by Basia i Czarek siedzieli obok siebie oraz Darek i Ewa siedzieli obok siebie?

Kombinacje

Przypomnijmy kilka informacji o zbiorze z klasy pierwszej.

1) Zbiory są równe, jeśli mają takie same elementy. Kolejność wypisywania elementów zbioru nie jest istotna. Mamy na przykład:
$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$.
2) Zbiory nie są równe wtedy, gdy różnią się co najmniej jednym elementem. Możemy na przykład zapisać: $\{a, b\} \neq \{b, c\}$, $\{a, b, c\} \neq \{a, b, d\}$.
3) Zbiór A jest podzbiorem zbioru B, jeśli wszystkie elementy zbioru A są również elementami zbioru B. Każdy zbiór jest swoim podzbiorem. Podzbiorem każdego zbioru jest także zbiór pusty.

Ćwiczenie 1. Dany jest zbiór czteroelementowy $\{a, b, c, d\}$. Wypisz wszystkie podzbiory tego zbioru:

a) jednoelementowe b) dwuelemetowe c) trzyelementowe

Przykład 1.

Z grupy składającej się z 3 dziewcząt i 2 chłopców wybieramy dwuosobową delegację. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Zauważ, że kolejność osób wybieranych do delegacji nie jest istotna. Ważny jest skład wybranej delegacji. Zatem do opisu wyboru delegacji wygodnie jest użyć pojęcia zbioru, a nie ciągu. Dwuosobową delegację można wybrać na tyle sposobów, ile jest dwuelementowych podzbiorów zbioru mającego 5 elementów.

Wprowadźmy oznaczenia:

X_1, X_2, X_3 – dziewczynki Y_1, Y_2 – chłopcy

Wypisujemy wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2\}$:

$\{X_1, X_2\}$ $\{X_1, X_3\}$ $\{X_1, Y_1\}$ $\{X_1, Y_2\}$
$\{X_2, X_3\}$ $\{X_2, Y_1\}$ $\{X_2, Y_2\}$
$\{X_3, Y_1\}$ $\{X_3, Y_2\}$
$\{Y_1, Y_2\}$

Dwuosobową delegację można wybrać na 10 sposobów.

Definicja 1.

Kombinacją k-elementową bez powtórzeń n-elementowego zbioru A, gdzie $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$ i $k \leqslant n$, nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru A, przy czym elementy zbioru A nie mogą się powtarzać.

Definicja 2.

Liczbę k-elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego, gdzie $k \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$ i $k \leqslant n$, oznaczamy $\binom{n}{k}$ i czytamy „n po k".

Z przykładu 1. wynika, że $\binom{5}{2} = 10$.

Ćwiczenie 2. Na podstawie ćwiczenia 1. podaj liczby: $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$.

Spróbujmy wyznaczyć wzór umożliwiający wyliczenie liczby $\binom{n}{k}$, bez konieczności wypisywania k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

Wróćmy do przykładu 1. Aby wyznaczyć liczbę $\binom{5}{2}$, przeprowadzimy dwuetapowe rozumowanie. Przyjmujemy te same oznaczenia.

1. etap – wypisujemy wszystkie dwuwyrazowe ciągi o różnych wyrazach należących do zbioru $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2\}$ i wyznaczamy ich liczbę.

(X_1, X_2) (X_1, X_3) (X_1, Y_1) (X_1, Y_2)
(X_2, X_1) (X_2, X_3) (X_2, Y_1) (X_2, Y_2)
(X_3, X_1) (X_3, X_2) (X_3, Y_1) (X_3, Y_2)
(Y_1, X_1) (Y_1, X_2) (Y_1, X_3) (Y_1, Y_2)
(Y_2, X_1) (Y_2, X_2) (Y_2, X_3) (Y_2, Y_1)

Takich ciągów jest: $\dfrac{5!}{(5-2)!}$

2. etap – wyznaczamy liczbę podzbiorów dwuelementowych. Zamieniamy ciągi na zbiory i zaznaczamy równe zbiory takim samym kolorem.

$\{X_1, X_2\}$ $\{X_1, X_3\}$ $\{X_1, Y_1\}$ $\{X_1, Y_2\}$
$\{X_2, X_1\}$ $\{X_2, X_3\}$ $\{X_2, Y_1\}$ $\{X_2, Y_2\}$
$\{X_3, X_1\}$ $\{X_3, X_2\}$ $\{X_3, Y_1\}$ $\{X_3, Y_2\}$
$\{Y_1, X_1\}$ $\{Y_1, X_2\}$ $\{Y_1, X_3\}$ $\{Y_1, Y_2\}$
$\{Y_2, X_1\}$ $\{Y_2, X_2\}$ $\{Y_2, X_3\}$ $\{Y_2, Y_1\}$

Różnych zbiorów jest $\dfrac{5!}{(5-2)! \cdot 2!}$

Zauważ, że każdy zbiór powtórzył się tyle razy, ile jest możliwości ustawienia w sze-

regu 2 elementów, czyli 2! razy. Zatem liczba dwuelementowych podzbiorów jest równa liczbie dwuwyrazowych ciągów o różnych wyrazach podzielonej przez 2!. Mamy:

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2}=\frac{20}{2}=10$$

Twierdzenie 1.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}, \text{ gdzie } k\in \boldsymbol{N}, n\in \boldsymbol{N} \text{ i } k\leqslant n.$$

Ćwiczenie 3. Udowodnij twierdzenie 1., korzystając z przedstawionego powyżej toku rozumowania.

Przykład 2.

Korzystając z twierdzenia 1., obliczamy:

a) $\binom{9}{4}=\frac{9!}{5!\cdot 4!}=\frac{{}^{3}\cancel{9}\cdot\cancel{8}^{1}\cdot 7\cdot 6}{{}_{1}\cancel{4}\cdot\cancel{3}_{1}\cdot\cancel{2}\cdot 1}=126$

b) $\binom{7}{7}=\frac{7!}{0!\cdot 7!}=\frac{7!}{1\cdot 7!}=1$

c) $\binom{10}{2}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$

d) $\binom{10}{8}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$

Ćwiczenie 4. Oblicz: a) $\binom{7}{4}$ b) $\binom{8}{5}$ c) $\binom{9}{8}$ d) $\binom{6}{0}$

UWAGA:

1) Liczba $\binom{n}{k}$ gdzie $k\in \boldsymbol{N}, n\in \boldsymbol{N}_{+}$ i $k\leqslant n$, określająca liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru mającego n elementów – jest liczbą naturalną dodatnią.

2) Wzór $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ można zapisać w postaci:

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Ćwiczenie 5. Oblicz, ile różnych prostych wyznacza 100 punktów, jeśli dowolne trzy z nich nie są współliniowe.

Przykład 3.

Z grupy składającej się z 3 dziewcząt i 2 chłopców wybieramy dwuosobową delegację, w której ma być co najmniej jedna dziewczynka. Na ile sposobów można to zrobić?

W przykładzie 1. wypisaliśmy wszystkie możliwe składy delegacji. Jest ich 10. Tylko w jednej delegacji nie ma ani jednej dziewczynki. Zatem można utworzyć 9 różnych delegacji, w których jest co najmniej jedna dziewczynka.

Zapiszemy teraz rozwiązanie tego zadania z wykorzystaniem symboli kombinatorycznych. Taki sposób jest przydatny szczególnie wtedy, gdy nie możemy wypisać wszystkich kombinacji ze względu na ich dużą liczbę.

Zauważ, że przy wyborze delegacji spełniającej warunki zadania, możliwe są dwa rozłączne przypadki:

1) w delegacji jest jedna dziewczynka i jeden chłopiec
2) w delegacji są dwie dziewczynki.

Obliczymy, ile jest możliwości utworzenia delegacji w każdym przypadku.

1) Jedną dziewczynkę z trzech można wybrać na $\binom{3}{1}$, czyli 3 sposoby. Do każdej tak wybranej dziewczynki możemy wybrać chłopca na $\binom{2}{1}$, czyli 2 sposoby.

   Zgodnie z regułą mnożenia, liczba delegacji, w których jest jedna dziewczynka i jeden chłopiec, jest równa $\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}$, czyli 6.

2) Dwie dziewczynki z trzech można wybrać na $\binom{3}{2}$, czyli 3 sposoby.

   Na podstawie reguły dodawania delegację, w której jest co najmniej jedna dziewczynka, można wybrać na $\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}+\binom{3}{2}$, czyli 9 sposobów.

UWAGA: W rozwiązaniu takiego zadania błędne jest następujące rozumowanie: „Ponieważ w delegacji ma być co najmniej jedna dziewczynka, więc najpierw z trzech dziewczynek wybieramy jedną na $\binom{3}{1}$ sposoby. Z pozostałych czterech osób – dwóch dziewczynek i dwóch chłopców – wybieramy drugą osobę na $\binom{4}{1}$ sposoby. Zatem liczba możliwości utworzenia delegacji, w której jest co najmniej jedna dziewczynka, jest równa $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}$."

Rozwiązanie jest błędne, bowiem $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}=3\cdot 4=12$, a poprawną odpowiedzią jest liczba 9. Błąd polega na tym, że w iloczynie $\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}$ trzy delegacje są liczone podwójnie: $\{X_1, X_2\}$, $\{X_2, X_3\}$ oraz $\{X_1, X_3\}$.

Na przykład, wybierając w pierwszym etapie dziewczynkę X_1, a w drugim etapie dziewczynkę X_2, otrzymamy delegację $\{X_1, X_2\}$. A jeśli w pierwszym etapie wybierzemy dziewczynkę X_2, a w drugim – dziewczynkę X_1, to otrzymamy delegację $\{X_2, X_1\}$.

Przykład 4.

W pudełku jest 100 losów, w tym 9 wygrywających Na ile sposobów można wyciągnąć trzy losy tak, aby wśród nich były co najmniej dwa wygrywające?

Możliwe są dwa rozłączne przypadki.

1) Wyciągniemy trzy losy, wśród których tylko dwa są wygrywające. Wówczas jeden los jest pusty.
2) Wyciągniemy trzy losy wygrywające.

Trzy losy wygrywające możemy wyciągnąć na $\binom{9}{3}$ sposobów.

Wyznaczamy liczbę możliwości wyciągnięcia trzech losów tak, aby wśród nich były co najmniej dwa wygrywające:

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{91}{1}+\binom{9}{3} = 36\cdot 91 + 84 = 3276 + 84 = 3360$$

Można wyciągnąć trzy losy tak, aby wśród nich były co najmniej dwa wygrywające, na 3360 sposobów.

Przykład 5.

W klasie jest 12 dziewcząt i 10 chłopców. Z tej klasy wybieramy delegację liczącą 4 osoby. Na ile sposobów można to zrobić tak, aby wśród wybranych osób był co najmniej jeden chłopiec?

Zadanie to można rozwiązać, rozpatrując cztery rozłączne przypadki. Można też postąpić w sposób następujący.

Wyznaczamy liczbę wszystkich możliwych delegacji: $\binom{22}{4}$.

Od tej liczby odejmujemy liczbę delegacji, które można utworzyć z samych dziewcząt. Pozostanie nam liczba delegacji, w których jest co najmniej jeden chłopiec:

$$\binom{22}{4}-\binom{12}{4} \quad \text{czyli} \quad 7315 - 495 = 6820$$

Ostatni przykład dotyczyć będzie rozkładu kart w grze w brydża. Talia do gry w brydża składa się z 52 kart w czterech kolorach. Kolory to: piki ♠, kiery ♥, kara ♦, trefle ♣. W każdym kolorze jest 13 kart: dziewięć kart od dwójki do dziesiątki oraz cztery figury: walet, dama, król i as.

Przykład 6.

Gracz w brydża dostaje 13 kart z talii 52-kartowej. Na ile sposobów może otrzymać:

a) 3 piki, 2 trefle i 1 kiera

b) 1 króla i co najmniej 3 asy?

Ad a)

Wybieramy 3 piki spośród 13 pików na

$\binom{13}{3}$ sposobów.

Następnie spośród 13 trefli wybieramy 2 trefle na

$\binom{13}{2}$ sposobów.

Podobnie jeden kier wybieramy na $\binom{13}{1}$ sposobów.

Suma powyższych kart jest równa 6. Zatem gracz otrzymuje jeszcze 7 kart w kolorze karo, które można wybrać na

$\binom{13}{7}$ sposobów.

Liczba sposobów otrzymania 13 kart, wśród których są 3 piki, 2 trefle i 1 kier, jest równa:

$$\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{2}\cdot\binom{13}{1}\cdot\binom{13}{7} \quad \text{czyli} \quad 2\,985\,881\,184.$$

Ad b) W talii składającej się z 52 kart mamy 4 karty będące asami i 4 karty będące królami.

Otrzymać wśród 13 kart jednego króla i co najmniej 3 asy oznacza:

1) otrzymać jednego króla i 3 asy albo 2) otrzymać jednego króla i 4 asy

W 1) przypadku wybieramy 1 króla z 4 króli, trzy asy z 4 asów i 9 kart spośród pozostałych 44 kart, które nie są ani królami ani asami.

Możemy wybrać te karty na

$$\binom{4}{1}\binom{4}{3}\binom{44}{9}$$ sposobów.

W 2) przypadku wybieramy jednego króla z 4 króli, 4 asy spośród 4 asów i 8 kart, które nie są królami.

Liczba takich wyborów jest równa

$$\binom{4}{1}\binom{4}{4}\binom{44}{8}$$

Ostatecznie liczba wszystkich możliwości wyboru 13 kart, wśród których jest 1 król i co najmniej 3 asy, wynosi:

$$\binom{4}{1}\binom{4}{3}\binom{44}{9}+\binom{4}{1}\binom{4}{4}\binom{44}{8}$$

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz:

a) $\binom{6}{3}$ b) $2\cdot\binom{7}{5}$ c) $\binom{8}{2}-\binom{5}{3}$ d) $\binom{10}{9}\cdot\binom{9}{0}$ e) $\binom{8}{5}\cdot 3!$ f) $\binom{9}{4}-4!$

D 2. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n:

a) $\binom{n}{0}=1$ b) $\binom{n}{1}=n$, o ile $n>0$ c) $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, o ile $n>1$.

3. Zbiór X ma 10 elementów. Oblicz, ile istnieje podzbiorów zbioru X:
   a) trzyelementowych b) pięcioelementowych c) sześcioelementowych.

D 4. Wykaż, że zbiór złożony z pięciu elementów ma 32 różne podzbiory.

5. Na płaszczyźnie danych jest 7 punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe.
   a) Ile różnych odcinków można otrzymać, których końcami są te punkty?
   b) Ile można otrzymać różnych trójkątów, których wierzchołkami są te punkty?

6. W bankiecie uczestniczyło 20 osób i każdy uczestnik przywitał się z każdym innym uczestnikiem. Ile było powitań?

7. Na płaszczyźnie znajduje się n punktów, spośród których dowolne trzy nie są współliniowe. Punkty te wyznaczają 45 prostych. Oblicz n.

8. Z pewnej klasy możemy wybrać dwuosobową delegację na 496 sposobów. Ile osób liczy ta klasa?

9. Do klasy III A w szkole sportowej uczęszcza 12 dziewcząt i 15 chłopców. Z tej klasy wybieramy sześcioosobową drużynę mieszaną do szkolnych zawodów. Na ile sposobów możemy wybrać drużynę, w której jest:
   a) tyle samo chłopców co dziewcząt
   b) dwa razy więcej chłopców niż dziewcząt?

10. W grupie znajduje się 16 kobiet i 14 mężczyzn. Oblicz, na ile sposobów możemy wybrać z tej grupy cztery osoby, jeśli wśród tych osób:
    a) mają być tylko mężczyźni
    b) mają być dwie kobiety
    c) ma być co najmniej jedna kobieta
    d) ma być co najwyżej jeden mężczyzna.

11. Na loterii znajduje się 50 losów, wśród nich jest 10 losów wygrywających. Oblicz, na ile sposobów możemy wyciągnąć trzy losy, wśród których:
    a) będą tylko losy wygrywające
    b) będzie jeden los wygrywający
    c) będzie więcej losów wygrywających niż przegrywających.

12. Na loterii znajduje się 30 losów, wśród nich jest 5 losów wygrywających. Oblicz, na ile sposobów możemy wyciągnąć cztery losy, wśród których:
    a) będą trzy losy wygrywające
    b) będzie co najmniej jeden los wygrywający
    c) będzie co najwyżej jeden los wygrywający.

13. Z talii 52 kart wybieramy 7 kart. Na ile sposobów możemy wybrać:
    a) same figury
    b) dwie damy, trzy walety i jednego asa
    c) co najwyżej jedną damę
    d) co najmniej trzy asy?

14. Na ile sposobów grający w brydża może otrzymać 13 kart, wśród których
    a) są 2 piki
    b) jest 5 pików, 4 kiery i 3 kara
    c) jest 6 kart czerwonych
    d) jest co najmniej jeden kier?

Kombinatoryka – zadania różne

Przykład 1.

Dane są dwa skończone zbiory liczbowe: zbiór A ma 5 elementów, a zbiór B – 7 elementów. Obliczymy, ile istnieje różnych funkcji odwzorowujących zbiór A w zbiór B:

a) dowolnych b) różnowartościowych c) malejących.

Ad a) Do dziedziny funkcji należy 5 elementów. Każdemu z nich możemy przyporządkować dowolny element spośród siedmiu należących do zbioru B na 7 sposobów. Możliwości zbudowania funkcji jest tyle, ile istnieje ciągów pięciowyrazowych o wartościach ze zbioru siedmioelementowego, czyli

$$7^5.$$

Istnieje 16 807 takich funkcji.

Ad b) Możemy utworzyć funkcję różnowartościową w następujący sposób: wybieramy 5 różnych elementów ze zbioru 7 elementowego na $\binom{7}{5}$ sposobów, a następnie wybrane elementy przyporządkowujemy elementom ze zbioru A na 5! sposobów. Otrzymujemy:

$$\binom{7}{5}\cdot 5! = \frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot 5! = \frac{5040}{2} = 2520$$

Istnieje 2520 takich funkcji różnowartościowych.

Ad c) Podobnie jak w przykładzie b), wybieramy 5 różnych elementów ze zbioru siedmioelementowego na $\binom{7}{5}$ sposobów. Następnie liczbom ze zbioru A ustawionym rosnąco przyporządkowujemy liczby ze zbioru B w sposób malejący. Możemy to zrobić na 1 sposób. Zatem liczba funkcji malejących jest równa:

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$$

Można utworzyć 21 funkcji malejących, odwzorowujących zbiór A w zbiór B.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż zadanie z przykładu 1b), korzystając z wariacji bez powtórzeń.

Przykład 2.

Ile różnych napisów (mających sens lub nie) można utworzyć, przestawiając litery wyrazu TATARAK?

W wyrazie TATARAK występują:

2 litery T, 3 litery A, 1 litera R, 1 litera K.

Zauważ, że nie każda zamiana dwóch liter wygeneruje nowy napis. Na przykład, jeśli w dowolnym napisie zamienimy miejscami dwie litery T, to otrzymamy ten sam napis.

I sposób: Wprowadzamy rozróżnienie dla powtarzających się liter: T_1, T_2 oraz A_1, A_2, A_3. Obliczamy, ile jest siedmiowyrazowych ciągów, gdzie kolejność wszystkich liter jest istotna:

$$7!$$

Rozróżnienie dwóch liter T jako T_1 i T_2 zwiększyło liczbę napisów 2! razy. Rozróżnienie trzech liter A jako liter A_1, A_2, A_3 zwiększyło liczbę napisów 3! razy. Zatem napisów, w których litery T i A nie są rozróżnialne, jest

$$\frac{7!}{2!\cdot 3!} \quad \text{czyli} \quad 420.$$

II sposób: Mamy siedem miejsc, które zapełniamy kolejnymi literami

□ □ □ □ □ □ □

najpierw wybieramy 2 miejsca na literę T. Możemy to zrobić na

$$\binom{7}{2} \text{ sposobów.}$$

Z pozostałych 5 miejsc wybieramy 3 miejsca na literę A. Możemy to zrobić na

$$\binom{5}{3} \text{ sposobów.}$$

Z pozostałych dwóch miejsc wybieramy jedno na literę R na dwa sposoby, a ostatnie miejsce przeznaczamy na literę K. Zatem wszystkich napisów jest

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot 2\cdot 1.$$

Obliczamy:

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot 2\cdot 1 = \frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 2! = \frac{7!}{2!\cdot 3!} = 420$$

Przestawiając litery wyrazu w słowie TATARAK możemy otrzymać 420 różnych napisów.

Przykład 3.

Obliczymy, ile jest liczb dwunastocyfrowych, utworzonych w następujący sposób:

– do zapisu każdej liczby wybieramy trzy cyfry ze zbioru {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6},

– jedna cyfra występuje 3 razy, druga cyfra występuje 4 razy, trzecia cyfra występuje 5 razy.

Rozpatrzymy dwa przypadki.

I przypadek – Żadna z trzech wybranych liczb nie jest zerem.

Załóżmy, że wybraliśmy cyfry 1, 2, 3 w taki sposób, że w liczbie dwunastocyfrowej cyfra 1 występuje trzy razy, cyfra 2 – cztery razy, a cyfra 3 – pięć razy. Wówczas przykładowe ustawienie tych cyfr mogłoby być następujące:

1 1 2 3 2 1 3 3 3 2 2 3

Wszystkich takich liczb jest

$$\binom{6}{3}\cdot 3\cdot\binom{12}{3}\cdot 2\cdot\binom{9}{4}\cdot 1\cdot\binom{5}{5}, \quad \text{czyli} \quad 3\,326\,400$$

Mamy bowiem:

$\binom{6}{3}$ – liczba wyborów 3 cyfr spośród cyfr od 1 do 6.

$3\cdot\binom{12}{3}$ – liczba wyborów jednej cyfry spośród wybranych trzech powyżej, która ma w zapisie liczby dwunastocyfrowej wystąpić trzy razy, oraz trzech spośród dwunastu miejsc na tę cyfrę.

$2\cdot\binom{9}{4}$ – liczba wyborów jednej cyfry spośród dwóch pozostałych, wybranych powyżej, która ma w zapisie liczby dwunastocyfrowej wystąpić cztery razy, oraz czterech miejsc spośród 9 na tę cyfrę.

W ostatnie 5 miejsc wpisujemy ostatnią wybraną cyfrę na jeden sposób: $1\cdot\binom{5}{5}$.

II przypadek – Jedna z trzech wybranych cyfr jest zerem. Zero nie występuje na początku liczby dwunastocyfrowej. Mamy trzy możliwości:

a) Zero występuje w zapisie liczby dwunastocyfrowej 3 razy.

□ □ □ □ 0 □ □ □ □ 0 □ 0

Takich liczb jest

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{11}{3}\cdot 2\cdot\binom{9}{4}\cdot 1\cdot\binom{5}{5},\quad \text{czyli}\quad 623\,700,\quad \text{gdzie:}$$

$\binom{6}{2}$ – liczba możliwości wyboru dwóch cyfr, różnych od zera,

$\binom{11}{3}$ – liczba możliwości wyboru trzech miejsc dla zer bez pierwszego miejsca,

$2\cdot\binom{9}{4}$ – liczba możliwości wyboru pierwszej cyfry niezerowej spośród dwóch wybranych wcześniej i czterech miejsc dla tej cyfry spośród dziewięciu miejsc.

W pozostałe 5 miejsc wstawiamy drugą wybraną cyfrę na $1\cdot\binom{5}{5}$, czyli 1 sposób.

b) Zero występuje w zapisie liczby dwunastocyfrowej 4 razy i nie występuje na początku tej liczby.

□ 0 □ 0 □ □ □ 0 □ □ 0 □

Takich liczb jest

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{11}{4}\cdot 2\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{5},\quad \text{czyli}\quad 554\,400$$

c) Zero występuje w zapisie liczby dwunastocyfrowej 5 razy i nie występuje na początku tej liczby.

□ □ 0 □ 0 □ □ 0 0 0 □ □

Takich liczb jest

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{11}{5}\cdot 2\cdot\binom{7}{3}\binom{4}{4},\quad \text{czyli}\quad 485\,100.$$

Liczba wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest równa:

3 326 400 + 623 700 + 554 400 + 485 100, czyli 4 989 600.

Przykład 4.

Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których suma cyfr:

a) jest równa 4 b) jest równa 9?

Ad a) Rozważymy pięć przypadków.

I przypadek – Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej jest czwórka i pięć zer.

4 0 0 0 0 0

Jest jedna taka liczba.

II przypadek – Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej jest trójka, jedynka i cztery zera, na przykład:

3 0 0 0 1 0 1 0 0 3 0 0

Cyfrę na pierwszym miejscu wybieramy na 2 sposoby. Miejsce dla drugiej cyfry różnej od zera wybieramy na 5 sposobów. Pozostałe miejsca zajmują zera. Zatem w tym przypadku liczb sześciocyfrowych mamy $2 \cdot 5$, czyli 10.

III przypadek – Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej są dwie dwójki i cztery zera, na przykład:

2 0 2 0 0 0

Cyfrą na pierwszym miejscu jest dwójka. Miejsce dla drugiej dwójki można wybrać na 5 sposobów, zatem w tym przypadku jest 5 liczb.

IV przypadek – Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej jest dwójka, dwie jedynki i trzy zera, na przykład:

2 1 0 0 0 1 1 0 0 2 1 0

Jeśli na pierwszym miejscu mamy dwójkę, to miejsca dla dwóch jedynek możemy wybrać na $\binom{5}{2}$ sposobów. Jeśli na pierwszym miejscu jest jedynka, to miejsce dla drugiej jedynki i jednej dwójki można wybrać na $\binom{5}{2} \cdot 2$ sposobów. Zatem w tym przypadku jest $\binom{5}{2} + \binom{5}{2} \cdot 2$, czyli 30 liczb.

V przypadek – Wśród cyfr liczby sześciocyfrowej są cztery jedynki i dwa zera, np.:

1 0 1 1 1 0

Na pierwszym miejscu jest jedynka, miejsca dla trzech pozostałych jedynek można wybrać na $\binom{5}{3}$ sposobów, czyli w tym przypadku jest 10 liczb.

Innych przypadków nie ma. Wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest

$1 + 10 + 5 + 30 + 10$, czyli 56.

Ad b) Rozwiązanie tego zadania metodą zaprezentowaną w punkcie a) byłoby bardzo żmudne. Opracujemy więc inną.

Liczbę sześciocyfrową, na przykład, 203 112, można przedstawić następująco:

2 0 3 1 1 2

|• •| |• • •|•|•|• •|

Mamy sześć komórek wyznaczonych przez 7 pionowych kresek oraz 9 kropek. Liczba kropek w pierwszej komórce określa liczbę setek tysięcy, liczba kropek

w drugiej komórce określa liczbę dziesiątek tysięcy i tak dalej, aż do szóstej komórki, w której liczba kropek określa liczbę jedności. Jeśli teraz poprzestawiamy pionowe kreski, to otrzymamy przedstawienie innej liczby, na przykład:

|• • • • •|•|•|• •| | |
5 1 1 2 0 0

To odpowiada liczbie 511 200.

Czy każde przestawienie kresek pozwoli otrzymać liczbę sześciocyfrową? Otóż nie. Zauważ, że zapis

| |•|•|•|• • • • • •| |
0 1 1 1 6 0

oznaczałby liczbę 11 160, która jest liczbą pięciocyfrową.

Zatem pierwsza komórka nie może być pusta. Ponadto, zapis każdej liczby powinien się zaczynać i kończyć pionową kreską. To znaczy, że skrajne kreski pionowe pozostają nieruchome. Aby pierwsza komórka nie była pusta, dołączamy jedną kropkę do początkowej skrajnej kreski. W zapisie na rysunku poniżej kolorem czerwonym są zaznaczone elementy nieruchome, a kolorem niebieskim – elementy, które mogą zmieniać miejsce.



Elementów niebieskich jest 8 + 5, czyli 13. Każdy wybór: pięciu miejsc z trzynastu na niebieskie kreski albo ośmiu miejsc z trzynastu na niebieskie kropki – wyznacza nam zapis liczby sześciocyfrowej, w której suma cyfr jest równa 9. Zatem wszystkich takich liczb jest

$\binom{13}{5}$, czyli 1287.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Zbiór A ma 8 elementów, zaś zbiór B – 10 elementów. Ile jest funkcji odwzorowujących zbiór A w zbiór B:
   a) dowolnych
   b) różnowartościowych
   c) stałych
   d) które są malejące lub rosnące?

2. Ile różnych napisów można otrzymać, przestawiając litery wyrazu:
   a) KOS
   b) MAMA
   c) DAMA
   d) KARATEKA
   e) KROKODYL
   f) MINIMUM?

3. W pudełku jest 6 różnych kul czarnych, 7 różnych kul białych i 8 różnych kul żółtych. Losujemy trzy kule. Oblicz, ile jest możliwych wyników losowania, jeśli:
   a) każda z wylosowanych kul jest innego koloru
   b) wylosowane trzy kule są tego samego koloru
   c) wylosowano co najmniej jedną kulę białą
   d) wylosowano co najwyżej jedną kulę żółtą.

4. Z talii 52 kart wybieramy 5 kart. Na ile sposobów możemy wybrać te karty
   a) dokładnie w dwóch karcianych kolorach
   b) co najwyżej w dwóch karcianych kolorach?

5. Mamy 5 kompletów różnych rękawiczek . Na ile sposobów można połączyć wszystkie rękawiczki w pary tak, aby:
   a) w każdej parze była rękawiczka lewa i rękawiczka prawa
   b) tylko trzy spośród tych par stanowiły komplet?

6. Sześciu studentów: Artura, Bartosza, Czesława, Damiana, Eryka i Filipa należy rozmieścić w trzech dwuosobowych pokojach o numerach 100, 101 i 102. Na ile sposobów można to zrobić, jeśli:
   a) każdy może mieszkać z każdym
   b) Artur, Bartosz i Czesław mają mieszkać każdy w innym pokoju?

7. W grupie wczesnoszkolnej mamy 7 dziewczynek i 7 chłopców. Na ile sposobów można połączyć je w następujące pary: trzy pary złożone z dziewczynki i chłopca, dwie pary dziewczynek i dwie pary chłopców, jeśli:
   a) kolejność par nie ma znaczenia
   b) kolejność par ma znaczenie
   c) najpierw ustawiamy pary dziewczynka – chłopiec, następnie pary złożone tylko z dziewczynek, a na końcu pary złożone tylko z chłopców?

8. Ile jest różnych numerów telefonów komórkowych, w których pierwsza cyfra jest równa 6 lub 8, ostatnie trzy cyfry są różnymi liczbami nieparzystymi, a cyfra 0 występuje trzy razy?

9. Ile jest różnych numerów telefonów komórkowych, w których nie występuje cyfra 0, siódemka występuje 3 razy, czwórka występuje 2 razy, pierwsza cyfra jest parzysta, a ostatnie trzy cyfry to 1, 2, 3 występujące w dowolnej kolejności?

10. Oblicz, ile jest różnych liczb sześciocyfrowych, utworzonych z trzech cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5}, jeśli jedna z tych cyfr występuje jeden raz, druga – dwa razy, a trzecia – trzy razy.

11. Oblicz, ile jest liczb dwudziestocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy:
   a) 8 b) 16 c) 24.

12. Ile jest liczb siedmiocyfrowych, których:
   a) suma cyfr jest równa 6
   b) suma cyfr jest równa 6 i jednocześnie w zapisie tej liczby nie występuje cyfra 1?

Symbol Newtona. Wzór Newtona. Trójkąt Pascala

Symbol $\binom{n}{k}$, określający liczbę podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego, nazywamy **symbolem Newtona**.

Własności symbolu Newtona określa poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Własności symbolu Newtona*

a) $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$

b) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}, k \in \boldsymbol{N}$ i $k \leqslant n$

c) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}, k \in \boldsymbol{N}$ i $k \leqslant n-1$

Dowód własności b)

I sposób – korzystamy z definicji 2. ze str. 187

Rozważmy zbiór n-elementowy: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Wybierając dowolny podzbiór k-elementowy, tworzymy jednocześnie podzbiór złożony z $(n-k)$ elementów, który dopełnia zbiór k-elementowy do zbioru n-elementowego, na przykład:

$\underbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k,}_{\text{podzbiór } k\text{-elementowy}}\ \underbrace{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots, a_n}_{\text{podzbiór } (n-k)\text{-elementowy}}$

Tak więc liczba podzbiorów k-elementowych i $(n-k)$-elementowych jest taka sama.

To znaczy, że $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

II sposób – korzystamy z twierdzenia 1. ze str. 188

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{\left[n-(n-k)\right]!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Dowód własności c)

I sposób – korzystamy z definicji 2. ze str. 187

Rozważmy zbiór n-elementowy: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Liczba k-elementowych podzbiorów tego zbioru jest równa $\binom{n}{k}$. Podzbiory k-elementowe zbioru mającego n elementów możemy podzielić na dwie rozłączne grupy.

1) Do pierwszej grupy należą te k-elementowe podzbiory, do których **należy a_1**. Spośród elementów $a_2, a_3, \ldots, a_n$ wybieramy $k-1$ elementów i dołączamy do elementu a_1. Takich podzbiorów mamy $\binom{n-1}{k-1}$.

2) Do drugiej grupy należą te k-elementowe podzbiory, do których **nie należy a_1**. Spośród elementów $a_2, a_3, \ldots, a_n$ wybieramy k elementów. Takich podzbiorów mamy $\binom{n-1}{k}$.

Innych podzbiorów nie ma. Ostatecznie więc $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

II sposób – korzystamy z twierdzenia 1. ze str. 188

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}=$$

$$=\frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!}+\frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$$

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie wzór na $(a+b)^2$ oraz wzór na $(a+b)^3$. Następnie, korzystając z któregoś z nich, wyprowadź wzór na $(a+b)^4$.

Teraz wyprowadzimy wzór na $(a+b)^4$ inną metodą. Wiemy, że

$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$.

Aby otrzymać sumę, mnożymy każdy składnik z pierwszego nawiasu przez każdy składnik z kolejnych nawiasów i dodajemy otrzymane jednomiany. Pogrupujemy te jednomiany w następujący sposób.

1) Z każdego nawiasu wybieramy składnik a na jeden sposób. Mnożymy $a \cdot a \cdot a \cdot a$ i otrzymujemy jeden jednomian postaci a^4.

2) Z trzech nawiasów wybieramy a, zaś z jednego nawiasu wybieramy b i po pomnożeniu otrzymujemy jednomian a^3b. Takich jednomianów w szukanej sumie będzie tyle, ile mamy możliwości wyboru jednej litery b spośród 4 nawiasów,

czyli $\binom{4}{1}$. Tak więc po pomnożeniu czterech nawiasów w otrzymanej sumie jednomian a^3b pojawi się $\binom{4}{1}$, czyli 4 razy.

3) Z dwóch nawiasów wybieramy a i z dwóch pozostałych nawiasów wybieramy b. Otrzymujemy jednomian a^2b^2. Takich jednomianów będzie w szukanej sumie tyle, ile jest możliwości wyboru dwóch liter b spośród 4 nawiasów, czyli $\binom{4}{2}$.
4) Z jednego nawiasu wybieramy a i z trzech pozostałych nawiasów wybieramy b. Otrzymujemy jednomian ab^3. Takich jednomianów będzie w szukanej sumie tyle, ile jest możliwości wyboru trzech liter b spośród 4 nawiasów, czyli $\binom{4}{3}$.
5) Z każdego nawiasu wybieramy b na jeden sposób. Otrzymujemy b^4. Tylko jeden taki jednomian występuje w szukanej sumie.

Zauważ, że wszystkie jednomiany występujące w rozwinięciu $(a+b)^4$ są czwartego stopnia. Tak więc rozpatrzyliśmy wszystkie możliwe przypadki. Zatem

$$(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + b^4$$

Ponieważ $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$, więc ostatecznie możemy zapisać:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4, \quad \text{stąd}$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Podobne rozumowanie można powtórzyć przy dowolnym wykładniku potęgi wyrażenia $(a+b)$. Dla wykładnika równego 3 znany Ci wzór przyjmuje postać

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

Twierdzenie 2.

Dla dowolnej liczby naturalnej n, $n \geqslant 1$, prawdziwy jest wzór

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Wzór występujący w twierdzeniu 2. nazywamy **wzorem Newtona** lub **dwumianem Newtona**. Liczby $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ nazywamy współczynnikami rozwinięcia dwumianu Newtona.

We wzorze Newtona, po prawej stronie znaku równości, występuje suma $n + 1$ wyrazów. Będziemy je po kolei oznaczać $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$. Możemy zapisać:

$$c_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ćwiczenie 2. Wyznacz:

a) szósty wyraz rozwinięcia $(a + 4)^9$ b) piąty wyraz rozwinięcia $(3 + b)^{10}$.

Wypiszmy teraz kolejno współczynniki rozwinięcia dwumianu Newtona, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ i $n \geqslant 1$. W pierwszym wierszu wpisujemy $\binom{0}{0}$, czyli 1. Mamy

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n = 1 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n = 2 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n = 3 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n = 4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Otrzymaliśmy nieskończoną tablicę. Brakujące wiersze zastąpiliśmy kropkami na dole tablicy. Tablicę tę nazywamy **trójkątem Pascala**.

Ćwiczenie 3. Przepisz powyższy trójkąt Pascala do zeszytu i uzupełnij kolejne dwa wiersze tej tabeli. Następnie zastąp symbole Newtona odpowiednimi liczbami.

Trójkąt Pascala pozwala łatwo obliczyć wartości niektórych symboli Newtona, bez konieczności posługiwania się pojęciem silni.

Zauważ, że:

1) Współczynniki rozwinięcia, jednakowo odległe od początku i od końca tego rozwinięcia, są równe. Wynika to ze wzoru $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

2) Każdy współczynnik rozwinięcia – oprócz brzegowych jedynek – jest sumą dwóch współczynników znajdujących się w trójkącie Pascala bezpośrednio nad nim. Wynika to ze wzoru $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

					1							
$n=1$				1		1						
$n=2$			1		2		1					
$n=3$		1		3		3		1				
$n=4$	1		4		6		4		1			
$n=5$		1		5		10		10		5		1
$n=6$			1		6		15		20		15	
$n=7$		1		7		21		35		35		
$n=8$	1		8		28		56		70		56	

Ćwiczenie 4. Stosując powyższe własności zapisz w zeszycie trójkąt Pascala z liczbami do dziewiątego wiersza włącznie.

Przykład 1.

Obliczymy $(x-2)^6$.

Różnicę $x-2$ zapisujemy jako sumę $x+(-2)$. Następnie stosujemy wzór Newtona. Odpowiednie współczynniki rozwinięcia odczytujemy z trójkąta Pascala. Otrzymujemy:

$$[x+(-2)]^6 = 1x^6 + 6x^5(-2) + 15x^4(-2)^2 + 20x^3(-2)^3 + 15x^2(-2)^4 + 6x(-2)^5 + 1\cdot(-2)^6 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$$

Ćwiczenie 5. Oblicz: a) $(a+2)^7$ b) $(b-1)^8$.

Przykład 2.

Suma symboli Newtona trzeciego i czwartego wyrazu rozwinięcia $(x-1)^n$ jest równa 120. Wyznaczymy siódmy wyraz tego rozwinięcia.

Z warunków zadania wynika, że $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=120$, gdzie $n \geqslant 3$. Zatem

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-120=0, \text{ skąd po uproszczeniu otrzymujemy}$$

$$n^3-n-720=0$$

Możesz wykazać, że jedynym rozwiązaniem ostatniego równania jest liczba 9. Wyznaczamy c_7:

$$c_7=\binom{9}{6}x^3(-1)^6=84x^3.$$

Przykład 3.

Wyznaczymy wyraz rozwinięcia $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{20}$, gdzie $x \neq 0$, który nie zawiera x.

Korzystamy ze wzoru na $(k+1)$-szy wyraz. Mamy:

$$c_{k+1}=\binom{20}{k}\left(x^3\right)^{20-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\binom{20}{k}x^{60-3k}\cdot x^{-k}=\binom{20}{k}x^{60-4k}$$

Wymień prawa działań na potęgach, które wykorzystaliśmy w powyższych obliczeniach. Wyraz c_{k+1} nie zawiera x tylko wtedy, gdy $60-4k=0$, czyli wtedy, gdy $k=15$.

Zatem jest to wyraz c_{16}. Mamy $c_{16}=\binom{20}{15}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Korzystając z trójkąta Pascala podaj wartość wyrażenia:

a) $\binom{8}{4}$ b) $\binom{9}{6}$ c) $\binom{7}{4}+\binom{7}{5}$

d) $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}$ e) $\binom{10}{6}$ f) $\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{6}{5}$

2. Zapisz w postaci sumy:

a) $(a+1)^8$ b) $(x+3)^5$ c) $(b-5)^4$

d) $(1-x)^9$ e) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^7$ f) $\left(\frac{1}{3}y+3\right)^6$

3. Wyznacz:

a) dziewiąty wyraz rozwinięcia $(3x+2)^{11}$

b) środkowy wyraz rozwinięcia $(2x-1)^{10}$.

4. Środkowy wyraz rozwinięcia $\left(\frac{1}{3}x+a\right)^{12}$ jest równy $924x^6$.

a) Oblicz a.

b) Dla wyznaczonej wartości a podaj piąty wyraz tego rozwinięcia.

5. Współczynnik przy x^5 wielomianu $(x-a)^{15}$ w postaci uporządkowanej jest równy 3003.

a) Oblicz a.

b) Dla wyznaczonej liczby a podaj dziesiąty wyraz rozwinięcia dwumianu $(x-a)^{15}$.

6. Wyznacz wyraz rozwinięcia $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$, gdzie $x \neq 0$, który nie zawiera x.

7. Suma współczynników czterech początkowych wyrazów rozwinięcia $(x+1)^n$ jest równa $29n+1$. Oblicz n.

D 8. Wykaż, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru 10-elementowego jest równa 2^{10}.

D 9. Wykaż, że liczba podzbiorów zbioru 10-elementowego, mających parzystą liczbę elementów, jest taka sama, jak liczba podzbiorów tego zbioru, mających nieparzystą liczbę elementów.

10. Oblicz:

a) $\binom{12}{1}+\binom{12}{2}+\binom{12}{3}+\ldots+\binom{12}{10}+\binom{12}{11}$

b) $\binom{9}{0}+\binom{9}{2}+\binom{9}{4}+\binom{9}{6}+\binom{9}{8}$

c) $\binom{8}{1}+\binom{8}{3}+\binom{8}{5}+\binom{8}{7}$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3.

Test

1. Ile liczb czterocyfrowych można ułożyć z cyfr należących do zbioru {0, 1, 2, 3, 4}?
   A. 4! B. $4 \cdot 4!$ C. 5^4 D. $4 \cdot 5^3$

2. Ile liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach można otrzymać z cyfr należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}?
   A. 343 B. 3^7 C. 210 D. $\binom{7}{4} \cdot 4!$

3. Sześciokąt foremny *ABCDEF* ma bok o długości 1. Na ile sposobów można wybrać dwa jego wierzchołki, które są końcami odcinka o długości 2?
   A. 6 B. 4 C. 3 D. 2

4. Ile prostych wyznacza 8 punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe?
   A. 32 B. 28 C. 24 D. 21

5. Na ile sposobów można ustawić w szeregu pięć dziewcząt i czterech chłopców tak, aby dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie?
   A. $5! \cdot 4!$ B. $5! + 4!$ C. $5! - 4!$ D. $\binom{5}{4} \cdot 4!$

6. Na ile sposobów można posadzić przy okrągłym stole 9 osób? Zakładamy, że różne usadzenia to takie, w których co najmniej jedna osoba ma innego sąsiada co najmniej po jednej stronie.
   A. 9! B. 8! C. $9! - 9$ D. $8! + 8$

7. Ile jest liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5?
   A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

8. Liczba podzbiorów siedmioelementowych zbioru mającego dziewięć elementów jest równa:
   A. 36 B. 27 C. 18 D. 12

9. Do klasy trzeciej uczęszcza 15 dziewcząt i 10 chłopców. Na ile sposobów można wybrać trzyosobową delegację tej klasy, złożoną z dwóch dziewcząt i jednego chłopca?
   A. $15 \cdot 14 \cdot 10$ B. $15 \cdot 7 \cdot 10$ C. $25 \cdot 12 \cdot 14$ D. $15 \cdot 14 + 10$

10. W grupie 10 przyjaciół 5 osób uprawia siatkówkę, 4 osoby chodzą na zajęcia piłki nożnej, a 2 osoby nie uprawiają żadnej z tych dyscyplin. Ile osób z tej grupy uprawia obydwie dyscypliny sportu?
    A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

Zadania otwarte

11. Ze zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6} wybieramy kolejno dwie różne cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Wykonaj tabelę ilustrującą wszystkie możliwości. Na ile sposobów możemy utworzyć liczbę:
    a) podzielną przez 3
    b) parzystą
    c) większą od 31
    d) której suma cyfr jest parzysta?

12. Ze zbioru {1, 2, 3, 4} wybieramy trzy różne cyfry i tworzymy liczbę trzycyfrową.
    a) Wypisz wszystkie możliwe liczby otrzymane w ten sposób. Wykonaj trzyetapowe drzewo.
    b) Ile jest wśród otrzymanych liczb takich, które są mniejsze od 242?

13. Oblicz, ile jest liczb dwucyfrowych o cyfrach należących do zbioru {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} i których iloczyn cyfr:
    a) jest podzielny przez 12
    b) jest większy od 12.

14. Ile jest liczb dwucyfrowych o cyfrach należących do zbioru {0, 1, 2, 3, 4, 5}, których suma cyfr:
    a) jest równa 5
    b) jest nie mniejsza od 5?

15. Pewna dama ma do dyspozycji: 4 apaszki czerwone i 3 zielone, 3 torebki czarne, jedną czerwoną i jedną zieloną oraz 3 pary pantofli czarnych, 2 pary czerwonych i jedną parę pantofli zielonych. Na ile sposobów może wybrać zestaw składający się z jednej apaszki, jednej torebki i jednej pary pantofli:
    a) w kolorze czerwonym
    b) w jednym kolorze
    c) aby tylko apaszka była w kolorze zielonym
    d) aby co najmniej pantofle były w kolorze czarnym?

16. Blok mieszkalny ma parter oraz dziesięć pięter. Do windy na parterze wsiadają 4 osoby. Oblicz, na ile sposobów te osoby mogą wysiąść na piętrach, jeśli:
    a) każda osoba ma wysiąść na innym piętrze
    b) co najmniej jedna osoba wysiądzie na piątym piętrze.

17. Oblicz, na ile sposobów można wrzucić 7 ponumerowanych kul numerami od 1 do 7 do pięciu różnych szuflad tak, aby:
    a) w pierwszej szufladzie były tylko kule z numerami 1 i 2
    b) każda kula z numerem nieparzystym trafiła do pierwszej lub drugiej szuflady, a każda kula z numerem parzystym trafiła do trzeciej, czwartej lub piątej szuflady.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

18. W galerii jest przygotowywana wystawa malarstwa olejnego. Na jednej ze ścian należy zawiesić w jednym rzędzie 8 obrazów. Oblicz, na ile sposobów można to zrobić, jeżeli dwa największe płótna:
    a) mają być umieszczone na skrajnych miejscach,
    b) mają sąsiadować ze sobą.

19. Mamy 7 książek, w tym książki A i B. Ustawiamy je na pustej półce, jedna obok drugiej. Oblicz, na ile sposobów można ustawić je tak, aby:
    a) książki A i B nie stały obok siebie
    b) pomiędzy książkami A i B stały książki C, D, E w dowolnej kolejności.

20. Oblicz, ile jest numerów telefonów komórkowych, takich, że pierwsza cyfra jest równa 5 lub 6 lub 7, ostatnie cztery cyfry są różnymi od siebie liczbami pierwszymi, cyfra 9 stoi tylko na drugim miejscu, a pozostałe cyfry to liczby parzyste.

21. Oblicz, ile jest samochodowych numerów rejestracyjnych, w których na początku stoją dwie litery alfabetu składającego się z 24 liter, a na pozostałych pięciu miejscach występuje 5 cyfr i co najmniej jedna z nich jest różna od 0.

22. W klasie III A jest 20 chłopców i 12 dziewcząt. Na ile sposobów można wybrać trzyosobową delegację tej klasy tak, aby wśród wybranych osób było co najmniej dwóch chłopców?

23. Na przyjęciu każda z osób przywitała się z każdą inną osobą. Oblicz, ile było wszystkich osób na przyjęciu, jeśli nastąpiło 105 powitań.

24. Pewien zbiór ma n elementów. Wiedząc, że liczba podzbiorów trzyelementowych tego zbioru jest o 5 większa od liczby jego podzbiorów dwuelementowych, oblicz n.

25. Oblicz, ile jest liczb mniejszych od 1000 i jednocześnie większych od 215, które są:
    a) podzielne przez 8,
    b) podzielne przez 25.

26. Oblicz, ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach i jednocześnie:
    a) większych od liczby 1234,
    b) mniejszych od liczby 7510.

27. Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, o różnych cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i jednocześnie:
    a) parzystych,
    b) podzielnych przez 4.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

28. Oblicz, ile różnych napisów mających sens lub nie można otrzymać, przestawiając litery w wyrazie:
a) KOTEK b) KAWA c) TELENOWELA.

29. Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, utworzonych z cyfr należących do zbioru {0, 1, 2}, w których cyfra 1 występuje dwa razy, a cyfra 2 – pięć razy?

30. Klasa III C miała zająć miejsca w kinie w dwóch rzędach: w rzędzie szóstym od miejsca 1. do miejsca 14. oraz w rzędzie siódmym od miejsca 25. do miejsca 35.
a) Ile osób liczy klasa, jeśli wszyscy uczniowie tej klasy wybierają się do kina i zajmą wszystkie przysługujące im miejsca?
b) W klasie III C jest 10 chłopców. Na ile sposobów uczniowie i uczennice klasy III C mogą zająć miejsca tak, aby wszyscy chłopcy siedzieli w jednym rzędzie?
c) Do klasy III C uczęszczają Ania, Basia i Darek. Na ile sposobów te osoby mogą zająć trzy sąsiednie miejsca, a pozostali uczniowie i uczennice tej klasy – pozostałe miejsca?

31. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 9?

32. Oblicz, ile jest liczb dwudziestocyfrowych, utworzonych z cyfr 0, 1:
a) parzystych
b) w których cyfra 1 występuje co najwyżej trzy razy
c) większych od liczby $111 \cdot 10^{17} + 1$.

33. Oblicz, ile jest liczb piętnastocyfrowych, których suma cyfr jest równa 5, jeśli w zapisie takiej liczby:
a) występuje cyfra 2 b) nie występuje cyfra 2.

34. Oblicz: $\binom{16}{0}+\binom{16}{2}+\binom{16}{4}+\ldots+\binom{16}{14}+\binom{16}{16}$.

35. Wyznacz środkowy wyraz rozwinięcia $\left(x-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{16}$.

36. Suma współczynników dwóch ostatnich wyrazów rozwinięcia dwumianu $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^n$ jest równa 19, gdzie $x \neq 0$. Wyznacz n i szósty wyraz rozwinięcia dwumianu.

37. Wyznacz wyraz rozwinięcia $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{20}$, który nie zawiera x, gdzie $x > 0$.

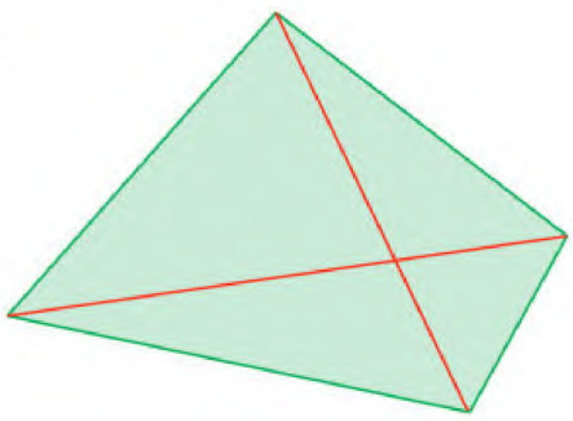
Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

4. Geometria płaska – czworokąty

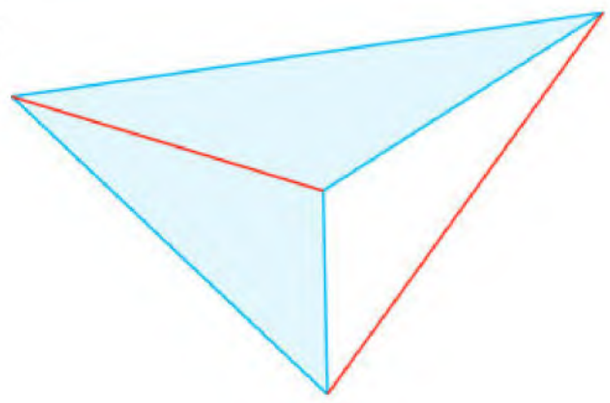
Podział czworokątów. Trapezoidy

Czworokąt jest to wielokąt, mający cztery boki. Suma długości boków czworokąta to jego obwód.

a)



b)



Czworokąt na rysunku a) jest wypukły, a na rysunku b) wklęsły.

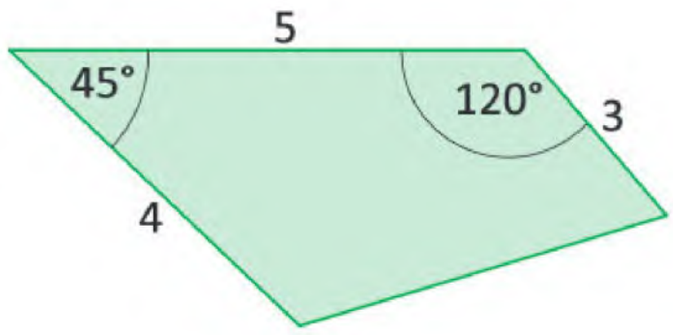
Odcinek, który łączy dwa wierzchołki i nie jest bokiem, nazywamy **przekątną czworokąta**. Na rysunkach powyżej przekątne są zaznaczone kolorem czerwonym. Każdy czworokąt ma dwie przekątne. Korzystając z nierówności trójkąta można pokazać, że suma długości przekątnych dowolnego czworokąta jest mniejsza od obwodu tego czworokąta.

Twierdzenie 1.

Suma kątów dowolnego czworokąta jest równa 360°.

Ćwiczenie 1. Miary kątów pewnego czworokąta pozostają w stosunku 1 : 2 : 3 : 7. Czy ten czworokąt jest wypukły czy wklęsły? Odpowiedź uzasadnij.

Ćwiczenie 2. Na rysunku obok dane są długości trzech boków czworokąta wypukłego oraz miary dwóch jego kątów. Oblicz długości przekątnych tego czworokąta.

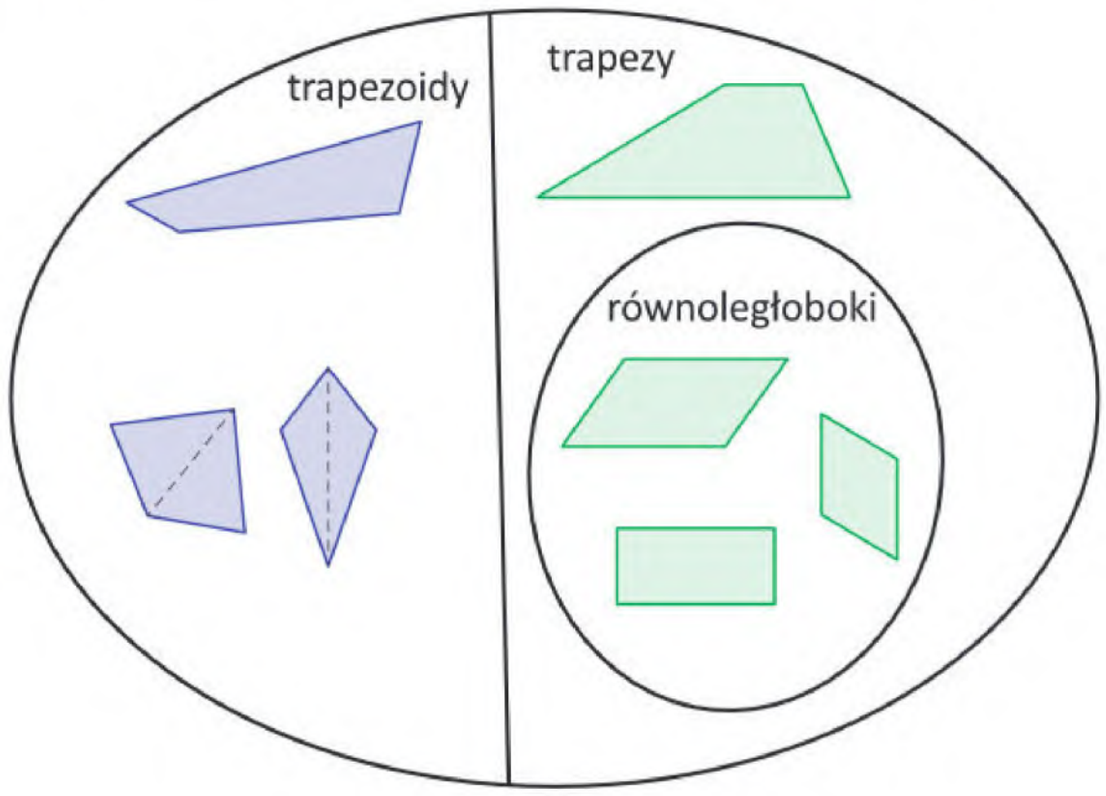


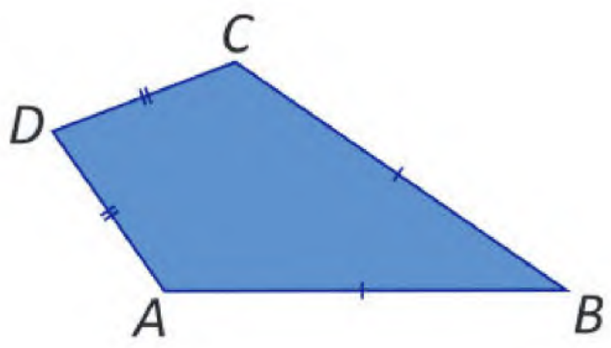
W dalszej części tematu zajmiemy się tylko czworokątami wypukłymi.

Ze względu na liczbę par boków równoległych czworokąty wypukłe dzielimy na:

- **trapezoidy**, czyli czworokąty niemające ani jednej pary boków równoległych;
- **trapezy**, czyli czworokąty, mające co najmniej jedną parę boków równoległych. Jeśli trapez ma dwie pary boków równoległych, to jest **równoległobokiem**.

Poniżej przedstawiamy taki podział czworokątów wypukłych.





Deltoidem nazywamy czworokąt wypukły mający dwie pary sąsiednich boków równych.

Na rysunku obok przedstawiony jest deltoid, w którym

$$|AB| = |BC| \quad \text{i} \quad |AD| = |CD|$$

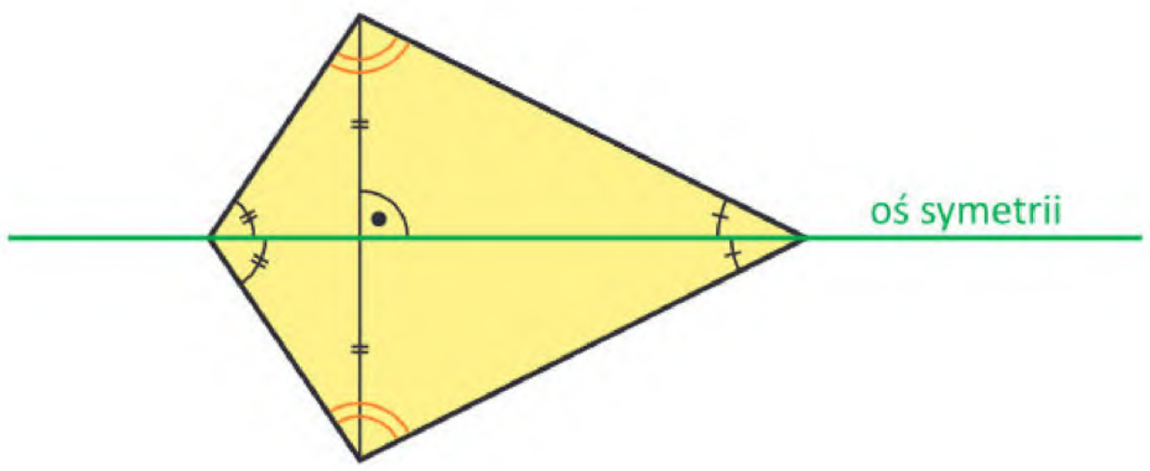
Twierdzenie 2. *Własności deltoidu*

a) Deltoid ma oś symetrii.

b) Przekątne deltoidu są prostopadłe.

c) Deltoid ma parę kątów przeciwległych o równych miarach.

d) Punkt przecięcia przekątnych deltoidu dzieli przekątną, łączącą wierzchołki kątów o równych miarach, na połowy.



Ćwiczenie 3. Punkt przecięcia się przekątnych deltoidu dzieli je w następujący sposób: pierwszą na równe odcinki długości 8 cm, a drugą na odcinki długości 6 cm i 15 cm. Oblicz:

a) obwód deltoidu

b) przybliżone miary kątów tego deltoidu.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz miary kątów czworokąta $ABCD$ wiedząc, że:
   a) najmniejszym kątem jest kąt przy wierzchołku A, a kolejne kąty, zaczynając od kąta przy wierzchołku B, są większe o 10° od kąta poprzedniego,
   b) pozostają one w stosunku $1 : 2 : 4 : 5$.

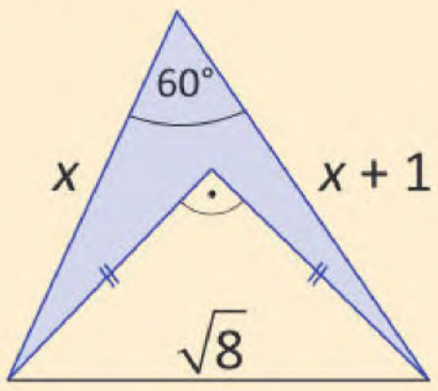
2. W czworokącie $ABCD$ sumy miar przeciwległych kątów są równe. Wiedząc, że $|\sphericalangle DAB| : |\sphericalangle BCD| = 4 : 5$ oraz kąt ADC ma miarę o 40° większą niż kąt ABC, oblicz miary kątów tego czworokąta. Czy czworokąt $ABCD$ jest deltoidem? Odpowiedź uzasadnij.

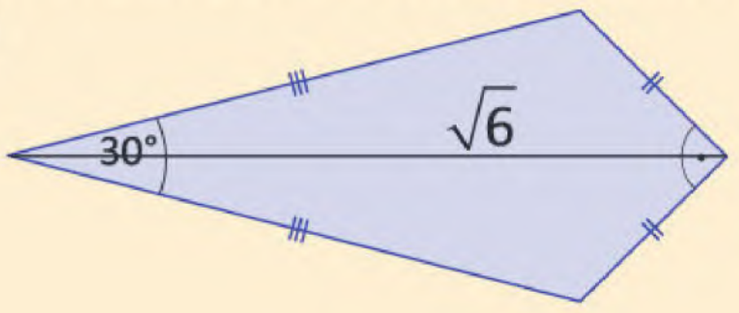
D 3. W czworokącie $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle CAD| = 25^\circ$, $|\sphericalangle ADC| = 95^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 45^\circ$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 75^\circ$, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

4. Obwód czworokąta jest równy 52 cm. Jedna z przekątnych dzieli ten czworokąt na dwa trójkąty: jeden równoboczny i drugi równoramienny, którego ramię jest o 6 cm krótsze od podstawy. Oblicz długości boków czworokąta. Rozważ dwa przypadki.

5. Obwód deltoidu jest równy 70 cm. Jeden z jego boków jest o 25% krótszy od drugiego.
   a) Oblicz długości wszystkich boków deltoidu.
   b) Wiedząc dodatkowo, że przekątna, która nie zawiera się w osi symetrii figury ma długość 24 cm, oblicz długość drugiej przekątnej.

6. Dwa boki deltoidu mają długość 8 cm i 5 cm, a kąty zawarte między bokami różnej długości mają miarę 60°. Oblicz:
   a) długość przekątnej, zawierającej się w osi symetrii deltoidu,
   b) przybliżone miary pozostałych kątów tego czworokąta.

7. Na podstawie danych na rysunku poniżej oblicz obwód zamalowanego czworokąta.
   a)


   b)


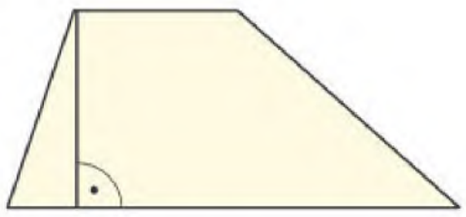
Trapezy

Ogólne własności trapezu

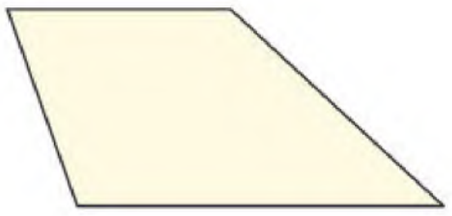
Przypomnijmy: **trapezy** to czworokąty mające co najmniej jedną parę boków równoległych. Boki równoległe nazywamy **podstawami**, pozostałe – **ramionami**.

Poniżej przedstawiamy przykłady trapezów, które mają tylko jedną parę boków równoległych.

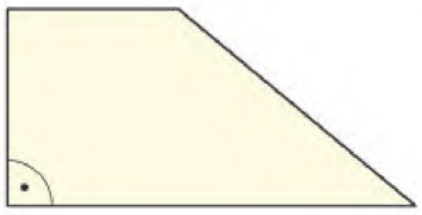
a)



b)



c)



d)

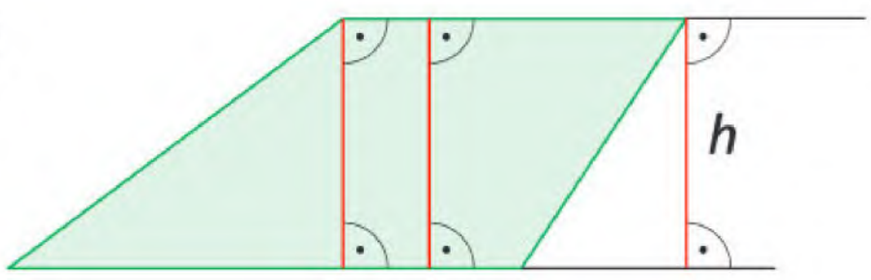


Na rysunku c) powyżej jest przedstawiony **trapez prostokątny**, czyli trapez, w którym jedno z ramion jest prostopadłe do podstaw.

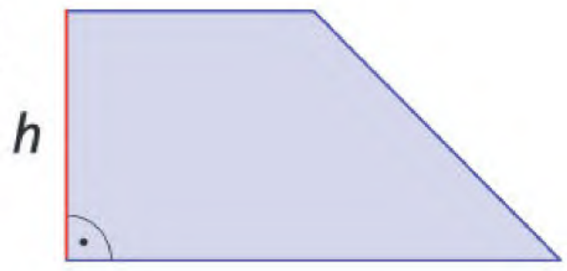
Na rysunku d) znajduje się **trapez równoramienny**, czyli trapez, w którym kąty przy podstawie są równe.

Wysokością trapezu nazywamy odcinek prostopadły do podstaw, którego końce należą do podstaw lub do ich przedłużeń. Czasami wysokością nazywamy też długość tego odcinka.

a)

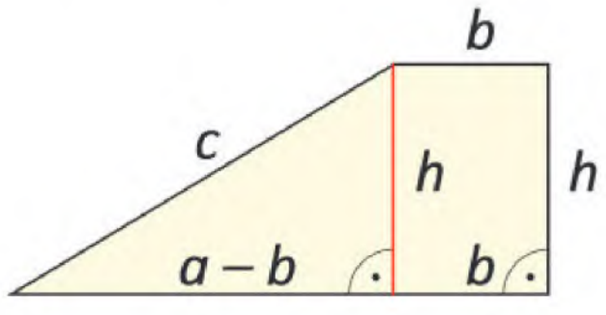


b)



Na rysunku a) kolorem czerwonym zaznaczone są trzy przykładowe wysokości danego trapezu. Jeżeli trapez jest prostokątny – jak na rysunku b) – to jego krótsze ramię jest również jego wysokością. Wszystkie wysokości trapezu mają taką samą długość.

Ćwiczenie 1. Długości podstaw trapezu prostokątnego na rysunku poniżej są równe a i b, zaś dłuższe ramię tego trapezu ma długość c. Wiedząc, że $a - b = 12$ oraz $c = 13$, oblicz długość krótszego ramienia.

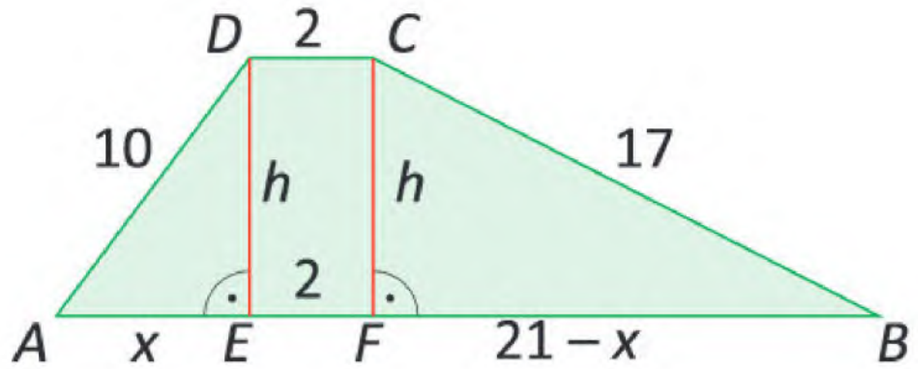


Przykład 1.

Podstawy trapezu mają długość 23 cm i 2 cm, a ramiona – 10 cm i 17 cm. Obliczymy wysokość tego trapezu.

Przyjmijmy oznaczenia:

$|AB| = 23$ cm,
$|DC| = 2$ cm, $|EF| = 2$ cm
$|AD| = 10$ cm, $|BC| = 17$ cm
$|DE| = |CF| = h$, $h > 0$



Niech $|AE| = x$, $x > 0$. Wówczas
$|FB| = 23 - 2 - x = 21 - x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych AED i FBC mamy:
$x^2 + h^2 = 10^2$ oraz $h^2 + (21 - x)^2 = 17^2$

Z pierwszej równości wyznaczamy h^2 i podstawiamy do drugiej:
$h^2 = 100 - x^2$
$100 - x^2 + (21 - x)^2 = 289$
$100 - x^2 + 441 - 42x + x^2 = 289$
$42x = 252$
$x = 6$ (cm)

Wracamy do podstawienia:
$h^2 = 100 - 6^2$, czyli $h^2 = 64$ i $h > 0$, więc
$h = 8$ (cm)

Wysokość trapezu jest równa 8 cm.

Twierdzenie 1.

W dowolnym trapezie suma kątów przy każdym ramieniu jest równa 180°.

Ćwiczenie 2. Udowodnij twierdzenie 1. Skorzystaj z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.

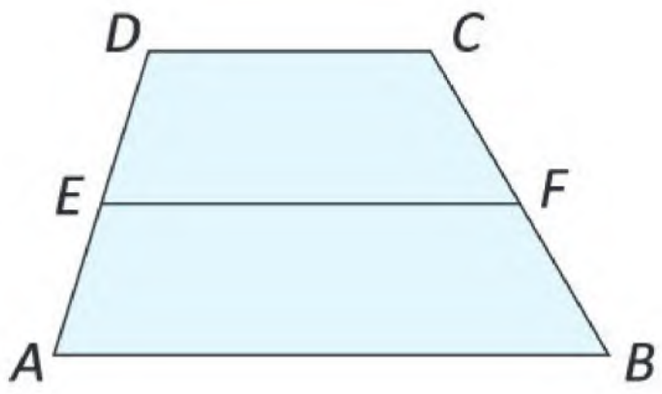
Twierdzenie 2. *O odcinku łączącym środki ramion trapezu*

W dowolnym trapezie odcinek łączący środki ramion jest równoległy do podstaw trapezu, a jego długość jest połową sumy długości podstaw.

Założenie: dany jest trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$

$|AE| = |ED|$

$|BF| = |FC|$

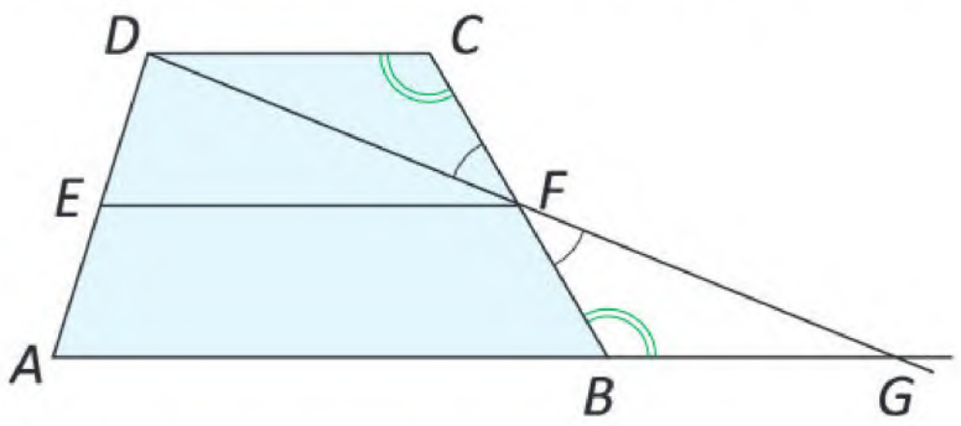


Teza: $EF \parallel AB$

$$|EF| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$$

Dowód:

Prowadzimy prostą DF, która przecina prostą AB w punkcie G.



Rozpatrzmy trójkąty DFC i BGF. Zauważamy, że:

$|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle BFG|$ – kąty wierzchołkowe

$|\sphericalangle DCF| = |\sphericalangle GBF|$ – $DC \parallel AG$, więc kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe

$|BF| = |FC|$ – z założenia

Z cechy kbk przystawania trójkątów wynika, że

$\triangle CDF \equiv \triangle BGF$ w szczególności

$|DC| = |BG|$ oraz $|DF| = |FG|$.

W trójkącie AGD mamy:

$|AE| = |ED|$ oraz $|DF| = |FG|$.

Z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta wynika, że:

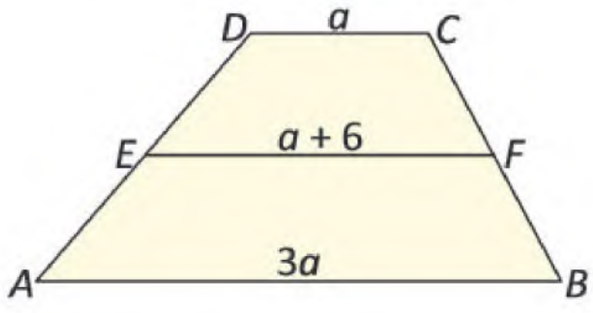
$EF \parallel AG$ oraz $|EF| = \frac{1}{2}|AG|$, gdzie $|AG| = |AB| + |BG| = |AB| + |CD|$

Zatem

$EF \parallel AB$ oraz $|EF| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$, co kończy dowód twierdzenia.

Przykład 2.

Stosunek długości podstaw trapezu $ABCD$, $AB \parallel CD$, jest równy 1 : 3. Odcinek EF łączący środki ramion tego trapezu jest o 6 cm dłuższy od krótszej podstawy. Obliczymy długość tego odcinka.



Ponieważ $|AB| = 3|DC|$, więc możemy przyjąć, że

$|CD| = a$ oraz $|AB| = 3a$

dla pewnej dodatniej liczby a. Z danych zadania wynika, że $|EF| = a + 6$

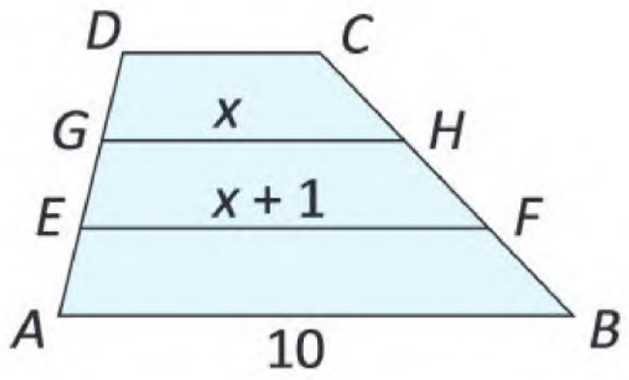
Z twierdzenia 2. otrzymujemy: $|EF| = \frac{a+3a}{2} = 2a$.

Rozwiązujemy równanie:

$a + 6 = 2a$, $a = 6$ (cm)

Zatem $|EF| = 6 + 6 = 12$ (cm).

Ćwiczenie 3. Na rysunku obok dany jest trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel DC$. Punkty E, G oraz F, H, dzielą odpowiednio ramiona AD i BC na trzy odcinki równej długości.
Na podstawie danych na rysunku oblicz $|DC|$.

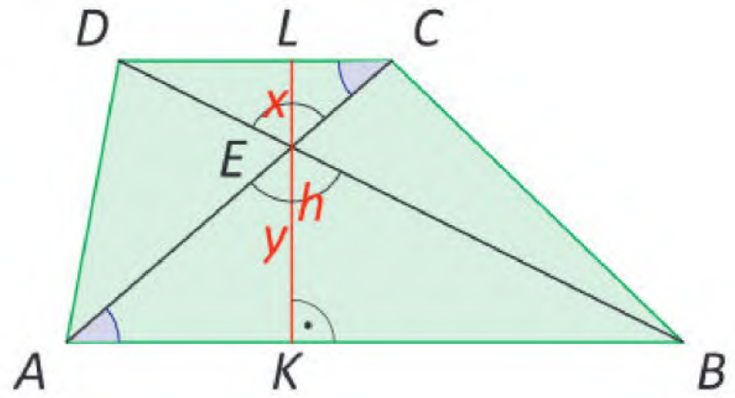


Przykład 3.

W trapezie $ABCD$, gdzie $AB \parallel DC$, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Wiedząc, że $|AB| = 10$, $|DC| = 2$, a wysokość trapezu jest równa 6, obliczymy odległość punktu E od podstaw trapezu.

Wprowadźmy dane i oznaczenia:

$|AB| = 10$, $|DC| = 2$
$|LK| = h = 6$,
$E \in LK$, $|LE| = x$, $|EK| = y$



Zauważamy, że

$x + y = h$, stąd $x + y = 6$.

Rozpatrzmy teraz trójkąty ABE i CDE.

$|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle CED|$ – kąty wierzchołkowe

Ponieważ $DC \parallel AB$, więc

$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle DCE|$ – z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą

Na podstawie cechy kkk trójkąty ABE i CED są podobne, $\triangle ABE \sim \triangle CED$.

Odcinki LE i EK są wysokościami odpowiednio trójkąta CDE i trójkąta ABE, poprowadzonymi na odpowiadające sobie boki DC i AB tych trójkątów. Zatem:

$$\frac{|LE|}{|EK|} = \frac{|DC|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|DC|}{|AB|} = \frac{2}{10}$$

Otrzymujemy

$$\frac{|LE|}{|EK|} = \frac{1}{5} \quad \text{stąd} \quad |EK| = 5 \cdot |LE|, \quad \text{czyli} \quad y = 5x.$$

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x+y=6 \\ y=5x \end{cases}$ jest para liczb (x, y), gdzie $x = 1$, $y = 5$.

Punkt E znajduje się w odległości 5 od podstawy AB i w odległości 1 od podstawy DC.

Trapez równoramienny

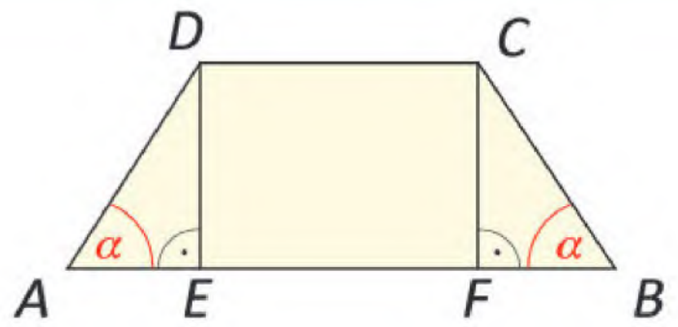
Trapez równoramienny to taki trapez, którego kąty przy podstawie są równe.

Twierdzenie 3.

Jeśli trapez jest równoramienny, to jego ramiona mają takie same długości.

Założenie: dany jest trapez $ABCD$
DE i CF – wysokości
$|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle FBC| = \alpha$

Teza: $|AD| = |BC|$



Dowód: Rozpatrujemy trójkąty AED i BCF. Mamy:

$|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle CFB| = 90°$ $\quad |DE| = |CF|$ $\quad |\sphericalangle ADE| = 90° - \alpha = |\sphericalangle FCB|$

Z cechy kbk przystawania trójkątów wynika, że trójkąty AED i FBC są przystające. Wobec tego mają odpowiednie boki o jednakowych długościach. Stąd

$|AD| = |BC|$, co kończy dowód.

UWAGA: Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3. jest zdaniem fałszywym. To znaczy trapez, którego ramiona są równej długości może nie być – w myśl podanej definicji – trapezem równoramiennym. Przykładem takiego trapezu jest równoległobok, którego kąty nie są proste.

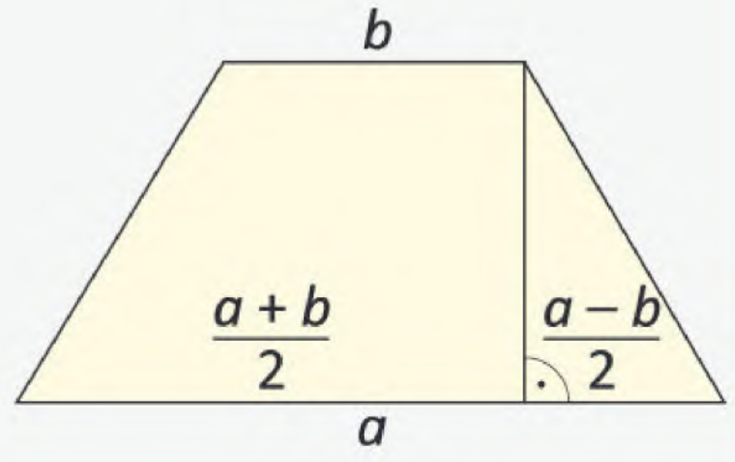
Twierdzenie 4.

Jeśli trapez jest równoramienny, to jego przekątne mają takie same długości.

Ćwiczenie 4. Udowodnij twierdzenie 4.

Twierdzenie 5.

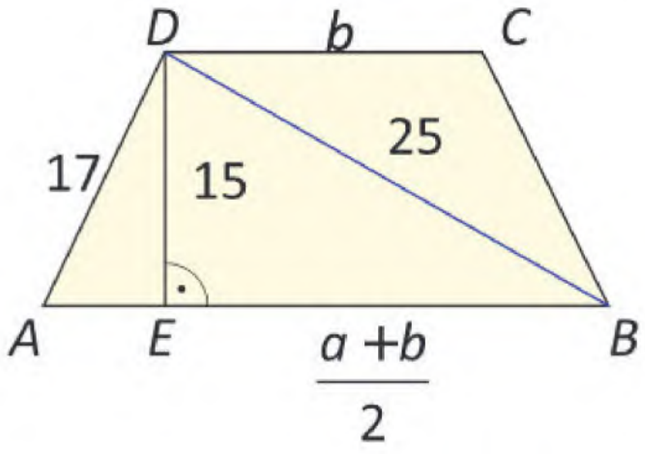
W trapezie równoramiennym o podstawach mających długości a, b, gdzie $a > b > 0$, wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na odcinki, których długości są równe $\frac{a+b}{2}$ oraz $\frac{a-b}{2}$.



Ćwiczenie 5. Udowodnij twierdzenie 5.

Przykład 4.

W trapezie równoramiennym przekątna ma długość 25, ramię ma długość 17, a wysokość jest równa 15. Obliczymy długości podstaw tego trapezu.



Wprowadźmy oznaczenia:

AB, DC – podstawy trapezu; $|AB| = a$, $|DC| = b$

AD, BC – ramiona trapezu; $|AD| = |BC| = 17$

AC, BD – przekątne trapezu; $|AC| = |BD| = 25$

DE – wysokość trapezu, $|DE| = 15$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów AED i DEB obliczamy długości odcinków AE i EB.

$|AE|^2 = |AD|^2 - |DE|^2$

$|AE|^2 = 17^2 - 15^2$

$|AE|^2 = 64, \quad |AE| > 0$

$|AE| = 8$

$|EB|^2 = |BD|^2 - |DE|^2$

$|EB|^2 = 25^2 - 15^2$

$|EB|^2 = 400, \quad |EB| > 0$

$|EB| = 20$

Otrzymujemy

$$|AB| = |AE| + |EB| = 8 + 20 = 28$$

Z twierdzenia 5. wiemy, że

$$|EB| = \frac{a+b}{2}, \text{ zatem}$$

$$20 = \frac{28+b}{2}, \text{ stąd } b = 12$$

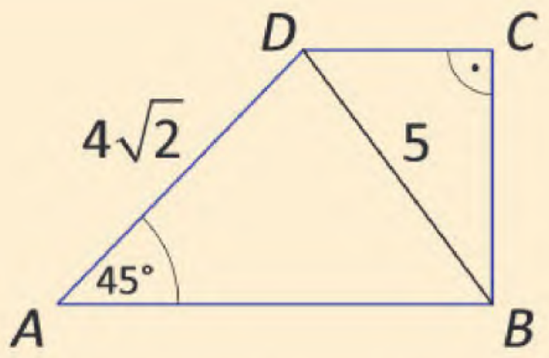
Podstawy trapezu mają długości 28 i 12.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. W trapezie $ABCD$, gdzie $AB \parallel DC$, miara kąta ABC jest o 25% większa od miary kąta BAD, natomiast miara kąta BCD jest o 13° mniejsza od miary kąta CDA. Wyznacz kąty tego trapezu.

2. W trapezie prostokątnym różnica długości podstaw wynosi 2, a krótsze ramię ma długość $2\sqrt{3}$. Oblicz:
   a) długość dłuższego ramienia trapezu,
   b) miarę kąta ostrego trapezu.

3. Trapez *ABCD* na rysunku obok jest prostokątny.
Na podstawie danych na rysunku obok oblicz:
a) wysokość trapezu,
b) długości podstaw *AB* i *DC*,
c) długość odcinka łączącego środki ramion.



4. W trapezie prostokątnym *ABCD*, $AB \parallel DC$, najdłuższe ramię *BC* ma długość 25, a wysokość jest równa 24. Wiedząc, że odcinek łączący środki ramion ma długość $14\frac{1}{2}$, oblicz długości podstaw tego trapezu.

5. W trapezie podstawy mają długości *a*, *b*, zaś ramiona – *c*, *d*. Oblicz wysokość trapezu, jeśli:
a) $a = 20, b = 6, c = 13, d = 15$
b) $a = 13; b = 2{,}5; c = 10; d = 6{,}5$

6. Wysokość trapezu równoramiennego jest równa 4, a kąty ostre mają po 30°. Wiedząc, że wysokości poprowadzone z wierzchołków kątów rozwartych dzielą dłuższą podstawę na trzy równe odcinki, oblicz długości boków tego trapezu.

7. Ramiona trapezu równoramiennego mają długość 13, a odcinek łączący środki tych ramion ma długość 9. Wiedząc, że wysokość trapezu jest równa 12, oblicz:
a) długość krótszej podstawy,
b) długość przekątnej trapezu.

8. Ramiona trapezu mają długość 10 cm, a obie przekątne – 17 cm. Wiedząc, że długość odcinka łączącego środki ramion jest równa 15 cm, oblicz długości podstaw tego trapezu.

D 9. Wykaż, że jeśli ramiona trapezu i jedna z jego podstaw są takiej samej długości oraz obie przekątne trapezu są prostopadłe do ramion, to ten trapez jest równoramienny, a jego kąty są równe: 60°, 60°, 120°, 120°.

10. W trapezie równoramiennym przekątne przecinają się w punkcie odległym od jednej podstawy o 3 cm, a od drugiej – o 1,2 cm. Wiedząc, że dłuższa podstawa ma długość 8 cm, oblicz:
a) długość przekątnej trapezu,
b) długość krótszej podstawy trapezu.

D 11. W trapezie *ABCD*, gdzie $AB \parallel DC$, poprowadzono przekątną *AC*. Wykaż, że jeśli $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADC|$, to $|AC| = \sqrt{|AB| \cdot |DC|}$.

D 12. Podstawy trapezu mają długość *a* i *b*, gdzie $a > b > 0$. Wykaż, że odcinek łączący środki jego przekątnych ma długość $\frac{a-b}{2}$.

13. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 10, zaś odcinek łączący środki przekątnych ma długość 4. Oblicz:
a) długości podstaw trapezu,
b) stosunek długości odcinków, na jakie punkt przecięcia przekątnych trapezu dzieli te przekątne.

Równoległoboki

Własności równoległoboków

Wśród trapezów wyróżniamy równoległoboki. **Równoległobokiem** nazywamy czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Twierdzenie 1. *Własności równoległoboku*

a) Długości dowolnych dwóch przeciwległych boków równoległoboku są równe.

b) Dowolne dwa kąty przeciwległe równoległoboku są równe.

c) Punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli te przekątne na połowy.

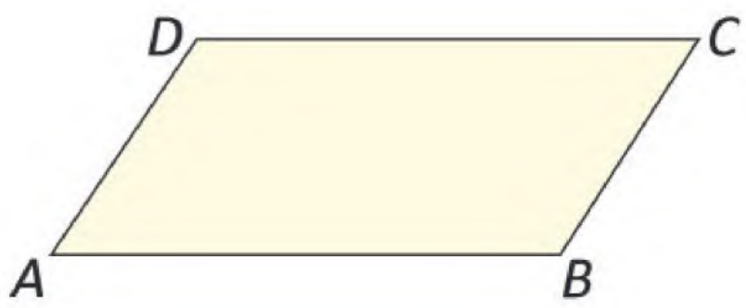
d) Suma kątów leżących przy każdym boku równoległoboku jest równa 180°.

Udowodnimy podpunkt a) tego twierdzenia.

Założenie:

$ABCD$ – równoległobok, w którym

$AB \parallel DC$ i $AD \parallel BC$



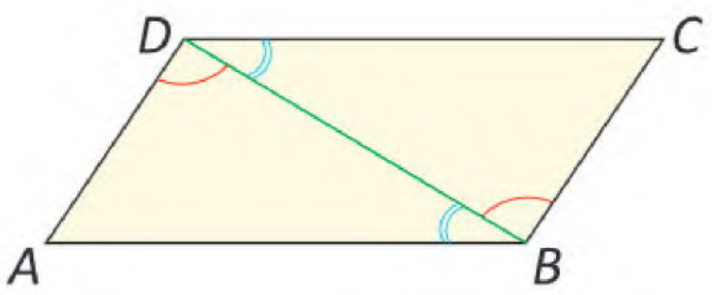
Teza:

$|AB| = |CD|$ i $|AD| = |BC|$

Dowód:

Prowadzimy jedną przekątną równoległoboku, np. przekątną DB.

Rozpatrujemy trójkąty ABD i CDB.



Z założenia mamy $AB \parallel DC$ i $AD \parallel BC$.

Z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wynika, że

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CBD|.$$

Odcinek DB jest wspólnym bokiem obu trójkątów.

Na mocy cechy kbk przystawania trójkątów otrzymujemy, że

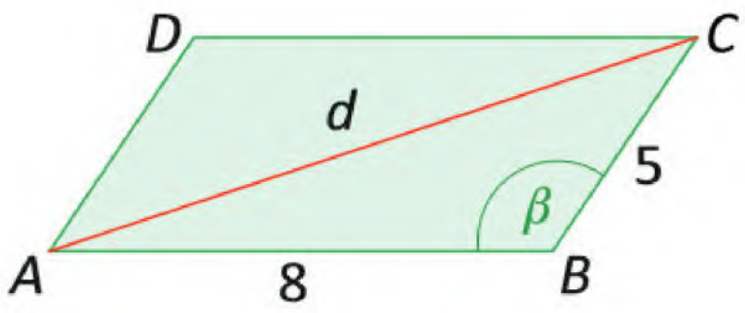
$$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$$

Zatem $|AB| = |CD|$ oraz $|AD| = |BC|$, co kończy dowód twierdzenia 1a).

Ćwiczenie 1. Udowodnij punkt c) twierdzenia 1.

Przykład 1.

W równoległoboku dwa boki mają długość 5 i 8, a kąt ostry jest równy 60°. Wyznaczymy długość dłuższej przekątnej równoległoboku.



Wprowadźmy oznaczenia:

$|AC| = d$, $|\sphericalangle CBA| = \beta$.

Z twierdzenia 1d) wynika, że

$\beta = 180^\circ - |\sphericalangle BAD|$

Ponieważ $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$, więc $\beta = 120^\circ$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC mamy:

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\beta$, stąd

$d^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$

– korzystamy ze wzoru redukcyjnego:
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$d^2 = 64 + 25 + 80 \cdot \cos 60^\circ$, czyli

$d^2 = 89 + 80 \cdot \frac{1}{2} = 129$, więc

$d = \sqrt{129}$

Długość dłuższej przekątnej równoległoboku jest równa $\sqrt{129}$.

Jeśli chcemy udowodnić, że czworokąt jest równoległobokiem, to wystarczy zastosować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

a) Jeśli długości każdych dwóch przeciwległych boków czworokąta są równe, to ten czworokąt jest równoległobokiem.

b) Jeśli każde dwa przeciwległe kąty czworokąta są równe, to ten czworokąt jest równoległobokiem.

c) Jeśli dwa przeciwległe boki czworokąta są równoległe i mają taką samą długość, to ten czworokąt jest równoległobokiem.

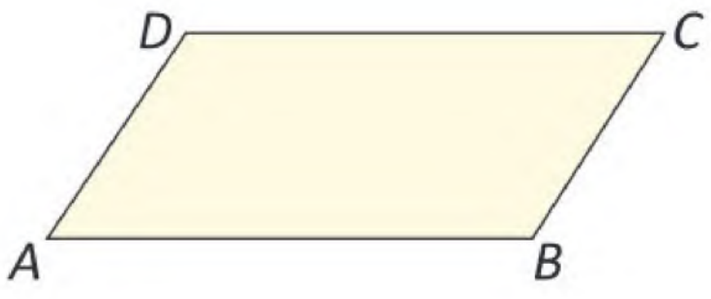
d) Jeśli punkt przecięcia przekątnych czworokąta dzieli te przekątne na połowy, to ten czworokąt jest równoległobokiem.

e) Jeśli suma kątów leżących przy każdym boku czworokąta jest równa 180°, to ten czworokąt jest równoległobokiem.

Udowodnimy twierdzenie 2a).

Założenie:

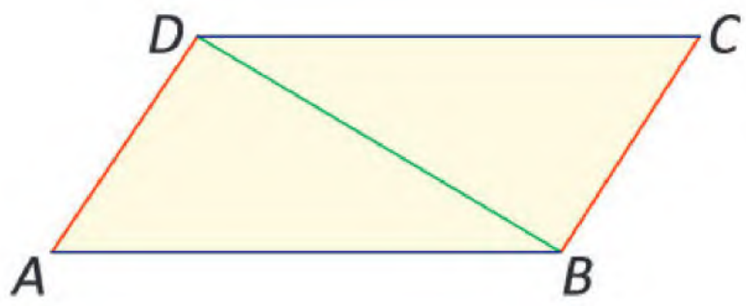
$ABCD$ – czworokąt, w którym
$|AB| = |DC|$ i $|AD| = |BC|$



Teza:

$AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC$

Dowód:



Prowadzimy jedną przekątną czworokąta, np. przekątną *DB*.

Rozpatrujemy trójkąty *ABD* i *CDB*.

Z założenia mamy:

$$|AB| = |DC| \quad \text{oraz} \quad |AD| = |BC|$$

Odcinek *DB* jest wspólnym bokiem tych trójkątów.

Na mocy cechy bbb przystawania trójkątów otrzymujemy, że

$$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$$

Zatem odpowiadające sobie kąty w tych trójkątach

$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle CBD| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CDB|.$$

Kąty *ADB* i *CBD* to kąty naprzemianległe wewnętrzne, wyznaczone przez dwie proste *AD* i *BC* przecięte prostą *DB*. Ponieważ są równe, więc na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą otrzymujemy, że proste *AD* i *BC* są równoległe. To znaczy, że

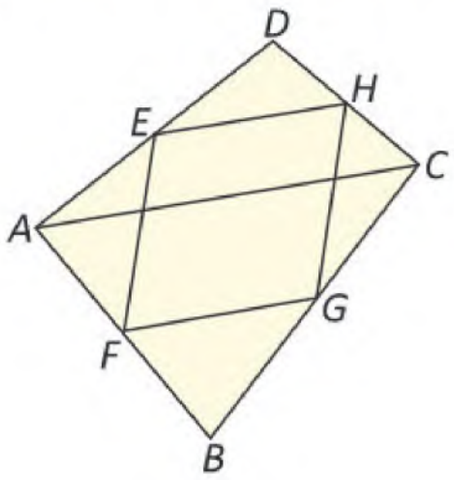
$$AD \parallel BC.$$

Podobnie można pokazać, że $AB \parallel CD$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 2. Wykaż punkt d) twierdzenia 2.

Przykład 2.

Wykażemy, że środki boków dowolnego czworokąta wypukłego są wierzchołkami pewnego równoległoboku.



Założenie:

ABCD – czworokąt wypukły

E, *F*, *G*, *H* – środki boków *AD*, *AB*, *BC*, *DC*

Teza:

Czworokąt *EFGH* jest równoległobokiem.

Dowód:

Wystarczy pokazać, że przeciwległe boki czworokąta *EFGH* mają równe długości. Rozważmy trójkąt *ACD*. Odcinek *EH* łączy środki boków *AD* i *DC*. Z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta wynika, że

$$|EH| = \frac{|AC|}{2}.$$

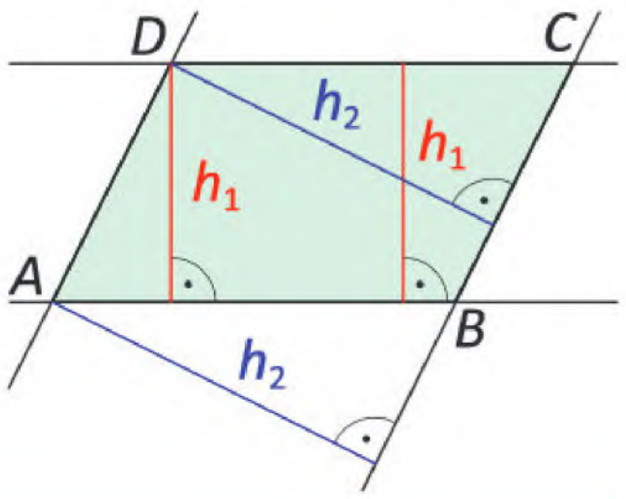
Podobnie w trójkącie *ABC* odcinek *FG* łączy środki boków *AB* i *BC*, więc

$$|FG| = \frac{|AC|}{2}.$$

W takim razie $|EH| = |FG|$. Analogicznie pokazujemy, że $|EF| = |GH| = \frac{|BD|}{2}$. Przeciwległe boki czworokąta *EFGH* mają równe długości, zatem na podstawie twierdzenia 2a) czworokąt *EFGH* jest równoległobokiem.

Wysokością równoległoboku nazywamy odcinek prostopadły do boków równoległych, którego końce należą do prostych, zawierających te boki. Często wysokością równoległoboku nazywamy również odległość między prostymi zawierającymi dwa równoległe boki równoległoboku.

Równoległobok mający dwie pary boków różnej długości, ma dwie różne wysokości. Na rysunku obok są oznaczone jako $\boldsymbol{h_1}$ i $\boldsymbol{h_2}$.



Przykład 3.

W równoległoboku o kącie ostrym α poprowadzono dwie różne wysokości z wierzchołka kąta rozwartego. Pokażemy, że kąt zawarty między tymi wysokościami jest równy α.

Kąt równoległoboku *ABCD*, $|AB| > |BC|$, przy wierzchołku *A* jest ostry i równy α. Prowadzimy dwie wysokości *DE* i *DF*. Są dwie możliwości położenia punktu *F*.

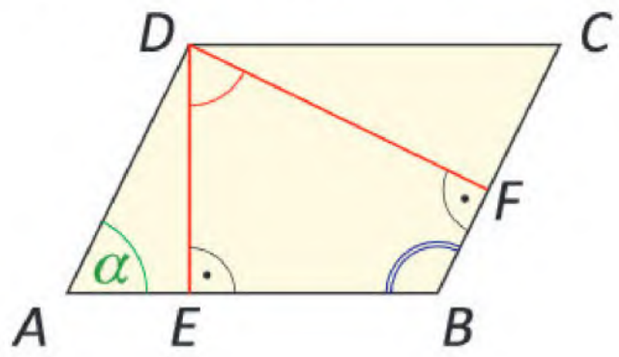
1) Punkt *F* należy do boku *BC*.
Wtedy w czworokącie *EBFD* mamy:

$$|\sphericalangle BED| + |\sphericalangle DFB| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Suma kątów czworokąta *EBFD* jest równa 360°, zatem

$$|\sphericalangle EDF| + |\sphericalangle FBE| = 180^\circ.$$

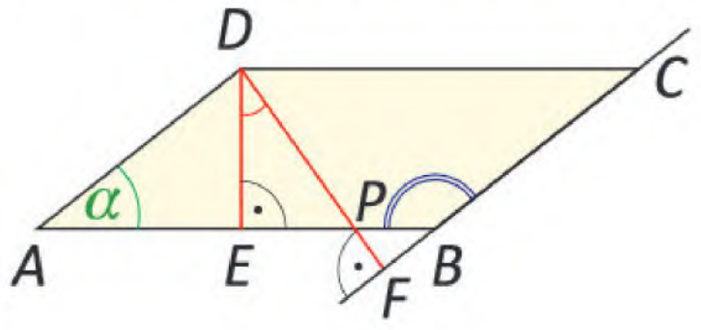
Z kolei w równoległoboku *ABCD* mamy:
$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle FBE| = 180^\circ$. Z tego wynika, że
$|\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle BAD| = \alpha$.



2) Punkt *F* należy do przedłużenia boku *BC*, punkt *P* to punkt przecięcia wysokości *DF* z bokiem *AB*.
Rozpatrujemy trójkąty *EPD* i *PFB*.

$$|\sphericalangle PED| = |\sphericalangle BFP| = 90^\circ$$

$|\sphericalangle EPD| = |\sphericalangle FPB|$ – kąty wierzchołkowe



Zatem

$$|\sphericalangle EDP| = |\sphericalangle PBF| .$$

Kąty *PBF* i *PBC* są przyległe, więc

$$|\sphericalangle PBF| + |\sphericalangle PBC| = 180^\circ .$$

Z własności równoległoboku *ABCD* mamy:

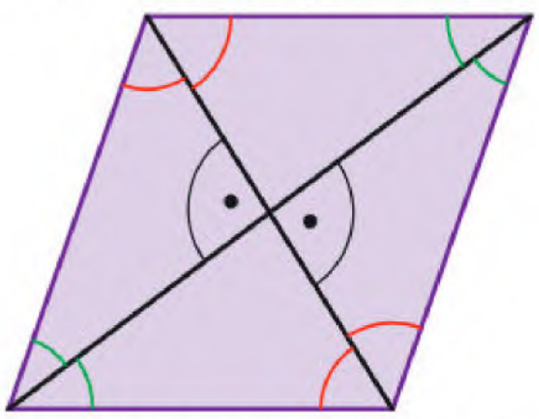
$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle PBC| = 180^\circ \text{ oraz } |\sphericalangle BAD| = \alpha .$$

Z tego wynika, że $|\sphericalangle EDF| = |\sphericalangle PBF| = |\sphericalangle BAD| = \alpha$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 3. W równoległoboku *ABCD* kąt *ADC* jest rozwarty. Z wierzchołka *D* poprowadzono dwie wysokości *DE* i *DF* równoległoboku, gdzie $E \in AB$ i $F \in BC$. Wiedząc, że $|\sphericalangle EDF| = 45^\circ$ oraz $|DE| = 4$ i $|DF| = 5$, oblicz obwód równoległoboku *ABCD*.

Podział równoległoboków

Rombem nazywamy równoległobok, którego wszystkie boki mają równe długości.



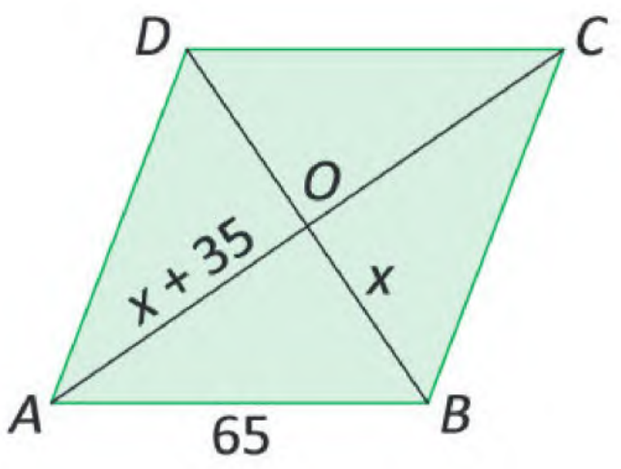
Romb ma wszystkie własności równoległoboku,
a ponadto:
– przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych kątów,
– przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.

Powyższe własności wynikają z tego, że każda przekątna rombu dzieli ten romb na dwa przystające trójkąty równoramienne.

Przykład 4.

Skwer ma kształt rombu, którego bok ma długość 65 metrów. Wzdłuż przekątnych rombu biegną alejki, z których jedna jest o 70 metrów dłuższa od drugiej. Obliczymy długości tych alejek.

Niech romb przedstawiony poniżej symbolizuje skwer.



Wprowadźmy oznaczenia takie, jak na rysunku.

$|BD| = 2x$ – długość krótszej alejki, $x > 0$

$|AC| = 2x + 70$ – długość dłuższej alejki

Wówczas

$|BO| = x$ oraz $|AO| = x + 35$

Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ABO* otrzymujemy:

$$|AO|^2 + |BO|^2 = |AB|^2$$

$$(x + 35)^2 + x^2 = 65^2$$

Równanie kwadratowe doprowadzamy do postaci:
$ax^2 + bx + c = 0$

$2x^2 + 70x - 3000 = 0$
$x^2 + 35x - 1500 = 0$
$\Delta = 7225 \quad \sqrt{\Delta} = 85$
$x = -60 \quad$ lub $\quad x = 25$

Liczba –60 nie spełnia warunku $x > 0$. Zatem
$|AC| = 2 \cdot 25 + 70 = 120$ (m)
$|BD| = 2 \cdot 25 = 50$ (m)

Alejki mają długości: 50 m i 120 m.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

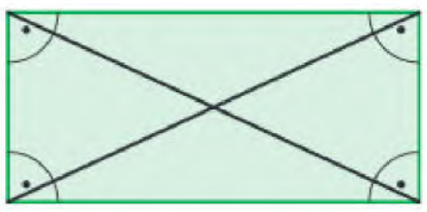
Twierdzenie 3.

a) Jeśli wszystkie boki czworokąta mają równe długości, to ten czworokąt jest rombem.

b) Jeśli przekątne równoległoboku zawierają się w dwusiecznych kątów, to ten równoległobok jest rombem.

c) Jeśli przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem prostym, to ten równoległobok jest rombem.

Ćwiczenie 4. Na podstawie twierdzenia 3a) wykaż, że środki wszystkich boków dowolnego prostokąta są wierzchołkami pewnego rombu.



Prostokątem nazywamy równoległobok, który ma wszystkie kąty proste.

Prostokąt ma wszystkie własności równoległoboku, a ponadto jego przekątne mają równe długości.

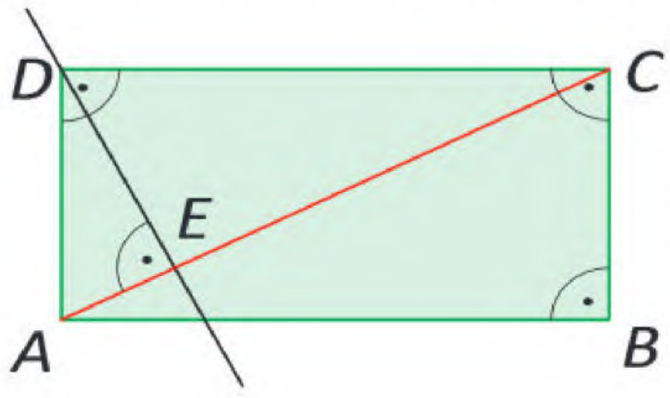
Ćwiczenie 5. Wykaż, że jeśli przekątne czworokąta mają równe długości i przecinają się w punkcie dzielącym je na połowy, to ten czworokąt jest prostokątem.

Przykład 5.

Na rysunku poniżej prosta DE dzieli przekątną AC prostokąta $ABCD$ na odcinki AE i EC. Wiedząc, że $|AE| = 1$, $|EC| = 4$, obliczymy długości boków prostokąta $ABCD$.

Odcinek DE jest wysokością w trójkącie prostokątnym ACD, poprowadzoną na przeciwprostokątną AC. Wówczas:

$$|DE| = \sqrt{|AE| \cdot |EC|}.$$



Obliczamy wysokość DE trójkąta ACD:

$$|DE| = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów *AED* i *DEC* obliczamy długości boków *AD* i *DC*:

$|AD|^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \ |AD| > 0,$ stąd

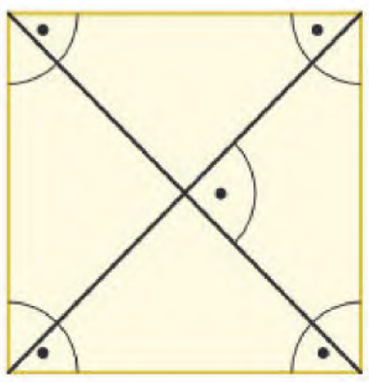
$|AD| = \sqrt{5}$

$|DC|^2 = 2^2 + 4^2 = 20, \ |DC| > 0,$ stąd

$|DC| = 2\sqrt{5}$

Długości różnych boków prostokąta są równe: $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$.

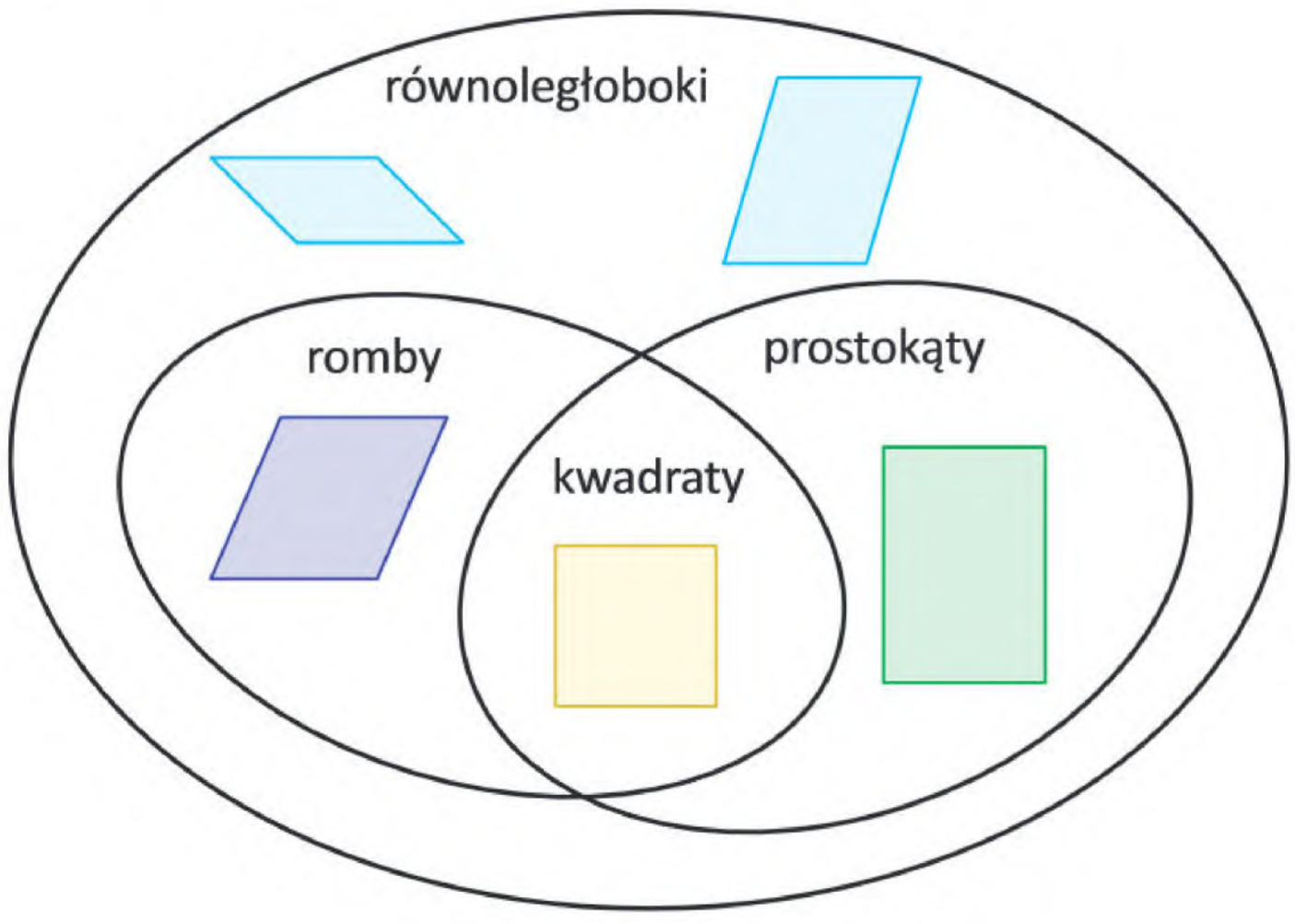
Kwadratem nazywamy prostokąt, którego wszystkie boki mają takie same długości. Kwadrat można też zdefiniować jako romb, którego wszystkie kąty są proste.



Kwadrat ma wszystkie własności rombu i prostokąta.

Ćwiczenie 6. Wykaż, że przekątna kwadratu o boku długości *a* ma długość $a\sqrt{2}$.

Poniższy diagram ilustruje podział równoległoboków.



Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz miary kątów równoległoboku, jeśli:
a) jeden z kątów leżących przy jednym boku jest o 40% większy od drugiego,
b) sumy miar przeciwległych kątów różnią się o 100°.

D 2. Bok AB równoległoboku $ABCD$ jest dwa razy dłuższy od boku BC, a punkt E jest jego środkiem. Wykaż, że $|\sphericalangle CED| = 90°$.

3. W równoległoboku $ABCD$ boki mają długość: $\sqrt{8}$ i 4, a kąt ostry zawarty między tymi bokami jest równy 45°.
a) Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku.
D b) Wykaż, że krótsza przekątna jest prostopadła do krótszego boku.
c) Wyznacz wysokości tego równoległoboku.

D 4. Kąt ostry przy wierzchołku A równoległoboku $ABCD$ jest równy 30°, $|AB| = \sqrt{12}$, $|AD| = 8$. Z punktu D poprowadzono dwie różne wysokości DE i DF tego równoległoboku. Wykaż, że $|EF| = \sqrt{7}$.

5. Krótsza przekątna rombu ma długość 12 cm, a bok jest o 2 cm dłuższy od połowy dłuższej przekątnej. Oblicz długość boku rombu.

6. W równoległoboku o obwodzie 40 cm przekątne są zawarte w dwusiecznych kątów, a ich długości pozostają w stosunku 3 : 4. Oblicz długości tych przekątnych.

7. Bok BC prostokąta $ABCD$ ma długość $\sqrt{52}$. Wiedząc, że odległość punktu D od przekątnej AC jest równa 6, oblicz długość boku AB.

8. Przekątne prostokąta mają długość d, zaś kąt ostry między przekątnymi jest równy α. Oblicz obwód tego prostokąta, jeśli:
a) $d = 4$, $\alpha = 60°$ b) $d = 10$, $\alpha = 45°$

9. Oblicz obwód kwadratu, którego przekątna jest o 1 dłuższa od boku.

D 10. Wykaż, że środki boków deltoidu są wierzchołkami pewnego prostokąta, a obwód tego prostokąta jest równy sumie długości przekątnych deltoidu.

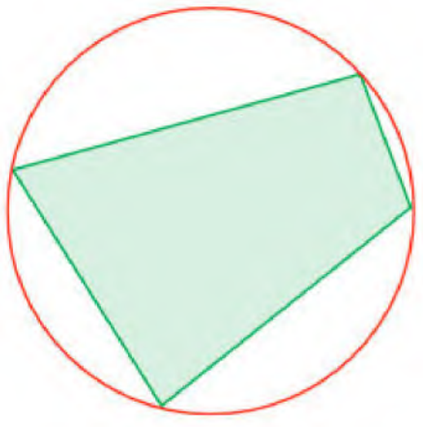
D 11. Skonstruuj w zeszycie dowolny kwadrat i oznacz jego wierzchołki A, B, C, D. Na bokach AB, BC, CD i AD zaznacz odpowiednio punkty E, F, G, H w taki sposób, że $|AE| = |BF| = |CG| = |DH|$. Wykaż, że czworokąt $EFGH$ jest kwadratem.

D 12. W równoległoboku $ABCD$ punkty E, F są odpowiednio środkami boków AB i AD. Wykaż, że odcinki CE i CF dzielą przekątną BD na trzy równe części.

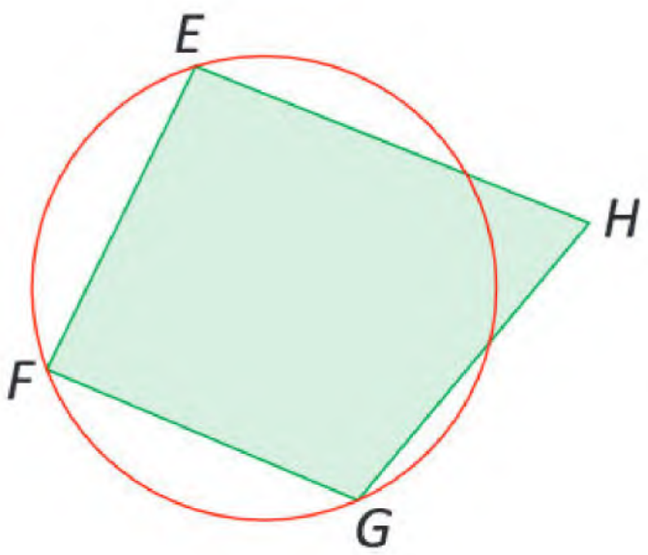
D 13. Wykaż, że:
a) jeśli przekątne prostokąta zawierają się w dwusiecznych jego kątów, to ten prostokąt jest kwadratem,
b) jeśli przekątne rombu mają równe długości, to ten romb jest kwadratem.

Okrąg opisany na czworokącie

Powiemy, że **okrąg jest opisany na czworokącie** lub **czworokąt jest wpisany w okrąg** wtedy, gdy każdy wierzchołek czworokąta leży na okręgu.



Wiesz z klasy drugiej, że na każdym trójkącie można opisać okrąg. W przypadku czworokątów jest inaczej: istnieją czworokąty, na których nie można opisać okręgu. Takim czworokątem jest np. czworokąt *EFGH* na rysunku poniżej.



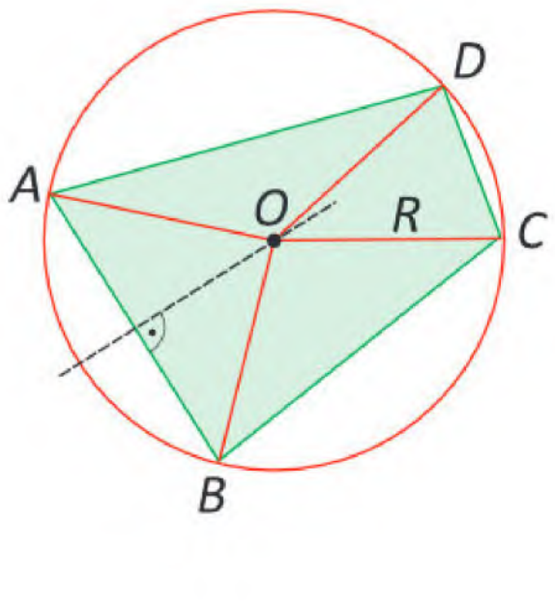
Punkty *E*, *F*, *G* jednoznacznie wyznaczają okrąg opisany na trójkącie *EFG*, więc nie istnieje inny okrąg, do którego by należały punkty *E*, *F*, *G*, *H*.

Twierdzenie 1.

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich boków czworokąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód:

1) Załóżmy, że na czworokącie *ABCD* można opisać okrąg.

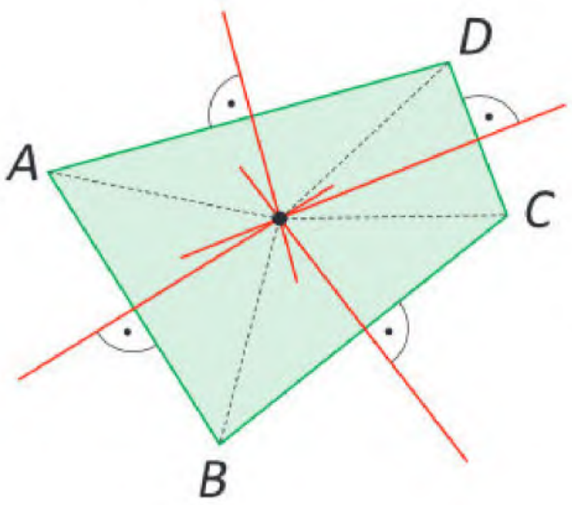


Niech punkt *O* będzie środkiem, zaś *R* – promieniem tego okręgu, $R > 0$. Wówczas punkty *A*, *B*, *C*, *D* należą do okręgu oraz

$$|AO| = |BO| = |CO| = |DO| = R.$$

Punkt *O* jest równoodległy od wierzchołków czworokąta. To znaczy, że należy do symetralnej każdego boku czworokąta *ABCD*.

2) Załóżmy, że symetralne wszystkich boków czworokąta *ABCD* przecinają się w jednym punkcie.



Wówczas punkt wspólny symetralnych jest równoodległy od punktów *A*, *B*, *C*, *D*. Zatem jest środkiem okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki czworokąta,

co kończy dowód.

Twierdzenie 2.

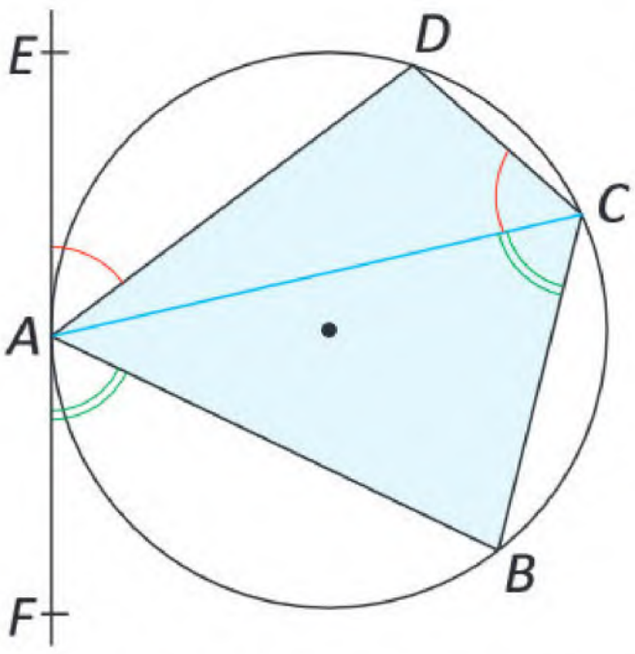
Jeśli na czworokącie można opisać okrąg, to sumy przeciwległych kątów czworokąta są równe i wynoszą po 180°.

Założenie: *ABCD* – czworokąt na którym można opisać okrąg

Teza: $|\sphericalangle A|+|\sphericalangle C|=|\sphericalangle B|+|\sphericalangle D|=180^\circ$

Dowód:

Niech czworokąt *ABCD* będzie wpisany w okrąg. Prowadzimy styczną do okręgu w punkcie *A* i przekątną *AC* czworokąta.



Kąt dopisany *EAD* jest oparty na tym samym łuku co kąt wpisany *ACD*, stąd

$$|\sphericalangle EAD|=|\sphericalangle ACD|.$$

Podobnie

$$|\sphericalangle FAB|=|\sphericalangle ACB|.$$

Zatem

$$|\sphericalangle A|+|\sphericalangle C|=|\sphericalangle EAF|=180^\circ.$$

Suma kątów w czworokącie jest równa 360°, więc również

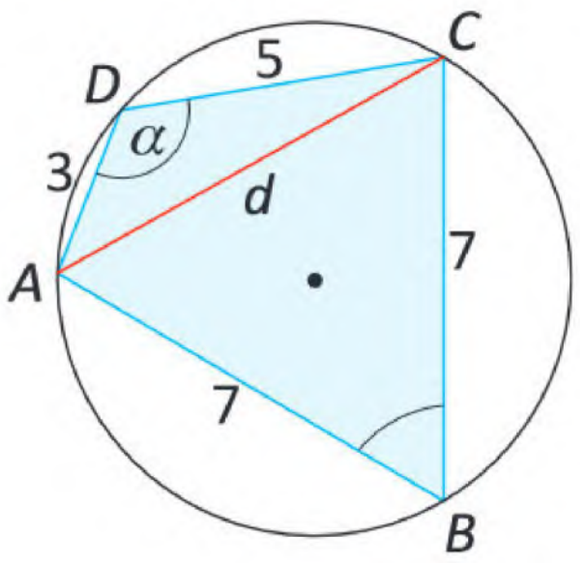
$$|\sphericalangle B|+|\sphericalangle D|=180^\circ,$$

co kończy dowód.

Ćwiczenie 1. Oblicz miary kątów czworokąta *ABCD*, wpisanego w okrąg wiedząc, że $|\sphericalangle C|=3|\sphericalangle A|$ oraz $|\sphericalangle D|=5|\sphericalangle B|$.

Przykład 1.

Czworokąt *ABCD* jest wpisany w okrąg. Wiedząc, że $|AD| = 3$, $|DC| = 5$ oraz $|AB| = |BC| = 7$, obliczymy długość przekątnej *AC*.



Rysunek obok przedstawia czworokąt *ABCD* wpisany w okrąg. Mamy:

$$|AB| = |BC| = 7,\ |AD| = 3,\ |DC| = 5$$

Niech $|\sphericalangle ADC| = \alpha$. Wówczas z twierdzenia 2. wynika, że $|\sphericalangle CBA| = 180^\circ - \alpha$.

Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta *ACD* otrzymujemy

$$d^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos\alpha, \quad \text{czyli}$$

$$d^2 = 34 - 30 \cdot \cos\alpha$$

Podobnie w trójkącie *ABC* mamy

$$d^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

– korzystamy ze wzoru redukcyjnego:
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$$d^2 = 98 + 98 \cdot \cos\alpha$$

Porównujemy prawe strony otrzymanych równości:

$$98 + 98 \cdot \cos\alpha = 34 - 30 \cdot \cos\alpha$$

$$128 \cdot \cos\alpha = -64$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \text{gdzie } \alpha \in (0^\circ, 180^\circ), \text{ więc } \alpha = 120^\circ.$$

Wówczas $|\sphericalangle CBA| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. A to znaczy, że trójkąt równoramienny *ABC* jest trójkątem równobocznym. Zatem $|AC| = 7$.

Sprawdź, że długość przekątnej *AC* możesz również obliczyć z zależności:
$d^2 = 34 - 30 \cdot \cos\alpha$ oraz $d^2 = 98 + 98 \cdot \cos\alpha$.

Ćwiczenie 2. Oblicz długość przekątnej *BD* czworokąta *ABCD* z przykładu 1.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2.

Twierdzenie 3.

Jeśli sumy przeciwległych kątów czworokąta są równe, czyli wynoszą po 180°, to na tym czworokącie można opisać okrąg.

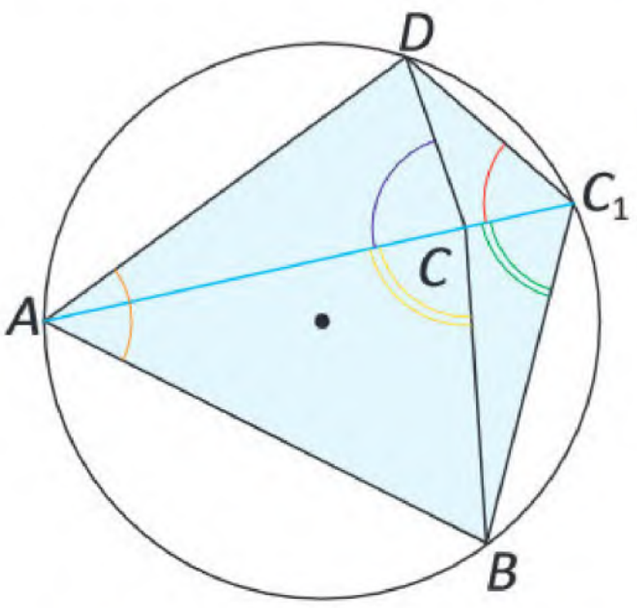
Założenie: $ABCD$ – czworokąt

$$|\sphericalangle A|+|\sphericalangle C|=|\sphericalangle B|+|\sphericalangle D|=180^\circ$$

Teza: Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Dowód nie wprost. Załóżmy, że na czworokącie $ABCD$ nie można opisać okręgu. Przez wierzchołki A, B, D prowadzimy okrąg. Wówczas odległość wierzchołka C od środka tego okręgu jest mniejsza lub większa od promienia okręgu.

I przypadek: Odległość wierzchołka C od środka okręgu jest mniejsza niż promień.



Prosta AC przecina okrąg w punkcie C_1. Kąt ACD jest kątem zewnętrznym trójkąta CC_1D, zatem

$$|\sphericalangle ACD|=|\sphericalangle CC_1D|+|\sphericalangle CDC_1|, \text{ stąd}$$

$$|\sphericalangle ACD|>|\sphericalangle CC_1D|.$$

Podobnie kąt ACB jest kątem zewnętrznym trójkąta CBC_1, więc

$$|\sphericalangle ACB|>|\sphericalangle CC_1B|.$$

Otrzymaliśmy, że

$$|\sphericalangle DCB|>|\sphericalangle DC_1B|.$$

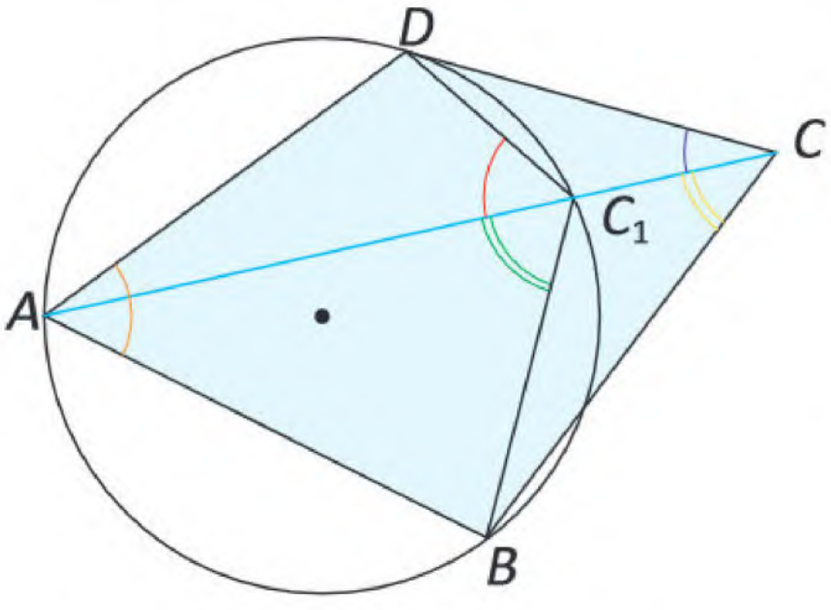
Punkt C_1 należy do okręgu opisanego na trójkącie ABD, więc z twierdzenia 2. wynika, że $|\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle DC_1B|=180^\circ$.

Wówczas w czworokącie $ABCD$ otrzymujemy:

$$|\sphericalangle A|+|\sphericalangle C|=|\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle BCD|>|\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle DC_1B|=180^\circ.$$

Wtedy $|\sphericalangle A|+|\sphericalangle C|>180^\circ$, co jest sprzeczne z założeniem.

II przypadek: Odległość wierzchołka C od środka okręgu jest większa niż promień.



Niech przekątna AC przecina okrąg w punkcie C_1. Wówczas

$|\sphericalangle AC_1D|>|\sphericalangle C_1CD|$ oraz

$|\sphericalangle AC_1B|>|\sphericalangle C_1CB|$.

(wyjaśnij, dlaczego). Zatem

$$|\sphericalangle DC_1B|>|\sphericalangle DCB|.$$

Z twierdzenia 2. wynika, że

$$|\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle DC_1B|=180^\circ.$$

Wówczas w czworokącie $ABCD$ mamy:

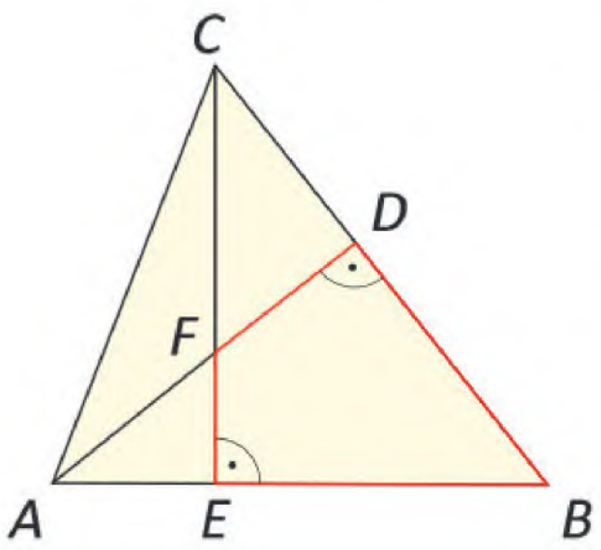
$$|\sphericalangle A|+|\sphericalangle C|=|\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle BCD|<|\sphericalangle BAD|+|\sphericalangle DC_1B|=180^\circ, \text{ stąd}$$

$$|\sphericalangle A|+|\sphericalangle C|<180^\circ, \text{ co jest sprzeczne z założeniem.}$$

Nasze przypuszczenie, że na czworokącie $ABCD$ nie można opisać okręgu doprowadziło w obu przypadkach do sprzeczności, co kończy dowód.

Przykład 2.

W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości AD i CE przecinają się w punkcie F. Pokażemy, że na czworokącie $EBDF$ można opisać okrąg.



Wysokości AD i CE trójkąta ABC są prostopadłe odpowiednio do boków BC i AB. To znaczy, że

$$|\sphericalangle FDB|=|\sphericalangle BEF|=90^\circ$$

Z tego wynika, że

$$|\sphericalangle FDB|+|\sphericalangle BEF|=90^\circ+90^\circ=180^\circ,$$

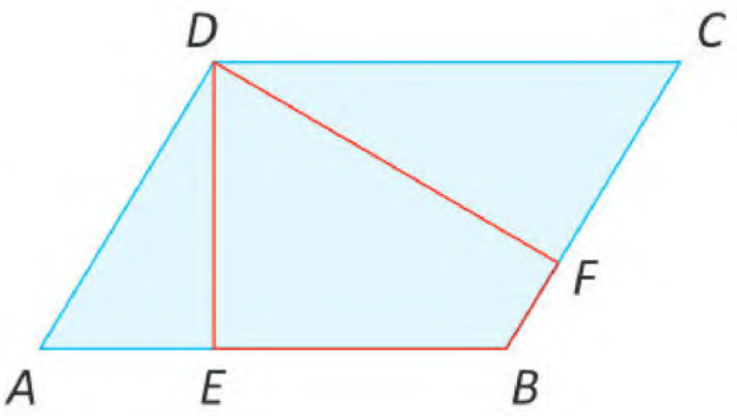
zatem na mocy twierdzenia 3. na czworokącie $EBDF$ można opisać okrąg.

Twierdzenie 2. i twierdzenie 3. można zapisać następująco.

Twierdzenie 4.

Okrąg można opisać na czworokącie wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów czworokąta są równe i wynoszą po 180°.

Ćwiczenie 3. W równoległoboku $ABCD$ z wierzchołka D kąta rozwartego poprowadzono dwie jego wysokości DE i DF, zobacz rysunek obok. Wykaż, że na czworokącie $EBFD$ można opisać okrąg.



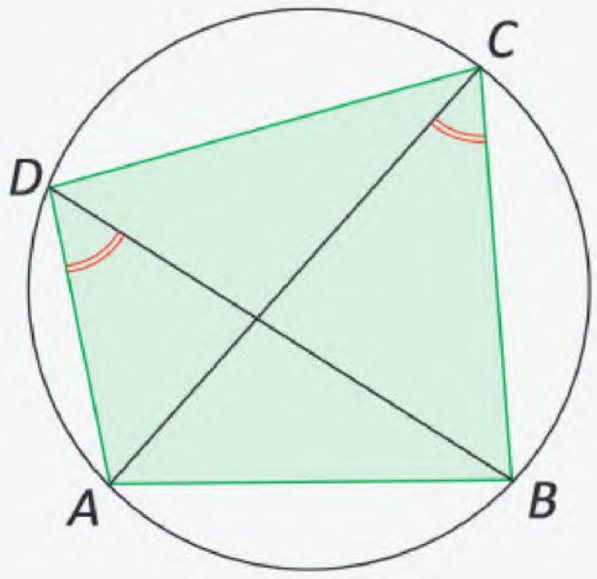
Ćwiczenie 4. Podaj przykłady równoległoboków, na których można opisać okrąg.

Ćwiczenie 5. Wykaż, że jeśli trapez nie jest równoległobokiem, to na tym trapezie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy jest to trapez równoramienny.

W rozwiązywaniu zadań przydatne jest również następujące twierdzenie.

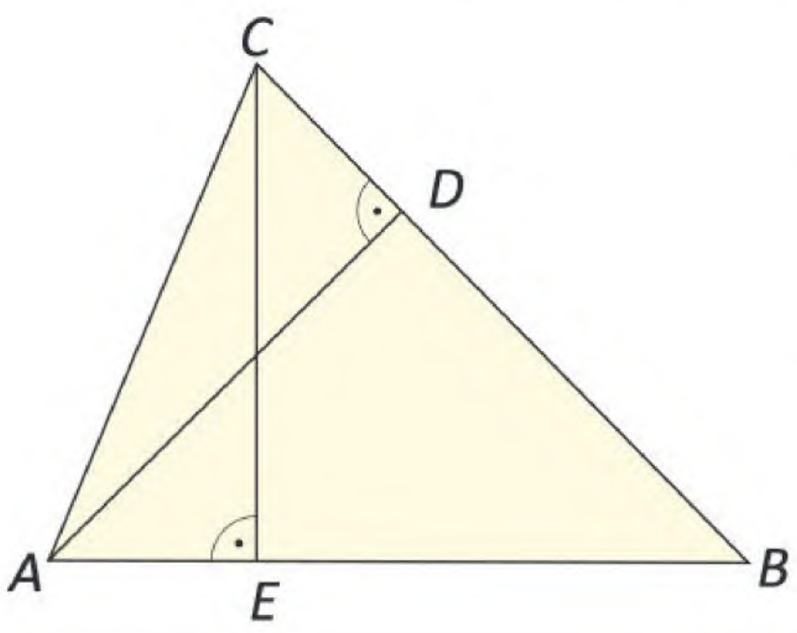
Twierdzenie 5.

Okrąg można opisać na czworokącie wtedy i tylko wtedy, gdy przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ tworzą odpowiednio z bokami BC i AD kąty równe, to znaczy $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$.



Przykład 3.

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i CE. Pokażemy, że na czworokącie $AEDC$ można opisać okrąg.



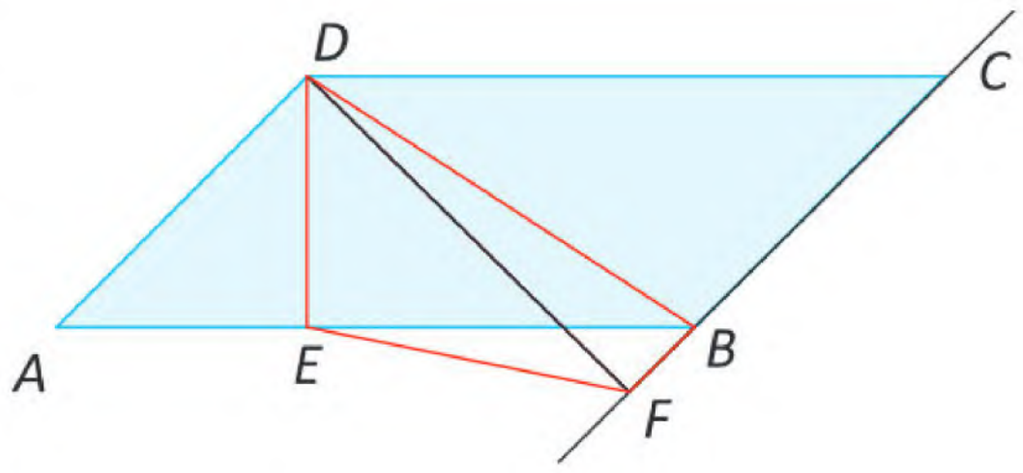
Przekątne AD i CE czworokąta $AEDC$ są wysokościami trójkąta ABC, więc są prostopadłe do przeciwległych boków AE i CD tego czworokąta.

$$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle AEC| = 90^\circ$$

Zatem na mocy twierdzenia 5. na czworokącie $AEDC$ można opisać okrąg.

Ćwiczenie 6. Wskaż położenie środka okręgu z przykładu 3.

Ćwiczenie 7. W równoległoboku $ABCD$ z wierzchołka D kąta rozwartego poprowadzono dwie jego wysokości DE i DF, zobacz rysunek obok. Wykaż, że na czworokącie $EFBD$ można opisać okrąg.



Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz kąty czworokąta wpisanego w okrąg, jeśli przedłużenia przeciwległych boków przecinają się, tworząc kąty 20° i 44°.

2. W okrąg o środku O wpisano czworokąt $ABCD$. Wyznacz kąty tego czworokąta oraz kąt ostry utworzony przez jego przekątne, jeśli $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle BOC| = 120^\circ$ oraz $|\sphericalangle DBC| = 25^\circ$.

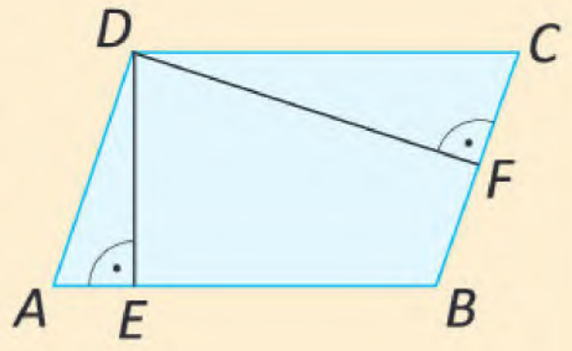
3. Oblicz promień okręgu opisanego na prostokącie, którego boki mają długość 3 cm i 4 cm.

4. Na kwadracie opisano okrąg. Oblicz długość boku kwadratu, wiedząc, że łuk tego okręgu pomiędzy dwoma sąsiednimi wierzchołkami ma długość π.

5. Promień okręgu opisanego na trapezie równoramiennym jest równy 13. Środek tego okręgu znajduje się wewnątrz trapezu, w odległości 12 od krótszej podstawy i 5 od dłuższej podstawy. Oblicz długości boków trapezu.

6. W okrąg o średnicy długości 20 cm wpisano trapez. Dłuższa podstawa trapezu ma długość 16 cm, a wysokość trapezu jest równa 2 cm. Oblicz długość krótszej podstawy tego trapezu.

7. W równoległoboku $ABCD$, $|\sphericalangle A| < 90^\circ$, poprowadzono wysokości DE i DF, gdzie $E \in AB$, $F \in BC$. Przez punkty E, B, F, D można poprowadzić okrąg. Wiedząc, że $|AB| = 21$, $|AD| = 13$ oraz $|DE| = 12$, oblicz promień tego okręgu.



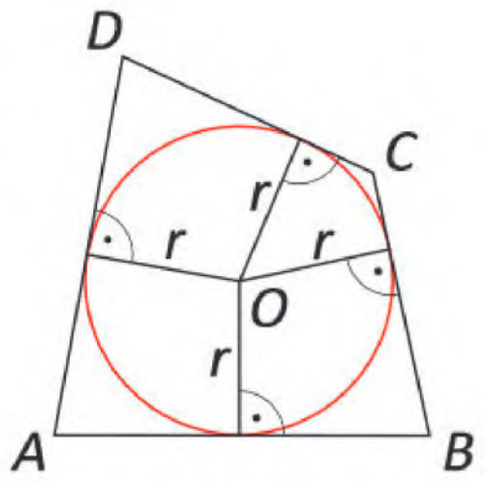
8. Boki trójkąta równoramiennego ABC mają długość: $|AC| = |BC| = 26$, $|AB| = 20$. Wysokości AD, BE i CF przecinają się w punkcie P. Oblicz długość średnicy okręgu opisanego na czworokącie $CEPD$.

9. W czworokącie $ABCD$ dane są: $|AB| = |AD| = 10$, $|BC| = 16$, $|DC| = 6$ oraz $|\sphericalangle CBA| = 60^\circ$.
   a) Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.
   b) Oblicz długość przekątnej BD.

D 10. W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle A| = 60^\circ$, $|\sphericalangle B| = 30^\circ$. Punkt D należy do boku AB oraz $|AD| : |DB| = 1 : 3$. Odcinek CD przedłużono poza punkt D do punktu E takiego, że $|AE| = |AC|$. Wykaż, że na czworokącie $AEBC$ można opisać okrąg.

Okrąg wpisany w czworokąt

Okrąg jest wpisany w czworokąt wypukły wtedy, gdy każdy bok czworokąta jest styczny do okręgu (czyli zawiera się w prostej stycznej do okręgu). Wówczas powiemy również, że **czworokąt jest opisany na okręgu**.



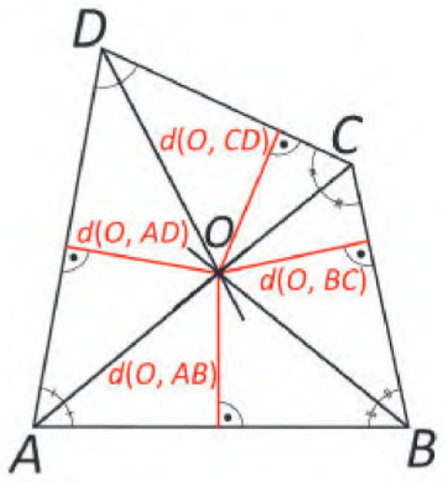
Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Okrąg można wpisać w czworokąt wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów tego czworokąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód: W dowodzie wykorzystujemy fakt, że dwusieczna kąta jest zbiorem punktów równoodległych od ramion tego kąta.

1) Załóżmy, że w czworokąt *ABCD* można wpisać okrąg o środku w punkcie *O* i promieniu r. Wówczas punkt *O* leży w odległości *r* od wszystkich boków tego czworokąta (zobacz rysunek powyżej). Zatem punkt *O* jest równoodległy od ramion wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta, więc należy do dwusiecznych tych kątów. Z tego wynika, że dwusieczne kątów czworokąta przecinają się w punkcie *O*.

2) Załóżmy teraz, że dwusieczne wszystkich kątów czworokąta *ABCD* przecinają się w punkcie *O* (zobacz rysunek poniżej).



Z własności dwusiecznej $AO^{\rightarrow}$ odległość punktu *O* od boku *AB* jest równa odległości punktu *O* od boku *AD*, co zapisujemy:

$$d(O, AB) = d(O, AD)$$

Podobnie mamy w przypadku dwusiecznych pozostałych kątów:

$$d(O, AB) = d(O, BC),\ d(O, BC) = d(O, CD),$$
$$d(O, CD) = d(O, AD)$$

A to znaczy, że punkt *O* leży w równych odległościach od wszystkich boków czworokąta *ABCD*. Zatem możemy poprowadzić okrąg o środku w punkcie *O*, który jest styczny do wszystkich boków czworokąta *ABCD*, co kończy dowód.

Ćwiczenie 1. Podaj przykład czworokąta wypukłego:
a) w który można wpisać okrąg b) którego nie można opisać na okręgu.

Kolejne twierdzenie przedstawia ważną cechę tych czworokątów wypukłych, w które można wpisać okrąg.

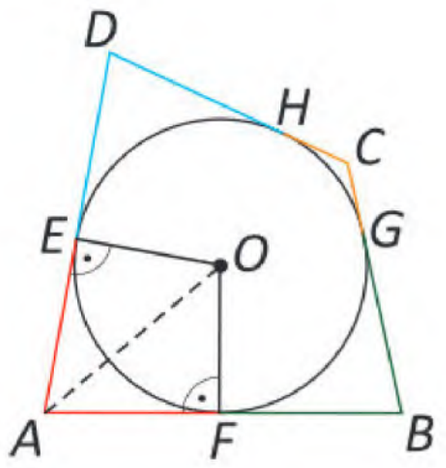
Twierdzenie 2.

Jeśli okrąg można wpisać w czworokąt wypukły, to sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe.

Założenie:

ABCD – czworokąt wypukły, opisany na okręgu

E, *F*, *G*, *H* – punkty styczności okręgu i czworokąta



Teza:

$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$

Dowód: Okrąg wpisany w czworokąt *ABCD* jest styczny do ramion kątów *BAD*, *CBA*, *DCB* i *DAB*. Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że odcinki oznaczone na rysunku tym samym kolorem mają taką samą długość. Zatem:

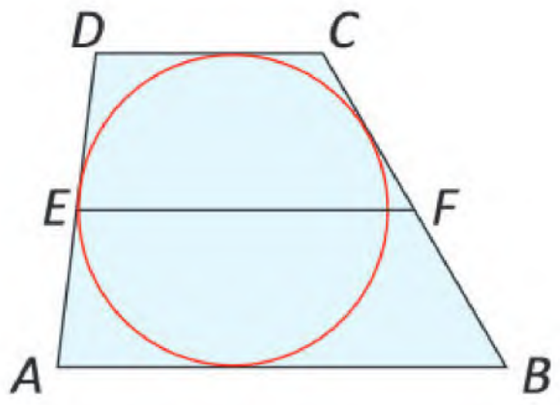
$$|AB| + |CD| = |AF| + |FB| + |CH| + |HD| = |AE| + |BG| + |GC| + |ED| =$$

$$= \big(|AE|+|ED|\big)+\big(|BG|+|GC|\big)=|AD|+|BC|,$$

Otrzymaliśmy: $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, co kończy dowód.

Przykład 1.

Odcinek *EF* łączy środki ramion *AD* i *BC* trapezu *ABCD*. Pokażemy, że jeśli w ten trapez można wpisać okrąg, to obwód trapezu jest równy $4\cdot|EF|$.



Z twierdzenia 2. wynika, że

$|AD| + |BC| = |AB| + |DC|$.

Obliczamy obwód trapezu:

$$|AB| + |BC| + |DC| + |AD| =$$

$$= |AB| + |DC| + |AB| + |DC| = 2\cdot\big(|AB|+|DC|\big).$$

Z twierdzenia o odcinku łączącym środki ramion trapezu wynika, że

$$|EF|=\frac{|AB|+|DC|}{2} \qquad \text{czyli} \qquad |AB| + |DC| = 2\cdot|EF|.$$

Zatem

$2\cdot\big(|AB|+|DC|\big)=4|EF|$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 2. W trapez równoramienny można wpisać okrąg. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli dłuższą podstawę na dwa odcinki, z których dłuższy ma długość 5 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2.

Twierdzenie 3.
Jeśli sumy długości przeciwległych boków czworokąta wypukłego są równe, to w ten czworokąt można wpisać okrąg.

Założenie:

$ABCD$ – czworokąt wypukły, w którym $|AB| + |DC| = |AD| + |BC|$

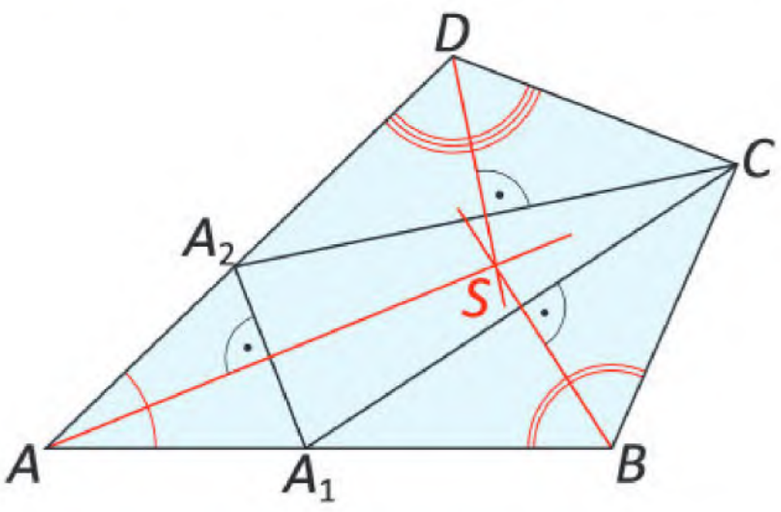
Teza:

W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Dowód: Na podstawie twierdzenia 1. wystarczy pokazać, że dwusieczne kątów czworokąta $ABCD$ przecinają się w jednym punkcie.

1. przypadek: Wszystkie boki czworokąta są równej długości. Wówczas czworokąt $ABCD$ jest rombem. W rombie dwusieczne kątów zawierają przekątne, które przecinają się w jednym punkcie. Zatem w romb można wpisać okrąg.

2. przypadek: Czworokąt $ABCD$ nie jest rombem.



Możemy przyjąć, że $|AB| > |BC|$.
Z założenia mamy

$$|AB| + |DC| = |AD| + |BC|.$$

Wówczas $|AD| > |DC|$.

Na bokach AB i AD znajdujemy punkty A_1 i A_2 takie, że

$$|A_1B| = |BC| \quad \text{oraz} \quad |A_2D| = |DC|.$$

Z założenia wynika również, że

$$|AB| - |BC| = |AD| - |DC|.$$

Z wyboru punktów A_1 i A_2 mamy:

$$|AA_1| = |AB| - |BC| = |AD| - |DC| = |AA_2|$$

Otrzymaliśmy, że trójkąty A_1BC, A_2CD oraz AA_1A_2 są równoramienne.
Prowadzimy teraz dwusieczne trzech kątów: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$. Zawierają się one w symetralnych boków trójkąta A_1CA_2 (dlaczego?), więc przecinają się w jednym punkcie. Oznaczmy ten punkt przez S. Wówczas:

$$d(S,BC) = d(S,AB), \quad d(S,AB) = d(S,AD), \quad d(S,AD) = d(S,DC)$$

Zatem $d(S,BC) = d(S,DC)$, więc punkt S należy również do dwusiecznej kąta przy wierzchołku C i w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, co kończy dowód.

Twierdzenie 2. i 3. można napisać następująco:

Twierdzenie 4.

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

Ćwiczenie 3. Sprawdź, czy w czworokąt można wpisać okrąg, jeśli kolejne boki czworokąta mają długość:

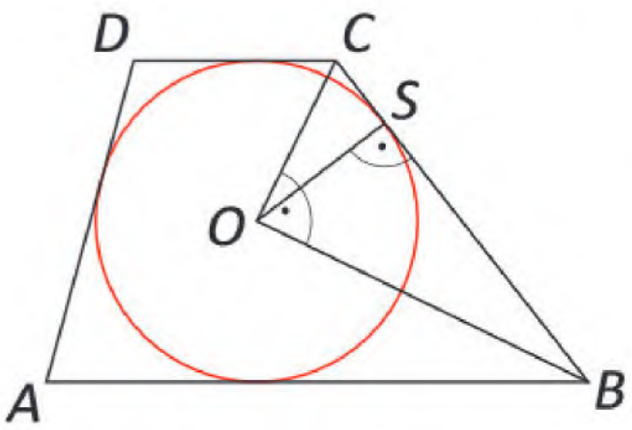
a) 23 cm, 17 cm, 12 cm, 18 cm

b) 9 cm, 5 cm, 9 cm, 5 cm

Przykład 2.

W trapez $ABCD$ wpisano okrąg. Ramię BC trapezu zostało podzielone przez punkt styczności S na odcinki CS i BS, gdzie $|CS| = 2$, $|BS| = 8$. Obliczymy promień okręgu wpisanego w trapez.

I sposób: Prowadzimy promień okręgu, prostopadły do ramienia BC.



Niech punkt O będzie środkiem okręgu. Promień OS jest prostopadły do ramienia BC. Odcinki BO i CO zawierają się w dwusiecznych kątów CBA i DCB.

Wyznaczamy kąt COB:

$$|\sphericalangle COB| = 180^\circ - \left(\frac{|\sphericalangle CBA|}{2} + \frac{|\sphericalangle DCB|}{2} \right) = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

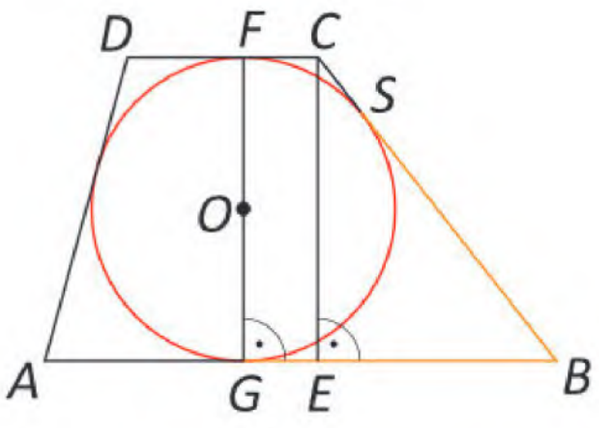
Trójkąt COB jest prostokątny, a promień OS jest wysokością tego trójkąta, poprowadzoną na przeciwprostokątną BC. Zatem:

$|OS|^2 = |SC| \cdot |SB|$, czyli $|OS|^2 = 2 \cdot 8 = 16$, $|OS| > 0$, więc $|OS| = 4$.

Promień okręgu wpisanego w trapez jest równy 4.

II sposób: Prowadzimy wysokość CE trapezu oraz wysokość FG, do której należy punkt O. Czworokąt $GECF$ jest prostokątem.

Zauważamy, że $|CE| = |FG| = 2r$.



Ponieważ $|BS| = |GB| = 8$ oraz
$|GE| = |FC| = |CS| = 2$, więc
$|EB| = 8 - 2 = 6$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie EBC mamy:

$|CE|^2 = |BC|^2 - |EB|^2$

$|CE|^2 = 10^2 - 6^2$, $|CE| > 0$

$|CE| = 8$, czyli $2r = |CE| = 8$, stąd $r = 4$

Promień okręgu wpisanego w trapez jest równy 4.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Czy w czworokąt można wpisać okrąg, jeśli długości kolejnych boków:
   a) są równe
   b) pozostają w stosunku 1 : 2 : 3 : 4?

D 2. W trapezie równoramiennym jedna podstawa jest trzy razy dłuższa od drugiej, a długość drugiej podstawy jest połową długości ramienia. Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.

D 3. Wykaż, że jeśli w trapezie równoramiennym długość ramienia jest równa długości odcinka łączącego środki ramion, to w ten trapez można wpisać okrąg.

4. Długość boku rombu jest równa 2,5 cm, a sinus kąta ostrego rombu jest równy 0,8. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten romb.

5. Iloczyn promienia okręgu wpisanego w kwadrat i promienia okręgu opisanego na tym kwadracie jest równy $\sqrt{2}$. Oblicz długość boku kwadratu.

6. W romb o boku długości 25 cm i wysokości 24 cm wpisano okrąg. Oblicz, w jakiej odległości od środka boku znajduje się punkt styczności okręgu z tym bokiem.

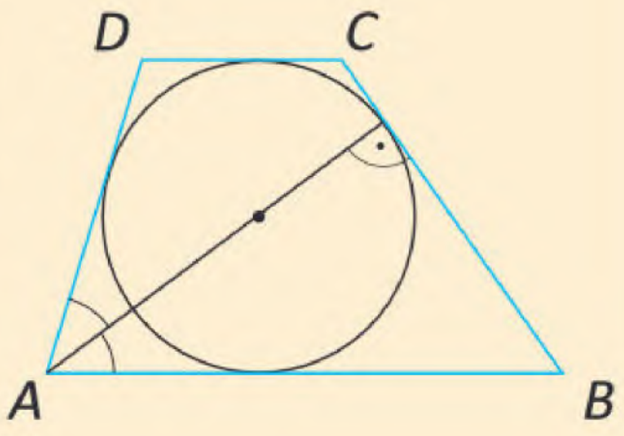
7. W trapez prostokątny wpisano okrąg o promieniu równym 7,5. Oblicz długości podstaw trapezu, jeśli dłuższe ramię trapezu jest równe 17.

8. W trapez prostokątny można wpisać okrąg. Wiedząc, że punkt styczności tego okręgu z dłuższym ramieniem trapezu dzieli to ramię na odcinki długości 4 i 9, oblicz wysokość tego trapezu i jego obwód.

9. W trapez $ABCD$, $AB \parallel DC$, wpisano okrąg o promieniu 12. Ramię BC trapezu ma długość 25. Oblicz, jakie długości mają odcinki, na które punkt styczności okręgu z ramieniem BC dzieli to ramię.

10. W trapez $ABCD$ wpisano okrąg. Punkty E i F są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z podstawą AB i z podstawą DC. Wiedząc, że $|DF| = 5$ oraz $|AE| = 20$, wyznacz promień tego okręgu.

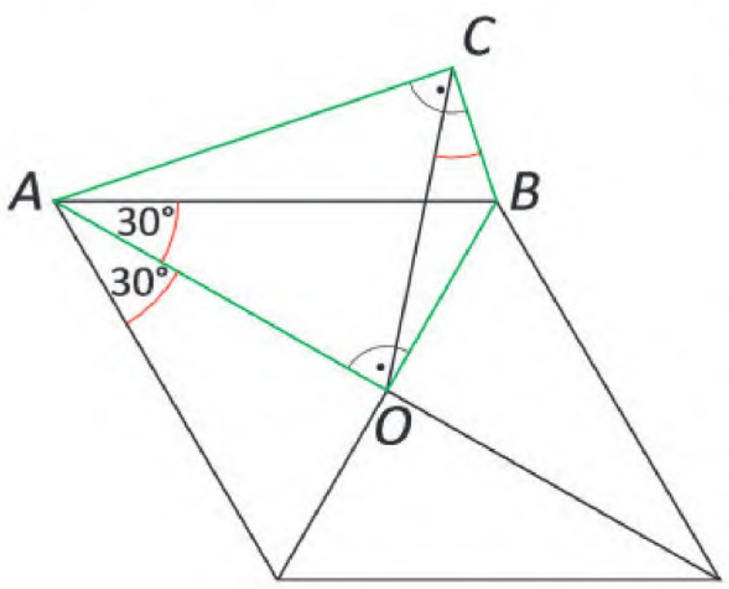
11. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, dwusieczna kąta BAD jest prostopadła do ramienia BC, wysokość trapezu jest równa 8. W trapez wpisano okrąg. Środek tego okręgu znajduje się w odległości 5 od wierzchołka D. Oblicz długości boków tego trapezu.



Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie

Przykład 1.

Przeciwprostokątna AB trójkąta prostokątnego ABC jest jednocześnie bokiem rombu o kątach równych 60° i 120°. Trójkąt ABC i romb leżą po przeciwnych stronach prostej AB. Przekątne rombu przecinają się w punkcie O. Pokażemy, że półprosta $\overrightarrow{CO}$ dzieli kąt ACB na kąty równe 30° i 60°.



Niech rysunek obok ilustruje zadanie.
Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.
W czworokącie $AOBC$ mamy:

$$|\sphericalangle BOA| + |\sphericalangle ACB| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Zatem na czworokącie $AOBC$ można opisać okrąg. Wówczas kąty OCB i OAB to kąty wpisane w okrąg, oparte na tym samym łuku, więc

$$|\sphericalangle OCB| = |\sphericalangle OAB|.$$

Jednocześnie wiemy, że przekątne rombu zawierają się w dwusiecznych jego kątów wewnętrznych, stąd

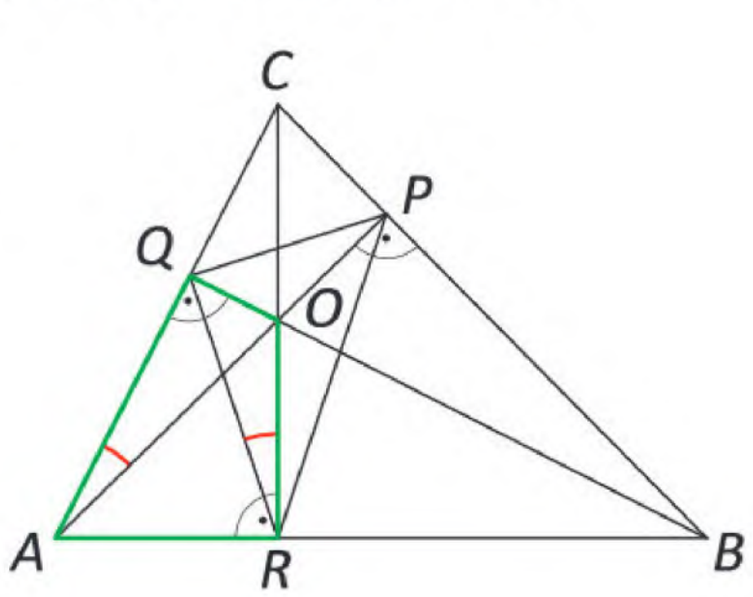
$$|\sphericalangle OAB| = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

Zatem $|\sphericalangle OCB| = 30^\circ$ i $|\sphericalangle OCA| = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, co kończy dowód.

Przykład 2.

W trójkącie ostrokątnym ABC punkty P, Q, R są spodkami wysokości. Wykażemy, że wysokości trójkąta ABC zawierają się w dwusiecznych kątów trójkąta PQR.

Na rysunku obok przedstawiony jest trójkąt ostrokątny ABC oraz punkty P, Q, R, będące spodkami wysokości tego trójkąta. Pokażemy, że wysokość CR zawiera się w dwusiecznej kąta PRQ.



1) Rozpatrzmy czworokąt $AROQ$.

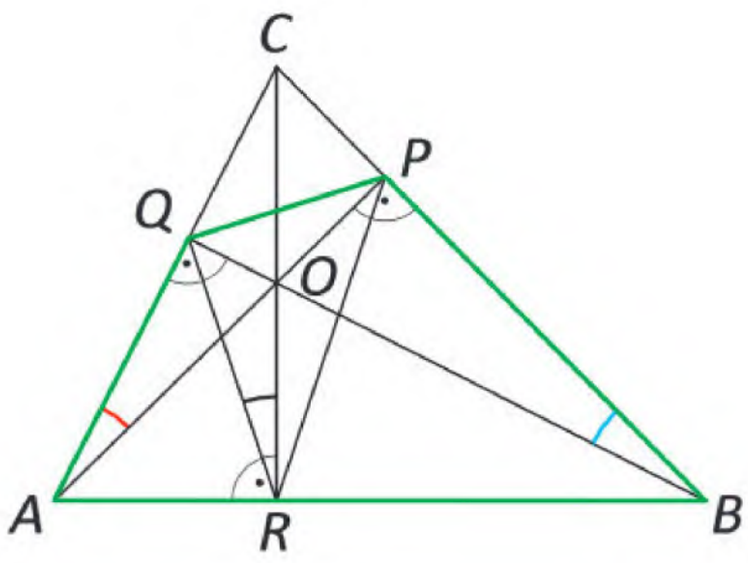
Zauważamy, że:

$$|\sphericalangle AQO| + |\sphericalangle ORA| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Otrzymujemy, że na czworokącie $AROQ$ można opisać okrąg, więc

$$|\sphericalangle QRO| = |\sphericalangle QAO|$$

– kąty wpisane, oparte na tym samym łuku



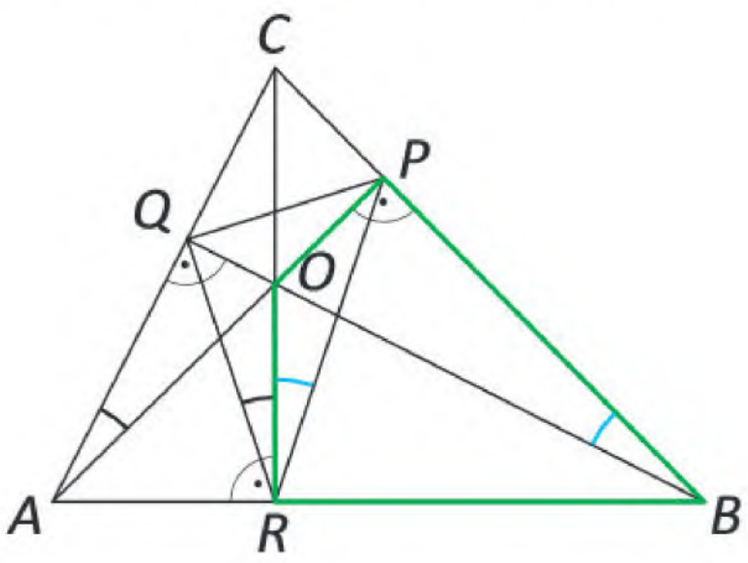
2) Rozpatrzmy czworokąt *ABPQ*.
Zauważamy, że

$$|\sphericalangle AQB| = |\sphericalangle APB| = 90°.$$

Na mocy twierdzenia 5. ze strony 235.
na czworokącie *ABPQ* można opisać okrąg.
Z tego wynika, że

$$|\sphericalangle OAQ| = |\sphericalangle PBO|$$

3) Również na czworokącie *RBPO* można opisać okrąg (wyjaśnij, dlaczego).



Zatem

$$|\sphericalangle PBO| = |\sphericalangle PRO|.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy:

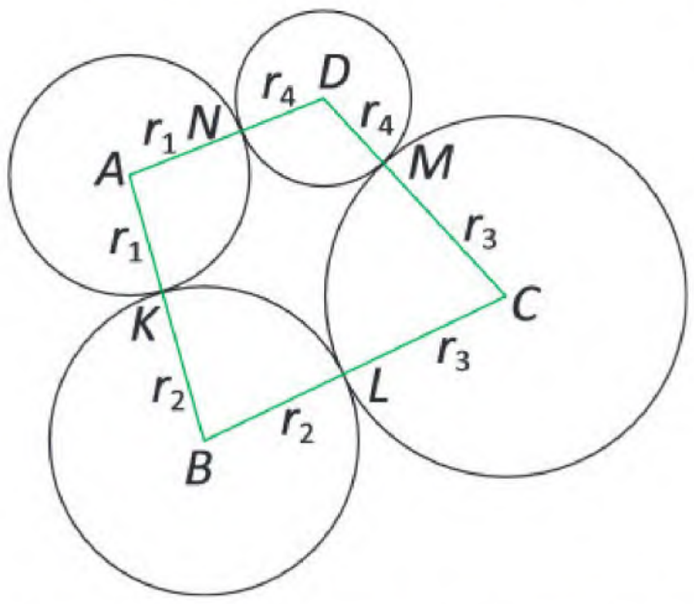
$$|\sphericalangle ORQ| = |\sphericalangle OAQ| = |\sphericalangle PBO| = |\sphericalangle PRO|.$$

Z równości $|\sphericalangle ORQ| = |\sphericalangle PRO|$ wynika, że wysokość *CR* zawiera się w dwusiecznej kąta *QRP*,
co kończy dowód.

Przykład 3.

Na stole ułożono cztery różne, okrągłe monety tak, że każda dotyka dwóch sąsiednich. Wykażemy, że środki monet są wierzchołkami czworokąta, który można opisać na okręgu.

Poniższy rysunek ilustruje sytuację opisaną w zadaniu.



Oznaczmy następująco okręgi reprezentujące monety:

$$o(A, r_1),\ o(B, r_2),\ o(C, r_3),\ o(D, r_4).$$

Wystarczy pokazać, że

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|.$$

Okręgi są parami styczne zewnętrznie, zatem odległości między ich środkami są równe sumie odpowiednich promieni:

$$|AB| = r_1 + r_2 \qquad |BC| = r_2 + r_3$$
$$|CD| = r_3 + r_4 \qquad |AD| = r_1 + r_4$$

Wówczas:

$$|AB| + |CD| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \quad \text{oraz}$$
$$|BC| + |AD| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

Tak więc $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$, co kończy dowód.

Ćwiczenie 1. Wykaż, że punkty styczności monet z przykładu 3. są wierzchołkami czworokąta, który można wpisać w okrąg.

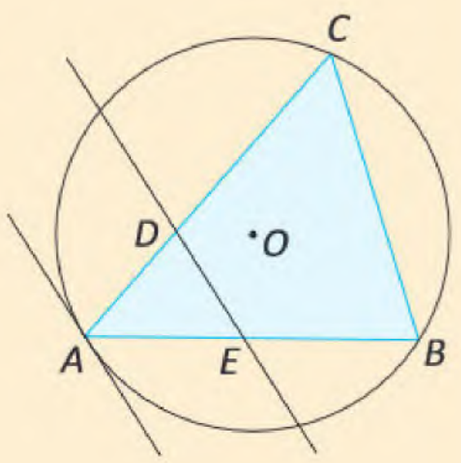
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Trójkąt *ABC* jest prostokątny. Przeciwprostokątna *AB* jest jednocześnie bokiem kwadratu. Trójkąt *ABC* i kwadrat leżą po przeciwnych stronach prostej *AB*. Punkt *O* jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu. Wykaż, że półprosta $\overrightarrow{CO}$ jest dwusieczną kąta *ACB*.

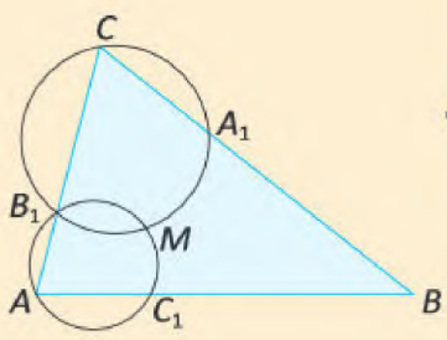
D 2. W trójkącie *ABC* kąt *BAC* jest rozwarty. Odcinki *AP*, *BQ* i *CR* są wysokościami tego trójkąta. Wykaż, że prosta *AB* zawiera dwusieczną kąta *QRP* trójkąta *PRQ*.

D 3. Wykaż, że jeśli czworokąt wpisany w okrąg ma jedną parę boków przeciwległych równej długości, to przekątne tego czworokąta mają taką samą długość.

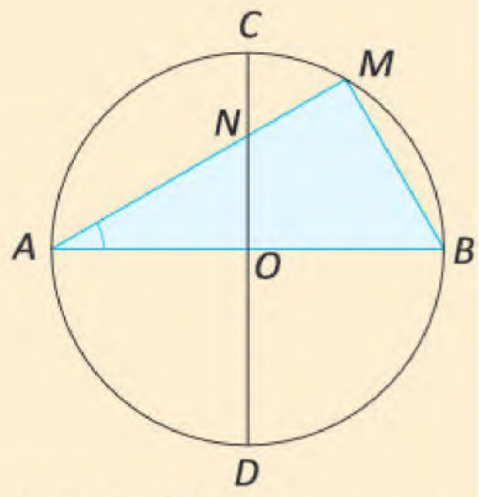
D 4. Trójkąt *ABC* wpisano w okrąg. Przez punkt *A* poprowadzono styczną do okręgu. Sieczna okręgu, równoległa do tej stycznej, przecina boki *AC* i *AB* odpowiednio w punktach *D* i *E*. Wykaż, że na czworokącie *CDEB* można opisać okrąg.



D 5. Na boku *AB* trójkąta ostrokątnego *ABC* wybrano dowolnie punkt C_1, na boku *AC* – punkt B_1, a na boku *BC* – punkt A_1. Na trójkątach A_1B_1C i AC_1B_1 opisano okręgi, które przecięły się w punktach B_1 i *M*. Wykaż, że punkt *M* należy do okręgu opisanego na trójkącie C_1BA_1.



D 6. W okręgu o środku *O* poprowadzono dwie prostopadłe średnice *AB* i *CD*. Z punktu *A* poprowadzono cięciwę *AM*, przecinającą średnicę *CD* w punkcie *N*. Wykaż, że jeśli w czworokąt *OBMN* można wpisać okrąg, to $|\sphericalangle BAM| = 30°$.



D 7. Podstawy trapezu równoramiennego mają długość *a* i *b*. Wykaż, że jeśli w ten trapez można wpisać okrąg, to $2r = \sqrt{ab}$, gdzie *r* jest promieniem tego okręgu.

D 8. Wielokąt mający parzystą liczbę boków opisano na okręgu i ponumerowano kolejno jego boki. Wykaż, że suma długości boków o numerach parzystych jest równa sumie długości boków o numerach nieparzystych.

Podobieństwo. Czworokąty podobne

W klasie pierwszej zostały omówione trójkąty podobne. Aby wyjaśnić, na czym polega podobieństwo innych figur, przyjmiemy następujące definicje.

Definicja 1.

Podobieństwem nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które dowolnym dwóm różnym punktom A, B płaszczyzny przyporządkowuje takie punkty A_1, B_1, dla których $$\frac{|A_1B_1|}{|AB|}=k,$$ gdzie k jest ustaloną dla danego podobieństwa liczbą dodatnią.

Liczbę k nazywamy **skalą podobieństwa**.

Definicja 2.

Figurami podobnymi nazywamy dwie figury geometryczne F i F_1, dla których istnieje podobieństwo przekształcające figurę F na figurę F_1.

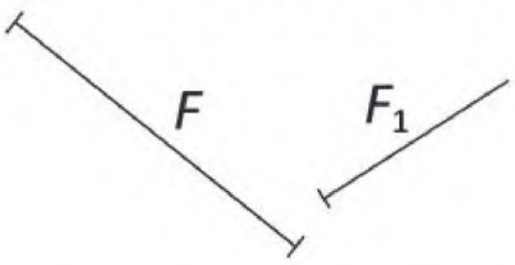
Podobieństwo figur F i F_1 oznaczamy symbolicznie: $F \sim F_1$.

UWAGA: Trójkąty, które są podobne w myśl definicji 2., są również podobne w myśl definicji podanej w podręczniku do klasy pierwszej, zobacz definicję 1., str 346.

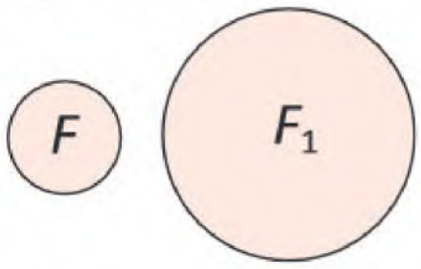
Przykład 1.

Figurami podobnymi są na przykład:

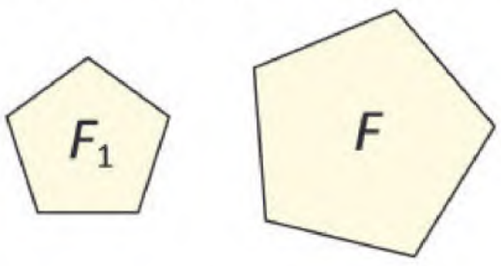
a) dwa niezerowe odcinki:



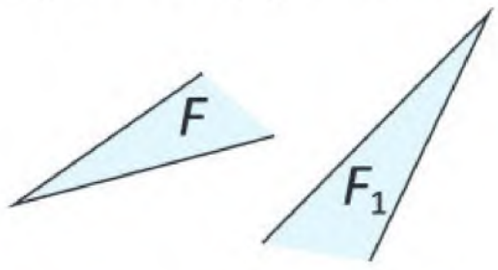
b) dwa koła



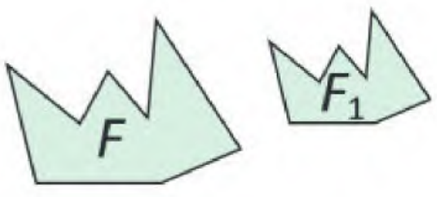
c) dwa pięciokąty foremne



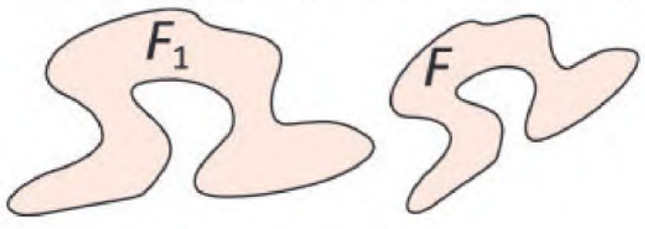
d) dwa kąty o takich samych miarach



e) dwa wielokąty na rysunku poniżej



f) dwie figury na rysunku poniżej



1) Jeżeli skala podobieństwa k jest liczbą z przedziału (0, 1), to odległość między dowolnymi punktami A, B będzie większa, niż pomiędzy ich obrazami A_1 i B_1. O takim podobieństwie możemy powiedzieć, że zmniejsza figury.

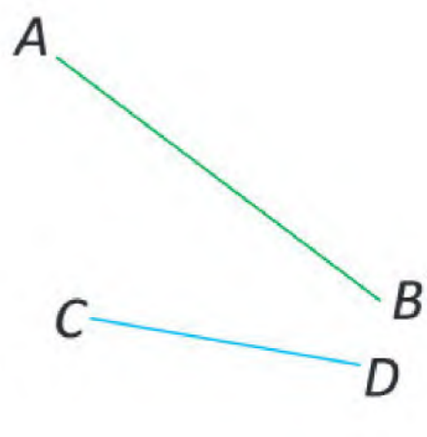
2) Jeżeli skala podobieństwa k należy do przedziału $(1, +\infty)$, to odległość między dowolnymi punktami A, B będzie mniejsza, niż pomiędzy ich obrazami A_1 i B_1. Powiemy, że takie podobieństwo zwiększa figury.

3) W przypadku, gdy $k = 1$, odległość między dowolnymi punktami A, B jest taka sama, jak odległość między ich obrazami A_1, B_1. Takie przekształcenie geometryczne, które nie zmienia odległości między punktami, nazywamy **izometrią**. O izometrii możemy też powiedzieć, że zachowuje wielkość i kształt figur.

Jeśli figura F_1 jest podobna do figury F w skali k, $k > 0$, to figura F jest podobna do figury F_1 w skali $\frac{1}{k}$.

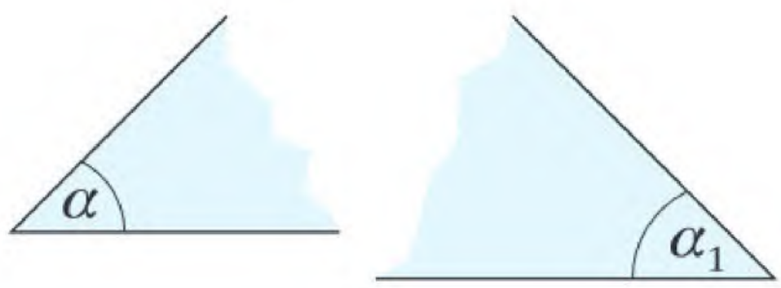
Przykład 2.

a) Dane są odcinki AB i CD, gdzie $|AB| = 15$ cm, $|CD| = 10$ cm. Odcinek CD jest podobny do odcinka AB w skali k, $k = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{2}{3}$.

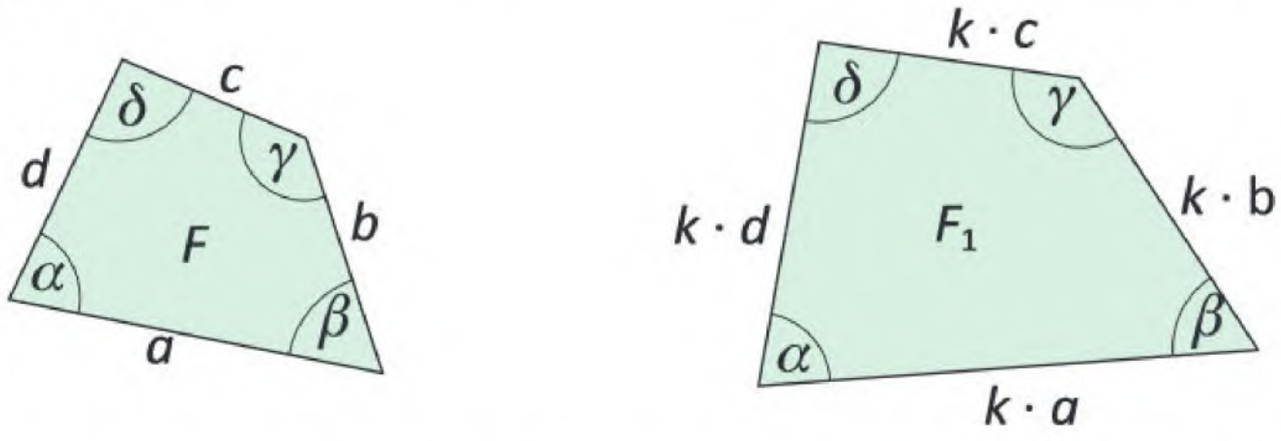


Wówczas odcinek AB jest podobny do odcinka CD w skali $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{k} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{3}{2}$.

b) Dane są dwa kąty : $\sphericalangle\alpha$ i $\sphericalangle\alpha_1$, gdzie $|\sphericalangle\alpha| = |\sphericalangle\alpha_1|$. W dowolnym podobieństwie obrazem kąta jest kąt o takiej samej mierze. Zatem skalą podobieństwa może być każda liczba rzeczywista dodatnia.



Z dotychczasowych rozważań dotyczących figur podobnych można wywnioskować, że w czworokątach podobnych odpowiednie kąty są równe i odpowiednie boki są proporcjonalne.



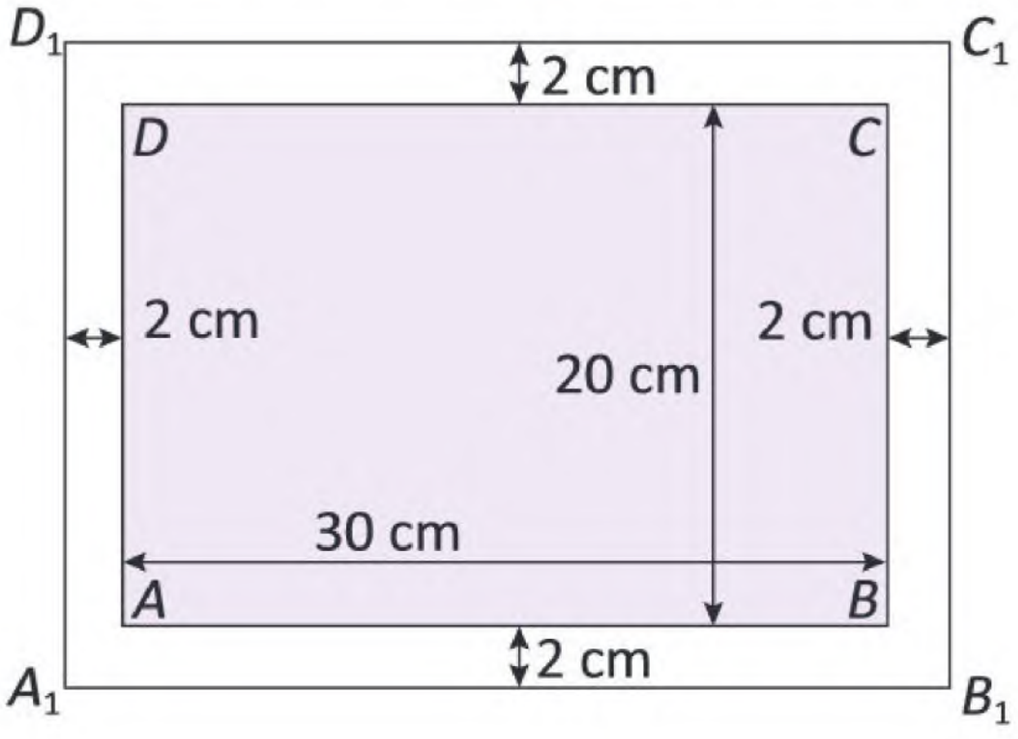
Skala podobieństwa przekształcającego czworokąt F na czworokąt F_1 na rysunku powyżej jest równa k, $k > 0$.

Kolejne dwa przykłady będą dotyczyć podobieństwa prostokątów. W prostokątach wszystkie kąty są równe, więc badając podobieństwo tych figur, wystarczy skupić uwagę na długościach boków.

Przykład 3.

W siedzibie biura turystycznego zawieszono na ścianie zdjęcie o wymiarach 20 cm na 30 cm, oprawione w ramkę szerokości 2 cm. Czy prostokąty wyznaczone przez zdjęcie i zewnętrzny brzeg ramki są figurami podobnymi?

Niech rysunek poniżej przedstawia prostokąty, których dotyczy to pytanie.



Wówczas:

$$|A_1B_1| = |D_1C_1| = 34 \text{ cm}, \quad |A_1D_1| = |B_1C_1| = 24 \text{ cm}$$

Obliczamy:

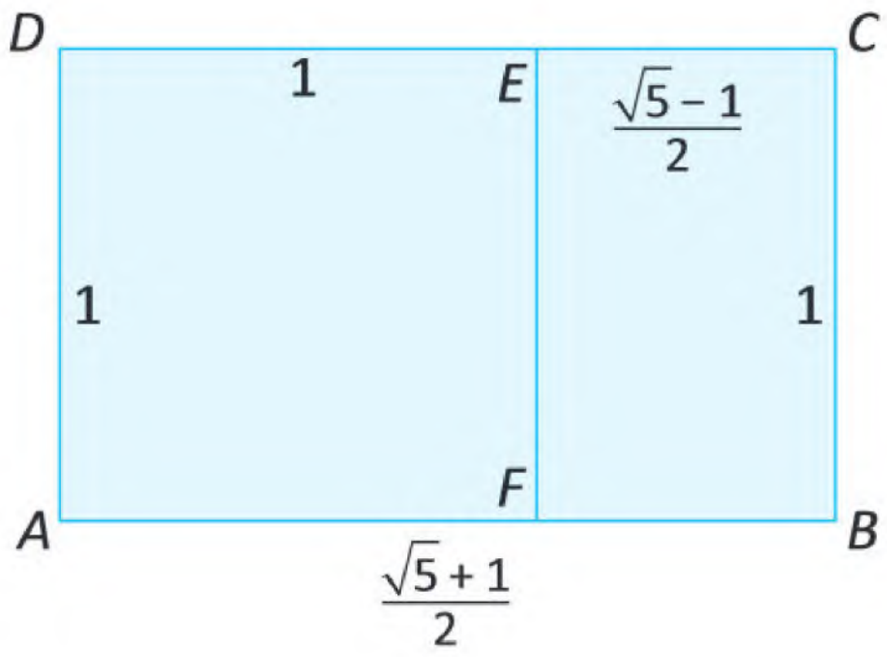
$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{34}{30} \approx 1{,}13 \quad \text{oraz} \quad \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{24}{20} = 1{,}2$$

Okazało się, że $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} \neq \frac{|B_1C_1|}{|BC|}$.

To znaczy, że prostokąty $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ nie są podobne.

Przykład 4.

W prostokącie $ABCD$ mamy dane: $|AD| = 1$, $|AB| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Punkt E należy do boku DC, punkt F należy do boku AB oraz czworokąt $AFED$ jest kwadratem. Pokażemy, że prostokąt $ABCD$ jest podobny do prostokąta $BCEF$ i podamy skalę tego podobieństwa.



Mamy dane:

$$|AB| = |CD| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$|AD| = |BC| = 1$$

$$|DE| = |EF| = 1$$

Wówczas:

$$|EC| = |FB| = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Aby wykazać, że prostokąty *ABCD* i *BCEF* są podobne, wystarczy sprawdzić, że prawdziwa jest równość:

$$\frac{|CD|}{|DA|} = \frac{|BC|}{|EC|}.$$

Obliczamy:

- $\frac{|CD|}{|DA|} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- $\frac{|BC|}{|EC|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

W obliczeniach został wykorzystany wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Pokazaliśmy, że $\frac{|CD|}{|DA|} = \frac{|BC|}{|EC|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Zatem prostokąt *ABCD* jest podobny do prostokąta *EFBC*. Skala tego podobieństwa jest równa $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Prostokąt, którego stosunek długości sąsiednich boków jest równy $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, nazywa się złotym prostokątem, a liczbę $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – złotą liczbą. Liczba złota wyraża taki podział odcinka, w którym stosunek długości dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi długości całego odcinka do części dłuższej. Czasami liczbą złotą nazywa się odwrotność liczby $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, czyli liczbę $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ćwiczenie 1. Odcinek jednostkowy AB podzielono na dwie części w taki sposób, że stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi długości odcinka AB do dłuższej części podziału. Oblicz długość każdej części i stosunek podziału.

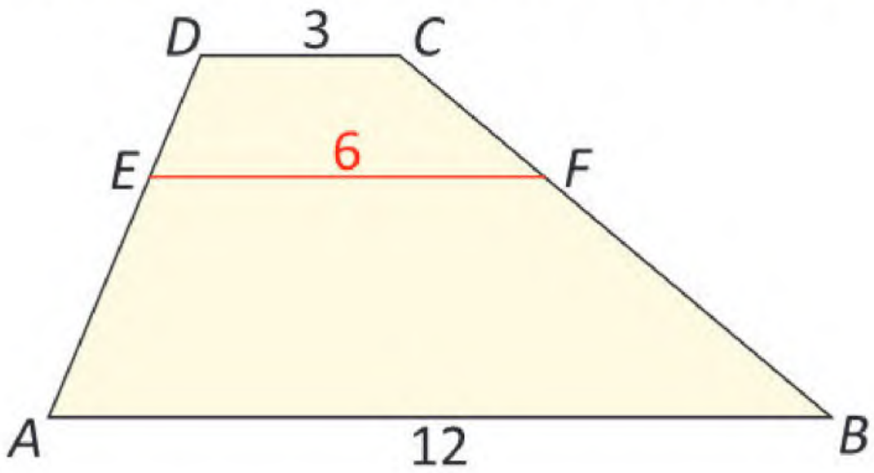
W starożytności uważano złoty podział za idealną proporcję, tzw. boską proporcję. Złoty podział bardzo często był stosowany w sztuce i w architekturze. Zdjęcie poniżej przedstawia fronton świątyni Ateny na Akropolu – Partenon. Ten fronton można wpisać w złoty prostokąt:



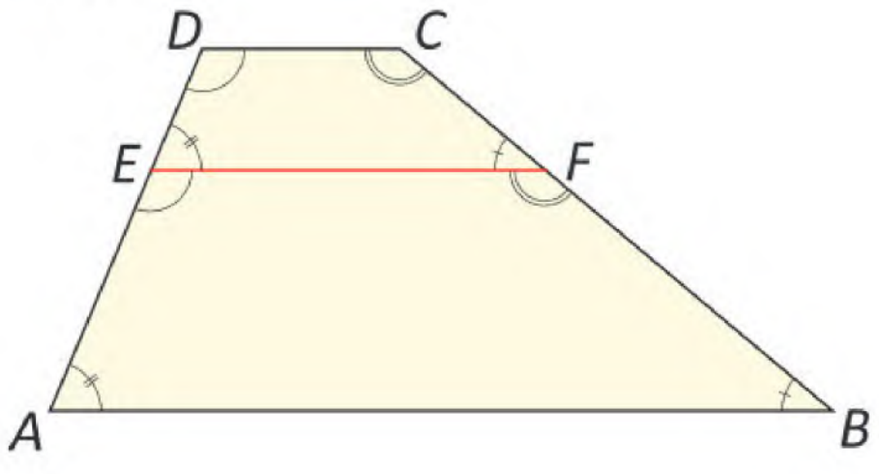
Kolejny przykład dotyczy podobieństwa trapezów.

Przykład 4.

W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, mamy dane: $|AB| = 12$, $|BC| = 9$, $|DC| = 3$, $|AD| = 6$. Odcinek EF łączący ramiona trapezu AD i BC jest równoległy do podstaw, a jego długość wynosi 6. Sprawdzimy, czy trapezy $ABFE$ i $EFCD$ są podobne.

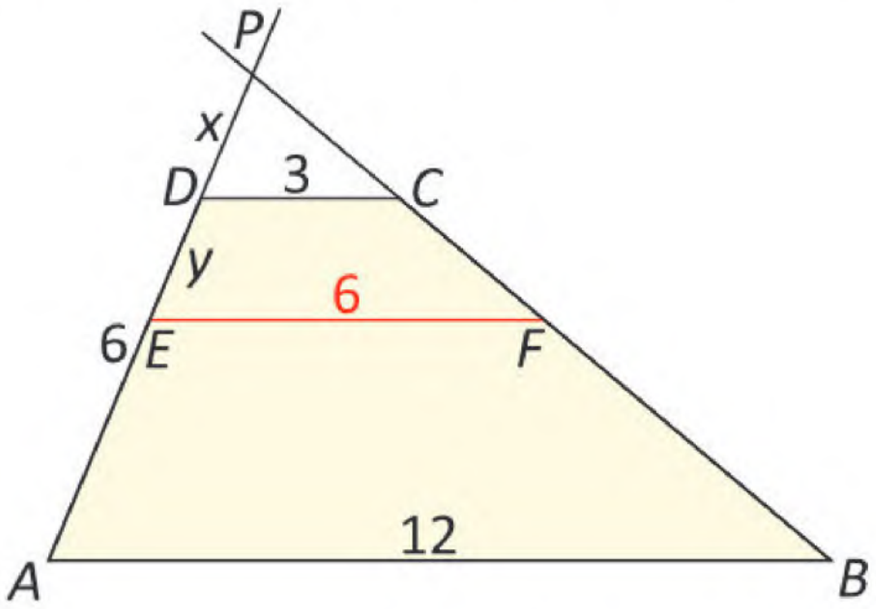


Zauważmy, że $EF \parallel AB \parallel CD$, więc odpowiadające sobie kąty w trapezach $ABFE$ i $EFCD$ są równe.



$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle FED|$$
$$|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle EFC|$$
$$|\sphericalangle AEF| = |\sphericalangle EDC|$$
$$|\sphericalangle EFB| = |\sphericalangle DCF|$$

Aby obliczyć długości ramion trapezów *ABFE* i *EFCD*, przedłużamy ramiona *AD* i *BC* trapezu *ABCD* do przecięcia się w punkcie *P*. Niech $|DP| = x$, $|DE| = y$.



Trójkąty *PEF* i *PDC* są podobne, stąd

$$\frac{x+y}{6}=\frac{x}{3} \qquad (1)$$

Trójkąty *PEF* i *PAB* też są podobne, więc

$$\frac{x+y}{6}=\frac{x+6}{12} \qquad (2)$$

Lewe strony równań (1) i (2) są takie same, zatem prawe strony są równe.

$\frac{x}{3}=\frac{x+6}{12}$ stąd $x = 2$. Wówczas $\frac{2+y}{6}=\frac{2}{3}$ stąd $y = 2$. Zatem:

$|DE| = 2$ i $|AE| = 6 - 2 = 4$

Obliczamy $|CF|$ i $|BF|$. Ponieważ $|BC| = 9$, więc $|BF| = 9 - |CF|$. Stosujemy twierdzenie Talesa do prostych *AD*, *BC* przeciętych prostymi równoległymi *AB*, *CD* i *EF*:

$\frac{|CF|}{|DE|}=\frac{|BF|}{|AE|}$ czyli $\frac{|CF|}{2}=\frac{9-|CF|}{4}$ stąd $|CF| = 3$ oraz $|BF| = 9 - 3 = 6$

Obliczamy stosunki długości odpowiednich boków w trapezach *ABFE* i *EFCD*:

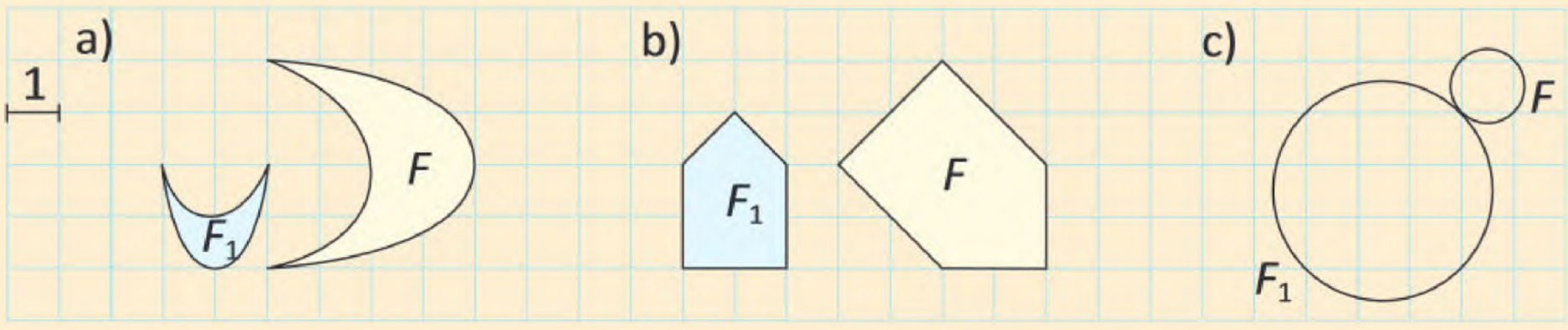
$$\frac{|AB|}{|EF|}=\frac{12}{6}=2,\quad \frac{|EF|}{|DC|}=\frac{6}{3}=2,\quad \frac{|AE|}{|DE|}=\frac{4}{2}=2,\quad \frac{|BF|}{|CF|}=\frac{6}{3}=2$$

Otrzymaliśmy, że w trapezach *ABFE* i *EFCD* odpowiednie kąty mają równe miary i stosunki długości odpowiednich boków są równe. Zatem te trapezy są podobne.

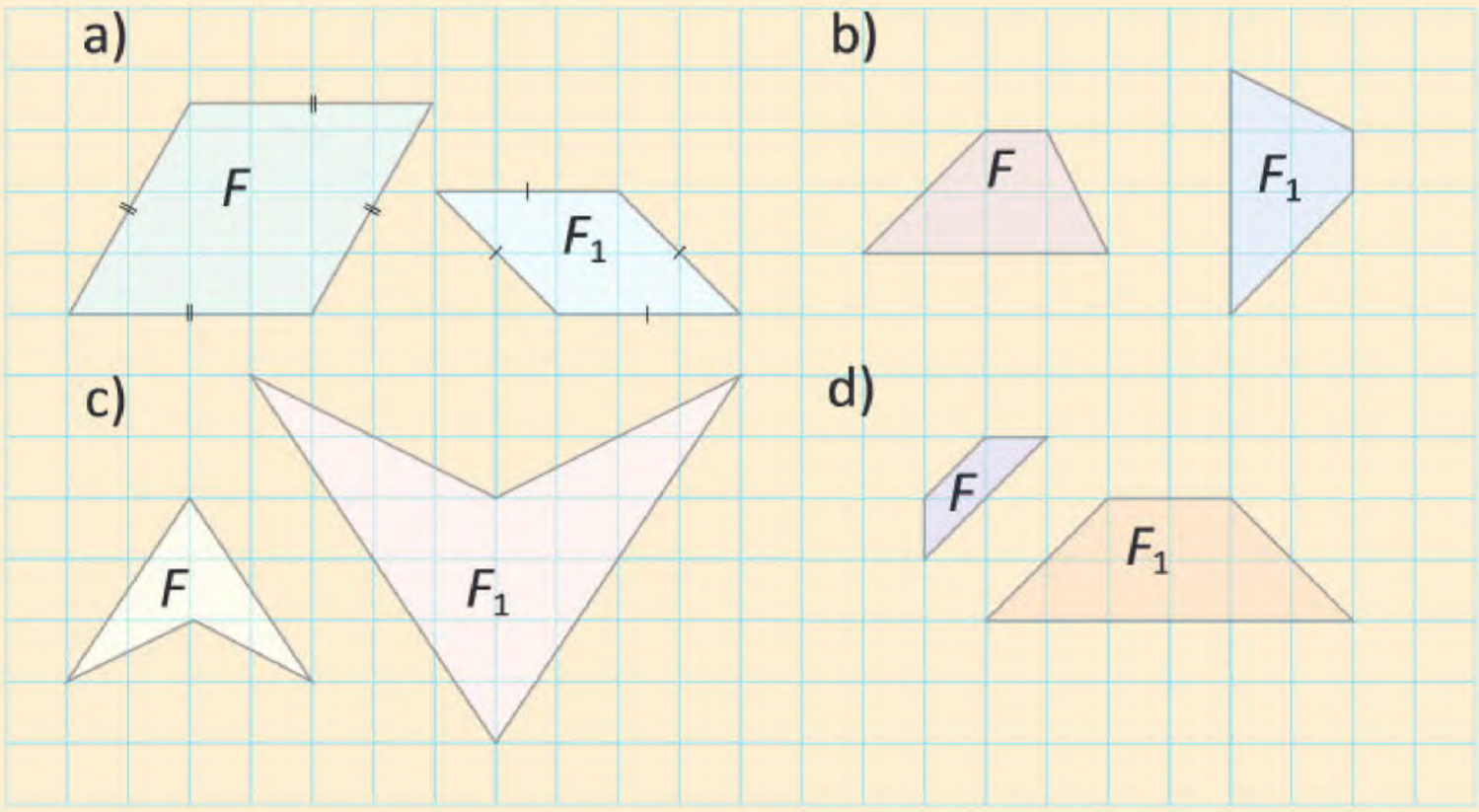
Ćwiczenie 2. Czy trapez *ABCD* z przykładu 4. jest podobny do trapezu *EFCD*? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Figura F_1 jest podobna do figury *F*. Na podstawie danych na rysunku podaj skalę tego podobieństwa. W jakiej skali figura *F* jest podobna do figury F_1?



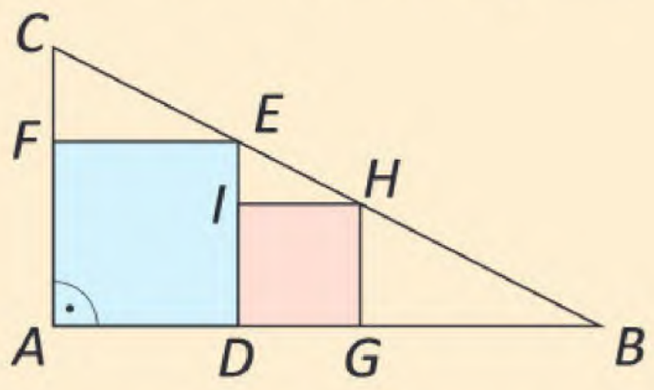
2. Czy na rysunku poniżej czworokąt F_1 jest podobny do czworokąta F? Jeśli tak, to podaj skalę tego podobieństwa.



3. W równoległoboku $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy od boku AD. Punkt K należy do boku AB ($K \neq A$ i $K \neq B$), a punkt L należy do boku DC ($L \neq D$ i $L \neq C$) oraz równoległobok $AKLD$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$ w skali k, $k > 0$. Oblicz:
   a) liczbę k
   b) stosunek $|AK| : |KB|$.

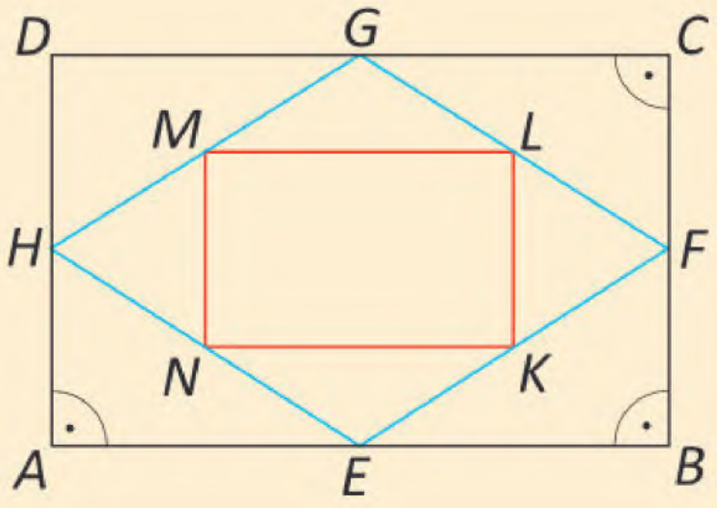
4. W trapezie $ABCD$ punkty E, F należą odpowiednio do ramion AD i BC. Odcinek EF jest równoległy do podstaw i dzieli trapez $ABCD$ na dwa trapezy podobne. Oblicz $|EF|$, jeśli $|AB| = 9$, $|DC| = 4$.

5. W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle A| = 90^\circ$, $|AB| = 6$, $|AC| = 3$. W trójkąt wpisano kwadrat $ADEF$, a w trójkąt DBE wpisano kwadrat $DGHI$ – jak na rysunku obok. Oblicz, w jakiej skali kwadrat $DGHI$ jest podobny do kwadratu $ADEF$.



D 6. Wykaż, że jeśli kąt ostry przecięcia przekątnych w jednym prostokącie jest równy kątowi ostremu przecięcia przekątnych w drugim prostokącie, to te prostokąty są podobne.

D 7. Punkty E, F, G, H są odpowiednio środkami boków prostokąta $ABCD$. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków czworokąta $EFGH$. Wykaż, że czworokąt $KLMN$ jest prostokątem podobnym do prostokąta $ABCD$. Podaj skalę tego podobieństwa.



Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4.

Test

1. Kwadrat:
   A. nie ma osi symetrii
   B. ma tylko jedną oś symetrii
   C. ma tylko dwie osie symetrii
   D. ma cztery osie symetrii

2. W pewnym czworokącie wypukłym przekątne są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je na połowy. Zatem ten czworokąt nie może być:
   A. rombem B. prostokątem C. trapezoidem D. trapezem

3. Przekątna kwadratu ma długość a. Wówczas obwód kwadratu jest równy:
   A. $4a$ B. $2a$ C. $4\sqrt{2}a$ D. $2\sqrt{2}a$

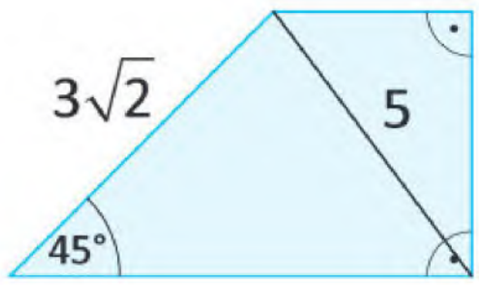
4. Podstawy trapezu mają długość 12 cm i 2 cm. Zatem długość odcinka łączącego środki ramion trapezu jest równa:
   A. 5 cm B. 7 cm C. 10 cm D. 3,5 cm

5. Jeśli w trapezie $ABCD$, $AB \| CD$, zachodzi równość: $|\sphericalangle D| = |\sphericalangle A| + 36°$, to:
   A. $|\sphericalangle A| = 108°$, $|\sphericalangle D| = 72°$
   B. $|\sphericalangle A| = 98°$, $|\sphericalangle D| = 62°$
   C. $|\sphericalangle A| = 62°$, $|\sphericalangle D| = 98°$
   D. $|\sphericalangle A| = 72°$, $|\sphericalangle D| = 108°$

6. Z wierzchołka kąta rozwartego równoległoboku poprowadzono dwie różne wysokości, które utworzyły kąt równy 28°. Kąt ostry równoległoboku jest równy:
   A. 28° B. 35° C. 42° D. 56°

7. W prostokącie $ABCD$ wysokość trójkąta BCD poprowadzona z wierzchołka C dzieli przekątną BD prostokąta na odcinki długości 2 i 8. Obwód prostokąta $ABCD$ jest równy:
   A. 20 B. 24 C. $10\sqrt{5}$ D. $12\sqrt{5}$

8. Trapez na rysunku poniżej jest prostokątny. Dłuższa podstawa tego trapezu ma długość:
   A. $3+4\sqrt{2}$
   B. $3\sqrt{2}+4$
   C. 7
   D. $\sqrt{43}$



9. W trapezie równoramiennym wysokość jest równa 12 cm, a przekątna ma długość 15 cm. Długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu jest równa:
   A. 8 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 16 cm

10. W równoległoboku $ABCD$ kąt ostry BAD jest równy 60°. Przekątna AC zawiera się w dwusiecznej tego kąta i ma długość 9. Wówczas:
    A. $|BD| = 1{,}5\sqrt{3}$ B. $|BD| = 3\sqrt{2}$ C. $|BD| = 3\sqrt{3}$ D. $|BD| = 6\sqrt{2}$

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

11. Boki równoległoboku mają długość 4 cm i 5 cm, a kąt rozwarty ma 120°. Oblicz:
a) wysokości równoległoboku b) długości jego przekątnych.

12. Podstawy trapezu mają długość 20 cm i 6 cm, a ramiona – 15 cm i 13 cm. Kąty α i β to kąty ostre trapezu leżące przy dłuższej podstawie. Wyznacz:
a) wysokość trapezu b) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

13. W trapezie równoramiennym $ABCD$, $AB \parallel DC$, przekątna AC zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego BAD i jest prostopadła do ramienia BC.
D a) Wykaż, że $|\sphericalangle BAD| = 60°$ oraz $|DC| = |BC|$.
b) Wiedząc dodatkowo, że odcinek łączący środki ramion trapezu $ABCD$ ma długość 4,5 cm, oblicz długości boków tego trapezu.

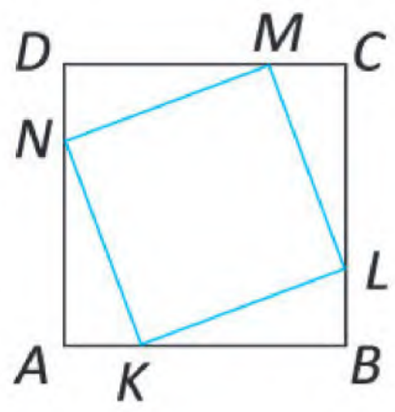
14. W trapezie $ABCD$ kąty BAD i ADC są proste. Dwusieczne kątów CBA i DCB przecinają się w punkcie E, który należy do boku AD.
D a) Wykaż, że trójkąty ABE, EBC i DEC są podobne.
b) Wiedząc dodatkowo, że $|AB| = 12$, $|AE| = 9$, oblicz długość podstawy DC.

15. Przekątne deltoidu $ABCD$ mają długość: $|DB| = 16$, $|AC| = 30$. Oblicz:
a) obwód czworokąta, którego wierzchołkami są środki boków deltoidu $ABCD$
b) cosinus kąta ostrego α między jego przekątnymi.

16. W prostokącie $ABCD$ bok AB ma długość 12. Odległość wierzchołka B od przekątnej AC jest równa 9. Wyznacz promień okręgu o środku w punkcie przecięcia przekątnych i przechodzącego przez wszystkie wierzchołki prostokąta.

17. Prostokąt $ABCD$ o wymiarach 6 cm na 8 cm podzielono odcinkiem EF równoległym do krótszego boku w ten sposób, że powstały dwa prostokąty: $AEFD$ oraz $EBCF$. Wiedząc, że prostokąt $AEFD$ jest podobny do prostokąta $ABCD$, oblicz $|AE|$ i $|EB|$. Czy prostokąty $AEFD$ i $EBCF$ są do siebie podobne?

18. W kwadrat $ABCD$ o boku długości 14 cm wpisano kwadrat $KLMN$, jak na rysunku obok. Wiedząc, że skala podobieństwa kwadratu $KLMN$ do kwadratu $ABCD$ jest równa $\frac{5}{7}$, oblicz długości odcinków, na które punkt K dzieli bok AB kwadratu $ABCD$.



D 19. Dany jest trapezoid $ABCD$. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Wykaż, że czworokąt wypukły o wierzchołkach N, P, M, Q jest równoległobokiem.

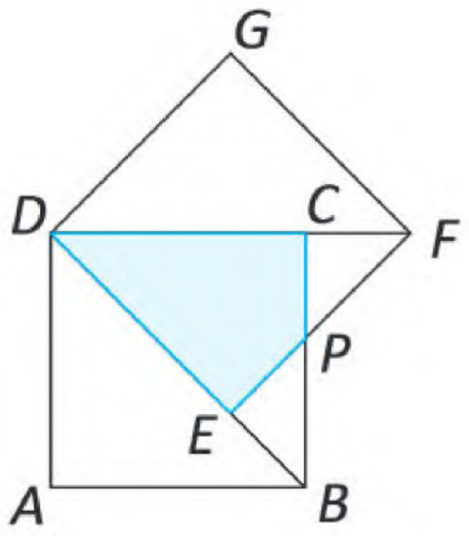
20. W okrąg o środku O wpisano czworokąt $ABCD$. Wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| = 100°$, $|\sphericalangle BOC| = 120°$ oraz $|\sphericalangle COD| = 50°$, wyznacz:
a) kąty tego czworokąta, b) kąt ostry przecięcia przekątnych.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

21. Czworokąty *ABCD* i *DEFG* są przystającymi kwadratami. Punkt *E* leży na przekątnej *DB*, a punkt *P* to punkt przecięcia odcinka *EF* z odcinkiem *BC*.

D a) Wykaż, że czworokąt *DEPC* jest deltoidem.

b) Wiedząc, dodatkowo, że obwód kwadratu jest równy 8, oblicz obwód deltoidu *DEPC*.



22. W czworokącie wypukłym *ABCD* wpisanym w okrąg dane są: $|AB| = |AD|$ oraz $|AB| : |BC| : |DC| = 4 : 3 : 2$. Oblicz cosinus kąta *BAD*.

23. W trapez prostokątny wpisano okrąg, którego promień ma długość 12. Odległość środka tego okręgu od wierzchołka kąta rozwartego trapezu jest równa $6\sqrt{5}$. Oblicz:

a) długość dłuższego ramienia trapezu,

b) długość odcinka łączącego środki ramion.

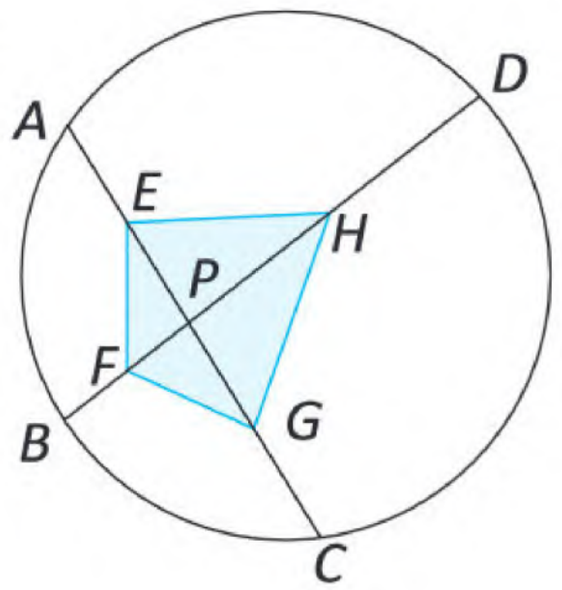
24. W trapez można wpisać okrąg i jednocześnie na tym trapezie można opisać okrąg. Wiedząc, że ramię tego trapezu ma długość 20, a odcinek łączący środki przekątnych ma długość 12, oblicz:

a) długości podstaw, b) wysokość trapezu.

25. Bok rombu ma długość 10, a wysokość rombu jest równa 8. Oblicz długości odcinków, na jakie okrąg wpisany w romb dzieli bok tego rombu.

26. Na deltoidzie *ABCD* opisano okrąg o środku *O* oraz w ten deltoid wpisano okrąg o środku *S*. Wiedząc, że $|BC| - |AB| = 17$ oraz obwód deltoidu jest równy 62, oblicz $|SO|$.

D 27. W okręgu poprowadzono dwie cięciwy *AB* i *CD*, które przecięły się w punkcie *P*. Niech punkty *E*, *F*, *G*, *H* oznaczają odpowiednio środki odcinków *AP*, *BP*, *CP*, *DP*. Wykaż, że na czworokącie *EFGH* można opisać okrąg.



D 28. Dwa okręgi przecinają się w punktach *A* i *B*. Przez punkt *A* poprowadzono sieczną, która przecięła pierwszy okrąg w punkcie *C*, a drugi okrąg w punkcie *D*. Styczne do tych okręgów poprowadzone odpowiednio w punktach *C* i *D* przecięły się w punkcie *E*. Wykaż, że na czworokącie *CBDE* można opisać okrąg.

5. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie wiadomości dotyczące pola figury geometrycznej, a szczególnie własności pola opisane w twierdzeniu 1. str. 344 podręcznik, klasa 2.

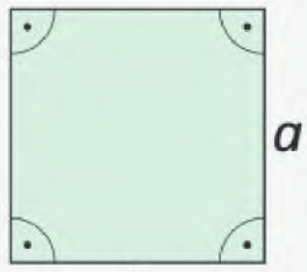
Twierdzenie 1.

1) Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości dwóch jego boków mających wspólny wierzchołek.

2) Pole kwadratu jest równe kwadratowi długości jego boku.



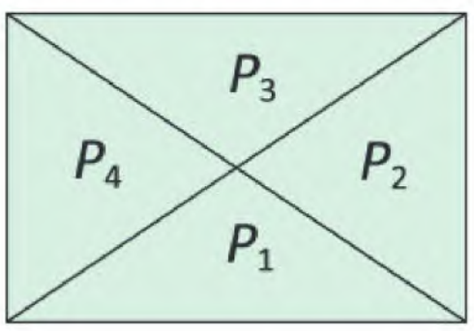
$P = a \cdot b$



$P = a^2$

Ćwiczenie 2. Pole prostokąta jest równe 48. Wiedząc, że jeden z boków prostokąta ma długość 8, oblicz długość przekątnej tego prostokąta.

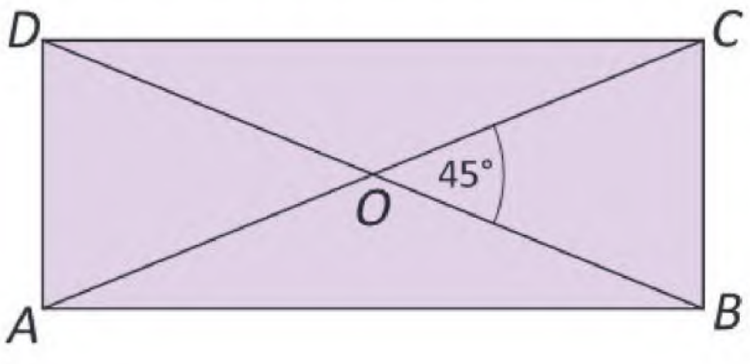
Ćwiczenie 3. Wykaż, że przekątne prostokąta dzielą go na cztery trójkąty o równych polach; zobacz rysunek poniżej.



$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$

Przykład 1.

Przekątne AC i BD prostokąta $ABCD$ przecinają się pod kątem 45°. Wiedząc dodatkowo, że $|AC| = |BD| = 12$ cm, obliczymy pole prostokąta $ABCD$.



Wiemy, że

$$|\sphericalangle BOC| = 45°, \quad |OC| = |OB| = 6 \text{ cm}.$$

Aby rozwiązać zadanie, wystarczy obliczyć pole trójkąta OBC i otrzymany wynik pomnożyć przez cztery.

Skorzystamy ze wzoru:

$$P_{\triangle} = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}$$

– gdzie a, b oznaczają długości dwóch boków trójkąta, zaś γ jest miarą kąta między tymi bokami. Mamy:

$$P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot |OB| \cdot |OC| \cdot \sin 45°$$

$$P_{OBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{czyli} \quad P_{OBC} = 9\sqrt{2}$$

Na koniec wyznaczamy pole prostokąta $ABCD$:

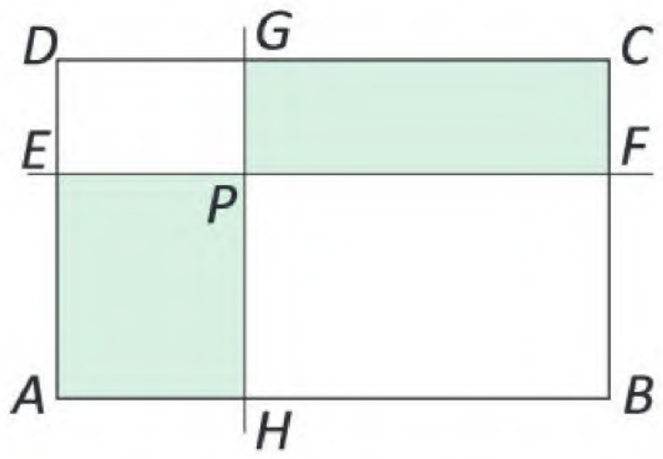
$$P_{ABCD} = 4 \cdot P_{OBC}, \quad \text{zatem} \quad P_{ABCD} = 36\sqrt{2}\ .$$

Pole prostokąta $ABCD$ jest równe $36\sqrt{2}$ cm^2.

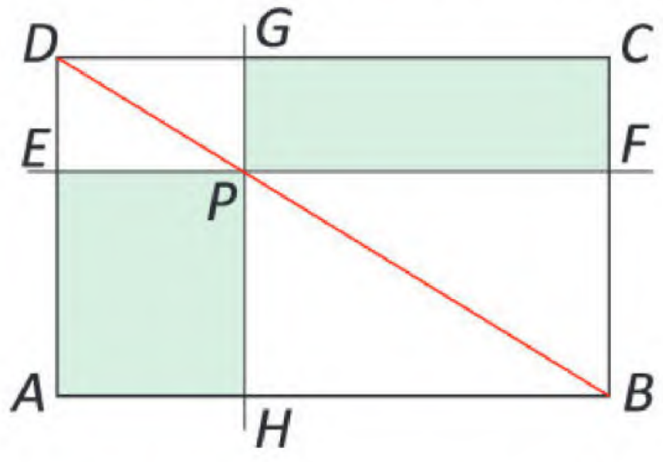
Ćwiczenie 4. Pole prostokąta $ABCD$ jest równe 25. Oblicz długość przekątnych prostokąta, wiedząc, że przecinają się pod kątem 30°.

Przykład 2.

Dany jest prostokąt $ABCD$. Przez dowolny punkt P leżący na przekątnej BD poprowadzono proste równoległe do boków prostokąta, które przecięły te boki odpowiednio w punktach E, F oraz G, H – jak na rysunku poniżej. Wykażemy, że pola prostokątów $AHPE$ i $PFCG$ są równe.



Dorysujmy przekątną BD prostokąta.



Wówczas zauważamy, że trójkąty ABD i CDB są przystające:

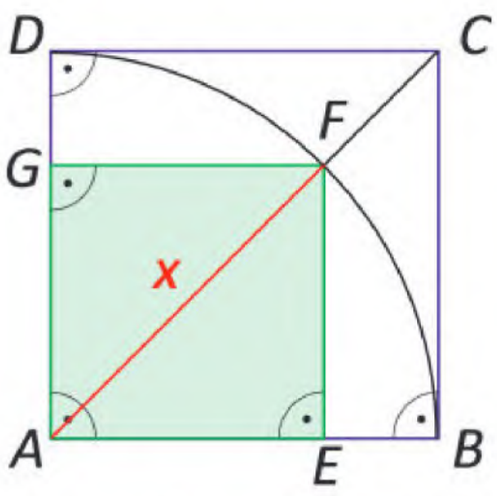
$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ – więc mają równe pola.

Podobnie: $\triangle BPH \equiv \triangle PBF$ oraz $\triangle PDE \equiv \triangle DPG$.

Zatem pola prostokątów $AHPE$ i $PFCG$ są równe.

Przykład 3.

W kwadracie *ABCD* o polu *P* poprowadzono ćwiartkę okręgu o środku w punkcie *A* i promieniu $|AB|$, jak na rysunku poniżej. W tę ćwiartkę wpisano kwadrat *AEFG*. Wyznaczymy pole kwadratu *AEFG* w zależności od *P*.



Oznaczmy:

$$|AB| = |AD| = x, \quad x > 0$$

Wówczas przekątna *AF* kwadratu *AEFG* też ma długość *x*. Obliczamy długość boku kwadratu *AEFG* w zależności od *x*:

$$|AE| = \frac{|AF|}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Wyznaczamy pole P_1 kwadratu *AEFG*:

$$P_1 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{x^2}{2}, \text{ ponadto } P = x^2, \text{ więc } P_1 = \frac{P}{2}$$

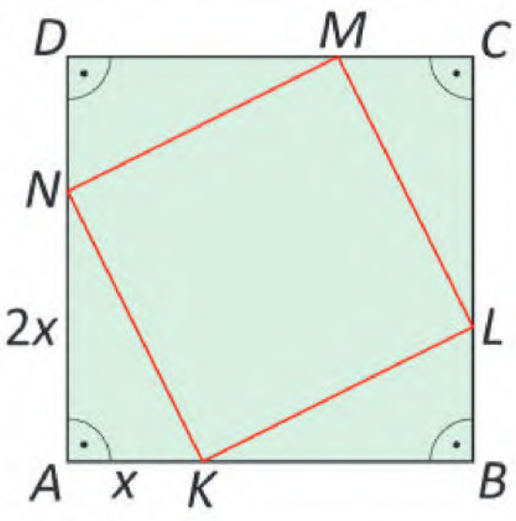
Pole kwadratu *AEFG* jest równe $\frac{P}{2}$, czyli stanowi połowę pola kwadratu *ABCD*.

Jeśli liczba *d* jest długością przekątnej kwadratu, to pole *P* tego kwadratu wyraża się wzorem $P = \frac{d^2}{2}$.

Ćwiczenie 5. Oblicz długość przekątnej kwadratu, którego pole jest równe 8.

Przykład 4.

Punkty *K*, *L*, *M*, *N* leżą odpowiednio na bokach kwadratu *ABCD* i dzielą kolejno te boki w stosunku 1 : 2 – jak na rysunku poniżej. Wiedząc, że pole czworokąta *KLMN* jest równe 45, obliczymy pole kwadratu *ABCD*.



Wprowadźmy oznaczenia:

$|AK| = |BL| = |CM| = |DN| = x$. Wówczas

$|KB| = |LC| = |MD| = |NA| = 2x$.

Zauważ, że trójkąty prostokątne *AKN*, *BLK*, *CML* i *DNM* są przystające. Następnie uzasadnij, że czworokąt *KLMN* jest kwadratem.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *AKN* otrzymujemy:

$|NK|^2 = x^2 + (2x)^2$, więc

$$|NK| = \sqrt{5}x$$

Pole kwadratu *KLMN* jest równe 45, więc otrzymujemy równanie:

$\left(\sqrt{5}x\right)^2 = 45$, czyli $5x^2 = 45$, skąd $x = 3$, bo $x > 0$.

Obliczamy długość boku kwadratu *ABCD* i pole *P* tego kwadratu:

$|AB| = 3 + 6 = 9$, więc $P = 81$

Pole kwadratu *ABCD* jest równe 81.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Przekątne *AC* i *DB* prostokąta *ABCD* przecinają się w punkcie *S* oraz $|\sphericalangle CSD| = 150°$. Wiedząc, że pole prostokąta *ABCD* jest równe 4 dm^2, oblicz:
   a) pole trójkąta *DSC* b) długość przekątnych prostokąta.

2. Długości boków prostokąta pozostają w stosunku 3 : 4. Wiedząc, że pole prostokąta jest równe 192 cm^2, oblicz:
   a) obwód prostokąta b) miarę kąta ostrego między przekątnymi.

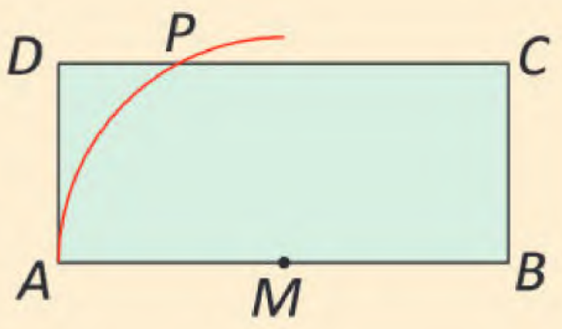
3. Oblicz długości dwóch różnych boków prostokąta, wiedząc, że różnica ich długości jest równa 3 cm, a pole prostokąta jest równe 108 cm^2.

4. Pole prostokąta jest równe 30, a obwód wynosi 23. Oblicz długości boków tego prostokąta.

5. W kwadracie o polu 7 połączono kolejno środki boków. Oblicz pole wyznaczonego w ten sposób czworokąta.

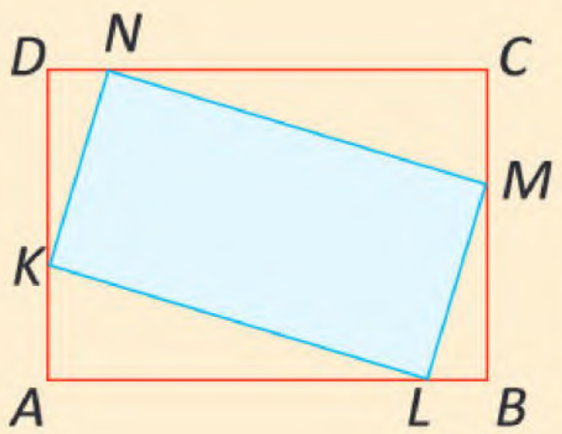
6. Różnica pól dwóch kwadratów jest równa 17. Oblicz długości boków kwadratów, wiedząc, że są one liczbami naturalnymi.

D 7. W prostokącie *ABCD* punkt *M* jest środkiem boku *AB* oraz $|AB| > 2|BC|$. Łuk okręgu o środku w punkcie *M* i promieniu $|AM|$ przecina bok *DC* w punkcie *P*. Wykaż, że kwadrat o boku *AD* i prostokąt o wymiarach $|DP|$ na $|PC|$ mają równe pola.



8. Punkt *P* należy do przekątnej *DB* prostokąta *ABCD*. Przez punkt *P* poprowadzono proste równoległe do boków prostokąta, które przecięły boki w punktach *E*, *F* i *G*, *H* (zobacz rys. przykład 2.). Wiedząc, że pole prostokąta *PFCG* jest równe 48 cm^2 oraz $|DP| : |PB| = 3 : 4$, oblicz pole prostokąta *ABCD*.

9. W prostokąt *ABCD* o bokach mających długość 7 i 5 wpisano prostokąt *KLMN* – jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|KL| : |LM| = 2 : 1$, oblicz pole prostokąta *KLMN*.

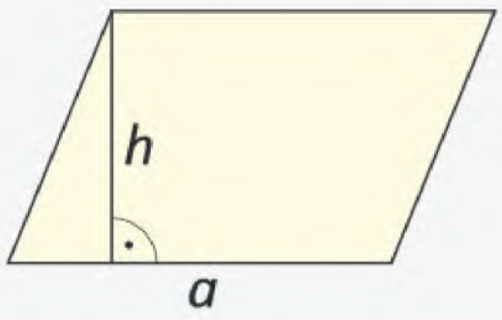


Pole równoległoboku. Pole rombu

Przypomnijmy wzór na pole równoległoboku.

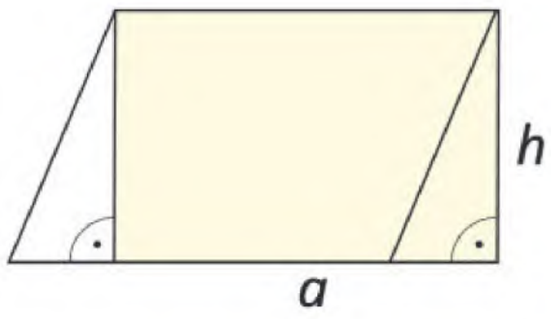
Twierdzenie 1.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości poprowadzonej na ten bok.

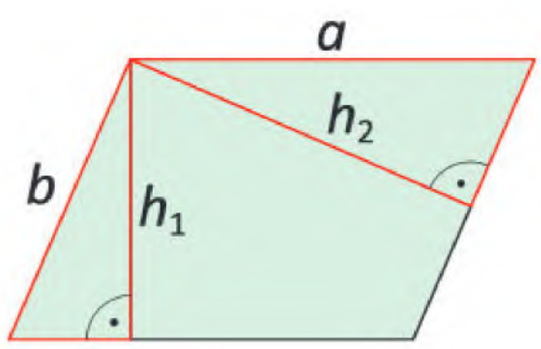


$P = a \cdot h$

Każdy równoległobok można podzielić na dwie części, z których można złożyć prostokąt o wymiarach a i h.



Rozważmy równoległobok o bokach mających długość a, b, gdzie $a > b$. Z wierzchołka kąta rozwartego prowadzimy wysokości: h_1 – na bok mający długość a oraz h_2 – na bok mający długość b.



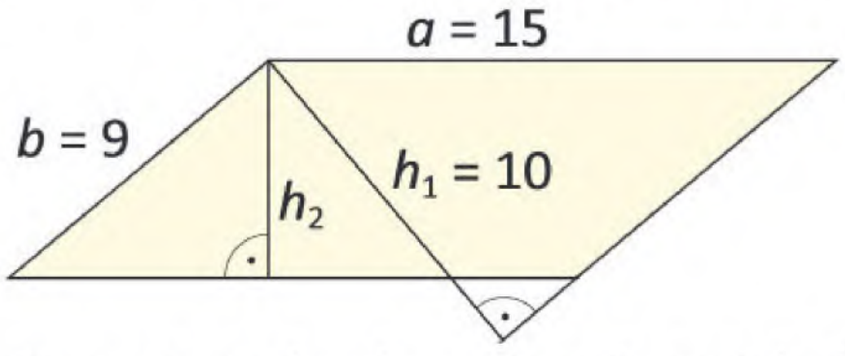
Wówczas:

1) $h_1 < h_2$ 2) $h_1 < b$ oraz $h_2 < a$

Ćwiczenie 1. Uzasadnij powyższe nierówności.

Przykład 1.

W równoległoboku boki mają długość 15 cm i 9 cm. Wiedząc, że jedna z wysokości ma 10 cm, obliczymy drugą wysokość.



Przyjmijmy oznaczenia:

$a = 15$ cm, $b = 9$ cm, $h_1 = 10$ cm.

Szukaną wysokość oznaczmy przez h_2.

Zauważ, że $b < h_1$, zatem h_2 jest krótszą wysokością równoległoboku i $b > h_2$.

Stosujemy dwukrotnie wzór na pole P równoległoboku:

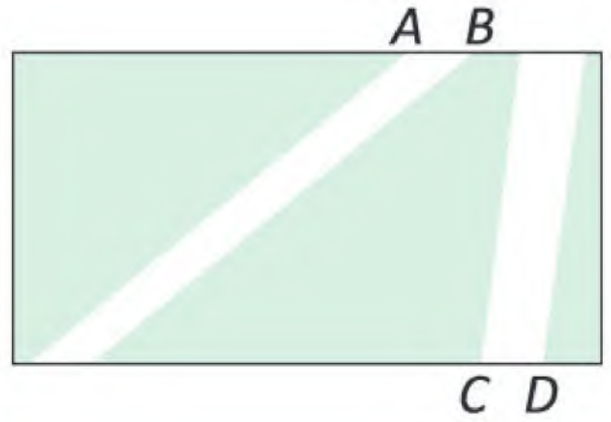
$P = b \cdot h_1$ oraz $P = a \cdot h_2$

Przyrównujemy prawe strony wzorów i otrzymujemy równanie:

$9 \cdot 10 = 15 \cdot h_2$, skąd $h_2 = 6$

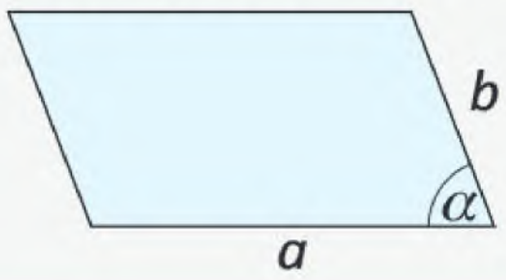
Druga wysokość równoległoboku jest równa 6 cm.

Ćwiczenie 2. Rysunek obok przedstawia plan prostokątnej działki, przez którą prowadzą dwie drogi. Na planie obie drogi mają kształt równoległoboku i $|AB| = |CD|$. Która droga zajmuje większą powierzchnię działki? Odpowiedź uzasadnij.



Twierdzenie 2.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości dwóch sąsiednich boków i sinusa kąta tego równoległoboku zawartego między tymi bokami.



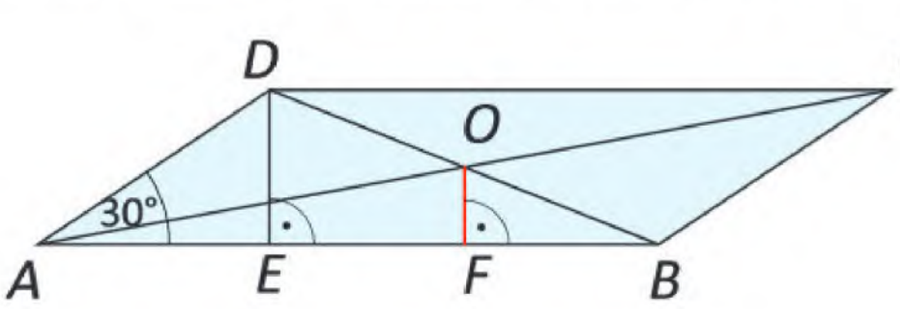
$$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

Ćwiczenie 3. Udowodnij twierdzenie 2. w następujący sposób: poprowadź krótszą przekątną równoległoboku i wykorzystaj odpowiedni wzór na pole trójkąta.

Przykład 2.

W równoległoboku $ABCD$ kąt ostry jest równy 30°. Odległość punktu O przecięcia przekątnych od jednego z boków wynosi 1. Dłuższa przekątna ma długość 14. Obliczymy pole równoległoboku $ABCD$.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Wiemy, że

$|\sphericalangle BAD| = 30^\circ$, $|OF| = 1$, $|AC| = 14$

Prowadzimy wysokość DE, równoległą do odcinka OF.

Punkt O jest równoodległy od boków AB i DC. Zatem

$|DE| = 2|OF|$, skąd $|DE| = 2$

Obliczamy długość boku AD.

$$\frac{|DE|}{|AD|} = \sin 30^\circ, \quad \text{czyli} \quad \frac{2}{|AD|} = \frac{1}{2}, \quad \text{więc} \quad |AD| = 4$$

Obliczamy długość boku *CD*. Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *ACD*.

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2\cdot|AD|\cdot|CD|\cdot\cos(\sphericalangle ADC)$$

Oznaczmy $|CD|$ przez x, $x > 0$. Otrzymujemy

$$14^2 = 4^2 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot\cos 150^\circ, \qquad \text{skąd} \qquad 196 = 16 + x^2 + 8\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 + 4\sqrt{3}x - 180 = 0$$

$$\Delta = 768 \qquad \sqrt{\Delta} = 16\sqrt{3}$$

$$x_1 = 6\sqrt{3} \qquad x_2 = -10\sqrt{3}, \quad x_2 < 0$$

Mamy

$$|CD| = |AB| = 6\sqrt{3}$$

Obliczamy pole *P* równoległoboku *ABCD*.

$$P = |AD|\cdot|AB|\cdot\sin 30^\circ, \quad \text{czyli} \quad P = 4\cdot 6\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 12\sqrt{3}$$

Oczywiście można też skorzystać ze wzoru

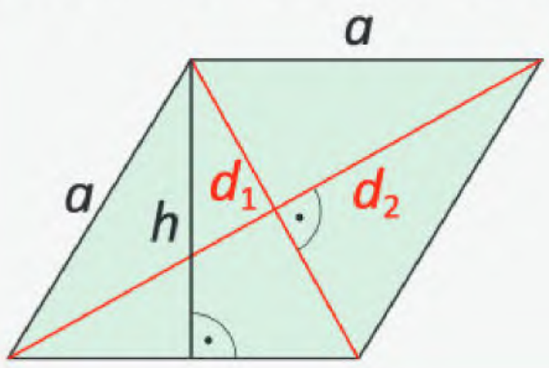
$$P = |AB|\cdot|DE|.$$

Pole równoległoboku *ABCD* jest równe $12\sqrt{3}$.

Omówimy teraz wzory na pole rombu.

Twierdzenie 3.

Pole *P* rombu wyraża się wzorem:



1) $P = a\cdot h$, gdzie a jest długością boku, h – wysokością rombu

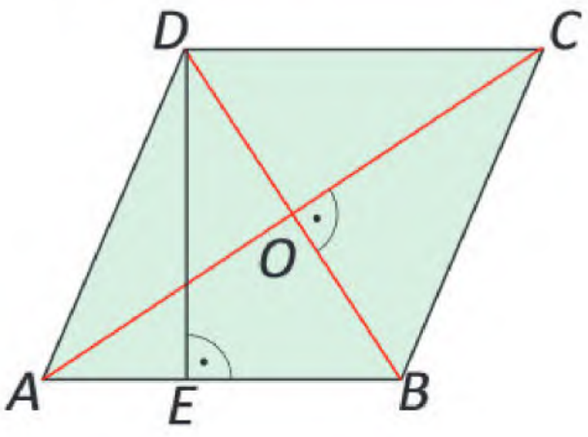
2) $P = \frac{d_1\cdot d_2}{2}$, gdzie d_1, d_2 są długościami przekątnych rombu.

Ćwiczenie 4. Udowodnij wzór 2) z twierdzenia 3.

Przykład 3.

Przekątne rombu mają długość 30 cm i 40 cm. Obliczymy:

a) pole rombu b) długość jego boku c) wysokość rombu.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

$|AC| = 40$ cm

$|BD| = 30$ cm

$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$

Ad a) Obliczamy pole P rombu. Ze wzoru 2) ostatniego twierdzenia mamy:

$$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}, \quad \text{zatem}$$

$$P = \frac{40 \cdot 30}{2} = 600$$

Ad b) Obliczamy długość boku $|AB|$. Mamy

$$|AO| = \frac{1}{2}|AC| = 20 \quad \text{oraz}$$

$$|OB| = \frac{1}{2}|BD| = 15, \quad \text{więc}$$

z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AOB otrzymujemy:

$$|AB|^2 = 20^2 + 15^2$$

$$|AB|^2 = 625 \quad \text{i} \quad |AB| > 0,$$

$$|AB| = 25$$

Ad c) Wyznaczamy wysokość DE. Wykorzystamy wzór 1) z ostatniego twierdzenia.

$$P = |AB| \cdot |DE| \quad \text{oraz}$$

$$P = 600 \quad \text{i} \quad |AB| = 25$$

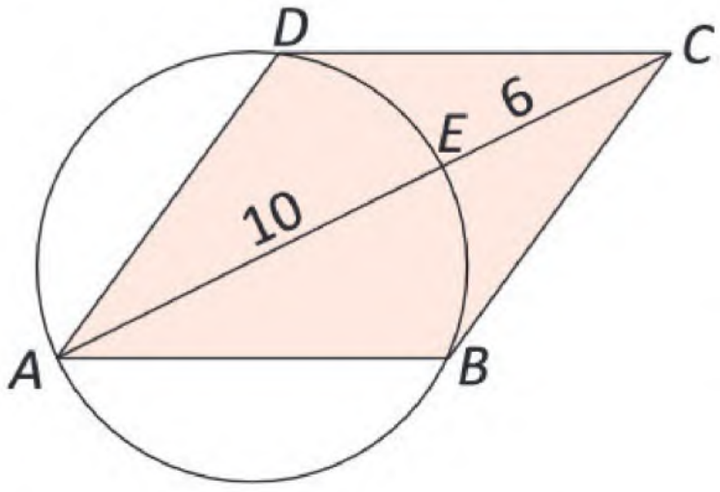
$$600 = 25 \cdot |DE|$$

$$|DE| = 24$$

Pole rombu jest równe 600 cm^2, bok ma długość 25 cm, a wysokość jest równa 24 cm.

Przykład 4.

Przez wierzchołek kąta ostrego rombu i dwa wierzchołki kątów rozwartych przechodzi okrąg. Dzieli on dłuższą przekątną na odcinki mające długość 10 cm i 6 cm. Obliczymy pole rombu.



Oznaczmy wierzchołki rombu literami A, B, C, D.

Niech okrąg przechodzi przez wierzchołki A, B, D.

$|AE| = 10$ cm

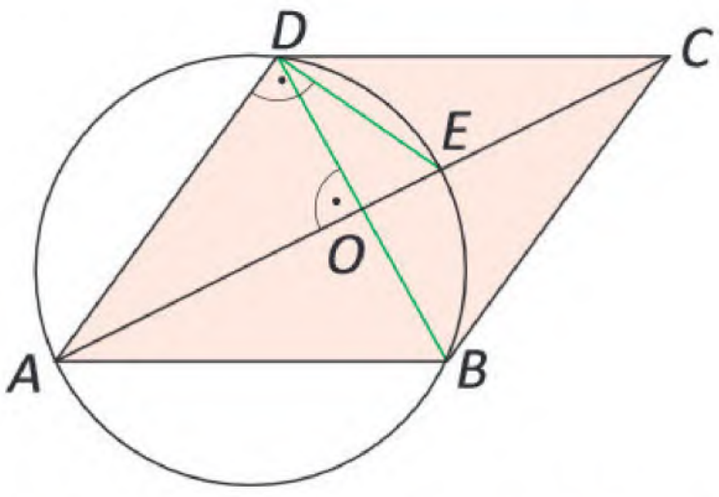
$|EC| = 6$ cm

Aby obliczyć pole rombu, wystarczy znać długości jego przekątnych.

Obliczamy długość przekątnej AC: $|AC| = 10 + 6 = 16$

Teraz dorysujmy przekątną BD i odcinek DE. Punkt wspólny przekątnych oznaczmy literą O.

Z własności rombu wynika, że $|DO| = |OB|$ oraz $|\sphericalangle DOA| = 90°$.



Zatem:
- cięciwa *AE* zawiera się w symetralnej cięciwy *BD*, więc *AE* jest średnicą okręgu,
- $|\sphericalangle ADE| = 90°$, ponieważ kąt *ADE* jest kątem wpisanym w okrąg opartym na średnicy *AE*,
- odcinek *DO* jest wysokością trójkąta prostokątnego *AED*, poprowadzoną na przeciwprostokątną *AE*.

Obliczamy długość odcinka *DO*.

$$|DO| = \sqrt{|AO| \cdot |OE|}$$ – z własności wysokości w trójkącie prostokątnym

$$|AO| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8 \quad \text{oraz} \quad |OE| = |AE| - |AO| = 10 - 8 = 2, \text{ więc}$$

$$|DO| = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$$

Zatem długość przekątnej *BD* jest równa $2 \cdot 4$, czyli 8.
Na koniec obliczamy pole rombu *ABCD*.

$$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}, \quad \text{zatem} \quad P = \frac{16 \cdot 8}{2} = 64$$

Pole rombu jest równe 64 cm^2.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wysokości równoległoboku są równe 6 cm i 10 cm, a jeden z boków ma długość 8 cm. Oblicz obwód tego równoległoboku.

2. Wysokości równoległoboku pozostają w stosunku 3 : 5, a jeden bok jest o 6 dłuższy od drugiego.
   a) Oblicz obwód równoległoboku.
   b) Wiedząc dodatkowo, że sinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, oblicz pole równoległoboku i jego wysokości.

3. Dłuższy bok równoległoboku ma długość 16, krótsza przekątna ma długość 14, a kąt rozwarty jest równy 120°. Oblicz pole tego równoległoboku.

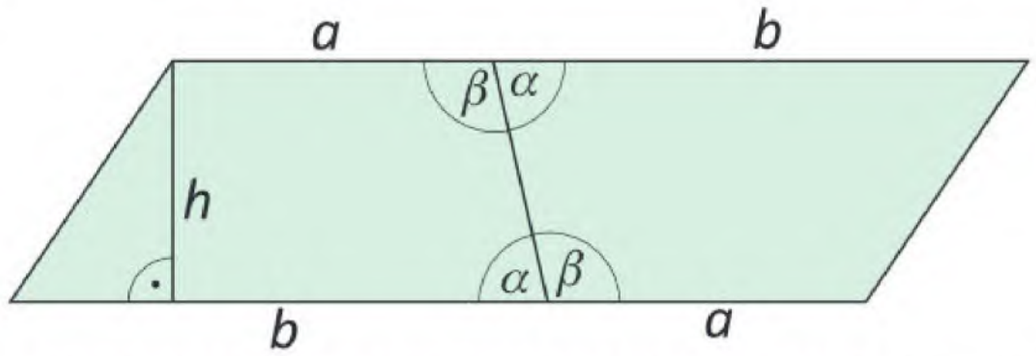
4. Pole rombu jest równe 24 cm^2, a jedna przekątna ma długość 6 cm. Oblicz:
   a) obwód rombu b) wysokość rombu.

5. Przekątne rombu mają długość 24 i 10. Oblicz pole rombu, następnie sinus kąta ostrego rombu i na tej podstawie ustal, czy ten kąt ma miarę większą, czy mniejszą od 45°.

6. Pole rombu jest równe 156, a wysokość rombu ma długość 12. Oblicz sumę długości przekątnych tego rombu.

Pole trapezu

Rozważmy trapez o podstawach mających długość a, b i wysokości h. Pole tego trapezu oznaczmy literą P. Z takich dwóch przystających trapezów można złożyć równoległobok.



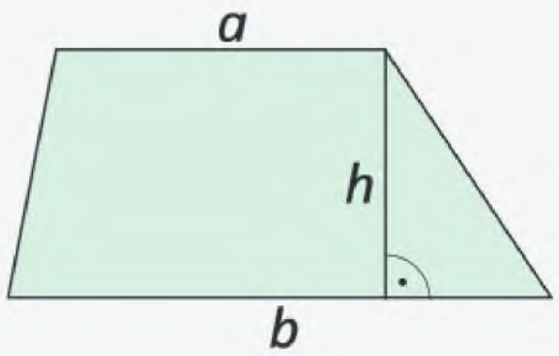
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Pole równoległoboku jest równe $2P$, jak również $(a + b) \cdot h$. Zatem

$$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

Twierdzenie 1.

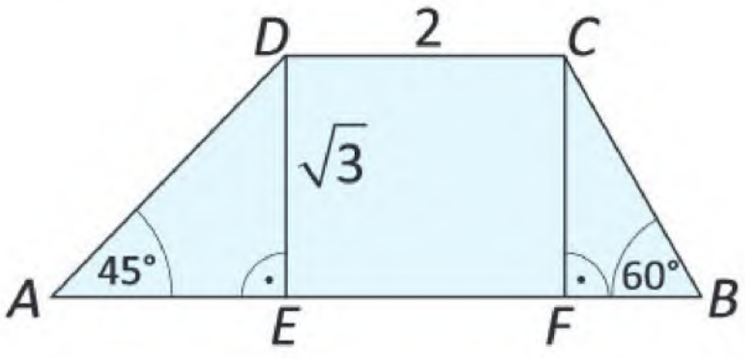
Pole P trapezu o podstawach mających długość a, b i wysokości h wyraża się wzorem:



$$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

Przykład 1.

Krótsza podstawa CD trapezu $ABCD$ ma długość 2 cm, a kąty przy podstawie AB są równe 45° i 60°. Wysokość trapezu wynosi $\sqrt{3}$ cm. Obliczymy pole tego trapezu.



Mamy dane:

$AB \parallel CD$, $|CD| = 2$ cm

$|\sphericalangle EAD| = 45^\circ$, $|\sphericalangle FBC| = 60^\circ$

Prowadzimy wysokości DE i CF.

$$|DE| = |CF| = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Obliczymy najpierw długość podstawy AB.

$$|AB| = |AE| + |EF| + |FB|$$

W trójkącie ADE mamy:

$$\frac{|AE|}{|DE|} = \operatorname{ctg}(\sphericalangle EAD), \text{ skąd } \frac{|AE|}{\sqrt{3}} = \operatorname{ctg} 45^\circ, \quad \text{czyli} \quad |AE| = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}$$

Podobnie obliczamy długość odcinka FB.

$$\frac{|FB|}{|CF|} = \operatorname{ctg}(\sphericalangle FBC), \qquad \frac{|FB|}{\sqrt{3}} = \operatorname{ctg} 60^\circ, \quad \text{więc} \quad |FB| = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1$$

Zatem

$$|AB| = \sqrt{3} + 2 + 1 = 3 + \sqrt{3}$$

Ze wzoru na pole trapezu otrzymujemy:

$P = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot |DE|}{2}$. Wykonujemy obliczenia:

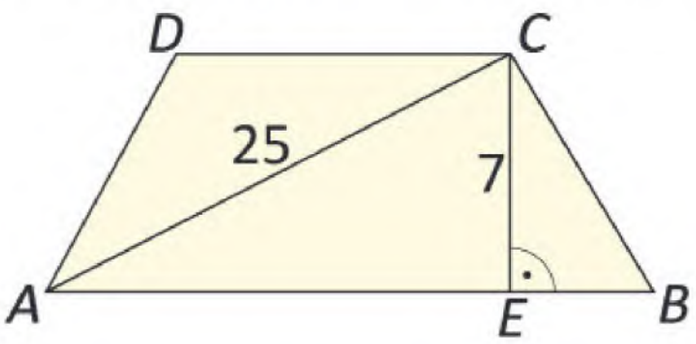
$$P = \frac{\left(3 + \sqrt{3} + 2\right) \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 5\sqrt{3}}{2}$$

Pole trapezu $ABCD$ jest równe $\frac{3 + 5\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

Czasami można obliczyć pole trapezu, nie znając długości podstaw.

Przykład 2.

Wysokość trapezu równoramiennego jest równa 7, a przekątna tego trapezu ma długość 25. Obliczymy pole tego trapezu.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.

$AB \parallel CD$, $|AD| = |BC|$

$|AC| = 25$, $|CE| = 7$

Znamy wysokość trapezu. Aby obliczyć jego pole, wystarczy wyznaczyć połowę sumy długości jego podstaw. Wiemy, że

$$\frac{|AB| + |CD|}{2} = |AE|$$ – na mocy twierdzenia 5., str. 219

Obliczamy długość odcinka AE, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego AEC.

$|AE|^2 + |CE|^2 = |AC|^2$, czyli $|AE|^2 + 7^2 = 25^2$ i $|AE| > 0$, zatem $|AE| = 24$

Obliczamy pole trapezu:

$P = |AE| \cdot |CE|$ czyli $P = 24 \cdot 7 = 168$

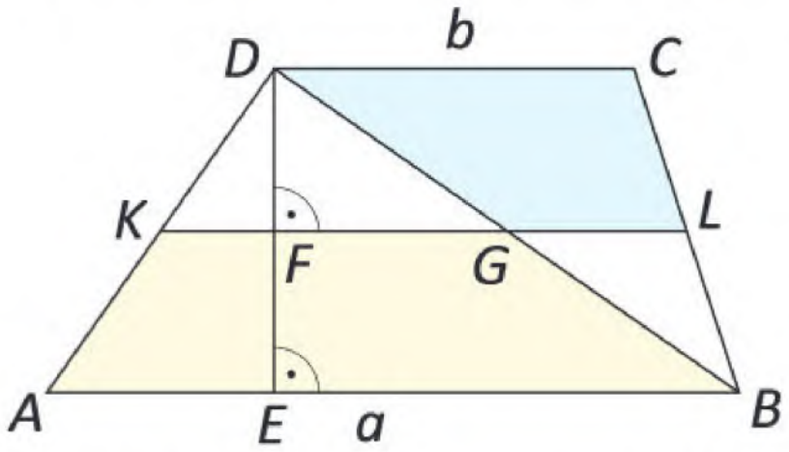
Pole trapezu jest równe 168.

Ćwiczenie 1. Wysokość trapezu jest równa 5 cm, a pole trapezu wynosi 40 cm^2. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

Przykład 3.

W trapezie podstawy mają długość a i b. Odcinek łączący środki ramion i jedna z przekątnych trapezu dzielą ten trapez na dwa trójkąty i dwa trapezy. Pokażemy, że stosunek pól otrzymanych trapezów jest równy $a : b$.

Wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku poniżej.



$AB \parallel DC$, $|AB| = a$, $|DC| = b$
$|AK| = |KD|$, $|BL| = |LC|$
$|DE| = h$
P_1 – pole trapezu $ABGK$
P_2 – pole trapezu $GLCD$

Odcinki AB i KG są równoległe i $|DK| = |KA|$. Z twierdzenia Talesa wynika, że $|DG| = |GB|$, $|DF| = |FE|$ oraz $|KG| = \frac{1}{2}|AB|$. Wówczas

$$|KG| = \frac{a}{2} \quad \text{i} \quad |DF| = \frac{h}{2}$$

Obliczamy pole trapezu $ABGK$.

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{h}{2} = \frac{3ah}{8}$$

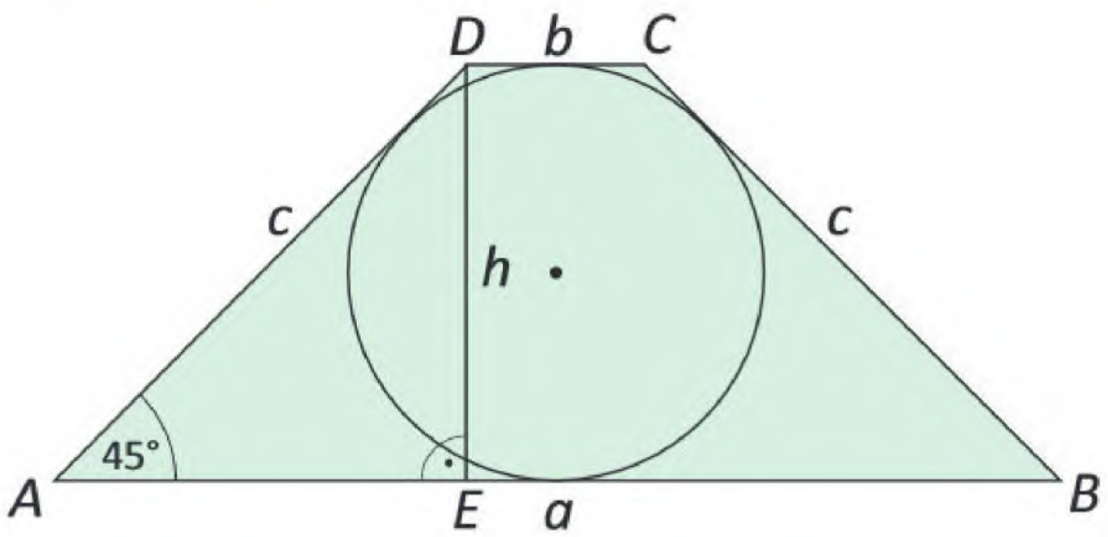
Podobnie mamy $|GL| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{b}{2}$, stąd $P_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(b + \frac{b}{2} \right) \cdot \frac{h}{2} = \frac{3bh}{8}$

Zatem $P_1 : P_2 = a : b$, co kończy dowód.

Przykład 4.

Pole trapezu równoramiennego opisanego na okręgu jest równe $8\sqrt{2}$. Wyznaczymy długość ramienia tego trapezu, jeśli jest ono nachylone do dłuższej podstawy pod kątem 45°.

Rysunek poniżej przedstawia trapez równoramienny $ABCD$, $AB \parallel CD$.



Oznaczmy:

$|AB| = a$, $|CD| = b$
$|AD| = |BC| = c$
$|DE| = h$
P – pole trapezu

Wiemy, że $P = 8\sqrt{2}$. Pole trapezu opisuje wzór $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu. Wówczas:

$a + b = 2c$ – zobacz twierdzenie 2. str. 238

Zatem

$P = c \cdot h$

Trójkąt AED jest trójkątem prostokątnym, więc

$$\frac{|DE|}{|AD|} = \sin 45°, \quad \text{czyli} \quad |DE| = |AD| \cdot \sin 45°, \quad \text{skąd} \quad h = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

Mamy

$$P = c \cdot \frac{c\sqrt{2}}{2} = \frac{c^2\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad P = 8\sqrt{2} \quad \text{więc} \quad \frac{c^2\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2} \quad \text{skąd} \quad c = 4, \quad \text{bo } c > 0.$$

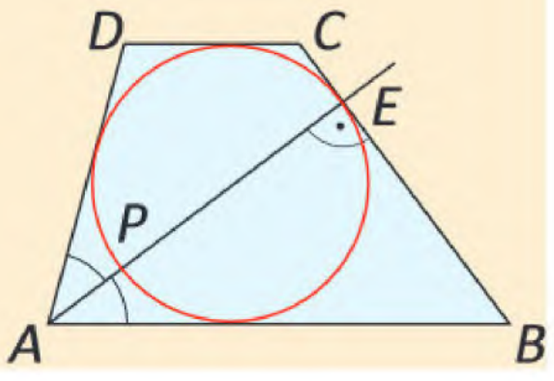
Długość ramienia trapezu jest równa 4.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Podstawy trapezu mają długość a i b, zaś długości ramion są równe c i d. Oblicz pole tego trapezu, jeśli:
   a) $a = 11, b = 6, c = 12, d = 13$ b) $a = 28, b = 7, c = 17, d = 10$
2. Krótsza podstawa trapezu ma długość $3\sqrt{6}$, a kąty trapezu przy tej podstawie są równe 135° i 60°. Oblicz pole tego trapezu, jeśli dłuższe ramię ma długość 18.
3. Pole trapezu jest równe 21 cm^2, a wysokość jest równa 6 cm. Oblicz długości podstaw trapezu, jeśli jedna z nich jest o 3 cm dłuższa od drugiej.
4. W trapezie prostokątnym krótsze ramię ma długość 5 cm. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 6 cm. Oblicz pole tego trapezu.
5. Przekątna trapezu równoramiennego ma długość 10 cm i tworzy z krótszą podstawą kąt równy 45°. Oblicz pole tego trapezu.

D 6. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$ i $|AB| > |DC|$, odcinek łączący środki ramion przecina przekątną AC w punkcie M i wysokość CE w punkcie N. Wykaż, że pole trapezu $AENM$ stanowi $\frac{3}{8}$ pola trapezu $ABCD$.

7. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel DC$, przekątne przecinają się w punkcie E.
   D a) Wykaż, że pola trójkątów AED i BCE są równe.
   b) Wiedząc, że pola trójkątów ABE i DEC są odpowiednio równe 9 i 4, oblicz pole trapezu $ABCD$.
8. Dłuższa podstawa trapezu jest średnicą okręgu opisanego na tym trapezie i ma długość $8\frac{1}{3}$. Przekątna trapezu ma długość $6\frac{2}{3}$. Oblicz pole tego trapezu.
9. Trapez, na którym można opisać okrąg i w który można wpisać okrąg, ma podstawy długości 12 cm i 3 cm. Oblicz pole tego trapezu.
10. Na okręgu o promieniu równym 5 cm opisano trapez prostokątny, którego najkrótszy bok ma długość 7,5 cm. Oblicz pole tego trapezu.
11. W trapezie $ABCD$ dwusieczna kąta BAC jest prostopadła do ramienia BC i przecina to ramię w punkcie E. W trapez wpisano okrąg, który przeciął odcinek AE w punkcie P. Wiedząc, że $|AP| = 3$ i $|PE| = 9$, oblicz pole trapezu $ABCD$.

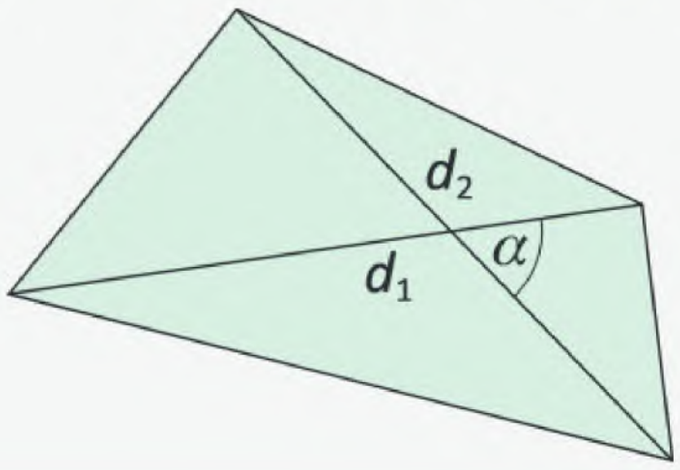


Pole czworokąta – zadania różne

Jeśli znamy długości przekątnych czworokąta wypukłego i kąt α między tymi przekątnymi, to możemy obliczyć pole tego czworokąta.

Twierdzenie 1.

Jeśli przekątne czworokąta wypukłego mają długość d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem α, to pole P tego czworokąta wyraża się wzorem:

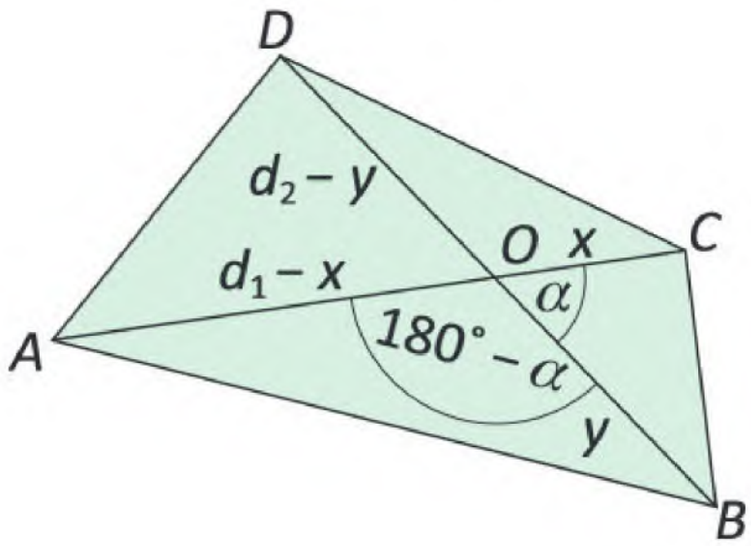


$$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$$

Założenia: d_1, d_2 – długości przekątnych czworokąta wypukłego
α – kąt przecięcia przekątnych czworokąta

Teza: Pole czworokąta wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$

Dowód: Wprowadźmy oznaczenia:
$ABCD$ – czworokąt wypukły
$|AC| = d_1$, $|BD| = d_2$
O – punkt przecięcia przekątnych
$|OC| = x$, $|OB| = y$, wtedy
$|AO| = d_1 - x$, $|DO| = d_2 - y$



Niech $|\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle DOA| = \alpha$, wówczas

$$|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle COD| = 180^\circ - \alpha$$

Pole czworokąta jest równe sumie pól czterech trójkątów ABO, BCO, CDO i DAO.

$$P_{ABCD} = P_{ABO} + P_{BCO} + P_{CDO} + P_{DAO}$$

Wiemy, że pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch boków trójkąta i sinusa kąta zawartego między tymi bokami. Zatem

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (d_1 - x) \cdot y \cdot \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot x \cdot (d_2 - y) \cdot \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot (d_1 - x) \cdot (d_2 - y) \cdot \sin\alpha$$

Korzystamy ze wzoru $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ oraz wyłączamy przed nawias $\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha$.

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \left[(d_1 - x)y + xy + x(d_2 - y) + (d_1 - x)(d_2 - y) \right]$$

W nawiasie kwadratowym wykonujemy mnożenie i przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych.

$$P_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\left[d_1y-xy+xy+xd_2-xy+d_1d_2-d_1y-xd_2+xy\right]$$

Ostatecznie otrzymaliśmy, że

$$P_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha\,,$$ co kończy dowód.

Przykład 1.

Obliczymy pole czworokąta *ABCD*, którego przekątne przecinają się pod kątem 73° i mają odpowiednio długość 10 i 19. Wynik podamy z dokładnością do 0,01.

Korzystamy z twierdzenia 1.

$$P=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 19\cdot\sin 73^\circ=95\cdot\sin 73^\circ=90{,}8486...\approx 90{,}85$$

Pole czworokąta *ABCD* jest równe w przybliżeniu 90,85.

Ćwiczenie 1. Przekątne czworokąta wypukłego przecinają się pod kątem 60°, a pole tego czworokąta jest równe 30 cm^2. Wiedząc, że jedna przekątna ma długość 8 cm, oblicz długość drugiej przekątnej. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

Ćwiczenie 2. Oblicz pole czworokąta, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym i mają długość 4 cm i 5 cm.

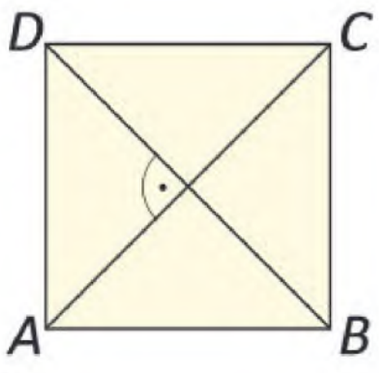
Jeśli przekątne czworokąta wypukłego mają długość d_1 i d_2 oraz przecinają się pod kątem prostym, to pole P tego czworokąta wyraża się wzorem:

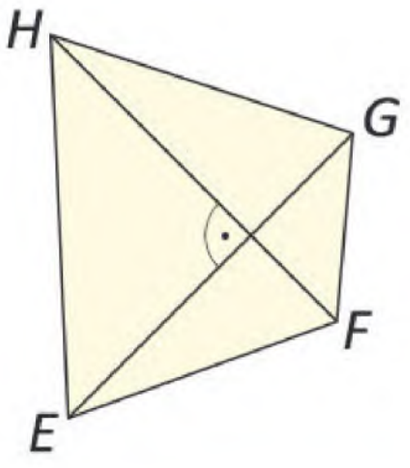
$$P=\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2$$

Przykład 2.

Zbudujemy czworokąt wypukły *EFGH*, którego pole będzie równe polu danego kwadratu *ABCD*.

Na mocy ostatniego wniosku wystarczy zbudować czworokąt, którego przekątne będą mieć taką długość, jak przekątne kwadratu i będą do siebie prostopadłe. Rysunek obok przedstawia kwadrat *ABCD* i przykładowy czworokąt *EFGH*.





Ćwiczenie 3. Rozpatrujemy wszystkie czworokąty wypukłe, których przekątne mają długość 5 i 6. Jakie jest największe pole takiego czworokąta? Odpowiedź uzasadnij.

Przykład 3.

Rozpatrujemy czworokąty, których przekątne przecinają się pod kątem 30°. Suma długości przekątnych każdego czworokąta jest równa 12 cm. Ile jest równe największe pole takiego czworokąta?

Przyjmijmy oznaczenia:

x, y – długości przekątnych czworokąta

$x + y = 12$

Wyrazimy pole P czworokąta w zależności od x.

$$P = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin 30^\circ \quad \text{oraz} \quad y = 12 - x, \text{ więc}$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (12 - x) \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{gdzie } x > 0 \wedge 12 - x > 0$$

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x, \quad D = (0, 12)$$

Funkcja $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x$ w zbiorze liczb rzeczywistych osiąga największą wartość dla x_w, gdzie

$$x_w = \frac{-3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = 6$$

x_w oznacza pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x_w = \frac{-b}{2a}$

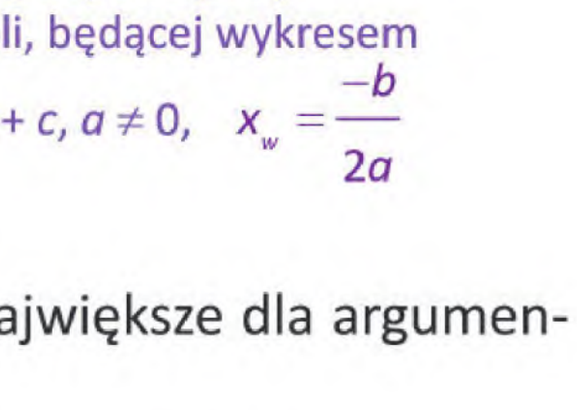
Ponieważ $6 \in (0, 12)$, więc pole P czworokąta też będzie największe dla argumentu 6. Obliczamy to największe pole:

$$P(6) = -\frac{1}{4} \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 = -9 + 18 = 9$$

Największe pole czworokąta jest równe 9 cm^2.

Przykład 4.

W trapezie prostokątnym $ABCD$ podstawa AB ma długość 21. Punkt M jest środkiem dłuższego ramienia BC. Odcinek AM ma długość 17 i tworzy z podstawą AB kąt ostry α, gdzie $\cos\alpha = \frac{15}{17}$. Obliczymy pole czworokąta $AMCD$.



Pole czworokąta $AMCD$ jest równe różnicy pól trapezu $ABCD$ i trójkąta ABM.

$$P_{AMCD} = P_{ABCD} - P_{ABM}$$

Najpierw obliczymy pole trójkąta *ABM*.

$$P_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AM| \cdot \sin\alpha$$

Kąt α jest ostry. Z jedynki trygonometrycznej wyznaczamy $\sin\alpha$.

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{64}{289} \quad \text{i} \quad \sin\alpha > 0 \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{17}$$

$$P_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 17 \cdot \frac{8}{17} = 84$$

Aby obliczyć pole trapezu, wyznaczymy najpierw wysokość trapezu i długość krótszej podstawy. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *ABM* obliczamy $|MB|$; następnie $|BC|$.

$$|MB|^2 = |AM|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AM| \cdot |AB| \cdot \cos\alpha$$

$$|MB|^2 = 17^2 + 21^2 - 2 \cdot 17 \cdot 21 \cdot \frac{15}{17}$$

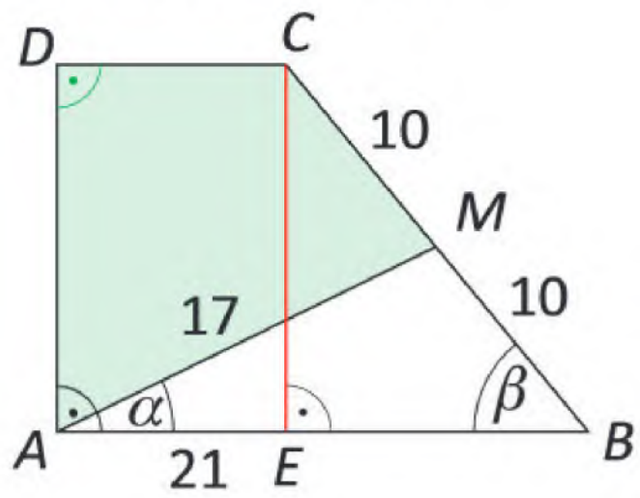
$$|MB|^2 = 100 \quad \text{i} \quad |MB| > 0$$

$$|MB| = 10 \quad \text{więc} \quad |BC| = 2 \cdot 10 = 20$$

Niech *CE* oznacza wysokość trapezu oraz $\beta = |\sphericalangle MBA|$. Z twierdzenia sinusów w trójkącie *ABM* obliczamy $\sin\beta$.

$$\frac{|MB|}{\sin\alpha} = \frac{|AM|}{\sin\beta}, \quad \text{skąd} \quad \sin\beta = \frac{|AM| \cdot \sin\alpha}{|MB|}, \quad \text{więc}$$

$$\sin\beta = \frac{17}{10} \cdot \frac{8}{17} = \frac{4}{5}$$



Teraz wyznaczamy wysokość *CE* w trójkącie prostokątnym *EBC*.

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \sin\beta, \quad \text{czyli} \quad |CE| = |BC| \cdot \sin\beta, \quad \text{skąd} \quad |CE| = 20 \cdot \frac{4}{5} = 16.$$

Wówczas $|EB| = 12$. Wykonaj obliczenia.

Zatem

$$|DC| = |AE| = |AB| - |EB|, \quad \text{skąd} \quad |DC| = 21 - 12 = 9.$$

Obliczamy pole trapezu *ABCD* i na koniec pole czworokąta *AMCD*.

$$P_{ABCD} = \frac{21+9}{2} \cdot 16 = 240$$

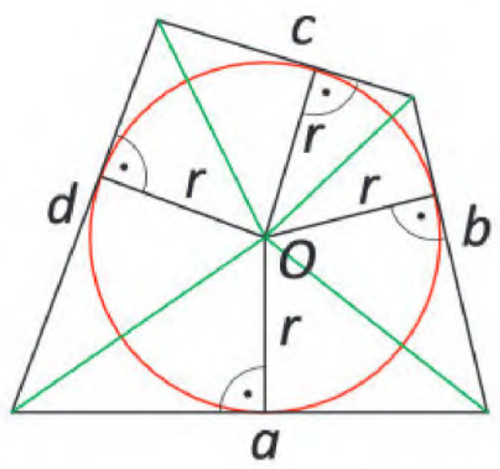
$$P_{AMCD} = 240 - 84 = 156$$

Pole czworokąta *AMCD* jest równe 156.

Twierdzenie 2.

Jeśli w czworokąt wypukły można wpisać okrąg, to pole tego czworokąta jest równe iloczynowi promienia okręgu wpisanego w ten czworokąt i połowy obwodu czworokąta.

Dowód: Niech dany będzie czworokąt (wypukły) o bokach mających długość: a, b, c, d. W czworokąt wpisano okrąg o środku w punkcie O i promieniu r.
Odcinki poprowadzone ze środka okręgu do wierzchołków czworokąta dzielą ten czworokąt na cztery trójkąty.

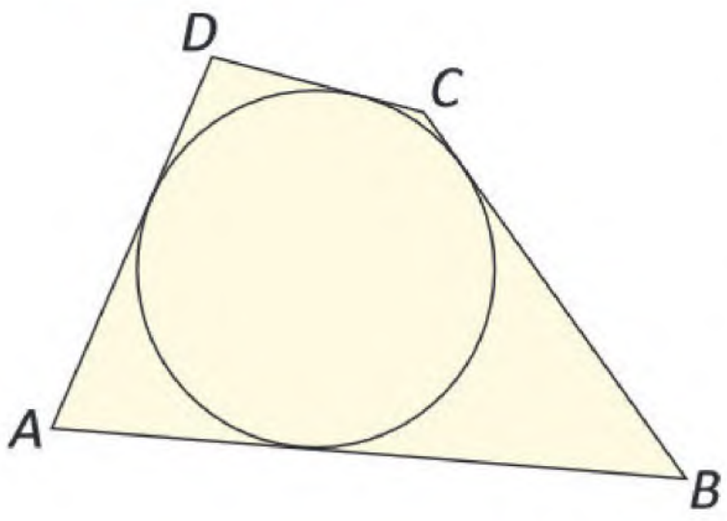


W każdym trójkącie jeden bok jest bokiem czworokąta, a wysokość trójkąta poprowadzona na ten bok jest równa promieniowi okręgu wpisanego w czworokąt. Pole P czworokąta jest równe sumie pól tych czterech trójkątów.

$$P=\frac{1}{2}a\cdot r+\frac{1}{2}b\cdot r+\frac{1}{2}c\cdot r+\frac{1}{2}d\cdot r=r\cdot\frac{a+b+c+d}{2},$$ co kończy dowód.

Jeśli $p=\frac{a+b+c+d}{2}$, to powyższy wzór przyjmuje postać: $P=r\cdot p$.

Przykład 5.



W czworokąt $ABCD$ wpisano okrąg, którego promień jest równy 7. Wiadomo, że $|AB| + |CD| = 53$.
Obliczymy pole czworokąta $ABCD$.
W czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy, gdy

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|.$$

Wówczas suma $|AB| + |CD|$ jest równa połowie obwodu czworokąta, oznaczmy ją p.

Mamy $p = 53$. Na podstawie ostatniego twierdzenia otrzymujemy

$$P = r \cdot p, \quad \text{więc} \quad P = 7 \cdot 53 = 371$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe 371.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że jeśli w dowolny wielokąt wypukły można wpisać okrąg, to pole tego wielokąta jest równe iloczynowi promienia okręgu wpisanego w ten wielokąt i połowy obwodu wielokąta.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz pole czworokąta, którego przekątne mają długość $\sqrt[4]{12}$ cm oraz $\sqrt[4]{27}$ cm i przecinają się pod kątem 45°.

2. Pole czworokąta wypukłego jest równe 20 cm^2, a jedna z przekątnych ma długość 10 cm. Wiedząc, że cosinus kąta przecięcia przekątnych jest równy $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, oblicz długość drugiej przekątnej.

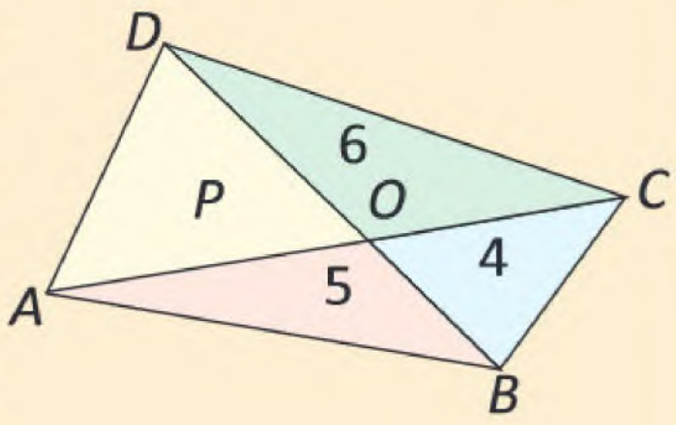
3. Pole trapezu równoramiennego jest równe 120 cm^2. Suma długości podstaw tego trapezu jest równa 30 cm. Wyznacz kąt, pod jakim przecinają się przekątne tego trapezu.

4. Rozpatrujemy czworokąty wypukłe, których przekątne mają długość 6 i 8. Jakie może być największe pole takiego czworokąta? Jaką część tego największego pola stanowi pole czworokąta, którego przekątne przecinają się pod kątem 30°?

5. W czworokącie wypukłym suma długości przekątnych jest równa 20 cm, a kąt ostry między przekątnymi jest równy 45°. Wyznacz długości przekątnych, dla których pole tego czworokąta jest największe z możliwych. Oblicz to pole.

6. Rozpatrujemy trapezy równoramienne, w których jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej oraz suma długości podstaw i wysokości trapezu jest równa 24 cm. Wyznacz długości boków trapezu, który ma największe pole. Oblicz to pole.

7. Przekątne czworokąta *ABCD* przecinają się w punkcie *O*. Wiedząc, że pola trójkątów *ABO*, *BCO*, *CDO* są odpowiednio równe 5, 4 i 6, oblicz pole czworokąta *ABCD*.



8. Przekątne czworokąta dzielą ten czworokąt na cztery trójkąty. Trzy spośród tych trójkątów mają pola: 2, 4, 6. Oblicz pole czwartego trójkąta.

9. Pole prostokąta *ABCD* jest równe 60. Punkt *M* jest środkiem boku *BC*, punkt *N* – punktem przecięcia przekątnej *BD* z prostą *AM*. Oblicz pole czworokąta *DNMC*.

10. O bokach czworokąta *ABCD* wiadomo, że: $|AB| = 3$, $|BC| = |DC|$ oraz $|AD| = 5$. Wiedząc, że $|\sphericalangle BAD| = 120°$ i $|\sphericalangle DCB| = 60°$, oblicz pole czworokąta *ABCD*.

11. Ramiona *AD* i *BC* trapezu równoramiennego *ABCD* mają długość 4 i podstawa *AB* jest dłuższa od podstawy *DC*. Punkty *K*, *L* są odpowiednio środkami ramion *AD* i *BC*. Wiedząc, że $|KC| = \sqrt{8}$ i $|\sphericalangle LKC| = 30°$, oblicz pole czworokąta *ABCK*.

12. Pole trapezu jest równe 72 cm^2, a pole koła wpisanego w ten trapez wynosi 16π cm^2. Oblicz długości ramion trapezu w przypadku, gdy trapez jest:

    a) równoramienny

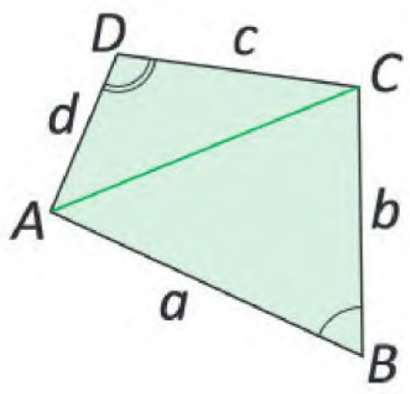
    b) prostokątny.

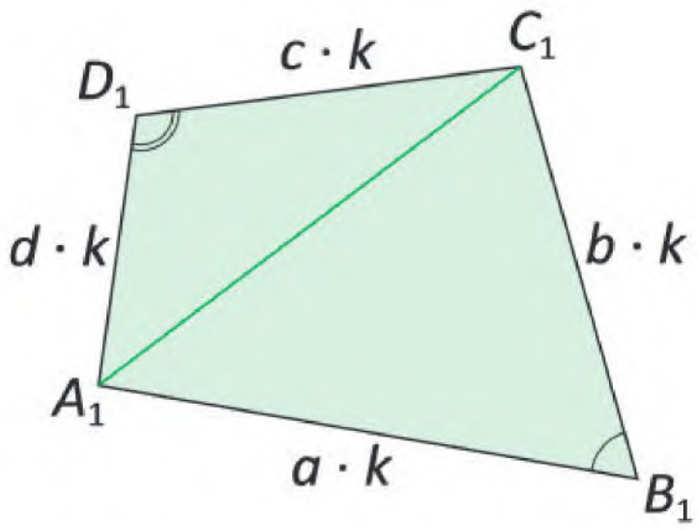
Pola figur podobnych

Przypomnijmy zależność, dotyczącą pól trójkątów podobnych.

Niech trójkąt $A_1B_1C_1$ będzie podobny do trójkąta ABC w skali k, $k > 0$. Wówczas stosunek pola trójkąta $A_1B_1C_1$ do pola trójkąta ABC jest równy kwadratowi skali podobieństwa: $\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = k^2$.

Pokażemy, że taką własność mają również czworokąty podobne.
Załóżmy, że dane są dwa czworokąty: $ABCD$ i podobny do niego w skali dodatniej k czworokąt $A_1B_1C_1D_1$.





Wówczas odpowiednie kąty w tych czworokątach są równe i odpowiednie długości boków proporcjonalne. W szczególności:

$$|\sphericalangle D| = |\sphericalangle D_1| \quad \text{i} \quad \frac{|A_1D_1|}{|AD|} = \frac{|D_1C_1|}{|DC|} = k.$$

Na mocy cechy *bkb* podobieństwa trójkątów – trójkąt $A_1C_1D_1$ jest podobny do trójkąta ACD w skali k, zatem

$$\frac{P_{A_1C_1D_1}}{P_{ACD}} = k^2, \quad \text{czyli} \quad P_{A_1C_1D_1} = k^2 \cdot P_{ACD}$$

Analogicznie

$$|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1| \quad \text{i} \quad \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = k,$$

więc trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali k.

$$\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = k^2, \quad \text{czyli} \quad P_{A_1B_1C_1} = k^2 \cdot P_{ABC}$$

Zapisujemy pole czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ w postaci sumy pól dwóch trójkątów $A_1C_1D_1$ i $A_1B_1C_1$:

$$P_{A_1B_1C_1D_1} = P_{A_1C_1D_1} + P_{A_1B_1C_1} = k^2 \cdot P_{ACD} + k^2 \cdot P_{ABC} = k^2\left(P_{ACD} + P_{ABC}\right) = k^2 \cdot P_{ABCD}$$

skąd otrzymujemy, że

$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1}}{P_{ABCD}} = k^2$$

Zatem stosunek pól czworokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Dla innych wielokątów podobnych wniosek dotyczący ich pól będzie taki sam. Wielokąty takie można bowiem podzielić na trójkąty odpowiednio podobne i przeprowadzić analogiczne rozumowanie.
Prawdziwe jest bardziej ogólne twierdzenie, dotyczące pól figur podobnych.

Twierdzenie 1.

Stosunek pól figur podobnych równa się kwadratowi skali podobieństwa.

Przykład 1.

Figura F_1 jest podobna do figury F w skali 0,8. O ile procent pole figury F jest większe od pola figury F_1?
Niech P_1 oznacza pole figury F_1, zaś P – pole figury F. Zgodnie z twierdzeniem 1. otrzymujemy

$$P_1 = (0{,}8)^2 \cdot P, \quad \text{czyli} \quad P_1 = 0{,}64 \cdot P$$

Wówczas

$$P = \frac{100}{64} \cdot P_1, \quad \text{czyli} \quad P = 1{,}5625 \cdot P_1$$

Pole figury F jest o 56,25% większe od pola figury F_1.

Ćwiczenie 1. Pole kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ jest o 69% większe od pola kwadratu $ABCD$. Oblicz skalę podobieństwa kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ do kwadratu $ABCD$.

Przykład 2.

Figura F_1 jest podobna do figury F w skali 0,4. Suma pól figur F i F_1 jest równa 145 cm^2. Wyznaczymy pole figury F_1.

Wprowadźmy oznaczenia:

x – pole figury F_1
y – pole figury F
$k = 0{,}4$ – skala podobieństwa figury F_1 do figury F
$x = k^2 \cdot y$

Z treści zadania wynika, że

$x + y = 145$ oraz $x = 0{,}16y$

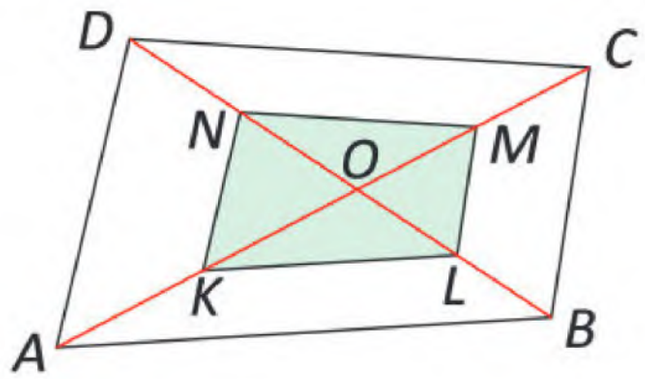
Z pierwszego równania wyznaczamy y i podstawiamy do drugiego równania:

$y = 145 - x$
$x = 0{,}16 \cdot (145 - x)$
$1{,}16x = 23{,}2$
$x = 20\ (cm^2)$

Pole figury F_1 jest równe 20 cm^2.

Przykład 3.

Pole czworokąta wypukłego *ABCD* jest równe 28 cm^2. Przekątne czworokąta przecinają się w punkcie *O*. Punkty *K*, *L*, *M*, *N* są środkami odcinków odpowiednio *AO*, *BO*, *CO*, *DO*. Pokażemy, że pole czworokąta *KLMN* jest równe 7 cm^2.



Rysunek obok przedstawia czworokąt *ABCD*.
Punkty *K* i *L* są środkami boków *AO* i *BO* trójkąta *ABO*.
Z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie wynika, że

$$KL \parallel AB \text{ oraz } |KL| = \frac{1}{2}|AB|$$

Z równoległości odcinków *AB* i *KL* otrzymujemy:

$$|\sphericalangle LKO| = |\sphericalangle BAO| \text{ oraz } |\sphericalangle OLK| = |\sphericalangle OBA| \quad \text{– kąty odpowiadające}$$

Analogiczne równości odnoszą się do trójkątów *BCO*, *CDO* i *DAO*. Zatem kąty czworokątów *ABCD* i *KLMN* są równe i jednocześnie

$$\frac{|KL|}{|AB|} = \frac{|LM|}{|BC|} = \frac{|MN|}{|CD|} = \frac{|NK|}{|DA|} = \frac{1}{2}.$$

To znaczy, że czworokąt *KLMN* jest podobny do czworokąta *ABCD* w skali $\frac{1}{2}$.

Zatem $P_{KLMN} = \frac{1}{4}P_{ABCD}$. – na mocy twierdzenia 1.

Ale $P_{ABCD} = 28$, więc $P_{KLMN} = 7$, co kończy dowód.

Z polami figur podobnych ma związek twierdzenie Pitagorasa:

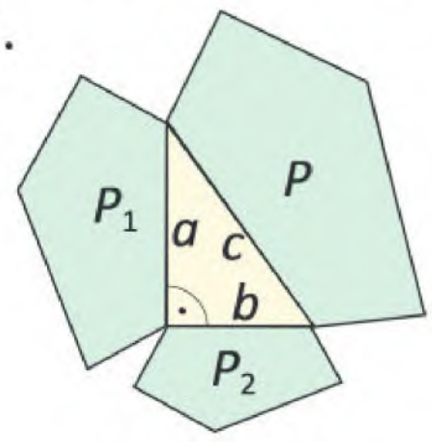
Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.

Okazuje się, że można je sformułować również tak:

Jeżeli trójkąt jest prostokątny i na bokach tego trójkąta zbudujemy figury podobne, to pole figury zbudowanej na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól figur zbudowanych na przyprostokątnych.

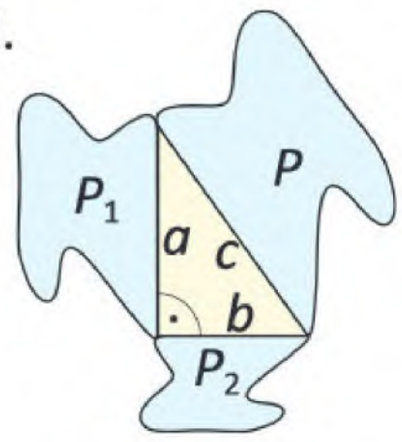
Na rysunkach poniżej mamy trójkąt prostokątny o bokach mających długość *a*, *b*, *c* i zbudowane na jego bokach figury podobne, zaznaczone jednakowym kolorem. Pola odpowiednich figur podobnych zostały oznaczone: P, P_1, P_2.

1.



$P = P_1 + P_2$

2.



$P = P_1 + P_2$

Wykażemy, że równość $P = P_1 + P_2$ jest prawdziwa w przypadku dowolnych figur podobnych.

Skala podobieństwa dwóch figur jest wyznaczona na przykład przez stosunek długości odpowiadających sobie odcinków w tych figurach, a stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Zatem

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{b}{a}\right)^2, \qquad \text{stąd} \qquad P_2=P_1\cdot\frac{b^2}{a^2}$$

Podobnie

$$\frac{P}{P_1}=\left(\frac{c}{a}\right)^2, \qquad \text{stąd} \qquad P=P_1\cdot\frac{c^2}{a^2}$$

Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że $a^2 + b^2 = c^2$. Wówczas:

$$P_1+P_2=P_1+P_1\cdot\frac{b^2}{a^2}=P_1\cdot\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)=P_1\cdot\frac{a^2+b^2}{a^2}=P_1\cdot\frac{c^2}{a^2}=P, \quad \text{czyli}$$

$P_1 + P_2 = P$, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Figura F_1 jest podobna do figury F w skali k. Wiedząc, że pole figury F stanowi 0,16 pola figury F_1, oblicz k.

2. Skala podobieństwa koła K_1 do koła K wynosi 0,9. O ile procent pole koła K_1 jest mniejsze od pola koła K?

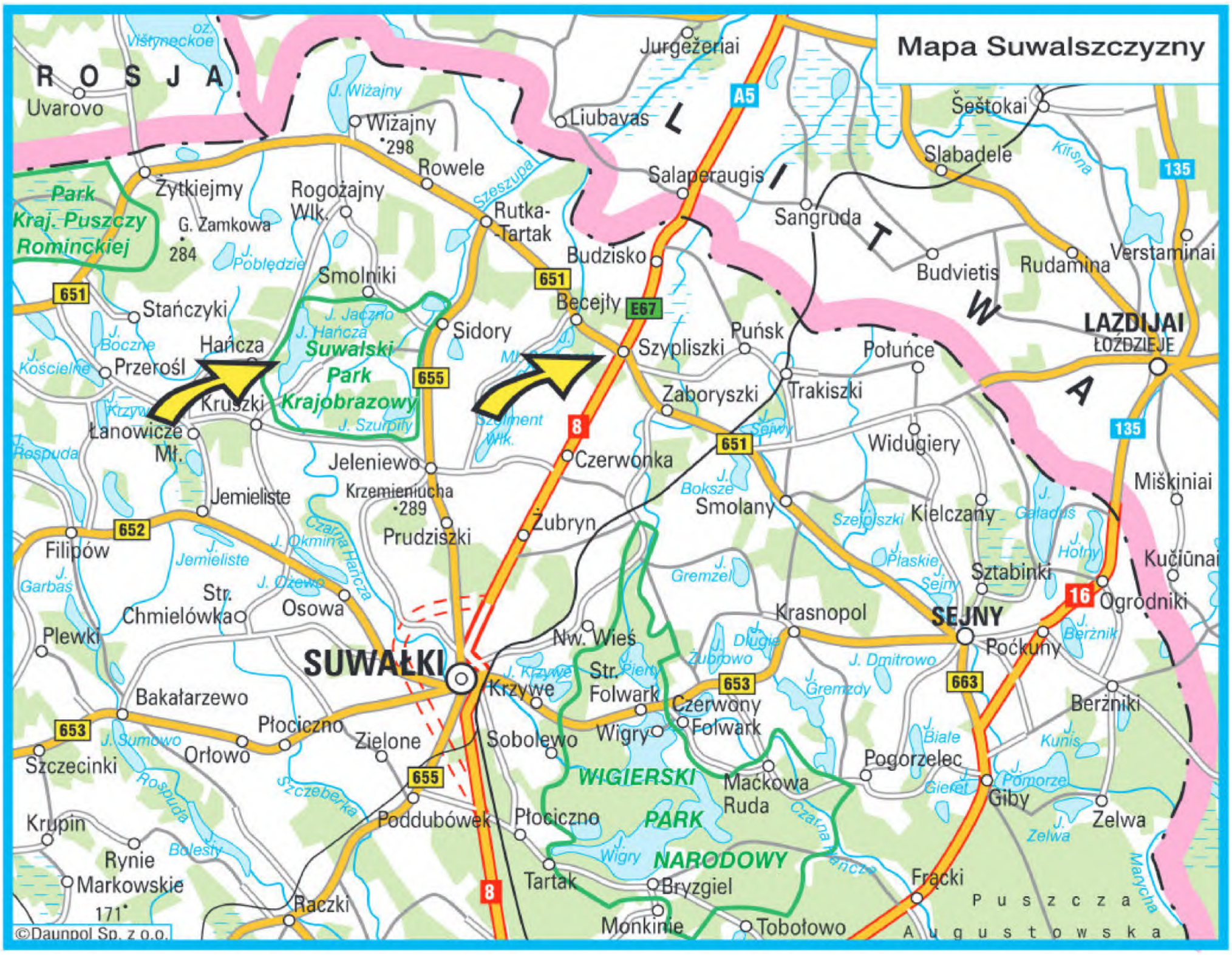
3. Figury F_1 i F są podobne. Obwód figury F_1 jest o 15% większy od obwodu figury F. O ile procent pole figury F_1 jest większe od pola figury F?

4. W trapezie $ABCD$ odcinki AB i DC są podstawami. Pole trapezu $ABCD$ jest równe 130 cm^2. Na ramieniu AD zaznaczono punkt E, a na ramieniu BC – punkt F w taki sposób, że trapez $EFCD$ jest podobny do trapezu $ABFE$. Wiedząc, że $|EF| = 12$ cm oraz pole trapezu $EFCD$ jest o 50 cm^2 mniejsze od pola trapezu $ABFE$, oblicz:
   a) długości podstaw AB i DC trapezu $ABCD$,
   b) wysokość trapezu $ABCD$.

5. W równoległoboku $ABCD$ nierównoległe boki mają długość 12 cm i 10 cm. Obrazem równoległoboku $ABCD$ w pewnym podobieństwie jest równoległobok $A_1B_1C_1D_1$. Wiedząc, że pole równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$ jest równe 1200 cm^2, a jego kąt ostry ma miarę 30°, oblicz:
   a) skalę tego podobieństwa,
   b) obwód równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$.

Mapa. Skala mapy

Rysunek przedstawia fragment mapy Suwalszczyzny.



Załóżmy, że obszar Suwalszczyzny i mapę tego obszaru potraktujemy jako figury podobne. Wówczas skalą podobieństwa przekształcającego omawiany obszar na mapę jest skala mapy.

Wyznaczymy skalę tej mapy, wiedząc, że odległość Suwałki – Szypliszki w rzeczywistości jest równa 20 km, a na mapie odległość między tymi miejscowościami wynosi 4 cm.

4 cm na mapie → 20 km w rzeczywistości, więc

1 cm na mapie → 5 km w rzeczywistości, 5 km = 5000 m = 500 000 cm, czyli

1 cm na mapie → 500 000 cm w rzeczywistości

Skala mapy jest równa 1 : 500 000.

Najdłuższą rzeką na Suwalszczyźnie jest Czarna Hańcza. Na terenie Polski długość tej rzeki wynosi 108 km. Obliczymy, jaka będzie długość tej części Czarnej Hańczy na mapie, której skala jest równa 1 : 500 000.

5 km w rzeczywistości to 1 cm na tej mapie. Wykonujemy działanie:

108 : 5 = 21,6

Na mapie w skali 1 : 500 000 długość Czarnej Hańczy na terenie Polski jest równa 21,6 cm.

Najgłębszym jeziorem w Polsce jest jezioro Hańcza o maksymalnej głębokości 108,5 m, leżące w obszarze Suwalskiego Parku Krajobrazowego. Powierzchnia tego jeziora jest równa 304,4 ha. Wyznaczymy powierzchnię tego jeziora na powyższej mapie. Wynik podamy w milimetrach kwadratowych.

Powierzchnia jeziora w rzeczywistości i obraz jeziora na mapie – to figury podobne. Stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Przyjmijmy oznaczenia:

P_{rz} – powierzchnia jeziora Hańcza w rzeczywistości, $P_{rz} = 304{,}4$ ha

P_m – powierzchnia jeziora Hańcza na mapie o skali 1 : 500 000. Wówczas

$$\frac{P_m}{P_{rz}} = k^2$$

Wyrażamy P_{rz} w milimetrach kwadratowych. Przypomnijmy:

1 ha = 10 000 m^2 = 10^8 cm^2 = 10^{10} mm^2, więc

$P_{rz} = 304{,}4 \cdot 10^{10}$ mm^2

Wykorzystujemy własności działań na potęgach i otrzymujemy

$$\frac{P_m}{304{,}4 \cdot 10^{10}} = \left(\frac{1}{5 \cdot 10^5}\right)^2$$

$$P_m = 304{,}4 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{25 \cdot 10^{10}} = 12{,}176 \ (mm^2)$$

Powierzchnia jeziora Hańcza na mapie jest równa ok. 12,2 mm^2.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Jadąc z Suwałk na zachód w kierunku Bakałarzewa, mijamy Płociczno. Zmierz linijką na mapie odległość między Płocicznem i Suwałkami. Następnie, na podstawie skali mapy, oblicz, jaka jest rzeczywista odległość między tymi miejscowościami.

2. Najdalej położoną na północ miejscowością Suwalszczyzny są Wiżajny. Wiżajny nazywane są polskim biegunem zimna. Wiedząc, że droga z Suwałk do Wiżajn, prowadząca przez Rutkę-Tartak, ma długość około 36 km, oblicz, ile centymetrów droga ta zajmuje na mapie w skali 1 : 500 000. Następnie zmierz tę drogę linijką na mapie i porównaj wyniki.

3. Na wschód od Suwałk znajduje się Wigierski Park Narodowy (WPN). Jego powierzchnia na mapie wykonanej w skali 1 : 500 000 wynosi w przybliżeniu 6 cm^2.
   a) Wyznacz przybliżone pole powierzchni WPN. Wynik podaj w km^2.
   b) Wiedząc, że powierzchnia rzeczywista WPN jest równa 15 087 ha, oblicz względny błąd przybliżenia z punktu a) i wyraź go w procentach. Wynik tego błędu podaj w przybliżeniu dziesiętnym z dokładnością do 0,01%.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5.

Test

1. Pole kwadratu jest równe 2 cm^2. Przekątna tego kwadratu ma długość:
   A. 1 cm B. $\sqrt{2}$ cm C. 2 cm D. $2\sqrt{2}$ cm

2. Wysokości równoległoboku są równe 8 cm i 15 cm. Jeśli jeden bok ma długość 10 cm, to długość drugiego boku jest równa:
   A. $18\frac{3}{4}$ cm B. 12 cm C. $10\frac{2}{3}$ cm D. $5\frac{1}{3}$ cm

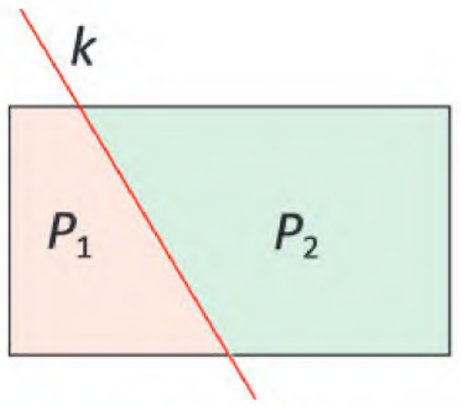
3. Pole równoległoboku jest równe 12 cm^2, a kąt ostry tego równoległoboku ma miarę 30°. Pole prostokąta mającego takie same długości boków, jak dany równoległobok, wynosi:
   A. $8\sqrt{3}$ cm^2 B. 12 cm^2 C. $12\sqrt{2}$ cm^2 D. 24 cm^2

4. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 5, a pole tego trapezu jest równe 40. Wysokość tego trapezu jest równa:
   A. 16 B. 12 C. 8 D. 4

5. Punkty *K*, *L*, *M*, *N* są środkami boków prostokąta *ABCD*. Pole czworokąta *KLMN* wynosi 10. Zatem pole prostokąta *ABCD* jest równe:
   A. 5 B. $10\sqrt{2}$ C. 20 D. 40.

6. Przekątne czworokąta wypukłego mają długość 10 i 14, zaś jego pole wynosi 70. Przekątne czworokąta przecinają się pod kątem:
   A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°.

7. Na rysunku obok prosta *k* dzieli jeden dłuższy bok prostokąta w stosunku 1 : 5, a drugi dłuższy bok na połowy. Stosunek pól $P_1 : P_2$ powstałych w ten sposób trapezów wynosi:
   A. 2 : 5 B. 1 : 2
   C. 3 : 7 D. 5 : 9.



8. Przekątna trapezu równoramiennego ma długość 15, a jego wysokość jest równa 9. Pole tego trapezu jest równe
   A. 120 B. 135 C. 150 D. 108

9. Figury *F* i F_1 są podobne. Jeśli obwód figury *F* jest o 40% większy od obwodu figury F_1, to pole figury *F* jest większe od pola figury F_1:
   A. o 16% B. o 20% C. o 40% D. o 96%

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

Zadania otwarte

10. Różnica pól dwóch kwadratów jest równa 21. Oblicz długości boków tych kwadratów wiedząc, że wyrażają się one liczbami naturalnymi.

11. Przekątne rombu *ABCD* mają długość 30 i 40, kąt ostry rombu przy wierzchołku *A* jest równy α. Poprowadzono wysokości *BE* i *DF*, $E \in AD$, $F \in BC$. Oblicz:
    a) pole rombu *ABCD* b) sin α c) pole prostokąta *DFBE*.

12. W równoległoboku *ABCD* bok *AB* ma długość 4, zaś bok *BC* ma długość 2. Kąt *BAD* jest równy 45°. Oblicz:
    a) pole równoległoboku b) sinus kąta przecięcia przekątnych.

13. W równoległoboku *ABCD*, $|AB| > |BC|$, kąt przy wierzchołku *D* jest rozwarty. Z punktu *D* poprowadzono wysokości *DE* i *DF*, gdzie $E \in AB$, $F \in BC$. Wiedząc, że $|DE| = 6$, $|DF| = 9$ oraz sinus kąta *EDF* jest równy 0,75, oblicz:
    a) pole równoległoboku *ABCD* b) pole czworokąta *EBFD*.

14. W trapezie kąty ostre przy dłuższej podstawie są równe 45° i 60°. Krótsza podstawa ma długość 3, zaś krótsze ramię ma długość $4\sqrt{3}$. Oblicz pole trapezu.

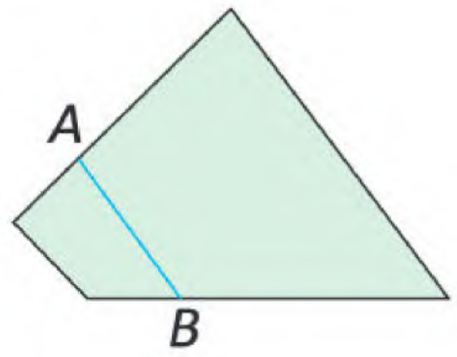
15. Stosunek długości wysokości trapezu równoramiennego do długości przekątnej jest równy 3 : 5. Wiedząc, że pole tego trapezu wynosi 48 cm^2, oblicz
    a) wysokość trapezu b) długość przekątnej

16. W trapezie *ABCD*, $AB \| DC$, przekątne przecinają się w punkcie *E*. Wiedząc, że pole trójkąta *DEC* jest równe 18 cm^2 oraz $|EC| : |AE| = 3 : 10$, oblicz pole trapezu *ABCD*.

17. W trapezie *ABCD*, $AB \| DC$, punkty *E*, *F* są środkami ramion trapezu, punkt *G* należy do podstawy *AB* (i jest różny od punktów *A*, *B*) i punkt *H* należy do podstawy *DC* (i jest różny od punktów *D*, *C*). Pole czworokąta wypukłego, którego wierzchołkami są punkty *E*, *F*, *G*, *H*, jest równe 15. Oblicz pole trapezu *ABCD*.

18. Prostokąt ma wymiary 4 cm na 10 cm. Poprowadzono prostą prostopadłą do dłuższego boku, która odcięła prostokąt podobny do danego prostokąta. Oblicz pole pozostałej części danego prostokąta.

19. Na rysunku obok znajduje się plan czworokątnej działki, wykonany w skali 1 : 3000. Wiedząc, że na planie odcinek rzeki *AB* ma długość 2 cm, a pole czworokąta wynosi 7 cm^2, oblicz:
    a) rzeczywistą długość rzeki w obszarze działki
    b) rzeczywistą powierzchnię działki w arach.

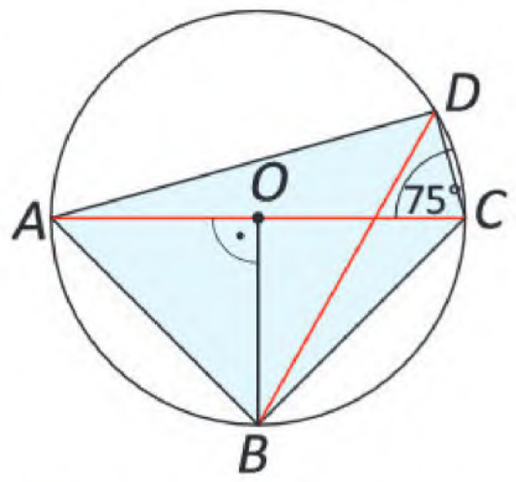


20. W okrąg o promieniu równym 5 cm wpisano trapez, którego dłuższa podstawa jest średnicą okręgu, a przekątna ma długość 8 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

21. Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Boki AB i AD mają odpowiednio długość 7 i 8, a kąt BAD jest równy 120°. Wiedząc, że $|DC| = |BC|$, oblicz pole czworokąta $ABCD$.

22. Punkty A, B, C, D należą do okręgu o środku w punkcie O. Odcinek AC jest średnicą okręgu i ma długość $4\sqrt{3}$. Cięciwa BD ma długość 6. Wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| = 90°$ i $|\sphericalangle DCA| = 75°$, oblicz pole czworokąta $ABCD$.

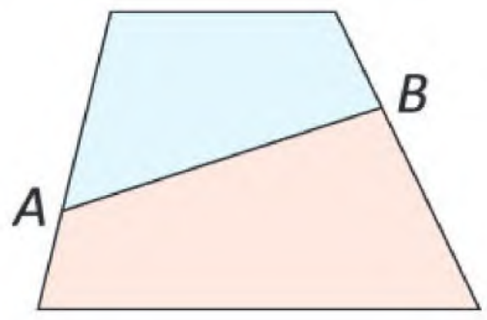


23. Kawałek materiału ma kształt czworokąta, którego suma długości dwóch przeciwległych boków jest równa 5,4 m. Z tego kawałka wycięto koło o polu równym π m^2, styczne do wszystkich boków czworokąta. Jaki procent całego materiału stanowią niewykorzystane skrawki? Wynik zaokrąglij do 0,1 procenta.

24. W trapez równoramienny o polu 240 cm^2 wpisano koło. Wiedząc, że ramię trapezu ma długość 20 cm, oblicz:
   a) długość odcinka łączącego środki przekątnych
   b) długość przekątnej trapezu.

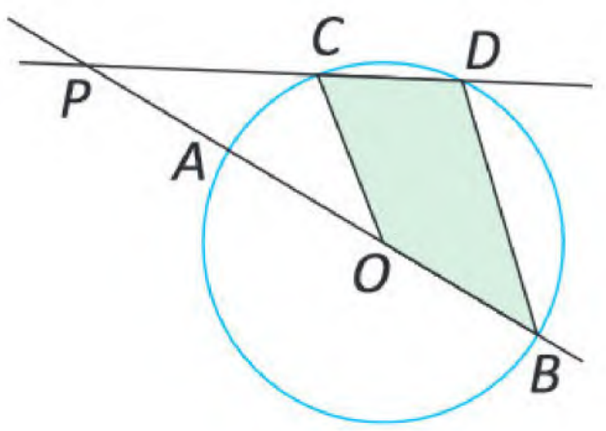
25. W trapez prostokątny wpisano koło. Punkt styczności koła z dłuższym ramieniem trapezu dzieli to ramię na odcinki długości 8 cm i 18 cm. Oblicz:
   a) pole trapezu
   b) długości podstaw trapezu.

D 26. Jedna podstawa trapezu jest dwa razy dłuższa od drugiej. Każde ramię trapezu podzielono na trzy równe odcinki i połączono punkty A i B tego podziału, jak na rysunku obok. Wykaż, że stosunek pola niebieskiego czworokąta do pola brązowego jest równy 11 : 16.



D 27. W romb $ABCD$ wpisano okrąg o środku w punkcie O. Punkty E, F, G, H są punktami styczności tego okręgu odpowiednio z bokami AB, BC, DC, AD. Wykaż, że:
   a) czworokąty $AEOH$ i $OEBF$ są podobne
   b) jeśli $|\sphericalangle BAD| = 60°$, to $P_{AEOH} = 3 \cdot P_{OEBF}$.

28. Przez punkt P leżący na zewnątrz okręgu o środku w punkcie O poprowadzono dwie sieczne: jedna zawiera średnicę AB; druga przecina okrąg w punktach C i D – jak na rysunku obok. Wiedząc, że $|PO| = 7$, $|PC| = 3\sqrt{2}$ i $|CD| = \sqrt{2}$, wyznacz:
   a) promień okręgu
   b) miarę kąta OPC
   c) pole czworokąta $OBDC$.

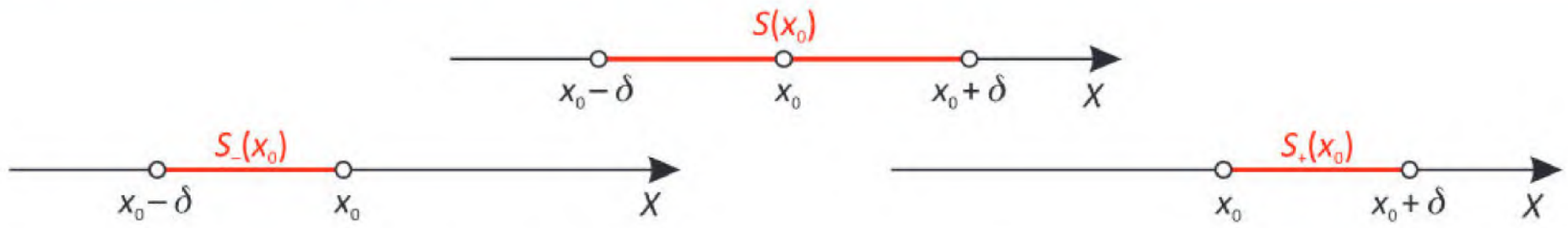


6. Elementy analizy matematycznej

Granica funkcji w punkcie

Żeby mówić o granicy funkcji f w punkcie x_0, funkcja f musi być określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0.

Sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu δ, $\delta > 0$, nazywamy zbiór $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ i oznaczamy $S(x_0)$ lub $S(x_0, \delta)$.
Przedział $(x_0 - \delta, x_0)$ będziemy nazywać **sąsiedztwem lewostronnym** punktu x_0 o promieniu δ i będziemy oznaczać $S_-(x_0)$ lub $S_-(x_0, \delta)$.
Przedział $(x_0, x_0 + \delta)$ będziemy nazywać **sąsiedztwem prawostronnym** punktu x_0 o promieniu δ i oznaczać $S_+(x_0)$ lub $S_+(x_0, \delta)$.



Niech teraz dana będzie funkcja f, określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0, czyli przyjmuje wartości dla wszystkich liczb x należących do $S(x_0)$. Będziemy badać, czy istnieje liczba – granica – do której dążą wartości $f(x)$ funkcji f, jeśli argumenty x dążą do liczby x_0. Dla zbadania, czy istnieje granica funkcji w punkcie x_0, nie ma żadnego znaczenia, czy funkcja jest określona w punkcie x_0, czy też nie.

Rozważmy pewien ciąg (a_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(x_0)$ i taki, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

Niech ciąg wartości $\left(f\left(a_n\right)\right)$ będzie zbieżny do liczby g, czyli

$$\lim_{n\to\infty} f\left(a_n\right) = g$$

Czy to wystarczy, żeby liczbę g uznać za granicę funkcji f w punkcie x_0? Otóż nie. Może się zdarzyć, że dla innego ciągu, o wyrazach należących do $S(x_0)$ i zbieżnego do x_0, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f nie jest zbieżny lub jest zbieżny do granicy g_1, gdzie $g_1 \neq g$. W takim przypadku granica funkcji f w punkcie x_0 nie istnieje.

W przypadku istnienia granicy funkcji w punkcie x_0 powinniśmy stwierdzić, że ciąg wartości funkcji $\left(f\left(a_n\right)\right)$ jest zbieżny do granicy g **dla każdego ciągu** (a_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(x_0)$ i zbieżnego do x_0.

Rozważmy funkcję

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{|x-3|} - 2, \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R} - \{3\}.$$

Funkcja f jest określona w sąsiedztwie punktu 3. Zbadamy, czy istnieje granica funkcji f w punkcie 3. Weźmy sąsiedztwo punktu 3 o promieniu 2, czyli $S(3) = (1, 3) \cup (3, 5)$. Rozpatrzmy trzy ciągi nieskończone (a_n), (b_n), (c_n), gdzie

$$a_n = 3 + \frac{1}{n}, \quad b_n = 3 - \frac{1}{n}, \quad c_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Zauważ, że wyrazy ciągu (a_n) leżą w prawostronnym sąsiedztwie punktu 3, czyli w przedziale (3, 5), wyrazy ciągu (b_n) – w lewostronnym sąsiedztwie punktu 3, czyli w przedziale (1, 3), a wyrazy ciągu (c_n) – na przemian: w lewostronnym i w prawostronnym sąsiedztwie punktu 3. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 3$$

Wyznaczmy ciągi wartości funkcji f odpowiednio dla ciągów (a_n), (b_n), (c_n). Mamy:

$$f(a_n) = \frac{\left(3 + \frac{1}{n} - 3\right)^2}{\left|3 + \frac{1}{n} - 3\right|} - 2 = \frac{\frac{1}{n^2}}{\left|\frac{1}{n}\right|} - 2 = \frac{1}{n} - 2$$

$$f(b_n) = \frac{\left(3 - \frac{1}{n} - 3\right)^2}{\left|3 - \frac{1}{n} - 3\right|} - 2 = \frac{\left(-\frac{1}{n}\right)^2}{\left|-\frac{1}{n}\right|} - 2 = \frac{1}{n} - 2$$

$$f(c_n) = \frac{\left(3 + \frac{(-1)^n}{n} - 3\right)^2}{\left|3 + \frac{(-1)^n}{n} - 3\right|} - 2 = \frac{\frac{1}{n^2}}{\left|\frac{1}{n}\right|} - 2 = \frac{1}{n} - 2$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} (c_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\overset{0}{\boxed{\frac{1}{n}}} - 2 \right) = -2$$

W każdym przypadku ciąg wartości funkcji jest zbieżny do liczby –2. Jednak na tej podstawie nie możemy stwierdzić, że granica funkcji f w punkcie 3 jest równa –2. Sprawdzenie zbieżności dla dużo większej liczby ciągów w dalszym ciągu nie daje podstaw do wyciągnięcia wniosku dotyczącego granicy funkcji w danym punkcie.

Przeprowadźmy rozumowanie ogólne. Niech (x_n) będzie takim ciągiem o wyrazach należących do $S(3)$, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$. Wówczas

$$f(x_n) = \frac{(x_n - 3)^2}{|x_n - 3|} - 2 = \frac{|x_n - 3| \cdot \cancel{|x_n - 3|}^{1}}{\cancel{|x_n - 3|}_{1}} - 2 = |x_n - 3| - 2$$

Z założenia wiemy, że

$$\lim_{n\to n} x_n = 3, \qquad \text{czyli} \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n - 3) = 0.$$

Wówczas

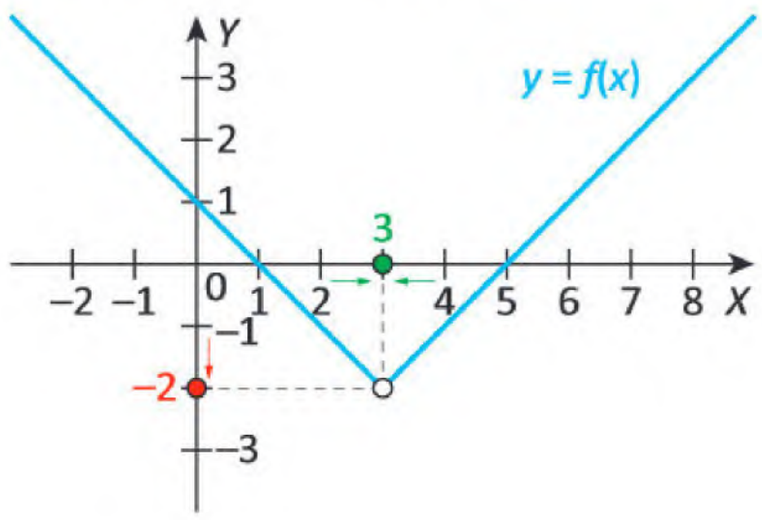
$$\lim_{n\to\infty}|x_n - 3| = 0, \quad \text{stąd} \qquad \lim_{n\to\infty}(|x_n - 3| - 2) = -2$$

Zatem granica $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ istnieje i

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(|x_n - 3| - 2) = -2$$

Powyższe rozumowanie jest prawdziwe w przypadku **każdego ciągu** (x_n) zbieżnego do 3, o wyrazach różnych od 3. Tym samym pokazaliśmy, że funkcja f ma w punkcie 3 granicę równą –2.

Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji f.



Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$.
Granicą funkcji f w punkcie x_0 jest liczba g tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) takiego, że $x_n \in S(x_0)$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, prawdziwa jest równość $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Wówczas zapisujemy $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$.

Zapis symboliczny:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \iff \bigwedge_{(x_n)}\left[\left(x_n \in S(x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g\right]$$



Powyższą definicję nazywa się **definicją Heinego granicy funkcji w punkcie**.

Edward Heine (wym. hajne) to niemiecki matematyk, który żył w latach 1821–1881, był profesorem uniwersytetu w Bonn i Halle. Zajmował się różnymi działami analizy matematycznej.

Przykład 1.

Na podstawie definicji 1. obliczymy granicę funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

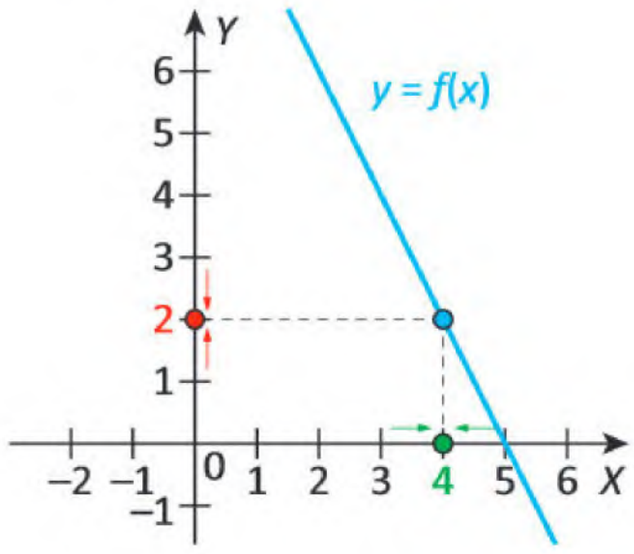
a) $f(x) = -2x + 10$ i $x_0 = 4$ b) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+1}$ i $x_0 = -1$.

Ad a) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Funkcja jest więc określona w sąsiedztwie $S(4)$. Weźmy dowolny ciąg (x_n), o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(4)$ i zbieżny do liczby 4, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$. Mamy $f(x_n) = -2x_n + 10$, więc granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ istnieje i

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(-2x_n + 10) =$$

$$= -2\lim_{n\to\infty} x_n + 10 = -2\cdot 4 + 10 = 2$$

To znaczy, że $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 2$.

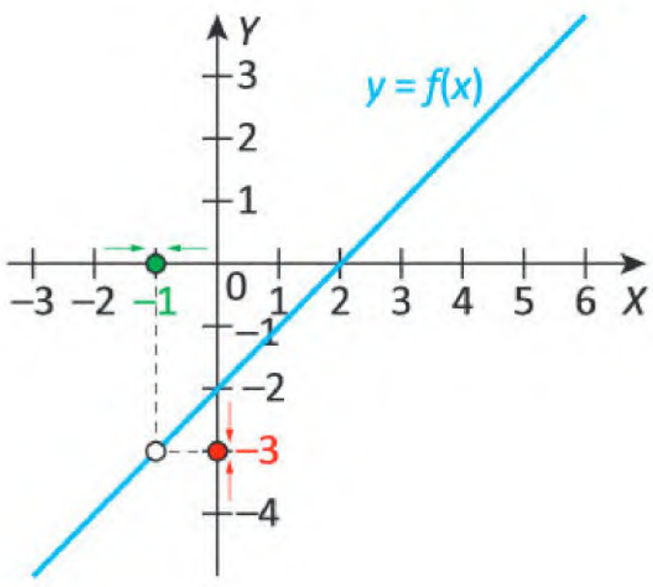


Ad b) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{-1\}$. Funkcja f jest określona w sąsiedztwie $S(-1)$. W samym punkcie -1 funkcja f nie jest określona (dzielenie 0:0 nie oznacza żadnej liczby). Weźmy dowolny ciąg (x_n), o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(-1)$ i zbieżny do liczby -1, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$. Wówczas:

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - x_n - 2}{x_n + 1} = \frac{(x_n+1)(x_n-2)}{(x_n+1)} = \begin{matrix}1\\ \\ 1\end{matrix}$$

$$= x_n - 2$$

Mogliśmy skrócić ułamek przez $x_n + 1$, bowiem dla dowolnej liczby naturalnej n spełniony jest warunek $x_n \neq -1$, więc nie dzielimy przez zero!



Granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ istnieje i

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n - 2) = -1 - 2 = -3$$

Zatem $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -3$

Przykład 2.

Obliczymy granicę funkcji f w punkcie 3, gdzie $f(x)=\begin{cases}\frac{0{,}5(x^2-9)}{x-3}, & \text{jeśli } x \neq 3\\ 4, & \text{jeśli } x = 3\end{cases}$.

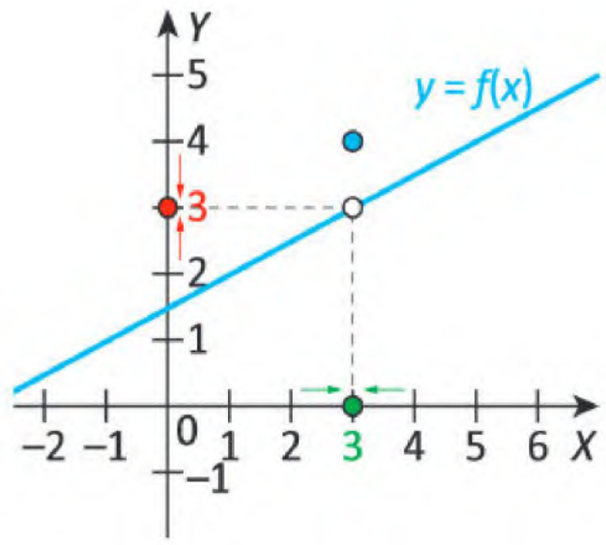
Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$, więc funkcja f jest określona w sąsiedztwie $S(3)$. Weźmy dowolny ciąg (x_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(3)$, zbieżny do liczby 3, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. Wówczas:

$$f(x_n)=\frac{0{,}5\left(x_n^2-9\right)}{x_n-3}=\frac{0{,}5(x_n+3)\cancel{(x_n-3)}^{1}}{\cancel{(x_n-3)}_{1}}=$$

$=0{,}5(x_n+3)$ zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ istnieje i

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left[0{,}5(x_n+3)\right]=0{,}5(3+3)=3$$

Otrzymaliśmy $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=3$.



Nie zawsze istnieje granica funkcji w danym punkcie x_0 – mimo, że funkcja jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Aby to udowodnić, wystarczy wskazać dwa różne ciągi (a_n) i (b_n), które spełniają następujące warunki:

1) wyrazy obu ciągów należą do sąsiedztwa $S(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

Przykład 3.

Wykażemy, że nie istnieje granica funkcji $f(x)=\dfrac{|x|^3+x}{|x|}$ w punkcie 0.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$. Funkcja f jest określona w sąsiedztwie $S(0)$. Rozważmy ciąg (a_n), gdzie $a_n=\dfrac{1}{n}$ i $n \in \boldsymbol{N}_+$. Mamy:

$$a_n \in S(0), \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad |a_n|=\frac{1}{n}, \quad \text{bo} \quad \frac{1}{n}>0$$

$$f(a_n)=\frac{|a_n|^3+a_n}{|a_n|}=\frac{\left|\frac{1}{n}\right|^3+\frac{1}{n}}{\left|\frac{1}{n}\right|}=\frac{1}{n^2}+1, \text{ więc } \lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+1\right)=0+1=1$$

Weźmy teraz ciąg (b_n), gdzie $b_n=\dfrac{-1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wówczas

$$b_n \in S(0), \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad |b_n|=\frac{1}{n}, \quad \text{bo} \quad \frac{-1}{n}<0$$

$$f(b_n)=\frac{\left|-\frac{1}{n}\right|^3+\left(-\frac{1}{n}\right)}{\left|-\frac{1}{n}\right|}=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n^2}-1 \text{ więc } \lim_{n\to\infty} f(b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=-1$$

Wskazaliśmy dwa różne ciągi (a_n), (b_n), które spełniają warunki:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \qquad \text{i jednocześnie} \qquad \lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

To znaczy, że granica funkcji $f(x)=\dfrac{|x|^3+x}{|x|}$ w punkcie 0 nie istnieje.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz granicę funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x)=x-9,\ x_0=7$

b) $f(x)=x^2-4x+2,\ x_0=-1$

c) $f(x)=5\cdot|x|-6,\ x_0=-4$

d) $f(x)=x^3-2|x|+1,\ x_0=1$

e) $f(x)=\dfrac{2}{x},\ x_0=0{,}4$

f) $f(x)=\dfrac{6-2x}{x+4},\ x_0=0$

2. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+6x}{x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x-x^2}{x^2-25}$

e) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2x}{x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{x+8}$

3. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie, oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left(x^3+3x^2+2x+6\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\left[\left(x^2+6\right)\left(x^4-3\right)\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x+3}{x^2-1}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x+14}{x^2-x-6}$

D 4. Dany jest wzór funkcji f i punkt x_0. Wskaż dwa ciągi (a_n) i (b_n), dla których $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$. Na tej podstawie wykaż, że nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_0.

a) $f(x)=\dfrac{|x|}{x},\ x_0=0$

b) $f(x)=\dfrac{|5x+10|}{x+2},\ x_0=-2$

c) $f(x)=\dfrac{4x+12}{|x+3|},\ x_0=-3$

d) $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x+1},\ x_0=-1$

e) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{|x-1|},\ x_0=1$

f) $f(x)=\dfrac{x^2+|2x|}{x},\ x_0=0$

Obliczanie granicy funkcji w punkcie

Obliczanie granic funkcji w punkcie ułatwiają twierdzenia, wynikające bezpośrednio z własności granic ciągów oraz z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie.

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie twierdzenie, dotyczące własności działań na granicach ciągów zbieżnych.

Twierdzenie 1.

Jeżeli funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ oraz:

a) funkcja f jest stała w zbiorze $S(x_0)$, tzn. $f(x) = c$ dla $x \in S(x_0)$, to istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$

b) $f(x) = x$, gdzie $x \in S(x_0)$, to istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0$.

Twierdzenie 2.

Jeżeli istnieją granice $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ oraz c jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieją również granice: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c\cdot f(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ – przy dodatkowym założeniu, że $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ – i prawdziwe są równości:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c\cdot f(x)\right] = c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

Twierdzenie 3.

Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, gdzie $g > 0$, to $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{g}$.

Przykład 1.

Obliczymy $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^4+5x-10\right)$.

Z twierdzenia 1b wynika, że $\lim\limits_{x\to -2} x=-2$, zatem

$$\lim_{x\to -2} x^4=\left(\lim_{x\to -2} x\right)^4=(-2)^4$$ Stosujemy twierdzenie 2d.

$$\lim_{x\to -2}(5x)=5\cdot\lim_{x\to -2} x=5\cdot(-2)$$ Stosujemy twierdzenie 2a.

$$\lim_{x\to -2} 10=10$$ Stosujemy twierdzenie 1a.

Tak więc szukana granica istnieje i

$$\lim_{x\to -2}\left(x^4+5x-10\right)=(-2)^4+5\cdot(-2)-10=-4$$

Można zauważyć, że granicą funkcji wielomianowej $y = x^4 + 5x - 10$, jeśli x dąży do -2, jest wartość tej funkcji dla argumentu -2. Podobnie jest dla innych funkcji wielomianowych.

Granicą funkcji wielomianowej $y = W(x)$ w punkcie a jest wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla argumentu a, czyli

$$\lim_{x\to a} W(x)=W(a)$$

Przykład 2.

Obliczymy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+12}{x^2-6x+3}$.

Zauważ, że jeśli x dąży do 1, to mianownik ułamka **nie dąży do zera**,

$\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-6x+3\right)=-2$; ponadto $\lim\limits_{x\to 1}(2x+12)=14$, więc istnieje szukana granica

Możemy zatem zastosować twierdzenie 2e.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+12}{x^2-6x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+12)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-6x+3\right)}$$

Dalej postępujemy jak w przykładzie 1.

$$\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x+12)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-6x+3\right)}=\frac{2\cdot 1+12}{1^2-6\cdot 1+3}=\frac{14}{-2}=-7,\ \text{czyli}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+12}{x^2-6x+3}=-7$$

Jeśli dane są wielomiany $W_1(x)$, $W_2(x)$ oraz $W_2(a) \neq 0$, to granica funkcji wymiernej $y = \frac{W_1(x)}{W_2(x)}$ w punkcie a jest równa $\frac{W_1(a)}{W_2(a)}$, czyli $\lim\limits_{x\to a} \frac{W_1(x)}{W_2(x)} = \frac{W_1(a)}{W_2(a)}$

Przykład 3.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x^3+x^2-9x-9}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+4}-2}{6x}$

Ad a) Jeśli x dąży do -3, to wartość wielomianu w mianowniku **dąży do zera** (sprawdź!). Nie możemy więc teraz zastosować twierdzenia 2e. Ponadto, jeśli x dąży do -3, to również wartość wielomianu w liczniku **dąży do zera** (sprawdź!). Rozłóżmy te wielomiany na czynniki:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^3+x^2-9x-9} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x+3)}}(x-1)}{\underset{1}{\cancel{(x+3)}}(x-3)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-3)(x+1)}$$

Skrócenie ułamka przez wyrażenie $(x + 3)$ jest możliwe, bowiem x należy do sąsiedztwa liczby -3, więc x jest różny od -3.

Dalej postępujemy jak w przykładzie 2.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{-4}{-6\cdot(-2)} = \frac{-1}{3}, \quad \text{więc}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x^3+x^2-9x-9} = \frac{-1}{3}$$

Ad b) Podobnie jak w przykładzie a), zarówno licznik jak i mianownik ułamka **dążą do zera**, jeśli x dąży do zera. W tym przypadku przekształcamy ułamek w ten sposób, że mnożymy jego licznik i mianownik przez wyrażenie $\left(\sqrt{3x+4}+2\right)$. To umożliwia nam zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$\frac{\sqrt{3x+4}-2}{6x} = \frac{\left(\sqrt{3x+4}-2\right)\left(\sqrt{3x+4}+2\right)}{6x\left(\sqrt{3x+4}+2\right)} = \frac{\left(\sqrt{3x+4}\right)^2-2^2}{6x\left(\sqrt{3x+4}+2\right)} = \frac{\overset{1}{\cancel{3x}}}{\underset{2}{\cancel{6x}}\left(\sqrt{3x+4}+2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{3x+4}+2\right)} \quad \text{zatem} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+4}-2}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\left(\sqrt{3x+4}+2\right)} = \frac{1}{8}$$

$\sqrt{3x+4} \to 2$

Ćwiczenie 2. Przypomnij sobie twierdzenie o trzech ciągach.

Konsekwencją twierdzenia o trzech ciągach jest twierdzenie o trzech funkcjach.

Twierdzenie 3. *O trzech funkcjach*

Niech funkcje f, g, h będą określone w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$. Jeśli dla dowolnej liczby x z tego sąsiedztwa spełniona jest nierówność $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ oraz istnieją granice funkcji f i h w punkcie x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, to istnieje granica funkcji g w punkcie x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

Przykład 4.

Obliczymy $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$.

Zauważmy najpierw, że jeśli $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$, to

$$-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1 \quad \text{oraz} \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|, \quad \text{stąd} \quad -2|x| \leqslant 2x\cdot\sin\frac{1}{x} \leqslant 2|x|.$$

Wiemy, że $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Zatem $\lim\limits_{x\to 0}(-2|x|) = \lim\limits_{x\to 0}(2|x|) = 0$.

Funkcje $f(x) = -2|x|$, $g(x) = 2x\sin\frac{1}{x}$ i $h(x) = 2|x|$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$, spełniają założenia twierdzenia o trzech funkcjach. Zatem na mocy tego twierdzenia istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ i jest ona równa 0, czyli $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = 0$.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Oblicz granice wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2 - 5x - 6)$ b) $\lim\limits_{x\to -1}(3x+1)^5$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2\sqrt{x} - 1\right)^7$

d) $\lim\limits_{x\to -3}\left[2x(x-1)^3\right]$ e) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{5-2x}$ f) $\lim\limits_{x\to 16}\left(2 - \sqrt{x}\right)^3$

2. Oblicz granice wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{2}{x} - 4x^3\right)$ b) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\frac{\sqrt{8} - 2x}{5x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 - 6x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to -9}\frac{(x+9)\cdot x^2}{x^2 - 81}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x - x^2 - 3}{x^2 + x - 2}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 8}$

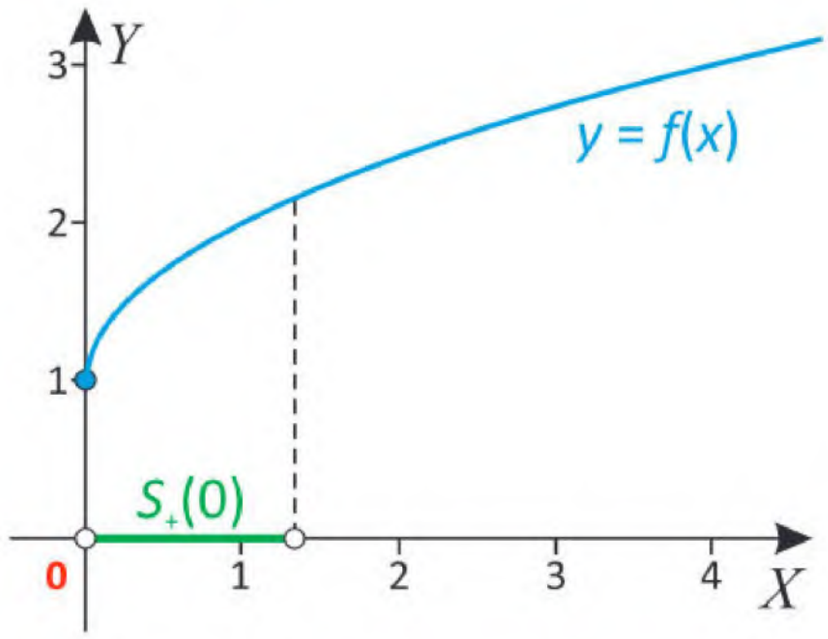
3. Oblicz granice wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$

4. Na podstawie twierdzenia o trzech funkcjach oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{3}\cdot\sin 5x\right)$.

Granice jednostronne funkcji w punkcie

Rozważmy funkcję $f(x)=\sqrt{x}+1$, której wykres znajduje się na rysunku obok. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle 0,+\infty)$. Dla każdej liczby x_0 należącej do przedziału $(0,+\infty)$ istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. W przypadku punktu **0** funkcja f jest określona tylko w **prawostronnym sąsiedztwie $S_+(0)$**.



Wówczas możemy badać granicę funkcji f przy x dążącym do 0 **z prawej strony**, czyli **granicę prawostronną** funkcji f w punkcie 0.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie $S_+(x_0)$. **Granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0** jest liczba g – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=g$ – wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach należących do $S_+(x_0)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g$.

Zapis symboliczny:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=g \quad\Leftrightarrow\quad \bigwedge_{(x_n)}\left[\left(x_n\in S_+(x_0)\wedge \lim_{n\to\infty} x_n=x_0\right)\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=g\right]$$

Wracając do funkcji f z początku tematu, możemy zapisać: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}+1\right)=1$.

Analogicznie definiujemy granicę lewostronną funkcji w punkcie x_0.

Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie $S_-(x_0)$. **Granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0** jest liczba g – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=g$ – wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach należących do $S_-(x_0)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=g$.

Zapis symboliczny:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=g \quad\Leftrightarrow\quad \bigwedge_{(x_n)}\left[\left(x_n\in S_-(x_0)\wedge \lim_{n\to\infty} x_n=x_0\right)\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=g\right]$$

Na stronie 287 wykazaliśmy, że nie istnieje granica funkcji $f(x)=\dfrac{|x|^3+x}{|x|}$ w punkcie 0. Teraz pokażemy, że istnieją różne granice jednostronne funkcji f w punkcie 0. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach należących do $S_+(0)$ i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są dodatnie, więc $|x_n| = x_n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Obliczamy:

$$f(x_n)=\frac{|x_n|^3+x_n}{|x_n|}=\frac{x_n^3+x_n}{x_n}=x_n^2+1,\ \text{więc}\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(x_n^2+1\right)=0^2+1=1$$

Zatem

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1.$$

Niech teraz (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach należących do $S_-(0)$ i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są ujemne, więc $|x_n| = -x_n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$.

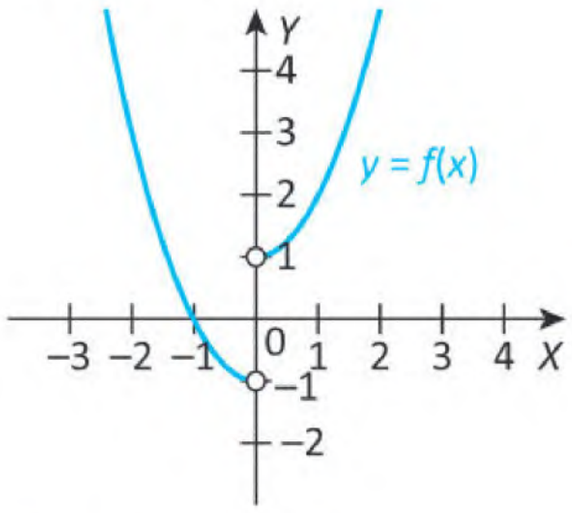
Mamy:

$$f(x_n)=\frac{|x_n|^3+x_n}{|x_n|}=\frac{(-x_n)^3+x_n}{-x_n}=x_n^2-1,\ \text{zatem}\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(x_n^2-1\right)=-1$$

To znaczy, że

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$

Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji f.



Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$.

Granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje i jest równa g wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice: lewostronna i prawostronna tej funkcji w punkcie x_0 i granice te są równe g, czyli

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=g \quad\Leftrightarrow\quad \left[\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=g\right].$$

Przykład 1.

Zbadamy istnienie granicy funkcji f w punkcie x_0, wyznaczając odpowiednie granice jednostronne, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{|x+5|}{x+1}$ i $x_0=-5$ b) $f(x)=\begin{cases}3x-1, & \text{jeśli } x>2\\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{jeśli } x<2\end{cases}$ i $x_0=2$.

Ad a) W lewostronnym sąsiedztwie punktu –5 funkcja f określona jest wzorem

$$f(x)=\frac{-x-5}{x+1},\quad \text{zatem}\qquad \lim_{x\to -5^-} f(x)=\lim_{x\to -5^-}\frac{-x-5}{x+1}=\frac{0}{-4}=0$$

W prawostronnym sąsiedztwie punktu –5 funkcja f określona jest wzorem

$$f(x)=\frac{x+5}{x+1},\quad \text{więc}\qquad \lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5^+}\frac{x+5}{x+1}=\frac{0}{-4}=0$$

Obie granice jednostronne funkcji f w punkcie –5 istnieją i są równe 0. Zatem granica funkcji f w punkcie –5 istnieje i jest równa 0. Zapisujemy $\lim\limits_{x\to -5} f(x)=0$.

Ad b) Badamy istnienie granic jednostronnych funkcji f w punkcie 2.

$$\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}}=x+3,\ \text{zatem}\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+3)=5$$

(1)

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(3x-1)=5$$

Obie granice jednostronne funkcji f w punkcie 2 istnieją i są równe 5. Zatem granica funkcji f w punkcie 2 istnieje i jest równa 5, czyli $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$.

Przykład 2.

Obliczymy granice jednostronne funkcji $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+x^{2n}}{1+x^{2n}}$, gdzie $x\in\langle -1, 1\rangle$,

w punktach –1 i 1. Otrzymane granice porównamy z wartościami funkcji dla argumentów –1 i 1. Na koniec naszkicujemy wykres funkcji f.

Obliczamy wartości funkcji f dla argumentów –1 i 1.

$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+(-1)^{2n}}{1+(-1)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+1}{1+1}=2 \qquad f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+1^{2n}}{1+1^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+1}{1+1}=2$$

Zauważ, że jeśli $x\in(-1, 1)$, to

$x^{2n}\to 0$ o ile $n\to\infty$.

Stąd otrzymujemy, że

$$\text{jeśli } x \in (-1, 1), \text{ to } f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{3+x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{3}{1} = 3$$

Teraz możemy zapisać wzór funkcji f w prostszej postaci

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{jeśli } x \in \{-1, 1\} \\ 3, & \text{jeśli } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Poniżej znajduje się wykres funkcji f.

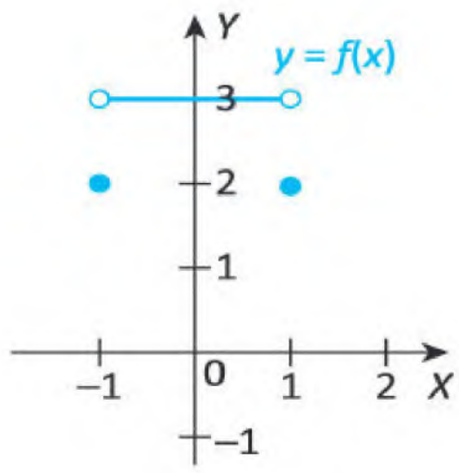
Porównajmy granice jednostronne funkcji f w punktach –1 i 1 z wartościami funkcji f dla argumentów 1 i –1:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$$

$$f(-1) = 2, \qquad f(1) = 2$$

Zatem

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) \neq f(-1) \text{ oraz } \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq f(1)$$



Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz granice lewostronne wiedząc, że istnieją:

a) $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{2-x}$ b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{5x}$ c) $\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-4x-5}{x-5}$.

2. Oblicz granice prawostronne wiedząc, że istnieją:

a) $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}-3\right)$ b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{|x|-2}+1}{3x}$ c) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$.

D 3. Wykaż, że:

a) $\lim_{x\to 1^+} 4^{|x-1|-x} = \lim_{x\to 1^-} 4^{|x-1|-x}$ b) $\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{2-x} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{2-x}$

4. Zbadaj, czy istnieje granica funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-5, \text{ jeśli } x<3 \\ 7-x, \text{ jeśli } x>3 \end{cases}$ $x_0 = 3$ b) $f(x) = \begin{cases} -5, & \text{jeśli } x<-2 \\ 3x-1, & \text{jeśli } x>-2 \end{cases}$ $x_0 = -2$

c) $f(x) = \begin{cases} |x+4|, & \text{jeśli } x<-4 \\ 2x, & \text{jeśli } x>-4 \end{cases}$ $x_0 = -4$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2-x, & \text{jeśli } x<1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{jeśli } x>1 \end{cases}$ $x_0 = 1$

W każdym przypadku naszkicuj wykres funkcji f.

Granica funkcji w nieskończoności

Rozważmy funkcję $f(x)=\frac{2x+5}{x-1}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{1\}$. Niech (x_n) będzie ciągiem o wyrazach różnych od 0 i różnych od 1 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Sprawdzamy, czy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$. Mamy:

$$f\left(x_n\right)=\frac{2x_n+5}{x_n-1}=\frac{2+\frac{5}{x_n}}{1-\frac{1}{x_n}} \text{ zatem } \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) \text{ istnieje i } \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x_n}}{1-\frac{1}{x_n}}=2$$

Powiemy, że funkcja f ma w plus nieskończoności granicę równą 2 i zapisujemy:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=2$$

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(a, +\infty)$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$.

Funkcja f ma w plus nieskończoności $(+\infty)$ **granicę g** – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=g$ – wtedy, gdy dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(a, +\infty)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=g$.

Zapis symboliczny:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n)}\left[\left(x_n\in(a,+\infty)\wedge\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=g\right]$$

Podobnie określamy granicę funkcji w minus nieskończoności.

Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(-\infty, a)$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$.

Funkcja f ma w minus nieskończoności $(-\infty)$ **granicę g** – co zapisujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=g$ – wtedy, gdy dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach należących do przedziału $(-\infty, a)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=g$.

Zapis symboliczny:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n)}\left[\left(x_n\in(-\infty,a)\wedge\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=g\right]$$

Ćwiczenie 1. Korzystając z definicji 2. wykaż, że $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+5}{x-1}=2$.

Prawdziwe są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Jeżeli istnieją granice $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ oraz c jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieją granice: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[c\cdot f(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ – przy dodatkowym założeniu, że $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\neq 0$,

oraz prawdziwe są równości:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[c\cdot f(x)\right]=c\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}$

Twierdzenie 2.

Jeżeli $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=g$, gdzie $g>0$, to $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{g}$.

Analogiczne twierdzenia są dla granicy funkcji w minus nieskończoności.

Przykład 1.

Obliczymy $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-7}{x^4+3x^2+1}$.

Abyśmy mogli skorzystać z twierdzenia 1., dzielimy licznik i mianownik ułamka $\dfrac{6x^3+5x^2-7}{x^4+3x^2+1}$ przez x^4, czyli przez x w najwyższej potędze – w jakiej występuje w **mianowniku**.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3+5x^2-7}{x^4+3x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$$

Ćwiczenie 2. Wykaż, że $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+9}{-5x^3+x^2}=-\dfrac{2}{5}$.

Przykład 2.

Obliczymy $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Przekształcamy mianownik ułamka, korzystając z zależności $\sqrt{x^2}=|x|$.

$$\frac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-7x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{-7x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Ponieważ $x\to-\infty$, więc można przyjąć, że $x<0$, wówczas $|x|=-x$. Obliczamy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-7x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-7+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=7$$

(-7 przy $-7+\frac{1}{x}$, -1 przy $-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$)

Otrzymaliśmy $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}=7$.

Ćwiczenie 3. Wykaż, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-7x+1}{\sqrt{x^2+1}}=-7$.

Przykład 3.

Wykażemy, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

Do dowodu wykorzystamy twierdzenie o trzech funkcjach. Sformułowaliśmy je dla granicy funkcji w punkcie, ale można wykazać, że jest ono prawdziwe również dla granic funkcji w $+\infty$ oraz w $-\infty$.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x różnej od 0 mamy:

$$-1\leqslant\sin|x|\leqslant 1$$

Ponieważ $|x|>0$, więc

$$(*)\quad \frac{-1}{|x|}\leqslant\frac{\sin|x|}{|x|}\leqslant\frac{1}{|x|}$$

Jeśli $x>0$, to $\dfrac{\sin|x|}{|x|}=\dfrac{\sin x}{x}$.

Jeśli $x<0$, to $\dfrac{\sin|x|}{|x|}=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$.

Zatem nierówność (*) możemy zapisać w postaci

$$\frac{-1}{|x|} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{|x|}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, zatem z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż na podstawie definicji, że:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x-1} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x+2}{1+3x} = -1$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x^2-5}{2x^2+x} = 3$

D 2. Wykaż na podstawie definicji, że:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x^3}{x^2+x^3} = 3$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-4x}{1+3x^2} = 0$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5|x|}{x-2} = -5$

3. Oblicz granice wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x+2x^2}{x+x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2-3x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^2-12x^3}{x^2+3x^3}$

4. Oblicz granice wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{x^2+x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x^3+x}{2x-4x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|+1}{3-x}$.

5. Oblicz granice wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-5x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x+3x^2}}{1-x}$.

6. Oblicz granice wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}+3\right)^2$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+6\cdot\frac{x-1}{2x+7}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[2\cdot\left(4-\frac{1}{x^2}\right)\right]$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{x^2}\cdot\frac{x^3}{4x+1}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{5}{x^2}-\frac{6x}{x+3}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{x}{2}\cdot\frac{(2x+1)^2}{x^3-1}\right]$

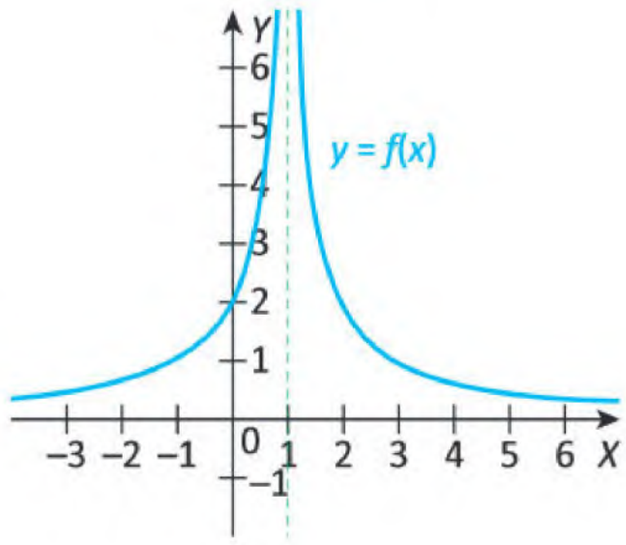
7. Oblicz granice wiedząc, że istnieją:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin 3x}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin 4x}{2x-1}$

Granica niewłaściwa funkcji

Rozważmy funkcję $f(x)=\frac{2}{|x-1|}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{1\}$. Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji f. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach należących do sąsiedztwa punktu 1 i takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Na podstawie twierdzenia 2. ze str. 152 otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{|x_n - 1|} = +\infty$$



Obrazowo możemy powiedzieć, że jeśli argumenty funkcji f zbliżają się do 1, to wartości funkcji f dążą do plus nieskończoności.

Prowadzi nas to do pojęcia granicy niewłaściwej funkcji w punkcie.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w sąsiedztwie $S(x_0)$.

Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą plus nieskończoność $(+\infty)$

– co zapisujemy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ – wtedy, gdy dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach należących do sąsiedztwa $S(x_0)$ i takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, prawdziwa jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.

Zapis symboliczny:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n)} \left[\left(x_n \in S(x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty \right]$$

Wracając do przykładu z początku tematu, możemy zapisać:

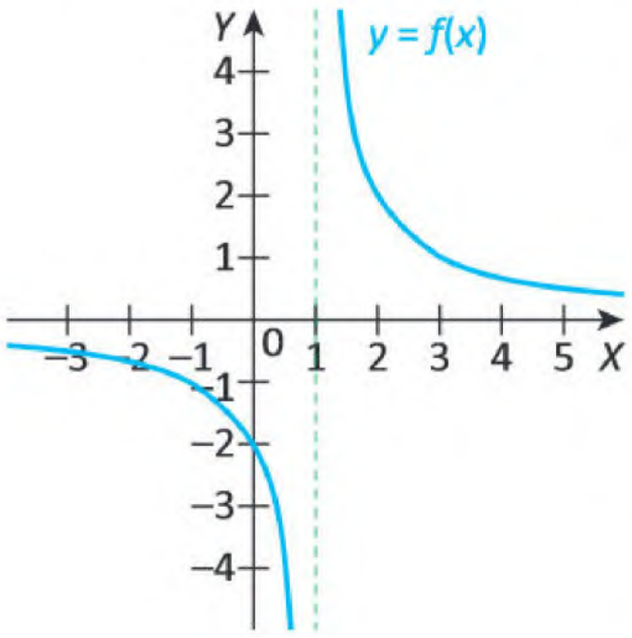
$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$$

Podobnie definiuje się granicę niewłaściwą funkcji w punkcie równą minus nieskończoność $(-\infty)$.

O granicach niewłaściwych możemy mówić również w przypadku granic jednostronnych oraz granicy w plus nieskończoności lub minus nieskończoności.

Przykład 1.

a) Dany jest wykres funkcji $f(x)=\frac{2}{x-1}$, $x \in \boldsymbol{R}-\{1\}$.



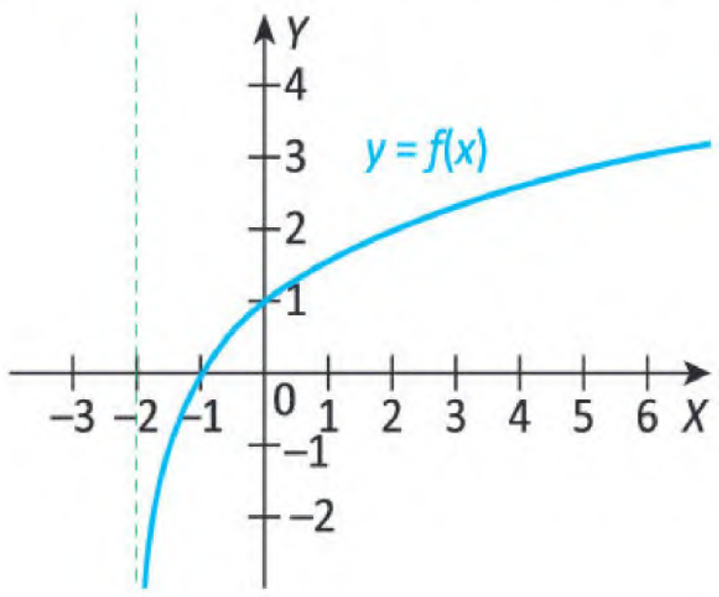
Funkcja f ma w punkcie 1 prawostronną granicę niewłaściwą $+\infty$ i lewostronną granicę niewłaściwą $-\infty$, czyli

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x-1}=+\infty$$

Granice jednostronne są różne. Nie istnieje granica funkcji f w punkcie 1.

b) Dany jest wykres funkcji $f(x) = \log_2(x + 2)$, gdzie $x \in (-2, +\infty)$.



Funkcja f ma w punkcie -2 prawostronną granicę niewłaściwą $-\infty$, czyli

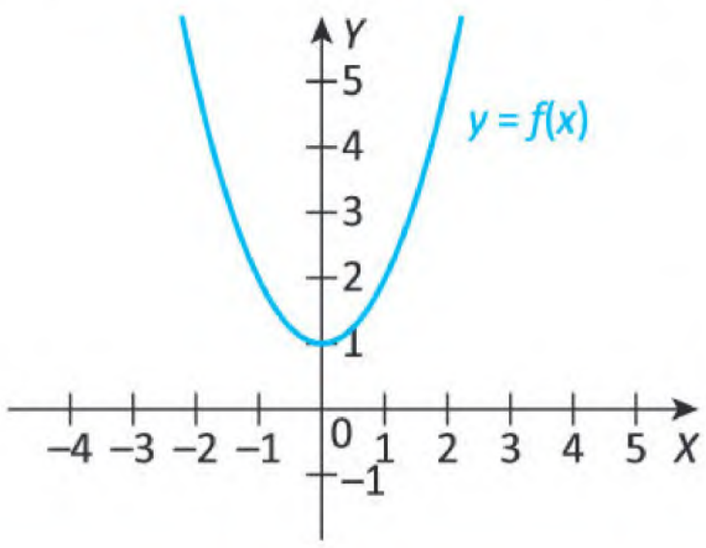
$$\lim_{x\to -2^+}\log_2(x+2)=-\infty$$

Zauważ, że w przypadku funkcji

$f(x) = \log_2(x + 2)$, gdzie $x \in (-2, +\infty)$,

możemy mówić tylko o granicy prawostronnej w punkcie -2, bowiem funkcja f jest określona tylko w prawostronnym sąsiedztwie tego punktu.

c) Dany jest wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 1$.



Funkcja $f(x) = x^2 + 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, ma w plus nieskończoności granicę niewłaściwą plus nieskończoność oraz w minus nieskończoności ma granicę niewłaściwą plus nieskończoność, czyli

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$$

Ćwiczenie 1. Wzorując się na definicji 1., zapisz definicję:

a) granicy niewłaściwej minus nieskończoność funkcji f w punkcie x_0,

b) prawostronnej granicy niewłaściwej plus nieskończoność funkcji f w punkcie x_0.

UWAGA: Granice zdefiniowane w tym temacie nazywa się granicami niewłaściwymi lub nieskończonymi – w przeciwieństwie do omówionych w poprzednich tematach granic właściwych, zwanych też granicami skończonymi.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Niech punkty f i g będą określone w sąsiedztwie punktu x_0 oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$,

gdzie $a\in \boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$. Wówczas:

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=-\infty$

c) jeśli $a>0$, to $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=+\infty$

d) jeśli $a<0$, to $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=-\infty$

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla granic jednostronnych oraz dla granic w plus nieskończoności i w minus nieskończoności.

UWAGA: 1) Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, to granica $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ może być właściwa, niewłaściwa lub może nie istnieć. Podobnie jest w przypadku granicy $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2) Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (lub $-\infty$), to granica $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ może być właściwa, niewłaściwa lub może nie istnieć.

Analogiczna uwaga jest prawdziwa w przypadku granic jednostronnych lub granic w plus nieskończoności i w minus nieskończoności.

Przykład 2.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5-3x^2\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-3x+5}{-x^3+4x^2+7}$

Ad a) Ponieważ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$, więc nie można od razu stwierdzić, czy istnieje i ile jest równa granica $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5-3x^2\right)$. Najpierw wyłączamy przed nawias x^5:

$$x^5-3x^2=x^5\left(1-\frac{3}{x^3}\right)$$

Zauważmy, że czynnik x^5 dąży do $+\infty$, a wyrażenie $\left(1-\frac{3}{x^3}\right)$ dąży do 1. Na mocy twierdzenia 1c otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^5-3x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^5\left(1-\frac{3}{x^3}\right)\right]=+\infty$$

Ad b) Dzielimy licznik i mianownik ułamka $\frac{x^4-3x+5}{-x^3+4x^2+7}$ przez x^3. Otrzymane wyrażenia zapisujemy w postaci iloczynu:

$$\frac{x^4-3x+5}{-x^3+4x^2+7}=\frac{x-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{-1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^3}}=\left(x-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)\cdot\frac{1}{-1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^3}}$$

$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)=-\infty$ oraz $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-1+\frac{4}{x}+\frac{7}{x^3}}=-1$, więc

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-3x+5}{-x^3+4x^2+7}=+\infty$ Zastosowaliśmy twierdzenie 1d.

Ćwiczenie 2. Oblicz granice: a) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^5-3x^2\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-3x+5}{-x^3+4x^2+7}$

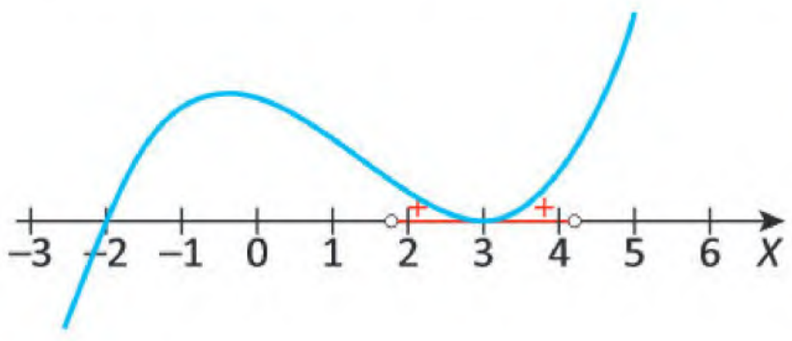
Przykład 3.

Obliczymy $\lim_{x\to3}\frac{2x-7}{(x-3)^2(x+2)}$.

Zauważ, że jeśli x dąży do 3, to licznik ułamka dąży do -1, jest więc ujemny. Mianownik ułamka dąży do 0. Szkicujemy przybliżony wykres funkcji $y = W(x)$, gdzie

$W(x) = (x-3)^2(x+2)$ $W(x)$ jest wielomianem z mianownika ułamka.

Dla zwiększenia czytelności rysunku pomijamy oś OY.



Ze szkicu odczytujemy, że w sąsiedztwie punktu 3 wartości wielomianu są dodatnie. Zatem jeśli x dąży do 3, to wartości wyrażenia $(x-3)^2(x+2)$ dążą do 0 poprzez wartości dodatnie, co zapisujemy:

$$(x-3)^2(x+2)\to 0^+$$

Stąd

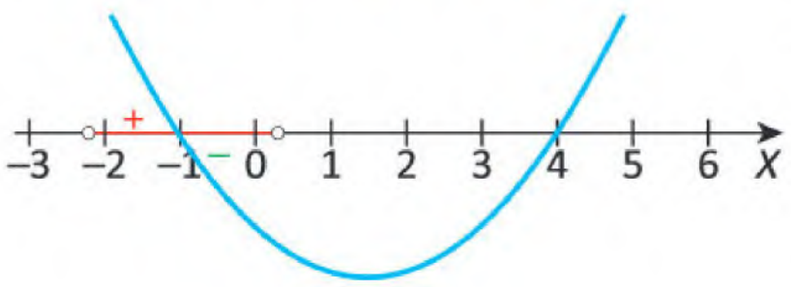
$$\frac{1}{(x-3)^2(x+2)} \to +\infty, \quad \text{więc}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-7}{(x-3)^2(x+2)} = \lim_{x\to 3}\left[\overset{-1}{(2x-7)}\cdot\overset{+\infty}{\frac{1}{(x-3)^2(x+2)}}\right] = -\infty$$

Przykład 4.

Obliczymy granice jednostronne: $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4}$ oraz $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4}$.

Rozważmy najpierw granicę lewostronną. Jeśli x dąży do -1 z lewej strony, to licznik ułamka $\frac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4}$ dąży do 2, a mianownik dąży do 0. Szkicujemy wykres funkcji kwadratowej $y = x^2 - 3x - 4$.



Ze szkicu odczytujemy, że

jeśli $x \to -1^-$, to $(x^2 - 3x - 4) \to 0^+$, więc

$$\frac{1}{x^2-3x-4} \to +\infty$$

Zatem

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to -1^-}\left[\overset{2}{(5x^2+2x-1)}\cdot\overset{+\infty}{\frac{1}{x^2-3x-4}}\right] = +\infty$$ Twierdzenie 1c)

Podobnie możemy stwierdzić, że jeśli $x \to -1^+$, to $(x^2 - 3x - 4) \to 0^-$, więc

$$\frac{1}{x^2-3x-4} \to -\infty$$

Mamy:

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to -1^+}\left[\overset{2}{(5x^2+2x-1)}\cdot\overset{-\infty}{\frac{1}{x^2-3x-4}}\right] = -\infty$$ Twierdzenie 1d)

Granice jednostronne funkcji $y = \frac{5x^2+2x-1}{x^2-3x-4}$ w punkcie -1 są różne. To znaczy, że nie istnieje granica tej funkcji w punkcie -1.

Ćwiczenie 3. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-7}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3}{2x}$ d) $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{2x}{x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{2x}{(x+1)^2}$

Przykład 5.

Wyznaczymy granicę $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sin x\right)$.

Wyłączamy x poza nawias:

$$x+\sin x = x\cdot\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)$$

Korzystamy z przykładu 3. ze str. 299 i z twierdzenia 1c). Otrzymujemy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sin x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\overset{+\infty}{x}\cdot\left(\overset{1}{1+\frac{\sin x}{x}}\right)\right]=+\infty$$

Ćwiczenie 4. Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sin x\right)$.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Oblicz granice. Która z tych granic jest właściwa?

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x}{(x-2)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to3}\frac{-4}{|x-3|}$

d) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x+3}$ e) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x+5}{(x+5)^3}$ f) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)^2}$

2. Oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{2}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-3}{\sqrt{x-2}}$

d) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x+1}{x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x^3+1}{x^2+2x}$ f) $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{x+3}{\sqrt{x+3}}$

3. Oblicz granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x)=\frac{1-3x}{x-2}$, $x_0=2$ b) $f(x)=\frac{-4x+4}{(x-1)^3}$, $x_0=1$

Czy istnieje granica niewłaściwa funkcji f w punkcie x_0?

4. Oblicz:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+100x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2-x^3\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x\right)^3$

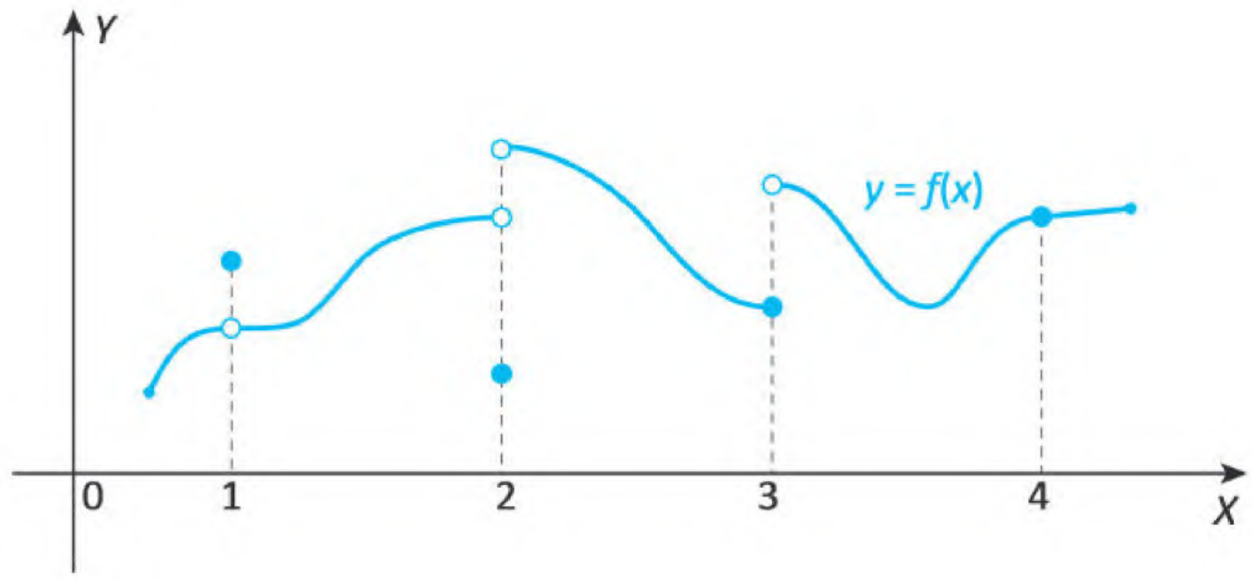
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1000}{x^3}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(9-x^2\right)x}{2-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-x^5+2x^7\right)$

5. Oblicz dane granice. Która z tych granic jest właściwa?

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

Ciągłość funkcji w punkcie

Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji f. Wyróżniono na nim cztery punkty.



Zauważmy, że w punktach 1, 2, 3, 4 funkcja f jest określona oraz:

a) w punkcie 1 granica funkcji f istnieje i jest różna od wartości funkcji w tym punkcie, czyli

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) \qquad \text{oraz}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$$

b) w punkcie 2 granice jednostronne funkcji f są różne (nie istnieje granica funkcji f w punkcie 2) i są różne od wartości funkcji f w tym punkcie, czyli

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \qquad \text{oraz}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq f(2)$$

c) w punkcie 3 granice jednostronne funkcji f są różne, a wartość funkcji w tym punkcie jest równa granicy lewostronnej, czyli

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) \qquad \text{oraz}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$$

d) w punkcie 4 granica funkcji f istnieje (granice jednostronne w tym punkcie są równe) i jest ona równa wartości funkcji w tym punkcie, czyli

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4} f(x) \qquad \text{oraz}$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$$

W przypadku d) powiemy, że funkcja f jest ciągła w punkcie 4. Natomiast w punktach 1, 2, 3 funkcja f nie jest ciągła.

Do badania ciągłości funkcji w punkcie x_0 nie wystarcza fakt, że funkcja jest określona w sąsiedztwie $S(x_0)$. Funkcja ma być też określona w samym punkcie x_0, czyli ma być określona w zbiorze $S(x_0) \cup \{x_0\}$. Zbiór $S(x_0) \cup \{x_0\}$ nazywamy **otoczeniem punktu x_0** i oznaczamy $U(x_0)$.
Analogicznie zbiór $S_-(x_0) \cup \{x_0\}$ nazywamy **otoczeniem lewostronnym punktu x_0** i oznaczamy $U_-(x_0)$, a zbiór $S_+(x_0) \cup \{x_0\}$ nazywamy **otoczeniem prawostronnym punktu x_0** i oznaczamy $U_+(x_0)$.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$.
Funkcja f jest **ciągła w punkcie** x_0 wtedy, gdy:

1) istnieje właściwa granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ oraz

2) prawdziwa jest równość $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Punkt x_0 należący do dziedziny funkcji f, w którym funkcja nie jest ciągła, nazywamy **punktem nieciągłości** funkcji f.

Przykład 1.

Zbadamy, czy funkcja $f(x) = \begin{cases} 4x-7, & \text{jeśli } x < 4 \\ \dfrac{2x+1}{x-3}, & \text{jeśli } x \geqslant 4 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie 4.

Funkcja f jest określona w punkcie 4. Sprawdzamy najpierw, czy istnieje granica funkcji f w punkcie 4.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (4x-7) = 9 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{2x+1}{x-3} = 9$$

Ponieważ

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 9,$$

więc istnieje granica funkcji f w punkcie 4 i jest ona równa 9.
Obliczamy $f(4)$. Mamy:

$$f(4) = \frac{2 \cdot 4 + 1}{4 - 3} = 9$$

Otrzymaliśmy: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$. Zatem funkcja f jest ciągła w punkcie 4.

Przykład 2.

Pokażemy, że funkcja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{|x|}-1}, & \text{jeśli } x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\} \\ 2, & \text{jeśli } x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

a) jest ciągła w punkcie 1

b) nie jest ciągła w punkcie –1.

Ad a) $D_f = \boldsymbol{R}$, więc istnieje takie otoczenie $U(1)$, że dla każdego $x \in U(1)$ jest $x > 0$; wówczas $|x| = x$. Jeśli x dąży do 1, to licznik i mianownik ułamka $\frac{x-1}{\sqrt{|x|}-1}$ dąży do 0. Mamy:

$$\frac{x-1}{\sqrt{|x|}-1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}^{1}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}_{1}}=\sqrt{x}+1 \quad \text{stąd} \quad \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)=2$$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ i $f(1) = 2$, więc funkcja f jest ciągła w punkcie 1.

Ad b) Badamy ciągłość funkcji f w punkcie -1. Jeśli x dąży do -1, to licznik ułamka $\frac{x-1}{\sqrt{|x|}-1}$ dąży do -2, a mianownik dąży do 0. Obliczamy granicę prawostronną funkcji f w punkcie -1.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{\overbrace{x-1}^{-2}}{\underbrace{\sqrt{|x|}-1}_{0^-}}=\lim_{x\to -1^+}\left[\overbrace{(x-1)}^{-2}\cdot\frac{1}{\underbrace{\sqrt{|x|}-1}_{-\infty}}\right]=+\infty$$

Bez wyznaczania granicy lewostronnej funkcji f w punkcie -1 już wiemy, że nie istnieje właściwa granica funkcji f w punkcie -1. Zatem -1 jest punktem nieciągłości funkcji f.

Funkcja f nie jest ciągła w punkcie -1.

Ćwiczenie 1. Naszkicuj wykres funkcji $y=\sqrt{|x|}-1$ i zobacz, jak zmieniają się wartości tej funkcji w sąsiedztwie punktu 1 oraz w sąsiedztwie punktu -1.

Przykład 3.

Zbadamy, czy istnieje taka wartość parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, dla której funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w punkcie -2, gdzie

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-4}, & \text{jeśli } x<-2\\[2ex] \dfrac{1+a}{-a}, & \text{jeśli } x=-2\\[2ex] \dfrac{ax+5a}{x^2+12}, & \text{jeśli } x>-2\end{cases}$$

Najpierw sprawdzimy, dla jakich wartości a istnieje granica funkcji f w punkcie -2.

W tym celu obliczamy granice jednostronne.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+7x+10}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)(x+5)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2^-}\frac{x+5}{x-2}=\frac{-3}{4}$$

($x^2+7x+10\to 0$, $x^2-4\to 0$)

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{ax+5a}{x^2+12}=\frac{3a}{16}$$

Granica funkcji f w punkcie -2 istnieje tylko wtedy, gdy $\frac{3a}{16}=\frac{-3}{4}$, stąd $a=-4$.

Wówczas $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\frac{-3}{4}$. Obliczamy, jaką wartość przyjmuje funkcja f dla wyznaczonej liczby a: $f(-2)=\frac{1+(-4)}{-(-4)}=\frac{-3}{4}=\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

Wartość funkcji f dla argumentu -2 jest równa granicy funkcji f w punkcie -2. To znaczy, że funkcja f jest ciągła w punkcie -2.

Funkcja f jest ciągła w punkcie -2 tylko wtedy, gdy $a=-4$.

Wróćmy jeszcze do funkcji f z początku tego tematu (s. 307). Granica lewostronna funkcji f w punkcie 3 jest równa wartości tej funkcji w punkcie 3, czyli

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$$

W takim przypadku powiemy, że funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie 3 i nie jest prawostronnie ciągła w tym punkcie. Możemy przyjąć następującą definicję.

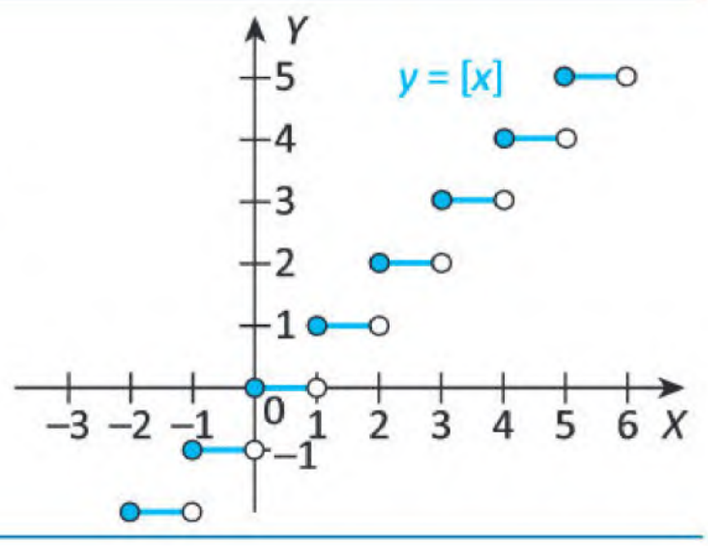
Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w lewostronnym (odpowiednio prawostronnym) otoczeniu punktu x_0.

Funkcja f jest lewostronnie (odpowiednio prawostronnie) **ciągła w punkcie x_0** wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ (odpowiednio $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$) oraz prawdziwa jest równość $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ (odpowiednio $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$).

Przykład 4.

Rysunek obok przedstawia funkcję $y=[x]$, gdzie symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Ta funkcja jest prawostronnie ciągła w każdym punkcie będącym liczbą całkowitą. W każdym innym punkcie funkcja ta jest ciągła.



Twierdzenie 1.

Funkcje: wielomianowe, wymierne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne są ciągłe w każdym punkcie, w którym są określone.

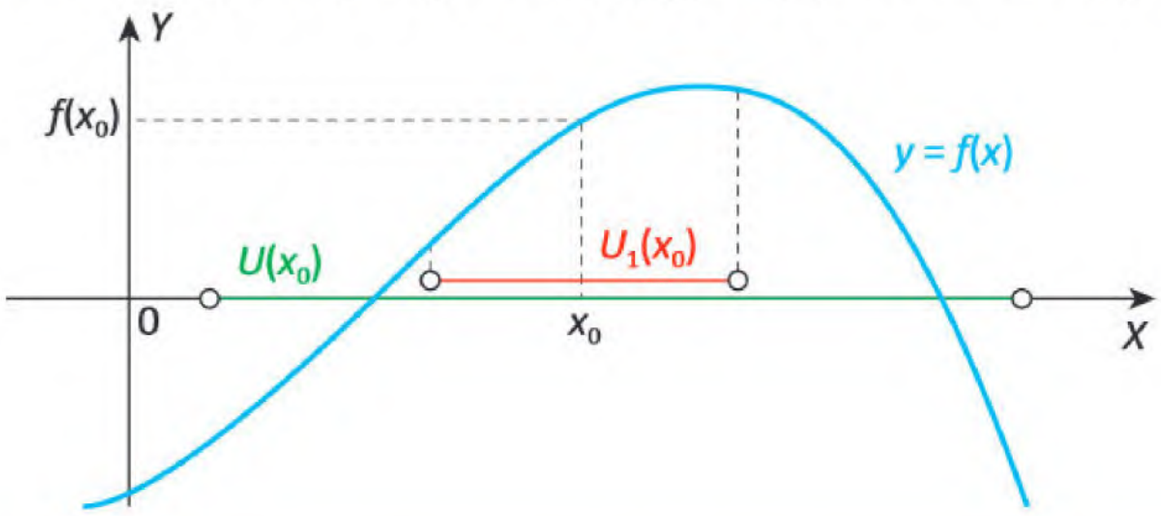
Twierdzenie 2.

Jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to w tym punkcie ciągłe też są funkcje $f+g, f-g, f\cdot g$, oraz $\frac{f}{g}$ – przy dodatkowym założeniu, że $g(x_0)\neq 0$.

Twierdzenie 3. *O lokalnym zachowaniu znaku*

Jeżeli funkcja f określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0 jest ciągła w punkcie x_0 oraz $f(x_0) > 0$ (odpowiednio $f(x_0) < 0$), to istnieje takie otoczenie $U_1(x_0)$ punktu x_0, że $U_1(x_0) \subset U(x_0)$ oraz $f(x) > 0$ (odpowiednio $f(x) < 0$) dla każdej liczby $x \in U_1(x_0)$.

Ilustrację tego twierdzenia, dla przypadku $f(x_0) > 0$, przedstawia poniższy rysunek.



Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Dany jest wzór funkcji f. Wykaż, że funkcja f jest ciągła w punkcie 3.

a) $f(x)=\begin{cases}-x+4, \text{ jeśli } x<3\\ 1, \text{ jeśli } x=3\\ x^2-8, \text{ jeśli } x>3\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3}, \text{ jeśli } x\neq 3\\ 6, \text{ jeśli } x=3\end{cases}$.

D 2. Wykaż, że funkcja:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & \text{jeśli } x\neq 0\\ 1, & \text{jeśli } x=0\end{cases}$ nie jest ciągła w punkcie 0

b) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2+x}, & \text{jeśli } x\leqslant -2\\ \frac{x^2-4}{x+2}, & \text{jeśli } x>-2\end{cases}$ nie jest ciągła w punkcie –2.

3. Zbadaj, czy funkcja f jest ciągła w punkcie 1, jeśli:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-x^2}{x-1}, \text{ jeśli } x\neq 1\\ 2, \quad \text{jeśli } x=1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{|x-1|}, & \text{jeśli } x<1\\ x^2, & \text{jeśli } x\geqslant 1\end{cases}$.

Ciągłość funkcji w zbiorze

Niech funkcja $f(x) = 2x^3 + 3x$ będzie określona w przedziale $(-2, 3)$. Łatwo wykazać, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie należącym do przedziału $(-2, 3)$. Powiemy wówczas, że funkcja f jest ciągła w przedziale $(-2, 3)$.

Definicja 1.

Funkcja jest **ciągła w przedziale otwartym** (a, b) wtedy, gdy jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Rozważmy funkcję

$$g(x) = x^2 + 3x, \text{ gdzie } x \in \langle -2, 3\rangle$$

Funkcja f jest ciągła w przedziale otwartym $(-2, 3)$. Nie możemy mówić o ciągłości funkcji g w punktach -2 i 3, bowiem funkcja g nie jest określona w otoczeniu tych punktów. Możemy natomiast mówić o ciągłości jednostronnej w tych punktach: prawostronnej w punkcie -2 i lewostronnej w punkcie 3.

Definicja 2.

Funkcja jest **ciągła w przedziale domkniętym** $\langle a, b\rangle$ wtedy, gdy jest ciągła w przedziale (a, b) oraz jest prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągła w punkcie b.

Podobnie określamy ciągłość w innych przedziałach. Powiemy, że funkcja jest ciągła w zbiorze będącym sumą kilku przedziałów liczbowych, jeśli jest ciągła w każdym z tych przedziałów. Na przykład funkcja $f(x)=\frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, wobec tego jest ciągła w zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Twierdzenie 1.

Funkcje: wielomianowe, wymierne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne są ciągłe w swych dziedzinach.

Oczywiście funkcje wskazane w twierdzeniu 1. są również ciągłe w przedziałach będących podzbiorami ich dziedzin.

Funkcję, która jest ciągła w całej dziedzinie, nazywamy krótko **funkcją ciągłą**.

Przykład 1.

Wykażemy, że funkcja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+4}{x-3}, & \text{jeśli } x\in(-\infty,1)\\ -4x+1, & \text{jeśli } x\in\langle 1,4)\\ -x^2+1, & \text{jeśli } x\in\langle 4,+\infty)\end{cases}$ jest ciągła.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Funkcja f jest ciągła w przedziałach otwartych:
$(-\infty, 1)$, $(1, 4)$, $(4, +\infty)$ Uzasadnij to!

Wystarczy wykazać, że funkcja ta jest ciągła w punktach 1 i 4.

Wyznaczmy granice jednostronne funkcji f w punkcie 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+4}{x-3}=-3 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-4x+1)=-3$$

Zatem istnieje granica $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ i jest ona równa –3. Obliczamy wartość funkcji f dla argumentu 1:

$f(1) = -3$

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja f jest ciągła w punkcie 1.

Teraz zbadamy, czy funkcja f jest ciągła w punkcie 4. Obliczamy:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(-4x+1)=-15$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(-x^2+1)=-15, \qquad \text{stąd} \quad \lim_{x\to 4} f(x)=-15$$

$f(4) = -4^2 + 1 = -15.$

Ponieważ $f(4)=\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-15$, więc funkcja f jest ciągła w punkcie 4.

Tak więc funkcja f jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przykład 2.

Przedsiębiorca sprzedaje pewien towar. Jeśli nabywca kupi do 20 kg tego towaru, to płaci on stałą cenę 10 złotych za każdy kilogram. Jeśli natomiast zakup przekracza 20 kg, to wartość zakupu x kg wyraża się wzorem $\sqrt{ax^2+14\,400}$. Wartość $w(x)$ zakupionych x kg towaru – w złotych – opisuje zatem funkcja

$$w(x)=\begin{cases}10x, & \text{jeśli } 0<x\leqslant 20\\ \sqrt{ax^2+14\,400}, & \text{jeśli } x>20\end{cases}$$

a) Wyznaczymy a tak, aby wartość zakupionego towaru zmieniała się w sposób ciągły.

b) Zapiszemy wzór funkcji $y = c(x)$ – opisującej cenę jednego kilograma przy zakupie x kg towaru.

c) Przy zakupach większych niż 20 kg, cena kilograma towaru maleje wraz ze wzrostem liczby zakupionych kilogramów. Poniżej jakiej wartości nie spadnie cena jednego kilograma towaru – niezależnie od liczby zakupionych kilogramów?

Ad a) Wyznaczymy a tak, aby funkcja $y = w(x)$ była ciągła w punkcie 20. Mamy

$$\lim_{x\to 20^-} w(x) = \lim_{x\to 20^-} 10x = 200;\ w(20) = 200$$

$$\lim_{x\to 20^+} w(x) = \lim_{x\to 20^+} \sqrt{ax^2 + 14\,400} = \sqrt{400a + 14\,400}, \quad \text{stąd}$$

$$200 = \sqrt{400a + 14\,400}$$

Obie strony równania są dodatnie, podnosimy je do kwadratu.

$40\,000 = 400a + 14\,400$, więc $a = 64$

Jeśli $a = 64$, to funkcja w jest ciągła w punkcie 20; oczywiście jest też ciągła w przedziałach $(0, 20)$ i $(20, +\infty)$, zatem jest ciągła w całej dziedzinie.

Ad b) Aby wyznaczyć cenę 1 kg towaru przy zakupie x kg, wystarczy wartość zakupionego towaru podzielić przez liczbę kilogramów, zatem $c(x) = \dfrac{w(x)}{x}$, czyli

$$c(x) = \begin{cases} 10, & \text{jeśli } 0 < x \leqslant 20 \\ \dfrac{\sqrt{64x^2 + 14\,400}}{x}, & \text{jeśli } x > 20 \end{cases}$$

Ad c) Aby obliczyć wartość, poniżej której nie spadnie cena 1 kg towaru, wyznaczamy granicę

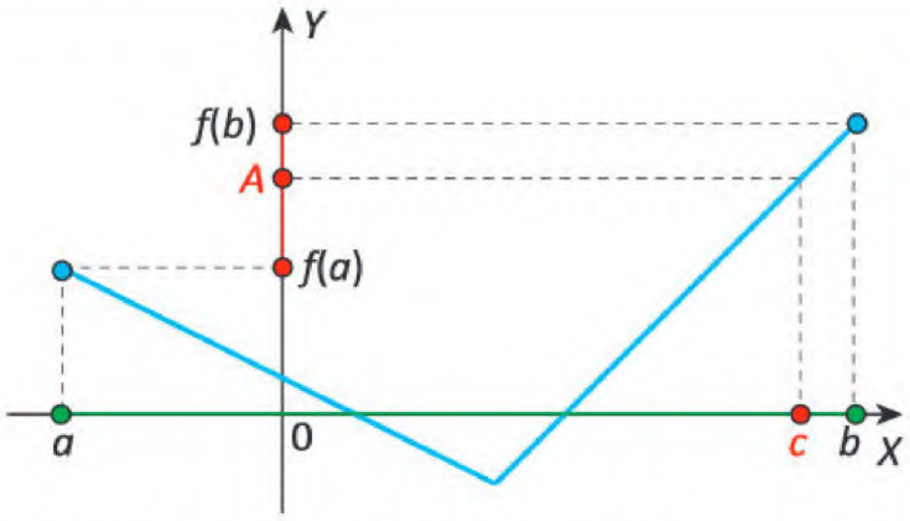
$$\lim_{x\to+\infty} c(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{64x^2 + 14\,400}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{64 + \frac{14\,400}{x^2}} = \sqrt{64} = 8$$

Cena 1 kg towaru nie spadnie poniżej 8 złotych.

W drugiej części tematu omówimy dwie ważne własności funkcji ciągłych.

Twierdzenie 2. *Darboux*

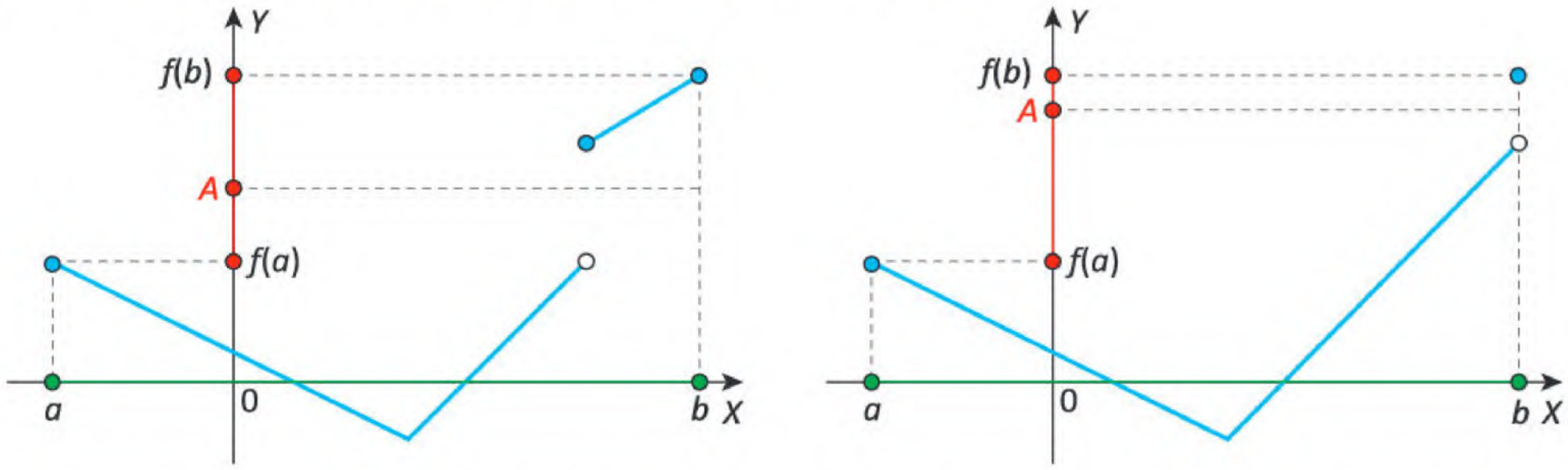
Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ oraz $f(a) \neq f(b)$, natomiast A jest dowolną liczbą pomiędzy liczbami $f(a)$ oraz $f(b)$, to istnieje taka liczba c, $c \in (a, b)$, dla której $f(c) = A$.





Jean Gaston Darboux [wym. żã gastą darbu] był matematykiem francuskim żyjącym w latach 1842 – 1917. Zajmował się geometrią różniczkową, analizą matematyczną i mechaniką teoretyczną.

Zauważmy, że założenie o ciągłości funkcji f w całym przedziale $\langle a, b\rangle$ jest koniecznym warunkiem, aby twierdzenie 2. było prawdziwe.



Na rysunku a) widzimy, że brak ciągłości tylko w jednym punkcie należącym do przedziału (a, b) może spowodować, że teza twierdzenia 2. nie będzie spełniona. Natomiast rysunek b) pokazuje, że istotna jest również jednostronna ciągłość na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$.

Z twierdzenia 2. wynika wniosek, który można wykorzystać do przybliżonego rozwiązywania równań.

Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje taka liczba c, $c \in (a, b)$, dla której $f(c) = 0$.

Przykład 3.

Wykażemy, że równanie $\log x = 3 - 2x$ ma rozwiązanie należące do przedziału $\langle 1, 2\rangle$. Wyznaczymy to rozwiązanie z przybliżeniem, którego błąd nie przekracza 0,05.

Rozważmy funkcję $f(x) = \log x + 2x - 3$, gdzie $x \in \langle 1, 2\rangle$. Funkcja f jest funkcją ciągłą – jako suma funkcji ciągłych – w przedziale $\langle 1, 2\rangle$. Zauważamy, że

$$f(1) = -1; \quad -1 < 0 \qquad \text{oraz} \qquad f(2) = \log 2 + 1 \approx 1{,}3; \quad 1{,}3 > 0$$

Z twierdzenia Darboux wynika, że w przedziale $\langle 1, 2\rangle$ funkcja f przyjmuje dowolną wartość większą od -1 i jednocześnie mniejszą od $\log 2 + 1$. W szczególności przyjmuje wartość 0. A to znaczy, że równanie $\log x = 3 - 2x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie, należące do przedziału $\langle 1, 2\rangle$.

Wyznaczymy przybliżone rozwiązanie równania, korzystając z kalkulatora.
Postępujemy według następującego schematu.

- Wyznaczamy wartość funkcji f w punkcie dzielącym przedział $\langle 1, 2\rangle$ na połowy.

  $$f(1{,}5) \approx 0{,}176 \qquad f(1) \cdot f(1{,}5) < 0$$

  Funkcja f spełnia w przedziale $\langle 1; 1{,}5\rangle$ założenia ostatniego wniosku, zatem ma w tym przedziale co najmniej jedno miejsce zerowe.

- Wyznaczamy wartość funkcji f w punkcie dzielącym przedział $\langle 1; 1{,}5\rangle$ na połowy.

  $$f(1{,}25) \approx -0{,}403 \qquad f(1{,}25) \cdot f(1{,}5) < 0$$

Funkcja f spełnia w przedziale $\langle 1{,}25;\ 1{,}5\rangle$ założenia ostatniego wniosku, więc ma w tym przedziale miejsce zerowe.

- Dalej postępujemy analogicznie: wyznaczamy wartość funkcji f w punkcie dzielącym przedział $\langle 1{,}25;\ 1{,}5\rangle$ na połowy.

$$f(1{,}375) \approx -0{,}112 \qquad f(1{,}375) \cdot f(1{,}5) < 0$$

Funkcja f spełnia w przedziale $\langle 1{,}375;\ 1{,}5\rangle$ założenia ostatniego wniosku, tak więc ma w tym przedziale miejsce zerowe.

- Kontynuujemy wcześniejszą procedurę: wyznaczamy wartość funkcji f w punkcie dzielącym przedział $\langle 1{,}375;\ 1{,}5\rangle$ na połowy.

$$f(1{,}4375) \approx 0{,}033 \qquad f(1{,}375) \cdot f(1{,}4375) < 0$$

Funkcja f spełnia w przedziale $\langle 1{,}375;\ 1{,}4375\rangle$ założenia ostatniego wniosku, tak więc ma w tym przedziale miejsce zerowe.

Zauważmy, że długość przedziału $\langle 1{,}375;\ 1{,}4375\rangle$ jest równa 0,0625. Zatem za przybliżone miejsce zerowe funkcji f możemy przyjąć środek tego przedziału, czyli liczbę 1,40625. Wówczas błąd bezwzględny tego przybliżenia jest mniejszy od liczby $\frac{1}{2}\cdot 0{,}0625$, czyli mniejszy od 0,03125.

Przybliżonym rozwiązaniem równania $\log x = 3 - 2x$ jest liczba 1,41 - przy czym błąd bezwzględny przybliżenia nie przekracza 0,05.

UWAGA: Na podstawie wniosku z twierdzenia Darboux możemy wyznaczyć przybliżone rozwiązanie równania z dowolną dokładnością. Nie możemy natomiast określić liczby rozwiązań równania.

Ćwiczenie 1. Wykaż, że równanie $x-2+\sin x=0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie należące do przedziału $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Z twierdzenia Darboux wynika również kolejny wniosek.

Każde równanie wielomianowe stopnia nieparzystego ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Szkic dowodu: Dowolne równanie wielomianowe stopnia n można zapisać w postaci:

(*) $\quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$

gdzie $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi, $n \in \boldsymbol{N}_+$, n – liczba nieparzysta.

Oznaczmy $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Zauważ, że

$$\lim_{x\to-\infty} W(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\overset{-\infty}{x^n}\left(\overset{1}{1+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}}\right)\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} W(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\overset{+\infty}{x^n}\left(\overset{1}{1+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}}\right)\right] = +\infty$$

Zatem istnieją takie liczby a i b, dla których $W(a) < 0$ i $W(b) > 0$, czyli funkcja $y = W(x)$ spełnia w przedziale $\langle a, b\rangle$ założenia pierwszego wniosku z twierdzenia Darboux, str. 314. Tak więc istnieje liczba c, $c \in (a, b)$, dla której $W(c) = 0$, a to znaczy, że równanie (*) ma co najmniej jedno rozwiązanie.

W klasie pierwszej poznaliśmy pojęcie największej i najmniejszej wartości funkcji. Przypomnijmy:

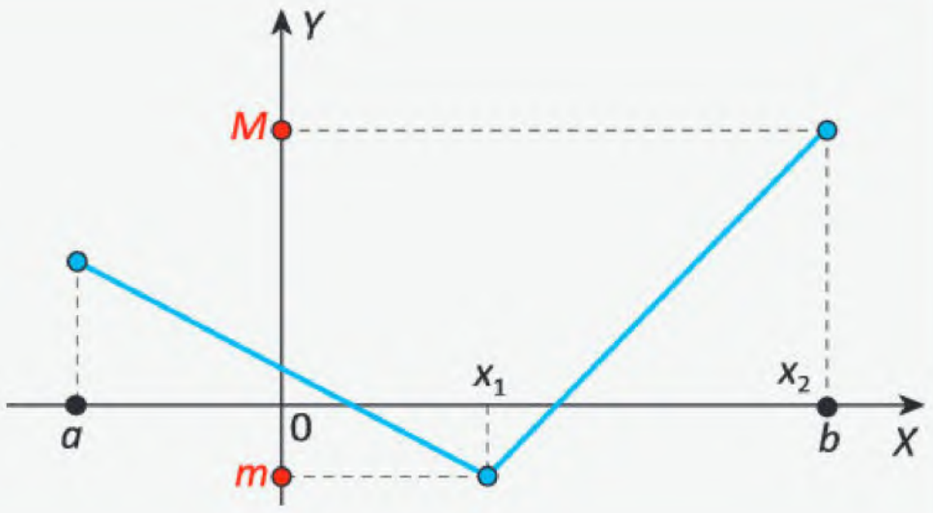
Największą wartością funkcji liczbowej nazywamy największą z liczb należących do zbioru wartości funkcji, o ile w zbiorze wartości taka liczba istnieje.

Najmniejszą wartością funkcji liczbowej nazywamy najmniejszą z liczb należących do zbioru wartości funkcji, o ile w zbiorze wartości taka liczba istnieje.

Kolejne twierdzenie dotyczy przyjmowania wartości największej i najmniejszej przez funkcję ciągłą, określoną w przedziale domkniętym.

Twierdzenie 3. Weierstrassa

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, to przyjmuje w tym przedziale wartość największą M i najmniejszą m, to znaczy istnieją takie liczby x_1, x_2 należące do przedziału $\langle a, b\rangle$, dla których $f(x_1) = m$ i $f(x_2) = M$.





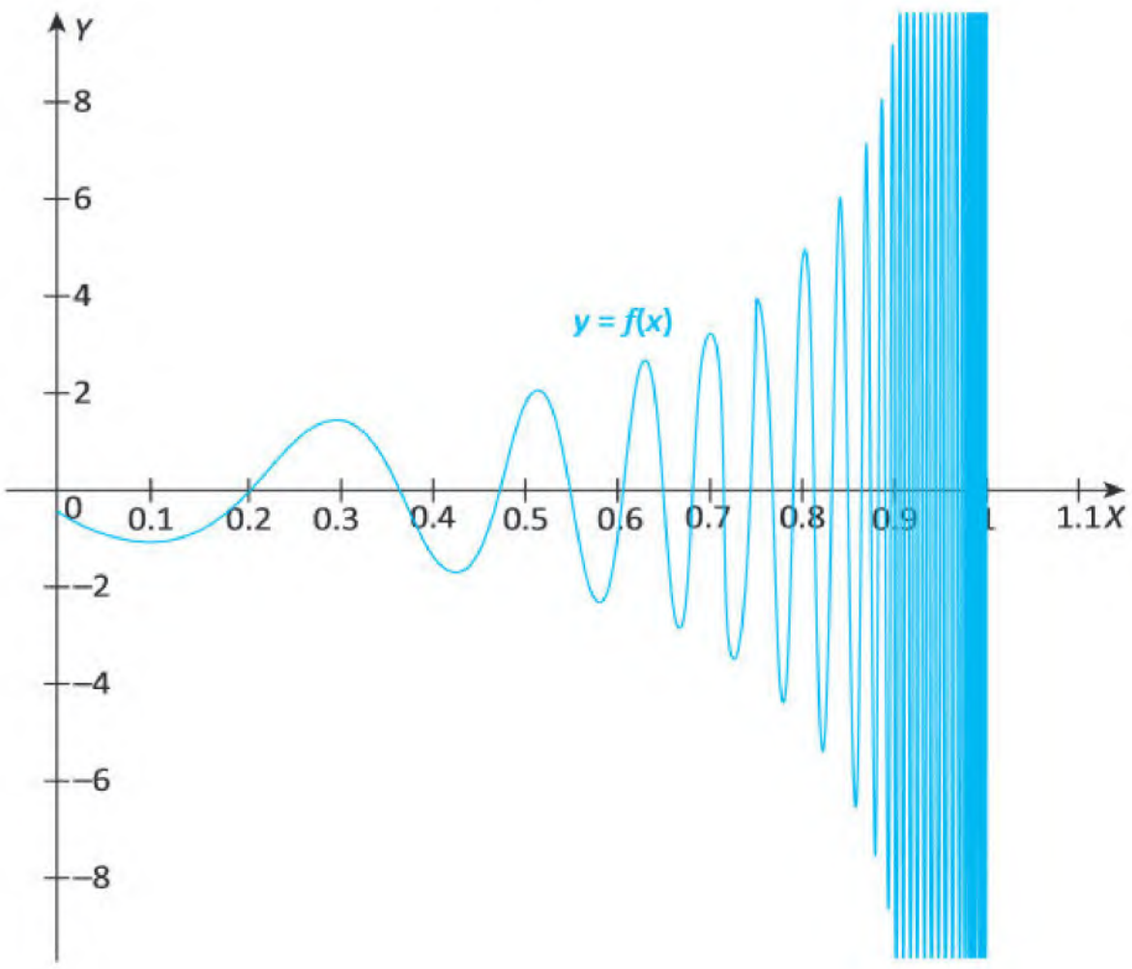
Karl Weierstrass [wym. wajersztras] był niemieckim matematykiem, żyjącym w latach 1815 – 1897. Zajmował się analizą matematyczną, algebrą liniową, geometrią różniczkową.

UWAGA: W twierdzeniu 3. nie można zmienić przedziału domkniętego na żaden inny przedział. Nawet dla przedziału jednostronnie otwartego teza tego twierdzenia może nie być spełniona.

Rozważmy bowiem funkcję

$$f(x)=\frac{\sin\left(\frac{10}{x-1}\right)}{x-1}, \text{ gdzie } x \in \langle 0, 1)$$

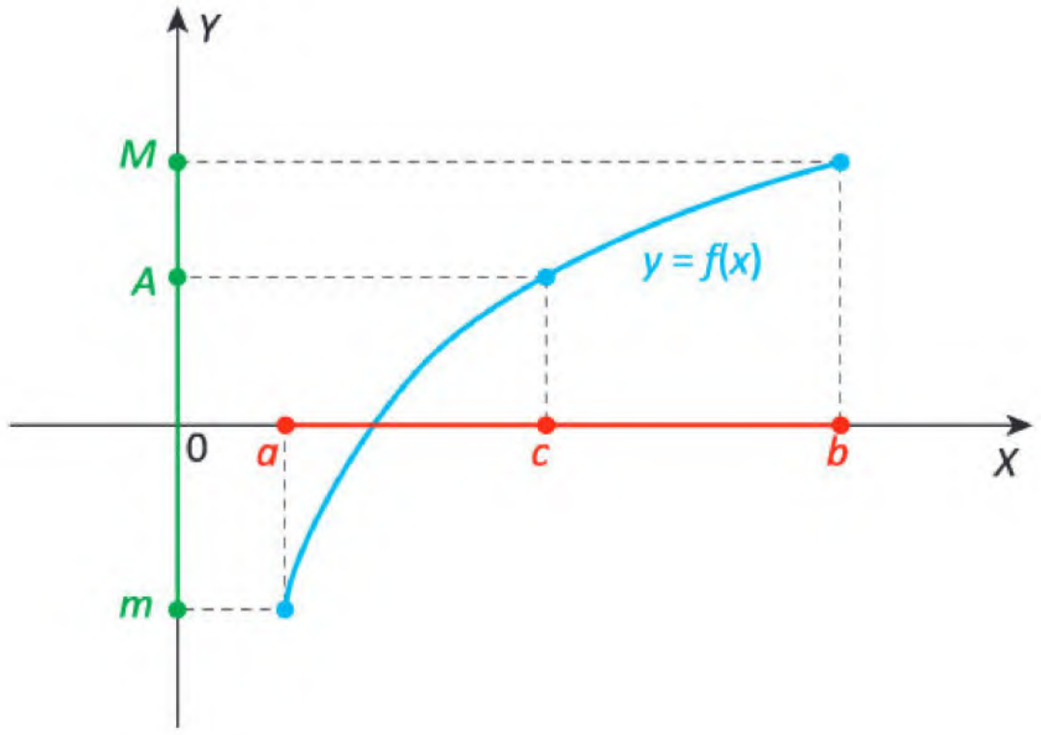
Fragment wykresu funkcji f przedstawia rysunek poniżej.



Funkcja f jest ciągła i nie przyjmuje w przedziale $\langle 0, 1)$ ani wartości największej, ani najmniejszej. Zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Z twierdzenia 2. i twierdzenia 3. wynika następujący wniosek:

Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, m oraz M oznaczają odpowiednio najmniejszą i największą wartość funkcji f w tym przedziale, natomiast A jest dowolną liczbą spełniającą nierówność $m \leqslant A \leqslant M$, to istnieje taka liczba c, $c \in \langle a, b\rangle$, dla której $f(c) = A$.



Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Zbadaj, czy funkcja f jest funkcją ciągłą.

a) $f(x)=\begin{cases}3x+1, & \text{jeśli } x<2\\ 7, & \text{jeśli } x=2\\ 2x^2-1, & \text{jeśli } x>2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3-|x|, & \text{jeśli } x<-5\\ -2, & \text{jeśli } x=-5\\ |x+3|, & \text{jeśli } x>-5\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{jeśli } x<1\\ \dfrac{1}{x}, & \text{jeśli } x\geqslant 1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{jeśli } -2\leqslant x<0\\ -1, & \text{jeśli } x=0\end{cases}$

2. Wyznacz liczbę a, dla której funkcja $f(x)=\begin{cases}a^2x+a, & \text{jeśli } x<3\\ 5ax-15, & \text{jeśli } x\geqslant 3\end{cases}$ jest ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

3. Wyznacz liczbę a, dla której funkcja f jest ciągła. Dla wyznaczonej liczby a naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-3, & \text{jeśli } x<a\\ 2x, & \text{jeśli } x\geqslant a\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3x-2, & \text{jeśli } x\leqslant a\\ x^3, & \text{jeśli } x>a\end{cases}$

D 4. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle -2, 7\rangle$ oraz $f(-2) = -6$ i $f(7) = -1$. Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = f(x) + 5$. Wykaż, że funkcja g ma miejsce zerowe.

D 5. Wykaż, że równanie $\sqrt{x}=x-1$ ma rozwiązanie należące do przedziału (2, 3).

D 6. Wykaż, że wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ ma pierwiastek należący do przedziału (1, 2). Podaj przybliżenie tego pierwiastka tak, aby błąd bezwzględny tego przybliżenia był mniejszy od 0,1.

D 7. Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 + x^2 - x - 2$ ma co najmniej dwa pierwiastki.

D 8. Wykaż, że wykresy funkcji $f(x) = x^4 - 7x$, $x \in \boldsymbol{R}$ i $g(x) = -3x^3 - 4x + 8$, $x \in \boldsymbol{R}$, przecinają się w punkcie o odciętej należącej do przedziału $(-3, -2)$.

D 9. Wykaż, że funkcja $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 10x - 1$, gdzie $x \in \langle 0, 5\rangle$, przyjmuje wartość 171.

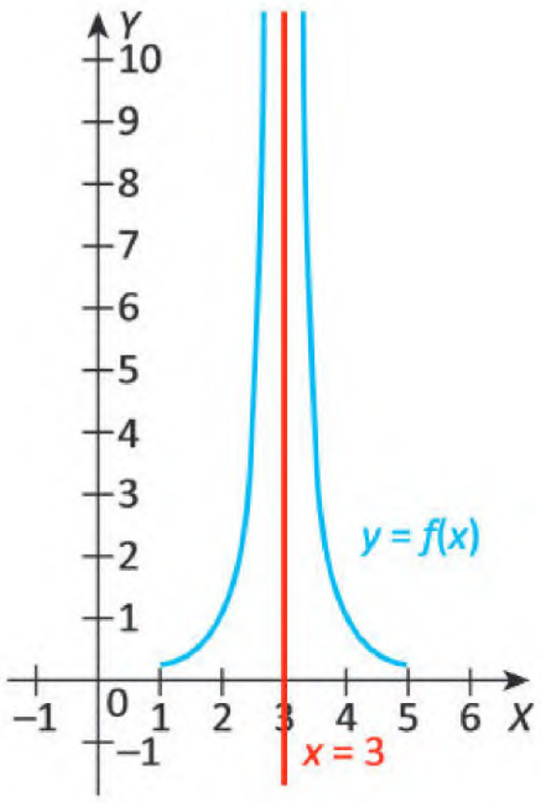
D 10. Dana jest funkcja $f(x) = x^4 - x^2(x - 20) + 5(x + 40)$, gdzie $x \in \langle 0, 10\rangle$. Wykaż, że przedział (200, 1000) zawiera się w zbiorze wartości funkcji f.

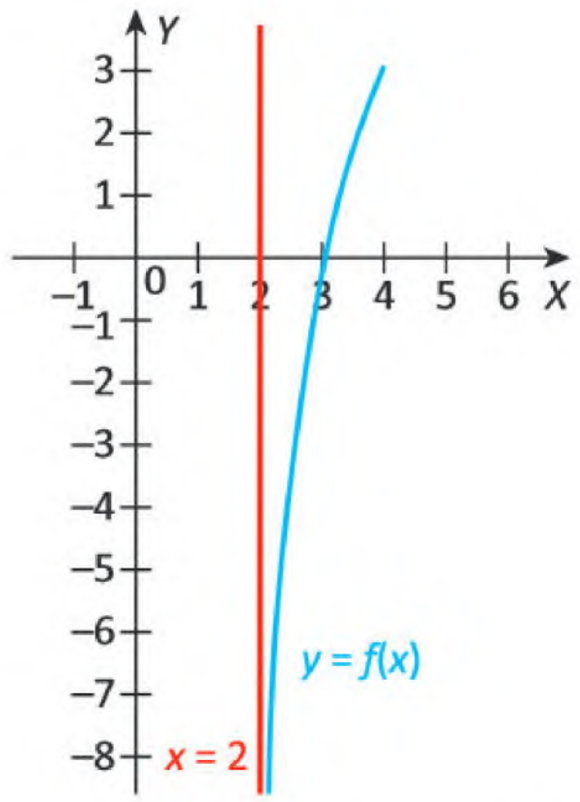
Asymptoty wykresu funkcji

Asymptota pionowa wykresu funkcji

Rozpatrzmy wykresy dwóch przykładowych funkcji, których argumenty dążą do pewnej liczby x_0 – z obu stron lub jednostronnie – a wtedy wartości funkcji dążą do $+\infty$ lub do $-\infty$.

a) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$, $x \in (1, 3) \cup (3, 5)$ b) $f(x) = 10 \cdot \log(x-2)$, $x \in (2, 4)$





Zauważ, że im bardziej argumenty danej funkcji zbliżają się do punktu x_0, tym bardziej odległość punktów wykresu od prostej $x = x_0$ maleje do zera.

W takiej sytuacji tę prostą nazwiemy asymptotą pionową obustronną lub jednostronną wykresu funkcji.

W punkcie a) prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową obustronną.

W punkcie b) prosta $x = 2$ jest asymptotą pionową prawostronną.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w prawostronnym (odpowiednio lewostronnym) sąsiedztwie punktu x_0. Prosta o równaniu $x = x_0$ jest **asymptotą pionową prawostronną** (odpowiednio **asymptotą pionową lewostronną**) wykresu funkcji f wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

(odpowiednio $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ lub $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$)

Jeśli prosta o równaniu $x = x_0$ jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną wykresu funkcji f, to nazywamy ją **asymptotą pionową obustronną** wykresu funkcji f.

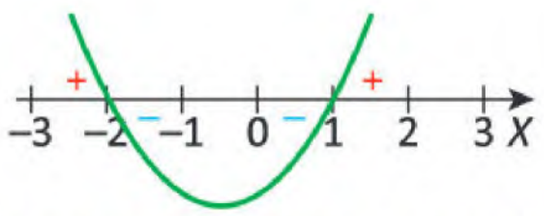
Przykład 1.

Zbadamy istnienie asymptot pionowych wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2-x}{(x+2)(x-1)}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$. Asymptoty wykresu mogą mieć postać $x = x_0$, gdzie x_0 jest miejscem zerowym mianownika ułamka występującego we wzorze funkcji f. Tylko w punktach -2 oraz 1 granica funkcji f może być niewłaściwa.

Szkicujemy wykres funkcji $y = (x + 2)(x - 1)$ i obliczamy:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{\overbrace{x^2-x}^{6}}{\underbrace{(x+2)(x-1)}_{0^+}}=+\infty$$



Szkic wykresu funkcji $y = (x + 2)(x - 1)$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{\overbrace{x^2-x}^{6}}{\underbrace{(x+2)(x-1)}_{0^-}}=-\infty$$

Prosta opisana równaniem $x = -2$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji f.

Sprawdzamy, czy istnieją granice jednostronne funkcji f w punkcie 1:

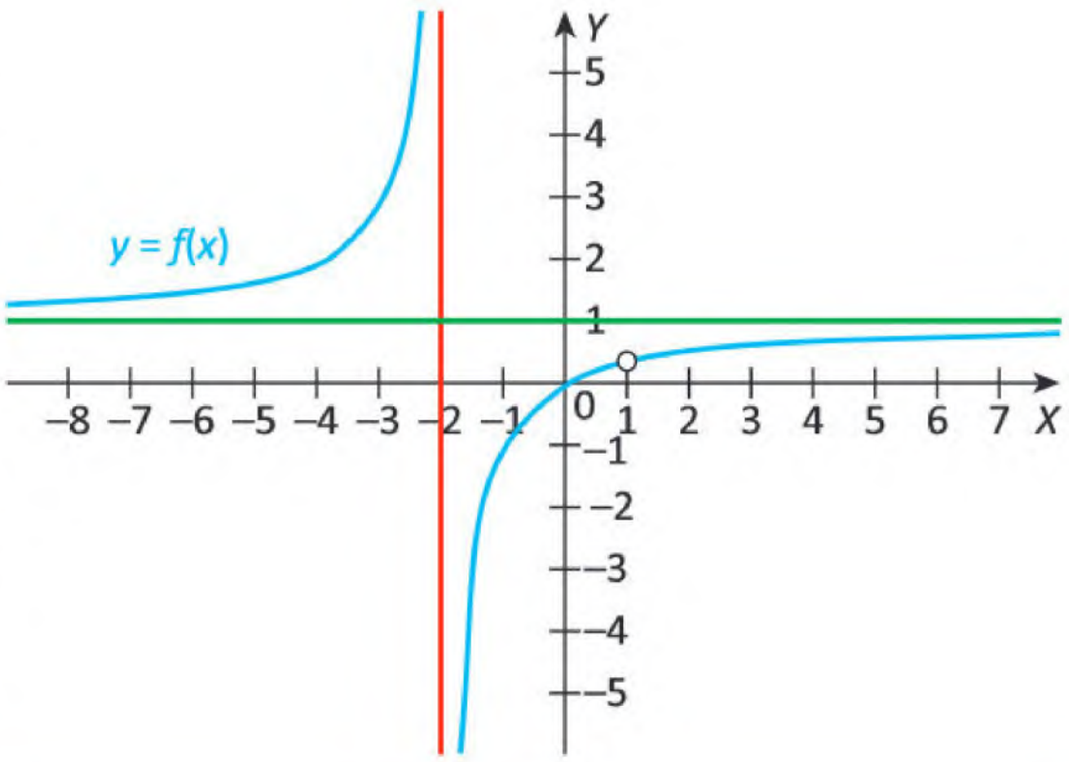
$$\frac{x^2-x}{(x+2)(x-1)}=\frac{x\cancel{(x-1)}^{1}}{(x+2)\cancel{(x-1)}_{1}}=\frac{x}{x+2},\ \text{więc}\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{\underbrace{x+2}_{3}}=\frac{1}{3}$$

Podobnie otrzymujemy $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{3}$.

Prosta $x = 1$ nie jest asymptotą pionową wykresu funkcji, bowiem obie granice jednostronne są właściwe.

Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji f.

Jedyną asymptotą pionową wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = -2$, zaznaczona na rysunku kolorem czerwonym. Jest to asymptota obustronna.



Ćwiczenie 1. Naszkicuj wykresy funkcji homograficznych: $f(x)=\frac{1}{x-4}$ i $g(x)=\frac{2x+5}{x+3}$. Wskaż asymptoty pionowe wykresów tych funkcji. Następnie oblicz granice jednostronne tych funkcji odpowiednio w punkcie 4 i w punkcie -3.

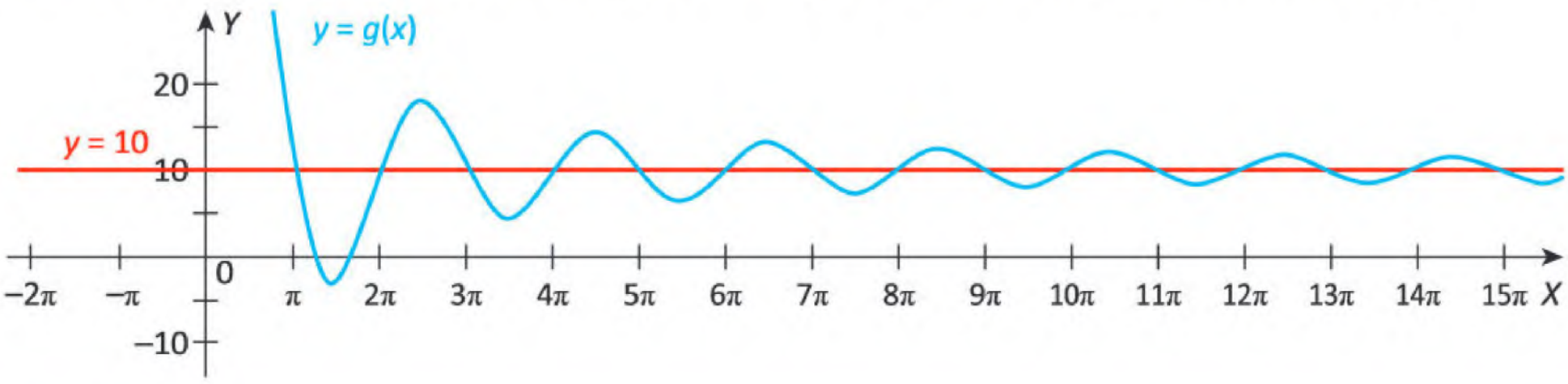
Asymptota pozioma wykresu funkcji

Wykres funkcji ma asymptotę poziomą, jeśli argumenty funkcji dążą do granicy niewłaściwej $+\infty$ albo $-\infty$, a wartości funkcji dążą do pewnej liczby.

Na rysunku ilustrującym wykres funkcji $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(x+2)(x-1)}$ w przykładzie 1., kolorem zielonym została naszkicowana pozioma prosta o równaniu $y = 1$. Jest to asymptota pozioma obustronna wykresu funkcji f.

Ćwiczenie 2. Oblicz granice $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, gdzie $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(x+2)(x-1)}$.

Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji $g(x)=\dfrac{60\sin x}{x}+10$, gdzie $x > 2$. Prosta o równaniu $y = 10$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu funkcji g.



Definicja 2.

Prosta o równaniu $y = b$ jest:

– **asymptotą poziomą prawostronną** wykresu funkcji f tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-b\right]=0, \quad \text{czyli} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$

– **asymptotą poziomą lewostronną** wykresu funkcji f tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-b\right]=0, \quad \text{czyli} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

Prostą, która jest jednocześnie asymptotą poziomą prawostronną i lewostronną, nazywamy **asymptotą poziomą obustronną**.

Przykład 2.

Zbadamy, czy istnieją asymptoty poziome wykresu funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2-x+3}{x^4+x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^4+x^2}{2x^2-x+3}$

Ad a) $D_f = \boldsymbol{R} - \{0\}$. Obliczamy:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^4+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

Podobnie otrzymujemy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji f.

Ad b) $D_f = \boldsymbol{R}$. Obliczamy:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2}{2x^2-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=+\infty$$

Podobnie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

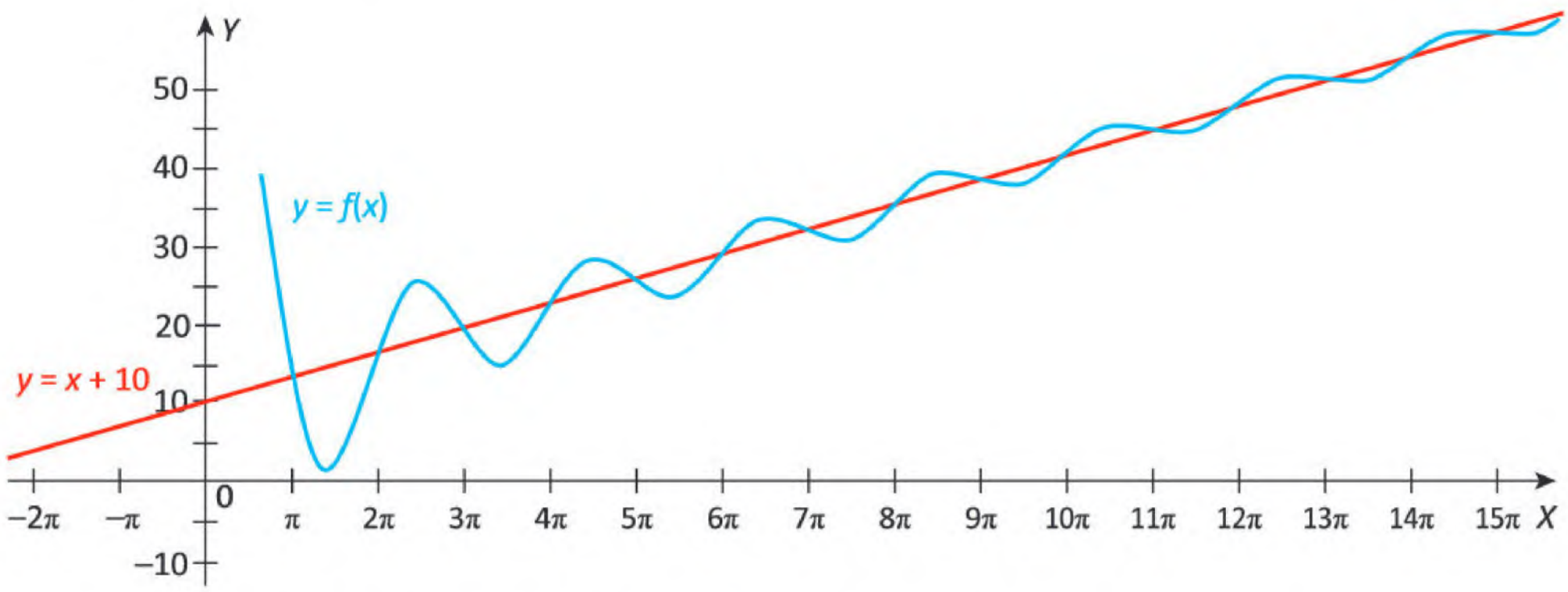
Wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej prawostronnej ani lewostronnej.

Ćwiczenie 3. Wyznacz asymptotę poziomą wykresu funkcji f, bez szkicowania wykresu tej funkcji, jeśli: a) $f(x)=\frac{1}{x+2}-3$ b) $f(x)=\frac{8x^2-x+3}{1+2x^2}$.

Asymptota ukośna wykresu funkcji

Na rysunkach poniżej znajdują się wykresy przykładowych funkcji, których argumenty dążą do granicy niewłaściwej $+\infty$, a wtedy wartości funkcji również dążą do granicy niewłaściwej, ale w pewien określony sposób.

a) $f(x)=\frac{60\sin x}{x}+x+10, \quad x>2;$



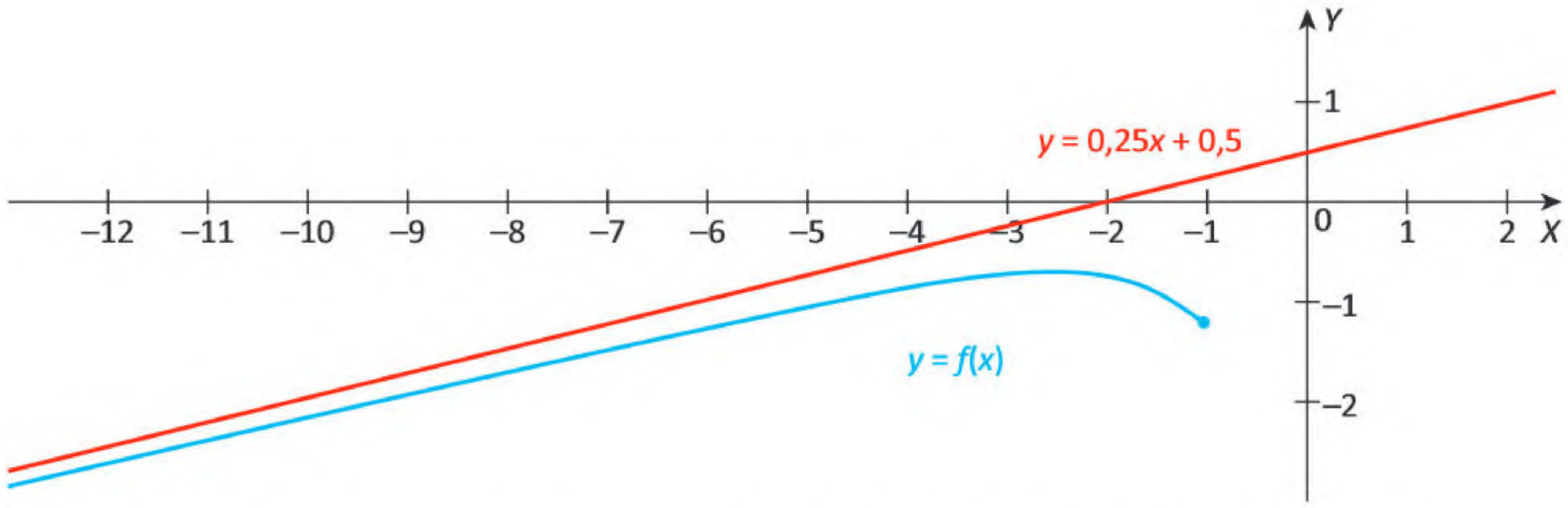
Prosta $y = x + 10$ jest asymptotą ukośną prawostronną.

Łatwo zauważyć, że

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+10)\right]=0$$

Warunek ten znaczy, że jeśli x dąży do $+\infty$, to różnice między wartościami funkcji $y = f(x)$, a odpowiadającymi im wartościami funkcji liniowej $y = x + 10$ dążą do 0.

b) $f(x)=\frac{x^2+2x+6}{4x}, \quad x<-1$



Prosta $y = 0{,}25x + 0{,}5$ jest asymptotą ukośną lewostronną. Wówczas mamy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(0{,}25x+0{,}5)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+2x+6}{4x}-(0{,}25x+0{,}5)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+6-x^2-2x}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{2x}=0$$

Możemy przyjąć następującą definicję.

Definicja 3.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(k, +\infty)$, (odpowiednio $(-\infty, k)$), $k \in \boldsymbol{R}$. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest **asymptotą ukośną prawostronną** (odpowiednio **asymptotą ukośną lewostronną**) wykresu funkcji f wtedy, gdy

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ (odpowiednio $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$).

Jeśli prosta $y = ax + b$ jest jednocześnie asymptotą ukośną prawostronną i lewostronną wykresu funkcji f, to nazywamy ją **asymptotą ukośną obustronną** wykresu funkcji f.

Definicja 3. pozwala sprawdzić, czy prosta o danym równaniu jest asymptotą ukośną wykresu danej funkcji.

Ćwiczenie 4. Wykaż, że prosta o równaniu $y = -x + 3$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2-5x}{2-x}$.

Twierdzenie 1.

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją właściwe granice $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$ oraz $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ i $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$.

Twierdzenie 2.

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją właściwe granice $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ i $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$

Przykład 3.

Wyznaczymy asymptoty ukośne wykresu funkcji $f(x)=\frac{2x^2+x}{|x|+1}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Zbadamy najpierw istnienie asymptoty ukośnej prawostronnej. Obliczamy:

1) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{|x|+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{(x+1)x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$$

2) $$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{|x|+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x+1}-\frac{2x(x+1)}{x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$$

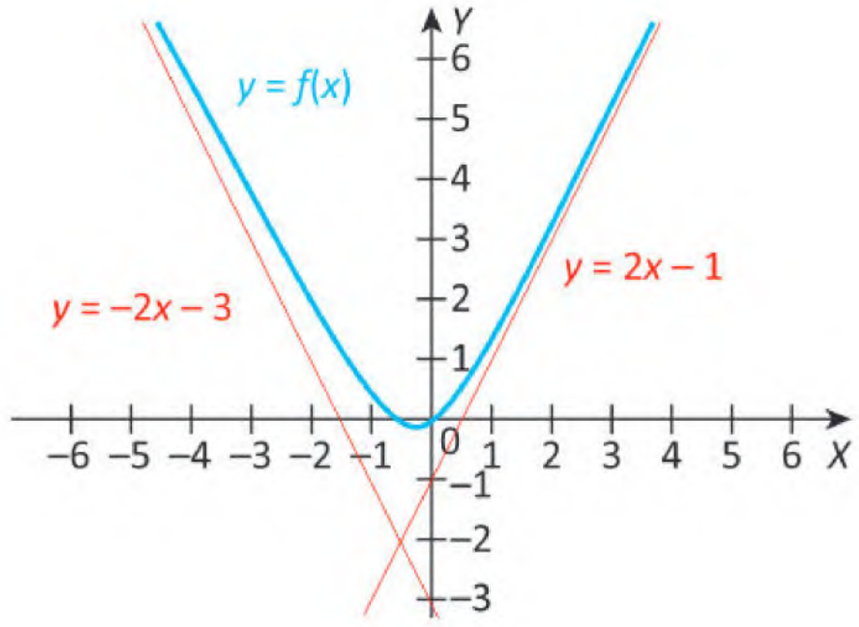
Prosta o równaniu $y = 2x - 1$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f. Teraz szukamy asymptoty ukośnej lewostronnej.

1) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+x}{|x|+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+x}{-x+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{-1+\frac{1}{x}}=-2$$

2) $$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-2x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+x}{|x|+1}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+x}{-x+1}+2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x+1}=-3$$

Prosta o równaniu $y = -2x - 3$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f (rysunek na następnej stronie).



UWAGA: Asymptotę ukośną opisuje równanie $y = ax + b$. Jeśli $a = 0$, to asymptota ukośna jest asymptotą poziomą. Wykres funkcji może mieć co najwyżej jedną asymptotę ukośną prawostronną (odpowiednio lewostronną). Jeśli więc stwierdzimy, że istnieje asymptota pozioma prawostronna (lewostronna), to nie trzeba sprawdzać, czy istnieje inna asymptota ukośna prawostronna (lewostronna) o współczynniku kierunkowym różnym od zera.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Czy istnieje asymptota pionowa wykresu funkcji f? Jeśli tak, podaj jej równanie.

a) $f(x)=\frac{4}{(x+7)^2}$ b) $f(x)=\frac{2x-2}{|x-1|}$ c) $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2-1}}$

2. Zbadaj, czy istnieją asymptoty poziome wykresu funkcji f. Jeśli tak, to podaj ich równania.

a) $f(x)=\frac{x-3}{x^2+1}$ b) $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$ c) $f(x)=\frac{(1+x)^2}{3-2x^2}$

3. Wyznacz równanie asymptoty ukośnej wykresu funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{3x^2}{x+2}$ b) $f(x)=\frac{1}{x}+2x$ c) $f(x)=\frac{(x-3)^2}{1-x}$

4. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-3}$ b) $f(x)=\frac{1+2x^3}{x^2}$ c) $f(x)=\frac{x^2+2x}{|x+4|}$

Pochodna funkcji w punkcie

Rozważmy następujące zagadnienie.

Wystrzelono do góry pocisk. Załóżmy, że odległość $s(t)$ pocisku (w metrach) od powierzchni ziemi w czasie t (sekund) wyraża wzór:

$$s(t) = 60t - 5t^2, \quad \text{gdzie} \quad t \in \langle 0, 12 \rangle.$$

Interesuje nas prędkość pocisku w czwartej sekundzie lotu. Obliczmy najpierw średnią prędkość między czwartą a piątą sekundą lotu pocisku. W tym celu wyznaczamy przyrost drogi $s(5) - s(4)$ i dzielimy go przez przyrost czasu

$$v_1 = \frac{s(5)-s(4)}{5-4} = \frac{175-160}{1} = 15 \text{ (m/s)}$$

Czy prędkość 15 m/s można uznać za prędkość w czwartej sekundzie? Otóż nie. Jeśli skrócimy przedział czasu, np. do 0,5 sekundy, to otrzymamy inną prędkość:

$$v_2 = \frac{s(4,5)-s(4)}{4,5-4} = \frac{168,75-160}{0,5} = 17,5 \text{ (m/s)}$$

Obliczmy jeszcze prędkości średnie dla krótszych przedziałów czasowych (równych 0,1 s, 0,01 s i 0,001 s):

$$v_3 = \frac{s(4,1)-s(4)}{4,1-4} = \frac{161,95-160}{0,1} = 19,5 \text{ (m/s)}$$

$$v_4 = \frac{s(4,01)-s(4)}{4,01-4} = \frac{160,1995-160}{0,01} = 19,95 \text{ (m/s)}$$

$$v_5 = \frac{s(4,001)-s(4)}{4,001-4} = \frac{160,019995-160}{0,001} = 19,995 \text{ (m/s)}$$

Możemy zauważyć, że jeśli skracamy przedział czasu, to otrzymane prędkości stają się coraz bliższe 20 m/s. Wykażemy, że rzeczywiście ta graniczna prędkość jest równa 20 m/s; uznamy ją za prędkość w czwartej sekundzie ruchu.

Interesuje nas wyrażenie:

$$(*) \qquad \lim_{x \to 4} \frac{s(x)-s(4)}{x-4}$$

Jeśli oznaczymy $x - 4 = h$, to $x = 4 + h$ i $x \to 4$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h \to 0$. Zatem wyrażenie (*) można zapisać równoważnie

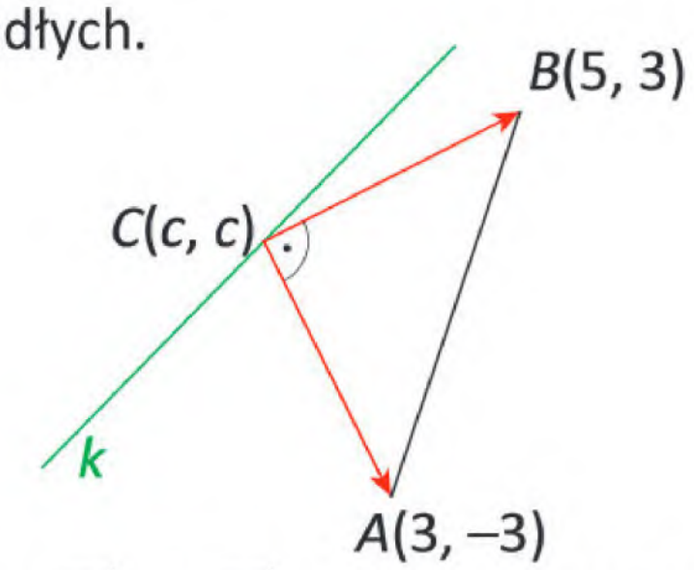
$$(**) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{s(4+h)-s(4)}{h}$$

Obliczamy

$$\lim_{h \to 0} \frac{s(4+h)-s(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[60(4+h)-5(4+h)^2\right]-160}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{20h-5h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (20-5h) = 20$$

II sposób – Korzystamy z własności wektorów prostopadłych.



Punkt C należy do prostej k: $y = x$.
Możemy przyjąć, że $C(c, c)$. Wówczas

$$\overrightarrow{CA} = [3-c, -3-c]$$

$$\overrightarrow{CB} = [5-c, 3-c]$$

Mamy wyznaczyć punkt C taki, że $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$.
Z twierdzenia 2 str. 459 wynika, że niezerowe wektory $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ są prostopadłe tylko wtedy, gdy

$$(3-c)\cdot(5-c) + (-3-c)\cdot(3-c) = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$c^2 - 8c + 15 + c^2 - 9 = 0$$

$$c^2 - 4c + 3 = 0, \qquad \Delta = 4, \quad \sqrt{\Delta} = 2 \qquad c = 1 \text{ lub } c = 3$$

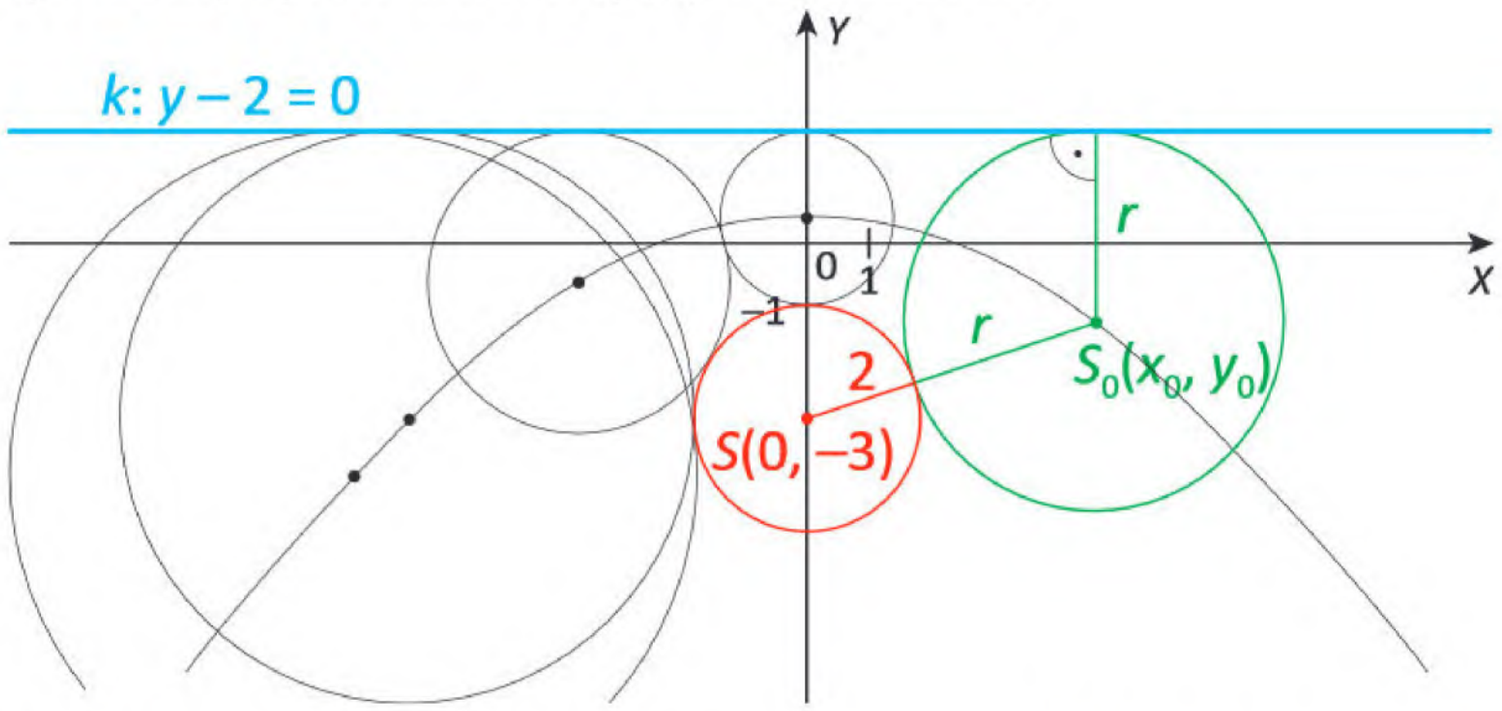
Szukane punkty, to: $C_1(1, 1)$, $C_2(3, 3)$.

Ćwiczenie 4. Dane są punkty $A(-1, 2)$, $B(7, 8)$. Wyznacz na osi OX punkt C tak, aby $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$.

Przykład 5.

Wyznaczymy równanie, opisujące zbiór środków wszystkich okręgów, które są styczne zewnętrznie do okręgu o: $x^2 + (y+3)^2 = 4$ i jednocześnie styczne do prostej k: $y - 2 = 0$.

Najpierw wykonamy rysunek ilustrujący treść zadania.



Niech punkt $S_0(x_0, y_0)$ będzie środkiem okręgu spełniającego warunki zadania, r – promieniem tego okręgu. Zauważ, że $y_0 < 2$.
Prosta k: $y - 2 = 0$ jest styczna do okręgu $o(S_0, r)$, więc odległość punktu S_0 od tej prostej jest równa r. Obliczamy:

$$d(S_0, k) = \frac{|y_0 - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y_0 - 2| \quad \text{i} \quad y_0 < 2, \quad \text{stąd} \quad d(S_0, k) = 2 - y_0$$

Otrzymaliśmy

$r = 2 - y_0$, gdzie $y_0 < 2$.

Okrąg o środku $S_0(x_0, y_0)$ i promieniu r jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku $S(0, -3)$ i promieniu 2. Wówczas

$|S_0S| = r + 2 = (2 - y_0) + 2 = 4 - y_0$ oraz $|S_0S| = \sqrt{x_0^2 + (3 + y_0)^2}$

Rozwiązujemy równanie

$$\sqrt{x_0^2 + (3 + y_0)^2} = 4 - y_0, \quad \text{gdzie } y_0 < 2.$$

Obie strony równania są dodatnie. Po podniesieniu ich do kwadratu otrzymujemy równanie równoważne danemu.

$x_0^2 + (3 + y_0)^2 = (4 - y_0)^2$

$x_0^2 + 9 + 6y_0 + y_0^2 = 16 - 8y_0 + y_0^2$, stąd

$$y_0 = -\frac{1}{14}x_0^2 + \frac{1}{2}$$

Zauważ, że warunek $y_0 < 2$ jest spełniony dla dowolnej liczby rzeczywistej x_0.

Środki wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu o: $x^2 + (y + 3)^2 = 4$ i jednocześnie stycznych do prostej k: $y - 2 = 0$ należą do paraboli o równaniu

$$y = -\frac{1}{14}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Dane są punkty $A(-3, -2)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 6)$, $D(-7, 6)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym. Następnie oblicz wysokość tego trapezu.

D 2. Dane są punkty $A(-4, -5)$, $B(4, -1)$, $C(5, 2)$, $D(-1, 4)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym. Następnie oblicz pole tego trapezu.

D 3. Dane są punkty $A(-5, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 5)$, $D(-4, 6)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem. Następnie wyznacz równanie okręgu, który jest styczny do każdego boku tego kwadratu.

D 4. Dane są punkty $A(0, 1)$, $B(2, -2)$, $C(8, 2)$, $D(6, 5)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem. Następnie wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki tego prostokąta.

5. Dane są punkty $A(3, -4)$ oraz $B(5, 4)$. Wyznacz na osi OY punkt C tak, aby kąt ACB był prosty. Następnie oblicz pole trójkąta ABC.

6. Dane są punkty $A(7, 6)$, $B(-6, 6)$. Wyznacz na osi OX punkt C tak, aby kąt ACB był prosty. Oblicz pole trójkąta ABC.

Przykład 1.

Wyznaczymy iloraz różnicowy funkcji $f(x)=x^2$ w punkcie 3 odpowiadający przyrostowi h, $h \neq 0$. Następnie sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie 3.

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. Funkcja jest więc określona w dowolnym otoczeniu $U(3)$. Niech $(3 + h) \in U(3)$. Wówczas

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\frac{9+6h+h^2-9}{h}=\frac{6h+h^2}{h}=6+h, \text{ bo } h\neq 0$$

Iloraz różnicowy funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie 3, odpowiadający przyrostowi h jest równy $6 + h$. Funkcja $f(x) = x^2$ jest różniczkowalna w punkcie 3, bowiem istnieje granica

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}, \text{ czyli } \lim_{h\to 0}(6+h) \text{ i jest równa 6.}$$

Pochodna funkcji f w punkcie 3 jest równa 6, co zapisujemy: $f'(3) = 6$.

Jeśli granica (*) nie istnieje lub jest niewłaściwa, to powiemy, że funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0 lub że nie jest różniczkowalna w punkcie x_0.





Za twórców rachunku różniczkowego uważa się angielskiego fizyka i matematyka Izaaka Newtona (*patrz po lewej*) (1642 – 1727) oraz niemieckiego filozofa i matematyka Wilhelma Leibnitza [wym. lajbnica] (*patrz po prawej*) (1646 – 1716). Wyniki w tej dziedzinie osiągnęli różnymi metodami, niezależnie od siebie. Odkrycie rachunku różniczkowego doprowadziło do ogromnego rozwoju nauk przyrodniczych, w których pochodne mają różnorodne zastosowania.

Przykład 2.

Obliczymy pochodną funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x) = x^3 - 4x$, $x_0 = 5$ b) $f(x)=\sqrt{x-1}$, $x_0 = 2$

Ad a) $D_f = \boldsymbol{R}$, więc funkcja f jest określona w każdym otoczeniu punktu 5, h jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od 0, oczywiście $(5 + h) \in \boldsymbol{R}$. Mamy:

$f(5 + h) = (5 + h)^3 - 4(5 + h) = h^3 + 15h^2 + 71h + 105$ $f(5) = 5^3 - 4 \cdot 5 = 105$

Obliczamy:

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\frac{h^3+15h^2+71h+105-105}{h}=h^2+15h+71 \text{ zatem}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+15h+71)=71$$

Otrzymaliśmy $f'(5) = 71$.

Ad b) $D_f = \langle 1, +\infty)$, więc istnieje pewne otoczenie $U(2)$, w którym funkcja f jest określona. Niech h będzie taką liczbą rzeczywistą różną od 0, że $(2 + h) \in U(2)$. Obliczamy:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}=\frac{\left(\sqrt{1+h}-\sqrt{1}\right)\left(\sqrt{1+h}+\sqrt{1}\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+\sqrt{1}\right)}=\frac{(1+h)-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=$$

$$=\frac{h}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} \quad \text{więc} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{2}$$

Tak więc $f'(2)=\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 1. Dana jest funkcja $f(x) = -x^2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Wyznacz iloraz różnicowy w punkcie 5 odpowiadający przyrostowi h, $h \neq 0$. Następnie wykaż, że $f'(5) = -10$.

Jak zapewne pamiętasz, granica funkcji w punkcie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne tej funkcji w tym punkcie i są one równe. W związku z tym wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 3.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym prawostronnym otoczeniu $U_+(x_0)$. Niech h będzie liczbą dodatnią, dla której $x_0 + h$ należy do otoczenia $U_+(x_0)$.

Pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0 będziemy nazywać granicę (jeśli istnieje właściwa) $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ i oznaczać $f'_+(x_0)$.

Analogicznie można zdefiniować pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0, którą będziemy oznaczać $f'_-(x_0)$.

Ćwiczenie 2. Sformułuj definicję pochodnej lewostronnej funkcji w punkcie.

Twierdzenie 1.

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0.

Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 równą p, $p \in \boldsymbol{R}$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją pochodne jednostronne $f'_+(x_0)$ oraz $f'_-(x_0)$ i zachodzi równość $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=p$, czyli $f'(x_0)=p \Leftrightarrow \left[f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=p\right]$.

Przykład 3.

Zbadamy, czy istnieje pochodna funkcji f oraz pochodna funkcji g w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x) = |x|^3$, $x_0 = 0$ b) $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$

Ad a) $D_f = \boldsymbol{R}$, więc funkcja f jest określona w każdym otoczeniu punktu 0. Wzór funkcji można zapisać w postaci:

$$f(x)=\begin{cases}-x^3, & \text{jeśli } x<0\\ x^3, & \text{jeśli } x\geqslant 0\end{cases}$$

Badamy istnienie pochodnych jednostronnych w punkcie 0. Obliczamy:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^3}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^2=0,\quad \text{czyli}\quad f'_+(0)=0$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^3}{h}=\lim_{h\to 0^-}\left(-h^2\right)=0,\quad \text{czyli}\quad f'_-(0)=0$$

Pochodne jednostronne istnieją i są równe, zatem funkcja f jest różniczkowalna w punkcie 0 oraz $f'(0) = 0$.

Ad b) $D_g = \boldsymbol{R}$. Podobnie jak w punkcie a) wybieramy dowolne otoczenie punktu 0. Mamy:

$$g(x)=\begin{cases}-x, & \text{jeśli } x<0\\ x, & \text{jeśli } x\geqslant 0\end{cases}$$

Badamy istnienie pochodnych jednostronnych. Obliczamy:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1,\quad \text{czyli}$$

$$g'_+(0)=1$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-1)=-1,\quad \text{czyli}$$

$$g'_-(0)=-1$$

Pochodne jednostronne istnieją, ale nie są równe. Funkcja g nie jest różniczkowalna w punkcie 0.

Przykład 4.

Zbadamy, czy istnieją pochodne funkcji f i g w punkcie 1, jeśli:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-3, & \text{jeśli } x\leqslant 1\\ \dfrac{-2}{x}, & \text{jeśli } x>1\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{jeśli } x\leqslant 1\\ \dfrac{-2}{x}, & \text{jeśli } x>1\end{cases}$

Obie funkcje są określone w otoczeniu punktu 1.

Ad a) Badamy istnienie pochodnych jednostronnych w punkcie 1.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{-2}{1+h}-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h}{h(1+h)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2}{1+h}=2,$$

czyli $f'_+(1)=2$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-3-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(2+h)h}{h}==\lim_{h\to 0^-}(2+h)=2,$$

czyli $f'_-(1)=2$

Tak więc $f'_+(1)=f'_-(1)=2.$

Pochodne jednostronne istnieją i są równe, zatem funkcja f ma pochodną w punkcie 1 i $f'(1)=2.$

Ad b) Obliczamy:

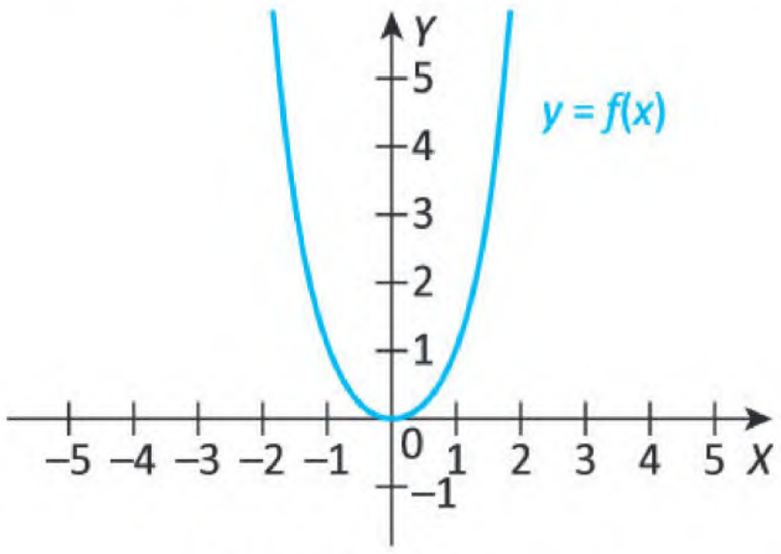
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{-2}{1+h}-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2}{1+h}=2,\ \text{czyli}\ g'_+(1)=2$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(1+h)-1-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1,\ \text{czyli}\ g'_-(1)=-1$$

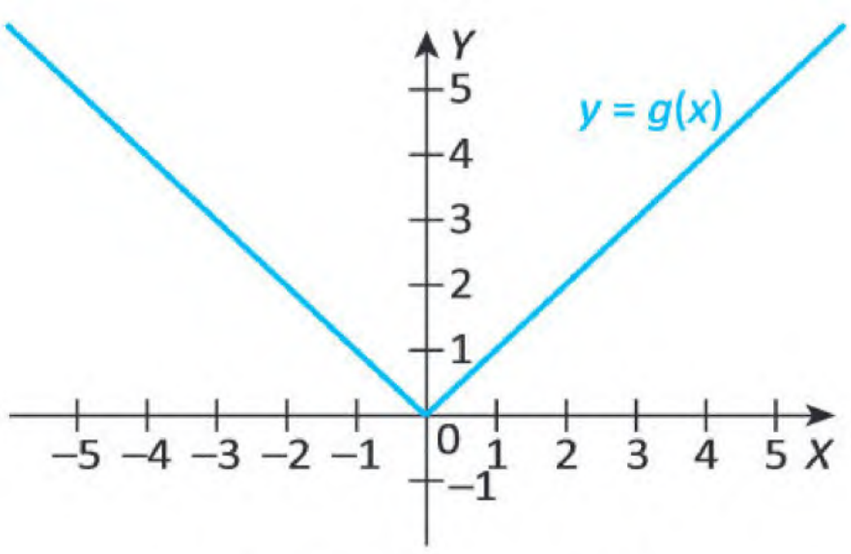
Pochodne jednostronne istnieją, ale nie są równe. Funkcja g nie ma pochodnej w punkcie 1.

Screenshot saved
Click here to start sharing it
Press ⊞ + G for Xbox Game Bar

Z ostatnich przykładów wynika, że jeśli funkcja jest ciągła w jakimś punkcie, to nie musi być w tym punkcie różniczkowalna. Jak zatem – mając wykres funkcji ciągłej w punkcie x_0 – rozpoznać, czy w tym punkcie funkcja ma pochodną? Przyjrzyjmy się wykresom funkcji z przykładów 3 i 4.



$f(x) = |x|^3,\ \ x_0 = 0$



$g(x) = |x|,\ \ x_0 = 0$

Obliczamy tę granicę:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h+f(x_0)\right]=$$

$$=f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)$$

Otrzymaliśmy, że $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, co kończy dowód.

Można powiedzieć, że ciągłość funkcji w punkcie jest **warunkiem koniecznym** istnienia pochodnej funkcji w punkcie. Nie jest to jednak warunek wystarczający.

Jeśli funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, nie jest ciągła w punkcie x_0, to nie istnieje pochodna funkcji f w tym punkcie.

Przykład 5.

Funkcja $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{jeśli } x<0 \\ x-2, & \text{jeśli } x\geqslant 0 \end{cases}$ nie jest różniczkowalna w punkcie 0, bowiem nie jest ciągła w tym punkcie. Mamy:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=2 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-2$$

Ćwiczenie 3. Wykaż, że istnieje pochodna prawostronna funkcji f z przykładu 5. w punkcie 0 i jest równa 1.

Przykład 6.

00:01 (8/515)
Open Save Rec Play .exe Prefs
Screenshot saved
Click here to start sharing it
Press + G for Xbox Game Bar

Wyznaczymy a i b tak, aby funkcja $f(x)=\begin{cases} ax+b, & \text{jeśli } x<-1 \\ x^2-4, & \text{jeśli } x\geqslant -1 \end{cases}$ n
w punkcie –1.

Funkcja f musi być ciągła w punkcie –1. Obliczamy:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(ax+b)=-a+b$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2-4)=-3, \qquad f(-1)=-3$$

Funkcja f będzie ciągła w punkcie –1 wtedy, gdy spełniona będzie równość

$$-a+b=-3$$

Obliczamy pochodne jednostronne:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(-1+h)^2-4-(-3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0^+}(h-2)=-2$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{a(-1+h)+b-(-3)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-a+b+ah+3}{h}$$

Korzystamy teraz z warunku ciągłości funkcji f w punkcie –1:

$-a + b = -3$, zatem

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{-a+b+ah+3}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-3+ah+3}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah}{h}=a$$

$$f'_-(-1)=a$$

Pochodne jednostronne są równe tylko wtedy, gdy

$a = -2$. Wówczas $b = -5$.

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie –1 wtedy, gdy $a = -2$ i $b = -5$.

Ćwiczenie 4. Dla wyznaczonych wartości a i b w przykładzie 6. naszkicuj wykres funkcji f.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz pochodną funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x) = 4x - 1$, $x_0 = -5$

b) $f(x) = -3x^2$, $x_0 = 5$

c) $f(x)=\frac{8}{x}$, $x_0 = 2$

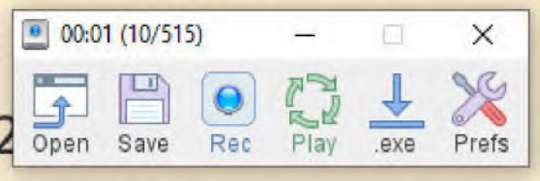
d) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$

e) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0 = 9$

f) $f(x)=-\frac{1}{x}$, $x_0=\frac{1}{3}$

2. Wykaż, że nie istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{jeśli } x<2\\ -x+5, & \text{jeśli } x\geqslant 2\end{cases}$



Screenshot saved
Click here to start sharing it
Press + G for Xbox Game Bar

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{jeśli } x\leqslant 0\\ x^2, & \text{jeśli } x>0\end{cases}$ $x_0 = 0$

Czy istnieją pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0?

3. Zbadaj, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0, jeśli:

a) $f(x)=\begin{cases}-x^3, & \text{jeśli } x\leqslant 0\\ x^2, & \text{jeśli } x>0\end{cases}$ $x_0 = 0$

b) $f(x)=\begin{cases}-2x^2, & \text{jeśli } x<1\\ -4x+2, & \text{jeśli } x\geqslant 1\end{cases}$ $x_0 = 1$

c) $f(x)=\begin{cases}2x-3, & \text{jeśli } x<-1\\ x-4, & \text{jeśli } x\geqslant -1\end{cases}$ $x_0 = -1$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{jeśli } x<0\\ x^3, & \text{jeśli } x\geqslant 0\end{cases}$ $x_0 = 0$

4. Wyznacz liczby a i b, dla których istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0. Dla wyznaczonych liczb a i b naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{jeśli } x<1\\ ax+b, & \text{jeśli } x\geqslant 1\end{cases}$ $x_0 = 1$

b) $f(x)=\begin{cases}ax+b, & \text{jeśli } x<4\\ \sqrt{x}+1, & \text{jeśli } x\geqslant 4\end{cases}$ $x_0 = 4$.

Jeśli $x_0 \in (0, +\infty)$, to

x_0 przyporządkowujemy $f'(x_0)$,

czyli

x_0 przyporządkowujemy $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Tę nową funkcję będziemy nazywać funkcją pochodną funkcji f (lub krótko: pochodną funkcji f) i oznaczać f'. Możemy więc zapisać:

$$f(x)=\sqrt{x}, \quad x \in \langle 0, +\infty)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Czasami stosuje się też zapis:

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Zauważ, że dziedzina funkcji D_f i dziedzina funkcji pochodnej nie muszą być równe. Zawsze natomiast jest spełniona zależność $D_{f'} \subset D_f$.

Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 1.

Niech f będzie dowolną funkcją określoną w zbiorze D_f.

Funkcją pochodną funkcji f (pochodną funkcji f) nazywamy fun
liczbie x_0 z dziedziny D_f przyporządkowuje liczbę $f'(x_0)$ – jeżeli f'
– i oznaczamy ją f'.

Zbiór tych liczb x_0, w których funkcja f jest różniczkowalna, stanowi dziedzinę funkcji f', którą oznaczamy $D_{f'}$.

Screenshot saved
Click here to start sharing it
Press ⊞ + G for Xbox Game Bar

Ćwiczenie 1. Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = x^2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

UWAGA: Nie należy mylić terminów **pochodna funkcji w punkcie** i **pochodna funkcji** (funkcja pochodna). **Pochodna funkcji w punkcie** jest **liczbą** – granicą odpowiedniego ilorazu różnicowego. Natomiast **pochodna funkcji** jest to **funkcja**, która argumentowi x przyporządkowuje liczbę równą pochodnej funkcji w punkcie x.

Tabela poniżej zawiera podstawowe wzory na pochodne funkcji, którymi będziemy się posługiwać w dalszym toku nauki.

Lp.	Funkcja	Pochodna funkcji	Dziedzina pochodnej (uwagi)
1.	$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	$\boldsymbol{R}$ (c – dowolna liczba rzeczywista, f – funkcja stała)
2.	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\boldsymbol{R}$ (a, b – dowolne liczby rzeczywiste)
3.	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$	$\boldsymbol{R}$ (a, b, c – dowolne liczby rzeczywiste)
4.	$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$\boldsymbol{R}$ (n – liczba naturalna większa od 1)
5.	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$	$\boldsymbol{R} - \{0\}$
6.	$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$\boldsymbol{R} - \{0\}$ (k – liczba całkowita ujemna)
7.	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
8.	$f(x) = x^\alpha$	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$ (α – dowolna liczba rzeczywista)

Udowodnimy wzory: 1., 2., 3., 4. oraz 6, a Ty wyprowadź wzór nr 5.

Ad 1) $f(x) = c$, $D_f = \boldsymbol{R}$, c – dowolna liczba rzeczywista, zatem

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0, \text{ stąd}$$

$$f'(x) = 0, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

Ad 2) $f(x) = ax + b$, $D_f = \boldsymbol{R}$, a, b – dowolne liczby rzeczywiste

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=\lim_{h\to 0}a=$$

$$f'(x) = a, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

Screenshot saved
Click here to start sharing it
Press ⊞ + G for Xbox Game Bar

Ad 3) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $D_f = \boldsymbol{R}$, a, b, c – dowolne liczby rzeczywiste

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2ax+b+ah)}{h}=\lim_{h\to 0}(2ax+b+ah)=2ax+b, \text{ stąd}$$

$$f'(x) = 2ax + b, \; D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

Ad 4) $f(x) = x^n$, $D_f = \boldsymbol{R}$, n – liczba naturalna większa od 1

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

Stosujemy wzór Newtona i zapisujemy $(x+h)^n$ w postaci sumy.

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1h^{n-1} + h^n$$

Obliczamy:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + nx^{n-1}\boldsymbol{h} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\boldsymbol{h^2} + \ldots + nx\boldsymbol{h^{n-1}} + \boldsymbol{h^n}\right] - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\boldsymbol{h} + \ldots + nx\boldsymbol{h^{n-2}} + \boldsymbol{h^{n-1}}\right] = nx^{n-1}, \text{ zatem}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

Ad 6) $f(x) = x^k$, $D_f = \boldsymbol{R}$, gdzie k – liczba całkowita ujemna

Niech $k = -n$, $n \in \boldsymbol{N}_+$, wówczas

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{-n} - x^{-n}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^n - (x+h)^n}{h(x+h)^n x^n} = \lim_{h\to 0}\frac{x^n - \left(x^n + nx^{n-1}\boldsymbol{h} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\boldsymbol{h^2} + \ldots + \boldsymbol{h^n}\right)}{h(x+h)^n x^n} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-n\cdot x^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\boldsymbol{h} - \ldots - \boldsymbol{h^{n-1}}}{(x+h)^n x^n} = \frac{-n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\cdot x^{-n-1} = k\cdot x^{k-1}$$

00:01 (14/515) Open Save Rec Play .exe Prefs

Otrzymaliśmy $f'(x) = k\cdot x^{k-1}$, $D_{f'} = \boldsymbol{R}$

Załóżmy, że chcemy obliczyć pochodną funkcji $f(x) = x^3 + \frac{4}{x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$.

Wówczas pomocne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze D, to dla dowolnej liczby x, $x \in D$:

a) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

b) $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

c) $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

d) $[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x)$, gdzie c – dowolna liczba rzeczywista

e) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, gdzie $g(x) \neq 0$ w zbiorze D

Dowód:

Ad a) Zapisujemy iloraz różnicowy odpowiadający funkcji $y = f(x) + g(x)$, gdzie $x \in D$. Następnie przedstawiamy go w postaci sumy dwóch ilorazów, odpowiadających funkcji f i funkcji g.

$$\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Z założenia o różniczkowalności funkcji f i g w punkcie x wynika, że istnieje granica przy h dążącym do 0 każdego z dwóch ostatnich składników – równa $f'(x)$ dla pierwszego z nich i $g'(x)$ dla drugiego. Zatem – na mocy twierdzenia o granicy sumy funkcji – otrzymujemy:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

To znaczy, że $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.

Ad b) Dowód jest analogiczny do dowodu z punktu a).

Ad c) Przekształcamy iloraz różnicowy odpowiadający funkcji $y = f(x) \cdot g(x)$, gdzie $x \in D$, w następujący sposób:

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$=\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)$$

Z założenia o różniczkowalności funkcji f i g w punkcie x otrzymujemy, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x) \quad \text{oraz} \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)$$

Funkcja g jest ciągła w punkcie x, bowiem jest w tym punkcie różniczkowalna.

Mamy $\lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$ oraz $\lim_{h\to 0} f(x)=f(x)$.

Teraz korzystamy z twierdzenia o granicy sumy funkcji, granicy iloczynu funkcji oraz granicy iloczynu funkcji przez stałą.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(x+h)+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} f(x)$$

Stąd otrzymujemy

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Ad d) Jest to szczególny przypadek wzoru z punktu c). Mamy:

$$[c \cdot f(x)]' = (c)' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$$

Dowód wzoru z punktu e) pomijamy.

Wzory z punktów a) i b) twierdzenia 1. można w następujący sposób uogólnić:
Jeśli funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są różniczkowalne w zbiorze D, to dla dowolnej liczby x ze zbioru D:

$$\left[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\right]' = f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x)$$

$$\left[f_1(x)-f_2(x)-\ldots-f_n(x)\right]' = f_1'(x)-f_2'(x)-\ldots-f_n'(x)$$

Czasem przy obliczaniu pochodnej funkcji f nie jest podana dziedzina tej funkcji ani dziedzina funkcji pochodnej. Przyjmujemy wówczas, że dziedzina funkcji f i dziedzina funkcji f' to odpowiednio zbiory D_f i $D_{f'}$ tych wszystkich liczb, dla których wzory funkcji f i funkcji pochodnej f' mają sens liczbowy, przy czym zawsze jest spełniony warunek $D_{f'} \subset D_f$.

Przykład 1.

Wyznaczymy pochodną funkcji:

a) $f(x) = x^3 + \frac{4}{x}$ b) $f(x) = 7x^5 - x^4 + \sqrt{2}$

c) $f(x) = (1 - x^2)(3 + x)$ d) $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Ad a) $D_f = \boldsymbol{R} - \{0\}$. Stosujemy wzór na pochodną sumy oraz wzó
czynu funkcji i stałej:

Screenshot saved
Click here to start sharing it
Press + G for Xbox Game Bar

$$\left(x^3 + \frac{4}{x}\right)' = \left(x^3\right)' + 4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 3x^2 + 4 \cdot \frac{-1}{x^2}, \quad \text{stąd}$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{4}{x^2}, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R} - \{0\}$$

Ad b) $D_f = \boldsymbol{R}$. Stosujemy wzór na pochodną iloczynu funkcji i stałej, na pochodną różnicy i na pochodną sumy:

$$\left(7x^5 - x^4 + \sqrt{2}\right)' = 7 \cdot \left(x^5\right)' - \left(x^4\right)' + \left(\sqrt{2}\right)' = 35x^4 - 4x^3 + 0$$

$$f'(x) = 35x^4 - 4x^3, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

Ad c) $D_f = \boldsymbol{R}$

I sposób – stosujemy wzór na pochodną iloczynu:

$$[(1 - x^2) \cdot (3 + x)]' = (1 - x^2)' \cdot (3 + x) + (1 - x^2) \cdot (3 + x)' = -2x \cdot (3 + x) + (1 - x^2) \cdot 1 =$$
$$= -3x^2 - 6x + 1$$

I sposób – badamy, czy istnieją pochodne jednostronne funkcji f w punkcie 0:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^3-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^2=0$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-h)=0$$

$$f'_+(0)=f'_-(0)=0, \quad \text{więc} \quad f'(0)=0$$

Pochodna funkcji f w punkcie 0 istnieje i jest równa 0.

II sposób – składa się z dwóch kroków:

1. krok: Sprawdzamy, czy funkcja f jest ciągła w punkcie 0.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x^2)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^3=0, \quad \text{stąd}$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0 \quad \text{i} \quad f(0)=0$$

Funkcja f jest ciągła w punkcie 0.

2. krok: Obliczamy granice jednostronne funkcji pochodnej f' w punkcie 0:

1) $\lim_{h\to 0^+}f'(x)=\lim_{h\to 0^+}(3x^2)=0$ 2) $\lim_{h\to 0^-}f'(x)=\lim_{h\to 0^-}(-2x)=0$

Otrzymaliśmy granice skończone i równe sobie, $\lim_{h\to 0^+}f'(x)=\lim_{h\to 0^-}f'(x)=0$.

Ponadto funkcja f jest ciągła w punkcie 0. Zatem wspólna wartość obu ostatnio policzonych granic, jest wartością pochodnej funkcji f w punkcie 0, czyli $f'(0)=0$.

Ostatecznie pochodną funkcji f możemy zapisać tak:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0)\\ 0, & \text{jeśli } x=0\\ 3x^2, & \text{jeśli } x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

albo

$$f'(x)=\begin{cases}-2x, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0\rangle\\ 3x^2, & \text{jeśli } x\in(0,+\infty)\end{cases} \quad \text{lub} \quad f'(x)=\begin{cases}-2x, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0)\\ 3x^2, & \text{jeśli } x\in\langle 0,+\infty)\end{cases}$$

UWAGA: Jeśli sprawdzamy istnienie pochodnej funkcji w punkcie „granicznym" sposobem II, to nie możemy pominąć kroku 1. Rozważmy bowiem funkcję:

$$g(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0)\\ x^3+2, & \text{jeśli } x\in\langle 0,+\infty)\end{cases}$$

Funkcja g nie jest ciągła w punkcie 0, nie jest więc różniczkowalna w punkcie 0.

Natomiast funkcja g ma pochodną w dowolnym punkcie różnym od 0, przy czym

$(-x^2)' = -2x$, jeśli $x \in (-\infty, 0)$

$(x^3 + 2)' = 3x^2$, jeśli $x \in (0, +\infty)$

oraz

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(3x^2\right) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0^-} g'(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(-2x\right) = 0$$

W takim razie $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^-} g'(x)$, co błędnie może sugerować istnienie pochodnej funkcji w punkcie 0.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz pochodną funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = 3x^2 - x$ c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$

d) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3$ e) $f(x) = 8x^7 - 2x^4 - x$ f) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 16x + 5$

2. Wyznacz pochodną funkcji f. Podaj dziedzinę tej pochodnej.

a) $f(x) = \frac{3}{x} - x^{-2}$ b) $f(x) = 2\sqrt{x} + x^{-3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{2}\cdot x^3$ d) $f(x) = \left(\sqrt{x} + 2\right)^2$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2}(x - 3)$ f) $f(x) = 2x\left(\sqrt{x} + 5\right)\left(\sqrt{x} - 5\right)$

3. Wyznacz pochodną funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = (x^2 - 3)(x^3 + 1)$ b) $f(x) = (x - 1)^3$

c) $f(x) = (x + 3)^2 \cdot (x^2 - 7)$ d) $f(x) = \left(x^2 + 25\right)\cdot \frac{-4}{x}$

e) $f(x) = (2x + 1)^4$ f) $f(x) = -4\cdot\left(x^{-2} + x^{-3}\right)\cdot\left(x^2 - x^3\right)$.

4. Wyznacz pochodną funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \frac{4}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{5x}{2x+6}$ c) $f(x) = 2x + \frac{5}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1-3x}{x^2-1}$ e) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{1-x}$ f) $f(x) = 3x + 2 - \frac{4x}{3x+2}$

5. Wyznacz pochodną funkcji f. Następnie oblicz wartość funkcji f i wartość tej pochodnej dla argumentu x_0.

a) $f(x) = -x^2 + 5x + 3$, $x_0 = 4$ b) $f(x) = (x - 5)^3$, $x_0 = 5$

c) $f(x) = (x-1)\cdot\frac{2}{x}$, $x_0 = 1$ d) $f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x-2}$, $x_0 = 0$

6. Czy funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze $\boldsymbol{R}$? Odpowiedź uzasadnij.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & \text{jeśli } x < 1 \\ 2x^2 + 1, & \text{jeśli } x \geqslant 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2 + 1{,}5 & \text{jeśli } x \leqslant 1 \\ x^{-1}, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$

Funkcja złożona. Pochodna funkcji złożonej

Przykład 1.

Mamy dane dwie funkcje $f(x) = 3x + 1$, $x \in \boldsymbol{R}$ i $g(x) = x^5$, $x \in \boldsymbol{R}$. Rozważmy następujące przyporządkowanie: najpierw funkcja f liczbie x przyporządkowuje liczbę $3x + 1$, a następnie funkcja g wartości funkcji f przyporządkowuje jej piątą potęgę.

$$x \xrightarrow{f} (3x+1) \xrightarrow{g} (3x+1)^5$$

$$x \xrightarrow{\quad h \quad} (3x+1)^5$$

W ten sposób otrzymujemy nową funkcję, którą możemy opisać wzorem $h(x)=g\big(f(x)\big)$, czyli $h(x) = (3x + 1)^5$. Funkcję h nazwiemy złożeniem funkcji f i g.

Dziedzinę funkcji h tworzą te wszystkie liczby x należące do dziedziny funkcji f, dla których wartości funkcji f należą do dziedziny funkcji g.

Ponieważ $D_f = \boldsymbol{R}$ oraz $ZW_f = \boldsymbol{R} = D_g$, więc dziedziną funkcji h jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Przykład 2.

Rozpatrzmy dwie inne funkcje $f(x) = x - 4$, $x \in \boldsymbol{R}$ i $g(x)=\sqrt{x}$, $x \in \langle 0, +\infty)$.

Złożenie funkcji f i g można opisać wzorem $h(x)=g\big(f(x)\big)$, czyli $h(x)=\sqrt{x-4}$.

$$x \xrightarrow{f} (x-4) \xrightarrow{g} \sqrt{x-4}$$

$$x \xrightarrow{\quad h \quad} \sqrt{x-4}$$

Dziedziną funkcji h jest zbiór tych wszystkich liczb x, dla których wartości funkcji f, czyli liczby $x - 4$, są nieujemne – bowiem dziedzinę funkcji g tworzą tylko liczby nieujemne. Zatem $D_h = \langle 4, +\infty)$.

Przykład 3.

Niech teraz $f(x) = -x^2 - 1$, $x \in \boldsymbol{R}$ i $g(x) = \log x$, $x \in (0, +\infty)$. W przypadku tych funkcji **nie istnieje** złożenie funkcji f i g:

$$x \xrightarrow{f} \left(-x^2-1\right) \xrightarrow{g} \log\left(-x^2-1\right)$$

Tak jest dlatego, że dziedzinę funkcji g tworzą wyłącznie liczby dodatnie, a zbiór wartości funkcji f tworzą tylko liczby ujemne, $D_g \cap ZW_f = \varnothing$. Nie istnieje żadna liczba x, dla której $f(x)$ należy do dziedziny funkcji g.

Powyższe rozważania prowadzą do następującej definicji.

Definicja 1.

Niech będą dane dwie funkcje $f: D_f \to \boldsymbol{R}$ i $g: D_g \to \boldsymbol{R}$, gdzie $D_g \cap ZW_f \neq \emptyset$. Niech $D = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$. Wówczas funkcję, którą będziemy oznaczać $g \circ f$, określoną w zbiorze D następującym wzorem

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

nazywamy **złożeniem funkcji** f i g lub funkcją złożoną z funkcji f i g. Funkcję f będziemy nazywać **funkcją wewnętrzną**, natomiast g – **funkcją zewnętrzną** dla funkcji złożonej $g \circ f$.

Przykład 4.

Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 2, x \in \boldsymbol{R}$ i $g(x) = 4x - 3, x \in \boldsymbol{R}$. Wyznaczymy:
a) złożenie $g \circ f$ b) złożenie $f \circ g$

Ad a) Mamy:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), \text{ czyli}$$
$$(g \circ f)(x) = g\big(x^2 + 2\big)$$
$$(g \circ f)(x) = 4\big(x^2 + 2\big) - 3$$
$$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 5$$

Dziedziną funkcji f oraz g jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Wszystkie wartości funkcji f należą do dziedziny funkcji g, więc dziedziną funkcji $g \circ f$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

Ad b) W tym przypadku otrzymujemy:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big), \text{ czyli}$$
$$(f \circ g)(x) = f(4x - 3)$$
$$(f \circ g)(x) = (4x - 3)^2 + 2$$
$$(f \circ g)(x) = 16x^2 - 24x + 11$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x (z dziedziny funkcji g) wartości funkcji g należą do dziedziny funkcji f, zatem dziedziną złożenia $f \circ g$ jest również zbiór $\boldsymbol{R}$.

Łatwo zauważyć, że funkcje $g \circ f$ i $f \circ g$ z przykładu 1. nie są równe. Możemy więc sformułować wniosek.

Składanie funkcji nie jest przemienne.

Przykład 5.

Dane są funkcje $f(x) = \sqrt{x}, x \in \langle 0, +\infty)$ i $g(x) = x^2 - 1, x \in \boldsymbol{R}$. Wyznaczymy złożenie $g \circ f$.

Mamy

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big),\quad \text{czyli}\quad (g\circ f)(x)=g\left(\sqrt{x}\right),\quad \text{zatem}$$

$$(g\circ f)(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2-1$$

$$(g\circ f)(x)=x-1$$

Zgodnie z definicją 1. – dziedziną złożenia $g\circ f$ jest zbiór tych wszystkich x z dziedziny funkcji f – czyli z przedziału $\langle 0, +\infty)$ – dla których $f(x)$ należy do dziedziny funkcji g – czyli do zbioru $\boldsymbol{R}$. Zatem dziedziną złożenia $g\circ f$ jest przedział $\langle 0, +\infty)$.

Ćwiczenie 1. Wiedząc, że f i g są funkcjami z przykładu 5., wyznacz złożenie $f\circ g$. Nie zapomnij podać dziedziny tego złożenia.

W dalszej części tematu zajmiemy się pochodną funkcji złożonej. Rozważmy najpierw funkcję wielomianową

$$h(x)=\left(x^2+1\right)^4$$

Możemy ją przedstawić jako złożenie dwóch funkcji

$h=g\circ f$, gdzie $f(x) = x^2 + 1$ – funkcja wewnętrzna

$w = x^2 + 1$

$g(w) = w^4$ – funkcja zewnętrzna

Obliczymy pochodną funkcji h i zapiszemy ją za pomocą pochodnych funkcji f i g.

Zapisujemy wzór funkcji h w postaci sumy jednomianów:

$$h(x) = x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1,$$

wówczas

$$h'(x) = 8x^7 + 24x^5 + 24x^3 + 8x.$$

Zauważmy, że

$$8x^7 + 24x^5 + 24x^3 + 8x = 8x(x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) = 2x \cdot 4(x^2 + 1)^3$$

Zatem

$$h'(x)=\underbrace{4\left(x^2+1\right)^3}_{g'(f(x))}\cdot\underbrace{2x}_{f'(x)}$$

Otrzymaliśmy $(g\circ f)'(x)=g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$

Otrzymana zależność między pochodną funkcji $g\circ f$ oraz pochodnymi funkcji f i g jest też prawdziwa w przypadku innych funkcji.

Twierdzenie 1. *O pochodnej funkcji złożonej*

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x, a funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x)$, to funkcja złożona $g \circ f$ ma pochodną w punkcie x i prawdziwa jest równość

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

Dowód: Zgodnie z definicją pochodnej funkcji w punkcie, wystarczy pokazać, że prawdziwa jest równość

$$\lim_{h \to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{h} = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

Załóżmy, że jeśli $h \neq 0$, to $f(x+h) \neq f(x)$. Wówczas ułamek po lewej stronie powyższej równości możemy zapisać w postaci

$$\frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jeśli $h \to 0$, to z założenia istnieje pochodna funkcji f w punkcie x oraz

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Oznaczmy różnicę $f(x+h) - f(x)$ przez k. Wówczas

$$\frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h) - f(x)} = \frac{g\big(f(x)+k\big) - g\big(f(x)\big)}{k}$$

Funkcja f ma pochodną w punkcie x, więc jest ciągła w punkcie x. Zatem

jeśli $h \to 0$, to $\big(f(x+h) - f(x)\big) \to 0$, czyli $k \to 0$.

Mamy więc

$$\lim_{h \to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{k \to 0} \frac{g\big(f(x)+k\big) - g\big(f(x)\big)}{k} = g'\big(f(x)\big)$$

Ostatnia równość wynika z założenia, że istnieje pochodna funkcji g w punkcie $f(x)$. Tak więc pokazaliśmy, że

$$\lim_{h \to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h) - f(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

co kończy dowód w przypadku, gdy $f(x+h) - f(x) \neq 0$. Dowód w przypadku $f(x+h) - f(x) = 0$ pomijamy.

Twierdzenie 1. można krótko wypowiedzieć następująco.

Pochodna funkcji złożonej równa się iloczynowi pochodnej funkcji zewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej.

Przykład 6.

Wyznaczymy pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 1)^5$ b) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$

Ad a) Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Funkcja $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 1)^5$ jest funkcją złożoną. Możemy przyjąć:

$y = w^5$ – funkcja zewnętrzna, $(w^5)' = 5w^4$

$w = x^3 + 2x^2 + 1$ – funkcja wewnętrzna, $(x^3 + 2x^2 + 1)' = 3x^2 + 4x$

Obliczamy:

$$\left(\left(x^3+2x^2+1\right)^5\right)'=5\left(x^3+2x^2+1\right)^4\cdot\left(x^3+2x^2+1\right)'=5\left(x^3+2x^2+1\right)^4\left(3x^2+4x\right)$$

Tak więc $f'(x)=5\left(x^3+2x^2+1\right)^4\left(3x^2+4x\right)$, $D_{f'} = D_f = \boldsymbol{R}$

Ad b) Dziedzinę funkcji $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$ tworzą wszystkie liczby rzeczywiste, spełniające warunek

$x^2-3x\geqslant 0$, czyli

$x(x-3)\geqslant 0$

$x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty)$, $D_f = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty)$

Funkcja $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$ jest funkcją złożoną.

$y=\sqrt{w}$ – funkcja zewnętrzna, $\left(\sqrt{w}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{w}}$

$w = x^2 - 3x$ – funkcja wewnętrzna, $(x^2 - 3x)' = 2x - 3$

Mamy

$$\left(\sqrt{x^2-3x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-3x}}\cdot\left(x^2-3x\right)'=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$$

Otrzymaliśmy

$$f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}},\quad D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

Ćwiczenie 2. Oblicz pochodną funkcji: a) $f(x) = (2x^2 - 1)^6$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$.
Podaj dziedzinę funkcji f i dziedzinę pochodnej tej funkcji.

Korzystając z własności pochodnej funkcji złożonej, udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

Jeśli x_0 jest n-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to x_0 jest $(n-1)$-krotnym pierwiastkiem jego pochodnej, $n \in \boldsymbol{N}_+$.

Dowód: Rozważmy funkcję wielomianową $y = W(x)$, gdzie $W(x) = (x-x_0)^n \cdot P(x)$ i $P(x)$ jest takim wielomianem, że x_0 nie jest jego pierwiastkiem. Zatem

$$W'(x)=\left((x-x_0)^n\cdot P(x)\right)'=\left((x-x_0)^n\right)'\cdot P(x)+(x-x_0)^n\cdot P'(x)=$$

$$=n(x-x_0)^{n-1}\cdot(x-x_0)'\cdot P(x)+(x-x_0)^n\cdot P'(x)=$$

$$=n(x-x_0)^{n-1}\cdot 1\cdot P(x)+(x-x_0)^n\cdot P'(x)$$

Tak więc

$$W'(x)=n(x-x_0)^{n-1}P(x)+(x-x_0)^{n-1+1}P'(x),\ \text{czyli}$$

$$W'(x)=(x-x_0)^{n-1}\left[n\cdot P(x)+(x-x_0)\cdot P'(x)\right]$$

Niech $Q(x) = n \cdot P(x) + (x-x_0) \cdot P'(x)$. Mamy

$$W'(x) = (x-x_0)^{n-1} \cdot Q(x)$$

Sprawdzamy, że liczba x_0 nie jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$.

$$Q(x_0) = n \cdot P(x_0) + (x_0 - x_0) \cdot P'(x_0) = n \cdot P(x_0) + 0 = n \cdot P(x_0)$$

Z założenia x_0 nie jest pierwiastkiem wielomianu $P(x)$ i $n \in \boldsymbol{N}_+$, więc $n \cdot P(x_0) \neq 0$.

Zatem liczba x_0 jest $(n-1)$-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W'(x)$,

co kończy dowód

UWAGA: Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2. nie jest prawdziwe. Na przykład, jeśli $W(x) = x^2 - 2x$, to $W'(x) = 2x - 2$, $x \in \boldsymbol{R}$. Pierwiastkiem jednokrotnym pochodnej $W'(x)$ jest liczba 1. Ale liczba 1 nie jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Twierdzenie 3.

Jeśli $W(x)$ jest wielomianem st. $W(x) \geqslant 2$ oraz $W(x_0) = 0$ i $W'(x_0) = 0$, to liczba x_0 jest co najmniej dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Dowód: Niech $y = W(x)$ będzie funkcją wielomianową st. $W(x) \geqslant 2$ i $W(x_0) = 0$. Wówczas

$W(x) = (x-x_0) \cdot Q(x)$, gdzie st. $Q(x) \geqslant 1$.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji.

$$W'(x) = (x-x_0)' \cdot Q(x) + (x-x_0) \cdot Q'(x) = Q(x) + (x-x_0) \cdot Q'(x),\ \text{st. } Q(x) \geqslant 1.$$

Obliczamy $W'(x_0)$:

$$W'(x_0) = Q(x_0) + (x_0 - x_0)\cdot Q'(x_0) = Q(x_0) + 0 = Q(x_0)$$

Z założenia $W'(x_0) = 0$, czyli $Q(x_0) = 0$. Wówczas istnieje wielomian $P(x)$ taki, że $Q(x) = (x - x_0)\cdot P(x)$ i st. $P(x) \geqslant 0$. A to znaczy, że $W(x) = (x - x_0)^2\cdot P(x)$,

co kończy dowód.

Przykład 7.

Wyznaczymy liczby a i b, dla których liczba -2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, gdzie $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x - 4$.

Na mocy twierdzenia 3. liczba -2 jest pierwiastkiem co najmniej dwukrotnym wielomianu $W(x)$, jeśli spełniony jest układ warunków

$$\begin{cases} W(-2) = 0 \\ W'(-2) = 0 \end{cases}$$

Obliczamy:

$$W(-2) = 16 - 8a + 4b + 8 - 4 = 0$$

$$W'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx - 4, \quad \text{więc}$$

$$W'(-2) = -32 + 12a - 4b - 4 = 0$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} -8a + 4b = -20 \\ 12a - 4b = 36 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a = 16 \\ 4b = -20 + 32 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Należy jeszcze uzasadnić, że dla wyznaczonych liczb a i b liczba -2 nie jest pierwiastkiem trzykrotnym.

Przypuśćmy, że -2 jest pierwiastkiem trzykrotnym wielomianu $W(x)$. Wówczas z twierdzenia 2. wynika, że -2 jest pierwiastkiem dwukrotnym pochodnej $W'(x)$, gdzie $W'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 6x - 4$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Wprowadźmy oznaczenie:

$$F(x) = 4x^3 + 12x^2 + 6x - 4$$

Jeśli liczba -2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $F(x)$, to jest pierwiastkiem jednokrotnym pochodnej $F'(x)$. Obliczamy:

$$F'(x) = 12x^2 + 24x + 6$$

$$F'(-2) = 12 \cdot 4 + 24\cdot(-2) + 6 = 6 \neq 0$$

Liczba -2 nie jest pierwiastkiem wielomianu $F'(x)$. Otrzymaliśmy sprzeczność z przypuszczeniem, że liczba -2 jest pierwiastkiem trzykrotnym wielomianu $W(x)$.

Liczba -2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $W(x)$ wtedy, gdy $a = 4$, $b = 3$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dane są wzory funkcji f i g. Wyznacz złożenia $g \circ f$, $f \circ g$ oraz dziedziny tych złożeń.
   a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 5$
   b) $f(x) = (x + 1)(x - 3)$, $g(x) = x^3$
   c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 9 - x^2$
   d) $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{x+1}$
   e) $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = x^2 - 1$
   f) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x+4}$

2. Wyznacz pochodną funkcji f. Podaj dziedzinę pochodnej.
   a) $f(x) = (4x^2 - x)^5$
   b) $f(x) = (5x^3 + 10x)^2$
   c) $f(x) = -2(x^2 - 1)^3$
   d) $f(x) = 6\left(\frac{3}{x} - 5\right)^4$
   e) $f(x) = \left(\frac{2x+1}{4x}\right)^2$
   f) $f(x) = 5x\left(2x^5 - \frac{1}{3x}\right)^3$

3. Wyznacz pochodną funkcji f. Podaj dziedzinę pochodnej.
   a) $f(x) = 3\sqrt{x^2 + 1}$
   b) $f(x) = 1 - \sqrt{1 - 2x}$
   c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$
   d) $f(x) = x\sqrt{2x + 1}$
   e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$
   f) $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)(x^2 + 3)}$

4. Wyznacz pochodną funkcji f. Następnie oblicz $f'(x_0)$, jeśli:
   a) $f(x) = 2 \cdot (2x - 9)^5$, $x_0 = 4$
   b) $f(x) = (-2x)^3 \cdot (3x + 1)^2$, $x_0 = 1$
   c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$, $x_0 = 2$
   d) $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$, $x_0 = -2$.

5. Wiadomo, że $h = g \circ f$ i $g(1) = -3$, $g'(1) = 3$, $f(1) = 1$ i $f'(1) = 7$. Oblicz $h(1) + h'(1)$.

6. Wiadomo, że $h = g \circ f$ i $g(4) = 5$, $g'(4) = -6$, $f(4) = 4$ i $h'(4) = 2$. Oblicz $h(4)$ i $f'(4)$.

D 7. Wykaż, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze $\boldsymbol{R}$ oraz:
   a) f jest funkcją nieparzystą, to f' jest funkcją parzystą;
   b) f jest funkcją parzystą, to f' jest funkcją nieparzystą.

8. Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Wiadomo, że $f(-2) = 2$, $f'(-2) = -11$ oraz $g(x) = \left[f(x) + x^3\right]^4$, $x \in \boldsymbol{R}$. Oblicz $g(-2)$ i $g'(-2)$.

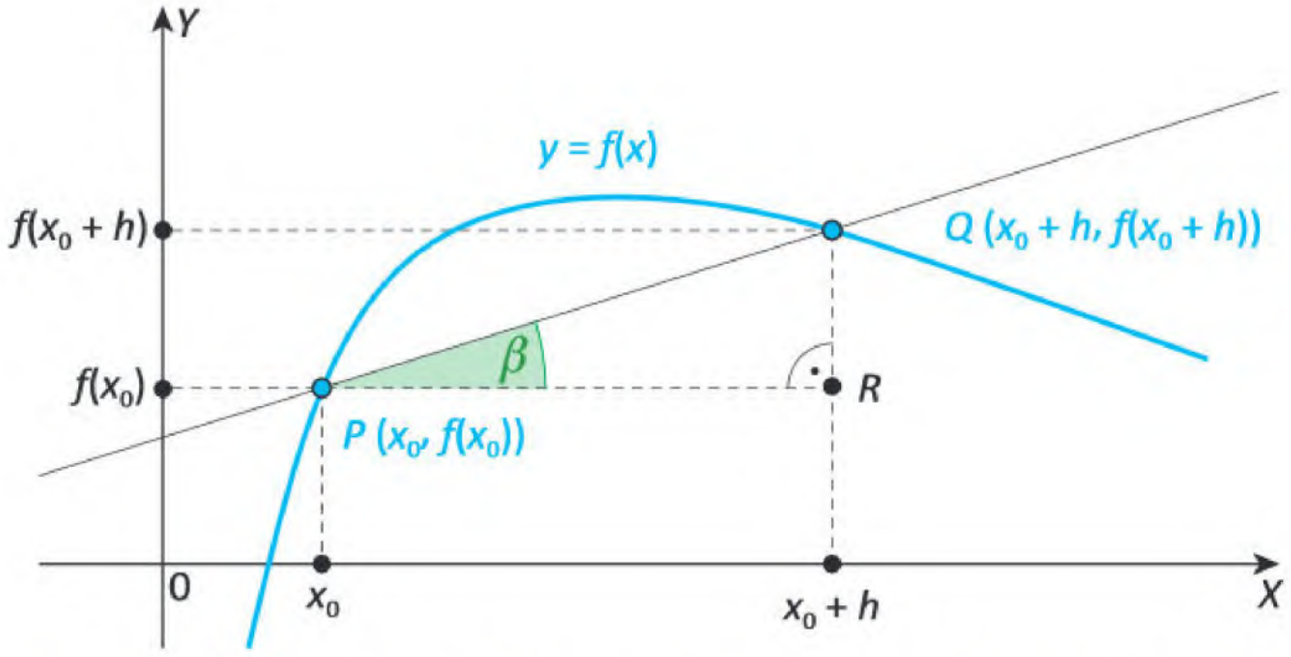
9. Funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze $\boldsymbol{R}$ oraz $g(x) = \frac{1}{f(x) + 2x}$, $x \in \boldsymbol{R}$. Wiedząc, że $f(1) = 3$ i $f'(1) = 2$, oblicz $g(1)$ i $g'(1)$.

10. Funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze $\boldsymbol{R}$ oraz $g(x) = \sqrt{1 + f^2(x)}$, $x \in \boldsymbol{R}$. Wiedząc, że $f(3) = 1$ i $f'(3) = 2$, oblicz $g(3)$ i $g'(3)$.

11. Funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Wiadomo, że $f(5) = 4$, $f'(5) = -1$ oraz $g(x) = \left[f(x) + 1\right] \cdot \left[f^2(x) + x^2\right]$, $x \in \boldsymbol{R}$. Oblicz $g(5)$ i $g'(5)$.

Styczna do wykresu funkcji

Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu $U(x_0)$ oraz niech będzie różniczkowalna w samym punkcie x_0. Ponadto niech h będzie liczbą rzeczywistą, dla której $(x_0 + h) \in U(x_0)$. Rozważmy punkty $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ oraz $Q\left(x_0+h, f\left(x_0+h\right)\right)$ należące do wykresu funkcji f. Przez te punkty prowadzimy prostą (rysunek poniżej przedstawia przypadek $h > 0$).

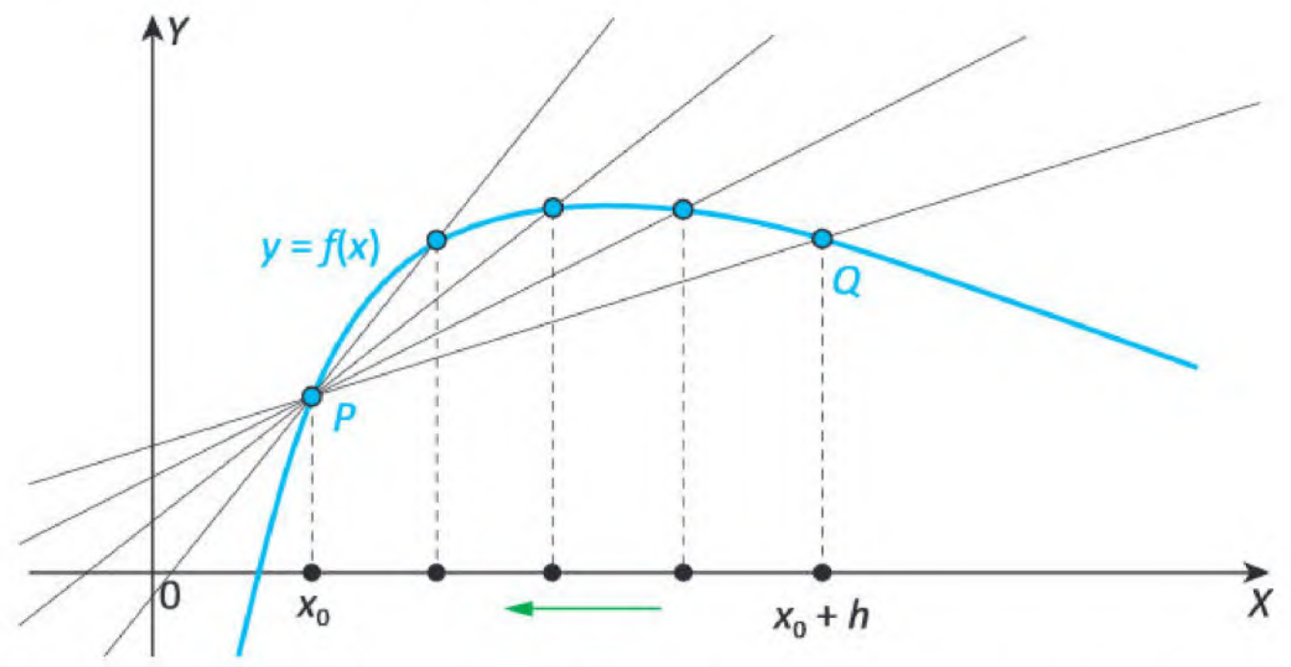


Taką prostą nazywamy sieczną wykresu funkcji f, przechodzącą przez punkty P, Q. Oznaczmy miarę kąta RPQ przez β. Wyznaczamy tg β:

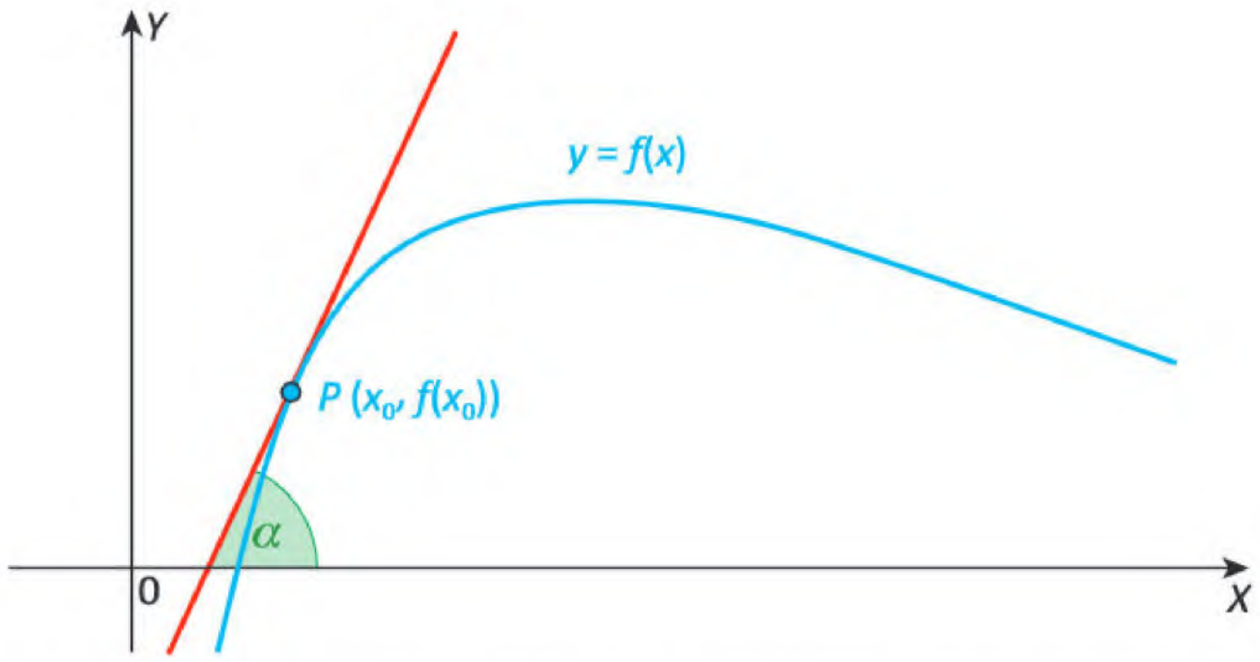
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

Okazuje się, że iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0, odpowiadający zmianie argumentu h, jest współczynnikiem kierunkowym rozważanej siecznej.

Zobaczmy, co się będzie działo, jeśli h będzie dążyć do 0. Wówczas punkt Q będzie „coraz bliżej" punktu P (zobacz rysunek poniżej).



Jeśli h będzie bardzo blisko 0, to punkty wykresu, przez które przechodzi sieczna, będą prawie się pokrywać. W przypadku granicznym otrzymujemy prostą, którą nazywamy styczną do wykresu funkcji f w punkcie P (na kolejnym rysunku).



Oznaczmy kąt nachylenia stycznej do osi *OX* przez α. Zauważmy, że

jeśli $h \to 0$, to $\operatorname{tg}\beta \to \operatorname{tg}\alpha$, czyli

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0),$$

a to znaczy, że współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji *f* w punkcie *P* jest równy $f'(x_0)$,

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

Wyznaczmy zatem równanie stycznej do wykresu funkcji *f* w punkcie x_0. Równanie prostej w postaci kierunkowej to

$$y = ax + b.$$

Wiemy, że punkt $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ należy do tej prostej oraz $a = f'(x_0)$, wobec tego

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0,$$

które można przekształcić do postaci

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Rozważania te prowadzą nas do następującej definicji.

Definicja 1.

Niech funkcja *f* będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie.

Styczną do wykresu funkcji *f* w punkcie $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ nazywamy prostą opisaną równaniem:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Przykład 1.

Wyznaczymy równanie stycznej poprowadzonej do wykresu funkcji

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ w punkcie $P(1, y_0)$.

Wyznaczamy rzędną punktu P:

$y_0 = f(1) = 1 - 3 + 2 + 2 = 2$

Obliczamy pochodną f' funkcji f oraz $f'(1)$:

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

stąd

$f'(1) = -1$

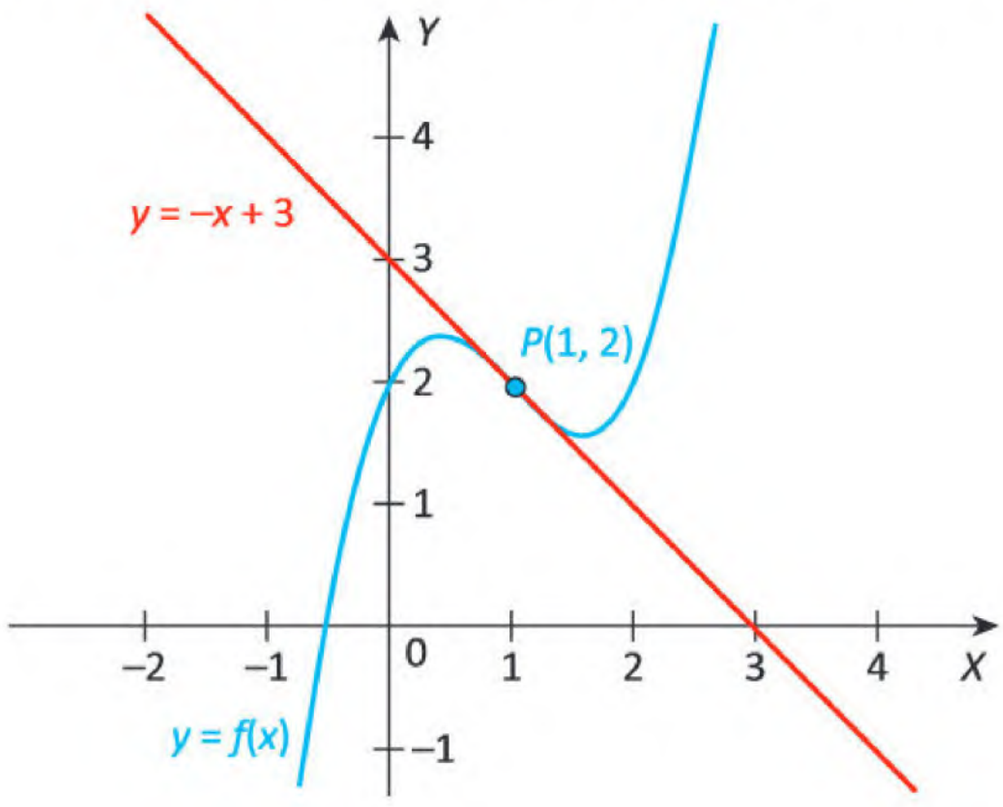
Zapisujemy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P:

$y - 2 = -1(x - 1)$,

czyli

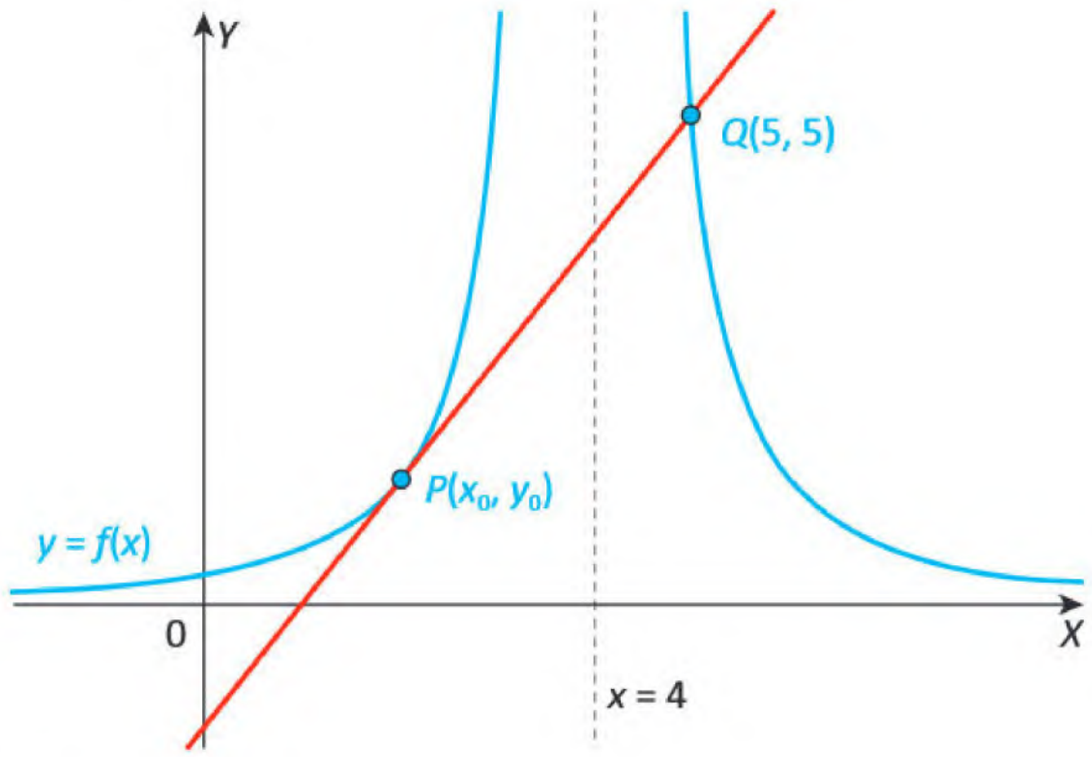
$y = -x + 3$

Rozwiązanie zadania ilustruje rysunek poniżej. Zauważ, że styczna przecina wykres funkcji f w punkcie styczności. O stycznej do wykresu funkcji możemy myśleć następująco: jest to taka prosta, której niewielki odcinek w pobliżu punktu styczności najlepiej „przybliża" niewielki fragment tego wykresu (w pobliżu punktu styczności). Nie jest tu istotna liczba punktów wspólnych stycznej i wykresu funkcji.



Przykład 2.

Rysunek na drugiej stronie przedstawia szkic wykresu funkcji $f(x) = \frac{5}{(x-4)^2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{4\}$, oraz styczną do wykresu funkcji f w punkcie P, która jednocześnie przecina wykres funkcji f w punkcie $Q(5, 5)$. Wyznaczymy współrzędne punktu P oraz równanie tej stycznej.



Obliczamy pochodną funkcji f.

$$\left(\frac{5}{(x-4)^2}\right)' = \frac{(5)'\cdot(x-4)^2 - 5\cdot\left((x-4)^2\right)'}{(x-4)^4} = \frac{0-5\cdot 2(x-4)\cdot 1}{(x-4)^4} = \frac{-10}{(x-4)^3}$$

Zatem

$$f'(x) = \frac{-10}{(x-4)^3}, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R} - \{4\}$$

Zapisujemy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P(x_0, y_0)$:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, gdzie

$$f(x_0) = \frac{5}{(x_0-4)^2} \quad \text{oraz} \quad f'(x_0) = \frac{-10}{(x_0-4)^3}$$

Do stycznej należy też punkt Q. Uwzględniając jego współrzędne, otrzymujemy równanie

$$5 - \frac{5}{(x_0-4)^2} = \frac{-10}{(x_0-4)^3}\cdot(5-x_0) \qquad / \cdot \frac{1}{5}(x_0-4)^3$$

$$(x_0-4)^3 - (x_0-4) + 2(5-x_0) = 0$$

Rozkładamy lewą stronę równania na czynniki:

$$(x_0-4)[(x_0-4)^2 - 1] - 2(x_0-5) = 0$$
$$(x_0-4)(x_0-5)(x_0-3) - 2(x_0-5) = 0$$
$$(x_0-5)[(x_0-4)(x_0-3) - 2] = 0$$
$$(x_0-5)(x_0^2 - 7x_0 + 10) = 0$$

Otrzymujemy

$$x_0 - 5 = 0 \quad \vee \quad x_0^2 - 7x_0 + 10 = 0$$
$$\Delta = 9 \qquad \sqrt{\Delta} = 3$$
$$x_0 = 5 \quad \vee \quad x_0 = 2 \quad \vee \quad x_0 = 5$$

Punkty P i Q nie pokrywają się, więc odcięta punktu P jest równa 2.

$$x_0 = 2 \qquad f(2) = \frac{5}{(2-4)^2} = \frac{5}{4} \qquad P\left(2, \frac{5}{4}\right)$$

Wyznaczamy równanie stycznej:

$$f'(2)=\frac{-10}{(2-4)^3}=\frac{5}{4}, \quad \text{stąd} \qquad y-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}(x-2), \quad \text{czyli}$$

$$y=\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}$$

Punkt P ma współrzędne $\left(2,\frac{5}{4}\right)$. Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P jest następujące: $y=\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}$.

Załóżmy, że wykresy funkcji f i g przecinają się w punkcie, w którym można poprowadzić styczną do każdego z tych wykresów. Kąt między tymi stycznymi nazywamy **kątem przecięcia się wykresów funkcji** f i g (kątem, pod jakim przecinają się wykresy funkcji f i g).

Przykład 3.

Wykażemy, że wykresy funkcji $f(x)=\sqrt{x}$ oraz $g(x)=\sqrt{5-4x}$ przecinają się pod kątem prostym.

Wykresy funkcji przecinają się pod kątem prostym, jeśli styczne tych wykresów w punkcie przecięcia są prostopadłe. Najpierw wyznaczamy odciętą punktu wspólnego obu wykresów

$$\sqrt{x}=\sqrt{5-4x}, \quad x\in\left\langle 0,\frac{5}{4}\right\rangle \quad \text{stąd}$$

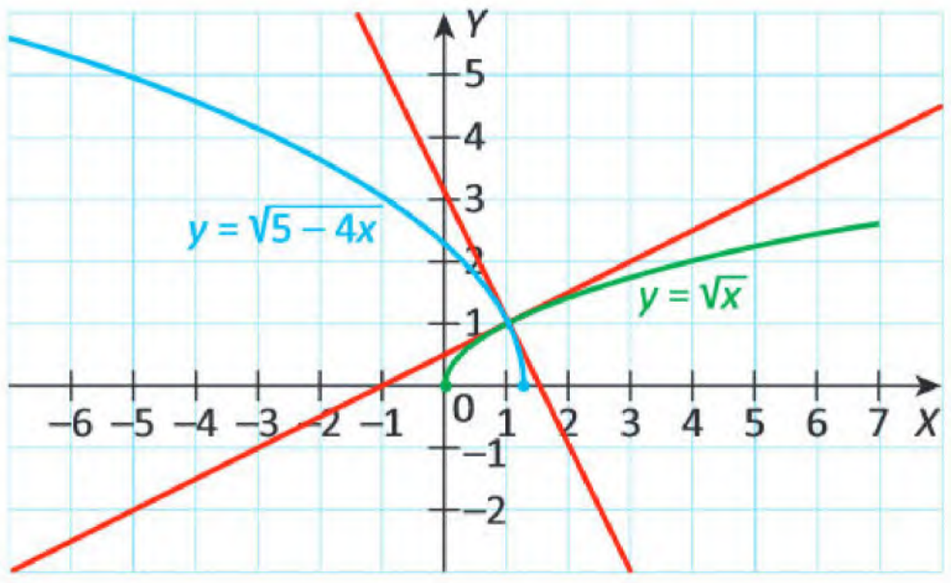
$$x=5-4x, \quad \text{czyli}$$

$$x=1, \qquad 1\in\left\langle 0,\frac{5}{4}\right\rangle$$

Obliczamy współczynniki kierunkowe stycznych. Mamy

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{więc} \quad f'(1)=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=\frac{-2}{\sqrt{5-4x}} \quad \text{stąd} \quad g'(1)=-2$$



Otrzymaliśmy, że

$$f'(1)\cdot g'(1)=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$$

Iloczyn współczynników kierunkowych prostych jest równy –1, a to znaczy, że proste są prostopadłe, czyli wykresy funkcji f i g przecinają się pod kątem prostym.

Ćwiczenie 1. Napisz równania stycznych do wykresów funkcji f i g, których dotyczy przykład 3.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x$ w punkcie $P(-1, 3)$. Czy ta styczna ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f? Odpowiedź uzasadnij.

2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie o rzędnej -1. Czy ta styczna ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f? Odpowiedź uzasadnij.

3. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -x^4$ w punkcie o odciętej 1. Czy ta styczna ma tylko jeden punkt wspólny z wykresem funkcji f? Odpowiedź uzasadnij.

4. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x)=\frac{3}{x}$, które są równoległe do prostej k: $y=-\frac{x}{3}$. Podaj współrzędne punktów styczności tych prostych z wykresem funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji f wraz z tymi stycznymi w układzie współrzędnych.

5. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, które są równoległe do osi OX.
   a) Podaj współrzędne punktów styczności tych prostych z wykresem funkcji f.
   b) Wyznacz pozostałe punkty wspólne tych stycznych z wykresem funkcji f.

6. Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2\frac{1}{3}$, które są prostopadłe do prostej $y = -0{,}2x$. Podaj współrzędne punktów wspólnych tych stycznych z wykresem funkcji f.

7. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$, przechodzącej przez punkt $B(0, -1)$

8. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)=2\sqrt{x}$, przechodzącej przez punkt $A(-1, 0)$.

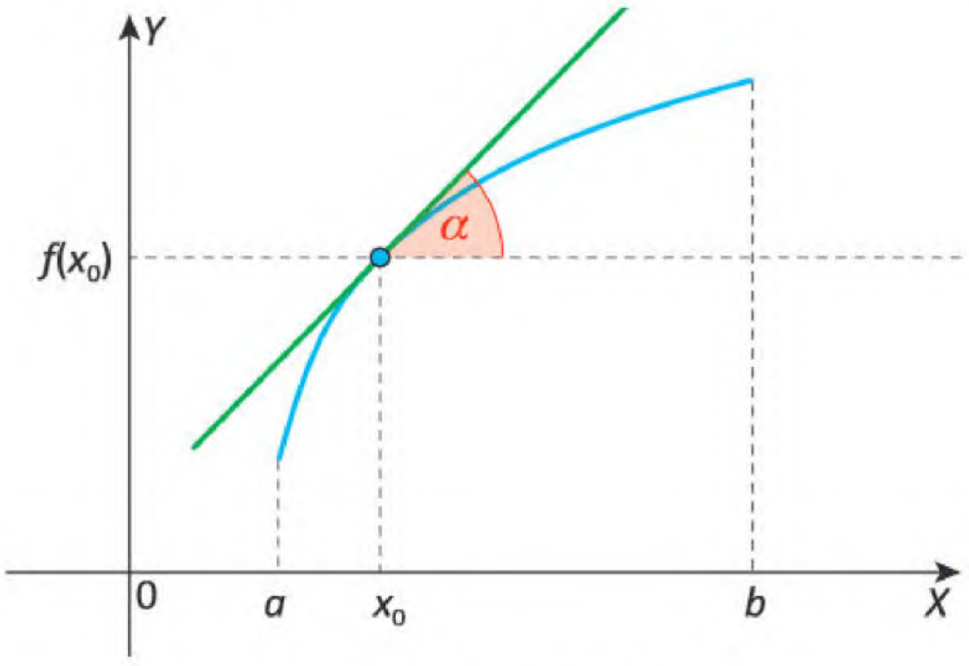
D 9. Naszkicuj wykresy funkcji $f(x) = -x^2 + 2$ oraz $g(x)=\sqrt{-x}$. Następnie wykaż, że te wykresy przecinają się pod kątem prostym.

D 10. Wykaż, że styczne do wykresu funkcji $f(x)=\frac{2}{x}+3x$ w punktach mających przeciwne odcięte są równoległe.

Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

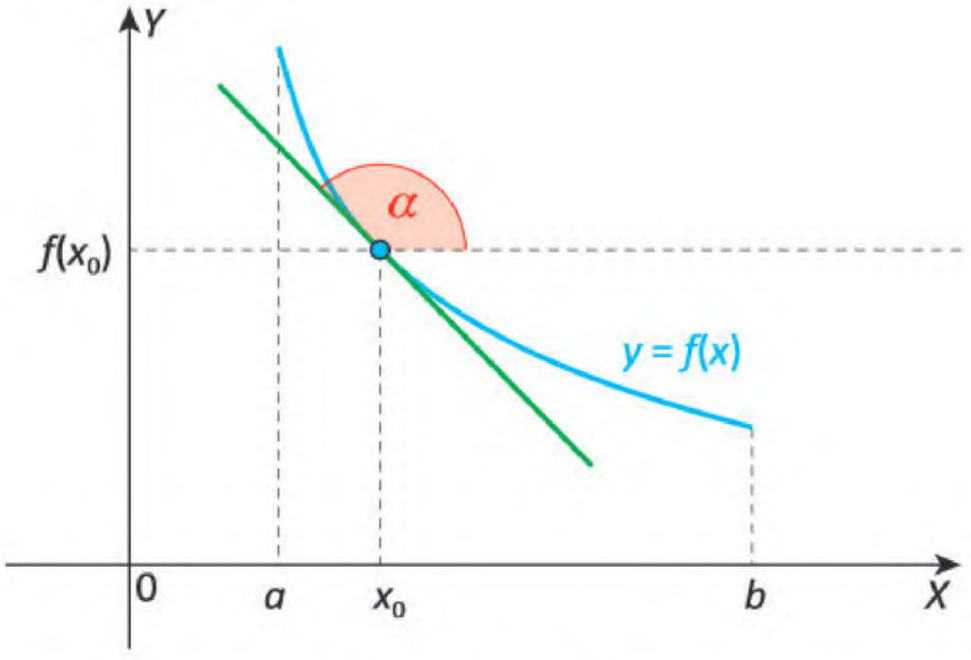
W tym temacie zajmiemy się związkiem między pochodną funkcji, a monotonicznością tej funkcji. Jak już wiesz, pochodna funkcji f w punkcie x_0 jest współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

a) $f'(x_0) > 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha > 0$

b) $f'(x_0) < 0$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha < 0$

Rysunek a) ilustruje przypadek, gdy $f'(x_0) > 0$. Wtedy styczna do wykresu funkcji f w punkcie $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ jest nachylona do osi OX pod kątem ostrym. Funkcja liniowa, której wykresem jest ta prosta, jest funkcją rosnącą. Można powiedzieć, że jeśli $f'(x_0) > 0$, to wykres funkcji f wokół punktu $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ najlepiej przybliża odcinek prostej, będącej wykresem rosnącej funkcji liniowej. Spodziewamy się więc, że jeśli pochodna f' jest dodatnia, to funkcja f jest rosnąca. Rzeczywiście, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b) oraz dla każdej liczby x z tego przedziału $f'(x) > 0$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b).

Rysunek b) ilustruje przypadek, gdy $f'(x_0) < 0$. Wówczas styczna do wykresu funkcji f w punkcie $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ jest nachylona do osi OX pod kątem rozwartym. Zatem funkcja liniowa, której wykresem jest ta prosta, jest funkcją malejącą. W tym przypadku powiemy, że wykres funkcji f wokół punktu $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ najlepiej przybliża odcinek prostej, będącej wykresem malejącej funkcji liniowej.

Twierdzenie 2.

Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b) oraz dla każdej liczby x z tego przedziału $f'(x) < 0$, to funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b).

Przypuśćmy teraz, że funkcja f ma w każdym punkcie przedziału (a, b) pochodną równą 0. Wówczas styczna do wykresu tej funkcji w każdym z tych punktów jest równoległa do osi OX. Wtedy funkcja f jest stała w przedziale (a, b).

Twierdzenie 3.

Niech funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b). Funkcja f jest stała w przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$ dla każdej liczby x należącej do przedziału (a, b).

Przykład 1.

Dana jest funkcja wielomianowa $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$. Wyznaczymy otwarte przedziały monotoniczności funkcji f.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Wyznaczamy pochodną:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

Rozwiązujemy nierówności:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[6(x-1)(x-2) > 0 \wedge x \in D_{f'}\right] \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ oraz $(2, +\infty)$, natomiast jest malejąca w przedziale $(1, 2)$.

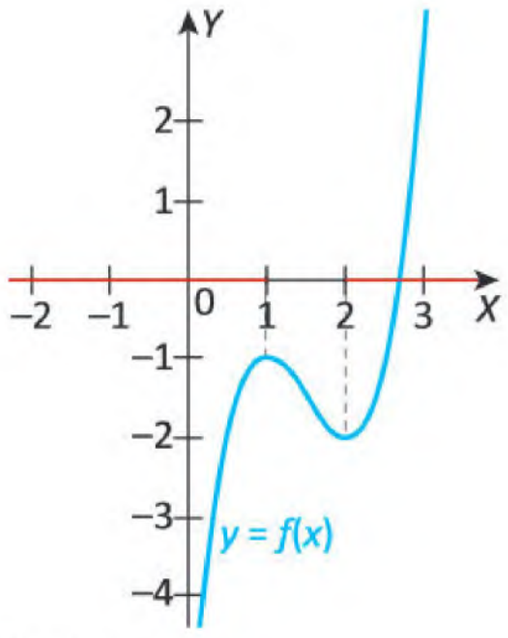
UWAGA: Przypomnijmy z klasy pierwszej: jeśli funkcja jest rosnąca w dwóch przedziałach, to nie wynika z tego, że jest rosnąca w sumie tych przedziałów. Na rysunku poniżej jest przedstawiony wykres funkcji $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$ ilustrujący tę sytuację.

Funkcja f nie jest rosnąca w zbiorze

$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Funkcja f jest rosnąca w przedziałach:

$(-\infty, 1)$, $(2, +\infty)$.



Poprawny jest zapis mówiący, że

pochodna funkcji f jest dodatnia w sumie przedziałów.

Natomiast wynikający stąd wniosek, dotyczący funkcji f jest taki, że

funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów.

Ćwiczenie 1. Wykaż, że funkcja wymierna $f(x) = \frac{1}{x^3}$ jest malejąca w przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Czy ta funkcja jest malejąca w zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$?

W przykładzie 1. zastosowaliśmy bezpośrednio twierdzenia 1., 2. i wyznaczyliśmy otwarte przedziały monotoniczności. Czy – jeśli domkniemy te przedziały odpowiednio w punktach 1 oraz 2 – to otrzymamy poprawnie określone przedziały monotoniczności funkcji f? Oczywiście tak, bowiem funkcja f jest ciągła.

Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz:

a) funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b), to jest również rosnąca w przedziale $\langle a, b\rangle$

b) funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b), to jest również malejąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 1\rangle$, $\langle 2, +\infty)$ i malejąca w przedziale $\langle 1, 2\rangle$. Te przedziały są maksymalnymi przedziałami monotoniczności funkcji f.

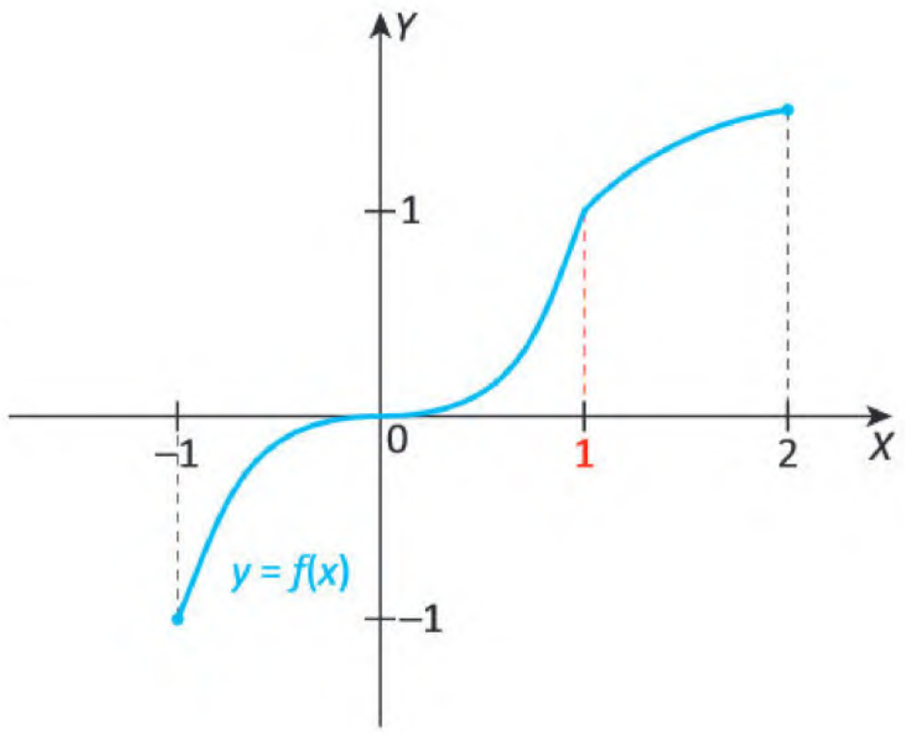
Ćwiczenie 2. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^3 + 3x^2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Zauważ, że twierdzenia 1. i 2. zostały sformułowane za pomocą implikacji. Okazuje się bowiem, że twierdzenia odwrotne do tych twierdzeń nie są prawdziwe. Może się zdarzyć, że funkcja jest rosnąca w przedziale (a, b), (odpowiednio malejąca w przedziale (a, b)) – a mimo to istnieją punkty należące do przedziału (a, b), w których pochodna tej funkcji jest równa 0 lub w ogóle nie istnieje.

Przykładem jest funkcja określona w przedziale $(-1, 2)$ następująco:

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{jeśli } x\in(-1,1\rangle \\ \dfrac{-1}{x}+2, & \text{jeśli } x\in(1,2) \end{cases}$$

Rysunek obok przedstawia wykres funkcji f, z którego odczytujemy, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-1, 2)$.



Wyznaczmy pochodną funkcji f.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & \text{jeśli } x\in(-1,1) \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{jeśli } x\in(1,2) \end{cases}$$

Pochodna funkcji f w punkcie 0 jest równa 0. Pochodna funkcji f w punkcie 1 nie istnieje.

Przykład 2.

Wyznaczymy maksymalne przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 5x^3 - 3x^5$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f i badamy znak pochodnej:

$$f'(x) = 15x^2 - 15x^4, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[-15x^2(x-1)(x+1) > 0 \wedge x \in D_{f'}\right] \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

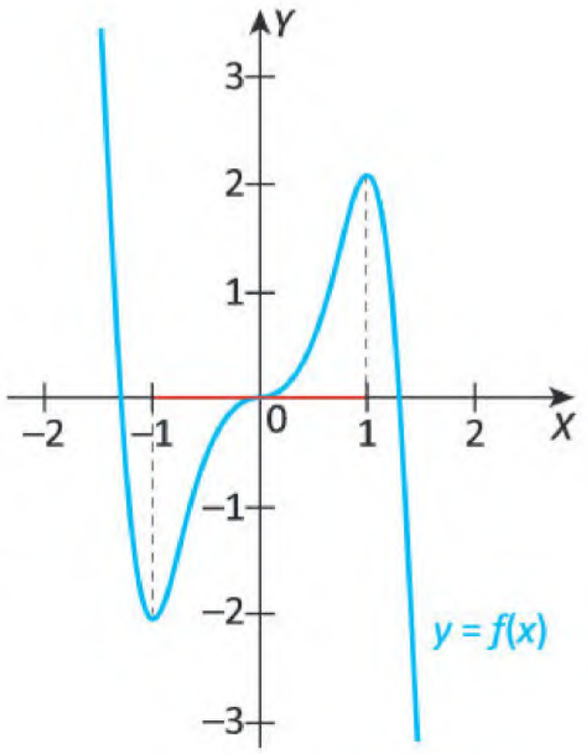
Wiemy, że funkcja f jest ciągła w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja f jest:
– rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -1, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$
– malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$.

Zauważ, że przedziały $\langle -1, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, w których funkcja f jest rosnąca, mają wspólny koniec. Jest nim punkt 0 i należy on do części wspólnej tych przedziałów.

To znaczy, że funkcja f jest rosnąca w sumie tych przedziałów, czyli w przedziale $\langle -1, 1\rangle$. Jednocześnie $f'(0) = 0$.

Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ i malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$.



Prawdziwe jest natomiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.

Jeżeli funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b) oraz:
a) funkcja f jest rosnąca w tym przedziale, to $f'(x) \geqslant 0$ dla każdej liczby x należącej do przedziału (a, b)
b) funkcja f jest malejąca w tym przedziale, to $f'(x) \leqslant 0$ dla każdej liczby x należącej do przedziału (a, b).

Już wiesz, że rachunek pochodnych pozwala badać, w jakich przedziałach dana funkcja jest rosnąca, w jakich malejąca. W następnych tematach przekonasz się, że pozwala również ustalić, czy funkcja przyjmuje największą lub najmniejszą wartość, a jeśli tak – ile ta wartość jest równa i dla jakiego argumentu jest przyjmowana.

Powstaje pytanie: czy nie byłoby prościej naszkicować wykres takiej funkcji – na przykład za pomocą kalkulatora graficznego – a następnie z wykresu odczytać interesujące nas informacje?

Aby się przekonać, że to nie musi być łatwe, spróbuj wyznaczyć największą wartość funkcji $y = -0{,}001x^4 + x^3 - x^2 + 2$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Możesz skorzystać z kalkulatora graficznego lub komputera rysującego wykresy funkcji. W jakich przedziałach ta funkcja jest malejąca?

Za pomocą funkcji różniczkowalnych np. funkcji wielomianowych, wymiernych, trygonometrycznych, logarytmicznych, modeluje się wiele procesów fizycznych, chemicznych, ekonomicznych i dotyczących wielu innych dziedzin nauki. Znajomość

własności pochodnych funkcji pozwala dokładnie badać te procesy i analizować zachodzące w nich zmiany.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, że funkcja $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 7$ jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

D 2. Wykaż, że funkcja $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$.

D 3. Wykaż, że funkcja $f(x)=\frac{x+1}{2x-8}$ jest malejąca w przedziałach $(-\infty, 4)$, $(4, +\infty)$.
Czy ta funkcja jest malejąca w zbiorze $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$? Odpowiedź uzasadnij.

D 4. Wykaż, że funkcja $f(x)=x^3-\frac{2}{x}$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.
Czy ta funkcja jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R} - \{0\}$? Odpowiedź uzasadnij.

5. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f, jeśli:
a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 5$
b) $f(x) = 0{,}5x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 30x - 1$
c) $f(x)=-\frac{1}{5}x^5 - x^3 + 4x + 1$
d) $f(x)=\frac{4}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 3x + 4$

6. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji:
a) $f(x)=\frac{2}{x}+2x$
b) $f(x)=\frac{100x}{x^2-4}$
c) $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$
d) $f(x)=\frac{x+2-x^2}{x^2-x-2}$

7. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji:
a) $f(x)=x\sqrt{2x+3}$
b) $f(x)=x\sqrt{5-x}$
c) $f(x)=x^2\sqrt{2-x}$
d) $f(x)=x^2\sqrt{x+1}$

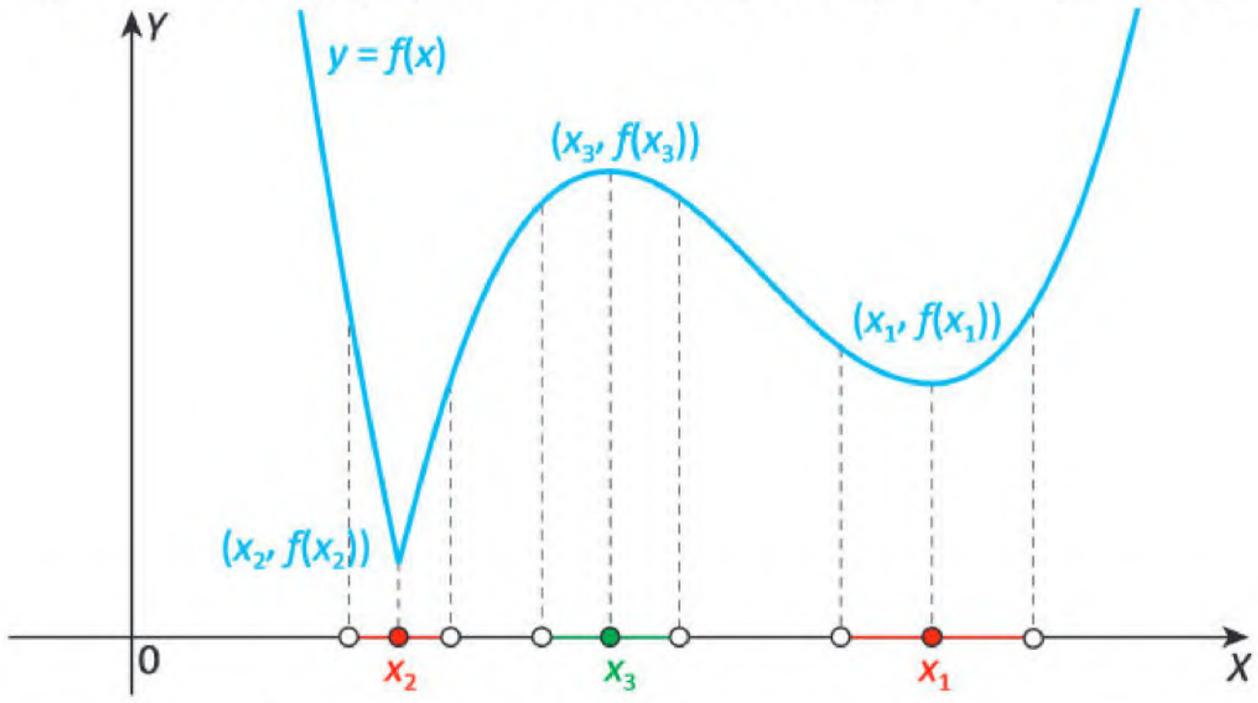
8. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji:
a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x+3}, & \text{jeśli } x<-3\\ \frac{4-x^2}{x^2+1}, & \text{jeśli } x\geqslant -3\end{cases}$
b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x^2-1}, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-1)\\ \sqrt{x^2-9x+20}, & \text{jeśli } x\in\langle -1,4\rangle\cup\langle 5,+\infty)\end{cases}$

9. Dana jest funkcja $f(x) = ax^3 - 3x^2 + bx - 1$, $x \in \boldsymbol{R}$. Wiedząc, że $f'(x) > 0$ tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$, oblicz współczynniki a, b.

10. Liczba 1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Wiedząc, że pochodna funkcji $y = W(x)$ jest ujemna tylko wtedy, gdy $x \in (-1, 1)$, wyznacz współczynniki a, b, c.

Ekstrema lokalne funkcji

Przeanalizujmy wykres funkcji f, przedstawiony na rysunku poniżej.



W dziedzinie funkcji f wyróżnione zostały trzy punkty x_1, x_2, x_3. Jeśli weźmiemy dostatecznie małe sąsiedztwo $S(x_1)$ – na przykład takie, jak na rysunku – to wówczas dla każdej liczby x z tego sąsiedztwa prawdziwa jest nierówność:

$$f(x) > f(x_1)$$

Można powiedzieć, że lokalnie funkcja f przyjmuje w punkcie x_1 najmniejszą wartość. Określenia „lokalnie" nie można pominąć, bowiem rozpatrzyliśmy wartości funkcji f w pewnym niewielkim otoczeniu punktu x_1. Natomiast w całej dziedzinie funkcja f przyjmuje również mniejsze wartości niż w punkcie x_1. Zatem funkcja f nie przyjmuje w punkcie x_1 najmniejszej wartości „globalnie".

Inaczej jest w punkcie x_3. Jeśli weźmiemy dostatecznie małe sąsiedztwo $S(x_3)$ – na przykład takie, jak na rysunku – to wówczas dla każdej liczby x z sąsiedztwa $S(x_3)$ prawdziwa jest nierówność:

$$f(x) < f(x_3)$$

W tym przypadku można powiedzieć, że lokalnie funkcja f przyjmuje w punkcie x_3 największą wartość. Tutaj również nie wolno pominąć określenia „lokalnie", bo poza otoczeniem punktu x_3 funkcja przyjmuje również większe wartości niż w punkcie x_3.

Definicja 1.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b). Funkcja f ma w punkcie x_0, $x_0 \in (a, b)$, **minimum lokalne właściwe** – równe $f(x_0)$ – tylko wtedy, gdy istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0)$ zawarte w przedziale (a, b), że

$$\bigwedge_{x \in S(x_0)} f(x) > f(x_0)$$

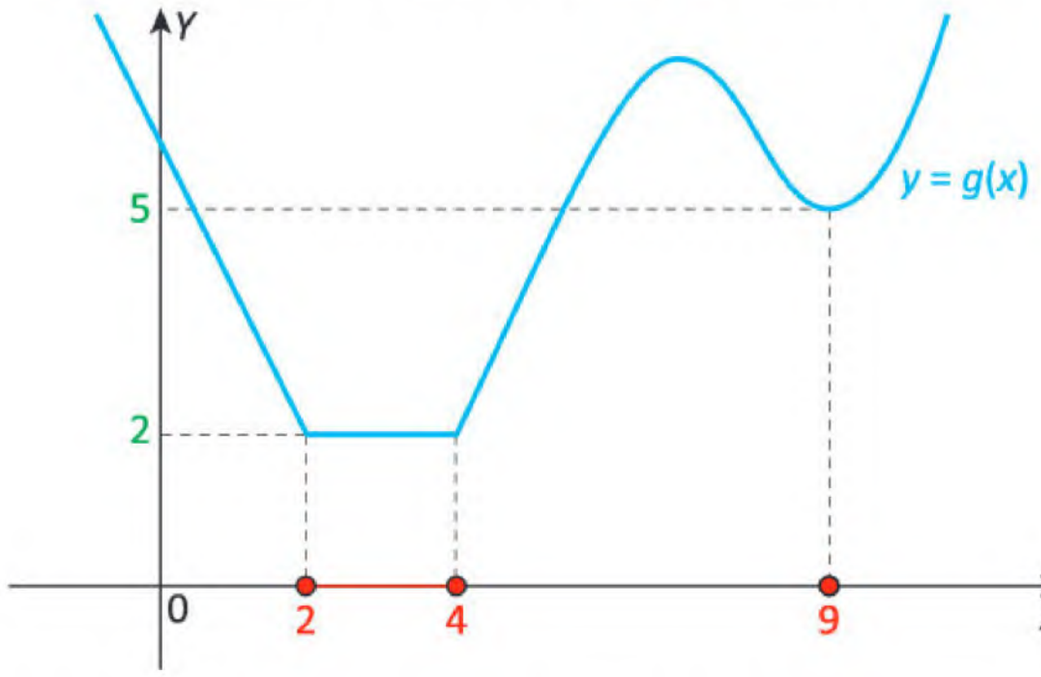
Definicja 2.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b). Funkcja f ma w punkcie x_0, $x_0 \in (a, b)$, **maksimum lokalne właściwe** – równe $f(x_0)$ – wtedy, gdy istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0)$ zawarte w przedziale (a, b), że

$$\bigwedge_{x \in S(x_0)} f(x) < f(x_0)$$

Zgodnie z definicją 1. i 2. powiemy, że funkcja f ma w każdym z punktów x_1 i x_2 minimum lokalne właściwe, a w punkcie x_3 – maksimum lokalne właściwe.

Popatrzmy teraz na wykres funkcji g na rysunku poniżej.



W każdym punkcie z przedziału $\langle 2, 4\rangle$ funkcja g przyjmuje wartość 2 i jest to lokalnie najmniejsza wartość. W takim przypadku powiemy, że w każdym punkcie z przedziału $\langle 2, 4\rangle$ funkcja g ma minimum lokalne, lecz – w odróżnieniu od minimum lokalnego w punkcie 9 – nie jest ono właściwe.

Definicja 3.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b). Funkcja f ma w punkcie x_0, $x_0 \in (a, b)$, **minimum lokalne** – równe $f(x_0)$ – tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U(x_0)$ zawarte w przedziale (a, b), że

$$\bigwedge_{x\in U(x_0)} f(x) \geqslant f(x_0)$$

Definicja 4.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b). Funkcja f ma w punkcie x_0, $x_0 \in (a, b)$, **maksimum lokalne** – równe $f(x_0)$ – tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U(x_0)$ zawarte w przedziale (a, b), że

$$\bigwedge_{x\in U(x_0)} f(x) \leqslant f(x_0)$$

UWAGA: Definicja 3. obejmuje również przypadek minimum lokalnego właściwego. To znaczy, że każde minimum lokalne właściwe jest jednocześnie minimum lokalnym. Podobnie każde maksimum lokalne właściwe jest jednocześnie maksimum lokalnym.

Powiemy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **ekstremum lokalne (właściwe)**, jeśli ma w tym punkcie minimum lokalne (właściwe) lub maksimum lokalne (właściwe).

Okazuje się, że pochodna funkcji jest bardzo użyteczna w wyznaczaniu ekstremów lokalnych funkcji. Omówimy teraz dwa twierdzenia związane z tym zagadnieniem.

Twierdzenie 1. *Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego*

Jeśli funkcja f, określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, jest różniczkowalna w tym punkcie i ma w nim ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.

Dowód przeprowadzimy w przypadku minimum lokalnego.

Załóżmy, że funkcja f różniczkowalna w punkcie x_0 ma w tym punkcie minimum lokalne. Wówczas istnieje takie otoczenie $U(x_0)$, że dla każdej liczby x z tego otoczenia $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Niech h będzie liczbą rzeczywistą ujemną, dla której $(x_0 + h) \in U(x_0)$. Wtedy

$$f(x_0 + h) \geqslant f(x_0) \quad \text{i} \quad h < 0, \quad \text{stąd} \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0$$

Ponieważ funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, więc w szczególności istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ i jest ona równa $f'_-(x_0)$. Z ostatniej nierówności wynika, że

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0, \quad \text{czyli} \quad f'_-(x_0) \leqslant 0.$$

Analogicznie, jeśli $h > 0$ i $(x_0 + h) \in U(x_0)$, to otrzymujemy

$$f(x_0 + h) \geqslant f(x_0) \qquad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0$$

Z założenia o różniczkowalności funkcji f w punkcie x_0 istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ i jest ona równa $f'_+(x_0)$. Z ostatniej nierówności mamy

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geqslant 0, \quad \text{czyli} \quad f'_+(x_0) \geqslant 0.$$

Wiemy, że $f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0)$ oraz $f'_+(x_0) \geqslant 0$ i $f'_-(x_0) \leqslant 0$. Zatem $0 \leqslant f'(x_0) \leqslant 0$ skąd $f'(x_0) = 0$, co kończy dowód.

W praktyce korzysta się z równoważnej postaci twierdzenia 1., a mianowicie:

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i pochodna w tym punkcie nie jest równa zero, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w tym punkcie.

Tak więc funkcja różniczkowalna może mieć ekstremum lokalne tylko w takim punkcie, w którym pochodna tej funkcji jest równa zero.

UWAGA: W ostatnim zdaniu użyliśmy zwrotu: funkcja „może mieć ekstremum lokalne" w miejscu zerowym pochodnej. To nie oznacza, że funkcja musi mieć ekstremum lokalne. Na przykład funkcja $f(x) = x^3$ ma pochodną $f'(x) = 3x^2$, która przyjmuje wartość zero w punkcie 0. Ale na podstawie wykresu tej funkcji łatwo się przekonasz, że

w punkcie 0 ta funkcja nie ma ekstremum lokalnego. Twierdzenie 1. określa jedynie warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego w punkcie x_0 funkcji różniczkowalnej w tym punkcie, ale nie jest to warunek wystarczający.

A czy funkcja może mieć ekstremum w punkcie, w którym pochodna nie istnieje? Oczywiście tak. Na przykład funkcja $f(x) = |x|$ ma minimum w punkcie 0. Natomiast już wiesz, że nie istnieje $f'(0)$. Również funkcja f z początku tego tematu ma w punkcie x_2 minimum, a pochodna funkcji f w tym punkcie nie istnieje (wykres funkcji f ma „ostrze").

Definicja 5.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale (a, b). Punkt x_0, $x_0 \in (a, b)$, nazywamy **punktem krytycznym** tylko wtedy, gdy $f'(x_0) = 0$ lub $f'(x_0)$ nie istnieje.

Jeśli funkcja ma ekstrema lokalne, to należy ich szukać w punktach krytycznych. Kolejne twierdzenie podaje warunki pozwalające rozstrzygnąć, kiedy w punkcie krytycznym istnieje ekstremum lokalne.

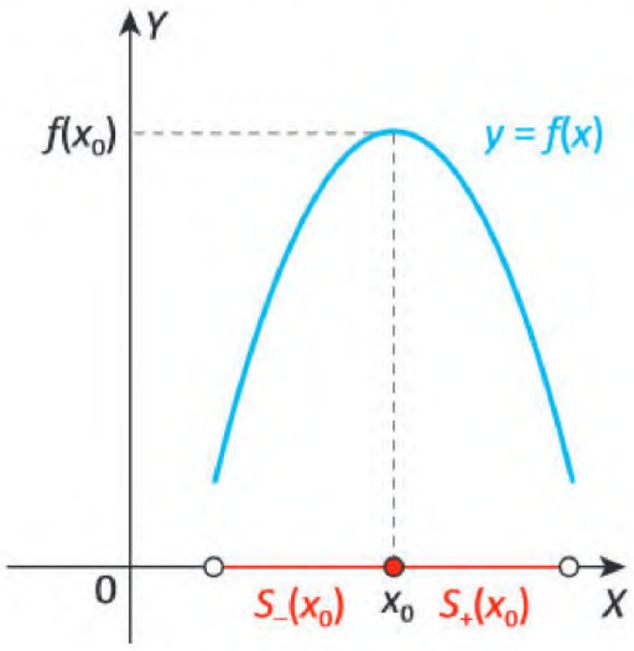
Twierdzenie 2. *Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego*

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, ciągła w punkcie x_0 oraz różniczkowalna w sąsiedztwie $S(x_0)$; ponadto niech x_0 będzie punktem krytycznym tej funkcji.

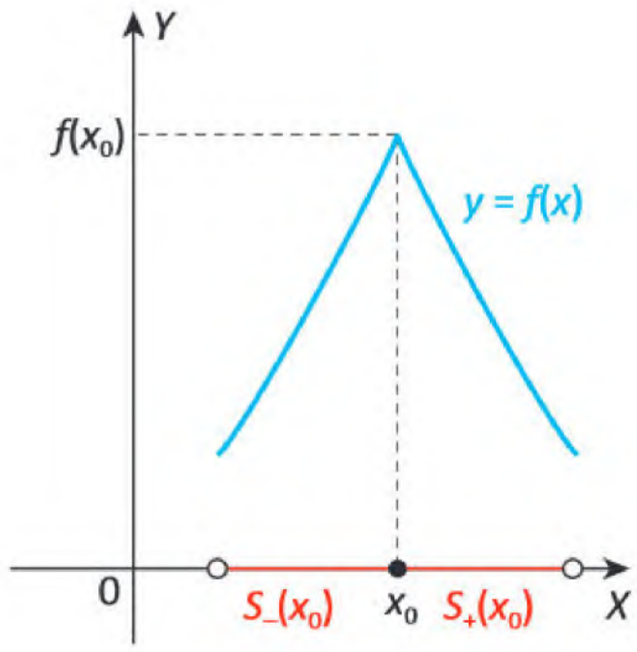
1) Jeśli $f'(x) > 0$, gdzie $x \in S_-(x_0)$ i $f'(x) < 0$, gdzie $x \in S_+(x_0)$, to funkcja f ma maksimum lokalne właściwe w punkcie x_0.
2) Jeśli $f'(x) < 0$, gdzie $x \in S_-(x_0)$ i $f'(x) > 0$, gdzie $x \in S_+(x_0)$, to funkcja f ma minimum lokalne właściwe w punkcie x_0.
3) Jeśli $f'(x) > 0$, gdzie $x \in S(x_0)$ albo $f'(x) < 0$, gdzie $x \in S(x_0)$, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie x_0.

Rysunki poniżej ilustrują twierdzenie 2.

Ad 1)



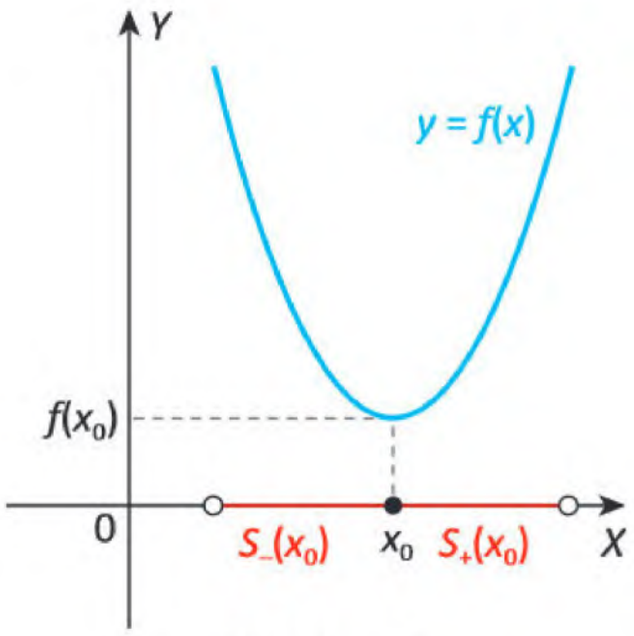
$f'(x_0) = 0$



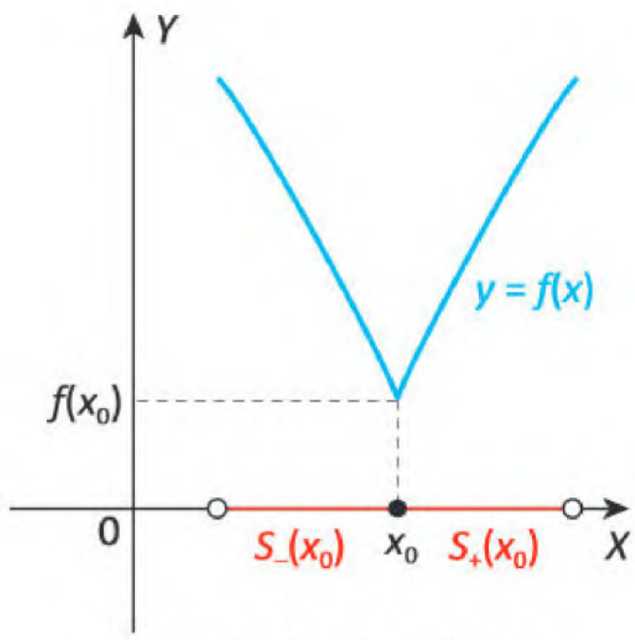
$f'(x_0)$ nie istnieje

W obu przypadkach powiemy: „Pochodna zmienia znak w punkcie x_0 z dodatniego na ujemny."

Ad 2)



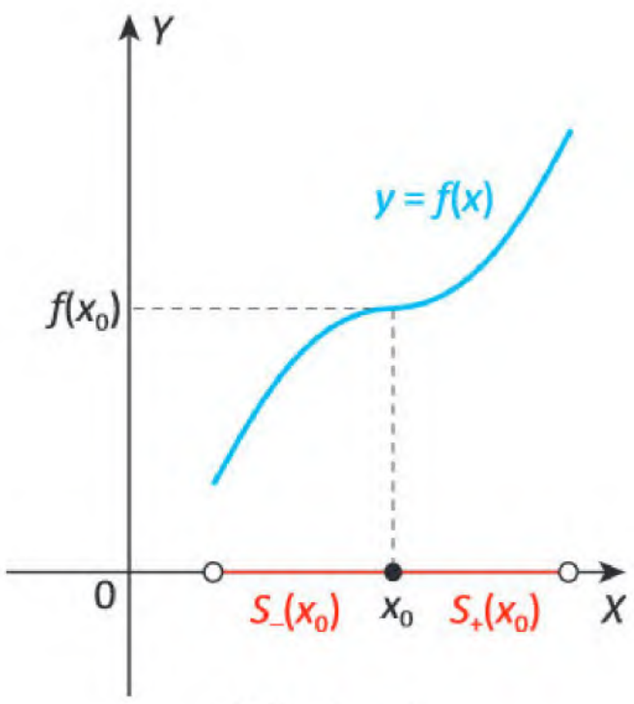
$f'(x_0) = 0$



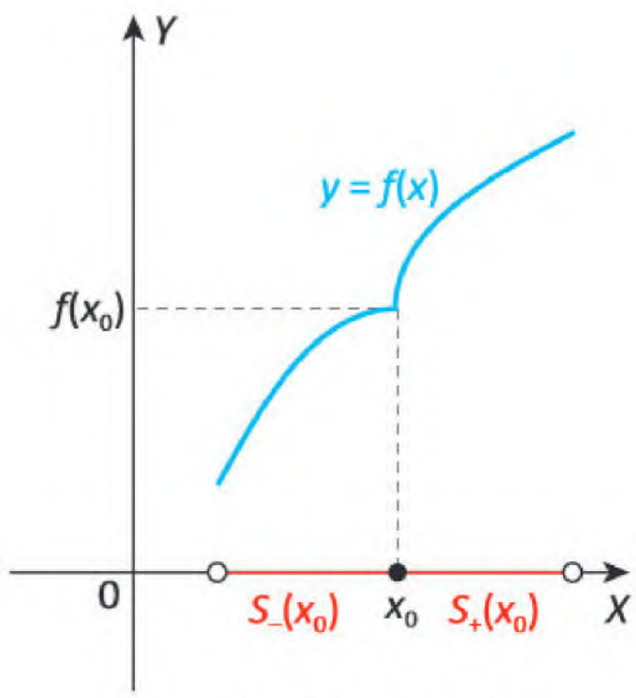
$f'(x_0)$ nie istnieje

W obu przypadkach powiemy: „Pochodna zmienia znak w punkcie x_0 z ujemnego na dodatni."

Ad 3)

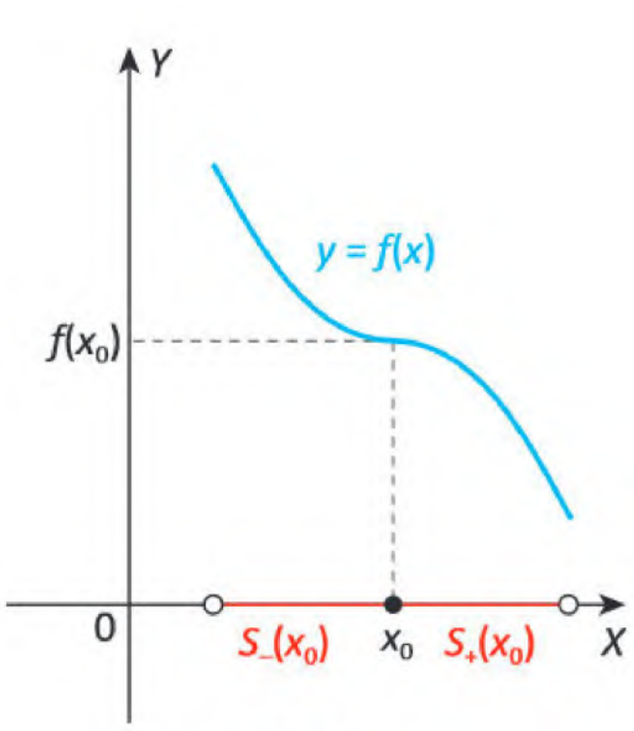


$f'(x_0) = 0$

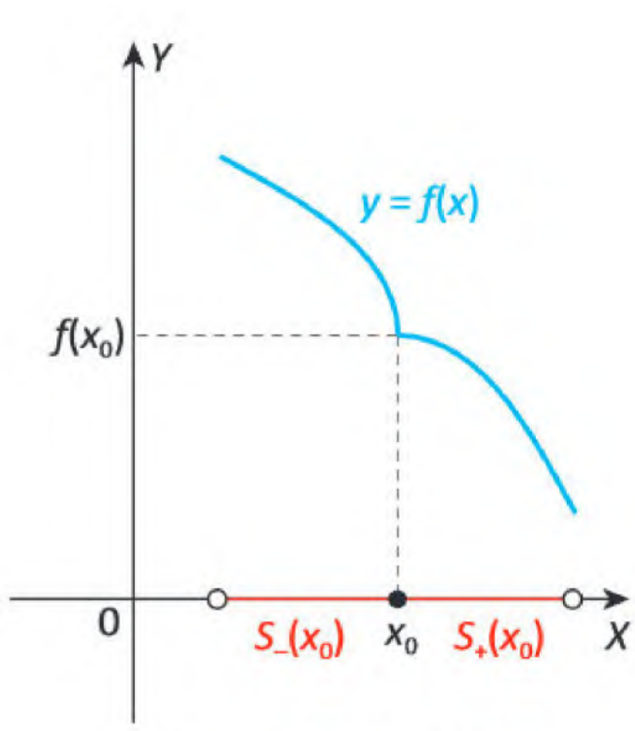


$f'(x_0)$ nie istnieje

Powiemy: „Pochodna jest dodatnia w sąsiedztwie punktu x_0."



$f'(x_0) = 0$



$f'(x_0)$ nie istnieje

Powiemy: „Pochodna jest ujemna w sąsiedztwie punktu x_0."

Ćwiczenie 1. Ile co najwyżej ekstremów lokalnych może mieć funkcja wielomianowa stopnia trzeciego? Odpowiedź uzasadnij.

Jeśli chcemy wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji ciągłej f, to:
1) wyznaczamy dziedzinę funkcji f, pochodną funkcji f oraz dziedzinę pochodnej;
2) wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f;
3) badamy, kiedy pochodna funkcji f jest dodatnia, a kiedy ujemna;
4) w punktach krytycznych, w których pochodna
   a) istnieje – badamy, czy zmienia ona znak; jeśli tak, to określamy rodzaj ekstremum (minimum, maksimum),
   b) nie istnieje – badamy, czy funkcja jest ciągła i czy pochodna zmienia tam znak; jeśli tak, to określamy rodzaj ekstremum.

Przykład 1.

Wyznaczymy ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = x^5 - 15x^3 + 7$ b) $f(x) = \frac{-4}{x+3} - x$

Ad a) Mamy $f(x) = x^5 - 15x^3 + 7$, $D_f = \boldsymbol{R}$. Wówczas

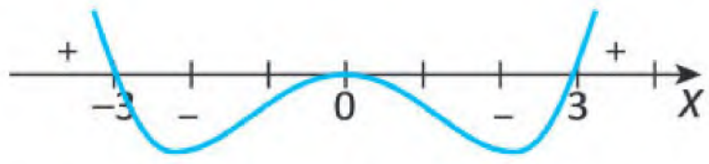
$$f'(x) = 5x^4 - 45x^2, \quad D_{f'} = D_f$$

Wyznaczamy punkty krytyczne. Funkcja f ma pochodną w zbiorze $\boldsymbol{R}$, więc może mieć tylko takie punkty krytyczne, które są miejscami zerowymi tej pochodnej.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 45x^2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2(x+3)(x-3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3)$$

Badamy znak pochodnej.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow [5x^2(x+3)(x-3) > 0 \wedge x \in D_{f'}] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (3, +\infty)$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 0) \cup (0, 3)$$



Teraz łatwo określimy, czy w punktach krytycznych są ekstrema i jaki jest ich rodzaj, jeśli otrzymane wyniki przedstawimy w tabeli:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	–	0	+
$f(x)$	↗	169 maksimum lokalne	↘	7	↘	–155 minimum lokalne	↗

Symbol ↘ (odpowiednio ↗) oznacza, że funkcja jest malejąca (odpowiednio rosnąca) w danym przedziale. Zauważ, że funkcja f w lewostronnym sąsiedztwie punktu -3 jest rosnąca, a w prawostronnym sąsiedztwie – malejąca. To znaczy, że w punkcie -3 funkcja f ma maksimum lokalne właściwe. Podobnie stwierdzamy, że w punkcie 3 jest minimum lokalne właściwe. Natomiast w sąsiedztwie punktu 0 pochodna jest ujemna, funkcja f jest malejąca – zatem w tym punkcie nie ma ekstremum lokalnego.

Funkcja f ma dwa ekstrema lokalne: maksimum, równe 169 oraz minimum, równe -155. Można zapisać krótko: $f_{max}(-3) = 169$, $f_{min}(3) = -155$.

Ad b) Mamy $f(x)=\frac{-4}{x+3}-x$, $D_f = (-\infty,-3) \cup (-3, +\infty)$

$$f'(x)=\frac{4}{(x+3)^2}-1, \qquad D_{f'} = (-\infty,-3) \cup (-3, +\infty)$$

Ponieważ $D_{f'} = D_f$, więc punkty krytyczne mogą być tylko miejscami zerowymi pochodnej.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{(x+3)^2}-1=0 \wedge x \in D_{f'}\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}=0 \wedge x \in D_{f'}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+6x+5=0 \wedge x \in D_{f'}\right) \Leftrightarrow (x = -5 \vee x = -1)$$

Badamy znak pochodnej.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, -3) \cup (-3, -1)$

Budujemy tabelkę.

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	X	+	0	–
$f(x)$	↘	7 minimum lokalne	↗	X	↗	–1 maksimum lokalne	↘

Symbol „X” oznacza, że wartość funkcji (wartość pochodnej) nie istnieje.

Funkcja f ma dwa ekstrema; $f_{min}(-5) = 7$, $f_{max}(-1) = -1$.

Ćwiczenie 2. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f, jeśli istnieją.

a) $f(x)=\frac{-1}{3}x^3-4x^2$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ c) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

Przykład 2.

Wyznaczymy ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^3 - 3|x|$.

Określamy dziedzinę funkcji f: $D_f = \boldsymbol{R}$. Mamy:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x, \text{ jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \\ x^3+3x, \text{ jeśli } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Wyznaczamy pochodne:

$(x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$, jeśli $x \in (0, +\infty)$

$(x^3 + 3x)' = 3x^2 + 3$, jeśli $x \in (-\infty, 0)$

Funkcja f jest ciągła w punkcie 0 (sprawdź!). Aby zbadać istnienie pochodnej funkcji f w punkcie 0, wystarczy obliczyć granice jednostronne:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(3x^2+3\right) = 3$$

oraz

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(3x^2-3\right) = -3$$

Granice są różne, więc pochodna funkcji f w punkcie 0 nie istnieje. Otrzymujemy:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2-3, \text{ jeśli } x\in(0,+\infty) \\ 3x^2+3, \text{ jeśli } x\in(-\infty,0) \end{cases}, \qquad D_{f'} = D_f - \{0\}$$

Punkt 0 należy do dziedziny funkcji f i pochodna funkcji f w tym punkcie nie istnieje. Punkt 0 jest więc punktem krytycznym. Pozostałe punkty krytyczne to miejsca zerowe pochodnej.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [(3x^2 + 3 = 0 \ \wedge \ x < 0) \vee (3x^2 - 3 = 0 \ \wedge \ x > 0)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x = -1 \vee x = 1) \ \wedge \ x > 0) \Leftrightarrow x = 1$$

Określamy znak pochodnej. Możesz naszkicować wykres pochodnej.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow [(3x^2 + 3 > 0 \wedge x < 0) \vee (3x^2 - 3 > 0 \wedge x > 0)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

Budujemy tabelkę.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	X	–	0	+
$f(x)$	↗	0 maksimum lokalne	↘	–2 minimum lokalne	↗

Funkcja f ma dwa ekstrema lokalne: $f_{max}(0) = 0$, $f_{min}(1) = -2$.

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli $x \in (1, +\infty)$, to $3x^5 + 20x^3 > 15x^4 + 8$.

Wystarczy pokazać, że jeśli $x \in (1, +\infty)$, to $3x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 8 > 0$.

Rozważmy funkcję

$$f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 8, \quad D_f = \boldsymbol{R}$$

Funkcja f jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych i różniczkowalna. Wyznaczamy jej pochodną:

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 60x^2, \quad D_{f'} = \boldsymbol{R}$$

Sprawdzamy, czy funkcja f ma ekstrema lokalne.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^2(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2)$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

Zgodnie z punktem 3) twierdzenia 2. funkcja f nie ma ekstremów lokalnych, bowiem pochodna nie zmienia znaku w punktach 0 i 2. Natomiast funkcja f jest rosnąca w przedziałach:

$(-\infty, 0\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 2, +\infty)$

Punkt 0 jest wspólnym końcem pierwszego i drugiego przedziału, a punkt 2 jest wspólnym końcem drugiego i trzeciego przedziału. Wówczas funkcja f jest rosnąca w zbiorze będącym sumą tych przedziałów:

$(-\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 2\rangle \cup \langle 2, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \boldsymbol{R}$

Funkcja $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 8$ jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$. Z tego wynika, że

jeśli $x > 1$, to $f(x) > f(1)$

Obliczamy:

$f(1) = 3 - 15 + 20 - 8 = 0.$

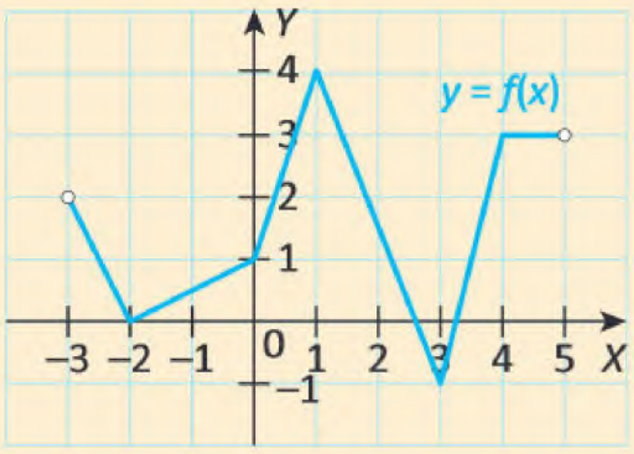
Zatem jeśli $x > 1$, to $f(x) > 0$

Otrzymaliśmy, że jeśli $x \in (1, +\infty)$, to $3x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 8 > 0$, co kończy dowód.

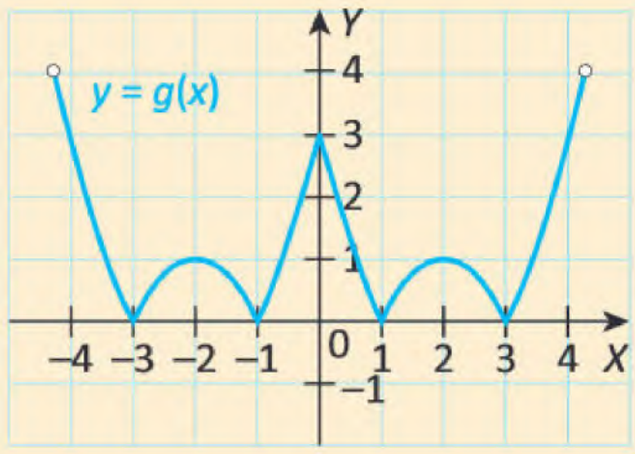
Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Dane są wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz $y = g(x)$. Wskaż punkty, w których dane funkcje mają ekstrema lokalne właściwe. Określ rodzaj ekstremum w tych punktach. Czy te funkcje mają inne ekstrema lokalne?

a)



b)



2. Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych. Funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie należącym do dziedziny oraz $f'(x) = 3x(x + 1)^2(2 - x)$. Wyznacz punkty krytyczne funkcji f i określ rodzaj ekstremów w tych punktach (o ile istnieją).

3. Dziedziną funkcji f jest suma przedziałów $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie należącym do dziedziny oraz $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$.

Wyznacz punkty krytyczne funkcji f i określ rodzaj ekstremów w tych punktach (jeśli istnieją).

4. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f, jeśli istnieją.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

b) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3-4x^2+16x-1$

c) $f(x)=x+\frac{4}{x+5}$

d) $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$

5. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f, jeśli istnieją.

a) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 11$

b) $f(x) = 3x^5 - 15x^3$

c) $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-2}$

d) $f(x)=\frac{x^2}{4x+5}$

6. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f, jeśli istnieją.

a) $f(x) = (x + 3)^2(x - 2)^3$

b) $f(x)=x^3\cdot\left(\frac{2}{x}-x\right)$

c) $f(x)=x\cdot\sqrt{2-x}$

d) $f(x)=x^2\cdot\sqrt{2x+1}$

7. Funkcja $f(x)=\frac{x^2+a}{x-1}$ przyjmuje w punkcie -1 ekstremum lokalne. Oblicz a i wyznacz ekstrema lokalne funkcji f.

8. Funkcja $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-5}$ ma w punkcie 3 maksimum lokalne, równe 1. Oblicz:

a) a i b

b) pozostałe ekstrema lokalne funkcji f.

D 9. Wykaż, że jeśli $x\in\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right)$, to $x^3+x\geqslant x^2+\frac{3}{8}$.

D 10. Wykaż, że jeśli $x \in (1, +\infty)$, to $4x^3 + 9x^2 > 1 + 12x$.

D 11. Wykaż, że jeśli $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle$, to $\frac{4}{x}+7\geqslant 2x$.

12. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = |x| - 3$

b) $f(x) = -2x \cdot |x - 4|$

13. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f, jeśli $f(x) = |x + 2|(x^2 + 3x + 2)$.

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale

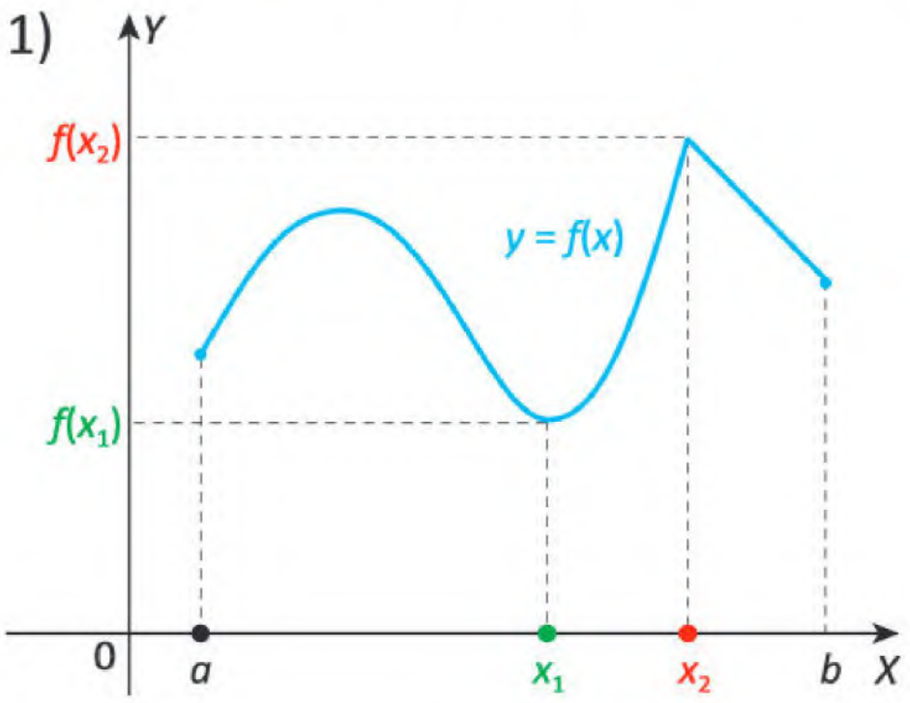
W tym temacie omówimy zagadnienie dotyczące wyznaczania największej wartości funkcji (maksimum globalnego) i najmniejszej wartości funkcji (minimum globalnego) w przedziale domkniętym, a następnie w przedziale otwartym.

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale domkniętym

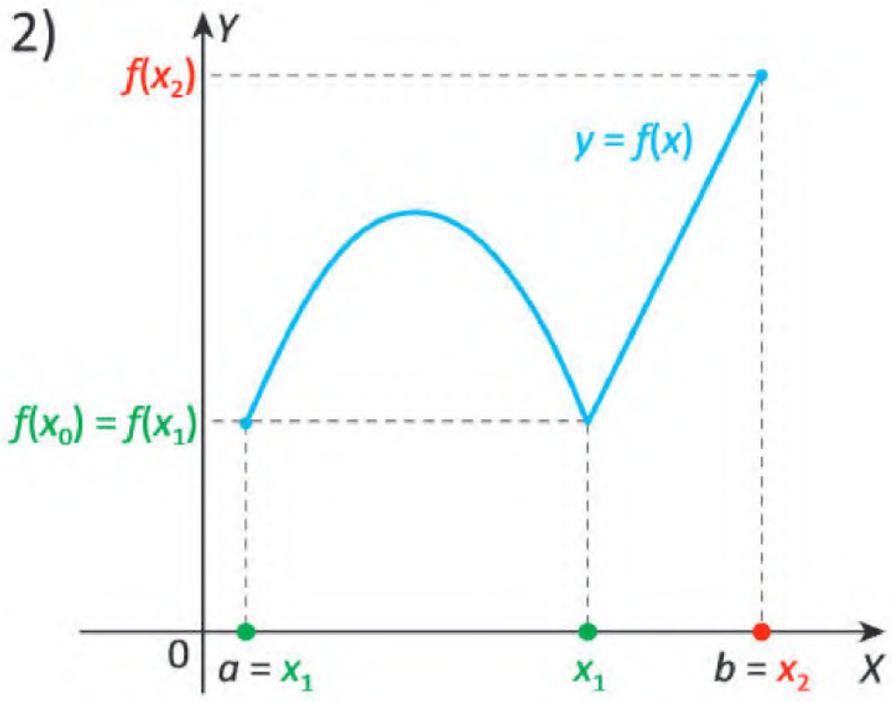
Przypomnijmy: twierdzenie Weierstrassa mówi o tym, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale najmniejszą i największą wartość. Teraz ustalimy procedurę pozwalającą wyznaczyć te wartości.

Zaczniemy od analizy wykresów czterech funkcji, przedstawionych na rysunkach poniżej. Każda z tych funkcji jest określona w przedziale $\langle a, b \rangle$.

1)



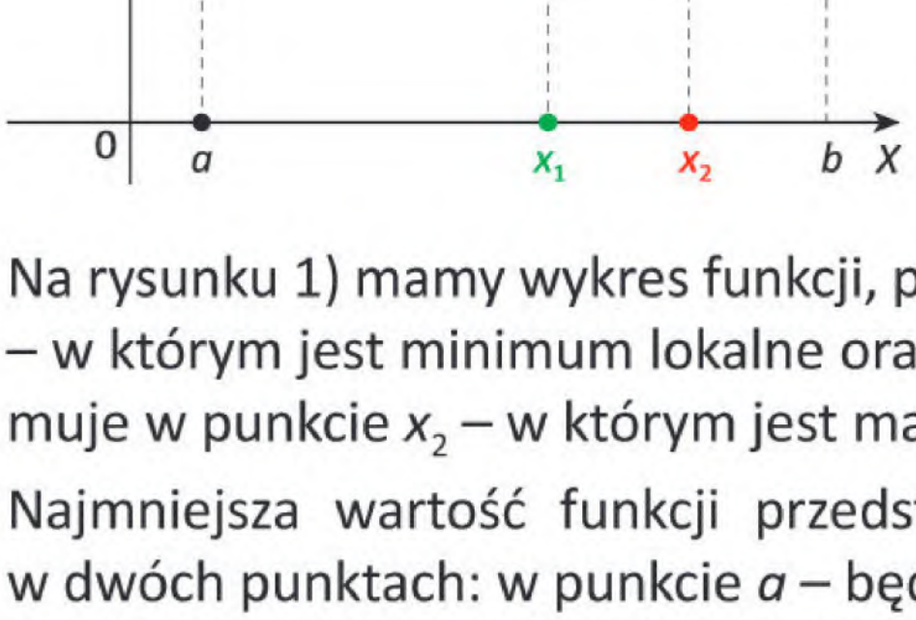
2)



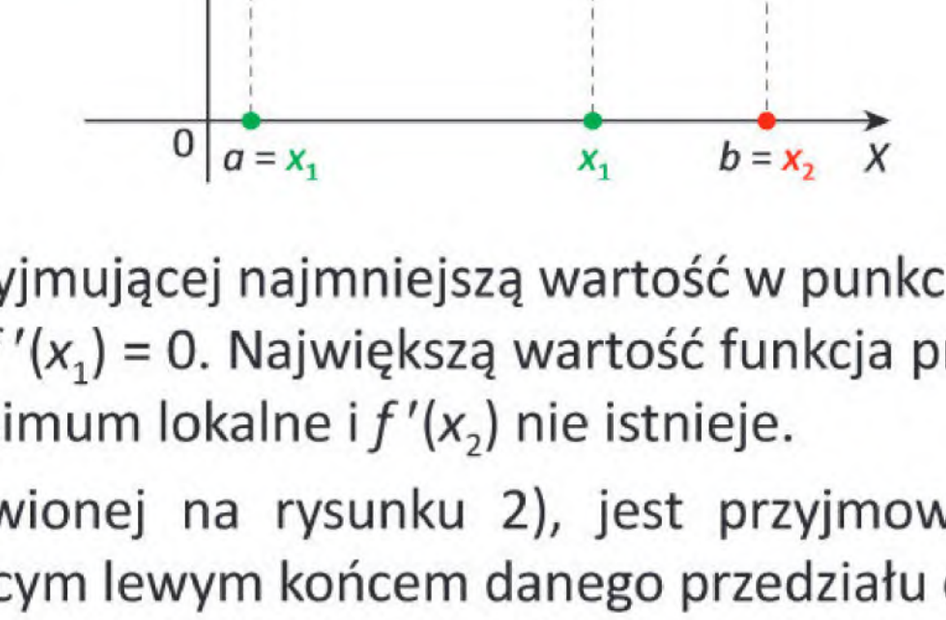
Na rysunku 1) mamy wykres funkcji, przyjmującej najmniejszą wartość w punkcie x_1 – w którym jest minimum lokalne oraz $f'(x_1) = 0$. Największą wartość funkcja przyjmuje w punkcie x_2 – w którym jest maksimum lokalne i $f'(x_2)$ nie istnieje.

Najmniejsza wartość funkcji przedstawionej na rysunku 2), jest przyjmowana w dwóch punktach: w punkcie a – będącym lewym końcem danego przedziału oraz w punkcie x_1 – w którym jest minimum lokalne i $f'(x_1)$ nie istnieje. Największą wartość funkcja przyjmuje w punkcie b – prawym końcu danego przedziału.

3)



4)



Na rysunku 3) jest przedstawiony wykres funkcji, której najmniejsza wartość jest przyjmowana w punkcie b, a największa wartość – w punkcie a. Zauważ, że w przedziale (a, b) funkcja ma zarówno minimum, jak i maksimum lokalne, ale w żadnym z tych punktów nie przyjmuje wartości największej ani najmniejszej.

Rysunek 4) przedstawia wykres funkcji f, mającej najmniejszą wartość w punkcie x_1 – w którym jest minimum lokalne i $f'(x_1) = 0$. Największą wartość funkcja przyjmuje w dwóch punktach: w punkcie x_2 – w którym jest maksimum lokalne i $f'(x_2) = 0$, oraz w punkcie b – prawym końcu przedziału określoności.

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ może przyjmować najmniejszą i największą wartość w punktach krytycznych należących do przedziału (a, b) lub w punktach a, b.

Możemy sformułować następujący wniosek.

Aby wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji ciągłej w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$:

1) wyznaczamy punkty krytyczne tej funkcji w przedziale otwartym (a, b);
2) obliczamy wartości tej funkcji w punktach krytycznych i w punktach a, b;
3) wybieramy największą i najmniejszą wartość spośród wartości obliczonych w punkcie 2).

Ćwiczenie 1. Zastanów się, jak wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji ciągłej w sumie przedziałów domkniętych.

Przykład 1.

Wyznaczymy najmniejszą i największą wartość funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3,\ x \in \langle -3, 3\rangle$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3|x| + 2,\ x \in \langle -1, 2\rangle$.

Ad a) W przedziale $\langle -3, 3\rangle$ funkcja $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ jest ciągła. Postępujemy zgodnie z powyższym wnioskiem.

1) Funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(-3, 3)$. Punktami krytycznymi są więc miejsca zerowe pochodnej. Obliczamy:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12,\quad D_{f'} = (-3, 3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [6x^2 - 6x - 12 = 0 \wedge x \in (-3, 3)] \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 2)$

Funkcja f ma dwa punkty krytyczne: -1 oraz 2.

2) Obliczamy wartości funkcji f w punktach krytycznych i w punktach -3, 3:

$f(-1) = 10$ $\qquad$ $f(2) = -17$ $\qquad$ $f(-3) = -42$ $\qquad$ $f(3) = -6$

3) W przedziale $\langle -3, 3\rangle$ funkcja f przyjmuje dla argumentu -1 największą wartość, równą 10. Natomiast najmniejsza wartość funkcji f w tym przedziale jest równa -42 i jest przyjmowana dla argumentu -3.

Ad b) Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle -1, 2\rangle$. Mamy:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^4+3x+2, & \text{jeśli } x\in\langle -1,0\rangle\\ \frac{1}{4}x^4-3x+2, & \text{jeśli } x\in\langle 0,2\rangle\end{cases}$$

Szukamy punktów krytycznych. Wyznaczamy pochodną funkcji:

$$\left(\frac{1}{4}x^4+3x+2\right)'=x^3+3, \text{ jeśli } x\in(-1,0)$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4-3x+2\right)'=x^3-3, \text{ jeśli } x\in(0,2)$$

Sprawdzamy istnienie pochodnej funkcji f w punkcie 0. Funkcja f jest ciągła w punkcie 0 (dlaczego?) oraz

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^3+3\right)=3 \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^3-3\right)=-3$$

Stąd pochodna w punkcie 0 nie istnieje. Otrzymujemy:

$$f'(x)=\begin{cases}x^3+3, & \text{jeśli } x\in(-1,0)\\ x^3-3, & \text{jeśli } x\in(0,2)\end{cases}$$

Punkt 0 jest punktem krytycznym. Pozostałe punkty krytyczne to miejsca zerowe pochodnej.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(\left[x^3+3=0\wedge x\in(-1,0)\right]\vee\left[x^3-3=0\wedge x\in(0,2)\right]\right)\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3}$$

Mamy dwa punkty krytyczne: 0 oraz $\sqrt[3]{3}$.

Obliczamy wartość funkcji f w punktach krytycznych oraz w punktach -1 i 2.

$$f(0)=2 \qquad f\left(\sqrt[3]{3}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{3}\right)^4-3\sqrt[3]{3}+2\ (\approx -1{,}245) \qquad f(-1)=-\frac{3}{4} \qquad f(2)=0$$

Funkcja f w przedziale $\langle -1, 2\rangle$ przyjmuje wartość największą równą $f(0)$, czyli 2, oraz wartość najmniejszą równą $f\left(\sqrt[3]{3}\right)$, w przybliżeniu równą $-1{,}245$.

Ćwiczenie 2. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji:

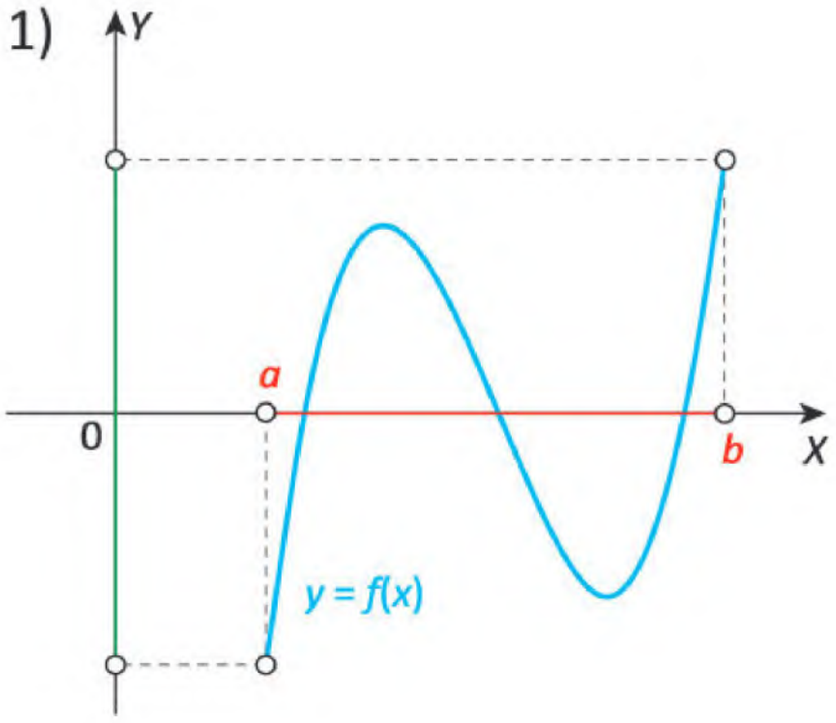
a) $f(x)=x^3-27x$, gdzie $x\in\langle -4, 2\rangle$

b) $f(x)=x^3+2x$, gdzie $x\in\langle -1, 5\rangle$.

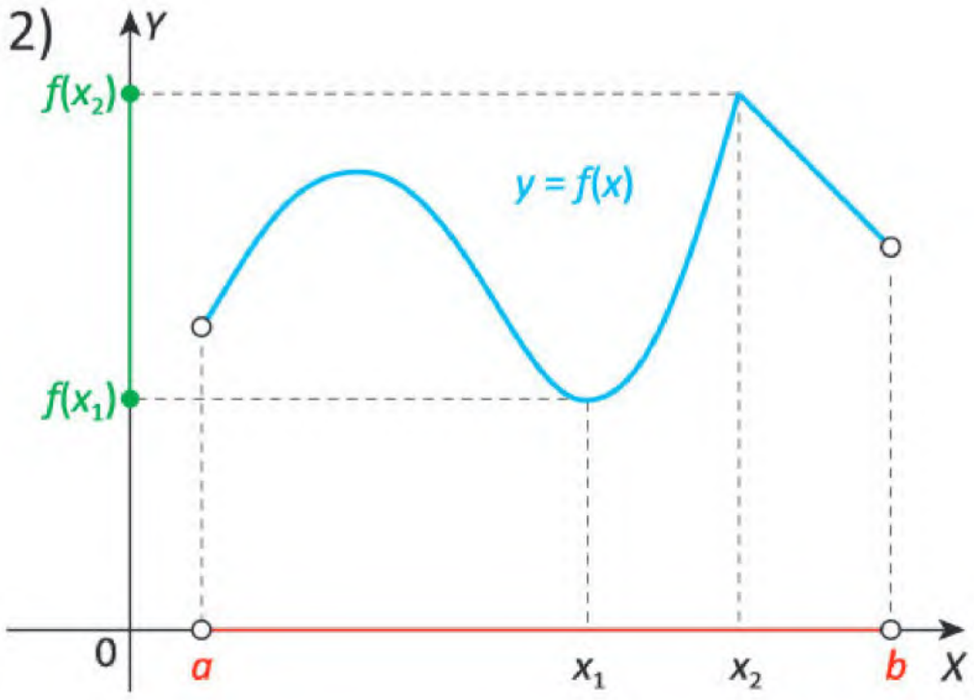
Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale otwartym

Ćwiczenie 3. Przeanalizuj wykresy czterech funkcji przedstawione na poniższych rysunkach. Każda z funkcji jest określona w przedziale otwartym (a, b) i jest ciągła. Czy te funkcje mają wartość największą i wartość najmniejszą?

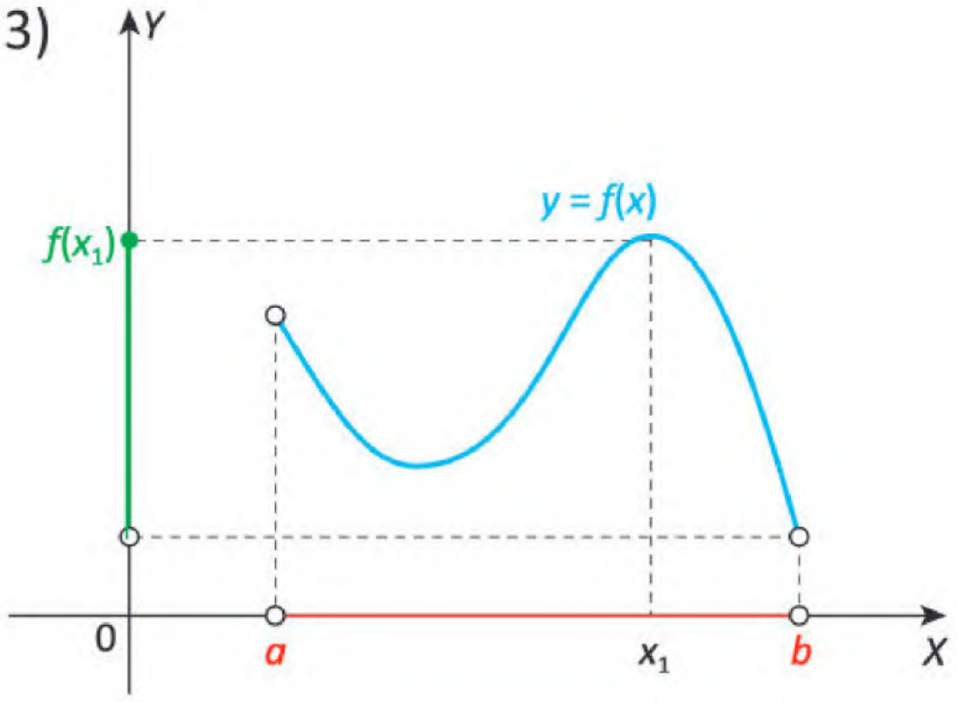
1)



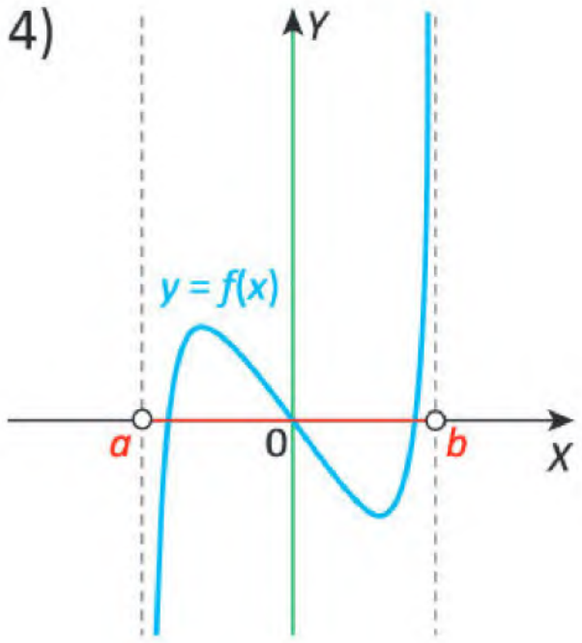
2)



3)



4)



Funkcja na rysunku 1) nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej. Zbiór wartości funkcji – zaznaczony kolorem zielonym – jest przedziałem otwartym.

Funkcja na rysunku 2) przyjmuje wartość najmniejszą w punkcie x_1 – w którym jest minimum lokalne, oraz wartość największą w punkcie x_2 – w którym jest maksimum lokalne. Zbiór wartości funkcji jest przedziałem domkniętym.

Na rysunku 3) jest przedstawiona funkcja, która nie przyjmuje wartości najmniejszej, ale przyjmuje wartość największą w punkcie x_1 – w którym jest maksimum lokalne. Zbiór wartości tej funkcji jest przedziałem prawostronnie domkniętym.

Rysunek 4) pokazuje, że zbiór wartości funkcji określonej w przedziale otwartym może być nieograniczony. W tym przypadku jest to zbiór $\boldsymbol{R}$. Zauważ, że funkcja ma zarówno minimum, jak i maksimum lokalne, natomiast nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.

Aby sprawdzić, czy istnieje najmniejsza i największa wartość funkcji ciągłej f, określonej w przedziale otwartym (a, b):

1) wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f w przedziale (a, b)
2) obliczamy wartości funkcji w punktach krytycznych i granice jednostronne funkcji na końcach przedziału:
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ oraz } \lim_{x\to b^-} f(x)$$
3) porównujemy wartości otrzymane w punkcie 2) i określamy, czy istnieje wartość najmniejsza i wartość największa funkcji f w przedziale (a, b).

Przykład 2.

Zbadamy, czy istnieje najmniejsza i największa wartość funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{-1}{16}x^4+x^2+1, \quad x\in\left(-\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$ b) $f(x)=x+\frac{1}{x}, \quad x\in(-2,0)$.

Ad a) Funkcja f jest ciągła i różniczkowalna w przedziale $\left(-\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$.

1) Wyznaczamy punkty krytyczne, które są miejscami zerowymi pochodnej.

$$f'(x)=-\frac{1}{4}x^3+2x, \quad D_{f'}=D_f=\left(-\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{4}x\left(x^2-8\right)=0\wedge x\in\left(-\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)\right] \Leftrightarrow \left(x=0\vee x=2\sqrt{2}\right)$$

Mamy dwa punkty krytyczne: 0 i $2\sqrt{2}$.

2) Obliczamy wartości funkcji f w punktach krytycznych i granice na końcach przedziału określoności

$f(0) = 1$ $\quad f\left(2\sqrt{2}\right)=5$ $\quad \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x)=2{,}75$ $\quad \lim_{x\to3\sqrt{2}^-} f(x)=-1{,}25$

3) Ponieważ

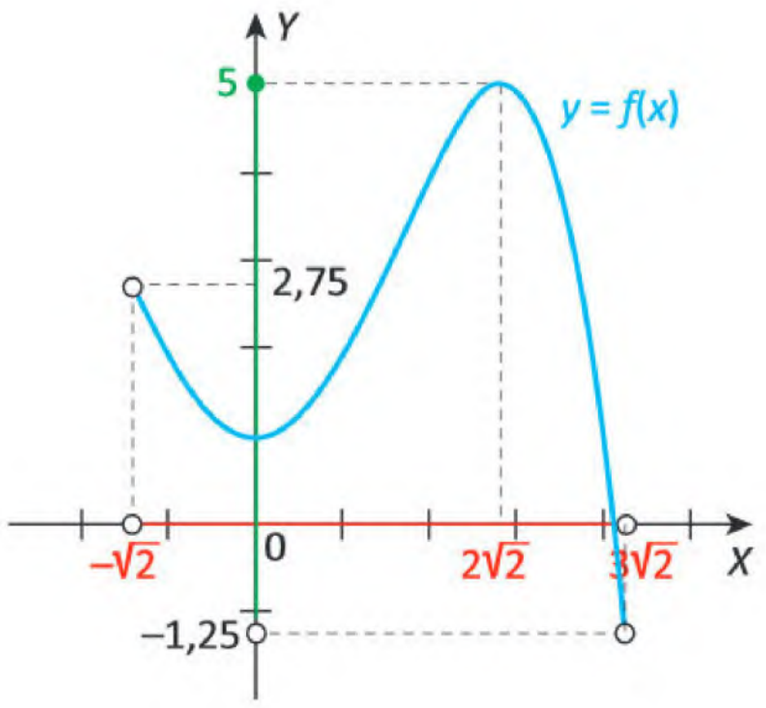
$$5>\lim_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x) \quad \text{i} \quad 5>\lim_{x\to3\sqrt{2}^-} f(x),$$

więc liczba 5 jest największą wartością funkcji f w danym przedziale. Natomiast

$$\lim_{x\to3\sqrt{2}^-} f(x)<1,$$

zatem nie istnieje najmniejsza wartość funkcji f w danym przedziale.

Rysunek obok przedstawia wykres funkcji f.



Funkcja f dla argumentu $2\sqrt{2}$ przyjmuje wartość największą, równą 5. Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej.

Ad b) Funkcja $f(x)=x+\frac{1}{x}$ w przedziale (–2, 0) jest ciągła i różniczkowalna.

Wyznaczamy jej pochodną:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \qquad D_{f'}=D_f=(-2,0)$$

Znajdujemy punkty krytyczne:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[1-\frac{1}{x^2}=0 \wedge x\in(-2,0)\right] \Leftrightarrow x=-1$$

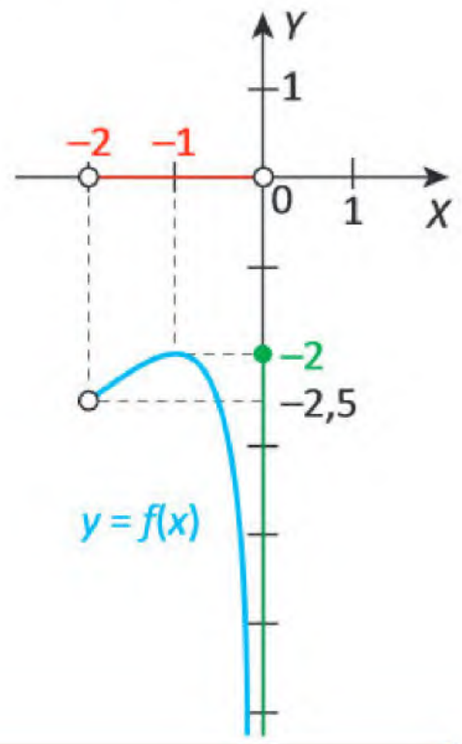
Jedynym punktem krytycznym jest –1. Obliczamy wartość funkcji f w punkcie – 1 i granice funkcji f na końcach przedziału (–2, 0):

$f(-1) = -2$ $\qquad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-2,5$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$, więc najmniejsza wartość funkcji w przedziale (–2, 0) nie istnieje. Natomiast

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=-2,5 < -2$$

więc największa wartość funkcji f w danym przedziale jest równa –2.



Rysunek obok przedstawia wykres funkcji f.

Funkcja f dla argumentu –1 przyjmuje wartość największą, równą –2. Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f, jeśli:
   a) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x, \quad x \in \langle -1, 5\rangle$ b) $f(x)=x\sqrt{4-x}, \quad x \in \langle -21, 4\rangle$.
   Dla jakich argumentów te wartości są przyjmowane?
2. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w danym przedziale oraz argumenty, dla których funkcja przyjmuje te wartości, jeśli:
   a) $f(x) = |x|^3 - 12x, \quad \langle -2, 4\rangle$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}, \quad \langle -5, 0\rangle$
3. Wykaż, że nie istnieje wartość największa ani wartość najmniejsza funkcji $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2$, gdzie $x \in (-3, 4)$.
4. Sprawdź, czy istnieje wartość największa oraz wartość najmniejsza funkcji:
   a) $f(x) = 0{,}25x^4 - 8x^2$, gdzie $x \in (-4, 1)$ b) $f(x) = x^2|x-2|$, gdzie $x \in (0, 3)$
5. Wyznacz największą i najmniejszą wartość (o ile istnieją) funkcji:
   a) $f(x)=\frac{x^2+9}{x}$ w przedziale $(0, 5\rangle$ b) $f(x)=\frac{x^4-1}{x-1}$ w przedziale $\langle -1, 1)$

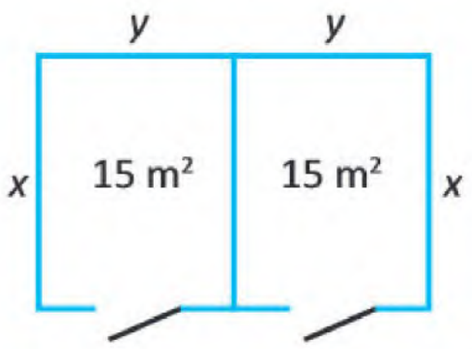
Zadania optymalizacyjne

Już wiesz, że funkcje opisują różne procesy i zależności w wielu dziedzinach nauki. Istotą zadań optymalizacyjnych jest wyznaczenie punktu, w którym taka funkcja przyjmuje największą lub najmniejszą wartość. W klasie drugiej rozwiązywaliśmy tego typu zadania przy użyciu własności funkcji kwadratowej. W tym temacie pokażemy zastosowanie rachunku pochodnych do rozwiązywania tego typu zadań.

Przykład 1.

Pan Karol – miłośnik koni – chce zbudować dwa przestronne, przylegające do siebie, identyczne boksy dla dwóch koni (zobacz plan boksów poniżej). Każdy boks ma mieć powierzchnię 15 m^2, a drzwi mają mieć szerokość 1,5 m. Koszt budowy jednego metra bieżącego ściany boksu to 300 zł. Jakie powinny być wymiary podłogi boksów, aby koszt budowy ścian był najmniejszy? Wynik podamy z dokładnością do 0,01 m. Jaki będzie wówczas koszt budowy?

Niech x, y oznaczają wymiary podłogi boksu (w metrach).



$x \cdot y = 15$
Całkowita długość ścian to
$3x + 4y - 3$

1. Wyznaczamy funkcję K kosztu budowy ścian boksów i jej dziedzinę

$K = 300(3x + 4y - 3)$ oraz $y = \frac{15}{x} \wedge y \geqslant 1{,}5 \wedge x > 0$

$K(x) = 300\left(3x + 4 \cdot \frac{15}{x} - 3\right)$, stąd

$K(x) = 900x + \frac{18000}{x} - 900$ $D_K = (0, 10\rangle$

2. Wyznaczamy najmniejszą wartość funkcji K.
Funkcja K jest ciągła w całej dziedzinie i różniczkowalna w przedziale (0, 10).

$K'(x) = 900 - \frac{18000}{x^2}$ $D_{K'} = (0, 10)$ – pochodna funkcji

$K'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 20 = 0 \wedge x \in D_{K'}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{20}$ – punkt krytyczny

Obliczamy wartość funkcji w punkcie krytycznym i wartości lub granice funkcji na końcach przedziału określoności.

$K\left(\sqrt{20}\right) = 1800\sqrt{20} - 900 \approx \mathbf{7150}$ $\lim\limits_{x \to 0^+} K(x) = +\infty$ $K(10) = \mathbf{9900}$

Funkcja K przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie $\sqrt{20}$.

3. Ustalamy wymiary podłogi boksu:

$$\sqrt{20} \approx \mathbf{4{,}47} \qquad \frac{15}{\sqrt{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \approx \mathbf{3{,}35}$$

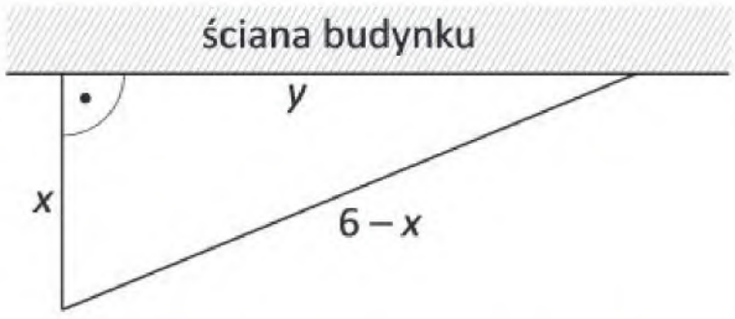
4. Odpowiedź: Podłoga jednego boksu powinna mieć wymiary 3,35 m na 4,47 m. Wówczas koszt budowy ścian będzie najmniejszy i będzie równy ok. 7150 zł.

UWAGA: Jeśli funkcja ma tylko jeden punkt krytyczny, to – zamiast liczyć granice lub wartości na końcach przedziału określoności – można wyznaczyć przedziały monotoniczności tej funkcji i na tej podstawie określić, czy funkcja przyjmuje najmniejszą lub największą wartość.

Przykład 2.

Pan Marek planuje zbudowanie przy domu piaskownicy z desek, która ma mieć kształt trójkąta prostokątnego i będzie przylegać jednym z krótszych boków do ściany budynku. Pan Marek dysponuje 6 metrami bieżącymi desek. Obliczymy, jaką długość powinien mieć bok piaskownicy prostopadły do ściany, aby przy całkowitym wykorzystaniu desek powierzchnia piaskownicy była możliwie największa.

Rysunek poniżej ilustruje sytuację opisaną w zadaniu:



x – długość boku piaskownicy, prostopadłego do ściany budynku

$6 - x$ – długość najdłuższego boku piaskownicy

y – długość boku piaskownicy wzdłuż ściany budynku

1. Wyznaczamy funkcję P opisującą pole powierzchni piaskownicy.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność:

$$x^2 + y^2 = (6 - x)^2, \quad \text{skąd} \quad y = \sqrt{36 - 12x}$$

Długości boków piaskownicy spełniają warunki:

$$x > 0 \qquad 6 - x > 0 \qquad 36 - 12x > 0$$

Pole powierzchni piaskownicy opisuje funkcja:

$$P(x) = \frac{1}{2} x\sqrt{36 - 12x}, \qquad D_P = (0, 3)$$

2. Sprawdzamy, czy funkcja P przyjmuje największą wartość.

Najpierw zapiszemy wzór w dogodniejszej postaci

$$P(x) = \sqrt{\frac{36x^2 - 12x^3}{4}}, \quad \text{czyli} \quad P(x) = \sqrt{9x^2 - 3x^3}$$

Funkcja P jest ciągła. Wyznaczamy jej pochodną:

$$P'(x) = \frac{18x - 9x^2}{2\sqrt{9x^2 - 3x^3}}, \quad D_{P'} = (0, 3)$$

Znajdujemy punkt krytyczny:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Obliczamy:

$$P(2)=\sqrt{12} \qquad \lim_{x\to 0^+} P(x)=0 \qquad \lim_{x\to 3^-} P(x)=0$$

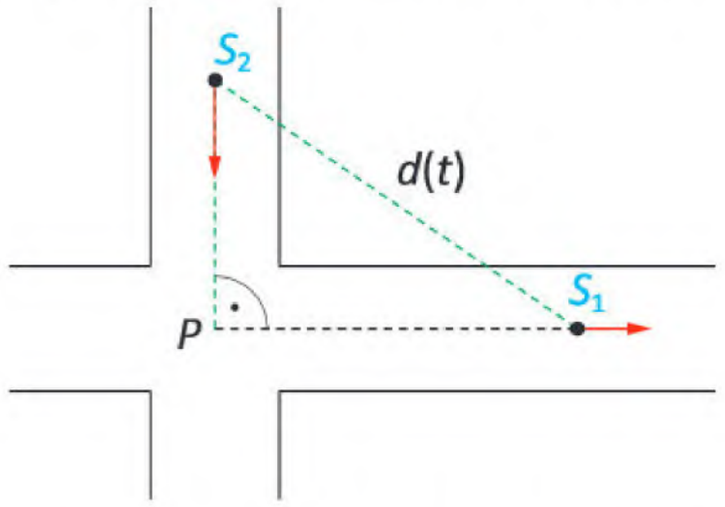
Funkcja P przyjmuje największą wartość w punkcie 2.

3. Odpowiedź: Bok piaskownicy prostopadły do ściany budynku powinien mieć długość 2 m.

Przykład 3.

Dwie drogi przecinają się pod kątem prostym w punkcie P (zobacz schemat poniżej). Samochód S_1 jadący drogą z zachodu na wschód ze stałą prędkością 60 km/h, przejechał przez punkt P o godzinie 12^{00}. W tej samej chwili drugi samochód S_2 jadący drogą z północy na południe ze stałą prędkością 80 km/h, znajdował się w odległości 50 km na północ od punktu P. O której godzinie samochody były najbliżej siebie i jaka była wtedy między nimi odległość?

Oznaczmy przez t czas (w godzinach), jaki upłynął od godziny 12^{00}, $t > 0$. Po upływie tego czasu samochód S_1 znajdował się $60t$ km na wschód od punktu P. Samochód S_2 znajdował się wtedy w odległości $80t$ km na południe od punktu, w którym był o godzinie 12^{00}, czyli jego odległość od punktu P była równa $|50 - 80t|$.



1. Wyznaczamy funkcję d opisującą odległość między samochodami S_1 i S_2 w czasie t.
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta PS_1S_2 otrzymujemy

$$d(t)=\sqrt{(60t)^2+(50-80t)^2}.$$

$$d(t)=10\sqrt{100t^2-80t+25}, \qquad D_d=\langle 0,+\infty)$$

2. Szukamy najmniejszej wartości tej funkcji.

Funkcja $y = d(t)$ jest ciągła.

$$d'(t)=\frac{5(200t-80)}{\sqrt{100t^2-80t+25}}, \quad D_{d'} = (0, +\infty)$$

$$d'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{5}$$

Obliczamy

$$d\left(\frac{2}{5}\right)=10\sqrt{9}=30 \qquad d(0)=50 \qquad \lim_{t\to+\infty} d(t)=+\infty$$

Funkcja $y = d(t)$ przyjmuje najmniejszą wartość równą 30 dla argumentu $\frac{2}{5}$.

$$\frac{2}{5}\text{h}=24\text{ min}$$

3. Odpowiedź: Samochody będą najbliżej siebie o godz. 12^{24}. Wówczas odległość między nimi będzie równa 30 km.

Przykład 4.

Zbadamy, czy istnieje wartość parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla której suma dwóch różnych rozwiązań równania $(m^2-1)x^2-2x+0{,}25=0$ jest największa.

Równanie $ax^2+bx+c=0$ ma dwa różne rozwiązania, jeśli spełnione są łącznie warunki: $a\neq 0$, $\Delta>0$. W przypadku danego równania mamy:

$$m^2-1\neq 0 \qquad \text{oraz} \qquad 4-(m^2-1)>0$$

co zachodzi wtedy, gdy

$$m\in\left(-\sqrt{5},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\sqrt{5}\right)$$

Ze wzorów Viete'a wynika, że jeśli x_1, x_2 są rozwiązaniami danego równania, to

$$x_1+x_2=\frac{2}{m^2-1} \qquad x_1+x_2=\frac{-b}{a}$$

Zbadamy istnienie największej wartości funkcji

$$f(m)=\frac{2}{m^2-1} \qquad D_f=\left(-\sqrt{5},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\sqrt{5}\right)$$

Funkcja f jest ciągła oraz

$$f'(m)=\frac{-4m}{\left(m^2-1\right)^2} \qquad D_{f'}=D_f$$

$$f'(m)=0 \Leftrightarrow m=0$$

$$f'(m)>0\Leftrightarrow m\in\left(-\sqrt{5},-1\right)\cup(-1,0) \qquad f'(m)<0\Leftrightarrow m\in(0,1)\cup\left(1,\sqrt{5}\right)$$

W punkcie 0 funkcja f ma maksimum lokalne.
Obliczamy $f(0)$ oraz granice na końcach przedziałów określoności funkcji f.

$$f(0)=-2 \qquad \lim_{m\to-\sqrt{5}^+} f(m)=\lim_{m\to\sqrt{5}^-} f(m)=0{,}5$$

$$\lim_{m\to-1^+} f(m)=\lim_{m\to1^-} f(m)=-\infty \qquad \lim_{m\to-1^-} f(m)=\lim_{m\to1^+} f(m)=+\infty$$

W punkcie 0 funkcja f nie przyjmuje największej wartości, bowiem funkcja f przyjmuje dowolnie duże wartości w lewostronnym sąsiedztwie -1 i prawostronnym sąsiedztwie 1. Zatem nie istnieje liczba m, dla której suma dwóch różnych rozwiązań rozpatrywanego równania byłaby największa.

Przykład 5.

Pewien zakład produkuje ozdobne okucia do drzwi. W ciągu tygodnia może wyprodukować do 300 okuć. Tygodniowy koszt (w złotych) wyprodukowania x okuć wyraża funkcja $K(x) = 0{,}002x^3 + 5x + 2916$, $D_K = (0, 300\rangle$. Cena sprzedaży jednego okucia zależy od liczby x sprzedanych kontrahentowi sztuk i opisuje ją funkcja: $c(x) = 150 - 0{,}1x$; $D_c = (0, 300\rangle$.

a) Przy jakim poziomie tygodniowej produkcji średni koszt wyprodukowania okucia jest najniższy?

b) Przy jakim poziomie sprzedaży zakład osiągnie maksymalny tygodniowy dochód?

Ad a) Jeśli $K(x)$ oznacza koszt wyprodukowania x okuć, to średni koszt jednego okucia opisuje funkcja

$$k_1(x) = \frac{K(x)}{x}, \quad \text{czyli} \quad k_1(x) = 0{,}002x^2 + 5 + \frac{2916}{x}, \quad D_{k_1} = (0{,}300\rangle$$

Wyznaczymy najmniejszą wartość tej funkcji. Funkcja k_1 jest ciągła. Mamy:

$$k_1'(x) = 0{,}004x - \frac{2916}{x^2}, \quad D_{k_1'} = (0, 300)$$

$$k_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 90$$

Obliczamy: $k_1(90) = 53{,}6$ $\lim\limits_{x \to 0^+} k_1(x) = +\infty$ $k_1(300) = 194{,}72$

W punkcie 90 funkcja k_1 przyjmuje najmniejszą wartość, równą 53,6.
Średni koszt wyprodukowania jednego okucia jest najniższy wtedy, gdy zakład wyprodukuje 90 okuć w ciągu tygodnia.

Ad b) Dochód $f(x)$ jest różnicą między wartością sprzedaży x okuć, a kosztami ich produkcji. Tak więc

$$f(x) = x \cdot c(x) - K(x) = x(150 - 0{,}1x) - (0{,}002x^3 + 5x + 2916)$$

$$f(x) = -0{,}002x^3 - 0{,}1x^2 + 145x - 2916 \qquad D_f = (0, 300\rangle$$

Szukamy liczby x, dla której funkcja f przyjmuje największą wartość. Funkcja f jest ciągła.

$$f'(x) = -0{,}006x^2 - 0{,}2x + 145 \qquad D_{f'} = (0, 300)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}006x^2 - 0{,}2x + 145 = 0$$

$$\Delta = 3{,}52$$

$$x_1 \approx 139{,}68 \quad x_2 \approx -173{,}01 \quad x_2 \notin D_{f'}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, x_1)$ $\quad$ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1, 300)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -2916$ $\quad$ $f(300) = -22416$

W punkcie x_1 jest maksimum globalne. Ponieważ x_1 nie jest liczbą całkowitą, więc sprawdzamy wartości funkcji f dla dwóch liczb całkowitych „sąsiadujących" z x_1.

$f(139) \approx 9935{,}67$ $\quad$ $f(140) = 9936$

Zakład osiągnie maksymalny tygodniowy dochód, jeśli sprzeda w tym czasie 140 okuć.

UWAGA: Zauważ, że w przykładzie 5. dziedziny rozpatrywanych funkcji są przedziałami liczbowymi – mimo, że nas interesują tylko liczby całkowite z tych przedziałów. Przyjęcie takiego modelu umożliwia zastosowanie metody rachunku pochodnych w rozwiązaniu zadania.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany, których suma długości krawędzi jest równa 24, a jedna krawędź podstawy jest dwa razy dłuższa od drugiej. Wyznacz wymiary tego prostopadłościanu, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

2. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równe 6. Jakie powinny być jego wymiary, aby objętość była największa z możliwych?

3. Do pewnej liczby ujemnej x dodano jej kwadrat i odjęto sześcian tej liczby. Jaka powinna być ta liczba, aby wartość otrzymanego wyrażenia była najmniejsza? Podaj tę najmniejszą wartość.

4. Liczbę 8 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, aby iloraz sumy kwadratów tych składników przez iloczyn tych składników był najmniejszy. Oblicz ten najmniejszy iloraz.

5. Hodowca koni chce zbudować w stajni cztery identyczne, przylegające do siebie i do ściany stajni boksy (zobacz rysunek poniżej). Każdy boks ma mieć powierzchnię 16 m^2 i drzwi o szerokości 1,5 m. Koszt budowy 1 metra bieżącego ścianki boksu to 400 zł. Jakie powinny być wymiary podłogi boksu, aby koszt budowy ścianek był najmniejszy? Wynik podaj z dokładnością do 0,01 m. Jaki będzie wówczas koszt budowy?

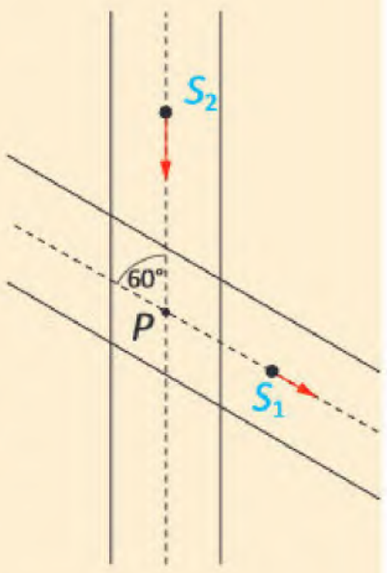


6. Koszt wytworzenia w ciągu jednego dnia x sztuk pewnego towaru wyraża wzór $K(x) = 0{,}1x^3 + 675$. Ile dziennie należy wytwarzać sztuk tego towaru, aby koszt wytworzenia jednej sztuki był najmniejszy?

7. Koszt zasadzenia dziennie x sztuk drzew iglastych w lesie wyraża się wzorem $K(x) = x^2 - x + 250$. Ile trzeba dziennie posadzić drzew, aby koszt zasadzenia jednego drzewa był najmniejszy?

D 8. Rozpatrujemy trójkąty, których suma długości dwóch boków jest równa 4, a kąt zawarty między tymi bokami jest równy 45°. Wykaż, że trójkąt, który ma najmniejszy obwód, jest jednocześnie trójkątem mającym największe pole.

9. Dwie drogi przecinają się pod kątem 60° w punkcie P. Samochód S_1 jadący z północnego zachodu na południowy wschód ze stałą prędkością 80 km/h przejechał przez punkt P o godz. 12^{00}. W tej samej chwili samochód S_2 jadący drogą z północy na południe ze stałą prędkością 100 km/h, znajdował się w odległości 200 km na północ od punktu P. Zanim samochód S_2 minął punkt P, jego odległość od samochodu S_1 była najmniejsza. O której to było godzinie? Podaj godzinę z dokładnością do pełnych minut.



10. Pewna firma przewozi małą ciężarówką towar z miasta A do miasta B. Oba te miasta łączy autostrada, po której wolno się poruszać z prędkością nie mniejszą niż 50 km/h i nie większą niż 140 km/h. Firma obliczyła, że jeśli ciężarówka jedzie z prędkością x km/h, to zużycie paliwa wynosi $10 + \frac{x^2}{700}$ litrów na godzinę. Odbiorca towaru płaci kierowcy 30 zł za godzinę jazdy i zwraca mu koszt paliwa na trasie z A do B. Załóżmy, że cena 1 litra paliwa jest równa 5 zł. Oblicz, jaka jest optymalna średnia prędkość ciężarówki, przy której koszt ponoszony przez odbiorcę jest najmniejszy.

11. Zbadaj, czy istnieje liczba m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla której iloczyn dwóch różnych rozwiązań równania kwadratowego $\frac{1}{4}\left(9 - m^2\right)x^2 - m^2x + m^4 = 0$ jest:
a) największy
b) największy w przedziale $(3, +\infty)$.

12. Zbadaj, czy istnieje liczba m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla której suma sześcianów dwóch różnych rozwiązań równania kwadratowego $\frac{1}{2}x^2 + mx + m^3 = 0$ jest najmniejsza.

13. Rozpatrujemy trapezy, których ramiona i krótsza podstawa mają długość 10. Jaka jest długość drugiej podstawy trapezu mającego największe pole?

14. Rozpatrujemy trapezy, których krótsza podstawa ma długość 1, a obie przekątne mają długość 2. Wyznacz długość dłuższej podstawy trapezu, mającego największe pole.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6.

Test

1. Granica $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4-x)(6+5x)}{(1+2x)^2}$ jest równa:

A. 6 B. 4 C. –2,5 D. –1,25

2. Niech $f(x)=\dfrac{x^3+3|x|}{x}$ oraz $g(x)=x^3-2|x|+3$. Zatem:

A. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=3$ B. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$

C. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}g(x)$ D. $\lim\limits_{x\to2}f(x)\neq\lim\limits_{x\to2}g(x)$

3. Granica $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$ jest równa;

A. 0 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{2}$

4. Granica $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-3x+5}}{1-x}$ jest równa:

A. –3 B. 0 C. $\sqrt{3}$ D. 3

5. Dana jest funkcja $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}, & \text{jeśli } x\in\boldsymbol{R}-\{2\}\\ 5, & \text{jeśli } x=2\end{cases}$. Zatem:

A. funkcja f jest ciągła w punkcie 2 B. $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ nie istnieje

C. $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ istnieje i $f(2)\neq\lim\limits_{x\to2}f(x)$ D. $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=2$

6. Niech $W(x)$ będzie wielomianem. Wiadomo, że $W(1) > 0$, $W(2) < 0$, $W(3) > 0$ i $W(4) > 0$. Z tego wynika, że równanie $W(x) = 0$:

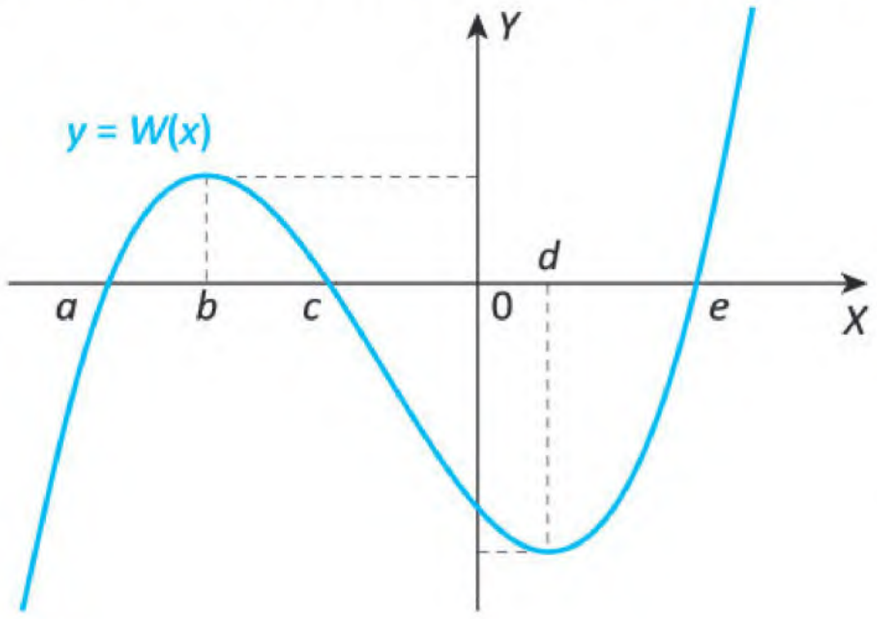
A. nie ma rozwiązań w przedziale (3, 4)
B. nie ma rozwiązań w przedziale (1, 3)
C. ma tylko jedno rozwiązanie w zbiorze $\langle 0, 4\rangle$
D. ma co najmniej dwa rozwiązania w zbiorze $\langle 1, 3\rangle$.

7. Styczna do wykresu funkcji $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$ w punkcie –1 przecina oś OY w punkcie o współrzędnych:

A. (0, 0) B. (0, 1) C. (0, 3) D. (0, 4)

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

8. Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia trzeciego. Wówczas:



A. $W'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (a, c) \cup (e, +\infty)$

B. $W'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (a, b) \cup (e, +\infty)$

C. $W'(a) \cdot W'(c) \cdot W'(e) < 0$

D. $W'(b) \cdot W'(d) < 0$

9. Pochodna funkcji $f(x)=\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^3$ w punkcie a, gdzie $a \neq 0$, jest równa:

A. $3\cdot\left(a^2-\frac{2}{a}\right)$ B. $6a^3+\frac{2}{a^3}$

C. $6\cdot\left(a^2-\frac{2}{a}\right)^2\cdot\left(a+\frac{1}{a^2}\right)$ D. $6a^3-\frac{4}{a^3}$

10. Niech $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{3\}$. Które spośród danych poniżej zdań są prawdziwe?

I. Funkcja f ma maksimum lokalne w punkcie 0 i minimum lokalne w punkcie 6 oraz $f(0) < f(6)$.
II. Prosta $y = x + 3$ jest asymptotą ukośną obustronną wykresu funkcji f.
III. Funkcja f jest rosnąca w zbiorze $(-\infty, 0\rangle \cup \langle 6, +\infty)$.
IV. Funkcja f jest malejąca w zbiorze $\langle 0, 3) \cup (3, 6\rangle$.

A. tylko II i IV B. tylko I i II C. tylko I, II i III D. I, II, III i IV

Zadania otwarte

11. Wyznacz liczby a i b, dla których funkcja $f(x)=\begin{cases} x^2+ax, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-2) \\ b, & \text{jeśli } x\in\langle -2,5\rangle \\ 2x-3, & \text{jeśli } x\in(5,+\infty) \end{cases}$ jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych.

D 12. Wykaż, że funkcja $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{2x-6}, & \text{jeśli } x\neq 3 \\ 3, & \text{jeśli } x=3 \end{cases}$ ma pochodną w punkcie 3.

13. Wyznacz wszystkie asymptoty wykresu funkcji: $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{8-2x^2}$.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

14. Dana jest funkcja wielomianowa $f(x)=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3$.
    a) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie –4.
    b) Podaj współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji f i tej stycznej.

15. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji $f(x)=-x^5+15x^3$.

D 16. Wykaż, że jeśli $x\geqslant 1$, to $x^3+3x-\frac{2}{x}-2\geqslant 0$.

D 17. Wykaż, że w przedziale $\langle -1, 1\rangle$ wielomian $W(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+\frac{3}{4}$ ma tylko jeden pierwiastek. Podaj przybliżenie tego pierwiastka tak, aby błąd bezwzględny tego przybliżenia był mniejszy od 0,1.

18. Wyznacz zbiór wartości funkcji f, jeśli:
    a) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, $x\in \boldsymbol{R}$
    b) $f(x)=\frac{10}{x}+3+\frac{5x}{2}$, $x\in\langle -5, 0)\cup(0, 5\rangle$.

19. Dana jest funkcja wielomianowa $h(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 3{,}5$.
    a) Podaj przedziały monotoniczności funkcji h.
    b) Oblicz ekstrema lokalne tej funkcji.
    c) Wyznacz równania stycznych do wykresu, które są równoległe do prostej $y = -6x$.

20. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{-x^2}{2+x}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{-2\}$.
    a) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji f. Otrzymane wyniki przedstaw w tabeli.
    b) Zbadaj, czy wykres funkcji f ma asymptoty. Jeśli tak, wyznacz ich równania.

21. Budujemy basen w kształcie prostopadłościanu o pojemności 36 m^3. Jego dno ma być prostokątem, którego stosunek długości boków jest równy 2. Ściany i dno basenu chcemy wyłożyć kafelkami. Jakie powinny być wymiary basenu, aby zużyć jak najmniej kafelków?

22. Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratowej ma długość d. Jaka jest największa suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu?

23. Wielomian $W(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + a$ ma dwukrotny pierwiastek, który jest liczbą całkowitą. Oblicz a. Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

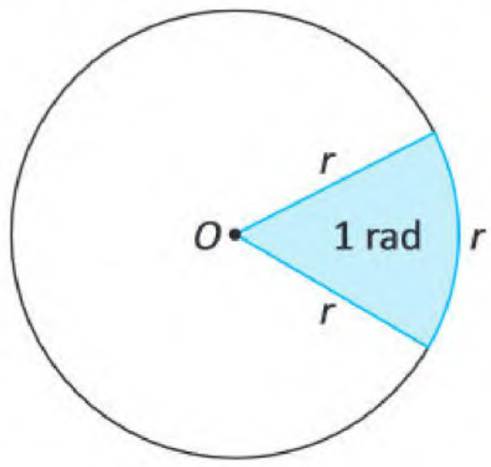
7. Trygonometria

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej – powtórzenie wiadomości z klasy 2

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie z klasy drugiej definicję miary łukowej kąta.

Jednostką miary łukowej jest 1 radian (1 rad).

1 radian, to miara kąta środkowego okręgu opartego na łuku równym promieniowi tego okręgu.



Kąt pełny ma miarę 2π rad. Możemy zapisać: 2π rad = 360°, stąd

$$t \text{ rad} = \left(\frac{t \cdot 180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad \text{oraz} \qquad t^{\circ} = \frac{t \cdot \pi}{180} \text{ rad}$$

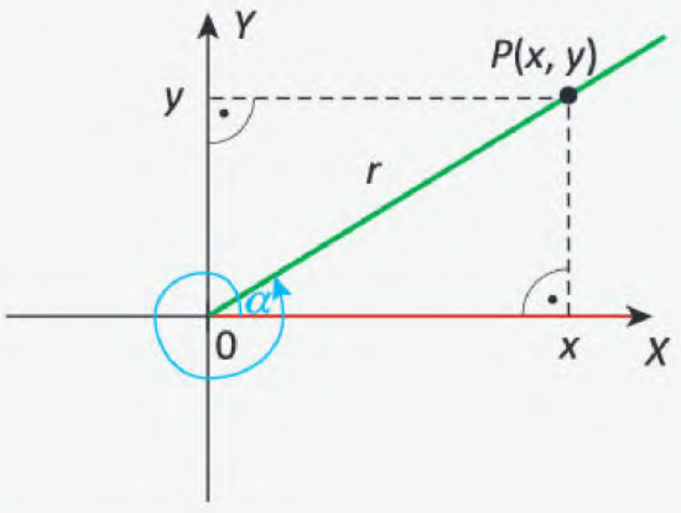
Ćwiczenie 2. Zamień stopnie na radiany: 130°, 45°, 120°, 210°, 330°.

Ćwiczenie 3. Zamień radiany na stopnie: $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}$.

Ćwiczenie 4. Przypomnij sobie z klasy drugiej pojęcie kąta skierowanego i pojęcie uogólnionego kąta skierowanego.

Definicja 1.

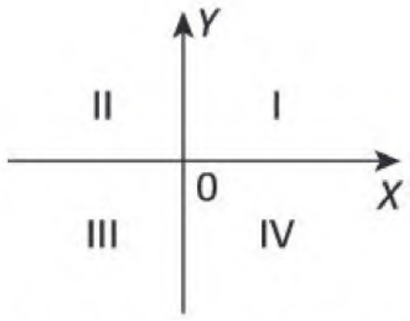
Niech α będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Tej liczbie odpowiada jeden uogólniony kąt skierowany, którego miara (w radianach) jest równa α. Kąt jest umieszczony w prostokątnym układzie współrzędnych w położeniu standardowym – jak na rysunku poniżej. Na końcowym ramieniu kąta, w odległości r od początku układu współrzędnych wybieramy dowolny punkt $P(x, y)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r > 0$. Wówczas:



$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

Ćwiczenie 5. Na podstawie definicji 1. określ znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych.



Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta podaje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, jeśli $\alpha \in \boldsymbol{R}$

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, jeśli $\alpha \in \boldsymbol{R} - \left\{x : x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, jeśli $\alpha \in \boldsymbol{R} - \{x : x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$

4) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, jeśli $\alpha \in \boldsymbol{R} - \left\{x : x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Przykład 1.

Wiedząc, że $\alpha \in \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ i $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$, obliczymy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, na dwa sposoby:

a) na podstawie definicji 1. b) na podstawie twierdzenia 1.

Ad a) Końcowe ramię kąta α znajduje się w IV ćwiartce układu współrzędnych i $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$. Na podstawie definicji 1. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, możemy więc przyjąć, że punkt P wybrany na końcowym ramieniu kąta α ma współrzędne $(4, -3)$. Wyznaczamy odległość punktu $P(4, -3)$ od początku układu współrzędnych ze wzoru:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{stąd} \quad r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Obliczamy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α:

$$\sin\alpha = \frac{-3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5},\ \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}.$$

Ad b) Korzystamy z zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta. Na podstawie twierdzenia 1.4 obliczamy $\operatorname{ctg}\alpha$.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{4}{3}$$

Do obliczenia $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ korzystamy z twierdzenia 1. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy sin α:

$$\sin\alpha = -\frac{3}{4}\cos\alpha$$

i podstawiamy do pierwszego równania układu. Otrzymujemy:

$$\left(-\frac{3}{4}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{9}{16}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{25}{16}\cos^2\alpha = 1, \qquad \text{stąd}$$

$$\cos\alpha = \frac{-4}{5} \quad \vee \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Ale z założenia $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, więc cos $\alpha > 0$. Zatem

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \quad \text{oraz} \quad \sin\alpha = -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{-3}{5}.$$

Otrzymaliśmy: $\sin\alpha = \frac{-3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

Ćwiczenie 6. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:

a) $\sin\alpha = -0{,}5$ i $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ b) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Z definicji 1. wynikają następujące twierdzenia.

Twierdzenie 2.

Niech *m* oznacza dowolną liczbę całkowitą. Wówczas:

1) $\sin(m \cdot 2\pi + \alpha) = \sin\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$
2) $\cos(m \cdot 2\pi + \alpha) = \cos\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$
3) $\operatorname{tg}(m \cdot 2\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$
4) $\operatorname{ctg}(m \cdot 2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R} - \{x: x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$.

Twierdzenie 3.

1) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$
2) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$
3) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$
4) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R} - \{x: x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$.

W obliczaniu wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta często korzystamy ze wzorów redukcyjnych, które przedstawia poniższa tabela.

φ	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\varphi$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\varphi$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Przykład 2.

Pokażemy, że $4\cos\frac{16\pi}{3}\cdot\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right)=-1$.

Obliczamy wartości poszczególnych funkcji trygonometrycznych:

$$\cos\frac{16\pi}{3}=\cos\left(2\cdot2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)\underset{\text{tw. 2}}{=}\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right)\underset{\text{tw. 3}}{=}-\sin\left(2\pi+\frac{11\pi}{6}\right)\underset{\text{tw. 2}}{=}-\sin\frac{11\pi}{6}=-\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

Zatem $4\cos\frac{16\pi}{3}\cdot\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=-1$.

Ćwiczenie 7. Wykaż, że $\operatorname{tg}\frac{20\pi}{3}\cdot\sin\frac{29\pi}{6}=\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$.

Przykład 3.

Wykażemy, że jeśli $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$, to $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=1$.

Ze wzoru $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$ i z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\sqrt{\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{|\cos\alpha|}{\sin\alpha}\qquad\sqrt{x^2}=|x|$$

Z założenia $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$ wynika, że $\cos\alpha<0$. Wówczas $|\cos\alpha|=-\cos\alpha$ oraz

$$-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{|\cos\alpha|}{\sin\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

co kończy dowód.

Ćwiczenie 8. Wykaż, że jeśli $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, to

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\operatorname{ctg}(-\alpha-\pi)} = \sin^2\alpha\ .$$

Definicja 2.

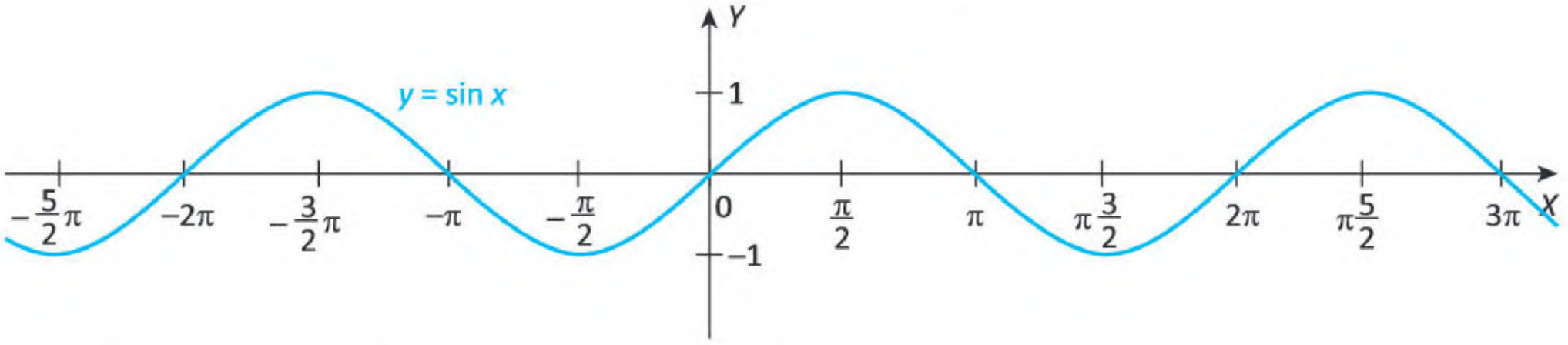
Funkcję liczbową f nazywamy **funkcją okresową** wtedy, gdy istnieje liczba T różna od zera, że dla każdej liczby x należącej do dziedziny funkcji f liczba $x + T$ też należy do dziedziny tej funkcji i zachodzi równość

$$f(x + T) = f(x).$$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji**. Jeśli istnieje najmniejszy okres dodatni funkcji f, to nazywamy go **okresem podstawowym funkcji** f i oznaczamy T_0.

Przykład 4.

Na poniższym rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji okresowej $y = \sin x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Omówimy własności tej funkcji.



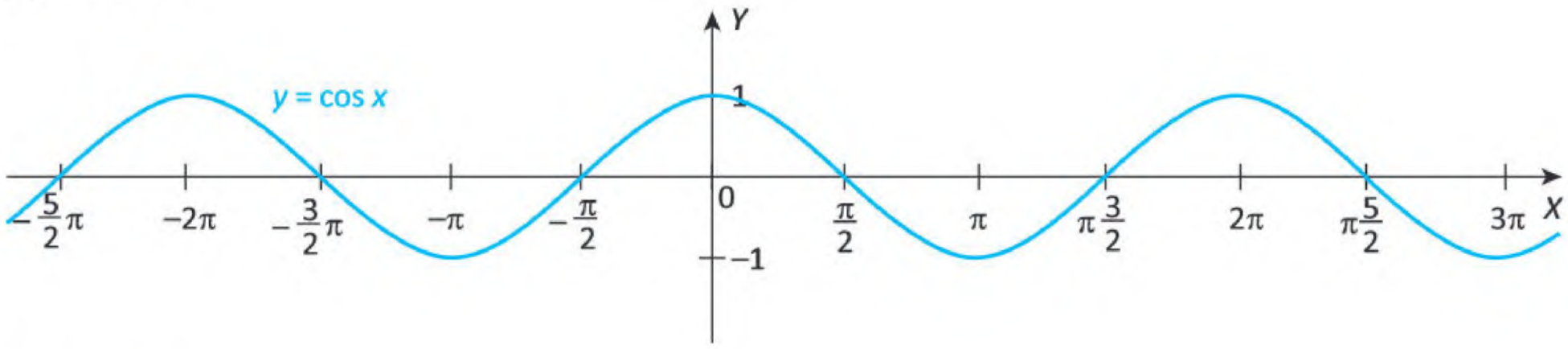
1. Dziedziną funkcji $y = \sin x$ jest zbiór $\boldsymbol{R}$.
2. Zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -1, 1\rangle$.
3. Funkcja $y = \sin x$ jest okresowa, $T_0 = 2\pi$.
4. Miejscami zerowymi funkcji są liczby postaci $k \cdot \pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
5. $\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$

   $\sin x < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
6. Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $\left\langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi \right\rangle$, $k \in \boldsymbol{Z}$,

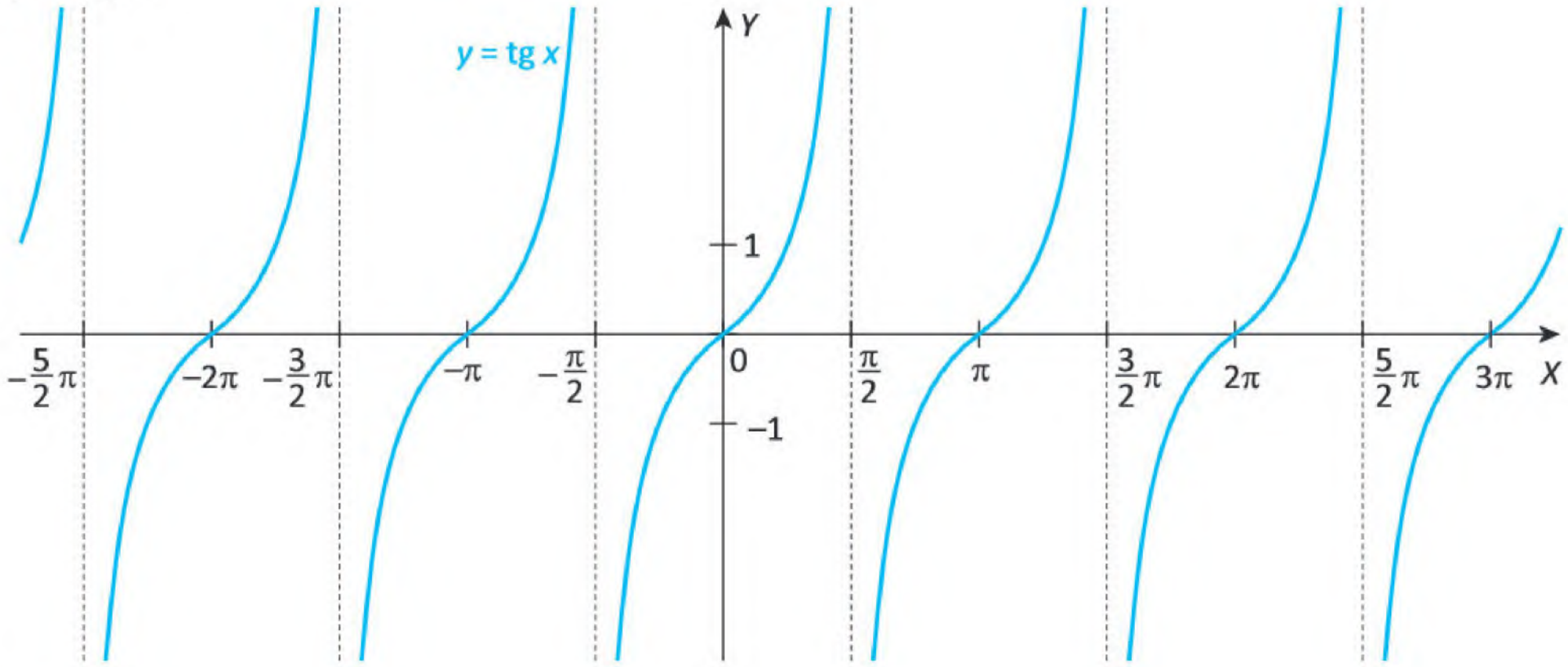
   malejąca w przedziałach postaci $\left\langle \frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi \right\rangle$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
7. Funkcja nie jest różnowartościowa.
8. Funkcja $y = \sin x$ jest funkcją nieparzystą. Jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Ćwiczenie 9. Poniżej znajdują się wykresy funkcji okresowych $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Podaj okres podstawowy każdej z nich. Omów własności tych funkcji.

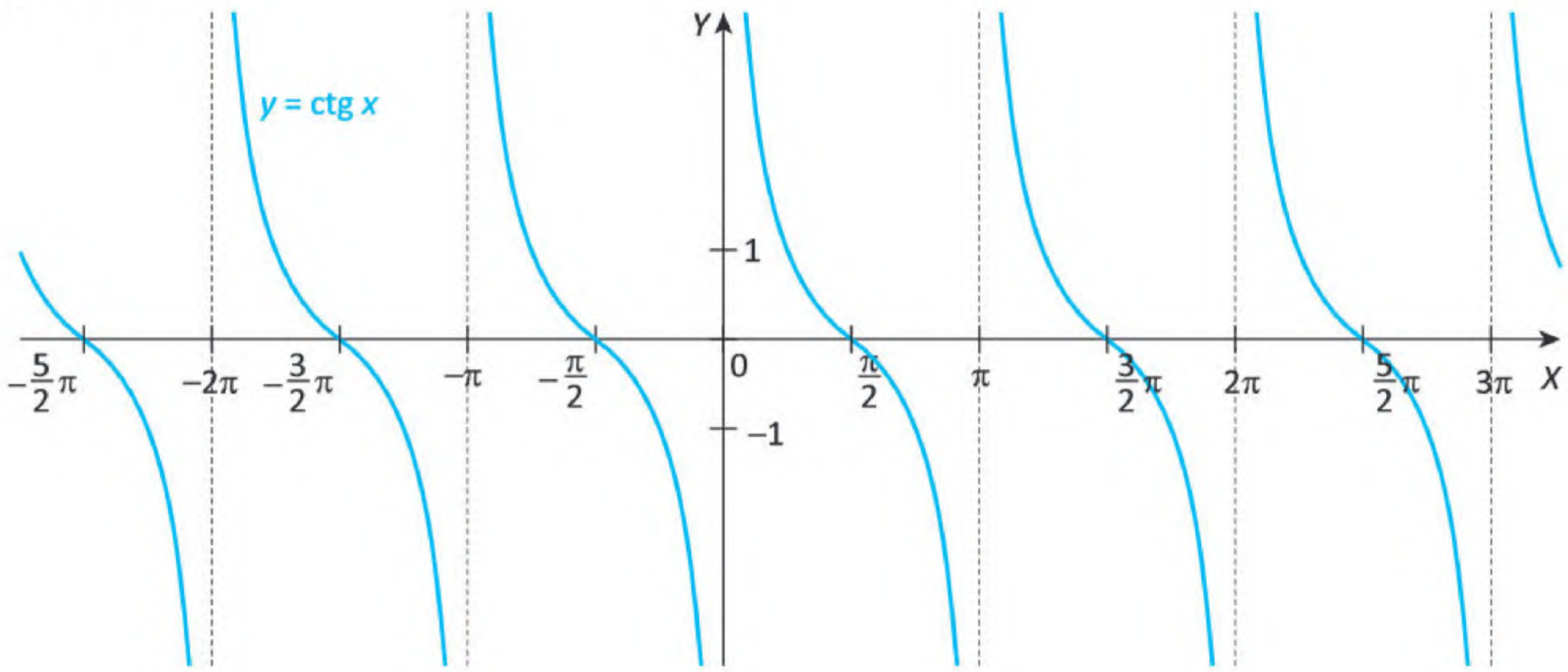
a) $y = \cos x$



b) $y = \operatorname{tg} x$



c) $y = \operatorname{ctg} x$



Przykład 5.

Wyznaczymy dziedzinę i okres podstawowy funkcji $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$.

Wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha$ nie jest określony, jeśli $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Zatem kąt $2x+\frac{\pi}{12}$ spełnia warunek:

$$2x+\frac{\pi}{12}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \qquad \text{czyli} \qquad 2x\neq\frac{6\pi}{12}-\frac{\pi}{12}+k\pi \qquad \text{stąd}$$

$$x\neq\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, \qquad \text{więc} \qquad D=\boldsymbol{R}-\left\{x: x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right\}, \quad k\in\boldsymbol{Z}$$

Oznaczmy okres podstawowy funkcji f przez T_0. Z definicji 2. otrzymujemy:

$$f(x+T_0)=\operatorname{tg}\left[2(x+T_0)+\frac{\pi}{12}\right]=\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{12}+2T_0\right)$$

Funkcja f jest okresowa, więc

$$\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{12}+2T_0\right)=\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$$

Okresem podstawowym funkcji $y = \operatorname{tg} x$ jest liczba π, stąd

$$2T_0=\pi \text{ czyli} \qquad T_0=\frac{\pi}{2}$$

Ćwiczenie 10. Podaj okresy podstawowe funkcji: $y=\sin 2x$, $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $y=\cos\frac{2x}{3}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Zamień stopnie na radiany:
   a) 60° b) −150° c) 228° d) −1240°.

2. Zamień radiany na stopnie:
   a) $\frac{-3\pi}{4}$ b) $\frac{7\pi}{12}$ c) $-3\frac{5}{6}\pi$ d) $\frac{125\pi}{18}$.

3. Punkt $P(x, y)$ znajduje się na końcowym ramieniu kąta skierowanego α. Oblicz liczbę x, jeśli:
   a) $y=-9$, $\operatorname{tg}\alpha=3$ b) $y=-6$, $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ c) $y=-3$, $\sin\alpha=\frac{-24}{25}$.

4. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, jeśli:
   a) $\cos\alpha=-0{,}8$ i $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ b) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{4}$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$
   c) $\operatorname{tg}\alpha=6$ i $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ d) $\operatorname{ctg}\alpha=-2{,}4$ i $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

D 5. Wykaż, że:

a) $2\sin\frac{13\pi}{4}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{-7\pi}{4}\right)+2\cos\frac{9\pi}{4}=\operatorname{tg}\frac{20\pi}{3}+\sqrt{3}$

b) $\cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{19\pi}{6}=\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}\cdot\cos\frac{11\pi}{3}$

c) $\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{-20\pi}{3}\right)+\cos\frac{4\pi}{3}=0$

d) $\frac{\cos\frac{11\pi}{3}}{\sin\frac{15\pi}{4}}:\frac{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}}{\sin\frac{7\pi}{3}}-2\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

D 6. Wykaż, że dane równości są prawdziwe. Podaj konieczne założenia.

a) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\sin(-\alpha+\pi)+\sin^2\left(\frac{3\pi+2\alpha}{2}\right)=1$

b) $\operatorname{tg}(-3\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(-\alpha+5\pi)=\sin\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{22\pi}{3}$

c) $\frac{1-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}^2(2\pi-\alpha)}=1-2\cos^2\left(\frac{2\alpha-3\pi}{2}\right)$.

D 7. Wykaż, że jeśli $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, to $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}-\frac{\sin\left(\frac{\pi-2\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi+2\alpha}{2}\right)}$.

8. Wyznacz okres podstawowy funkcji okresowej:

a) $f(x)=\sin(\pi x+2)$

b) $f(x)=2\cos(3-x)$

c) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi+1{,}5x)$

d) $f(x)=-\operatorname{ctg}\frac{x-\pi}{3}$.

9. Odczytaj z wykresu argumenty, dla których:

a) funkcja $y = \sin x$ przyjmuje w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ wartość $\frac{-\sqrt{2}}{2}$,

b) funkcja $y = \cos x$ przyjmuje w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$ wartość $-\frac{1}{2}$.

10. Wyznacz zbiór wartości funkcji ciągłej:

a) $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\cos x\right)$ b) $g(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\sin x\right)$ c) $h(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\cos x\right)$.

Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych

W tym temacie przypomnimy na kilku przykładach przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych.

Przykład 1.

Naszkicujemy wykres funkcji $y=2\sin\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)$.

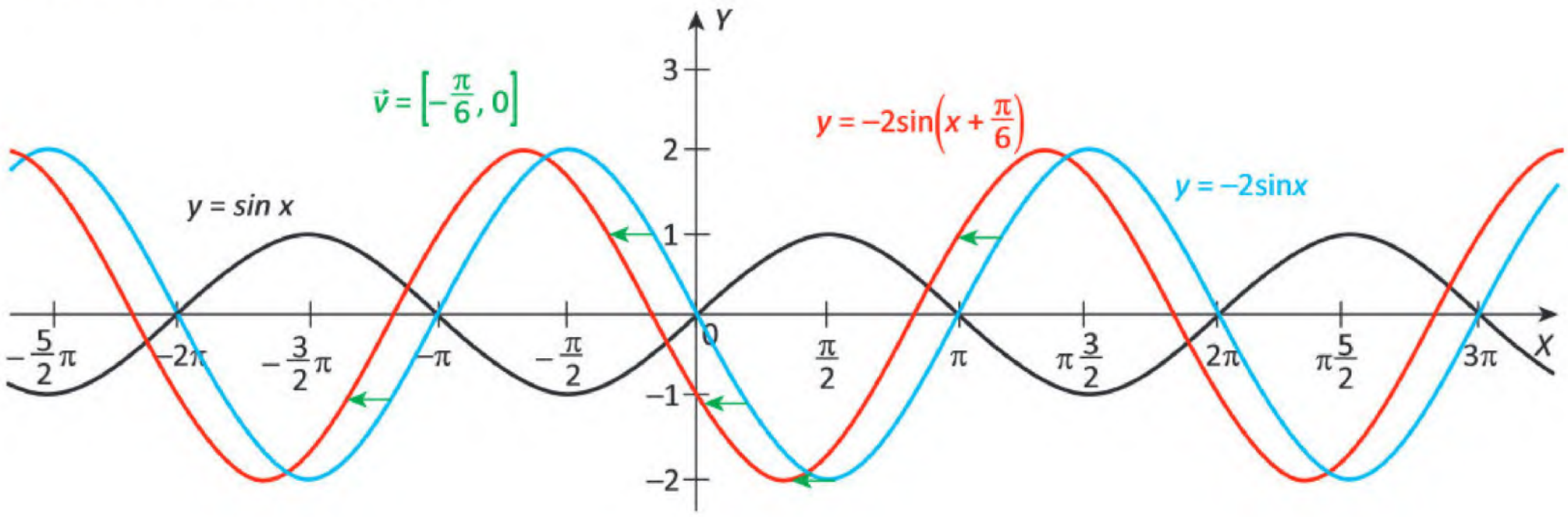
Korzystając ze wzoru $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ przekształcamy wzór funkcji do postaci

$$y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Wykres tej funkcji otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji

$$f(x)=-2\sin x \quad \text{o wektor} \quad \left[-\frac{\pi}{6},0\right]$$

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Okresem podstawowym tej funkcji jest liczba 2π. Wykres funkcji f powstaje z przekształcenia wykresu funkcji $y = \sin x$ w powinowactwie prostokątnym o osi OX i o skali -2. Na rysunku poniżej wykres funkcji f jest naszkicowany kolorem niebieskim, a wykres funkcji $y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ – kolorem czerwonym.



Ćwiczenie 1. Naszkicuj wykres funkcji $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}(-x)$ w zbiorze $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

Przykład 2.

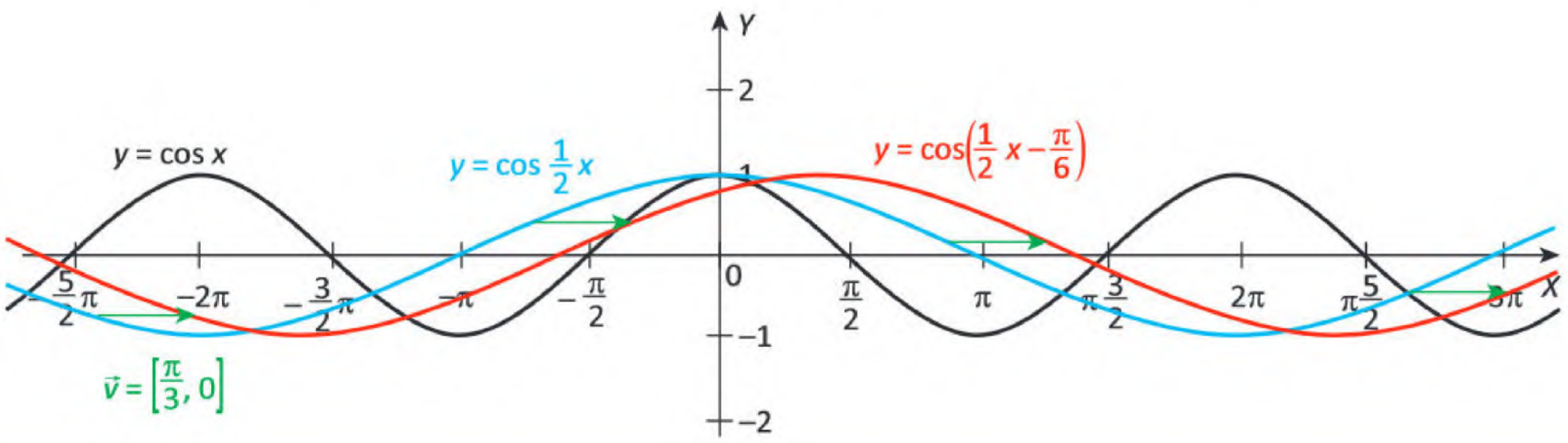
Naszkicujemy wykres funkcji $y=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Przekształcamy wzór funkcji do postaci $y=\cos\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Wykres tej funkcji otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji

$$f(x)=\cos\frac{1}{2}x \quad \text{o wektor} \quad \left[\frac{\pi}{3},0\right].$$

Sprawdź, że okresem podstawowym funkcji f jest liczba 4π. Wykres funkcji f otrzymamy, przekształcając wykres funkcji $y = \cos x$ w powinowactwie prostokątnym o osi OY i o skali 2. Na rysunku poniżej wykres funkcji f jest naszkicowany kolorem niebieskim, a wykres funkcji $y=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$ – kolorem czerwonym.



Ćwiczenie 2. Wyznacz okres podstawowy funkcji $f(x) = \sin 2x$. Na podstawie wykresu funkcji f naszkicuj fragment wykresu funkcji $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Przykład 3.

Naszkicujemy wykres funkcji $y=\operatorname{tg}\left|x-\frac{\pi}{4}\right|+1$.

Wykres tej funkcji otrzymamy, wykonując przesunięcie równoległe wykresu funkcji

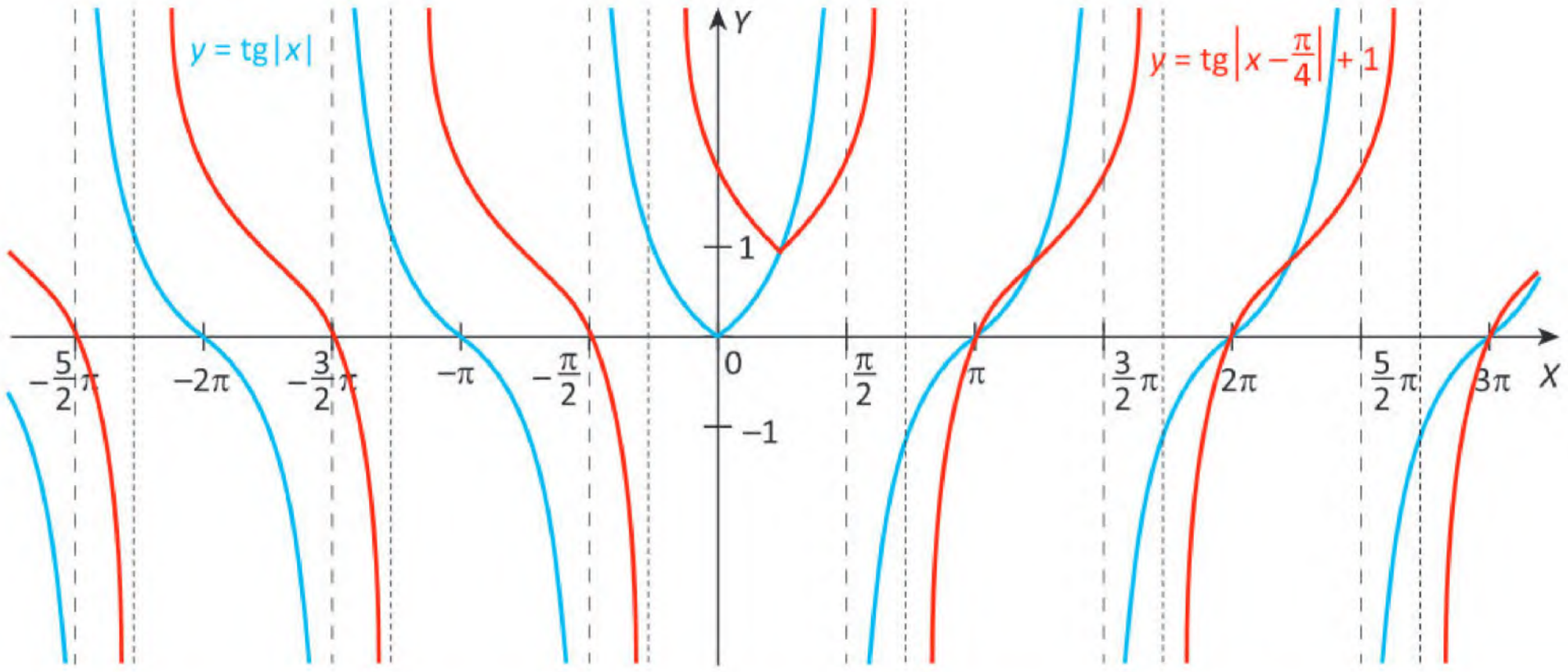
$$f(x)=\operatorname{tg}|x| \quad \text{o wektor} \quad \left[\frac{\pi}{4},1\right].$$

Dziedziną funkcji f jest zbiór D_f, gdzie $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{x: x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$. Funkcja f jest parzysta, bowiem dla dowolnej liczby x, $x \in D_f$, liczba $(-x)$ należy do zbioru D_f oraz

$f(-x) = \operatorname{tg}|-x| = \operatorname{tg}|x| = f(x)$.

Wykres funkcji f jest więc symetryczny względem osi OY.

Na rysunku poniżej wykres funkcji f jest naszkicowany kolorem niebieskim, a wykres funkcji $y=\operatorname{tg}\left|x-\frac{\pi}{4}\right|+1$ – kolorem czerwonym.



Ćwiczenie 3. Naszkicuj wykres funkcji $y = \cos|2x| - 3$ w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Przykład 4.

Naszkicujemy wykres funkcji $g(x) = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}$.

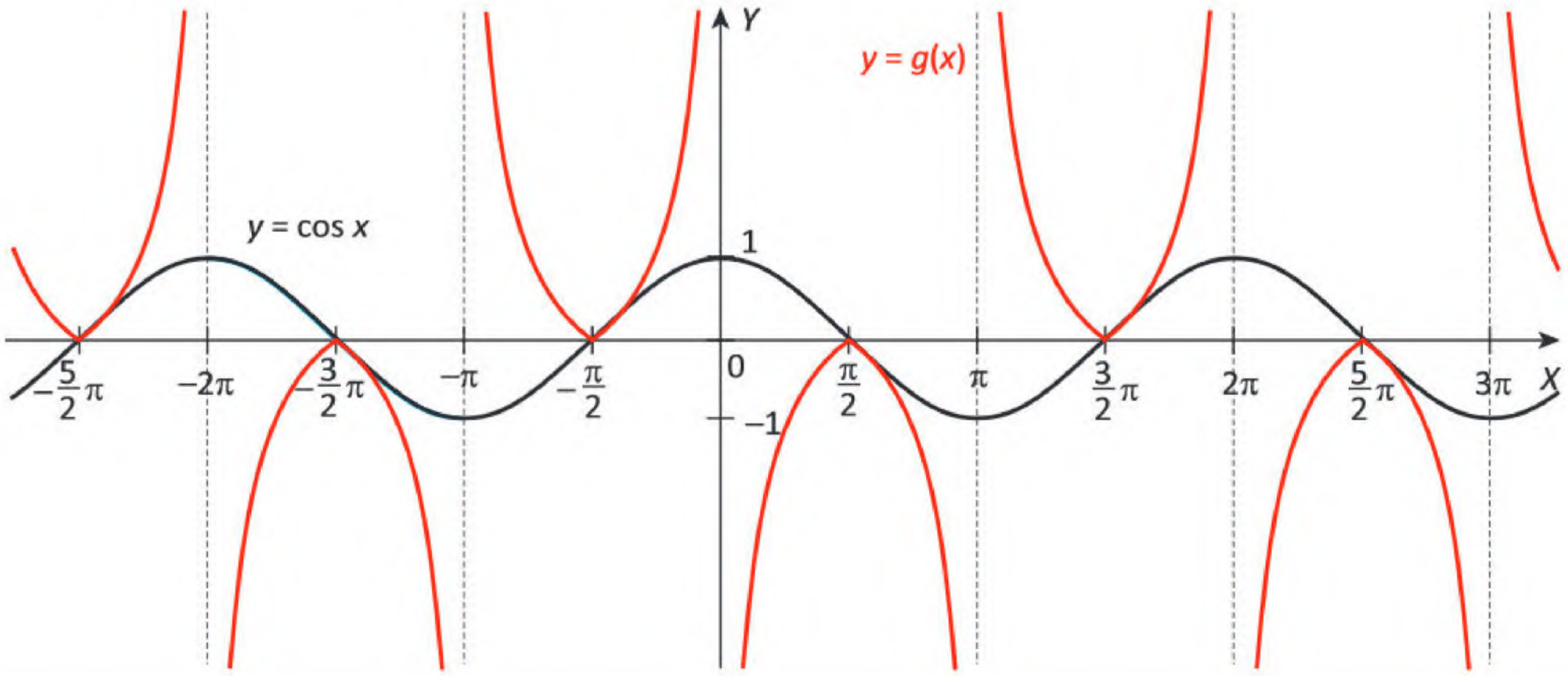
Przekształcamy wzór funkcji w następujący sposób:

$$\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{-\sin x} = \frac{|\cos x|}{-\sin x}, \quad \text{czyli} \quad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{ctg} x, \text{ jeśli } \cos x \in \langle 0, 1) \\ \operatorname{ctg} x, \text{ jeśli } \cos x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Dziedzina funkcji g jest taka sama, jak dziedzina funkcji $y = \operatorname{ctg} x$:

$D_g = \boldsymbol{R} - \{x: x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$.

Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = \cos x$. Odczytujemy przedziały, w których ta funkcja przyjmuje wartości dodatnie i przedziały, w których przyjmuje wartości ujemne. Następnie szkicujemy wykres funkcji g.



Ćwiczenie 4. Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=\left|\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right|$. Otrzymany wykres przesuń równolegle o wektor [0, –1]. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x)=-\cos x+4$

b) $f(x)=\sin\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x)=\operatorname{tg}\left(-x+\frac{2\pi}{3}\right)$

d) $f(x)=-\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}$

2. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x)=3-\frac{1}{2}\cos x$

b) $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-1$

d) $f(x)=-\cos(2x+\pi)+1$

3. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $g(x)=\left|\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|-1$

b) $g(x)=\left|\operatorname{ctg}x-1\right|-1$

c) $g(x)=\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\frac{1}{2}\right|$

d) $g(x)=\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+2$

4. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $h(x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(-x+\frac{\pi}{6}\right)$

b) $h(x)=-2\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$

c) $h(x)=\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi-2x}{2}\right)$

d) $h(x)=\operatorname{ctg}2x\cdot\sqrt{1-\cos^2 2x}$

Równania trygonometryczne, cz. 1.

Rozważmy równanie

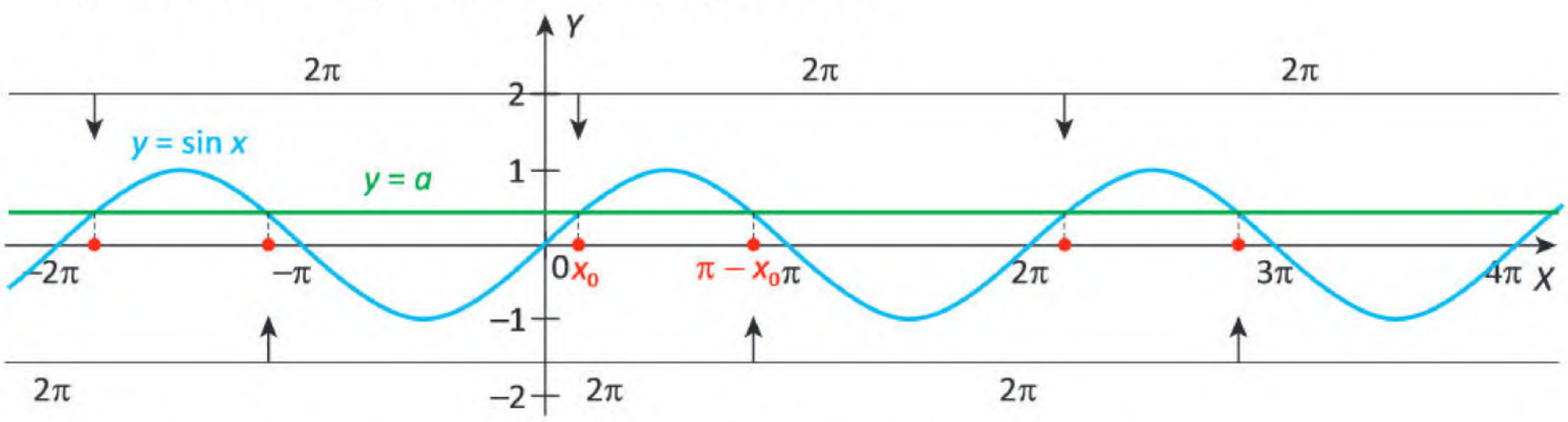
$\sin x = a$

Dziedziną tego równania jest zbiór liczb rzeczywistych. Rozwiązania tego równania istnieją tylko wtedy, gdy

$a \in \langle -1, 1 \rangle$

W jednym układzie współrzędnych naszkicujmy wykresy funkcji

$y = \sin x$ oraz $y = a$, $a \in \langle -1, 1 \rangle$, $x \in \boldsymbol{R}$.



Równanie $\sin x = a$ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Okres podstawowy funkcji $y = \sin x$ jest równy 2π. W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ równanie ma dwa rozwiązania:

x_0 oraz $\pi - x_0$, $\qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

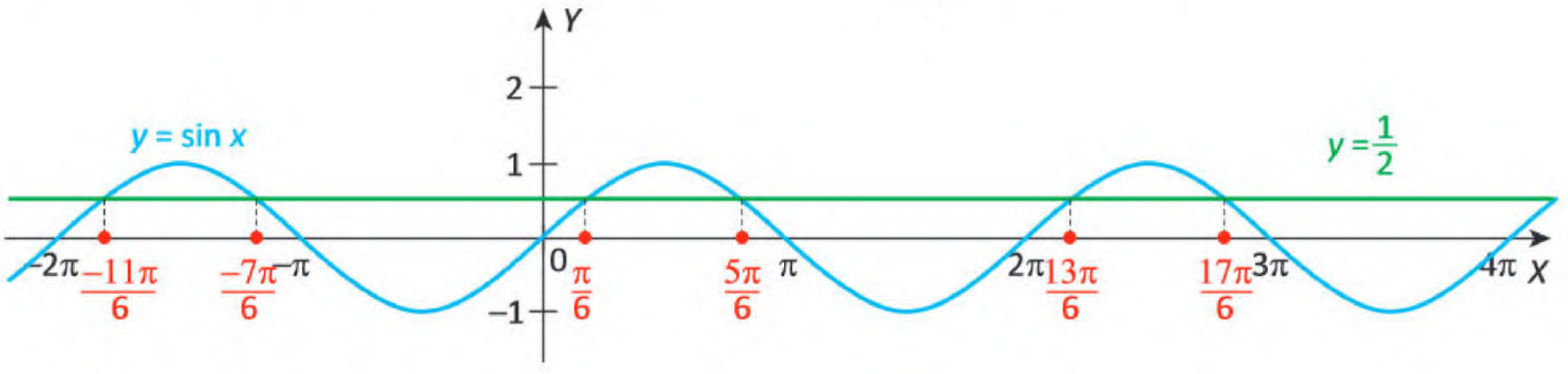
Kolejne rozwiązania znajdują się w odległości 2π, 4π, 6π, ... od wskazanych rozwiązań. Wygodnie jest podać wszystkie rozwiązania w dwóch seriach:

$x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$ oraz $\pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$

Przykład 1.

Rozwiążemy równania: a) $\sin x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{-1}{2}$.

Ad a) Szkicujemy wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = \frac{1}{2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.



W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ mamy :

$\sin x = \frac{1}{2}$, jeśli $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6}$.

Zatem w zbiorze ***R*** otrzymujemy:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \right)$$

Ad b) Wykorzystamy nieparzystość funkcji sinus. Wiemy, że

$$\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = \frac{-1}{2} \quad \text{oraz} \quad \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}$$

Zatem

$$\sin x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \left(x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \right).$$

Ćwiczenie 1. Rozwiąż równanie $\sin x = 1$.

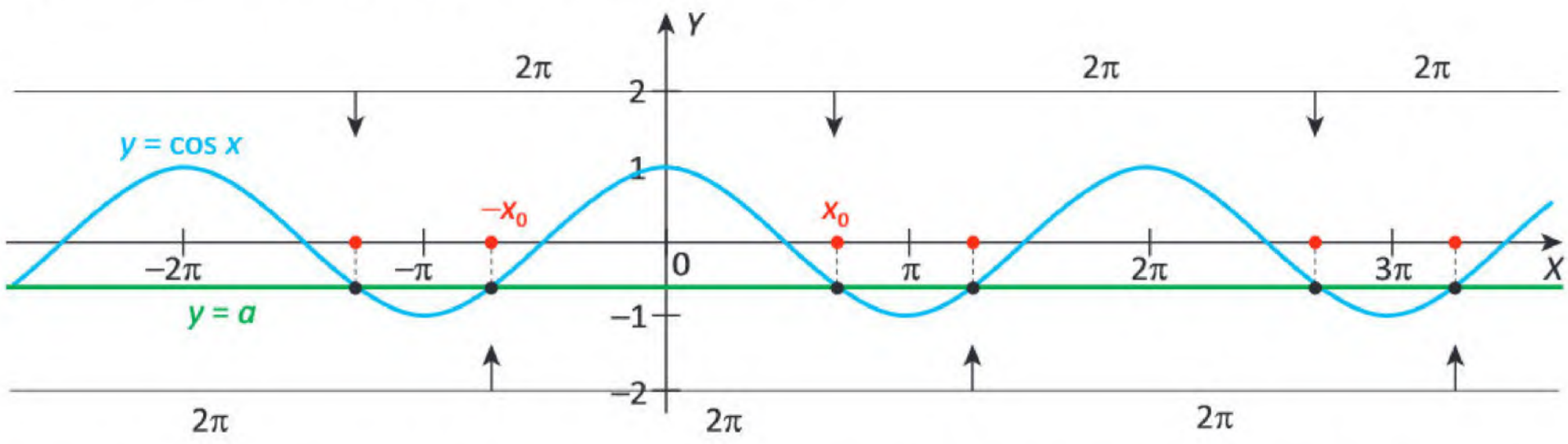
Rozważmy teraz równanie

$$\cos x = a$$

Dziedziną tego równania jest zbiór ***R***. Jeśli $a \in \langle -1, 1 \rangle$, to równanie ma rozwiązania, w przeciwnym wypadku – nie ma rozwiązań.

W jednym układzie współrzędnych naszkicujmy wykresy funkcji

$y = \cos x$ oraz $y = a$, $a \in \langle -1, 1 \rangle$, $x \in \boldsymbol{R}$.



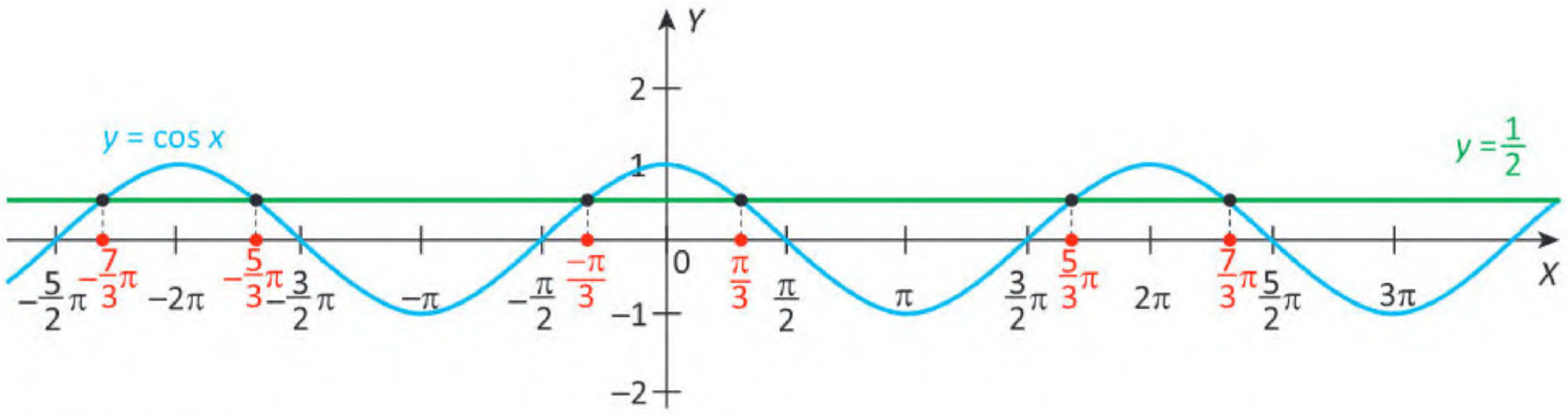
Funkcja $y = \cos x$ jest funkcją parzystą. Jej okres podstawowy jest równy 2π.

W tym przypadku rozwiązania wygodnie jest zapisać w postaci dwóch następujących serii:

$$x_0 + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \text{ oraz } -x_0 + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $\cos x = \frac{1}{2}$.



Otrzymujemy:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \ \vee \ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \right)$$

Ćwiczenie 2. Zapisz dwie serie rozwiązań równania z powyższego przykładu za pomocą dwóch rozwiązań należących do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

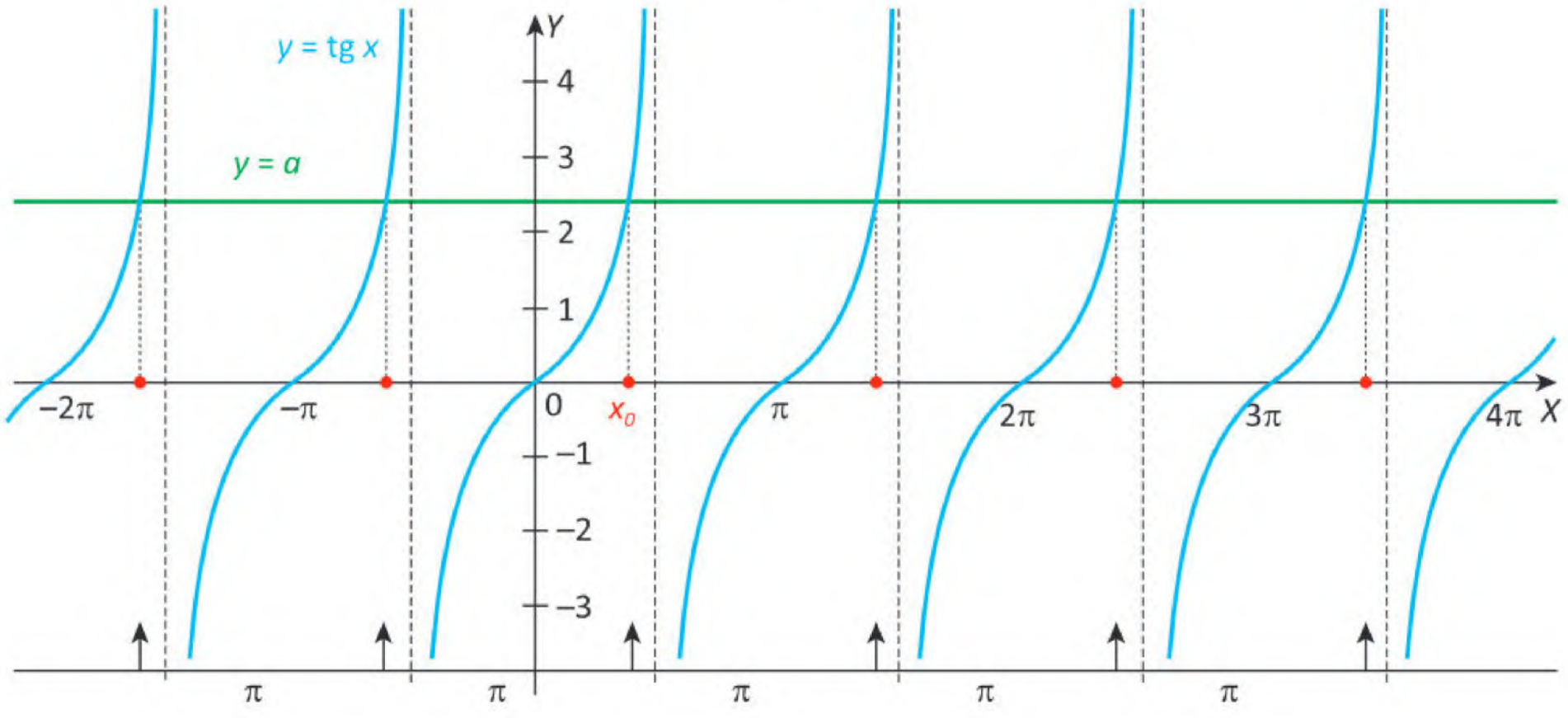
Ćwiczenie 3. Rozwiąż równanie: a) $\cos x = \frac{-1}{2}$ b) $\cos x = 1$.

Rozważmy równanie

$$\operatorname{tg} x = a$$

Do dziedziny równania nie należą liczby mające postać $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$. Dla każdej liczby rzeczywistej a równanie ma rozwiązania. We wspólnym układzie współrzędnych naszkicujmy wykresy funkcji

$$y = \operatorname{tg} x, x \in \boldsymbol{R} - \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \right\} \quad \text{oraz} \quad y = a, \ x \in \boldsymbol{R}.$$



Okres podstawowy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ jest równy π. Jeśli x_0 jest dowolnym rozwiązaniem równania to kolejne rozwiązania są oddalone od siebie o π. Możemy je zapisać w postaci jednej serii.

$$x_0 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Przeanalizujmy jeszcze równanie

$$\operatorname{ctg} x = a$$

Do dziedziny tego równania nie należą liczby mające postać $k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Naszkicuj wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$. Zauważ, że dla każdej liczby rzeczywistej a równanie ma rozwiązania. Kolejne rozwiązania są oddalone od siebie o π.

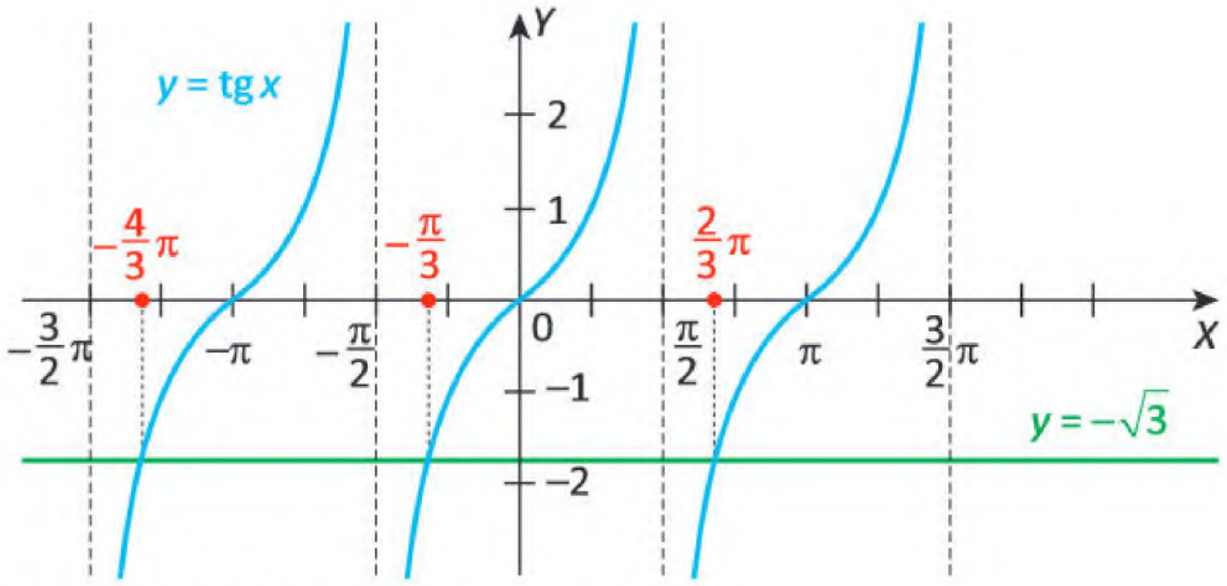
Jeśli rozwiązaniem równania jest liczba x_0, to wszystkie rozwiązania tego równania można zapisać w postaci jednej serii:

$$x_0 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Przykład 3.

Rozwiążemy równania: a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ b) $\operatorname{ctg} x = -1$.

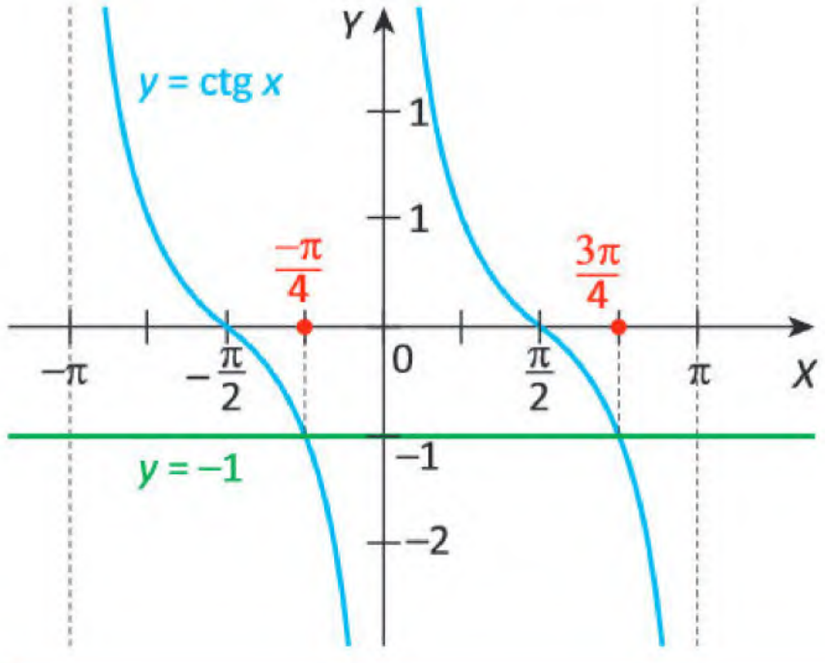
Ad a) Dziedziną równania $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ jest zbiór $\boldsymbol{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$



Otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\pi + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$$

Ad b) Dziedziną równania $\operatorname{ctg} x = -1$ jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{x: x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$



Mamy:

$\operatorname{ctg} x = -1$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$$

Ćwiczenie 4. Rozwiąż równania: a) $\operatorname{tg} x = -1$ b) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 4.

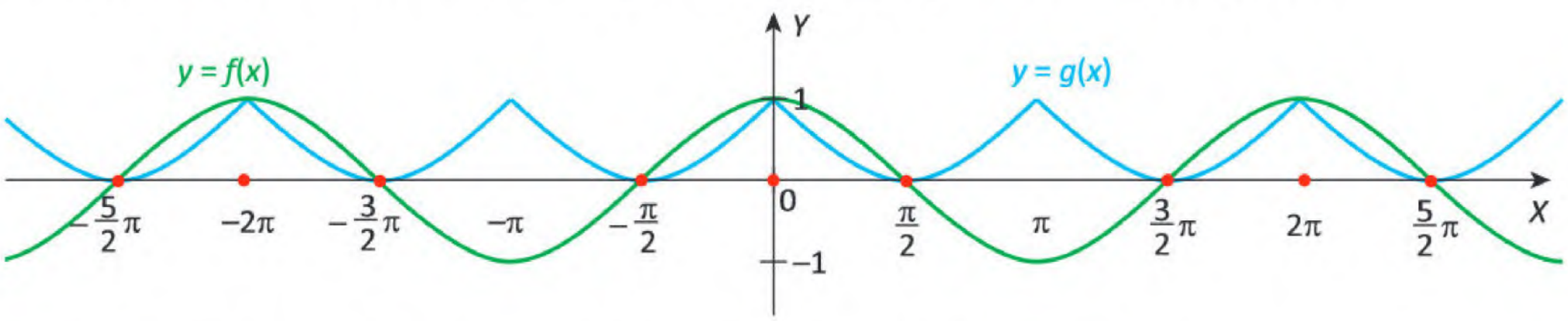
Rozwiążemy graficznie równanie $\cos x = 1 - |\sin x|$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

W tym przypadku posłużymy się wykresami funkcji:

$f(x) = \cos x$ oraz $g(x) = 1 - |\sin x|$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Rozwiązaniami równania $\cos x = 1 - |\sin x|$ są wszystkie te argumenty, dla których obie funkcje przyjmują tę samą wartość. Na rysunku poniżej wykres funkcji f jest naszkicowany kolorem zielonym, a wykres funkcji g – kolorem niebieskim. Wskaż kolejne przekształcenia wykresu funkcji $y = \sin x$, doprowadzające do wykresu funkcji g.

Na osi OX kolorem czerwonym są zaznaczone przykładowe rozwiązania.



Rozwiązania tego równania możemy zapisać w dwóch seriach:

$$x = 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z} \ \vee\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ćwiczenie 5. Rozwiąż graficznie równanie $\sin x = \cos x$.

Przykład 5.

Rozwiążemy równanie $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Doprowadzamy równanie do postaci: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Następnie dokonujemy podstawienia $t = 3x - \frac{\pi}{6}$.

Równanie $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ma dwie serie rozwiązań:

$$t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z} \ \vee\ t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

Otrzymujemy:

$$3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z} \ \vee\ 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

Zatem

$$3x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in \boldsymbol{Z} \ \vee \ 3x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in \boldsymbol{Z}$$

$$3x=\frac{3\pi}{6}+2k\pi, k\in \boldsymbol{Z} \ \vee \ 3x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in \boldsymbol{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi, k\in \boldsymbol{Z} \ \vee \ x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi, k\in \boldsymbol{Z}$$

Rozwiązaniami równania $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$ są wszystkie liczby rzeczywiste mające postać: $\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi, k\in \boldsymbol{Z}$ lub $\frac{5\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi, k\in \boldsymbol{Z}$.

Ćwiczenie 6. Rozwiąż równanie tg $2x + 1 = 0$.

Przykład 6.

Wyznaczymy rozwiązania równania $\frac{1-\cos 8x}{1+\operatorname{tg} x}=0$ należące do przedziału $\langle -2\pi, 3\pi\rangle$.

Aby wyznaczyć dziedzinę tego równania, musimy uwzględnić dwa warunki:

1) tg x ma być określony, czyli $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \boldsymbol{Z}$

2) Mianownik ułamka po lewej stronie znaku równania jest różny od zera, tzn.:

$1 + \operatorname{tg} x \neq 0$, czyli $\operatorname{tg} x \neq -1$. Stąd $x\neq\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in \boldsymbol{Z}$. Tak więc

$$D=\left\{x:\ x\in \boldsymbol{R}\wedge x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\wedge x\neq\frac{-\pi}{4}+k\pi, k\in \boldsymbol{Z}\right\}.$$

Rozwiązujemy równanie, przyrównując licznik ułamka do zera:

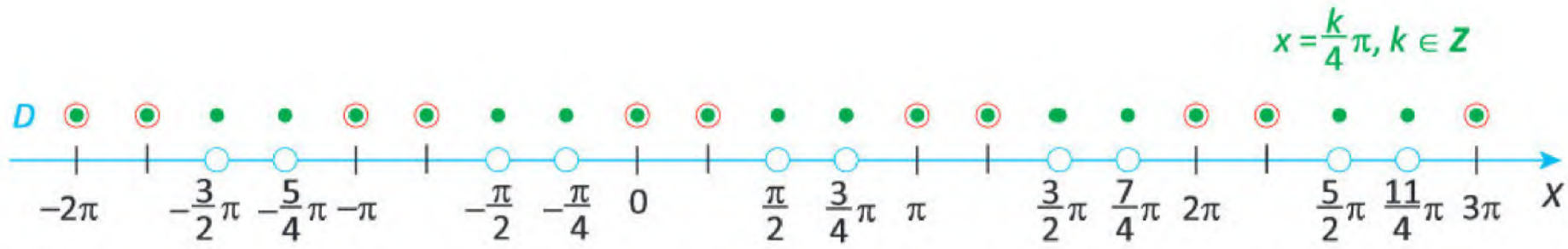
$1 - \cos 8x = 0$

$\cos 8x = 1$

$8x = 2k\pi$

$$x=\frac{k\pi}{4}, k\in \boldsymbol{Z}$$

W przedziale $\langle -2\pi, 3\pi\rangle$, spośród liczb mających postać $\frac{k\pi}{4}, k\in \boldsymbol{Z}$ należy wykluczyć te, które nie należą do dziedziny równania. Na osi liczbowej na drugiej stronie, kolorem zielonym są zaznaczone liczby mające postać $\frac{k\pi}{4}, k\in \boldsymbol{Z}$. Pustymi kółkami są zaznaczone liczby, które nie należą do dziedziny równania.



Kolorem czerwonym zaznaczone są rozwiązania równania, należące do przedziału $\langle -2\pi, 3\pi\rangle$. Są to liczby:

$$-2\pi,\ -\frac{7\pi}{4},\ -\pi,\ -\frac{3\pi}{4},\ 0,\ \frac{\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ 2\pi,\ \frac{9\pi}{4},\ 3\pi$$

Ćwiczenie 7. Zapisz wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania z przykładu 6. w dwóch seriach.

Przykład 7.

Rozwiążemy równanie $\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x + \cos x$.

Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R} - \left\{x:\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \boldsymbol{Z}\right\}$. Korzystamy z zależności

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

i otrzymujemy:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos x = \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x,$$

stąd

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\sin x + \cos^2 x}{\cos x}.$$

Zauważ, że jeśli $x \in D$, to $\cos x \neq 0$. Obie strony równania mnożymy przez $\cos x$.

$$\sin^2 x = \sin x + \cos^2 x.$$

Otrzymane równanie przekształcamy do postaci:

$$\sin^2 x = \sin x + 1 - \sin^2 x,$$

stąd

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Podstawiamy zmienną pomocniczą $t = \sin x$. Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t:

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$\Delta = 9,\ \sqrt{\Delta} = 3$$

$$t = -\frac{1}{2} \ \vee \ t = 1$$

Zatem

$$\sin x = -\frac{1}{2} \ \vee \ \sin x = 1$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \right), k \in \mathbf{Z}$$

oraz

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Rozwiązania równania sin $x = 1$ nie należą do dziedziny równania.

Rozwiązaniami równania $\mathrm{tg}^2 x \cdot \cos x = \mathrm{tg}\, x + \cos x$ są liczby mające postać:

$$\frac{-5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \quad \text{oraz} \quad \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Ćwiczenie 8. Wykaż, że równanie $\mathrm{ctg}\, x \cdot \sin x + \cos x = 2$ jest sprzeczne.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$. Następnie rozwiąż dane równania w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

   a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin x = 0$ c) $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

2. Naszkicuj wykres funkcji $y = \cos x$ w przedziale $\left\langle \frac{-3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$. Następnie rozwiąż dane równania w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

   a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = -1$ c) $\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

3. Rozwiąż równania:

   a) $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$ b) $\mathrm{ctg}\, x = 0$ c) $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1$.

4. Rozwiąż równania:

   a) $\sin(-x) = 1$ b) $3 \cdot \mathrm{tg}(-\pi - x) = \sqrt{3}$ c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2 \cdot \sin x$.

5. Rozwiąż graficznie równania:

   a) $\sin x + \cos x = 0$ b) $\sin x = \cos x + 1$ c) $|\mathrm{tg}\, x| = \sqrt{3}$

   d) $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{ctg}\, x$ e) $|\cos x| + 1 = \sin x$ f) $\cos^2 x = \sin^2 x$.

6. Rozwiąż równania:

   a) $\left|\cos^2 x - \frac{1}{2}\right| = 0$ b) $4 \cdot |\mathrm{tg}\, x| = \sqrt{3} + |3 \cdot \mathrm{tg}\, x|$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin^2 x = 2\sqrt{2}$.

7. Rozwiąż równania:

a) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$ b) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right)=0$ c) $3\cdot\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$

d) $\sin\left(\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$ e) $2\cdot\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ f) $\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+2.$

8. Rozwiąż równania:

a) $4\cdot\cos^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)=3$ b) $\frac{\operatorname{ctg}^2x+1}{\operatorname{ctg}x}=\frac{1}{\sin x}$

c) $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right|=1$ d) $\left|\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)-1\right|=0.$

9. Rozwiąż równanie w danym przedziale.

a) $2\sqrt{3}\cos x=\sqrt{6},\quad(-2\pi,\pi)$ b) $\frac{1+\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3},\quad(-4\pi,3\pi)$

c) $2(\sin x+1)=2-\sqrt{3},\quad(-\pi,3\pi)$ d) $\operatorname{ctg}^2x-2\operatorname{ctg}x+1=0,\quad(-2\pi,4\pi)$

10. Rozwiąż równanie w danym przedziale.

a) $2\sin 3x-1=0,\ (0,\pi)$ b) $\cos\frac{1}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \left(-\frac{\pi}{2},4\pi\right)$

c) $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3},\ (-\pi,2\pi)$ d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)+1=0,\ \langle-3\pi,3\pi\rangle$

e) $|\cos 2x|=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \langle-\pi,\pi\rangle$ f) $\left|\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \left\langle-\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle$

11. Rozwiąż równania:

a) $\sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\frac{1}{2}=0$ b) $\left(\cos x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0$

c) $\sin x\cdot\operatorname{tg}x=\sqrt{3}\sin x$ d) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

e) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+2\cos^2x=\frac{5}{4}$ f) $\operatorname{tg}^3x=\operatorname{tg}^2x.$

12. Rozwiąż równania:

a) $\operatorname{tg}^2x=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ b) $\operatorname{ctg}^2x-2\operatorname{ctg}x+1=0$

c) $(1-\sin x)(1+\sin x)=\cos x$ d) $4\cos^2x-8\sin x+1=0$

e) $\cos^2x+\cos x=\sin^2x$ f) $2\cos x-3\operatorname{tg}x=0.$

13. Rozwiąż równanie w danym przedziale.

a) $3\operatorname{ctg}^2x=3-2\sqrt{3}\operatorname{ctg}x,$ $(-\pi,\pi)$

b) $\sin^3x+3\sin^2x=\sin x+3,$ $(0,2\pi)$

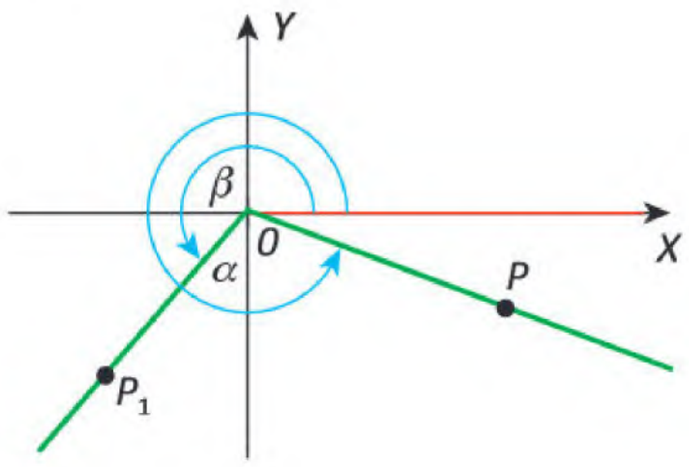
Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy

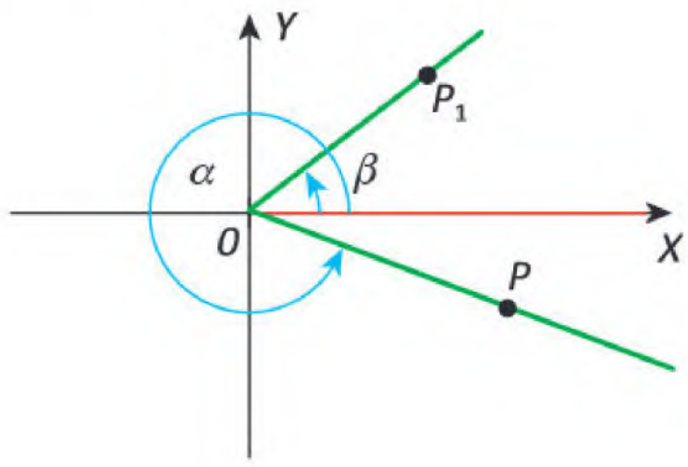
Niech α i β będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Tym liczbom odpowiadają dwa kąty skierowane, które umieszczamy w układzie współrzędnych tak, aby początkowe ramię każdego z tych kątów pokryło się z dodatnią półosią O*X*.

Na końcowym ramieniu kąta α wybieramy punkt $P(x, y)$, a na końcowym ramieniu kąta β – punkt $P_1(x_1, y_1)$. Punkty P i P_1 są różne od początku układu współrzędnych.

Możliwe są trzy następujące przypadki.

I. Końcowe ramiona kątów α, β wyznaczają kąt trójkąta POP_1.





Kąt między bokami OP i OP_1 ma miarę

$|\alpha-\beta| + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$ albo $-|\alpha-\beta| + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$

W każdym przypadku cosinus tego kąta jest równy

$\cos(\alpha-\beta)$ – funkcja cosinus jest parzysta.

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta POP_1. Wyznaczamy $\cos(\alpha-\beta)$.

$$|PP_1|^2 = |OP|^2 + |OP_1|^2 - 2\cdot|OP|\cdot|OP_1|\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{|OP|^2 + |OP_1|^2 - |PP_1|^2}{2\cdot|OP|\cdot|OP_1|}$$

Ponieważ

$$|OP| = \sqrt{x^2+y^2},\quad |OP_1| = \sqrt{x_1^2+y_1^2},\quad |PP_1| = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2},$$

więc

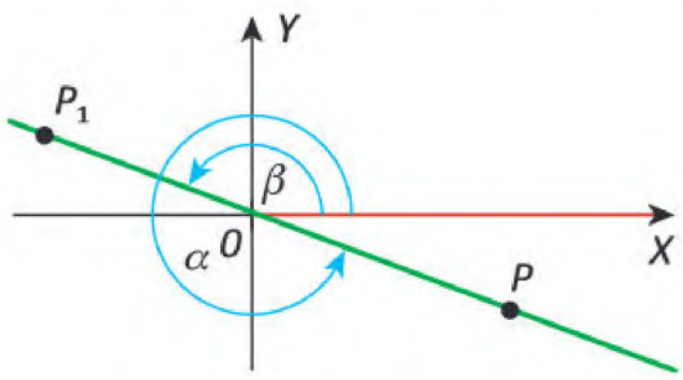
$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{x^2+y^2+x_1^2+y_1^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{{}^{1}\!\not{2}\,(x\cdot x_1+y\cdot y_1)}{{}^{1}\!\not{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x_1^2+y_1^2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Otrzymaliśmy wzór

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

II. Końcowe ramiona kątów α, β uzupełniają się do prostej.



Przypadek ten zachodzi tylko wtedy, gdy

$$\alpha-\beta=\pi+2k\pi$$

dla pewnego k, $k\in\mathbf{Z}$. Stąd

$$\alpha=\beta+2k\pi, \text{ gdzie } k\in\mathbf{Z}.$$

Sprawdzamy, czy wzór otrzymany w I przypadku jest prawdziwy:

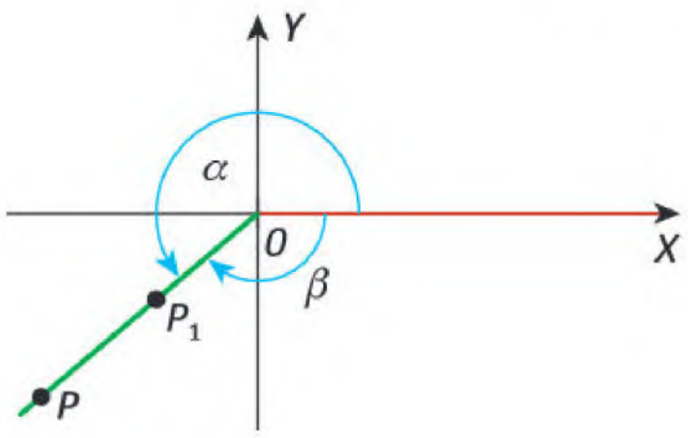
$$\mathrm{L}=\cos(\alpha-\beta)=\cos(\pi+2k\pi)=-1$$

$$\mathrm{P}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\beta+\pi+2k\pi)\cdot\cos\beta+\sin(\beta+\pi+2k\pi)\cdot\sin\beta=$$

$$=(-\cos\beta)\cdot\cos\beta+(-\sin\beta)\cdot\sin\beta=-\cos^2\beta-\sin^2\beta=-1, \qquad \mathrm{L}=\mathrm{P}$$

Zatem w przypadku drugim wzór $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$ też jest prawdziwy.

III. Końcowe ramiona kątów α, β się pokrywają.



Przypadek ten zachodzi tylko wtedy, gdy

$$\alpha-\beta=2k\pi$$

dla pewnego $k\in\mathbf{Z}$. Zatem

$$\alpha=\beta+2k\pi, \; k\in\mathbf{Z}.$$

Obliczamy:

$$\mathrm{L}=\cos(\alpha-\beta)=\cos(2k\pi)=1$$

$$\mathrm{P}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\beta+2k\pi)\cdot\cos\beta+\sin(\beta+2k\pi)\cdot\sin\beta=$$

$$=\cos\beta\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\sin\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1, \qquad \mathrm{L}=\mathrm{P}$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych α, β prawdziwy jest wzór:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Korzystając z powyższego wzoru, wyprowadzimy trzy kolejne wzory.

- Jeśli w miejsce β podstawimy $(-\beta)$, to otrzymamy wzór na cosinus sumy α i β:

$$\cos\left[\alpha-(-\beta)\right]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta),\ \text{więc}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

- Jeśli w miejsce α wstawimy $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, to powstanie wzór na sinus sumy α i β.

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta,$$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,\ \text{stąd}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

- Jeśli w ostatnim wzorze w miejsce β wstawimy $(-\beta)$, to otrzymamy wzór na sinus różnicy α i β.

$$\sin\left[\alpha+(-\beta)\right]=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Jeśli $\alpha\in\boldsymbol{R}, \beta\in\boldsymbol{R}$, to:

a) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

b) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

c) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

d) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

Przykład 1.

Obliczymy $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Zauważmy, że

$$\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$$

Na mocy twierdzenia 1c) otrzymujemy:

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \text{czyli}\ \cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Przykład 2.

Obliczymy wartość wyrażenia $\sin 164° \cdot \cos 14° - \cos 196° \cdot \cos 284°$.

Funkcje trygonometryczne występujące w tym wyrażeniu uzależnimy od kątów ostrych 14° i 16°. Skorzystamy z odpowiednich wzorów redukcyjnych. Następnie zastosujemy wzór na sinus sumy kątów.

$\sin 164° \cdot \cos 14° - \cos 196° \cdot \cos 284° =$

$= \sin(180° - 16°) \cdot \cos 14° - \cos(180° + 16°) \cdot \cos(270° + 14°) =$

$= \sin 16° \cdot \cos 14° - (-\cos 16°) \cdot \sin 14° =$

$= \sin 16° \cdot \cos 14° + \cos 16° \cdot \sin 14° =$

$= \sin(16° + 14°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1. Oblicz: a) $\sin\frac{7\pi}{12}$ b) $\cos 73° \cdot \sin(-28°) + \sin 242° \cdot \cos 197°$.

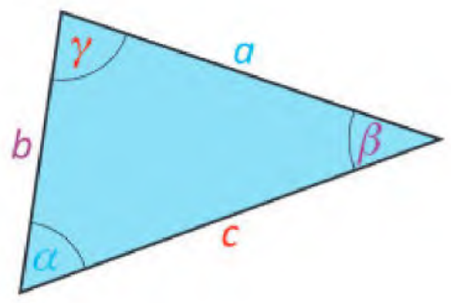
Przykład 3.

Kąty trójkąta są równe α, β, γ, a jego boki mają odpowiednio długość a, b, c. Wiedząc, że $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\sin\beta = 0{,}8$ oraz $c = 35$, rozwiążemy ten trójkąt.

Przypomnijmy: rozwiązać trójkąt to znaczy obliczyć brakujące długości jego boków i podać brakujące kąty (lub wyznaczyć jedną z funkcji trygonometrycznych tych kątów i ustalić, czy dany kąt jest ostry, prosty czy rozwarty).

Zauważamy, że

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, więc $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$



Ze wzoru na sinus sumy mamy:

$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

Z jedynki trygonometrycznej obliczamy cosinusy kątów α i β.

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ $\qquad$ $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$

$\cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$ $\qquad$ $\cos^2\beta = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

$|\cos\alpha| = 0{,}8$ $\qquad$ $|\cos\beta| = 0{,}6$

Rozpatrujemy trzy przypadki:

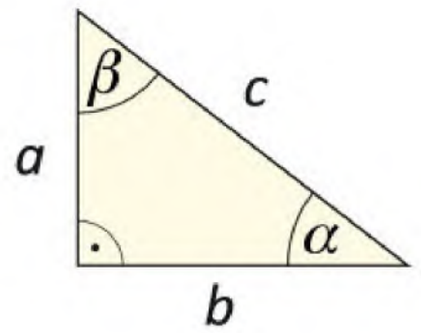
I. Kąty α, β są ostre. Wówczas $\cos\alpha = 0{,}8$ i $\cos\beta = 0{,}6$. Obliczamy sinus kąta γ.

$\sin\gamma = 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1$

$\gamma = 90°$

Trójkąt jest prostokątny o przeciwprostokątnej długości 35. Obliczamy długości przyprostokątnych a i b.

- $\frac{a}{c}=\sin\alpha$, $a = c \cdot \sin\alpha$, $a = 35 \cdot 0{,}6 = 21$
- $\frac{b}{c}=\sin\beta$, $b = c \cdot \sin\beta$, $b = 35 \cdot 0{,}8 = 28$



Otrzymaliśmy: $\gamma = 90°$, $a = 21$, $b = 28$

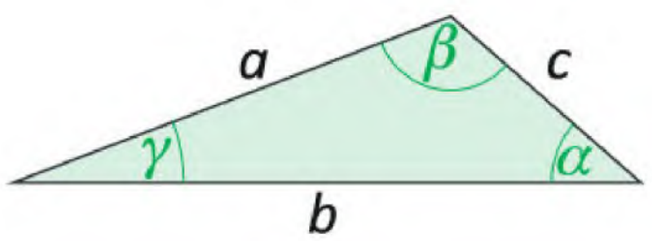
II. Kąty α, γ są ostre, kąt β – rozwarty. Wtedy $\cos\alpha = 0{,}8$ i $\cos\beta = -0{,}6$ oraz

$$\sin\gamma = 0{,}6 \cdot (-0{,}6) + 0{,}8 \cdot 0{,}8 = -0{,}36 + 0{,}64 = 0{,}28$$

Długości boków a, b obliczymy na mocy twierdzenia sinusów. Mamy:

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \quad \text{i} \quad \frac{c}{\sin\gamma}=\frac{35}{0{,}28}=125$$

- $\frac{a}{\sin\alpha}=125$, $a = 0{,}6 \cdot 125 = 75$
- $\frac{b}{\sin\beta}=125$, $b = 0{,}8 \cdot 125 = 100$



Otrzymaliśmy: kąt γ – ostry, $\sin\gamma = 0{,}28$; $a = 75$, $b = 100$

III. Kąty β, γ są ostre, α – kąt rozwarty. Wtedy $\cos\alpha = -0{,}8$ i $\cos\beta = 0{,}6$ oraz

$$\sin\gamma = 0{,}6 \cdot 0{,}6 + (-0{,}8) \cdot 0{,}8 = 0{,}36 - 0{,}64 = -0{,}28$$

Ale kąt γ jest ostry, więc $\sin\gamma > 0$. Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że nie istnieje taki trójkąt.

Istnieją dwa trójkąty spełniające warunki zadania:

– prostokątny – w którym $\alpha \approx 37°$, $\beta \approx 53°$, $\gamma = 90°$, $a = 21$, $b = 28$

– rozwartokątny – w którym $\alpha \approx 37°$, $\beta \approx 127°$, $\sin\gamma = 0{,}28$ ($\gamma \approx 16°$), $a = 75$, $b = 100$.

Ćwiczenie 2. Kąty trójkąta są równe α, β, γ, a jego boki mają odpowiednio długość a, b, c. Wiedząc, że $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, rozwiąż ten trójkąt.

Przykład 4.

Naszkicujemy wykres funkcji $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

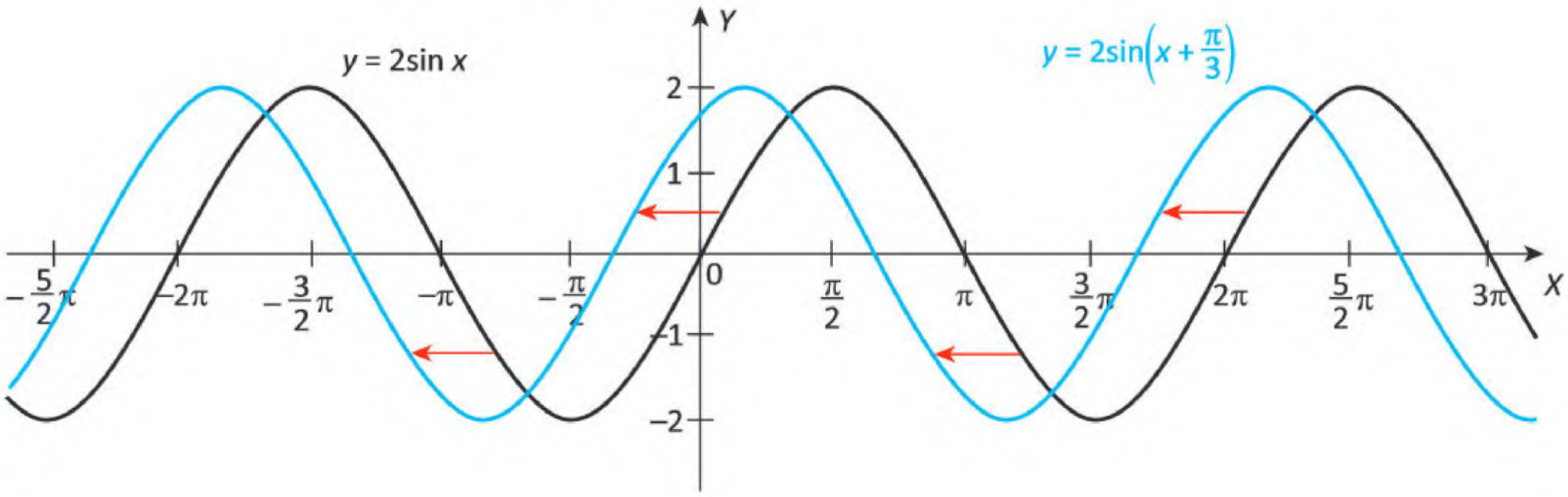
Przekształcamy wzór funkcji f. Wyłączamy liczbę 2 poza nawias i korzystamy ze wzoru na sinus sumy.

$$2\cdot\left(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\cdot\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right), \text{ stąd}$$

$$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),\ \text{gdzie}\ x\in \boldsymbol{R}$$

Wykres funkcji f powstaje z przesunięcia równoległego wykresu funkcji

$y=2\sin x$ o wektor $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$.



Teraz wyprowadzimy wzór na tangens sumy.

Wiemy, że tg α, tg β oraz tg $(\alpha+\beta)$ istnieją tylko wtedy, gdy α, β i $\alpha+\beta$ należą do zbioru $\boldsymbol{R}-\left\{x: x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \boldsymbol{Z}\right\}$. Wówczas:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Dzielimy licznik i mianownik ułamka przez wyrażenie $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, które z założenia jest różne od 0. Otrzymujemy

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta},\qquad \text{stąd}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Ćwiczenie 3. Wstaw do ostatniej równości $(-\beta)$ w miejsce β i wyznacz wzór na tangens różnicy.

Twierdzenie 2.

Jeśli α, β i $\alpha+\beta$ oraz $\alpha-\beta$ należą do zbioru $\boldsymbol{R}-\left\{x: x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \boldsymbol{Z}\right\}$, to

a) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$

b) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$

Ćwiczenie 4. Korzystając z twierdzenia 2. oblicz: a) tg 105° b) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Przykład 5.

Wyznaczymy dziedzinę funkcji $g(x)=\frac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}$ i naszkicujemy jej wykres.

Tangens x jest określony, jeśli $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\boldsymbol{Z}$. Dodatkowo mianownik ułamka występującego we wzorze jest różny od 0, czyli

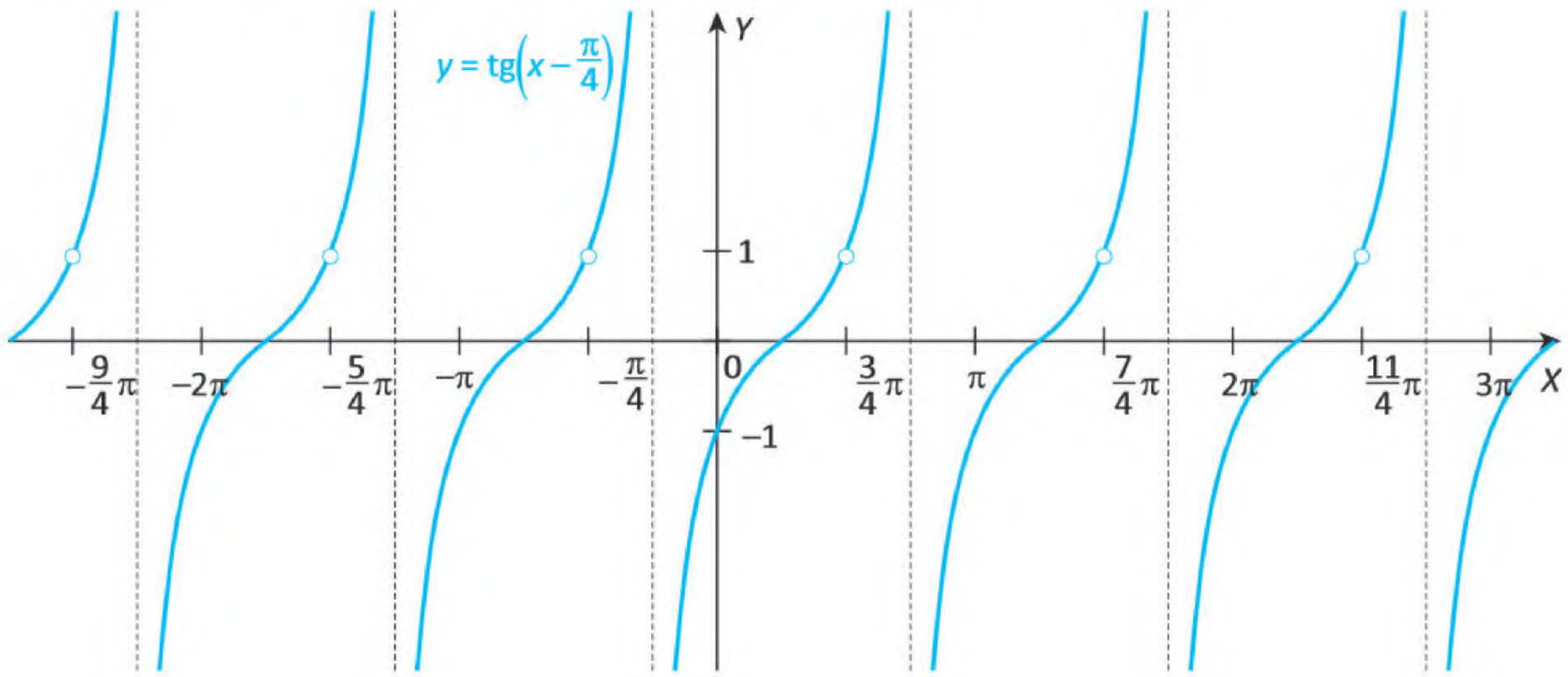
$$\operatorname{tg}x\neq -1,\qquad \text{stąd}\qquad x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$$

Ostatecznie, dziedziną funkcji g jest zbiór $\boldsymbol{R}-\left\{x: x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

Przekształcamy wzór funkcji g, stosując twierdzenie 2b).

$$\frac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ \text{zatem}$$

$$g(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\qquad D_g=\boldsymbol{R}-\left\{x: x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$$



Przykład 6.

Pokażemy, że jeśli α i β są kątami ostrymi, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, to $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

Obliczamy wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$. Mamy

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1\ ,$$ a to znaczy, że $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$

Z założenia $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)>0$. Z tego wynika, że $(\alpha+\beta)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Zatem $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, bowiem $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ i w przedziale $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ funkcja *y* = tg *x* jest różnowartościowa.

Przykład 7.

Pokażemy, że jeśli trójkąt nie jest prostokątny i α,β,γ są miarami kątów tego trójkąta, to $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

Ponieważ α,β,γ to miary kątów trójkąta różne od $\frac{\pi}{2}$, więc

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ oraz istnieją $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

Zwykle łatwiej jest przekształcać sumę niż iloczyn. W przekształceniu lewej strony wykorzystamy wzór redukcyjny $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$ i dwukrotnie twierdzenie 2a).

$$L=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\left[\pi-(\alpha+\beta)\right]=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$$

$$=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)-1\cdot(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot(-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=$$

$$=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=P,$$ co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz:

a) $\cos 13^\circ\cdot\cos 32^\circ-\sin 13^\circ\cdot\sin 32^\circ$ b) $\sin 38^\circ\cdot\cos 22^\circ+\cos 38^\circ\cdot\sin 22^\circ$

c) $\sin 24^\circ\cdot\cos 6^\circ+\cos 156^\circ\cdot\cos 96^\circ$ d) $\cos 164^\circ\cdot\cos 14^\circ+\sin 164^\circ\cdot\sin 14^\circ$

e) $\dfrac{\cos 327^\circ\cdot\sin 78^\circ+\sin 33^\circ\cdot\cos 102^\circ}{\cos 585^\circ}$ f) $\dfrac{\sin 203^\circ\cdot\cos 143^\circ-\sin 67^\circ\cdot\sin 217^\circ}{\cos 18^\circ\cdot\cos 282^\circ-\sin 162^\circ\cdot\cos 192^\circ}$.

2. Oblicz:

a) $\sin\frac{5\pi}{12}$ b) $\cos\frac{\pi}{12}$ c) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$ d) $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{12}$.

3. Wiedząc, że $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ oraz $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ i $\operatorname{tg}\beta = -1\frac{1}{3}$, oblicz:

a) $\sin(\alpha - \beta)$ b) $\cos(\alpha + \beta)$ c) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ d) $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$.

4. Kąty trójkąta są równe α, β, γ, a jego boki mają odpowiednio długość a, b, c. Rozwiąż ten trójkąt, jeśli:

a) $\alpha = 30°, \beta = 45°, a = 10$ b) $\gamma = 60°, a = 5, b = 8$,

c) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $c = 27$ d) $\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$, $b = 3, c = 7$.

5. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość:

a) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$, gdzie $\alpha \in \boldsymbol{R}, \beta \in \boldsymbol{R}$

b) $\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta) = \cos\beta$, gdzie $\alpha \in \boldsymbol{R}, \beta \in \boldsymbol{R}$.

D 6. Wykaż, że jeśli $\alpha \in \boldsymbol{R}$, to:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = \cos\alpha$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sqrt{2}\cdot\cos\alpha$.

D 7. Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej α wartość danego wyrażenia jest stała.

a) $\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$ b) $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\alpha$

D 8. Wykaż, że jeśli $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{8}$ i $\operatorname{ctg}\beta = \frac{9}{7}$, to $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

D 9. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (0°, 90°), \beta \in (0°, 90°)$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = 2$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, to $\alpha = \beta + 45°$.

10. Wiedząc, że α, β, γ są kątami trójkąta oraz $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{tg}\beta = 3$, wyznacz kąt γ.

11. Naszkicuj wykres funkcji, określonej wzorem:

a) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$ b) $y = \sin x - \sqrt{3}\cdot\cos x$, $x \in \boldsymbol{R}$

c) $y = \frac{\operatorname{tg}x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}x}$ d) $y = \frac{3\cdot\operatorname{tg}x - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}x}$.

D 12. Wykaż, że jeśli liczby $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ należą do zbioru $\boldsymbol{R} - \{x: x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$, to $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$. Następnie oblicz ctg 75° i ctg 15°.

Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta

Wyprowadzimy wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta. Skorzystamy ze wzorów:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\beta\cdot\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Podstawiając kolejno $\beta=\alpha$ w powyższych wzorach, otrzymujemy:

- $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha$, czyli $\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
- $\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha$, zatem $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

Wzór ten można zapisać na dwa inne sposoby, jeśli wykorzystamy zależności wynikające z jedynki trygonometrycznej.

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha \qquad \text{albo}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-1$$

- $\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, gdzie $\alpha\neq\frac{k\pi}{4}, k\in\boldsymbol{Z}-\{0\}$

Twierdzenie 1.

a) Jeśli $\alpha\in\boldsymbol{R}$, to $\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

b) Jeśli $\alpha\in\boldsymbol{R}$, to $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

c) Jeśli $\alpha\in\boldsymbol{R}-\left\{x: x=\frac{k\pi}{4}, k\in\boldsymbol{Z}-\{0\}\right\}$, to $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

Przykład 1.

Wiedząc, że $\sin\alpha=\frac{8}{17}$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obliczymy $\sin 2\alpha$.

Wiemy, że $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ i znamy $\sin\alpha$. Obliczamy $\cos\alpha$:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \text{ czyli } \left(\frac{8}{17}\right)^2+\cos^2\alpha=1, \text{ stąd } \cos^2\alpha=\frac{225}{289}$$

Ponieważ $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, więc $\cos\alpha < 0$, $\cos\alpha = \frac{-15}{17}$.

Na koniec obliczamy $\sin 2\alpha$:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{(-15)}{17} = \frac{-240}{289}$$

Ćwiczenie 1. Oblicz $\cos 2\alpha$, jeśli: a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ b) $\cos\alpha = \frac{-3}{4}$.

Przykład 2.

Obliczymy $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$.

Korzystamy ze wzoru na $\sin 2\alpha$.

$$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ćwiczenie 2. Oblicz $\sin 75° \cdot \cos 75°$.

Przykład 3.

Obliczymy $\sin 15°$.

Wykorzystamy wzór $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, przyjmując $\alpha = 15°$. Otrzymujemy równość

$$\cos 30° = 1 - 2 \cdot \sin^2 15°, \qquad \text{stąd}$$

$$2 \cdot \sin^2 15° = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 15° = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \qquad \text{bo } \sin 15° > 0$$

Ćwiczenie 3. Wykaż, że $\sin 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Skorzystaj ze wzoru na sinus różnicy kątów. Przypomnij sobie, jak algebraicznie pokazać, że $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Przykład 4.

Obliczymy cos 4α, wiedząc, że $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{7}{13}$.

Korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta i otrzymujemy:

$$\cos 4\alpha = \cos(2 \cdot 2\alpha) = 1 - 2\sin^2 2\alpha.$$

Wartość sin 2α obliczymy z warunku $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{7}{13}$. Obie strony tej równości podnosimy do kwadratu:

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \left(\frac{7}{13}\right)^2$$

$$\sin^2\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{49}{169}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{49}{169}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{120}{169}$$

Zatem $\cos 4\alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{120}{169}\right)^2 = \frac{-239}{28561}$.

Ćwiczenie 4. Oblicz wartości sin α i cos α z przykładu 4., rozwiązując układ równań $\begin{cases} \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{7}{13} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$. Następnie oblicz cos 4α ze wzoru $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$.

Przykład 5.

Pokażemy, że wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$ jest liczbą naturalną.

Przekształcamy dane wyrażenie w następujący sposób. Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika. W liczniku ułamka wyłączamy liczbę 2 poza nawias.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cdot \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \cdot \sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}$$

Podstawiamy: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$, $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$.

Stosujemy wzór na cosinus sumy.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-\frac{1}{\cos 20^\circ}=\frac{2\cdot\left(\cos 30^\circ\cdot\cos 20^\circ-\sin 30^\circ\cdot\sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}=\frac{2\cdot\cos 50^\circ}{\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}$$

Licznik i mianownik otrzymanego ułamka mnożymy przez 2. W mianowniku stosujemy wzór na $\sin 2\alpha$, a w liczniku wzór redukcyjny $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.

$$\frac{2\cdot\cos 50^\circ}{\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}=\frac{4\cdot\cos 50^\circ}{2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}=\frac{4\cdot\cos\left(90^\circ-40^\circ\right)}{\sin 40^\circ}=\frac{4\cdot\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ}=4,\quad 4\in\boldsymbol{N}.$$

Przykład 6.

Wykażemy, że $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$. Podamy konieczne założenia.

Przekształcamy lewą stronę równości tak, aby w liczniku i w mianowniku pojawiły się iloczyny wyrażeń:

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{\sin\alpha+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=\frac{\sin\alpha\left(1+2\cdot\cos\alpha\right)}{\cos\alpha\left(1+2\cdot\cos\alpha\right)}=\operatorname{tg}\alpha$$

Równość jest prawdziwa wtedy, gdy $\cos\alpha\neq 0$ oraz $1+2\cdot\cos\alpha\neq 0$, czyli wtedy, gdy

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\boldsymbol{Z}\ \wedge\ \alpha\neq\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}\ \wedge\ \alpha\neq\frac{-2\pi}{3}+2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}.$$

Ćwiczenie 5. Wykaż, że $\frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}=\cos 2\alpha$. Podaj konieczne założenia.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ oraz $\operatorname{ctg} 2\alpha$, jeśli:

a) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

b) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$ i $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

c) $\operatorname{tg}\alpha=8$ i $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

d) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{-2}{5}$ i $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

2. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\cos^2 75^\circ-\sin^2 75^\circ$

b) $\cos 36^\circ\cdot\cos 108^\circ$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sin^2 15^\circ}-\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 15^\circ}$

d) $\operatorname{tg}^2 15^\circ+\operatorname{tg}^2 105^\circ$.

D 3. Wykaż, że

a) $4\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{12}=1$

b) $\sin\frac{5\pi}{8}\cdot\sin\frac{7\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $2\cos\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$

d) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}$

4. Wiadomo, że $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ i $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$. Oblicz:

a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$ c) $\operatorname{tg} 2\alpha$

5. Wiadomo, że $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ i $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{7}}{8}$. Oblicz $\sin^4\frac{\alpha}{2}-\cos^4\frac{\alpha}{2}$.

6. Wiedząc, że $\alpha\in(0,\pi)$ i $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, oblicz wartość wyrażenia $4\cdot\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

D 7. Wykaż, że jeśli $\alpha\in\boldsymbol{R}-\left\{x:x=\frac{k\pi}{2},k\in\boldsymbol{Z}\right\}$, to $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\cdot\operatorname{ctg}\alpha}$. Korzystając z tego wzoru, oblicz ctg 75° oraz ctg 15°.

D 8. Wykaż, że $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, gdzie $\alpha\neq\pi+2k\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Korzystając z tego wzoru, oblicz $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$ oraz $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$.

9. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y=2\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

b) $y=\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+1$

c) $y=\frac{\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$

d) $y=8\cdot\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\frac{x}{2}\cos x$.

D 10. Wykaż, że prawdziwa jest dana równość. Podaj konieczne założenia.

a) $8\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-\cos 4\alpha$

b) $\frac{2}{\sin4\alpha}-\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{ctg}2\alpha$

c) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2\cdot\cos2\alpha}=\frac{1}{\sin2\alpha}$

d) $\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\operatorname{tg}2\alpha}$

e) $\frac{4\cdot\cos^2 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sin4\alpha$

f) $\frac{\sin8\alpha}{1+\cos8\alpha}\cdot\frac{\cos4\alpha}{1+\cos4\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

Zapiszmy cztery znane nam już wzory:

(1) $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$ (2) $\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$

(3) $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$ (4) $\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$

Dodajemy tożsamości (1) i (2) stronami i otrzymujemy

(*) $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\cdot\sin x\cdot\cos y$

Jeśli przyjmiemy, że

$x+y=\alpha$ i $x-y=\beta$

to otrzymamy

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad y=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Po dokonaniu odpowiednich podstawień w równości (*) otrzymujemy wzór

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Jeśli tożsamości (1) i (2) odejmiemy stronami i wykonamy te same podstawienia, to otrzymamy wzór

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Postępując podobnie w przypadku tożsamości (3) i (4), wykaż, że

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$ oraz

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Twierdzenie 1.

Jeśli $\alpha\in\boldsymbol{R}, \beta\in\boldsymbol{R}$, to:

a) $\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

b) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

c) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

d) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Omówimy zastosowanie twierdzenia 1. w kolejnych przykładach.

Przykład 1.

Obliczymy wartość wyrażenia $\frac{\cos 23^\circ - \cos 37^\circ}{\sin 37^\circ - \sin 23^\circ}$.

W liczniku ułamka stosujemy twierdzenie 1d).

$$\cos 23^\circ - \cos 37^\circ = -2 \cdot \sin \frac{23^\circ + 37^\circ}{2} \cdot \sin \frac{23^\circ - 37^\circ}{2} =$$

$$= -2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin(-7^\circ) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\sin 7^\circ) = \sin 7^\circ$$

W mianowniku ułamka stosujemy twierdzenie 1b).

$$\sin 37^\circ - \sin 23^\circ = 2 \cdot \sin \frac{37^\circ - 23^\circ}{2} \cdot \cos \frac{37^\circ + 23^\circ}{2} =$$

$$= 2 \cdot \sin 7^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \sin 7^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \sin 7^\circ$$

Otrzymujemy:

$$\frac{\cos 23^\circ - \cos 37^\circ}{\sin 37^\circ - \sin 23^\circ} = \frac{\sin 7^\circ}{\sqrt{3} \cdot \sin 7^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ćwiczenie 1. Wykaż, że $\sin 13^\circ + \sin 47^\circ - \sin 73^\circ = 0$.

Przykład 3.

Wyrażenie $\sqrt{2} - 2 \cdot \sin\alpha$ zapiszemy w postaci iloczynu.

Najpierw wyłączymy przed nawias liczbę 2. Liczbę $\frac{\sqrt{2}}{2}$ zapiszemy jako $\sin\frac{\pi}{4}$.
Następnie zastosujemy wzór na różnicę sinusów.

$$\sqrt{2} - 2 \cdot \sin\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\alpha\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\right) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{4} - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{4} + \alpha}{2} = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

Ćwiczenie 2. Przedstaw w postaci iloczynu sumę $1 + \cos\alpha$.

Przykład 4.

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji $f(x)=\sin x+\cos x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

Przekształcimy wzór funkcji f. Zapiszemy sin α za pomocą funkcji cosinus, korzystając ze wzoru redukcyjnego. Następnie zastosujemy wzór na sumę cosinusów.

$$\sin x+\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos x=2\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x+x}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-x-x}{2}=$$

$$=2\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

Wzór funkcji f można zapisać w postaci

$$f(x)=\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \text{ gdzie } x \in \boldsymbol{R}$$

Zbiorem wartości funkcji $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$, jest przedział $\langle -1, 1\rangle$.

Zatem zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\rangle$.

Ćwiczenie 3. Wyznacz wzór funkcji f z przykładu 4 w postaci iloczynowej:

a) zapisując cos x za pomocą funkcji sinus i stosując wzór na sumę sinusów

b) zapisując wzór funkcji f w postaci $f(x)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$ i stosując wzór na sinus sumy.

Przykład 5.

Wykażemy, że $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{-1}{2}$.

Przekształcamy lewą stronę równości. Stosujemy wzór na sumę cosinusów do dwóch pierwszych składników. W przypadku trzeciego składnika korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=2\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}+2\cdot\cos^2\frac{3\pi}{7}-1$$

Z dwóch początkowych składników otrzymanego wyrażenia wyłączamy wspólny czynnik $2\cos\frac{3\pi}{7}$. Do wyrażenia w nawiasie stosujemy wzór na cosinus sumy.

Otrzymujemy:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=2\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)-1=$$

$$=2\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-1=4\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}-1$$

Teraz iloczyn $4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$ mnożymy przez ułamek $\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$ i stosujemy dwukrotnie wzór na $\sin 2\alpha$.

$$2\cdot 2\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}-1=\frac{2\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-1=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-1$$

Wiemy, że $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, zatem $\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}$ oraz $\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{6\pi}{7}$.

W liczniku otrzymanego wyrażenia ponownie stosujemy wzór na sinus podwojonego kąta i otrzymujemy:

$$\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-1=\frac{2\cdot\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}}{2\cdot\sin\frac{6\pi}{7}}-1=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\cdot\sin\frac{6\pi}{7}}-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

Ostatecznie

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{-1}{2},$$

co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, że:

a) $\cos 14^\circ-\sin 16^\circ=\cos 46^\circ$

b) $\sin 6^\circ+\sin 54^\circ-\sin 66^\circ=0$

c) $\sin 15^\circ\cos 15^\circ-\cos 34^\circ+\cos 26^\circ=0{,}25+\sin 4^\circ$

d) $\frac{2\cdot\sin 18^\circ+\sin 36^\circ}{2\cdot\sin 18^\circ-\sin 36^\circ}=\operatorname{ctg}^2 9^\circ$

e) $\frac{1+\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}{1+\sin 10^\circ+\cos 10^\circ}=\operatorname{tg}5^\circ$

f) $\frac{\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ+\cos 20^\circ+\cos 30^\circ+\cos 40^\circ}=\operatorname{tg}25^\circ$.

D 2. Wykaż, że $\cos\alpha+\cos\frac{3\alpha+2\pi}{3}+\cos\frac{3\alpha+4\pi}{3}=0$.

3. Sprawdź, czy prawdziwa jest równość, zakładając, że prawa i lewa strona tej równości jest określona:

a) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ b) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos(\beta-\alpha)}=\cos(\alpha+\beta)$.

D 4. Wykaż, że prawdziwa jest równość, zakładając, że prawa i lewa strona tej równości jest określona:

$$\frac{\sin\alpha-\sin2\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha-\cos2\alpha+\cos3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

5. Zapisz w postaci iloczynu poniższe wyrażenia.

a) $1-\cos(\alpha+\beta)$ b) $\sin\alpha-1$ c) $\cos\alpha-\sin\alpha$ d) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.

D 6. Wykaż, że:

a) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)$

b) $\sqrt{3}-2\cdot\cos\alpha=4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$

c) $1+\cos4\alpha+\cos2\alpha=4\cdot\cos2\alpha\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

d) $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha=4\cdot\cos\alpha\cdot\cos2\alpha\cdot\sin3\alpha$.

D 7. Wykaż, że wartość wyrażenia $\sin\frac{\pi}{14}+2\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}$ jest liczbą naturalną.

8. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=-\sin^2x\cdot\cos^2x$

b) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sin x\cdot\cos^3x-\frac{1}{2}\cdot\sin^3x\cdot\cos x$

c) $f(x)=\frac{\sin x}{3}-\frac{\cos x}{\sqrt{3}}$

d) $f(x)=4\cdot\sin^4x+\sin^22x$

e) $f(x)=\sin^4x+\cos^4x$

f) $f(x)=\sin2x+2\cdot\cos^2x-1$.

D 9. Wykaż, że jeśli $\alpha\neq\beta$ i $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to $\sin\gamma=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

D 10. Wykaż, że jeśli $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, to $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+1$.

Równania trygonometryczne, cz. 2.

Zajmiemy się teraz równaniami trygonometrycznymi, w których wykorzystamy wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych oraz wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów.

Przykład 1.

Rozwiążemy równanie $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=-1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Dzielimy obie strony równania przez 2.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x+\frac{1}{2}\cdot\cos x=\frac{-1}{2}$$

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x=\frac{-1}{2}$$

Stosujemy wzór na sinus sumy.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-1}{2},\qquad \text{stąd}$$

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{-\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\quad\vee\quad x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z},\qquad \text{czyli}$$

$$x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\quad\vee\quad x=\pi+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$$

W pierwszej serii rozwiązań jedynym rozwiązaniem należącym do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$ jest liczba $\frac{-\pi}{3}+2\pi$, czyli $\frac{5\pi}{3}$ (jeśli $k = 1$). W drugiej serii rozwiązań jedynym rozwiązaniem należącym do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$ jest liczba π (jeśli $k = 0$). W przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ równanie ma dwa rozwiązania: π oraz $\frac{5\pi}{3}$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż równanie $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=-1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$, wyznaczając najpierw $\sin x$ i $\cos x$ z układu równań $\begin{cases}\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=-1\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$.

Przykład 2.

Rozwiążemy równanie $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$.

Zapiszemy cos *x* jako $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ i zastosujemy wzór na sumę sinusów.

$$\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Otrzymujemy:

$$2\cdot\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \text{stąd}$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}\quad\vee\quad x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$$

$$x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}\quad\vee\quad x=\frac{\pi}{12}+2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}$$

Rozwiązaniami równania są wszystkie liczby mające postać $\frac{5\pi}{12}+2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}$

lub $\frac{\pi}{12}+2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}$.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż równanie $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ sposobem przedstawionym w przykładzie 1. Podziel obie strony równania przez $\sqrt{2}$.

Przykład 3.

Rozwiążemy równanie $6\cdot\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2-\cos 2x$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}$.

$$6\cdot\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2-\cos 2x$$

$$3\left(2\cdot\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=2-\cos 2x$$

W nawiasie stosujemy wzór na sinus podwojonego kąta.

$$3\cdot\sin x=2-\cos 2x$$

Po prawej stronie stosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta.

$$3\cdot\sin x = 2-\left(1-2\sin^2 x\right)$$

$$2\cdot\sin^2 x - 3\cdot\sin x + 1 = 0$$

Dokonujemy podstawienia: $t = \sin x$.

$$2t^2 - 3t + 1 = 0\ ,$$

$$\Delta = 1, \quad \sqrt{\Delta} = 1$$

$$t = \frac{1}{2} \quad \vee \quad t = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = 1$$

Rozwiązania równania to liczby mające postać:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi\text{, gdzie } k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ćwiczenie 3. Rozwiąż równanie $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$. Zastosuj wzór na cosinus podwojonego kąta.

Przykład 4.

Rozwiążemy równanie $\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4} = \frac{7}{8}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Najpierw znajdziemy rozwiązania równania w zbiorze liczb rzeczywistych.

$$\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4} = \frac{7}{8} \qquad a^4 + b^4 = \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2a^2b^2$$

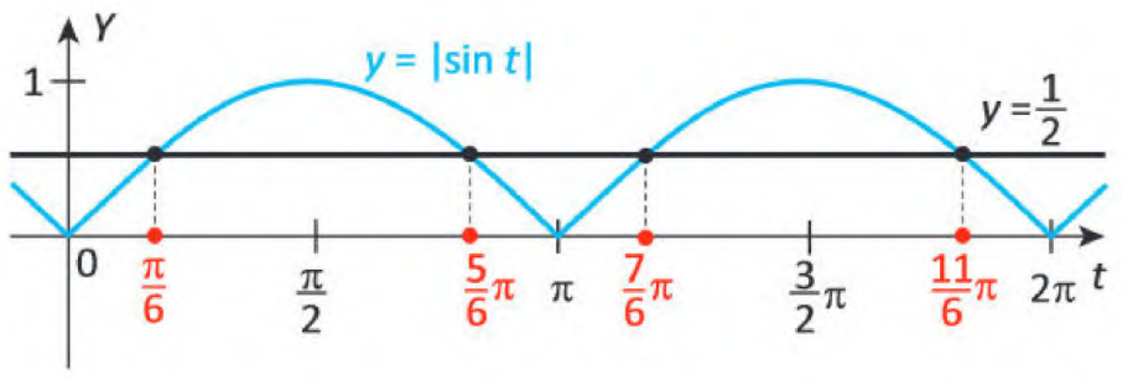
$$\underbrace{\left(\sin^2 \frac{x}{4} + \cos^2 \frac{x}{4}\right)^2}_{1} - 2\sin^2 \frac{x}{4}\cos^2 \frac{x}{4} = \frac{7}{8}$$

$$2\cdot\sin^2 \frac{x}{4}\cos^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{8} \ /\cdot 2$$

$$4\cdot\sin^2 \frac{x}{4}\cos^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{4} \qquad 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2 2\alpha$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \qquad t = \frac{x}{2}$$

$$\left|\sin t\right| = \frac{1}{2}$$



$$t=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z \quad \vee \quad t=\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in Z$$

Wracamy do niewiadomej x:

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z \quad \vee \quad \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in Z$$

W zbiorze liczb rzeczywistych mamy następujące serie rozwiązań:

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z \quad \text{oraz} \quad x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Zauważ teraz, że:

– jeśli $k = 0$, to otrzymujemy dwa rozwiązania należące do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$:

$$x=\frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{3}$$

– jeśli $k \neq 0$, to rozwiązania równania nie należą do przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$ (sprawdź to).

Równanie ma dwa rozwiązania w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$. Są to liczby: $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{3}$.

Przykład 5.

Rozwiążemy równanie $\sin 3x+\cos 2x=\sin x,\ x\in R$.

$\sin 3x+\cos 2x=\sin x$

$(\sin 3x-\sin x)+\cos 2x=0$ — W nawiasie stosujemy wzór na różnicę sinusów.

$2\cdot\cos\frac{3x+x}{2}\cdot\sin\frac{3x-x}{2}+\cos 2x=0$

$2\cdot\cos 2x\cdot\sin x+\cos 2x=0$ — Wyłączamy cos 2x poza nawias.

$\cos 2x\cdot(2\sin x+1)=0$

$\cos 2x=0 \ \vee \ \sin x=-\frac{1}{2}$

$2x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z \quad \vee \quad x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi, k\in Z \quad \vee \quad x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z \quad \vee \quad x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi, k\in Z \quad \vee \quad x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$

Rozwiązaniami równania $\sin 3x+\cos 2x=\sin x$ są wszystkie liczby mające postać:

$\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ lub $\frac{-\pi}{6}+2k\pi$ lub $\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, gdzie $k\in Z$.

Ćwiczenie 4. Wyznacz rozwiązania równania z przykładu 5., które należą do przedziału $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Przykład 6.

Wyznaczymy zbiór wszystkich wartości parametru a, $a \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $\cos x+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=a^2+a-1$ ma rozwiązanie.

Po lewej stronie równania stosujemy wzór na sumę cosinusów.

$$2\cdot\cos\frac{x+x-\frac{2\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{x-\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}=a^2+a-1$$

$$2\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3}=a^2+a-1 \qquad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=a^2+a-1$$

Równanie ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-1 \leqslant a^2+a-1 \leqslant 1$$

czyli wtedy, gdy spełniony jest układ nierówności

$$\begin{cases} a^2+a \geqslant 0 \\ a^2+a-2 \leqslant 0 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy nierówności powyższego układu i otrzymujemy:

$$\begin{cases} a\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 0,+\infty) \\ a\in\langle -2,1\rangle \end{cases}, \quad \text{stąd}$$

$$a\in\langle -2,-1\rangle\cup\langle 0,1\rangle$$

Równanie $\cos x+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=a^2+a-1$ ma rozwiązanie tylko wtedy, gdy $a\in\langle -2,-1\rangle\cup\langle 0,1\rangle$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż równanie:

a) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\operatorname{ctg} x=0$

c) $\sin 2x = (\sin x-\cos x)^2$

d) $\cos 2x+\cos x=0$

e) $\sin 2x=\cos x$

f) $4\cos 2x+4\sin^2 x=1$.

2. Rozwiąż równanie:

a) $\cos\frac{x}{2}=\sin x$

b) $\cos 4x + \sin 4x = 1$

c) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sqrt{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=\sqrt{2}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

e) $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$

f) $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0.$

3. Rozwiąż równanie w podanym przedziale liczbowym.

a) $\cos x-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(0, 2\pi)$

b) $\sin 2x - \cos 2x = 1$, $\left\langle\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$

c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 4x$, $\langle 0, 2\pi\rangle$

d) $8\sin^4\frac{x}{2}+8\cos^4\frac{x}{2}=7$, $(0, 2\pi)$

e) $\sin x - \sin 7x = \cos 4x$, $(0, \pi)$

f) $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2$, $(-\pi, 2\pi)$

4. Rozwiąż równanie, wiedząc, że jego lewa strona jest szeregiem geometrycznym zbieżnym.

a) $\frac{3\sin 2x}{2}+\frac{3\sin 2x}{8}+\frac{3\sin 2x}{32}+\ldots=\sqrt{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$

b) $\cos 2x+\frac{3\cos 2x}{4}+\frac{9\cos 2x}{16}+\ldots=4\sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$

c) $\operatorname{tg} x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{9}\operatorname{tg}^5 x+\ldots=1\frac{1}{2}$, $x\in\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

5. Wyznacz wartości parametru k, $k \in \boldsymbol{R}$, dla których dane równanie ma rozwiązanie.

a) $\sin\left(\frac{2\pi-x}{3}\right)=\sin\frac{1}{3}x+4k^2-3$

b) $2\cos 3x \cdot \cos 5x = \cos 8x - k^2 + 8$

c) $5 + \sin^4 x + \cos^4 x = 2k$

d) $4\cos^2 x - 4\cos x = |k + 1| - 2$

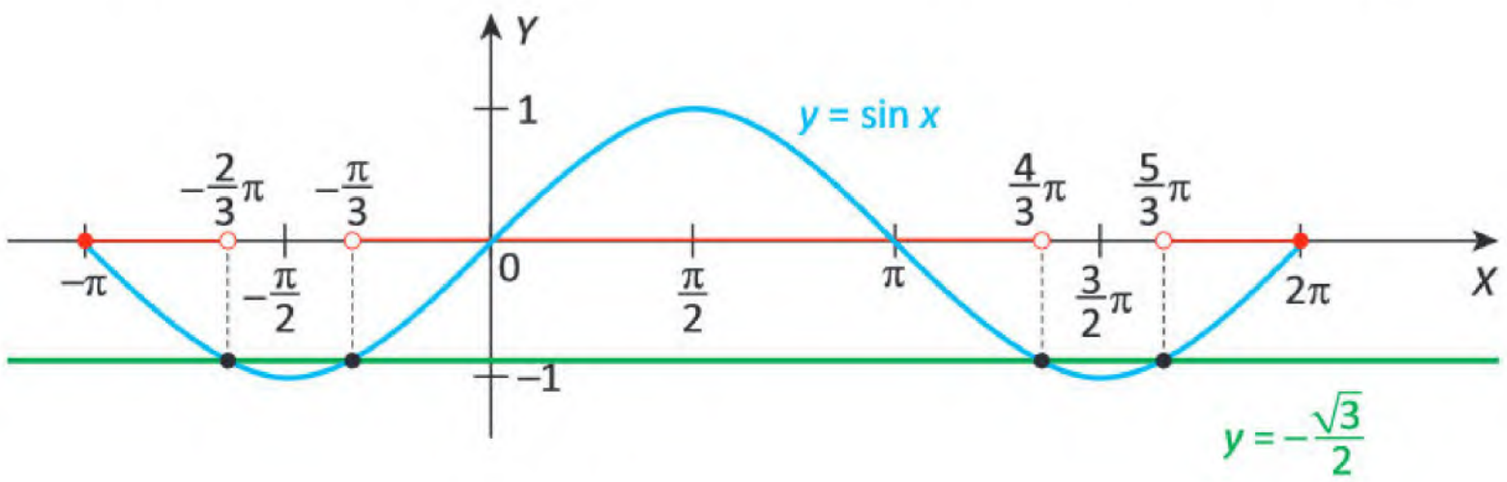
Nierówności trygonometryczne

Przykład 1.

Rozwiążemy nierówność $\sin x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$: a) w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$ b) w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

Rozwiązać nierówność $\sin x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$ to wyznaczyć zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja $y = \sin x$ przyjmuje wartości większe od $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Ad a) Szkicujemy wykresy funkcji: $y = \sin x$, $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$ oraz $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.



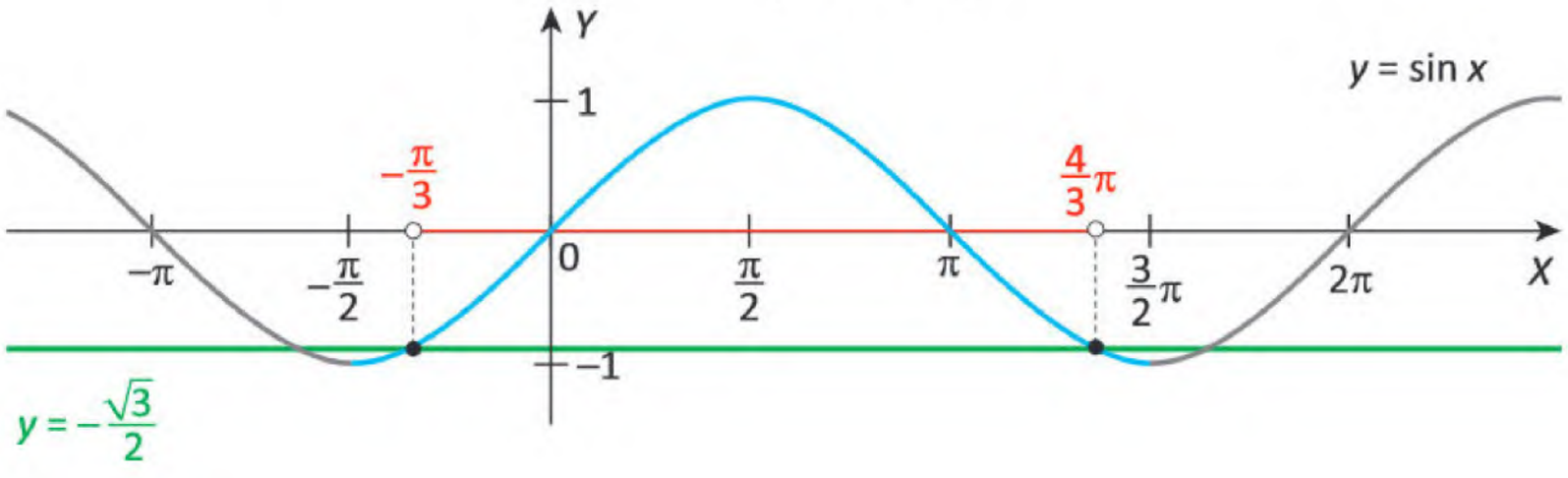
Rozwiązujemy równanie $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi, 2\pi \rangle$:

$$x = \frac{-2}{3}\pi \ \vee \ x = \frac{-\pi}{3} \ \vee \ x = \frac{4\pi}{3} \ \vee \ x = \frac{5\pi}{3}$$

Odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności. Na rysunku jest on zaznaczony kolorem czerwonym.

Zbiorem rozwiązań nierówności $\sin x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$, gdzie $x \in \langle -\pi, 2\pi \rangle$ jest suma przedziałów $\left\langle -\pi, -\frac{2}{3}\pi \right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi \right) \cup \left(\frac{5}{3}\pi, 2\pi \right\rangle$.

Ad b) Rozpatrujemy funkcję $y = \sin x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Znajdziemy najpierw rozwiązania w przedziale o długości równej okresowi podstawowemu funkcji $y = \sin x$, czyli o długości 2π. Na przykład w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.



W tym przedziale rozwiązaniami równania $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ są liczby: $\frac{-\pi}{3}$ oraz $\frac{4\pi}{3}$. Wówczas w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ nierówność $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ jest spełniona przez argumenty należące do zbioru $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right)$. Teraz korzystamy z okresowości funkcji $y = \sin x$ i stwierdzamy, że zbiorem rozwiązań nierówności $\sin x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest suma przedziałów mających postać $\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right)$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ćwiczenie 1. Rozwiąż nierówność $2\sin x - \sqrt{2} < 0$ w zbiorze:

a) $\langle 0, 2\pi \rangle$ b) $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right\rangle$ c) $\left\langle \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ d) $\boldsymbol{R}$.

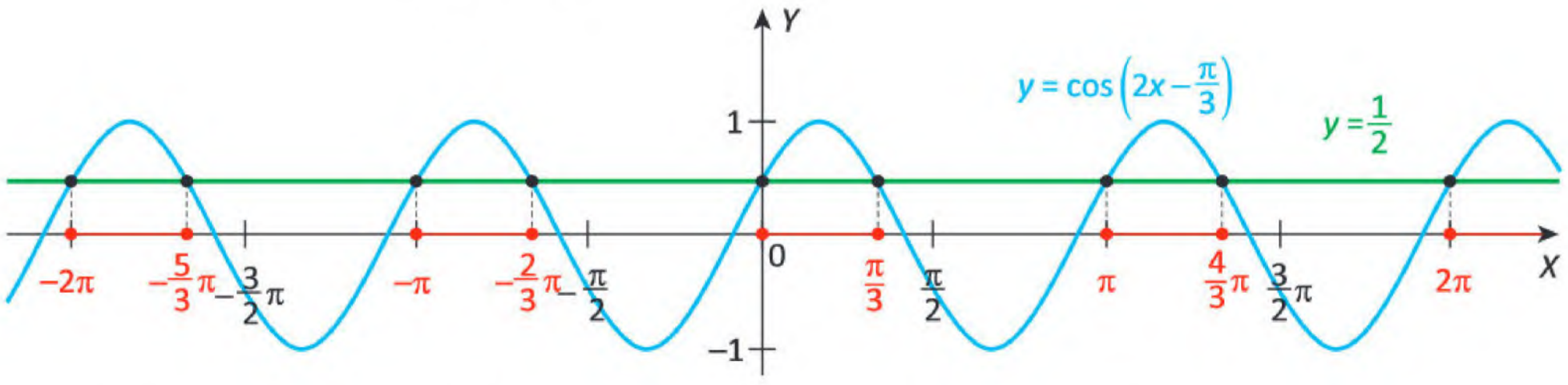
Przykład 2.

Wyznaczymy zbiór rozwiązań nierówności $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \geqslant \frac{1}{2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

I sposób: Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$ wyznaczamy argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe od $\frac{1}{2}$ lub równe $\frac{1}{2}$.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci $f(x) = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{6} \right)$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Wykres funkcji f otrzymamy, przesuwając równoległe wykres funkcji $y = \cos 2x$ o wektor $\left[\frac{\pi}{6}, 0 \right]$.



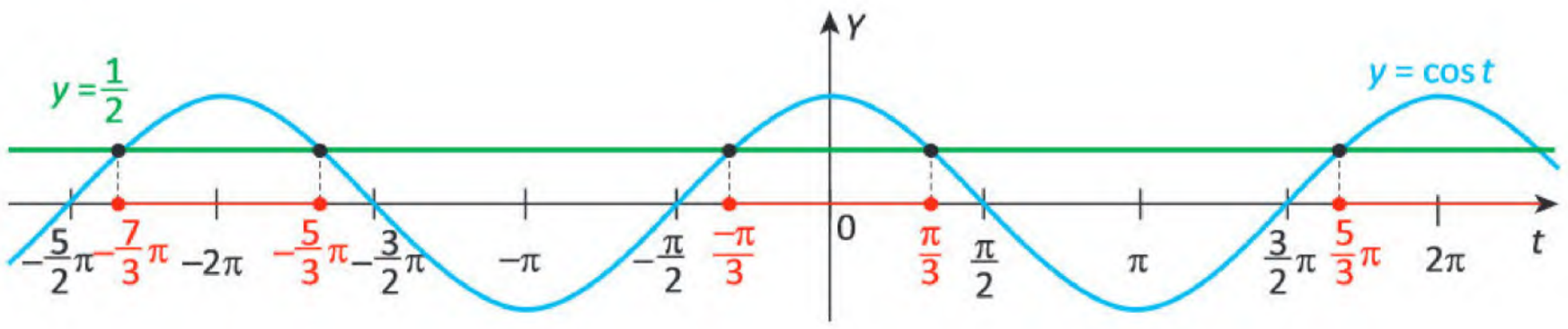
$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \ \vee \ x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z} \right)$$

Okres podstawowy funkcji f jest równy π. Z wykresu odczytujemy, że zbiorem rozwiązań nierówności $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$ jest suma przedziałów mających postać

$\left\langle k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right\rangle, k\in\boldsymbol{Z}.$

II sposób: Wykonujemy podstawienie: $t=2x-\frac{\pi}{3}$, gdzie $t\in\boldsymbol{R}$.

Rozwiązujemy najpierw równanie $\cos t=\frac{1}{2}$



$$\cos t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(t=\frac{-\pi}{3}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\ \vee\ t=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right)$$

Wówczas zbiorem rozwiązań nierówności $\cos t\geqslant\frac{1}{2}$, gdzie $t\in\boldsymbol{R}$, jest suma przedziałów mających postać

$$\left\langle-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\rangle,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Zatem t spełnia nierówność podwójną:

$$\frac{-\pi}{3}+2k\pi\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad \text{gdzie } k\in\boldsymbol{Z}$$

Wracamy do nierówności z niewiadomą x.

$$\frac{-\pi}{3}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad /+\frac{\pi}{3}$$

$$2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{2}{3}\pi+2k\pi\quad /:2$$

$$k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$, $x\in\boldsymbol{R}$, jest suma przedziałów mających postać $\left\langle k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right\rangle, k\in\boldsymbol{Z}$.

Ćwiczenie 2. Rozwiąż na dwa sposoby nierówność $\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)>0$, $x\in\boldsymbol{R}$.

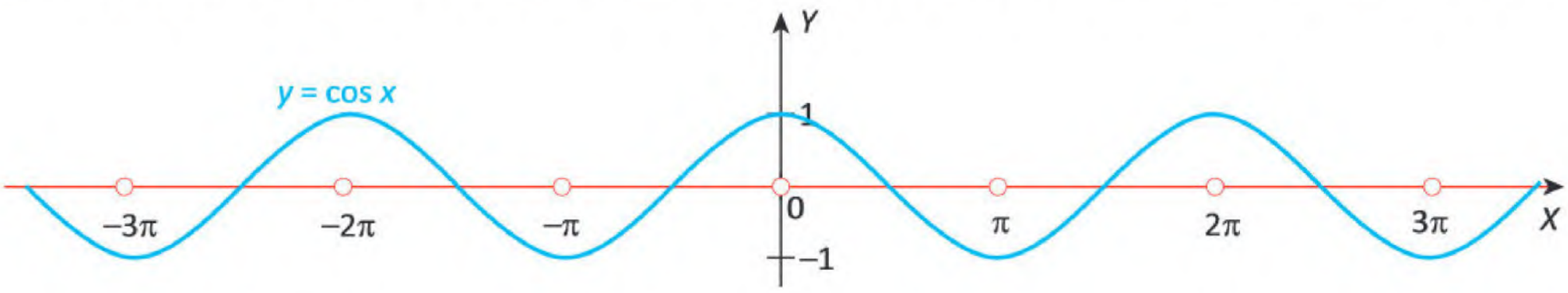
Ćwiczenie 3. Wyznacz wszystkie rzeczywiste rozwiązania nierówności $\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)<1$. Który ze sposobów przedstawionych w przykładzie 2. jest według Ciebie bardziej skuteczny w rozwiązaniu tej nierówności?

Przykład 3.

Rozwiążemy nierówność $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \cos^5 x + \ldots \geqslant 1$, wiedząc, że lewa strona nierówności jest szeregiem geometrycznym zbieżnym.

Mamy: $a_1 = \cos x$, $q = \cos x$

Szereg geometryczny jest zbieżny tylko wtedy, gdy $|q| < 1$, czyli $-1 < \cos x < 1$.



$|\cos x| < 1 \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{R} - \{x:\ x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$

Wówczas możemy zastosować wzór na sumę S szeregu geometrycznego zbieżnego $S = \frac{a_1}{1-q}$. Mamy: $S = \frac{\cos x}{1-\cos x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{x:\ x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$

Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{\cos x}{1-\cos x} \geqslant 1 \quad / \cdot (1-\cos x) \qquad 1-\cos x > 0, \quad \text{bo } \cos x < 1$$

$$\cos x \geqslant 1 - \cos x$$

$$\cos x \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \text{gdzie } x \in \boldsymbol{R} - \{x:\ x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$$

Po uwzględnieniu założeń stwierdzamy, że zbiorem rozwiązań nierówności jest suma zbiorów mających postać $\left\langle \frac{-\pi}{3}+2k\pi, 2k\pi \right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi \right\rangle$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Przykład 4.

Pokażemy, że nierówność $2\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest sprzeczna.

Iloczyn występujący po lewej stronie nierówności zastąpimy sumą sinusów.

Skorzystamy ze wzoru:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\alpha+\sin\beta$$

Przyjmujemy: $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{8}+x$ oraz $\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\pi}{8}-x$.

Wyznaczamy α i β, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+2x\\ \alpha-\beta=\frac{\pi}{4}-2x\end{cases}\quad\text{stąd}\quad\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{4}\\ \beta=2x\end{cases}$$

Zatem

$$2\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\sin 2x$$

Teraz przekształcamy równoważnie daną nierówność:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\sin\frac{\pi}{4}+\sin 2x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin 2x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\sin 2x<-\sqrt{2}$$

Ostatnia nierówność jest sprzeczna, bowiem $\sin 2x\in\langle -1,1\rangle$. Zatem nierówność $2\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}-x\right)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ też jest sprzeczna, co kończy dowód.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Rozwiąż nierówność w podanym zbiorze.

a) $\cos x\leqslant\frac{1}{2}$, $\langle -\pi,\pi\rangle$

b) $|\sin x|>\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left\langle 0,\frac{5\pi}{2}\right\rangle$

c) $|\operatorname{tg}x|-1<0$, $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle$

d) $\operatorname{ctg}^2 x-3\geqslant 0$, $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$

e) $\sqrt{2}-\cos^2 x>0$, $\langle -2\pi,2\pi\rangle$

f) $\sin^2 x-\frac{1}{2}<0$, $\langle 0,2\pi\rangle$

2. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste, spełniające nierówność:

a) $\cos 4x < -\frac{1}{2}$ b) $\sin\frac{x}{3} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg} 3x \leqslant \sqrt{3}$

d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}x\right) \leqslant \frac{-1}{2}$ f) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}x\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Rozwiąż nierówność:

a) $\cos 2x + 7\cos x + 4 < 0$ b) $\operatorname{tg}^2 x \leqslant \sqrt{3}\operatorname{tg} x$

c) $\cos 2x + \sin x < 0$ d) $2\cos^2 2x + 3\sin 2x \geqslant 0$

e) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1 > 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ f) $\sin 2x \cdot \cos x < \sin x$.

4. Rozwiąż nierówność:

a) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \geqslant 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$

b) $\cos\left(\pi + \frac{1}{2}x\right) > \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$

c) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x - \pi\right) + 1 \geqslant 0$ w zbiorze $(-\pi, \pi) \cup (\pi, 3\pi)$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) - 2\cos\frac{x}{2} > \frac{-\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle -3\pi, 5\pi\rangle$

e) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + 4x\right) - 2\operatorname{tg} 4x < 3$ w zbiorze $\left(\frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$

f) $2\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right) \geqslant \sqrt{2}$ w przedziale $\left(\frac{\pi}{2}, 6\pi\right\rangle$.

5. Rozwiąż nierówność:

a) $\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{6}\sin 2x > 0$ b) $\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x \leqslant 1 + \sqrt{2}\sin\frac{1}{2}x$

c) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x \geqslant \sqrt{3}$ d) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2} + \cos x$.

D 6. Wykaż, że $2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geqslant -\frac{1}{2}$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

D 7. Wykaż, że nierówność $\sin^2 x - \sin x > 2$ jest sprzeczna.

8. Rozwiąż nierówność, wiedząc, że jej lewa strona jest szeregiem geometrycznym zbieżnym.

a) $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin^2 x}{4} + \frac{\sin^3 x}{8} + \ldots < 1$ b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \ldots \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$

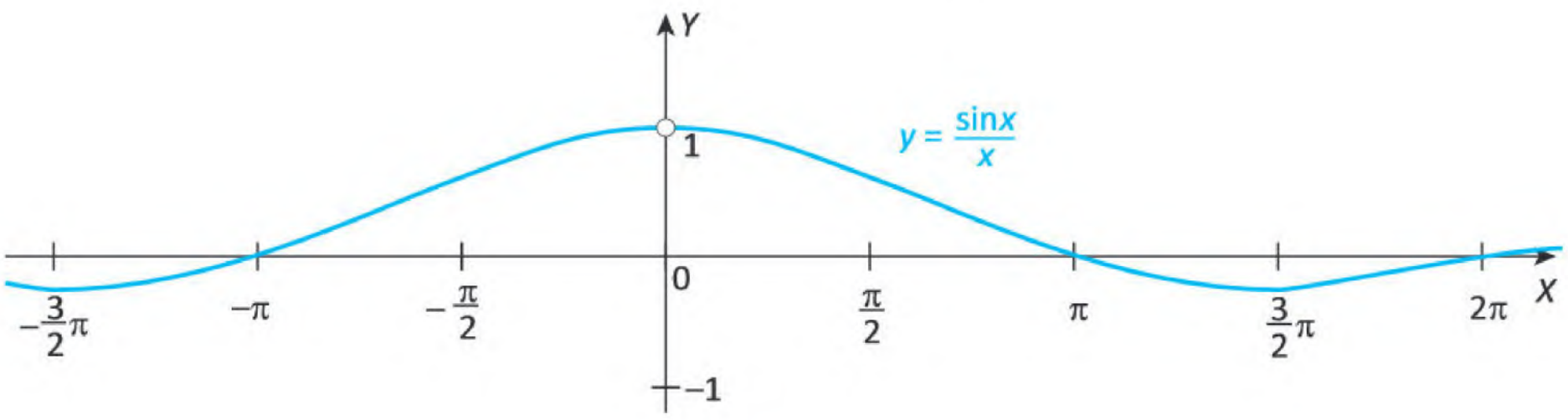
Pochodne funkcji trygonometrycznych

Przy wyznaczaniu pochodnych funkcji trygonometrycznych przydatne jest następujące twierdzenie, które podamy bez dowodu.

Twierdzenie 1.

Granica $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ istnieje i $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji $y=\dfrac{\sin x}{x}$, gdzie $x\neq 0$.



Przykład 1.

Obliczymy granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

W obliczeniach wykorzystamy twierdzenie 1. oraz twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ze str. 289.

Ad a) Mamy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{0}{\operatorname{tg} x}}{\underset{0}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

Ad b) Niech $3x=u$; zauważamy, że $x\to 0$ wtedy, gdy $u\to 0$. Otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{0}{x}}{\underset{0}{\sin 3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\cdot\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{3\cdot\dfrac{\sin u}{u}}=\frac{1}{3\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}}=\frac{1}{3\cdot 1}=\frac{1}{3}$$

Ad c) W tym przypadku korzystamy dodatkowo ze wzoru na różnicę cosinusów.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{0}{\overbrace{\cos x-\cos 3x}}}{\underset{0}{\underbrace{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{x-3x}{2}}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin x}{x^2}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=4\cdot 1\cdot 1=4$$

Ćwiczenie 1. Oblicz granice: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x-\sin x}$

W dalszej części tematu zajmiemy się pochodnymi funkcji trygonometrycznych. Tabela poniżej zawiera podstawowe wzory.

lp.	funkcja	pochodna funkcji	dziedzina pochodnej
1.	$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$\boldsymbol{R}$
2.	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$	$\boldsymbol{R}$
3.	$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\boldsymbol{R}-\left\{x:\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$
4.	$f(x)=\operatorname{ctg} x$	$f'(x)=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\boldsymbol{R}-\left\{x:\ x=k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$

Udowodnimy powyższe wzory. W punktach 1) i 2) wykorzystamy definicję pochodnej; w punktach 3) i 4) – twierdzenie o pochodnej ilorazu funkcji.

Ad 1) $f(x)=\sin x,\quad D_f=\boldsymbol{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x,\qquad \text{stąd}$$

$$f'(x)=\cos x,\ D_{f'}=\boldsymbol{R}$$

Ad 2) $f(x) = \cos x, \quad D_f = \boldsymbol{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\frac{h}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)=-1\cdot\sin x=-\sin x\,,\quad \text{zatem}$$

$$f'(x)=-\sin x,\ D_{f'}=\boldsymbol{R}$$

Ad 3) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad D_f=\boldsymbol{R}-\left\{x:\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-(\cos x)'\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\sin x)\cdot\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\,,\ \text{więc}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\,,\quad D_{f'}=\boldsymbol{R}-\left\{x:\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$$

Ad 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad D_f=\boldsymbol{R}-\{x:\ x=k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\}$

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-(\sin x)'\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}\,,\quad \text{więc}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}\,,\quad D_{f'}=\boldsymbol{R}-\{x:\ x=k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\}$$

Przykład 2.

Wyznaczymy pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^2 + 3\cdot\cos x, \quad D_f = \boldsymbol{R}$

b) $f(x)=5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}x+\frac{\pi}{6}\right), \quad D_f=\boldsymbol{R}$

c) $f(x)=\sqrt{\operatorname{ctg}x}\,, \quad D_f=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = \operatorname{tg}^3 4x, \quad D_f=\left(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right).$

Ad a) Stosujemy twierdzenie o pochodnej sumy funkcji:

$$\left(x^2+3\cdot\cos x\right)'=\left(x^2\right)'+\left(3\cdot\cos x\right)'=2x-3\cdot\sin x$$

$$f'(x)=2x-3\cdot\sin x,\ D_{f'}=D_f$$

Ad b) Stosujemy wzór na pochodną funkcji złożonej:

$$\left[5\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}x+\frac{\pi}{6}\right)\right]'=5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{12}x+\frac{\pi}{6}\right)'=5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{12}$$

$$f'(x)=\frac{5\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}x+\frac{\pi}{6}\right),\quad D_{f'}=D_f$$

Ad c) W tym przypadku również stosujemy wzór na pochodną funkcji złożonej:

$$\left(\sqrt{\operatorname{ctg}x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg}x}}\cdot\left(\operatorname{ctg}x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg}x}}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2\cdot\sin^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}x}},\quad D_{f'}=D_f$$

Ad d) Dwukrotnie zastosujemy twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej:

$$\left(\operatorname{tg}^3 4x\right)'=3\cdot\operatorname{tg}^2 4x\cdot\left(\mathbf{tg4x}\right)'=3\cdot\operatorname{tg}^2 4x\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\cos^2 4x}}\cdot\left(\mathbf{4x}\right)'=3\cdot\operatorname{tg}^2 4x\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\cos^2 4x}}\cdot\mathbf{4}$$

$$f'(x)=\frac{12\cdot\operatorname{tg}^2 4x}{\cos^2 4x},\quad D_{f'}=D_f$$

Przykład 3.

Wyznaczymy zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=\sin 2x-2\cdot\cos x,\quad x\in\left\langle 0,\frac{3\pi}{2}\right\rangle$ b) $g(x)=\operatorname{tg}x+8\cdot\sin x,\quad x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle$

Ad a) Funkcja f jest ciągła. Wyznaczamy pochodną funkcji f i obliczamy punkty krytyczne.

$$(\sin 2x-2\cdot\cos x)'=2\cdot\cos 2x+2\cdot\sin x$$

$$f'(x)=2\cdot\cos 2x+2\cdot\sin x,\quad x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ 2\cdot\cos 2x+2\cdot\sin x=0,\quad x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$$2(1-2\sin^2 x)+2\cdot\sin x=0$$

$$-4\sin^2 x+2\cdot\sin x+2=0,\qquad t=\sin x$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$-4 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 2 = 0, \qquad \Delta = 36, \qquad \sqrt{\Delta} = 6$$

$$t = 1 \ \vee \ t = -0{,}5$$

$$\sin x = 1 \ \vee \ \sin x = -0{,}5 \quad \text{oraz} \quad x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{zatem}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

Obliczamy wartości funkcji f w punktach krytycznych i na końcach przedziału określoności.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f(0) = -2, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Otrzymane wielkości pozwalają stwierdzić, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle -2, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right\rangle$.

Ad b) Funkcja g również jest ciągła. Postępujemy analogicznie jak w punkcie a). Wyznaczamy pochodną:

$$\left(\operatorname{tg} x + 8 \sin x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + 8 \cdot \cos x$$

$$g'(x) = \frac{1 + 8 \cdot \cos^3 x}{\cos^2 x}, \qquad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji g.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[1 + 8 \cdot \cos^3 x = 0 \wedge x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right] \Leftrightarrow \left[\cos x = \frac{-1}{2} \wedge x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

Obliczamy wartość funkcji g w punkcie krytycznym oraz w prawym końcu przedziału określoności.

$$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \quad g(\pi) = 0$$

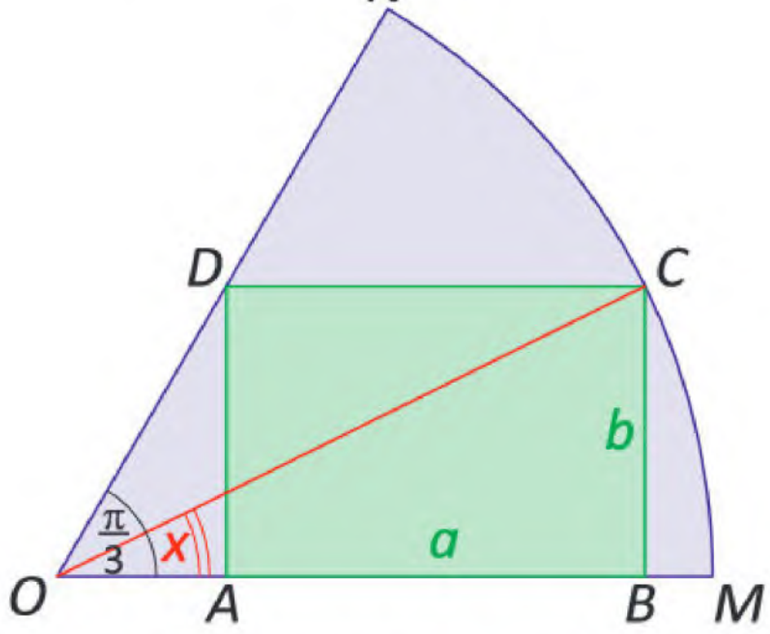
Obliczamy granicę funkcji g w lewym końcu przedziału określoności:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\overset{-\infty}{\boxed{\operatorname{tg} x}} + \overset{8}{\boxed{8 \cdot \sin x}}\right) = -\infty$$

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $\left(-\infty, 3\sqrt{3}\right\rangle$.

Przykład 4.

W wycinek koła o promieniu 6 i kącie środkowym o mierze $\frac{\pi}{3}$ wpisujemy prostokąty w taki sposób, że dwa wierzchołki każdego prostokąta leżą na jednym z promieni ograniczających wycinek kołowy, a z dwóch pozostałych jeden leży na drugim promieniu ograniczającym wycinek, a drugi na łuku tego wycinka – jak na rysunku poniżej. Wyznaczymy wymiary prostokąta o największym polu.



Oznaczamy:

ABCD – prostokąt wpisany w wycinek koła *MON* o promieniu 6

$|\sphericalangle MOC| = x$

$|AB| = a, \quad |BC| = b$

Niech $P(x)$ oznacza pole prostokąta *ABCD* w zależności od *x*.

Mamy

(1) $P(x) = a \cdot b$

$|OM| = |OC| = |ON| = 6$

Wyznaczymy *a* i *b* w zależności od *x*. W trójkącie prostokątnym *OBC* mamy:

$$\frac{|BC|}{|OC|} = \sin x, \quad \text{czyli} \quad \frac{b}{6} = \sin x, \quad \text{stąd}$$

(2) $b = 6 \cdot \sin x$

Trójkąt *OAD* jest prostokątny o kątach ostrych $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{6}$ i $|AD| = b$, więc $|OA| = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

Wówczas $|OB| = |OA| + |AB| = \frac{b}{\sqrt{3}} + a$ oraz $\frac{|OB|}{|OC|} = \cos x$, stąd

(3) $\frac{b}{\sqrt{3}} + a = 6 \cdot \cos x$

Uwzględniając zależności (2) i (3) otrzymujemy

(4) $a = 6 \cdot \cos x - 2\sqrt{3} \cdot \sin x$

We wzorze (1) wstawiamy w miejsce *a* i *b* wyrażenie otrzymane w punktach (4) i (2).

$$P(x) = \left(6 \cdot \cos x - 2\sqrt{3} \cdot \sin x\right) \cdot 6 \cdot \sin x$$

$$P(x) = 36 \cdot \sin x \cdot \cos x - 12\sqrt{3} \cdot \sin^2 x$$

Stosujemy wzór $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

$$P(x) = 18 \cdot \sin 2x - 12\sqrt{3} \cdot \sin^2 x, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

Funkcja *P* jest ciągła; wyznaczamy jej pochodną.

$$P'(x) = 36 \cdot \cos 2x - 24\sqrt{3} \cdot \sin x \cdot \cos x, \quad \text{czyli}$$

$$P'(x)=36\cdot\cos 2x-12\sqrt{3}\cdot\sin 2x,\qquad x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$P'(x)=0\Leftrightarrow\left[36\cdot\cos 2x-12\sqrt{3}\cdot\sin 2x=0\ \wedge\ x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[12\sqrt{3}\sin 2x=36\cos 2x\ \wedge\ x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\operatorname{tg}2x=\sqrt{3}\ \wedge\ x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\wedge\cos 2x\neq 0\right]\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

Jest jeden punkt krytyczny. Obliczamy

$$P\left(\frac{\pi}{6}\right)=18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-12\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}=6\sqrt{3}\qquad\lim_{x\to 0^+}P(x)=0\qquad\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}P(x)=0$$

Dla argumentu $\frac{\pi}{6}$ funkcja P przyjmuje największą wartość. Wówczas

$$a=6\cdot\cos\frac{\pi}{6}-2\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{3}\quad b=6\cdot\sin\frac{\pi}{6}=6\cdot\frac{1}{2}=3$$

Prostokąt o największym polu, równym $6\sqrt{3}$, ma wymiary: $2\sqrt{3}$ na 3.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz pochodne funkcji:

   a) $f(x)=\cos x-2\cdot\sin x,\quad x\in\boldsymbol{R}$

   b) $f(x)=x^3+4\cdot\operatorname{tg}x,\quad x\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

   c) $f(x)=10\cdot\sin(2x+3)+4,\quad x\in\boldsymbol{R}$

   d) $f(x)=7\cdot\cos(3x-5)-1,\quad x\in\boldsymbol{R}$

   e) $f(x)=\frac{1}{\sin x}+\cos\frac{\pi}{7},\quad x\in(0,\pi)$

   f) $f(x)=\operatorname{ctg}^2x+\frac{1}{x},\quad x\in(0,\pi)$.

2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji:

   a) $f(x)=\cos 3x+2$ w punkcie o odciętej $\frac{\pi}{6}$

   b) $f(x)=\operatorname{tg}x-x$ w punkcie o odciętej $\frac{\pi}{3}$.

3. W wycinek koła o promieniu 2 i kącie środkowym o mierze $\frac{\pi}{4}$ wpisujemy prostokąty w taki sposób jak w przykładzie 4. Wśród tych prostokątów jeden ma największe pole. Wyznacz to pole.

4. Oblicz miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym stosunek długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt do długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest największy. Wyznacz ten stosunek.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 7.

Test

1. Liczba cos 75° jest równa:

A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

2. Różnica $\sin 64^\circ \cdot \cos 3^\circ - \cos 116^\circ \cdot \cos 93^\circ$ jest równa:

A. sin 61° B. sin 67° C. cos 61° D. cos 67°

3. Liczba $\frac{6\left(\cos^2 165^\circ - \sin^2 165^\circ\right)}{\sqrt{3}}$ jest:

A. ujemna B. niewymierna C. pierwsza D. złożona

4. Jeśli $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{5}$, to:

A. $\sin 2\alpha = 0{,}8$ B. $\sin 2\alpha = -0{,}64$ C. $\sin 2\alpha = \frac{16}{25}$ D. $\sin 2\alpha = -\frac{9}{25}$

5. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{4\sqrt{2}}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest przedział:

A. $\left\langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\rangle$ B. $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ C. $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ D. $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right\rangle$

6. Liczba miejsc zerowych funkcji $f(x) = \cos x + \cos 5x$, określonej w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ wynosi:

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

7. Suma wszystkich rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ należących do przedziału $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ jest równa:

A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{3\pi}{2}$.

8. Zbiorem rozwiązań nierówności $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ jest:

A. $\left(\frac{\pi}{6}, \pi\right\rangle$ B. $\left\langle 0, \frac{\pi}{3}\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right\rangle$ D. $\left\langle 0, \frac{\pi}{6}\right)$

9. Równanie $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 2a - 1$ jest sprzeczne wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $|2a - 1| > 2$ B. $a > \frac{1}{2}$ C. $|2a - 1| > 1$ D. $a < 0$

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

Zadania otwarte

10. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{\text{tg}15^\circ+\text{ctg}15^\circ}{\sin 30^\circ}$

b) $\frac{\sin 9^\circ\cdot\cos 9^\circ\cdot\cos 18^\circ}{\cos 9^\circ-\sin 9^\circ}$

11. Wykaż, że:

a) $\frac{2\sin 14^\circ-\sin 28^\circ}{2\sin 14^\circ+\sin 28^\circ}=\text{tg}^2 7^\circ$

b) $\frac{1}{1+\text{tg}4^\circ\cdot\text{tg}8^\circ}=\cos 8^\circ$

12. Sprawdź, czy dana równość jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

a) $\text{ctg}\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}+\text{ctg}2\alpha$

b) $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}=2$

c) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\text{tg}3\alpha$

d) $\frac{2\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin 4\alpha}{\sqrt{3}}=1-2\cos^2 2\alpha$

13. Rozwiąż równanie:

a) $2\sqrt{3}\sin x=4\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{2}$

b) $4\sin 2x\cos 4x=2\sin 6x+\sqrt{3}$

c) $\cos 2x=\sin 3x+\cos 4x$

d) $\text{tg}3x+\text{tg}x=0$

e) $\text{tg}^2 x-\sqrt{3}\,\text{tg}x=\sqrt{3}-\text{tg}x$

f) $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{2-\sin 2x}{2}$

14. Rozwiąż nierówność:

a) $2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\geqslant 0, x\in\boldsymbol{R}$

b) $\sin x<\sqrt{2}+\cos x, x\in\langle 0,2\pi\rangle$

c) $\cos x\geqslant\sin 2x,\ x\in\langle 0,2\pi\rangle$

d) $\cos 2x-\cos x\geqslant 0, x\in\langle 0,2\pi\rangle$

e) $|\sin x|<|\cos x|,\ x\in\boldsymbol{R}$

f) $|\cos x|\cdot\sin x\leqslant\frac{1}{4}, x\in\langle-\pi,\pi\rangle$

D 15. Wykaż, że nierówność $\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)>0{,}25$ jest sprzeczna.

D 16. Wykaż, że $\cos^4 x-\sin^4 x+\sin 2x\leqslant\sqrt{2}$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

17. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m\in\boldsymbol{R}$, dla których równanie $\sin^4 x+\cos^4 x=3m+\cos^2 2x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.

18. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x)=\sin x\cdot\text{ctg}x-\sqrt{3}\cos x\cdot\text{tg}x$

19. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x$, gdzie $x\in\left\langle-\pi,\frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

20. Wyznacz okres podstawowy funkcji $y=\cos(x+3)\cos(x+1)$.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

8. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka

W tym temacie przypomnimy najważniejsze wiadomości z klasy drugiej, dotyczące wektorów w układzie współrzędnych.

Definicja 1.

Dane są punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$. **Wektorem** $\overrightarrow{AB}$ nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_B - x_A, y_B - y_A]$.

Początkiem wektora $\overrightarrow{AB}$ jest punkt A, zaś końcem wektora – punkt B.

Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego obie współrzędne są równe zero.

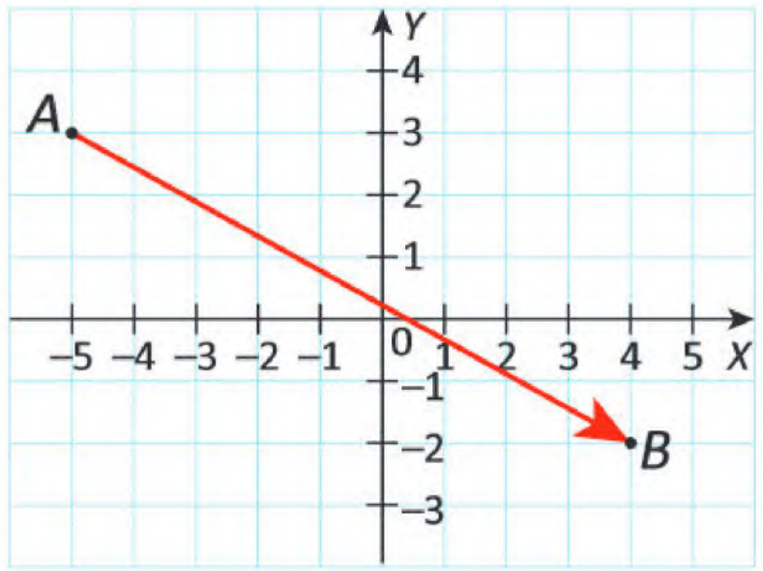
Długość wektora $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$ wyraża się wzorem:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

i jest taka sama, jak długość odcinka AB.

Ćwiczenie 1. Na rysunku obok, dany jest w układzie współrzędnych wektor $\overrightarrow{AB}$.

a) Podaj współrzędne tego wektora.
b) Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$.



Przypomnijmy działania na wektorach w układzie współrzędnych.

Definicja 2.

Niech $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{w} = [w_1, w_2]$ oraz $a \in \boldsymbol{R}$. Wówczas:

a) $\vec{u} + \vec{w} = [u_1 + w_1, u_2 + w_2]$ – **suma wektorów** $\vec{u}$ i $\vec{w}$

b) $\vec{u} - \vec{w} = [u_1 - w_1, u_2 - w_2]$ – **różnica wektorów** $\vec{u}$ i $\vec{w}$

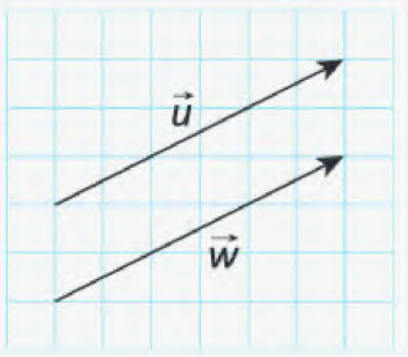
c) $a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$ – **iloczyn wektora** $\vec{u}$ **przez liczbę** a.

Jeśli dla wektorów niezerowych $\vec{u}$ i $\vec{v}$ istnieje liczba rzeczywista a, dla której $\vec{u} = a \cdot \vec{v}$, to wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy **wektorami równoległymi**. O wektorach równoległych mówimy, że **mają ten sam kierunek**. Jeśli dodatkowo $a > 0$, to powiemy, że wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ **mają ten sam zwrot**, jeśli natomiast $a < 0$, to powiemy, że wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ **mają przeciwne zwroty**.

Dwa wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ nazywamy **wektorami równymi** wtedy, gdy ich pierwsze współrzędne są równe i drugie współrzędne są równe.
Wówczas zapisujemy $\vec{u} = \vec{w}$.

Twierdzenie 1.

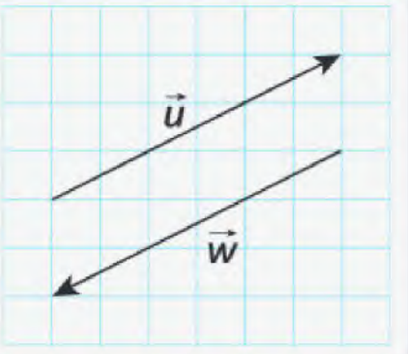
Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy te wektory są równoległe, mają takie same zwroty i mają taką samą długość.



Wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są przeciwne wtedy, gdy ich suma jest wektorem zerowym. Wektor przeciwny do wektora $\vec{u}$ oznaczamy $-\vec{u}$.

Twierdzenie 2.

Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są przeciwne wtedy i tylko wtedy, gdy te wektory są równoległe, mają przeciwne zwroty i mają taką samą długość.



Przykład 1.

Dane są punkty $A(1, 0)$, $B(5, 3)$, $C(-1, -2)$. Wyznaczymy punkt D, tak aby wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ były: a) równe b) przeciwne.

Niech $D(x, y)$. Obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ i wektora $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} = [5-1, 3-0] = [4, 3] \qquad \overrightarrow{CD} = [x-(-1), y-(-2)] = [x+1,\ y+2]$$

Ad a) Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$[4, 3] = [x+1,\ y+2]$, wówczas:

$x + 1 = 4$ oraz $y + 2 = 3$, stąd $D(3, 1)$.

Ad b) Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są przeciwne wtedy i tylko wtedy, gdy

$[4, 3] = [-x-1,\ -y-2]$, wtedy:

$x = -1 - 4$ oraz $y = -2 - 3$, więc $D(-5, -5)$.

Ćwiczenie 2. Wiadomo, że $\vec{u}=[-6,5]$. Oblicz współrzędne punktu:

a) B, jeśli $A(3, 2)$ oraz $\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$ b) A, jeśli $B(-2, 0)$ oraz $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Przykład 2.

Wiemy, że $\vec{u} = [1, -1]$, $\vec{v} = [-2, 3]$, $\vec{w} = [0, 5]$. Wyznaczymy liczby a i b, dla których $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = \vec{w}$.

Obliczamy:

$$a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} = [a \cdot 1, a \cdot (-1)] + [b \cdot (-2), b \cdot 3] = [a - 2b, -a + 3b] = [0, 5]$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ -a + 3b = 5 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} a = 10 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Szukane liczby to: $a = 10$, $b = 5$.

Ćwiczenie 3. Dane są wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdzie $\vec{u}=[-2,1]$, $\vec{v}=[0,-4]$ oraz punkt $A(7, -8)$. Wyznacz punkt B tak, aby $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \vec{u} - \vec{v}$.

Przykład 3.

Dane są punkty: $A(-1, -4)$, $B(3, -1)$, $C(0, 5)$, $D(-3, 0)$. Sprawdzimy, czy są równoległe odcinki: a) AB i CD b) AD i BC.

Ad a) Odcinki AB i CD są równoległe wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równoległe. Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{AB} = [3 + 1, -1 - (-4)] = [4, 3]$ oraz $\overrightarrow{CD} = [-3 - 0, 0 - 5] = [-3, -5]$

Zauważamy, że $-3 = -\frac{3}{4} \cdot 4$ oraz $-5 = -\frac{5}{3} \cdot 3$, $-\frac{3}{4} \neq -\frac{5}{3}$.

Nie istnieje liczba rzeczywista a, dla której $\overrightarrow{AB} = a \cdot \overrightarrow{CD}$.

Odcinki AB i CD nie są równoległe.

Ad b) Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AD}=[-2,4] \qquad \overrightarrow{BC}=[-3,6]$$

Zauważamy, że

$$\overrightarrow{BC}=\left[\frac{3}{2}\cdot(-2),\frac{3}{2}\cdot 4\right]=\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AD}$$

Zatem wektory $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ są równoległe, więc i odcinki AD i BC są równoległe.

Ćwiczenie 4. Zaznacz w układzie współrzędnych czworokąt $ABCD$, którego wierzchołkami są punkty A, B, C, D z przykładu 3. Jaki to czworokąt?

Ćwiczenie 5. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równoległe oraz $\overrightarrow{AB}=[4,a]$ i $\overrightarrow{CD}=[-5+a,6]$.

a) Oblicz a.

b) Dla wyznaczonej liczby a w punkcie a) oblicz $|CD| : |AB|$.

Przykład 4.

Końcami odcinka AB są punkty $A(-4,-1)$ i $B(12,7)$. Wyznaczymy punkt P należący do odcinka AB, wiedząc, że $|AP| : |PB| = 3 : 1$.

Jeśli punkt P należy do odcinka AB, to warunek $|AP| : |PB| = 3 : 1$ jest równoważny równości:

$$\overrightarrow{AP} = 3 \cdot \overrightarrow{PB}$$



Przyjmijmy oznaczenie $P(x, y)$. Wówczas:

$$\overrightarrow{AP}=\left[x-(-4),y-(-1)\right]=[x+4,y+1]$$

$$\overrightarrow{PB}=[12-x,7-y], \quad \text{więc} \quad 3\cdot\overrightarrow{PB}=[36-3x,21-3y]$$

Równość wektorów $\overrightarrow{AP}$ i $3 \cdot \overrightarrow{PB}$ oznacza równość ich odpowiednich współrzędnych, czyli

$$x + 4 = 36 - 3x \quad \text{oraz} \quad y + 1 = 21 - 3y, \quad \text{stąd} \quad x = 8 \ \wedge \ y = 5$$

Punkt P ma współrzędne $(8, 5)$.

Ćwiczenie 6. Wyznacz współrzędne punktu P z przykładu 4., korzystając z zależności: $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}$.

W klasie drugiej udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Środkiem odcinka AB, gdzie $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, jest punkt o współrzędnych

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right).$$

Przykład 5.

Dane są trzy wierzchołki równoległoboku $ABCD$: $A(-3,-1)$, $B(5,1)$, $C(7,9)$. Wyznaczymy punkt S przecięcia się przekątnych AC i BD oraz wierzchołek D.

Przyjmijmy oznaczenia: $S(x_S, y_S)$, $D(x_D, y_D)$. Przekątne równoległoboku przecinają się w punkcie dzielącym je na połowy. Punkt S jest środkiem odcinka AC, stąd

$$x_s = \frac{-3+7}{2} = 2, \quad y_s = \frac{-1+9}{2} = 4, \quad \text{więc} \quad S(2, 4).$$

Punkt S jest również środkiem przekątnej BD. Niech $D(x, y)$. Wówczas:

$$\frac{5+x_D}{2} = 2, \quad \frac{1+y_D}{2} = 4, \quad \text{stąd } x_D = -1, \ y_D = 7, \ \text{więc } D(-1, 7).$$

Punkt S ma współrzędne (2, 4), a punkt D ma współrzędne (–1, 7).

Ćwiczenie 7. Wyznacz punkt P z przykładu 4., korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz liczby m i n, dla których wektory $\vec{u} = [2m+3, n-6]$ oraz $\vec{w} = [m-5, 3-2n]$:
   a) są równe b) są przeciwne c) spełniają warunek $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u}$.
2. Dane są wektory: $\vec{u} = [-2, 1]$, $\vec{w} = [6, -2]$ oraz punkt $B(7, 1)$. Oblicz współrzędne punktu A, wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = 0{,}5 \cdot \vec{w} - 3 \cdot \vec{u}$.
3. Wyznacz liczbę a, dla której wektory $\vec{u} = [-3a, -8]$ i $\vec{v} = [a-1, -2a]$ są równoległe. Podaj współrzędne tych wektorów.
4. Odcinek AB podzielono na trzy odcinki równej długości. Wiedząc, że $A(-5, 5)$, $B(10, -7)$, oblicz współrzędne punktów podziału.
5. Punkt $P(2, 0)$ należy do odcinka AB. Wiedząc, że $|AP| : |PB| = 3 : 2$ oraz $B(8, -4)$, oblicz współrzędne punktu A.
6. Punkt $S(-3, -1)$ jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Wiedząc, że $A(-8, 1)$, $B(1, -7)$, wyznacz punkty C i D.
7. W trójkącie ABC punkty P i S są odpowiednio środkami boków AC i BC. Wiedząc, że $C(-3, 5)$, $P(-2, 1)$ oraz $\overrightarrow{PS} = [4, 2]$, oblicz współrzędne punktów A i B.
8. Punkty $A(-7, 1)$, $B(-1, -5)$, $C(8, 4)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wyznacz:
   a) długość środkowej CD
   b) współrzędne punktu S przecięcia się środkowych trójkąta.

Kąt między niezerowymi wektorami

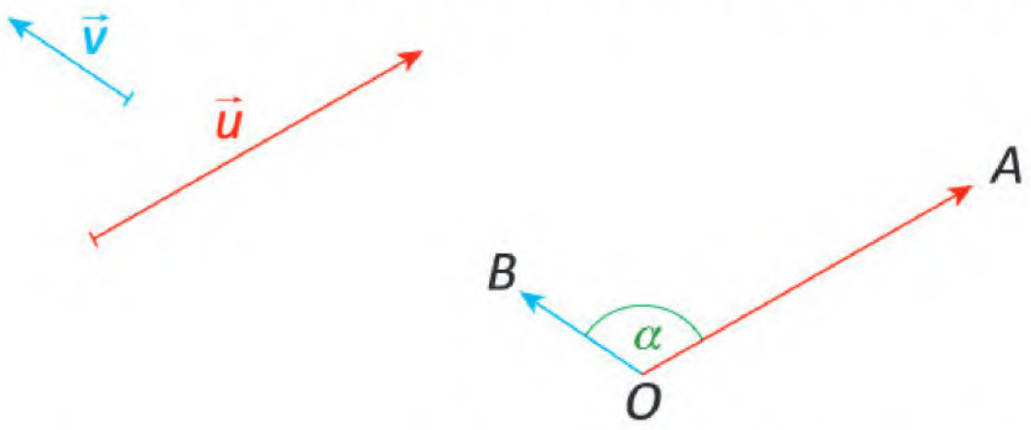
Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ o wspólnym początku wyznaczają na płaszczyźnie dwa kąty uzupełniające się do kąta pełnego. Jeden z tych kątów będziemy nazywać kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Definicja 1.

Niech dane będą niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Kątem utworzonym przez dwa wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy kąt wypukły AOB, gdzie $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ i $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Kąt ten oznaczamy symbolem $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$.

Kąt utworzony przez dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ przedstawia poniższy rysunek.



$\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}$

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}), \alpha = |\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})|$

Dwa niezerowe równoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mające zgodne zwroty tworzą kąt o mierze $0°$.

Dwa niezerowe równoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ mające zwroty przeciwne tworzą kąt o mierze $180°$.

Twierdzenie 1.

Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdzie $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ tworzą taki kąt α, że:

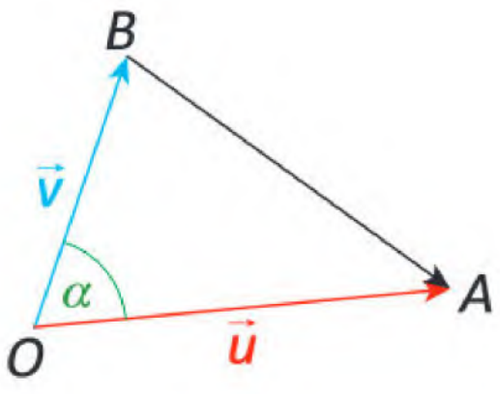
$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \quad \text{oraz} \quad \sin\alpha = \frac{|u_1v_2 - u_2v_1|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Dowód:

Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą niezerowymi wektorami oraz $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$, $|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})| = \alpha$

I. Rozważmy przypadek, w którym wektory wyznaczają trójkąt,
czyli $\alpha \in (0°, 180°)$.

Mamy:



$\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v},$

$\alpha = |\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})|$

$\overrightarrow{BA} = \vec{u} - \vec{v}$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *ABO* wynika, że

$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \cos\alpha$, stąd

$$\cos\alpha = \frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2 \cdot |OA| \cdot |OB|}, \quad \text{gdzie}$$

$$|OA| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad |OB| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \qquad |AB| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

Zatem

$$\cos\alpha = \frac{\left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2}{2 \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Po uporządkowaniu licznika ułamka otrzymujemy:

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot (u_1 v_1 + u_2 v_2)}{2 \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \qquad \text{stąd} \qquad \cos\alpha = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Teraz obliczamy $\sin\alpha$.

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\right)^2 \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{u_1^2 v_1^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2 + u_2^2 v_2^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{(u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2) - (u_1^2 v_1^2 + 2u_1 u_2 v_1 v_2 + u_2^2 v_2^2)}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{u_1^2 v_2^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2 + u_2^2 v_1^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}, \quad \text{czyli} \quad \sin^2\alpha = \frac{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}$$

Z założenia $\alpha \in (0°, 180°)$, więc $\sin\alpha > 0$. Mamy:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)}} \qquad \text{stąd} \qquad \sin\alpha = \frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

II. Należy jeszcze rozważyć przypadek, gdy wektory są równoległe, czyli $\alpha = 0°$ lub $\alpha = 180°$. Wówczas dla pewnej liczby rzeczywistej *k* mamy:

$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$

$[u_1, u_1] = k \cdot [v_1, v_2]$ czyli $u_1 = k \cdot v_1 \ \wedge \ u_2 = k \cdot v_2$.

Obliczamy:

- $\sin\alpha = \dfrac{\left|u_1v_2 - u_2v_1\right|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \dfrac{\left|kv_1v_2 - kv_2v_1\right|}{\sqrt{(kv_1)^2+(kv_2)^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$

Z drugiej strony wiemy, że jeśli $\alpha = 0^\circ$ lub $\alpha = 180^\circ$, to $\sin\alpha = 0$.

- $\cos\alpha = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \dfrac{kv_1^2 + kv_2^2}{|k|\cdot\left(v_1^2+v_2^2\right)} = \dfrac{k\cdot\left(v_1^2+v_2^2\right)}{\left|k\cdot\left(v_1^2+v_2^2\right)\right|} = \dfrac{k}{|k|}$

Jeśli $\alpha = 0^\circ$, to $k > 0$; wówczas $\cos\alpha = \dfrac{k}{k} = 1$. Z drugiej strony $\cos 0^\circ = 1$.

Jeśli $\alpha = 180^\circ$, to $k < 0$; wtedy $\cos\alpha = \dfrac{k}{-k} = -1$. Z drugiej strony $\cos 180^\circ = -1$.

Zatem wzory są prawdziwe dla każdego kąta wypukłego, utworzonego przez niezerowe wektory u i $\vec{v}$, co kończy dowód.

Przykład 1.

Obliczymy miary kątów trójkąta ABC, wiedząc, że $A\left(\dfrac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{6}}{2}\right)$, $B(0, 0)$, $C\left(\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-3\sqrt{6}}{2}\right)$.

Najpierw obliczymy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \left[0 - \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}, 0 - \left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)\right] = \left[\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{AC} = \left[\frac{-3\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{6}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right] = \left[-\sqrt{6}, -\sqrt{6}\right]$$

Przyjmijmy oznaczenie $\left|\sphericalangle BAC\right| = \alpha$. Z twierdzenia 1. otrzymujemy:

$$\cos\alpha = \frac{\left(-\sqrt{6}\right)\cdot\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2} + \left(-\sqrt{6}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{3}\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)} = \frac{-3\sqrt{3}+3}{2\cdot\left(3\sqrt{3}-3\right)} = \frac{-1}{2}$$

i $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$, więc $\alpha = 120^\circ$

Podobnie wyznaczamy wektory $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ oraz $\cos\beta$, gdzie $\beta = \left|\sphericalangle CBA\right|$.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \left[\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \qquad \overrightarrow{BC} = \left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right]$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{-3\sqrt{2}}{2}+\frac{-\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{-3\sqrt{6}}{2}}{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{3}+9}{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot 3\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{3\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{i} \qquad \beta\in(0^\circ, 180^\circ), \quad \text{więc} \quad \beta = 45^\circ$$

Obliczamy miarę trzeciego kąta trójkąta *ABC*: $180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$

Miary kątów trójkąta *ABC* są równe: 120°, 45° i 15°.

Ćwiczenie 1. Dane są punkty $A\left(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}-2\right)$, $B(3, 1)$, $C(7, -3)$. Wykaż, że sinus kąta *ABC* jest równy $\frac{1}{2}$. Czy kąt *ABC* ma miarę 30°? Odpowiedź uzasadnij.

Definicja 2.

Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy **wektorami prostopadłymi** wtedy, gdy kąt między tymi wektorami jest prosty. Wówczas zapisujemy $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Twierdzenie 2.

Jeśli $\vec{u}=[u_1, u_2]$ i $\vec{v}=[v_1, v_2]$ są niezerowymi wektorami, to:

a) $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow u_1v_1+u_2v_2=0$ b) $\vec{u}\parallel\vec{v} \Leftrightarrow u_1v_2-u_2v_1=0$

Dowód punktu a): Niech $\vec{u}\perp\vec{v}$. Wówczas $|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})| = 90^\circ$, więc

$$\cos\left(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right) = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{u_1v_1+u_2v_2}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=0, \quad \text{stąd} \quad u_1v_1 + u_2v_2 = 0.$$

I odwrotnie: Jeśli współrzędne niezerowych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ spełniają warunek

$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$,

to znaczy, że cosinus kąta między tymi wektorami jest równy 0, czyli wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe.

Punkt b) twierdzenia 2. dowodzimy podobnie, rozpatrując sinus kąta miedzy wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

UWAGA: Zauważmy, że:

1) warunek $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$ będzie spełniony również wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będzie wektorem zerowym. Można więc rozszerzyć określenie prostopadłości wektorów na przypadek wektora zerowego. Przyjmujemy, że wektor zerowy jest prostopadły do dowolnego wektora.

2) warunek $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$ będzie spełniony również wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będzie wektorem zerowym. Można więc rozszerzyć określenie równoległości wektorów na przypadek wektora zerowego. Przyjmujemy, że wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora.

Ćwiczenie 2. Dane są punkty $A(-8, -3)$, $B(5, -2)$, $C(2, 3)$. Wykaż, korzystając z twierdzenia 2a), że trójkąt ABC jest prostokątny. Jaki znasz inny sposób rozwiązania tego zadania?

Przykład 2.

Dane są punkty $A(-2, 4)$, $B(5, 5)$. Wyznaczymy na prostej k: $x - 2y = 0$ punkt P tak, aby kąt BPA był prosty.

Punkt P należy do prostej k: $x = 2y$. Możemy przyjąć, że $P(2a, a)$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$. Wyznaczamy współrzędne wektorów $\vec{PA}$ i $\vec{PB}$ i korzystamy z twierdzenia 2a).

$$\vec{PA} = [-2-2a, 4-a] \qquad \vec{PB} = [5-2a, 5-a]$$

$$\vec{PA} \perp \vec{PB} \Leftrightarrow \left[(-2-2a)(5-2a)+(4-a)(5-a)=0\right]$$

Po uporządkowaniu otrzymanego równania z niewiadomą a i podzieleniu jego stron przez 5 mamy: $a^2 - 3a + 2 = 0$, $\Delta = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

Dwa punkty spełniają warunki zadania: $P_1(2, 1)$ oraz $P_2(4, 2)$.

Ćwiczenie 3. Naszkicuj w układzie współrzędnych prostą k z przykładu 2. Zaznacz punkty A, B, P_1, P_2 oraz kąty proste BP_1A i BP_2A.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz:
   a) cosinusy kątów wewnętrznych trójkąta ABC, jeśli $A(1, -1)$, $B(6, 4)$, $C(-5, 2)$,
   b) sinusy kątów wewnętrznych trójkąta ABC, jeśli $A(-3, 4)$, $B(0, -2)$, $C(8, 4)$.

D 2. Wykaż, że jeśli:
   a) $A(2, 1)$, $B(8, 4)$, $C(4, 7)$, to najmniejszy kąt w trójkącie ABC ma miarę $45°$,
   b) $A(-6, 1)$, $B(1, -1)$, $C(3, 1)$, to największy kąt w trójkącie ABC ma miarę $135°$.

3. Wyznacz liczbę a, dla której wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, gdzie $\vec{u} = [2a-1, 4]$ i $\vec{v} = [2a+1, -6]$ są:
   a) równoległe
   b) prostopadłe.

D 4. Wykaż, że punkty $A(-5, 2)$, $B(3, 6)$, $C(13, 11)$ są współliniowe.

5. Dane są punkty $A(1, 6)$, $B(5, -1)$. Wyznacz na prostej k: $y = -2x$ punkt P tak, aby kąt BPA był prosty.

Proste w układzie współrzędnych

W tym temacie przypomnimy wiadomości dotyczące prostych w układzie współrzędnych, opisane równaniem kierunkowym lub równaniem ogólnym.

Równanie kierunkowe prostej

Definicja 1.

Równaniem kierunkowym prostej nazywamy równanie, mające postać $y = ax + b$. Współczynnik a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, współczynnik b – wyrazem wolnym.

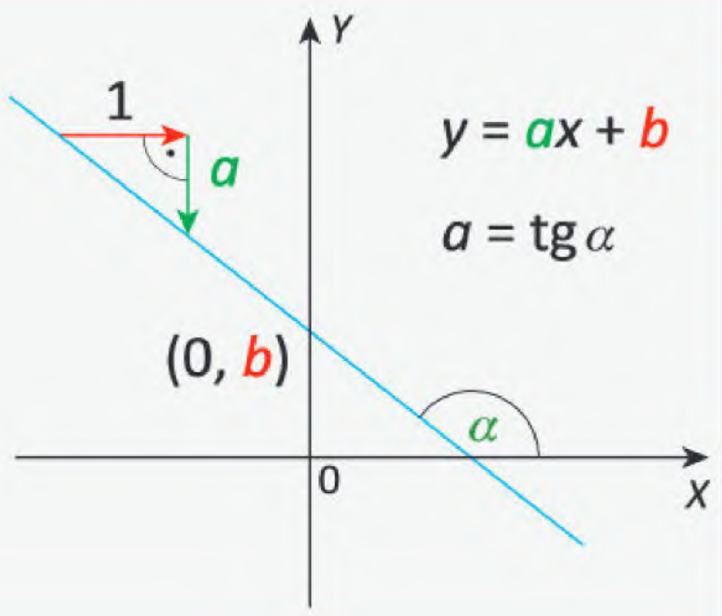
Równaniem kierunkowym można opisać tylko te proste, które nie są prostopadłe do osi *OX*.

Twierdzenie 1.

Prosta opisana równaniem kierunkowym $y = ax + b$

jest nachylona do osi *OX* pod takim kątem α,

$\alpha \in \langle 0°, 90°) \cup (90°, 180°)$, że $\operatorname{tg}\alpha = a$.



Przykład 1.

Wyznaczymy miarę kąta nachylenia do osi *OX* prostej, opisanej równaniem kierunkowym: a) $y = \sqrt{3}x + 1$ b) $y = 2 - x$ c) $y = 7$.

Niech α oznacza kąt nachylenia prostej do osi *OX*.

Ad a) Współczynnik kierunkowy jest równy $\sqrt{3}$. Zatem

$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\alpha \in \langle 0°, 90°)$, $\alpha = 60°$

Ad b) Współczynnik kierunkowy jest równy –1. Mamy:

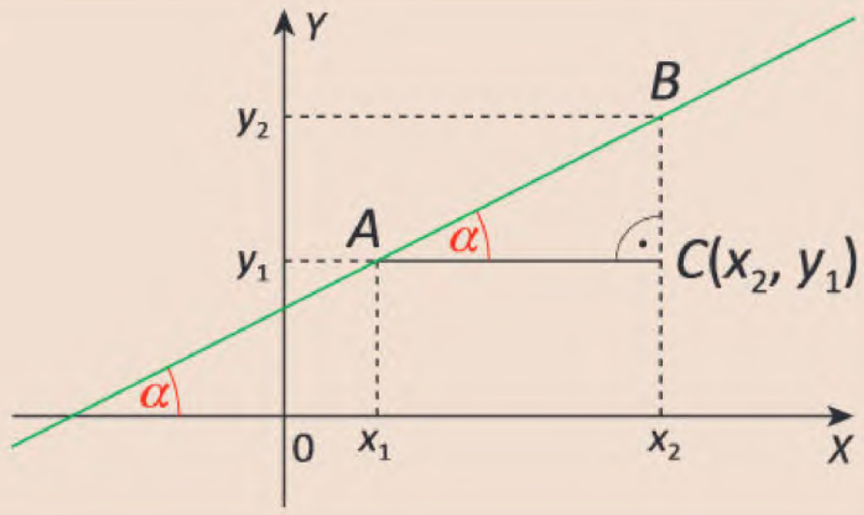
$\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha \in (90°, 180°)$, $\alpha = 135°$

Ad c) Współczynnik kierunkowy jest równy 0. Prosta jest równoległa do osi *OX*.

$\operatorname{tg}\alpha = 0$, $\alpha = 0°$

Ćwiczenie 1. Napisz równanie kierunkowe prostej, nachylonej do osi *OX* pod kątem 30° i przecinającej oś *OY* w punkcie o rzędnej 5.

Jeśli do prostej należą dwa punkty o współrzędnych (x_1, y_1), (x_2, y_2), gdzie $x_1 \neq x_2$, to współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



Ćwiczenie 2. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej, przechodzącej przez punkty $A(6, 7)$ i $B(2, -1)$.

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty o współrzędnych (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2), gdzie $x_1 \neq x_2$, można zapisać w postaci: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Jeśli do prostej należą dwa punkty o równych odciętych ($x_1 = x_2$), to ta prosta jest prostopadła do osi *OX*i nie można jej opisać równaniem kierunkowym.

Ćwiczenie 3. Napisz równanie kierunkowe prostej, do której należą punkty $A(-1, 5)$ i $B(1, -3)$.

Twierdzenie 2.

Proste o równaniach $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = a_1$.

Przykład 2.

Dane są punkty $A(-3, 2)$, $B(-1, -3)$, $C(5, -7)$, $D(1, 3)$. Pokażemy, że proste *AB* i *CD* są równoległe.

Niech a_1 oznacza współczynnik kierunkowy równania kierunkowego prostej *AB*, a_2 – współczynnik kierunkowy równania kierunkowego prostej *CD*. Wówczas

$$a_1 = \frac{-3-2}{-1+3} = -2{,}5 \qquad a_2 = \frac{3+7}{1-5} = -2{,}5 \qquad \text{zatem} \qquad a_1 = a_2$$

a to znaczy, że proste *AB* i *CD* są równoległe.

Ćwiczenie 4. Wyznacz równanie prostej *k*, równoległej do prostej *l*: $y = 2x - 3$ i przechodzącej przez punkt $P(-5, -1)$.

Twierdzenie 3.

Proste o równaniach $y = ax + b$ oraz $y = a_1x + b_1$, gdzie $a \neq 0$ i $a_1 \neq 0$, są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot a_1 = -1$.

Przykład 3.

Wyznaczymy równanie symetralnej odcinka AB, wiedząc, że $A(-4, 3)$, $B(2, 5)$.

Zauważamy, że $x_1 \neq x_2$. Szukamy równania kierunkowego prostej, prostopadłej do odcinka AB i przechodzącej przez jego środek.

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB:

$$a_{AB} = \frac{5-3}{2+4} = \frac{1}{3}$$

Symetralna odcinka AB ma równanie $y = ax + b$, gdzie

$$a \cdot \frac{1}{3} = -1, \quad \text{stąd} \quad a = -3$$

Równanie symetralnej przyjmuje postać: $y = -3x + b$.

Obliczamy współrzędne punktu S, będącego środkiem odcinka AB:

$$x_S = \frac{-4+2}{2} = -1 \qquad y_S = \frac{3+5}{2} = 4 \qquad S(-1, 4)$$

Punkt $S(-1, 4)$ należy do symetralnej odcinka AB, więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

$4 = -3 \cdot (-1) + b$ czyli $b = 1$

Symetralna odcinka AB ma równanie $y = -3x + 1$.

Ćwiczenie 5. Napisz równanie prostej, prostopadłej do prostej k: $y = -2x + 1$ i przechodzącej przez punkt $P(4, -5)$.

Równanie ogólne prostej

Definicja 2.

Równaniem ogólnym prostej nazywamy równanie mające postać $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$.

Każdą prostą w układzie współrzędnych można opisać równaniem ogólnym. Tę samą prostą może opisywać wiele równań w postaci ogólnej. Na przykład następujące równania są równoważne:

$x - y + 2 = 0$ $\qquad -2x + 2y - 4 = 0$ $\qquad 0{,}3x - 0{,}3y + 0{,}6 = 0$

Jeśli $B = 0$, to $A \neq 0$ i równanie $Ax + C = 0$ opisuje prostą prostopadłą do osi OX, do której należą wszystkie punkty o odciętej $\frac{-C}{A}$.

Jeśli $B \neq 0$, to równanie ogólne prostej $Ax + By + C = 0$ można przedstawić w postaci kierunkowej $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Przykład 4.

Wyznaczymy równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty:

a) (3, 10), (–1, 4), b) (–3, 5), (–3, –2)

Ad a) Skorzystamy z równania ogólnego prostej:

$Ax + By + C = 0$

Po wstawieniu odpowiednio współrzędnych punktów w miejsce x, y otrzymujemy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} 3A + 10B + C = 0 \\ -A + 4B + C = 0 \end{cases}$$

Jeśli od pierwszego równania odejmiemy drugie, to otrzymamy:

$4A + 6B = 0$ stąd $A = -1{,}5B$

Liczby A i B nie mogą być jednocześnie równe 0, więc z ostatniej równości wynika, że $A \neq 0$ i $B \neq 0$. Do drugiego równania układu w miejsce A podstawiamy $-1{,}5B$:

$1{,}5B + 4B + C = 0$, stąd $C = -5{,}5B$

Teraz równanie $Ax + By + C = 0$ możemy zapisać następująco:

$-1{,}5Bx + By - 5{,}5B = 0$

Po podzieleniu obu stron równania przez B i pomnożeniu przez 2 szukane równanie przyjmuje postać:

$-3x + 2y - 11 = 0$

Ad b) Prosta wyznaczona przez punkty (–3, 5), (–3, –2) jest zbiorem punktów, których pierwsza współrzędna jest równa –3. Zatem tę prostą możemy opisać równaniem $x = -3$, skąd mamy równanie ogólne: $x + 3 = 0$.

Ćwiczenie 6. Wyznacz równanie prostej z punktu a) ostatniego przykładu dwoma innymi sposobami:

I. Na podstawie równania $y = ax + b$ ułóż odpowiedni układ równań z niewiadomymi a i b.

II. Skorzystaj z równania prostej przechodzącej przez dwa punkty.

Twierdzenie 4.

Jeśli $A^2 + B^2 \neq 0$ oraz $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$, to proste opisane równaniami $Ax + By + C = 0$ i $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $AB_1 - A_1B = 0$.

Ćwiczenie 7. Sprawdź, czy proste k: $-3x + 6y + 5 = 0$ i l: $\sqrt{3}x - \sqrt{12}y + 1 = 0$ są równoległe.

Dowolną prostą równoległą do prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, można opisać równaniem $Ax + By + C_1 = 0$.

Przykład 5.

Wyznaczymy równanie ogólne prostej l, która jest równoległa do prostej k: $5x - 3y + 4 = 0$ i przechodzi przez punkt $P(-4, -1)$.

Z powyższego wniosku wynika, że prostą l można opisać równaniem:

$$5x - 3y + C = 0$$

Wstawiamy w miejsce x i y współrzędne punktu P:

$$5\cdot(-4) - 3\cdot(-1) + C = 0, \qquad \text{stąd} \qquad C = 17$$

Prostą l można opisać równaniem ogólnym: $5x - 3y + 17 = 0$.

Twierdzenie 5.

Jeśli $A^2 + B^2 \neq 0$ oraz $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$, to proste opisane równaniami $Ax + By + C = 0$ i $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $AA_1 + BB_1 = 0$.

Ćwiczenie 8. Wykaż, że proste k: $\left(\sqrt{5} - 1\right)x + y - 3 = 0$ i l: $\left(\sqrt{5} + 1\right)x - 4y + 2 = 0$ są prostopadłe.

Dowolną prostą równoległą do prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, można opisać równaniem $-Bx + Ay + C_1 = 0$.

Przykład 6.

Punkty $A(-6, -1)$, $B(3, 2)$, $C(-2, 7)$ są wierzchołkami trójkąta. Wyznaczymy:

a) równanie ogólne prostej AB
b) równanie ogólne prostej zawierającej wysokość CD
c) długość wysokości CD.

Ad a) Korzystamy z równania prostej przechodzącej przez dwa punkty.

$$y + 1 = \frac{2+1}{3+6}(x+6)$$

stąd otrzymujemy równanie ogólne prostej AB:

$$x - 3y + 3 = 0$$

Ad b) Prosta CD jest prostopadła do prostej AB i przechodzi przez punkt $C(-2, 7)$. Równanie prostej CD można zapisać w postaci:

$$3x + y + m = 0$$

Liczbę m obliczymy, wstawiając w miejsce x i y współrzędne punktu C:

$3\cdot(-2) + 7 + m = 0$ więc $m = -1$

Prostą CD można opisać równaniem ogólnym $3x + y - 1 = 0$

Ad c) Punkt D jest punktem wspólnym prostej AB i prostej CD. Wyznaczamy współrzędne tego punktu, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} x-3y+3=0 \\ 3x+y-1=0 \,/\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+3=0 \\ 9x+3y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{więc} \quad D(0,1)$$

Teraz wyznaczamy długość odcinka CD.

$$|CD| = \sqrt{(0+2)^2+(1-7)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Wysokość CD ma długość $2\sqrt{10}$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, że czworokąt $ABCD$, gdzie:
   a) $A(-1, -6)$, $B(7, 0)$, $C(4, 4)$, $D(-4, -2)$, jest prostokątem,
   b) $A(-3, 3)$, $B(-1, -3)$, $C(5, -1)$, $D(3, 5)$, jest kwadratem.

D 2. Wykaż, że czworokąt $ABCD$, gdzie:
   a) $A(-6, -2)$, $B(4, 2)$, $C(2, 7)$, $D(-3, 5)$, jest trapezem prostokątnym,
   b) $A(-1,-3)$,$B(4, -3)$, $C(0,5)$, $D(-3, 1)$, jest trapezem równoramiennym.

3. Wyznacz współrzędne wierzchołków równoległoboku $ABCD$, wiedząc, że bok AB zawiera się w prostej k: $y = \frac{2}{7}x - 1\frac{1}{7}$, bok AD zawiera się w prostej l: $y = 4x + 10$, zaś $S(1, 1)$ jest punktem przecięcia się przekątnych AC i BD.

4. Dane są wierzchołki trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne punktu wspólnego symetralnych boków tego trójkąta.
   a) $A(-4, -4)$, $B(2, 0)$, $C(-6, 4)$
   b) $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(4, 10)$

5. Dane są wierzchołki trójkąta ABC. Wyznacz współrzędne ortocentrum tego trójkąta.
   a) $A(0, -1)$, $B(6, 5)$, $C(-2, 5)$
   b) $A(-7, -2)$, $B(4, 0)$, $C(5,6)$

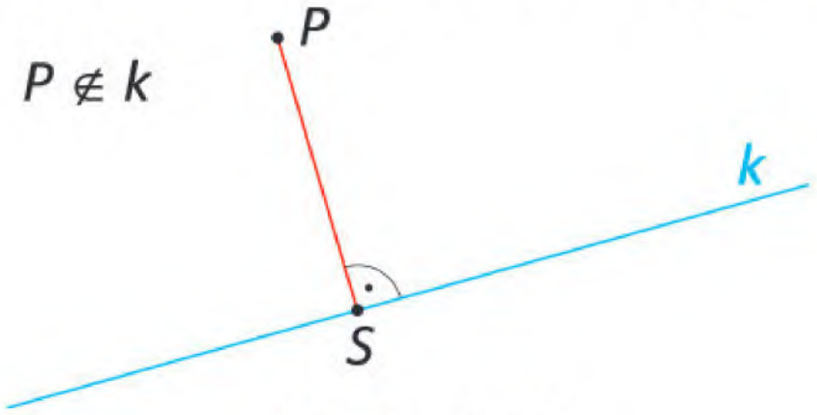
6. Punkty D, E, F są spodkami wysokości, poprowadzonymi odpowiednio na boki AB, BC i AC. Wiedząc, że $A(-6, -1)$, $B(4, -1)$, $C(1, 6)$, oblicz współrzędne punktów D, E, F.

7. W trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, dane są: $A(-2, -3)$, $C(-3, 5)$. Wiedząc, że bok AB zawiera się w prostej k: $2x - 3y - 5 = 0$, oblicz współrzędne punktu B.

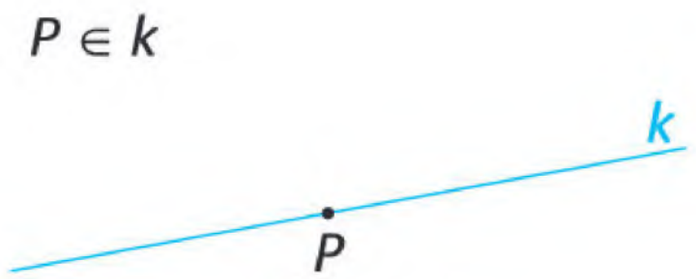
8. Punkty P i Q są odpowiednio środkami boków AC i BC trójkąta ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta, wiedząc, że $C(-4, 7)$, bok AC zawiera się w prostej k: $x + 4 = 0$, a odcinek PQ zawiera się w prostej l: $x - 2y + 8 = 0$.

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi

Odległością punktu P od prostej k, gdzie $P \in k$, nazywamy długość odcinka prostopadłego do prostej k, którego jednym końcem jest punkt P, a drugim punkt S należący do prostej k. Jeśli $P \in k$, to odległość punktu P od prostej k jest równa zero. Odległość punktu P od prostej k będziemy oznaczać $d(P, k)$.



$d(P, k) = |PS|$



$d(P, k) = 0$

Ćwiczenie 1. Dany jest punkt $P(1, -4)$ i prosta k: $x + 2y - 8 = 0$. Sprawdź, że punkt P nie należy do prostej k. Następnie oblicz odległość punktu P od prostej k w następujący sposób:

- Wyznacz równanie ogólne prostej l, prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt P.
- Oblicz współrzędne punktu S przecięcia prostej l z prostą k. Wówczas $d(P, k) = |PS|$.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak w ćwiczeniu 1., można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej k opisanej równaniem $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, wyraża się wzorem:

$$d(P,k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Przykład 1.

Obliczymy odległość punktu $P(5, -2)$ od prostych k i l, gdzie:

a) k: $-x + 3y + 11 = 0$ b) l: $3x - 4y + 1 = 0$

W obliczeniach skorzystamy z twierdzenia 1.

Ad a) $A = -1$, $B = 3$, $C = 11$, $P(5, -2)$, zatem

$$d(P,k) = \frac{|-1 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) + 11|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{0}{\sqrt{10}} = 0$$

Odległość punktu P od prostej k jest równa 0; punkt P należy do prostej k.

Ad b) $A = 3,\ B = -4,\ C = 1$

$$d(P,l)=\frac{|3\cdot 5-4\cdot(-2)+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|24|}{\sqrt{9+16}}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$$

Odległość punktu P od prostej l jest równa $4\frac{4}{5}$.

Przykład 2.

Wyznaczymy równanie ogólne prostej k, która jest równoległa do prostej l: $x - 2y + 3 = 0$, a jej odległość od punktu $P(-1, 4)$ jest równa $\sqrt{20}$.

Proste k i l są równoległe, więc prostą k można opisać równaniem

$$x - 2y + C = 0$$

Wiemy, że $d(P, k) = \sqrt{20}$. Na mocy twierdzenia 1. otrzymujemy:

$$\frac{|1\cdot(-1)-2\cdot 4+C|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{20} \quad \text{stąd}$$

$$|C-9|=\sqrt{5\cdot 20}$$

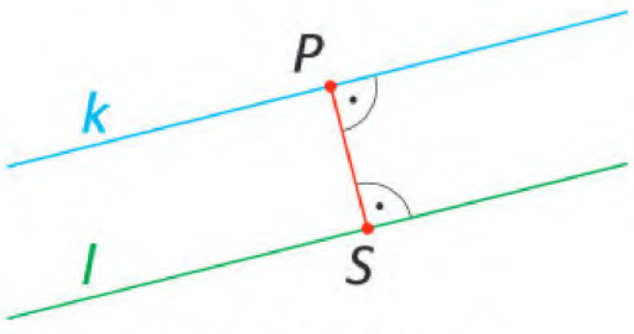
$$|C-9|=10 \Leftrightarrow (C=-1 \vee C=19)$$

Dwie proste spełniają warunki zadania. Równania tych prostych są następujące:
k_1: $x - 2y - 1 = 0$ oraz k_2: $x - 2y + 19 = 0$.

Teraz nauczysz się obliczać odległość między dwiema prostymi równoległymi położonymi w układzie współrzędnych.

Odległość między dwiema prostymi równoległymi jest równa długości odcinka prostopadłego do tych prostych, którego jeden koniec należy do jednej prostej, a drugi – do drugiej prostej. Jeśli dwie proste się pokrywają, to odległość między nimi jest równa zero.

Odległość między prostymi równoległymi k i l będziemy oznaczać $d(k, l)$.



$d(k, l) = |PS|$



$d(k, l) = 0$

Ćwiczenie 2. Naszkicuj w układzie współrzędnych proste k i l, gdzie k: $x = -3$, l: $x = 5$. Jaka jest odległość między tymi prostymi?

Ćwiczenie 3. Naszkicuj w układzie współrzędnych prostą l: $y = x - 4$. Oblicz odległość tej prostej od punktu $O(0, 0)$. Następnie poprowadź prostą k: $y = x$. Jaka jest odległość między prostymi k i l?

Twierdzenie 2.

Odległość między dwiema prostymi równoległymi k i l, które są dane równaniami ogólnymi k: $Ax + By + C = 0$ i l: $Ax + By + C_1 = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$, wyraża się wzorem:

$$d(k,l) = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dowód: Proste równoległe k i l mają równania:

$Ax + By + C = 0$ oraz

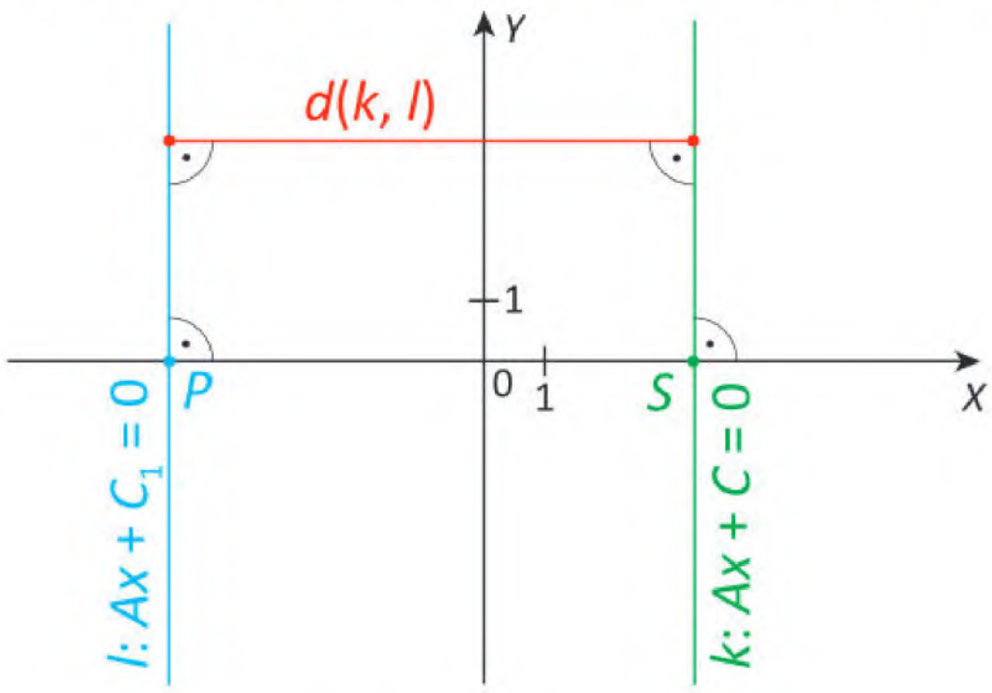
$Ax + By + C_1 = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$.

- Jeśli $C = C_1$, to proste się pokrywają i odległość między nimi jest równa zero. Wówczas prawdziwa jest równość

$$d(k,l) = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

- Załóżmy, że $C \neq C_1$. Rozpatrzymy dwa przypadki.

I. Proste k i l są prostopadłe do osi OX. Wówczas $A \neq 0$, $B = 0$.



Proste k i l przecinają oś OX odpowiednio w punktach:

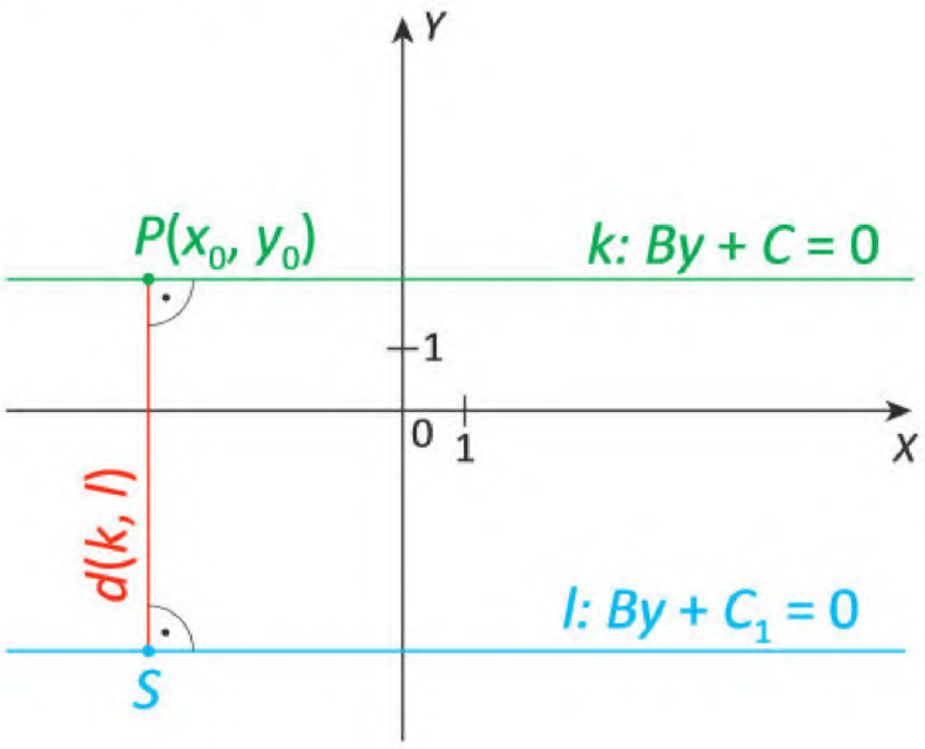
$$P\left(-\frac{C_1}{A}, 0\right) \quad \text{oraz} \quad S\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$$

Zatem

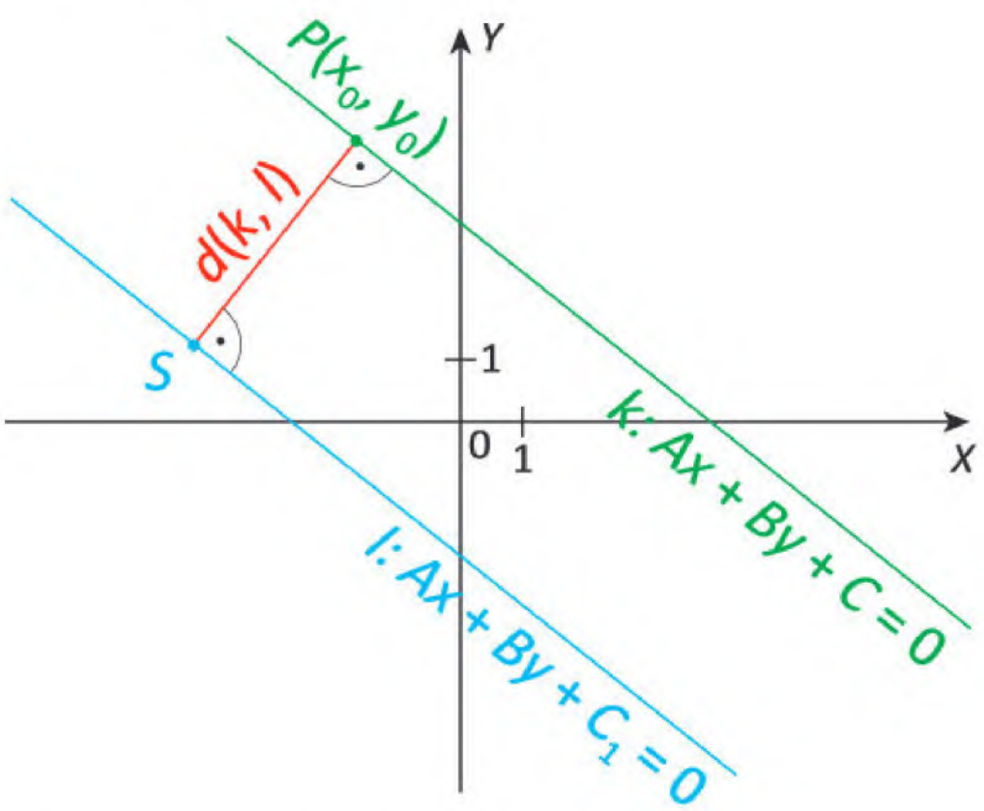
$$d(k,l) = |SP| = \left|-\frac{C}{A} - \left(-\frac{C_1}{A}\right)\right| = \left|\frac{C_1 - C}{A}\right| = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + 0^2}} = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

II. Proste k i l można opisać równaniami kierunkowymi. Możliwe są następujące sytuacje:

a) $A = 0,\ B \neq 0$



b) $A \neq 0,\ B \neq 0$



Niech $P(x_0, y_0)$, $P \in k$. Wówczas $d(k, l) = d(P, l)$. Wiemy, że

$$d(P,l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Współrzędne punktu P spełniają równanie prostej k:

$Ax_0 + By_0 + C = 0$, gdzie $B \neq 0$ stąd

$$y_0 = -\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}.$$

Zatem

$$d(P,l) = \frac{\left|Ax_0 + B\cdot\left(-\frac{A}{B}x_0 - \frac{C}{B}\right) + C_1\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 - Ax_0 - C + C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

W każdym przypadku pokazaliśmy, że odległość między prostymi k oraz l jest równa

$$\frac{|C_1 - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

co kończy dowód.

Przykład 3.

Podstawy trapezu zawierają się w prostych k i l o równaniach k: $-5x + 12y - 3 = 0$ oraz l: $-5x + 12y + 10 = 0$. Obliczymy wysokość tego trapezu.

Wysokość h trapezu jest równa odległości między podstawami trapezu. Zatem:

$$h = d(k,l) = \frac{|-3 - 10|}{\sqrt{(-5)^2 + 12^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{169}} = 1$$

Wysokość trapezu jest równa 1.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Oblicz odległość punktu P od prostej k, jeśli:
   a) $P(1, 3)$, $k: 8x - 15y + 3 = 0$
   b) $P(-2, 4)$, $k: y = 3x$
   c) $P(-7, 1)$, $k: 2x - 4 = 0$
   d) $P(-3, -1)$ $k: 3x + 7y = 1$

2. Wyznacz równanie prostej k, prostopadłej do prostej l: $3x + y - 2 = 0$ i leżącej w odległości $\sqrt{10}$ od punktu $P(-1, 2)$.

3. Wyznacz równanie prostej k, prostopadłej do prostej l: $-x + 2y + 1 = 0$ i leżącej w odległości $\frac{6}{\sqrt{5}}$ od punktu $P(4, 5)$.

4. Wyznacz równanie prostej k, równoległej do prostej l: $3x - 4y + 1 = 0$ i leżącej w odległości 3 od punktu $P(-5, 6)$. Jaka jest odległość między prostymi k i l?

5. Wyznacz równanie prostej k, równoległej do prostej l: $-2x + 5y + 5 = 0$ i leżącej w odległości $\frac{7}{\sqrt{29}}$ od punktu $P(-3, 2)$. Jaka jest odległość między prostymi k i l?

6. Oblicz wysokości równoległoboku, którego boki zawierają się w prostych $k: -3x + 4y + 1 = 0$, $l: 3x - 4y + 7 = 0$, $m: 2x + y - 6 = 0$, $p: 2x + y + 4 = 0$.

7. Oblicz wysokość trapezu, którego podstawy zawierają się w prostych $k: -3x - 4y + 6 = 0$, $l: 0{,}6x + 0{,}8y + 1 = 0$.

8. Boki trójkąta ABC zawierają się w prostych $k: x + 2 = 0$, $l: 2x - 7y - 10 = 0$, $m: 3x + 5y - 15 = 0$. Oblicz wszystkie wysokości tego trójkąta.

9. Dane są punkty $A(-3, 1)$, $B(3, -1)$, $C(7, 3)$. Oblicz wysokości trójkąta ABC.

10. Dane są punkty $A(-7, -2)$, $B(-3, -3)$, $C(3, 1)$, $D(-4, 0)$ będące wierzchołkami trapezu $ABCD$. Oblicz wysokość tego trapezu.

11. Czworokat $ABCD$ jest rombem. Wiedząc, że prosta AC: $-x + 2y - 1 = 0$, prosta AD: $-4x + 3y - 14 = 0$, prosta CD: $y = 2$, oblicz długość przekątnej BD.

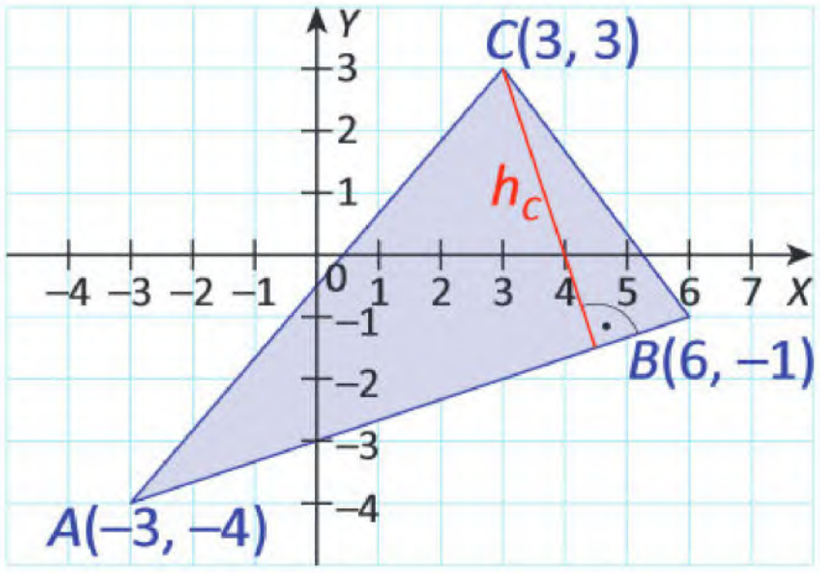
12. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt S, jeśli odległość punktu P od tej prostej jest równa d.
   a) $S(0, 0)$, $P(-5, 3)$, $d = 5$
   b) $S(8, 1)$, $P(2, 1)$, $d = 3\sqrt{2}$

Pole trójkąta. Pole wielokąta

W tym temacie nauczysz się obliczać pole trójkąta, gdy dane są współrzędne wszystkich wierzchołków tego trójkąta.

Przykład 1.

Dane są punkty: $A(-3, -4)$, $B(6, -1)$, $C(3, 3)$. Obliczymy pole trójkąta ABC.



Pole P trójkąta ABC obliczymy ze wzoru

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h_C, \quad \text{gdzie}$$

$$h_C = d(C, AB)$$

Obliczamy długość boku AB:

$$|AB| = \sqrt{(6+3)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$$

Wyznaczamy równanie ogólne prostej AB.

$$y + 4 = \frac{-1+4}{6+3}(x+3)$$

$$y + 4 = \frac{1}{3}x + 1, \quad \text{stąd} \quad x - 3y - 9 = 0$$

– ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Obliczamy odległość punktu C od prostej AB.

$$d(C, AB) = \frac{|3 - 9 - 9|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

Obliczamy pole trójkąta ABC.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{15}{\sqrt{10}} = 22{,}5$$

Pole trójkąta ABC jest równe 22,5.

Ćwiczenie 1. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, jeśli $A(-3, -1)$, $B(1, 3)$, $D(-5, 4)$.

Przykład 2.

Dane są punkty $A(0, 2)$, $B(2, -2)$. Wyznaczymy na prostej k: $y = 3$ punkt C tak, aby pole trójkąta ABC było równe 15.

Obliczamy długość odcinka *AB*:

$$|AB| = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

Obliczamy wysokość trójkąta, poprowadzoną na bok *AB*.

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = 15, \quad \sqrt{5} \cdot h = 15, \quad h = 3\sqrt{5}$$

Z drugiej strony, wysokość poprowadzona na bok *AB* jest równa odległości punktu *C* od prostej *AB*. Możemy wyznaczyć równanie prostej *AB* i odległość punktu *C* od tej prostej.

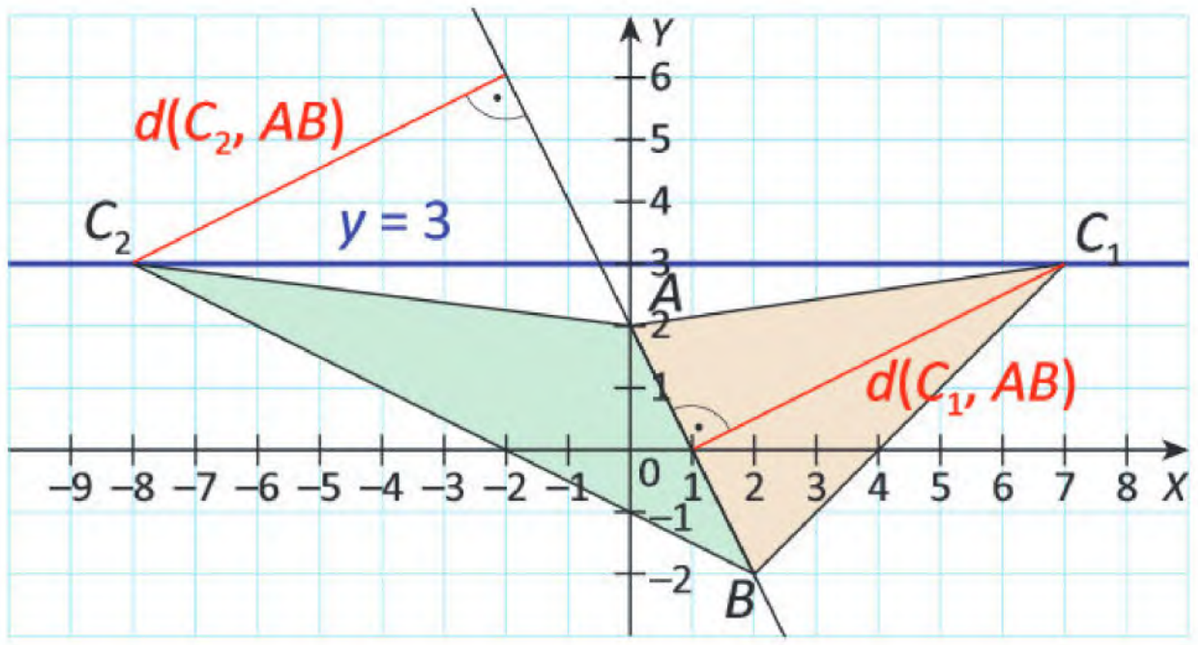
$$y - 2 = \frac{-2-2}{2-0}(x-0), \quad \text{czyli} \quad 2x + y - 2 = 0$$

Punkt *C* należy do prostej *k*: $y = 3$, więc możemy przyjąć, że $C(x_C, 3)$. Wówczas

$$\frac{|2 \cdot x_C + 3 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3\sqrt{5} \quad \text{stąd} \quad |2x_C + 1| = 15 \quad \text{zatem}$$

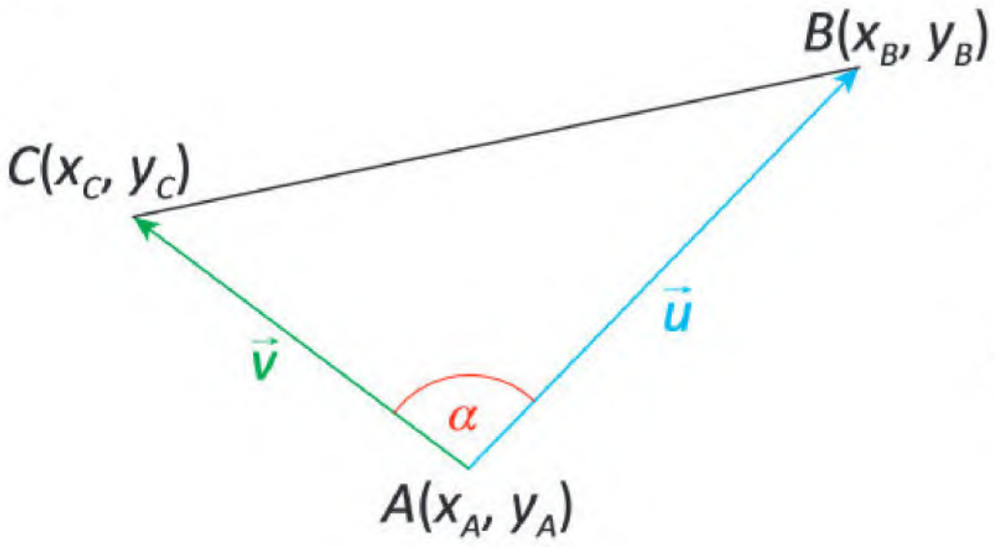
$$2x_C + 1 = 15 \quad \vee \quad 2x_C + 1 = -15$$
$$x_C = 7 \quad \vee \quad x_C = -8$$

Istnieją dwa punkty spełniające warunki zadania: $C_1(7, 3)$ oraz $C_2(-8, 3)$.
Rysunek poniżej ilustruje dwa wyznaczone trójkąty: trójkąt ABC_1 oraz trójkąt AC_2B.



Teraz wyprowadzimy wzór na pole trójkąta, gdy dane są współrzędne wszystkich jego wierzchołków.

Niech punkty $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ będą wierzchołkami dowolnego trójkąta *ABC*. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku poniżej: $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ oraz $|\sphericalangle BAC| = \alpha$.



$$\vec{u} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

$$\vec{v} = [x_C - x_A, y_C - y_A]$$

Korzystamy ze wzoru $P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\alpha$ i otrzymujemy:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\sin\left|\sphericalangle\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|$$

Wiemy, że

$$\sin\left|\sphericalangle\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|=\frac{\left|u_1v_2-u_2v_1\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$$

– zobacz twierdzenie 1, str. 456.

Zatem

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\frac{\left|u_1v_2-u_2v_1\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}=\frac{1}{2}\cdot\left|u_1v_2-u_2v_1\right|$$

Pole trójkąta *ABC* wyraża się wzorem

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|u_1v_2-u_2v_1\right|$$

Liczbę $u_1v_2-u_2v_1$ nazywamy wyznacznikiem wektorów $\vec{u}=[u_1,u_2]$ oraz $\vec{v}=[v_1,v_2]$ i oznaczamy $\det(\vec{u},\vec{v})$. Wzór na pole trójkąta *ABC* możemy zapisać w postaci

$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\det(\vec{u},\vec{v})\right|$, gdzie $\vec{u}=[x_B-x_A,y_B-y_A]$, $\vec{v}=[x_C\quad x_A,y_C\quad y_A]$, czyli

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)\right|$$

Przykład 3.

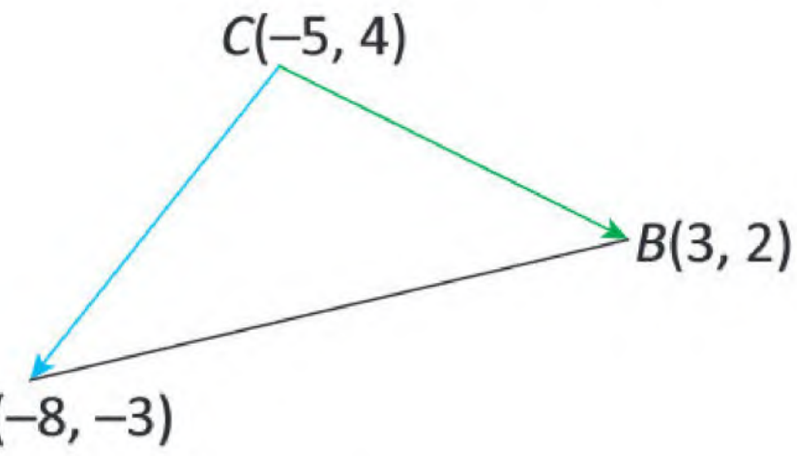
Obliczymy pole trójkąta *ABC* o wierzchołkach *A*(–8, –3), *B*(3, 2), *C*(–5, 4).

Wyznaczamy współrzędne wektorów zaczepionych w jednym wierzchołku, np. w wierzchołku *C*.

Otrzymujemy

$$\overrightarrow{CB}=[3-(-5),2-4]=[8,-2]$$

$$\overrightarrow{CA}=[-8-(-5),-3-4]=[-3,-7]$$



Obliczamy wyznacznik tych wektorów oraz pole trójkąta *ABC*.

$$\det(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=\begin{vmatrix}8 & -2\\ -3 & -7\end{vmatrix}=8\cdot(-7)-(-3)\cdot(-2)=-62$$ stąd

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|-62\right|=31$$

Pole trójkąta *ABC* jest równe 31.

Przykład 4.

Obliczymy pole czworokąta $ABCD$, gdzie $A(1, -2)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 4)$, $D(-3, 0)$.

Dzielimy czworokąt $ABCD$ na trójkąty: ABC i ACD. Obliczamy pola tych trójkątów.

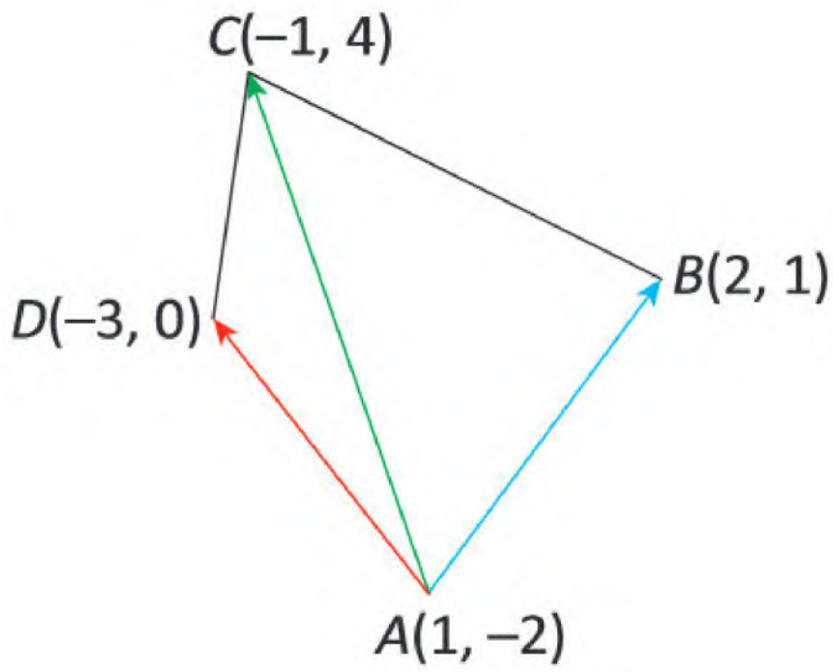
$$\overrightarrow{AB}=[1,3],\ \overrightarrow{AC}=[-2,6],\ \overrightarrow{AD}=[-4,2]$$

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 6\end{vmatrix}=6+6=12$$

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|12|=6$$

$$\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 6\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-4+24=20$$

$$P_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot|20|=10$$



Pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól obu trójkątów i jest równe 16.

Sprawdź, czy rozumiesz.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

1. Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli:
   a) $A(-4, 0)$, $B(4, -6)$, $C(3, 1)$
   b) $A(-5, -2)$, $B(-1, -3)$, $C(5, 4)$.

2. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, jeśli:
   a) $B(3, -2)$, $C(6, 1)$, $D(-2, 5)$
   b) $A(-2, 0)$, $C(4, 2)$, $D(2, 6)$.

3. Wyznacz pole czworokąta $ABCD$, jeśli:
   a) $A(-3, -4)$, $B(6, -1)$, $C(3, 6)$, $D(0, 3)$
   b) $A(-8, -3)$, $B(2, -1)$, $C(-2, 5)$, $D(-5, 4)$.

4. Prosta k: $3x - y - 3 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = -x^2 - 2x + 3$ w punktach A i B. Oblicz:
   a) współrzędne punktów A i B,
   b) pole trójkąta ABW, gdzie W jest wierzchołkiem paraboli.

5. Wyznacz punkt C:
   a) na osi OY, tak aby pole trójkąta ABC, gdzie $A(-2, -4)$, $B(8, -1)$, było równe 32,
   b) na osi OX tak, aby pole trójkąta ABC, gdzie $A(2, -3)$, $B(6, 3)$, było równe 12.

6. Na prostej k: $x - 3y - 3 = 0$ wyznacz punkt B tak, aby pole trójkąta ABC, gdzie $A(-4, 1)$, $C(4, 8)$, było równe 35.

7. Dane są punkty: $A(1, 2)$, $B(5, 4)$, $C(3, 6)$, $D(0, 8)$. Przez punkt D poprowadzono prostą k, prostopadłą do prostej AB. Wyznacz na prostej k taki punkt P, aby pola trójkątów ABC i ABP były równe.

Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu

Przypomnijmy z klasy drugiej wiadomości dotyczące okręgu w układzie współrzędnych.

Okrąg o środku w punkcie S i promieniu r, to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny P, których odległość od środka S jest równa r, $r > 0$.

Równanie $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$, nazywamy **równaniem kanonicznym okręgu** o środku w punkcie $S(x_S, y_S)$ i promieniu r.
Współrzędne każdego punktu należącego do okręgu o środku S i promieniu r spełniają równanie $(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$. I odwrotnie: jeśli współrzędne punktu $P(x, y)$ spełniają równanie okręgu, to punkt $P(x, y)$ należy do tego okręgu.

Ćwiczenie 1. Dane jest równanie kanoniczne okręgu. Podaj współrzędne środka tego okręgu i jego promień.

a) $(x - 3)^2 + (x + 1)^2 = 4$

b) $x^2 + (y - 4)^2 = 5$

Ćwiczenie 2. Sprawdź, czy punkty $P(-2, 6)$, $Q(5, 1)$ należą do okręgu o środku w punkcie $S(1, 2)$ i promieniu 5.

Przykład 1.

Punkt $P(-3, 2)$ należy do okręgu o środku w punkcie $S(4, 0)$. Wyznaczymy promień r tego okręgu.

Zapisujemy równanie okręgu:

$$(x - 4)^2 + y^2 = r^2$$

Współrzędne punktu P spełniają równanie okręgu, zatem

$$(-3 - 4)^2 + 2^2 = r^2, \qquad r > 0,$$

stąd

$$r = \sqrt{53}$$

Promień okręgu jest równy $\sqrt{53}$.

Ćwiczenie 3. Równanie okręgu $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 1$ doprowadź do postaci $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Podaj a, b, c.

Równanie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, gdzie $a^2 + b^2 - 4c > 0$ nazywamy **równaniem okręgu w postaci ogólnej** (lub zredukowanej). Równanie to opisuje okrąg o środku w punkcie $S\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ i promieniu r, $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$.

Przykład 2.

Pokażemy, że równanie $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 17 = 0$ opisuje okrąg. Wyznaczymy promień i współrzędne środka tego okręgu.

Przyjmujemy oznaczenia:

$a = -2,\ b = 10,\ c = 4$

Wówczas

$a^2 + b^2 - 4c = 4 + 100 - 4 \cdot 17 = 36 > 0$

Liczba $a^2 + b^2 - 4c$ jest dodatnia, więc równanie $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 17 = 0$ jest równaniem okręgu w postaci zredukowanej. Obliczamy współrzędne środka S okręgu i promień r:

$$-\frac{1}{2}a = 1, \qquad -\frac{1}{2}b = -5, \qquad S(1, -5)$$

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \qquad \text{czyli} \qquad r = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$$

Środek S okręgu ma współrzędne $(1, -5)$, a promień okręgu jest równy 3.

Przykład 3.

Wyznaczymy promień i współrzędne środka okręgu, doprowadzając równanie okręgu $x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 4y = 0$ do postaci kanonicznej.

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

$$\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2\right) = 2^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

Odczytujemy: środek okręgu ma współrzędne $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, a promień okręgu jest równy 2.

Ćwiczenie 4. Wyznacz na dwa sposoby podane w przykładach 2. i 3. środek i promień okręgu opisanego równaniem $x^2 - 8x + y^2 + 5y - 1{,}75 = 0$.

Przykład 4.

Wyznaczymy równanie okręgu, przechodzącego przez punkty $A(1, 2)$ i $B(4, 3)$, którego środek należy do prostej k: $2x - 3y - 3 = 0$.

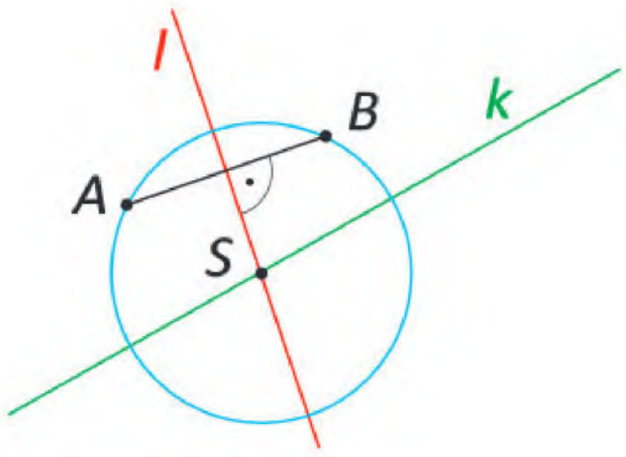
Niech $o(S, r)$ będzie szukanym okręgiem, $r > 0$.
Środek okręgu jest równoodległy od punktów A i B. To znaczy, że punkt S należy do symetralnej odcinka AB.

Przyjmijmy oznaczenie:

l – symetralna odcinka AB

Wówczas:

- $k \cap l = \{S\}$
- Promień okręgu jest równy $|AS|$.



Rozwiązanie zadania podzielimy na trzy etapy.

1) Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka AB, czyli równanie prostej l.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB:

$$a_{AB} = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

Niech l: $y = ax + b$. Wówczas $a \cdot a_{AB} = -1$, stąd $a = -3$. Zatem:

l: $y = -3x + b$

Do symetralnej l należy środek odcinka AB, którego współrzędne są równe:

$$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+3}{2}\right) \qquad \text{czyli} \qquad \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Obliczamy współczynnik b:

$$\frac{5}{2} = -3 \cdot \frac{5}{2} + b \qquad \text{stąd} \qquad b = 10$$

Symetralną odcinka AB opisuje równanie: $y = -3x + 10$.

2) Wyznaczamy punkt S, który jest punktem przecięcia prostych k i l. Współrzędne punktu S spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = -3x + 10 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases} \qquad \text{stąd} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Rozwiąż układ równań!

Środek okręgu ma współrzędne: $S(3, 1)$.

3) Wyznaczamy równanie okręgu. Przyjmuje ono postać:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = r^2$$

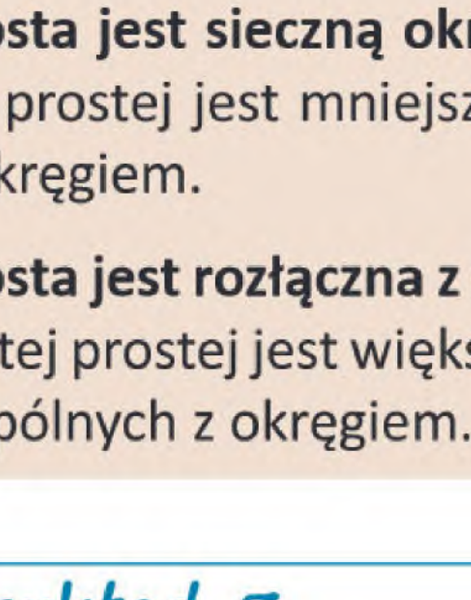
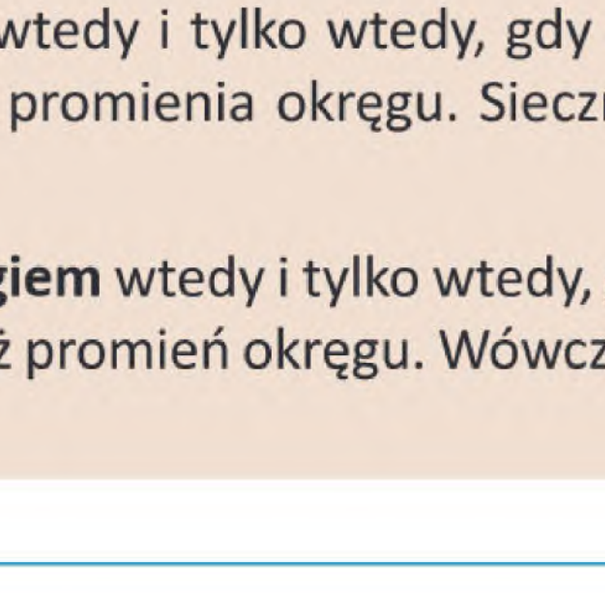
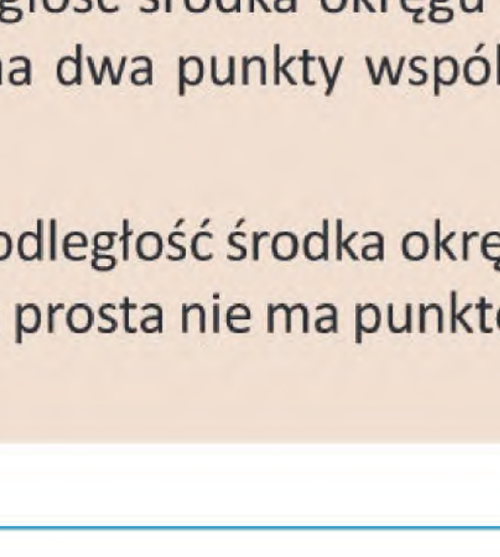
Punkt A należy do tego okręgu, więc jego współrzędne spełniają równanie okręgu. Mamy:

$$(1-3)^2 + (2-1)^2 = r^2, \quad \text{stąd} \quad r^2 = 5$$

Ostatecznie, równanie okręgu ma postać: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Ćwiczenie 5. Zastanów się, jaki jest inny sposób rozwiązania zadania z przykładu 4.

Przypomnijmy z klasy drugiej, jakie może być położenie prostej względem okręgu. Prosta może być a) styczną do okręgu, b) sieczną okręgu lub c) rozłączna z okręgiem; zobacz rysunek poniżej.

a) k – styczna do okręgu	b) k – sieczna okręgu	c) k – prosta rozłączna z okręgiem
		
$d(O, k) = r$	$d(O, k) < r$	$d(O, k) > r$

Prosta jest styczna do okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest równa promieniowi tego okręgu. Styczna ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem.

Prosta jest sieczną okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest mniejsza od promienia okręgu. Sieczna ma dwa punkty wspólne z okręgiem.

Prosta jest rozłączna z okręgiem wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest większa niż promień okręgu. Wówczas ta prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

Przykład 5.

Określimy położenie prostej k: $3x + 4y - 2 = 0$ względem okręgu o: $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$.

Sprowadzamy równanie okręgu $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ do postaci kanonicznej:

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$$

Odczytujemy współrzędne środka S okręgu i promień r:

$$S(-1, -3), \quad r = 3.$$

Następnie obliczamy odległość punktu S od prostej k. Mamy:

$$d(S,k) = \frac{|3\cdot(-1)+4\cdot(-3)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-17|}{\sqrt{25}} = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}, \qquad d(S, k) > r$$

Prosta k jest rozłączna z okręgiem.

Ćwiczenie 6. Określ położenie prostej k względem okręgu o, jeśli:

a) o: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$, k: $x - 2y - 2 = 0$ b) o: $x^2 + y^2 = 4$, k: $x + y = 2$

Przykład 6.

Wyznaczymy współrzędne punktów wspólnych okręgu o: $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ i prostej k: $x + y = 0$.

Wystarczy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x^2+(y+2)^2=4 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy x i podstawiamy do pierwszego równania:

$$\begin{cases} x=-y \\ y^2+y^2+4y+4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y(y+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-2 \\ x=2 \end{cases} \right)$$

Prosta ma dwa punkty wspólne z okręgiem: $(0, 0)$ oraz $(2, -2)$. Jest więc sieczną tego okręgu.

Ćwiczenie 7. Sprawdź, czy prosta k: $x + 2y - 2 = 0$ ma punkty wspólne z okręgiem o: $(x - 3)^2 + y^2 = 5$. Jeśli tak, wyznacz je.

Przykład 7.

Wyznaczymy równania stycznych do okręgu o: $(x+3)^2+y^2=8$, które są nachylone do osi OX pod kątem $135°$.

Stycznych do okręgu szukamy wśród prostych, opisanych równaniem

$y = ax + b$, gdzie $a = \operatorname{tg} 135°$ i $b \in \boldsymbol{R}$.

Ze wzoru redukcyjnego obliczamy współczynnik kierunkowy prostej:

$$a=\operatorname{tg}135°=-\operatorname{tg}45°=-1$$

Zatem szukaną styczną możemy opisać równaniem

$$y=-x+b$$

Współczynnik b obliczymy na dwa sposoby.

I sposób: Korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej.
Sprowadzamy równanie prostej do postaci ogólnej:

$$x+y-b=0$$

Z równania okręgu odczytujemy współrzędne środka S okręgu i jego promień:

$$S(-3,0), \qquad r=2\sqrt{2}$$

Niech d oznacza odległość punktu S od szukanej stycznej. Wówczas

$$d=\frac{|1\cdot(-3)+0-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-3-b|}{\sqrt{2}} \qquad \text{oraz} \qquad d=2\sqrt{2}$$

Rozwiązujemy równanie:

$$\frac{|-3-b|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

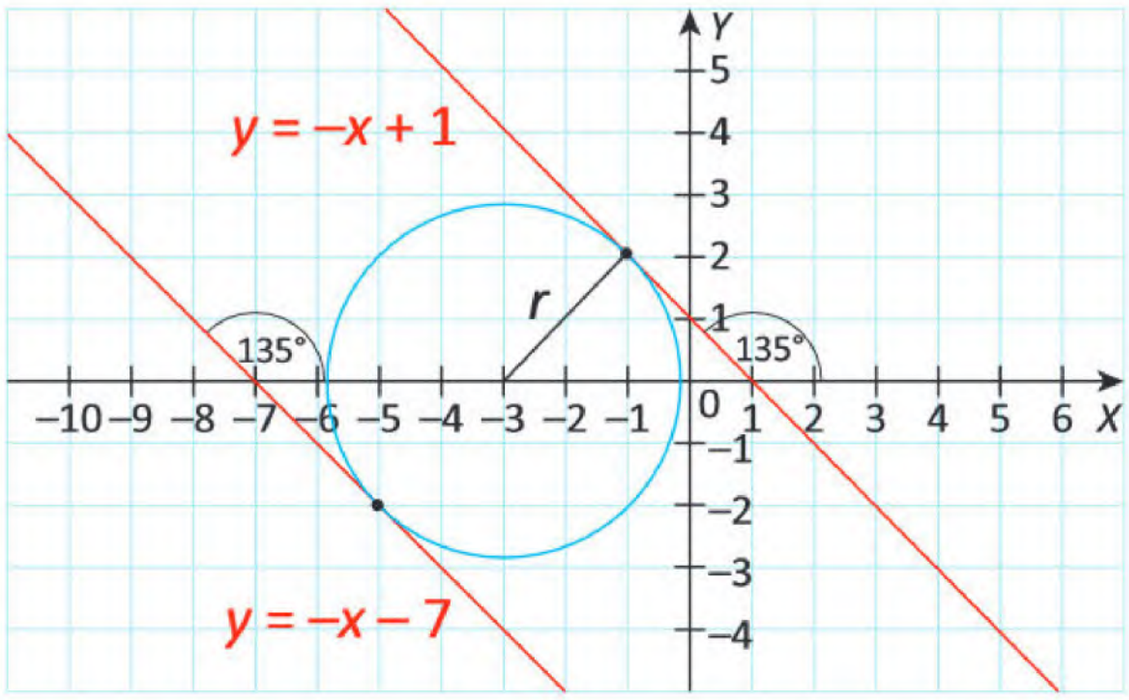
$|b + 3| = 4$

$b + 3 = 4 \quad \vee \quad b + 3 = -4$

$b = 1 \quad \vee \quad b = -7$

Dwie styczne spełniają warunki zadania: $y = -x + 1$ oraz $y = -x - 7$.

Poniższy rysunek jest ilustracją tej sytuacji.



II sposób: Zauważamy, że prosta jest styczna do okręgu tylko wtedy, gdy ma jeden punkt wspólny z tym okręgiem.

Zatem szukamy liczby b, dla której układ równań

$$\begin{cases} y = -x + b \\ (x+3)^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

ma tylko jedno rozwiązanie.

Do drugiego równania układu równań, w miejsce y podstawiamy wyrażenie $-x + b$. Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą x:

$x^2 + 6x + 9 + b^2 - 2bx + x^2 = 8$, czyli

$2x^2 + (6 - 2b)x + b^2 + 1 = 0$.

Układ równań ma jedno rozwiązanie tylko wtedy, gdy ostatnie równanie ma jedno rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik trójmianu, występującego po lewej stronie tego równania:

$\Delta = (6 - 2b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (b^2 + 1) = 36 - 24b + 4b^2 - 8b^2 - 8$

$\Delta = -4b^2 - 24b + 28 = -4(b^2 + 6b - 7)$

Równanie kwadratowe ma jedno rozwiązanie tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$, czyli gdy

$b^2 + 6b - 7 = 0$,

$b^2 - b + 7b - 7 = 0$

$b(b - 1) + 7(b - 1) = 0$

$(b - 1)(b + 7) = 0$

$b = 1 \quad \vee \quad b = -7$

Szukana styczna ma równanie: $y = -x + 1$ lub $y = -x - 7$.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Wyznacz dwoma sposobami środek i promień okręgu opisanego równaniem:
   a) $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 10 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 3x - 7y - 1{,}5 = 0$

2. Czy dane równanie opisuje okrąg? Odpowiedź uzasadnij.
   a) $x^2 + y^2 - 6x + y + 8 = 0$ b) $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

3. Napisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty:
   a) $A(0, 0), B(-6, 0), C(-6, 8)$ b) $A(4, 0), B(5, 5), C(-1, 1)$

D 4. Wykaż, że jeśli $b \neq 4a$ i $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, to równanie $x^2 + y^2 - 4ax - 2by - 12a^2 + 8ab = 0$ opisuje okrąg. Podaj współrzędne środka i promień tego okręgu.

5. Do okręgu należą punkty przecięcia prostej k: $3x - 2y + 12 = 0$ z osiami układu współrzędnych. Środek okręgu należy do prostej l: $x - 4 = 0$. Wyznacz równanie tego okręgu.

6. Do okręgu należą punkty wspólne prostej k: $x - y - 1 = 0$ i paraboli opisanej równaniem $y = x^2 - 6x + 5$. Środek okręgu należy do prostej l: $x - 5y - 30 = 0$. Wyznacz równanie tego okręgu.

7. Określ wzajemne położenie prostej k i okręgu o, jeśli:
   a) k: $x + y - 2 = 0$ o: $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$
   b) k: $3x + 4y - 7 = 0$ o: $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$

D 8. Wykaż, że prosta k: $x - y = 0$ jest styczna do okręgu o: $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 8 = 0$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

9. Wyznacz punkty wspólne prostej k: $y = 3x + 4$ i okręgu o: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$.

10. Napisz równania ogólne stycznych do okręgu:
    a) o: $x^2 + y^2 = 10$, które są równoległe do prostej k: $x + y = 0$
    b) o: $x^2 + (y - 1)^2 = 5$, które są prostopadłe do prostej k: $2x + y - 9 = 0$.

11. Napisz równania kierunkowe stycznych do okręgu o i nachylonych do osi OX pod kątem α, jeśli:
    a) o: $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y + 1)^2 = 9$, $\alpha = 30°$
    b) o: $\left(x - 2\sqrt{3}\right)^2 + (y - 1)^2 = 16$, $\alpha = 120°$

12. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S(3, -2)$, stycznego do prostej k: $3x - 4y - 12 = 0$.

13. Napisz równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i przechodzącego przez punkt $A(2, 1)$.

Wzajemne położenie dwóch okręgów

Przypomnijmy z klasy drugiej, jak mogą być położone względem siebie dwa różne okręgi.

Dwa okręgi $o_1(S_1, r_1)$ i $o_2(S_2, r_2)$:
- są rozłączne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_1S_2| > r_1 + r_2$
- są styczne zewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_1S_2| = r_1 + r_2$
- przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy $|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$
- są styczne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_1S_2| = |r_1 - r_2| \neq 0$
- są rozłączne wewnętrznie wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_1S_2| < |r_1 - r_2|$.

Przykład 1.

Określimy wzajemne położenie dwóch okręgów

$$o_1 : x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0 \quad \text{oraz} \quad o_2: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

Sprowadzamy równanie okręgu o_1 do postaci kanonicznej:

$$\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

Z równań okręgów odczytujemy:
– okrąg o_1 ma środek w punkcie $S_1\left(\sqrt{3}, 0\right)$, a jego promień r_1 jest równy 1
– okrąg o_2 ma środek w punkcie $S_2(2, -3)$, a jego promień r_2 jest równy 5.

Obliczamy odległość między punktami S_1 i S_2.

$$|S_1S_2| = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 9} = \sqrt{16 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}$$

Obliczamy sumę promieni oraz wartość bezwzględną ich różnicy.

$r_1 + r_2 = 6$ $\qquad$ $|r_1 - r_2| = 4$

Stwierdzamy, że

$|S_1S_2| < r_1 + r_2$

Porównajmy teraz liczby 4 i $2\sqrt{4 - \sqrt{3}}$. Zauważ, że

$\sqrt{4 - \sqrt{3}} < \sqrt{4} \quad / \cdot 2$

$2\sqrt{4 - \sqrt{3}} < 2 \cdot 2$

$2\sqrt{4 - \sqrt{3}} < 4$ $\qquad$ czyli

$|S_1S_2| < |r_1 - r_2|$

Z ostatniej nierówności wynika, że okręgi o_1 i o_2 są rozłączne wewnętrznie.

Ćwiczenie 1. Naszkicuj w układzie współrzędnych okrąg o: $(x+3)^2+(y-2)^2=20$. Okrąg o jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie $A(1, 0)$. Wyznacz równanie okręgu o_1, wiedząc, że promień tego okręgu jest równy $3\sqrt{5}$.

Przykład 2.

Wyznaczymy wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których okręgi o_1: $(x+2)^2+(y-m)^2=9$ i o_2: $(x+m)^2+(y-1)^2=4$ mają tylko jeden punkt wspólny.

Znamy środki i promienie okręgów o_1 i o_2.

$S_1(-2, m)$, $r_1=3$ $\qquad$ $S_2(-m, 1)$, $r_2=2$

Obliczamy długość odcinka S_1S_2.

$$|S_1S_2|=\sqrt{(-m+2)^2+(1-m)^2}=\sqrt{2m^2-6m+5}$$

Dwa okręgi mają jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy są styczne zewnętrznie lub są styczne wewnętrznie. Rozpatrujemy dwa przypadki.

I. Okręgi są styczne zewnętrznie.

$|S_1S_2|=r_1+r_2$ $\qquad$ czyli $\qquad$ $|S_1S_2|=5$

Rozwiązujemy równanie:

$$\sqrt{2m^2-6m+5}=5$$

Obie strony równania są dodatnie. Po podniesieniu ich do kwadratu otrzymujemy równanie równoważne danemu.

$2m^2-6m+5=25$ $\quad$ stąd

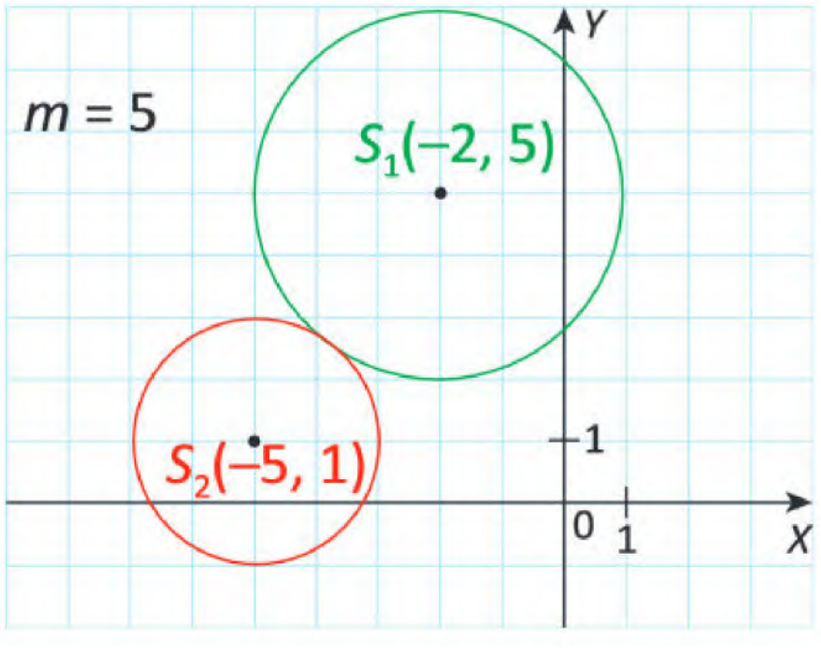
$m^2-3m-10=0$

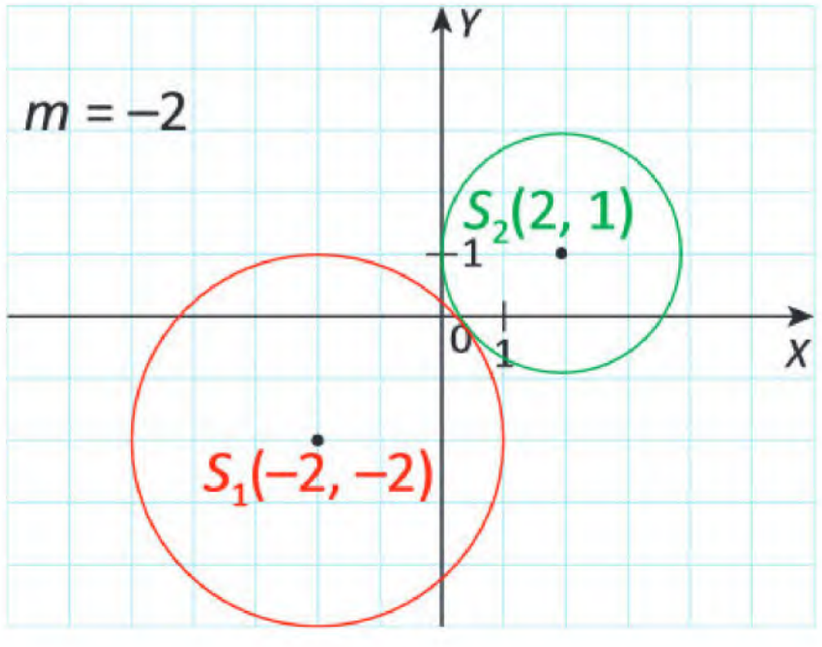
$(m-5)(m+2)=0$

$m=5 \vee m=-2$

- Jeśli $m=5$, to otrzymujemy dwa okręgi styczne zewnętrznie:
  o_1: $(x+2)^2+(y-5)^2=9$ $\qquad$ oraz $\qquad$ o_2: $(x+5)^2+(y-1)^2=4$.
- Jeśli $m=-2$, to otrzymujemy dwa okręgi styczne zewnętrznie:
  o_1: $(x+2)^2+(y+2)^2=9$ $\qquad$ oraz $\qquad$ o_2: $(x-2)^2+(y-1)^2=4$.

Poniższe rysunki ilustrują te sytuacje.





II. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie.

$|S_1S_2| = |r_1 - r_2|, \qquad |r_1 - r_2| = 1$

Rozwiązujemy równanie

$\sqrt{2m^2 - 6m + 5} = 1$, stąd

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$(m - 2)(m - 1) = 0$

$m = 2 \vee m = 1$

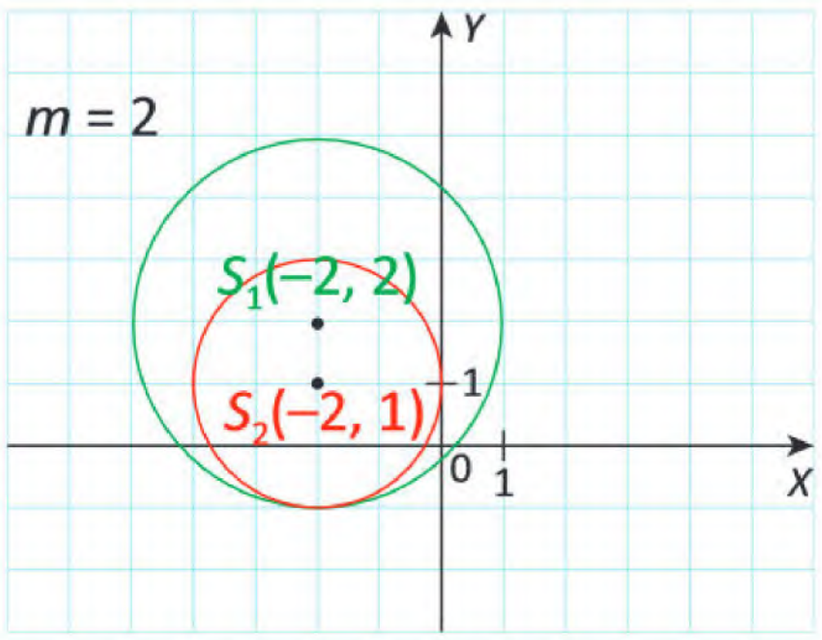
- Jeśli $m = 2$, to otrzymujemy okręgi styczne wewnętrznie:

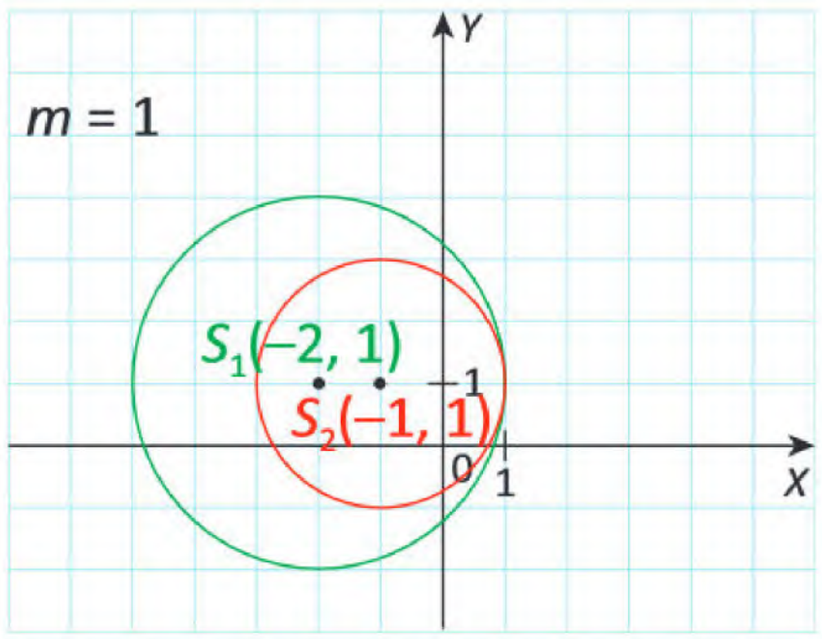
  $o_1: (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ oraz $o_2: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

- Jeśli $m = 1$, to otrzymujemy okręgi styczne wenętrznie:

  $o_1: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ oraz $o_2: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Poniższe rysunki ilustrują omówione sytuacje.





Przykład 3.

Wyznaczymy punkty wspólne dwóch okręgów:

$o_1: x^2 + y^2 - 4y = 0$ oraz $o_2: x^2 + y^2 - 8x - 12y + 32 = 0$.

Aby wyznaczyć współrzędne punktów wspólnych tych okręgów, wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 12y + 32 = 0 \end{cases}$$

Odejmujemy równania układu stronami i porządkujemy otrzymane równanie:

$-4y + 8x + 12y - 32 = 0$

$x + y - 4 = 0$

Układ równań

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

jest równoważny układowi początkowemu.

Ten układ rozwiązujemy metodą podstawiania.

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ x^2+y^2-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ x^2+(-x+4)^2-4(-x+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ x=0 \vee x=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \right)$$

Okręgi przecinają się w dwóch punktach: (0, 4) oraz (2, 2).

Ćwiczenie 2. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych okręgów $o_1: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ oraz $o_2: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.

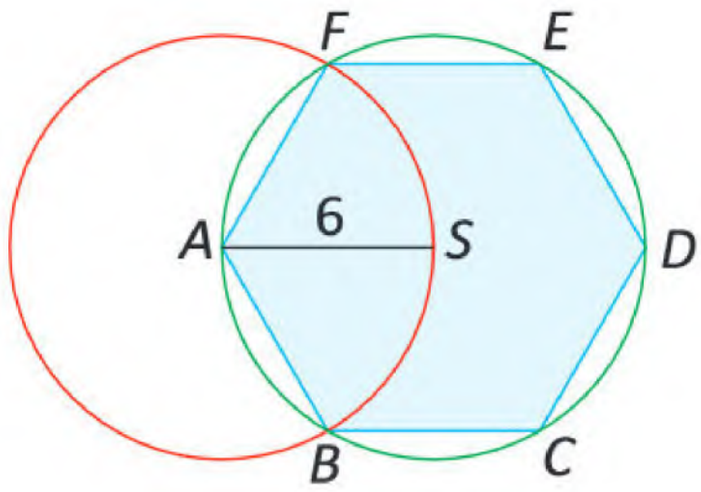
Przykład 4.

Dane są dwa przeciwległe wierzchołki sześciokąta foremnego $ABCDEF$: $A(-4, 0)$, $D(8, 0)$. Wyznaczymy pozostałe wierzchołki tego sześciokąta.

Niech S będzie środkiem odcinka AD. Wówczas

$S(2, 0)$ oraz $|AS| = |SD| = 6$

Z konstrukcji sześciokąta foremnego, omówionej w klasie drugiej (podręcznik, strona 216) wynika, że wierzchołki B i F to punkty przecięcia się okręgów $o_1(S, 6)$ i $o_2(A, 6)$.



Pozostałe wierzchołki obliczymy, korzystając z tego, że sześciokąt $ABCDEF$ jest figurą środkowosymetryczną.

1) Wyznaczamy wierzchołki B i F. Ich współrzędne spełniają układ równań:

$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2=36 \\ (x+4)^2+y^2=36 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} (x-2)^2=36-y^2 \\ (x+4)^2=36-y^2 \end{cases}$$

Zatem

$(x-2)^2 = (x+4)^2$ $\qquad a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$

$|x-2| = |x+4|$, stąd

$x-2 = x+4 \quad \vee \quad x-2 = -x-4$

sprzeczność $\qquad x = -1$

Pierwsza współrzędna punktów B i F jest równa -1. Obliczamy drugie wspólrzędne tych punktów:

$(-1-2)^2 = 36 - y^2$

$y^2 = 27$, stąd $y = -3\sqrt{3} \quad \vee \quad y = 3\sqrt{3}$

Mamy:

$B\left(-1, -3\sqrt{3}\right),\ F\left(-1, 3\sqrt{3}\right)$

Punkt S jest środkiem odcinków FC i BE. Obliczamy współrzędne punktu $C(x_C, y_C)$.

$2 = \frac{-1 + x_C}{2}$ oraz $0 = \frac{3\sqrt{3} + y_C}{2}$, stąd $C\left(5, -3\sqrt{3}\right)$

Podobnie można wyznaczyć współrzędne punktu E: $E\left(5, 3\sqrt{3}\right)$.

Szukane wierzchołki sześciokąta $ABCDEF$ to: $B\left(-1, -3\sqrt{3}\right)$, $C\left(5, -3\sqrt{3}\right)$, $E\left(5, 3\sqrt{3}\right)$, $F\left(-1, 3\sqrt{3}\right)$

Ćwiczenie 3. Zastanów się nad innym sposobem rozwiązania powyższego zadania.

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

1. Określ wzajemne położenie okręgów o_1 i o_2, jeśli:
   a) $o_1: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ oraz $o_2: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$
   b) $o_1: x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ oraz $o_2: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$
   c) $o_1: x^2 + y^2 + 8x - 4y = 0$ oraz $o_2: x^2 + y^2 - 8x - 12y + 32 = 0$
   d) $o_1: x^2 + y^2 - 6x + 8y + 17 = 0$ oraz $o_2: x^2 + y^2 - 4x + 6y + 11 = 0$.

2. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, okręgi $o_1: (x-m)^2 + (y+2)^2 = 20$ oraz $o_2: (x+1)^2 + (y-2m)^2 = 5$ są wewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości m oblicz współrzędne punktu styczności.

3. Dla jakich wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, okręgi $o_1: (x-m)^2 + (y+1)^2 = 8$ oraz $o_2: (x+1)^2 + (y-m)^2 = 2$ są zewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości m oblicz wspólrzędne punktu styczności.

4. Punkty A i B są punktami wspólnymi okręgów $o_1\left(S_1, 2\sqrt{5}\right)$ i $o_2\left(S_2, 5\sqrt{2}\right)$, gdzie $S_1(2, 3)$, $S_2(5, -6)$. Wyznacz długość cięciwy AB.

D 5. Wykaż, że okręgi $o_1: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ i $o_2: x^2 + y^2 - 10x + 12y + 11 = 0$ są styczne zewnętrznie. Wyznacz równanie ogólne wspólnej stycznej do tych okręgów, przechodzącej przez ich wspólny punkt.

Zadania różne z geometrii analitycznej

W pierwszych dwóch przykładach przypomnimy różne metody dowodzenia równoległości i prostopadłości odcinków.

Przykład 1.

Dane są punkty $A(-1, 0)$, $B(7, 1)$, $C(3, 8)$, $D(-5, 7)$. Pokażemy, że czworokąt $ABCD$ jest rombem.

I sposób: Korzystamy z następującej własności:
Romb to równoległobok, którego dwa sąsiednie boki są równej długości.

Wystarczy pokazać, że:
- czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem oraz
- $|AB| = |BC|$

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, jeśli dwa przeciwległe boki czworokąta są równoległe i mają taką samą długość, co jest równoważne warunkowi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [7+1, 1-0] = [8, 1] \qquad \overrightarrow{DC} = [3-(-5), 8-7] = [8, 1]$$

Ponieważ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, więc czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Teraz obliczamy długości odcinków AB i BC:

$$|AB| = \sqrt{8^2+1^2} = \sqrt{65}, \qquad |BC| = \sqrt{(3-7)^2+(8-1)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, którego sąsiednie boki są równej długości.
Zatem czworokąt $ABCD$ jest rombem, co kończy dowód.

II sposób: Korzystamy z własności:
Jeśli przekątne czworokąta są do siebie prostopadłe i przecinają się w punkcie dzielącym je na połowy, to ten czworokąt jest rombem.

Wystarczy pokazać, że
- $AC \perp BD$ oraz
- punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy

Wyznaczamy współczynniki kierunkowe prostych AC i BD:

$$a_{AC} = \frac{8-0}{3+1} = 2, \qquad a_{BD} = \frac{7-1}{-5-7} = -\frac{1}{2},$$

$$a_{AC} \cdot a_{BD} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Proste AC i BD są prostopadłe, zatem przekątne AC i BD też są prostopadłe.
Aby pokazać, że punkt przecięcia przekątnych AC i BD dzieli je na połowy, wystarczy pokazać, że środek odcinka AC jest jednocześnie środkiem odcinka BD.
Niech $S(x_S, y_S)$ oznacza środek odcinka AC, zaś $M(x_M, y_M)$ – środek odcinka BD.

Wówczas:

$$x_S = \frac{-1+3}{2} = 1, \qquad y_S = \frac{0+8}{2} = 4, \qquad S(1, 4)$$

$$x_M = \frac{7-5}{2} = 1, \qquad y_M = \frac{1+7}{2} = 4, \qquad M(1, 4)$$

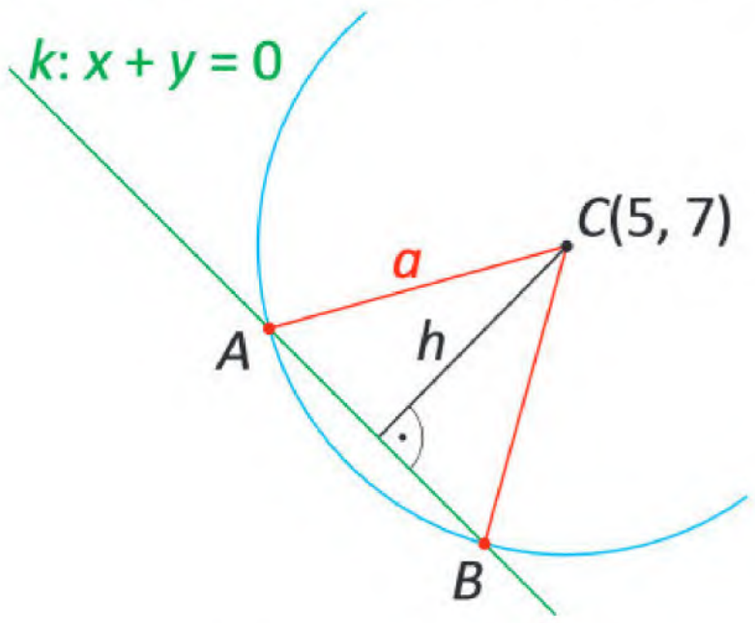
Środek odcinka *AC* jest jednocześnie środkiem odcinka *BD*, co kończy dowód.

Ćwiczenie 1. Dane są punkty: $A(-4, 1)$, $B(0, -3)$, $C(3, 3)$, $D(-1, 7)$. Wykaż, że czworokąt *ABCD* jest równoległobokiem. Podaj co najmniej dwa różne dowody.

Przykład 2.

Dany jest punkt $C(5, 7)$. Na prostej $k: x + y = 0$ wyznaczymy punkty *A* i *B* tak, aby trójkąt *ABC* był równoboczny.

Wykonajmy analizę treści zadania.



Punkt *C* leży poza prostą *k* (sprawdź!).
$|AB| = |BC| = |AC| = a, \quad a > 0$
Punkty *A* i *B* leżą na prostej *k*,
w odległości *a* od punktu *C*.
Zatem punkty *A* i *B* to punkty przecięcia okręgu $o(C, a)$ z prostą *k*.
Promień *a* tego okręgu wyznaczymy ze wzoru

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, gdzie *h* jest wysokością trójkąta *ABC*.

1) Obliczamy wysokość *h* trójkąta *ABC*. Korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej:

$$h = d(C, k) = \frac{|5+7|}{\sqrt{1+1}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

2) Wyznaczamy równanie okręgu o środku w punkcie *C* i promieniu *a*, gdzie

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} \qquad \text{czyli}$$

$$a = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{6}$$

Równanie okręgu ma postać:

$$(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 96.$$

3) Wyznaczamy punkty wspólne okręgu $o(C, a)$ i prostej k, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-7)^2=96\\ x+y=0\end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases}y=-x\\ (x-5)^2+(-x-7)^2=96\end{cases}$$

Wykaż, że równanie $(x-5)^2+(-x-7)^2=96$ ma dwa rozwiązania:

$$x=-1-2\sqrt{3} \quad \text{lub} \quad x=-1+2\sqrt{3}$$

Wówczas rozwiązania układu równań są następujące:

$$\begin{cases}x=-1-2\sqrt{3}\\ y=1+2\sqrt{3}\end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases}x=-1+2\sqrt{3}\\ y=1-2\sqrt{3}\end{cases}$$

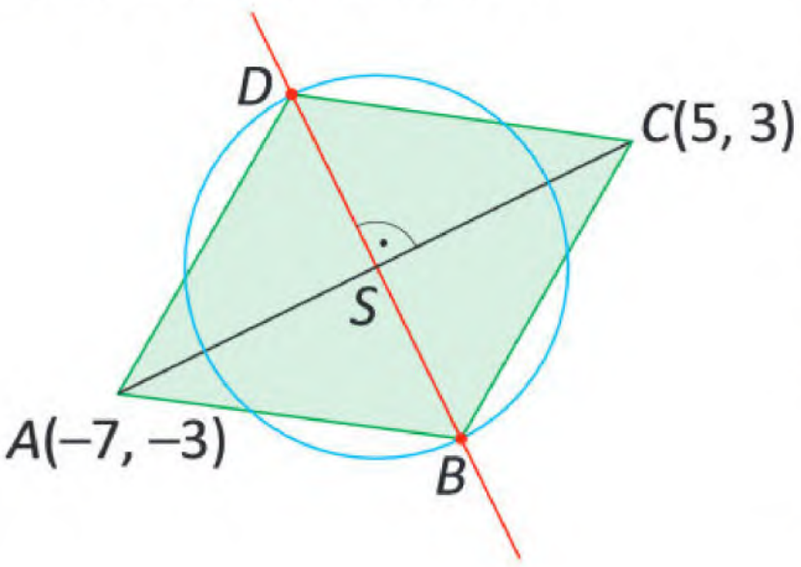
Punkty A i B mają współrzędne: $A\left(-1-2\sqrt{3},1+2\sqrt{3}\right)$, $B\left(-1+2\sqrt{3},1-2\sqrt{3}\right)$.

Ćwiczenie 2. Dany jest punkt $C(1, 2)$ i prosta k: $x - 3y - 10 = 0$. Wyznacz na prostej k punkty A i B tak, aby $|AC| = |BC| = 5$.

Przykład 3.

Pole rombu $ABCD$ jest równe 60. Wiedząc, że $A(-7, -3)$ i $C(5, 3)$, obliczymy współrzędne wierzchołków B i D.

Analiza treści zadania:



Niech pole rombu $ABCD$ będzie równe P,

$P=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$, stąd obliczymy $|BD|$.

Przekątne AC i DB są prostopadłe i przecinają się w punkcie S, dzielącym je na połowy.

Punkty B i D to punkty przecięcia okręgu

$o\left(S,\frac{|BD|}{2}\right)$ z symetralną odcinka AC.

1) Obliczamy długości przekątnych AC i DB.

$$|AC|=\sqrt{(5+7)^2+(3+3)^2}=6\sqrt{5}$$

$$|BD|=\frac{2P}{|AC|} \quad \text{więc} \quad |BD|=\frac{2\cdot 60}{6\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$$

2) Wyznaczamy równanie prostej BD, która jest symetralną odcinka AC. Najpierw obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AC:

$$a_{AC}=\frac{3+3}{5+7}=\frac{1}{2}$$

Prostą *BD* można opisać równaniem kierunkowym $y = ax + b$. Ta prosta jest prostopadła do prostej *AC*, więc

$$a \cdot \frac{1}{2} = -1, \quad \text{stąd}$$

$$a = -2$$

Do prostej *BD* należy środek $S(x_S, y_S)$ przekątnej *AC*, gdzie

$$x_S = \frac{-7+5}{2} = -1 \qquad y_S = \frac{-3+3}{2} = 0$$

Obliczamy współczynnik *b*:

$y = -2x + b,$ $S(-1, 0)$

$0 = -2\cdot(-1) + b,$ stąd

$b = -2$

Prosta *BD* ma równanie $y = -2x - 2$.

3) Wyznaczamy współrzędne wierzchołków *B* i *D*.
Punkty *B* i *D* należą do prostej *BD* oraz do okręgu o środku w punkcie $S(-1, 0)$ i promieniu równym $2\sqrt{5}$.

Wówczas współrzędne tych punktów spełniają układ równań

$$\begin{cases} y = -2x - 2 \\ (x+1)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \end{cases} \qquad \text{czyli}$$

$$\begin{cases} y = -2(x+1) \\ (x+1)^2 + 4(x+1)^2 = 20 \end{cases}$$

Równanie $(x+1)^2 + 4(x+1)^2 = 20$ ma dwa rozwiązania.

$x = -3$ lub $x = 1$ Sprawdź!

Zatem początkowy układ równań również ma dwa rozwiązania.

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

Punkty *B* i *D* mają współrzędne: $B(1, -4)$, $D(-3, 4)$.

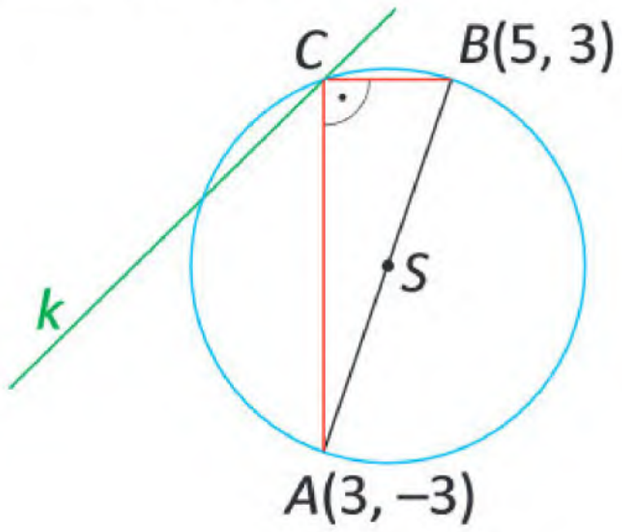
Ćwiczenie 3. Dane są punkty $A(-5, 1)$, $B(1, 5)$. Wyznacz współrzędne punktów *C* i *D* wiedząc, że czworokąt *ABCD* jest kwadratem.

Przykład 4.

Dane są punkty $A(3, -3)$, $B(5, 3)$ oraz prosta k: $x - y = 0$. Wyznaczymy na prostej *k* punkt *C* taki, że $\left|\sphericalangle ACB\right| = 90^\circ$.

I sposób:

Analiza treści zadania.



$C \in k, \quad |\sphericalangle ACB| = 90^\circ$

Korzystamy z własności:
Kąt prosty wpisany w okrąg jest oparty na półokręgu.

Punkt C należy do prostej k i jednocześnie należy do okręgu o średnicy AB.

1) Wyznaczamy równanie okręgu o o średnicy AB. Niech S oznacza środek tego okręgu, r – jego promień.

$$S\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) \qquad \text{czyli} \qquad S(4, 0)$$

$$r = |AS| = \sqrt{(4-3)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{10}$$

Równanie okręgu przyjmuje postać:

$$(x-4)^2 + y^2 = 10$$

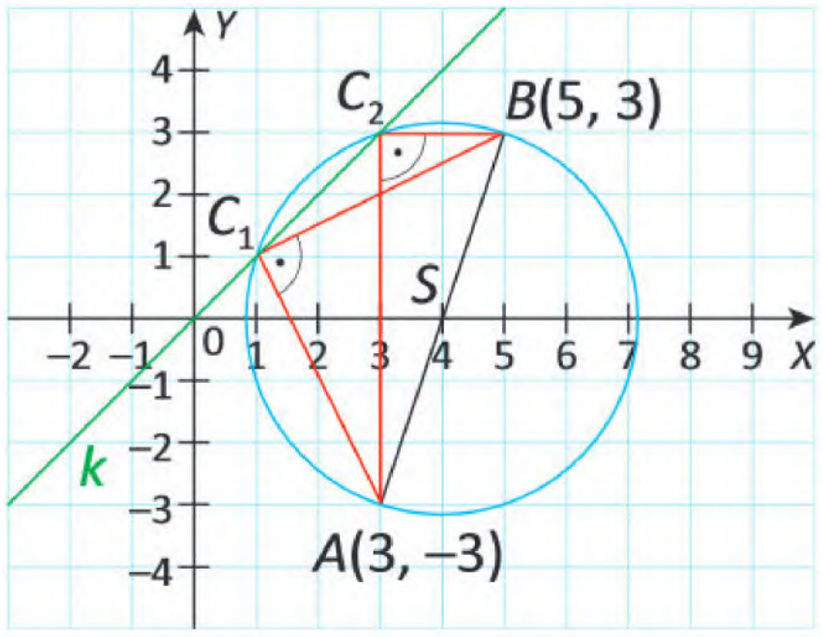
2) Wyznaczamy punkty wspólne prostej k i okręgu o.

$$\begin{cases} y = x \\ (x-4)^2 + y^2 = 10 \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} y = x \\ x^2 - 8x + 16 + x^2 = 10 \end{cases}$$

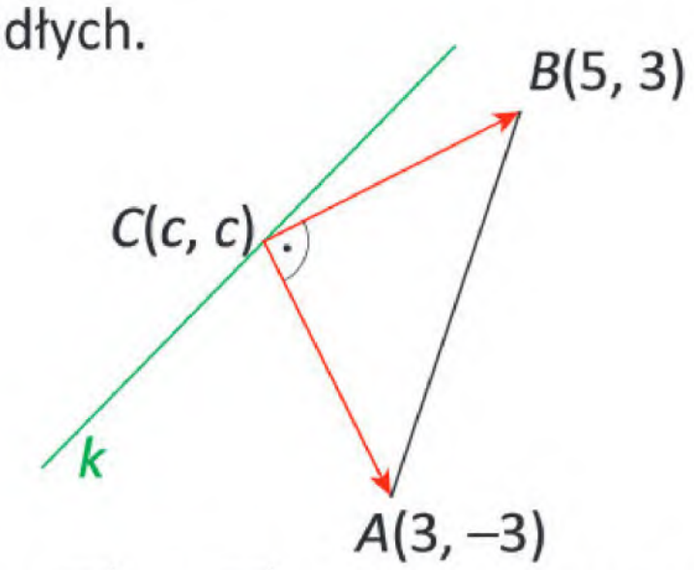
Rozwiązaniami równania $2x^2 - 8x + 6 = 0$ są liczby 1 oraz 3.
Zatem układ równań ma dwa rozwiązania. Mamy

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Dwa punkty spełniają warunki zadania: $C_1(1, 1)$ oraz $C_2(3, 3)$. Poniższy rysunek ilustruje tę sytuację.



II sposób – Korzystamy z własności wektorów prostopadłych.



Punkt C należy do prostej k: $y = x$.
Możemy przyjąć, że $C(c, c)$. Wówczas

$$\overrightarrow{CA} = [3-c, -3-c]$$

$$\overrightarrow{CB} = [5-c, 3-c]$$

Mamy wyznaczyć punkt C taki, że $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$.
Z twierdzenia 2 str. 459 wynika, że niezerowe wektory $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ są prostopadłe tylko wtedy, gdy

$$(3-c)\cdot(5-c) + (-3-c)\cdot(3-c) = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$c^2 - 8c + 15 + c^2 - 9 = 0$$

$$c^2 - 4c + 3 = 0, \qquad \Delta = 4, \quad \sqrt{\Delta} = 2 \qquad c = 1 \text{ lub } c = 3$$

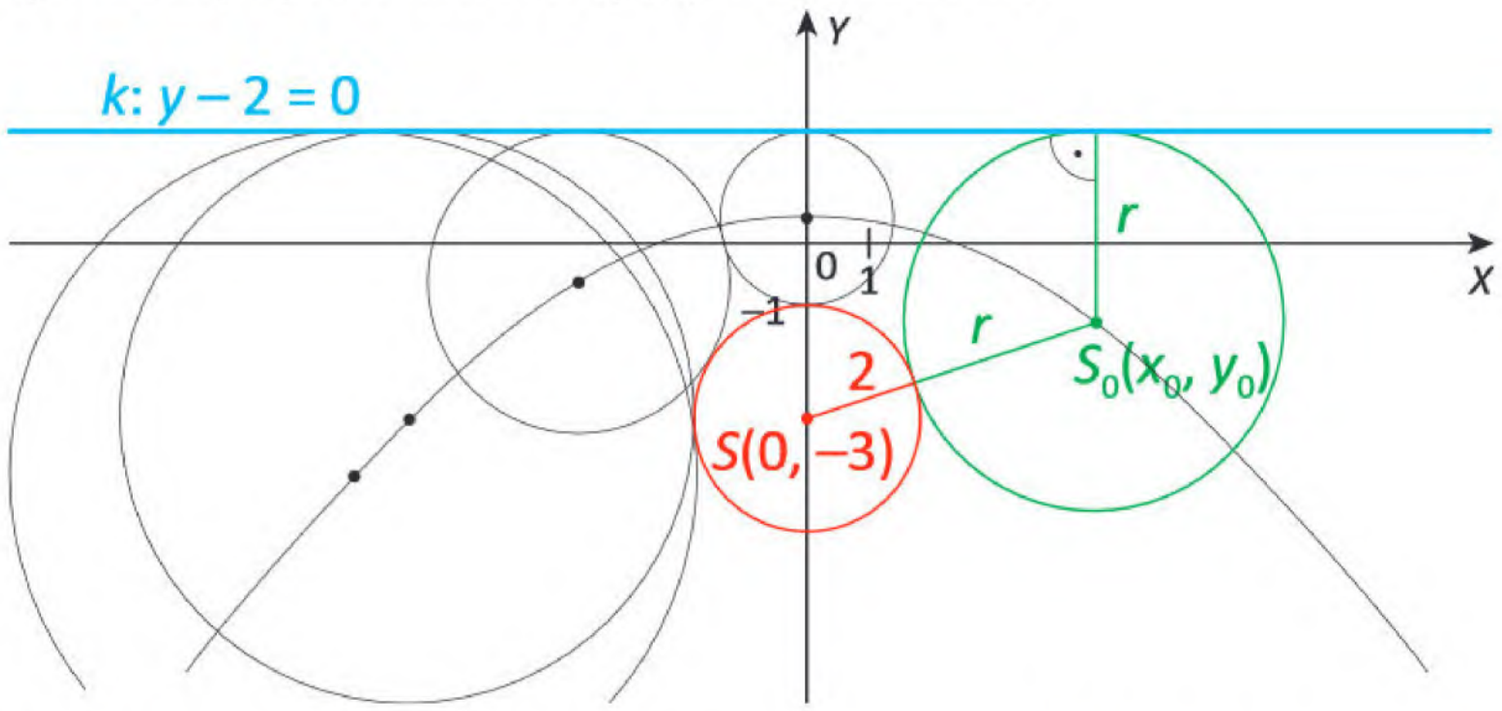
Szukane punkty, to: $C_1(1, 1)$, $C_2(3, 3)$.

Ćwiczenie 4. Dane są punkty $A(-1, 2)$, $B(7, 8)$. Wyznacz na osi OX punkt C tak, aby $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$.

Przykład 5.

Wyznaczymy równanie, opisujące zbiór środków wszystkich okręgów, które są styczne zewnętrznie do okręgu o: $x^2 + (y+3)^2 = 4$ i jednocześnie styczne do prostej k: $y - 2 = 0$.

Najpierw wykonamy rysunek ilustrujący treść zadania.



Niech punkt $S_0(x_0, y_0)$ będzie środkiem okręgu spełniającego warunki zadania, r – promieniem tego okręgu. Zauważ, że $y_0 < 2$.
Prosta k: $y - 2 = 0$ jest styczna do okręgu $o(S_0, r)$, więc odległość punktu S_0 od tej prostej jest równa r. Obliczamy:

$$d(S_0, k) = \frac{|y_0 - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y_0 - 2| \quad \text{i} \quad y_0 < 2, \quad \text{stąd} \quad d(S_0, k) = 2 - y_0$$

Otrzymaliśmy

$r = 2 - y_0$, gdzie $y_0 < 2$.

Okrąg o środku $S_0(x_0, y_0)$ i promieniu r jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku $S(0, -3)$ i promieniu 2. Wówczas

$|S_0S| = r + 2 = (2 - y_0) + 2 = 4 - y_0$ oraz $|S_0S| = \sqrt{x_0^2 + (3 + y_0)^2}$

Rozwiązujemy równanie

$$\sqrt{x_0^2 + (3 + y_0)^2} = 4 - y_0, \quad \text{gdzie } y_0 < 2.$$

Obie strony równania są dodatnie. Po podniesieniu ich do kwadratu otrzymujemy równanie równoważne danemu.

$x_0^2 + (3 + y_0)^2 = (4 - y_0)^2$

$x_0^2 + 9 + 6y_0 + y_0^2 = 16 - 8y_0 + y_0^2$, stąd

$$y_0 = -\frac{1}{14}x_0^2 + \frac{1}{2}$$

Zauważ, że warunek $y_0 < 2$ jest spełniony dla dowolnej liczby rzeczywistej x_0.

Środki wszystkich okręgów stycznych zewnętrznie do okręgu o: $x^2 + (y + 3)^2 = 4$ i jednocześnie stycznych do prostej k: $y - 2 = 0$ należą do paraboli o równaniu

$$y = -\frac{1}{14}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Dane są punkty $A(-3, -2)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 6)$, $D(-7, 6)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym. Następnie oblicz wysokość tego trapezu.

D 2. Dane są punkty $A(-4, -5)$, $B(4, -1)$, $C(5, 2)$, $D(-1, 4)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym. Następnie oblicz pole tego trapezu.

D 3. Dane są punkty $A(-5, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 5)$, $D(-4, 6)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem. Następnie wyznacz równanie okręgu, który jest styczny do każdego boku tego kwadratu.

D 4. Dane są punkty $A(0, 1)$, $B(2, -2)$, $C(8, 2)$, $D(6, 5)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem. Następnie wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki tego prostokąta.

5. Dane są punkty $A(3, -4)$ oraz $B(5, 4)$. Wyznacz na osi OY punkt C tak, aby kąt ACB był prosty. Następnie oblicz pole trójkąta ABC.

6. Dane są punkty $A(7, 6)$, $B(-6, 6)$. Wyznacz na osi OX punkt C tak, aby kąt ACB był prosty. Oblicz pole trójkąta ABC.

7. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta równobocznego ABC, wiedząc, że punkt A jest wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = x^2$, punkt B leży na jednym z jej ramion, a punkt C należy do ujemnej półosi OX. Napisz równanie okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

D 8. Wykaż, że okrąg o: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$ jest styczny do osi OY. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta równobocznego ABC wpisanego w ten okrąg, wiedząc, że A jest punktem styczności okręgu o z osią OY.

9. Przekątne prostokąta mają długość 10 i zawierają się w prostych k: $y - 3 = 0$ oraz m: $3x - 4y + 9 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta.

10. Przekątna AC kwadratu $ABCD$ zawiera się w prostej k: $y = 2x + 3$ i przecina się z przekątną BD w punkcie $S(-1, 1)$. Wiedząc, że pole kwadratu jest równe 40, oblicz współrzędne punktów A, B, C, D.

11. Dane są punkty: $A(0, 0)$, $B(6, 2)$. Wyznacz punkty C i D, dla których czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem o polu równym 20, wiedząc, że punkt D należy do prostej k: $y = 2x$.

12. Punkty $A(-7, 2)$, $B(1, -4)$ są kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D.

13. Wyznacz równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów, jakie tworzą dwie przecinające się proste k i m, opisane równaniami:
    a) k: $x - 3y + 2 = 0$, m: $3x + y + 4 = 0$
    b) k: $12x + 5y - 2 = 0$, m: $-3x + 4y + 1 = 0$.

14. Wyznacz równanie krzywej, będącej zbiorem wszystkich punktów, których odległość:
    a) od punktu $A(2, 0)$ jest dwa razy większa niż odległość od punktu $B(-4, 0)$
    b) od punktu $A(0, -1)$ jest trzy razy mniejsza niż odległość od punktu $B(0, 7)$.

15. Wyznacz równanie krzywej, będącej zbiorem punktów, których odległość:
    a) od osi OX jest taka sama, jak odległość od punktu $A(0, -4)$
    b) od prostej k: $y = 1$ jest taka sama, jak odległość od punktu $B(-2, 3)$.

16. Wyznacz zbiór środków wszystkich okręgów zewnętrznie stycznych do okręgu o: $x^2 + y^2 = 4$ i jednocześnie stycznych do prostej:
    a) k: $y + 4 = 0$ b) m: $y + 2 = 0$

17. Wyznacz równanie okręgu o najmniejszym promieniu, stycznego zewnętrznie do okręgu o: $(x + 3)^2 + y^2 = 25$ i jednocześnie stycznego do prostej k: $4x + 3y - 38 = 0$.

Wybrane przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych

Ćwiczenie 1. Przypomnij sobie określenie symetrii osiowej, symetrii środkowej i przesunięcia równoległego na płaszczyźnie.

W klasie drugiej omówiliśmy przekształcenia geometryczne i podaliśmy wzory na wyznaczanie obrazów punktów w tych przekształceniach w układzie współrzędnych. Niech P oznacza przekształcenie płaszczyzny, wówczas:

- $P((x,y))=(x,-y)$ symetria osiowa względem osi OX
- $P((x,y))=(-x,y)$ symetria osiowa względem osi OY
- $P((x,y))=(-x,-y)$ symetria środkowa względem punktu (0, 0)
- $P((x,y))=(x+a,y+b)$ przesunięcie równoległe o wektor $[a, b]$

Przykład 1.

Znajdziemy obrazy punktów $A(-3, 5)$ oraz $B(0, 1)$ w przekształceniu P, gdzie

a) $P(x, y) = (-x, y)$ b) $P(x, y) = (x + 3, y - 1)$

Ad a) Niech obrazem punktu A w przekształceniu P będzie punkt A_1, zaś obrazem punktu B – punkt B_1. Mamy:

$$P(A)=P((-3,5))=(3,5) \qquad A_1(3, 5)$$
$$P(B)=P((0,1))=(0,1) \qquad B_1(0, 1)$$

Ad b) Niech $P(A) = A_2$, $P(B) = B_2$. Otrzymujemy:

$$P(A)=P((-3,5))=(-3+3,5-1)=(0,4) \qquad A_2(0, 4)$$
$$P(B)=P((0,1))=(0+3,1-1)=(3,0) \qquad B_2(3, 0)$$

Ćwiczenie 2. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty A i B z przykładu 1., następnie punkty A_1, B_1 oraz punkty A_2 i B_2. Oblicz $|AB|$, $|A_1B_1|$ oraz $|A_2B_2|$.

Powyższe przekształcenia są izometriami.

Izometria to takie przekształcenie P płaszczyzny, w którym odległość między dowolnymi punktami A, B tej płaszczyzny jest taka sama, jak odległość między ich obrazami $P(A)$, $P(B)$, czyli

$$|AB| = |P(A)P(B)|.$$

Potocznie mówimy, że izometria zachowuje wielkość i kształt figury.

Przykład 2.

Wykażemy, że przekształcenie P, gdzie $P\big((x,y)\big)=(x+4,-y)$ jest izometrią.

Wystarczy pokazać, że odległość między dwoma dowolnymi punktami płaszczyzny jest taka sama, jak między obrazami tych punktów w przekształceniu P.
Niech A i B będą dowolnymi punktami płaszczyzny, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Wówczas

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Znajdujemy obrazy A_1 i B_1 punktów A i B w przekształceniu P i wyznaczamy długość odcinka A_1B_1.

$$A_1=P(A)=P\big((x_A,y_A)\big)=(x_A+4,-y_A) \qquad \text{oraz}$$

$$B_1=P(B)=P\big((x_B,y_B)\big)=(x_B+4,-y_B)$$

Wówczas

$$|A_1B_1|=\sqrt{\big[x_B+4-(x_A+4)\big]^2+\big[-y_B-(-y_A)\big]^2}=$$

$$=\sqrt{(x_B+4-x_A-4)^2+(-y_B+y_A)^2}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Zatem $|A_1B_1|=|AB|$. A to znaczy, że przekształcenie P jest izometrią.

Ćwiczenie 3. Wykaż metodą pokazaną w przykładzie 2., że symetria środkowa względem punktu (0, 0) jest izometrią.

Przykład 3.

Pokażemy, że przekształcenie P, gdzie $P\big((x,y)\big)=(2x,y-1)$ nie jest izometrią.

W tym celu wystarczy wskazać dwa punkty A, B, dla których $|AB| \neq |P(A)P(B)|$.
Niech $A(0, 0)$ i $B(1, 0)$. Wówczas $|AB| = 1$.
Wyznaczamy obrazy $P(A)$ i $P(B)$ punktów A i B.

$$P(A)=P\big((0,0)\big)=(2\cdot 0,0-1)=(0,-1) \qquad \text{oraz}$$

$$P(B)=P\big((1,0)\big)=(2\cdot 1,0-1)=(2,-1)$$

Mamy $|P(A)P(B)| = 2$, więc $|P(A)P(B)| \neq |AB|$, co kończy dowód.

Przykład 4.

Wyznaczymy obraz okręgu o: $(x-2)^2+(y-1)^2=8$ w symetrii środkowej względem punktu (0, 0).

Środkiem okręgu o jest punkt (2, 1), a promień jest równy $2\sqrt{2}$. Symetria środkowa jest izometrią, więc zachowuje kształt i wielkość figury. Obrazem okręgu o jest okrąg do niego przystający o_1. Obrazem środka okręgu o jest środek okręgu o_1, a promienie okręgów o i o_1 są równe.

Wyznaczamy obraz punktu (2, 1) w symetrii środkowej względem punktu (0, 0). Otrzymujemy punkt (–2, –1). Jest to środek okręgu o_1. Promień tego okręgu jest równy $2\sqrt{2}$. Równanie okręgu o_1 można zapisać następująco:

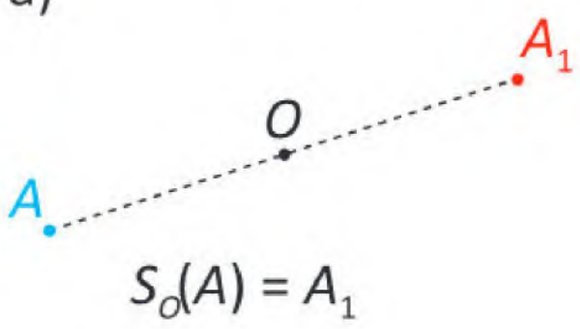
$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$$

Ćwiczenie 4. Naszkicuj okręgi z przykładu 4. we wspólnym układzie współrzędnych. Sprawdź, że punkt $A(4, -1)$ należy do okręgu o. Zaznacz punkt A i jego obraz w symetrii środkowej względem punktu (0, 0).

Ćwiczenie 5. Wyznacz obraz okręgu o równaniu $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 8$ w symetrii osiowej względem osi OX. Naszkicuj oba okręgi we wspólnym układzie współrzędnych.

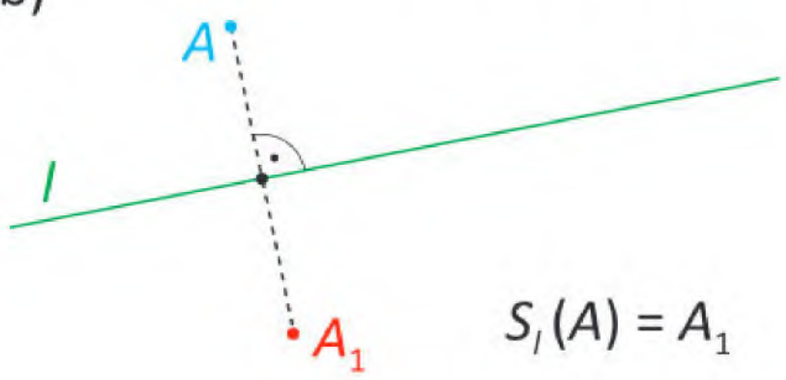
Wiesz już, że w symetrii środkowej o środku O punkt A i jego obraz A_1 są końcami odcinka, którego środkiem jest punkt O, zobacz rysunek a). Natomiast w symetrii osiowej o osi l punkt A i jego obraz punkt A_1 są końcami odcinka prostopadłego do osi l i takiego, że środek tego odcinka należy do prostej l, jak na rysunku b).

a)



$S_O(A) = A_1$

b)



$S_l(A) = A_1$

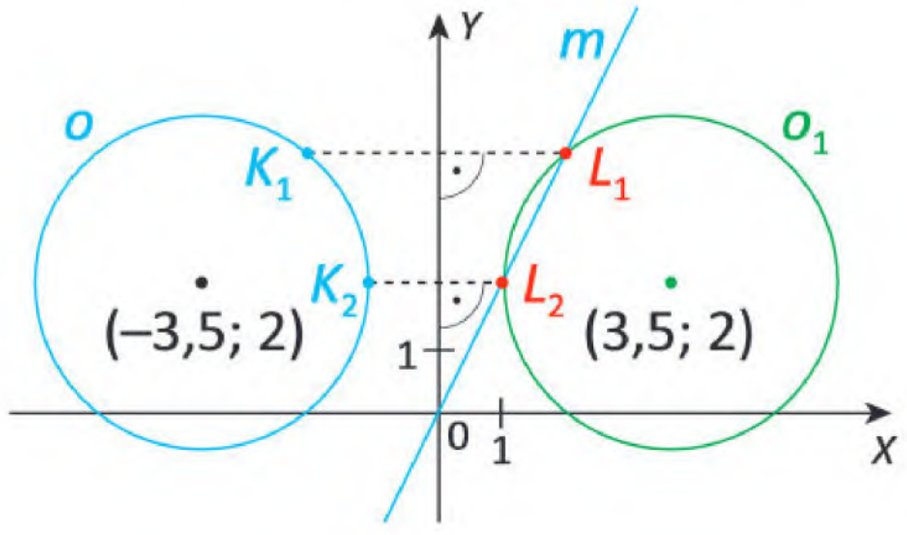
Przykład 5.

Dany jest okrąg o: $(x + 3{,}5)^2 + (y - 2)^2 = 6{,}25$ oraz prosta m: $y = 2x$. Wyznaczymy takie punkty K i L, że:
– punkt K należy do okręgu o, punkt L należy do prostej m oraz
– odcinek KL jest prostopadły do osi OY, a środek tego odcinka należy do osi OY.

Zauważamy, że punkty K, L są położone symetrycznie względem osi OY. Ponieważ nie wiemy, który punkt okręgu o przekształcić przez symetrię osiową – aby jego obraz należał do prostej m – przekształcamy cały okrąg o. Niech okrąg o_1 będzie obrazem okręgu o w tym przekształceniu. Wówczas punkt L – to punkt wspólny okręgu o_1 i prostej m.

Obrazem okręgu w symetrii względem osi OY jest okrąg

o_1: $(x - 3{,}5)^2 + (y - 2)^2 = 6{,}25$.



Wyznaczamy punkty wspólne prostej m i okręgu o_1, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x-3{,}5)^2 + (y-2)^2 = 6{,}25 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{stąd}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy dwa punkty:

$L_1(2, 4)$ oraz $L_2(1, 2)$

Punkty K_1 i K_2 są obrazami punktów L_1 i L_2 w symetrii względem osi OY, więc

$K_1(-2, 4)$, $K_2(-1, 2)$.

Ze sposobu rozwiązania wynika, że punkty K_1 i K_2 należą do okręgu o.

Istnieją dwie pary punktów spełniające warunki zadania: $K_1(-2, 4)$, $L_1(2, 4)$ oraz $K_2(-1, 2)$, $L_2(1, 2)$.

Ćwiczenie 6. Rozwiąż przykład 5., wyznaczając najpierw punkty K_1 i K_2. W tym celu wyznacz obraz m_1 prostej m w symetrii względem osi OY, a następnie oblicz współrzędne punktów wspólnych okręgu o i prostej m_1.

Na koniec tego tematu omówimy jeszcze jedno przekształcenie.

Definicja 1.

Jednokładnością o środku w punkcie S i skali k, $k \neq 0$, nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi A płaszczyzny przyporządkowuje taki punkt A_1, że

$$\overrightarrow{SA_1} = k \cdot \overrightarrow{SA}.$$

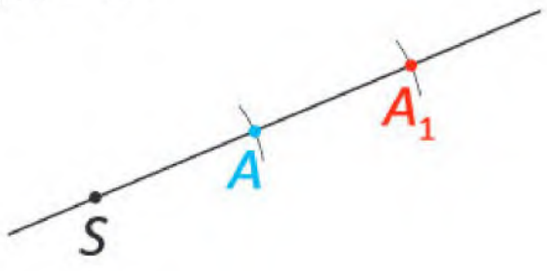
Taką jednokładność będziemy oznaczać J_S^k. Punkt A_1 nazywamy obrazem punktu A w jednokładności o środku S i skali k.

Przykład 6.

Na płaszczyźnie dany jest punkt S oraz punkt A, różny od S. Znajdziemy obraz A_1 punktu A w jednokładności o środku w punkcie S i skali k, gdzie:

a) $k = 2$ b) $k = -3$

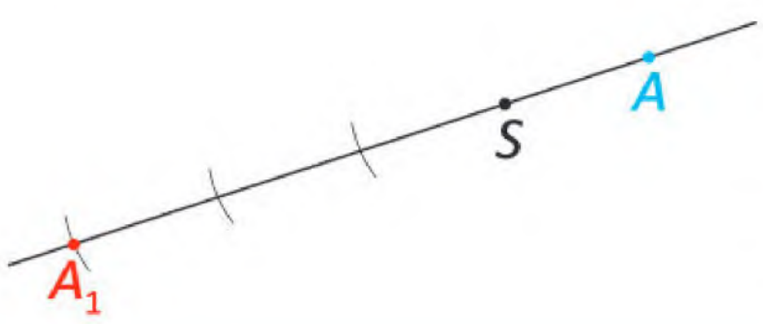
Ad a) $k = 2$



$$J_S^2(A) = A_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA_1} = 2 \cdot \overrightarrow{SA}$$

Punkt A_1 znajduje się na półprostej $SA^{\rightarrow}$ oraz $|SA_1| = 2 \cdot |SA|$.

Ad b) $k = -3$



$$J_S^{-3}(A) = A_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA_1} = -3 \cdot \overrightarrow{SA}$$

Punkt A_1 leży na prostej SA,
po przeciwnej stronie punktu S
niż punkt A oraz $|SA_1| = 3 \cdot |SA|$.

Zauważ, że jednokładność o skali 1 jest identycznością.

Ćwiczenie 7. Zaznacz na płaszczyźnie trzy różne punkty A, B i S. Wyznacz obrazy punktów A i B w jednokładności o środku w punkcie S i skali:

a) $\frac{1}{2}$ b) -2 c) -1.

Jaką izometrią jest jednokładność o skali -1? Jakie są punkty stałe jednokładności o skali różnej od 1?

Twierdzenie 1.
Obrazem wektora $\overrightarrow{AB}$ w jednokładności J_S^k jest wektor do niego równoległy $\overrightarrow{A_1B_1}$, gdzie $A_1 = J_S^k(A)$ i $B_1 = J_S^k(B)$. Ponadto $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}|$.

Założenie: $A_1 = J_S^k(A),\ B_1 = J_S^k(B),\ k \neq 0$

Teza: $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ i $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}|$

Dowód: Zauważmy, że $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1S} + \overrightarrow{SB_1}$, czyli

$\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SB_1}$.

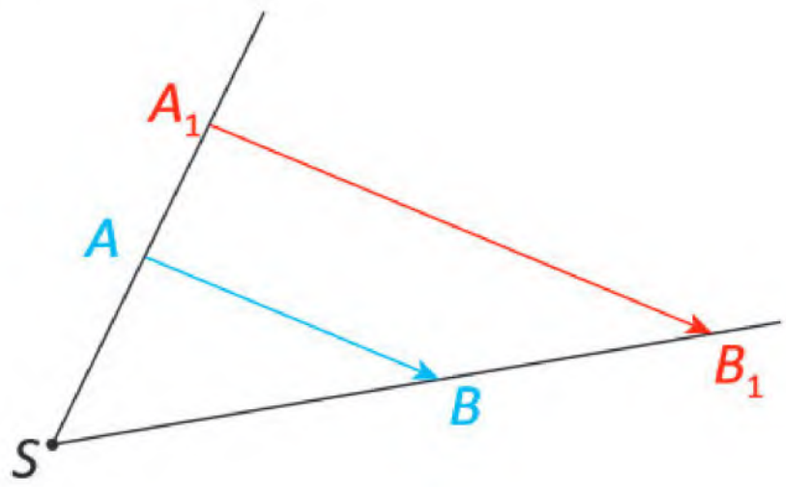
Z definicji jednokładności wiemy, że

$\overrightarrow{SA_1} = k \cdot \overrightarrow{SA}$ oraz $\overrightarrow{SB_1} = k \cdot \overrightarrow{SB}$, więc

$\overrightarrow{A_1B_1} = -k \cdot \overrightarrow{SA} + k \cdot \overrightarrow{SB}$

$\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AS} + k \cdot \overrightarrow{SB}$

$\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}) = k \cdot \overrightarrow{AB}$



Wektory $\overrightarrow{A_1B_1}$ i $\overrightarrow{AB}$ są równoległe oraz $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}|$, co kończy dowód.

Twierdzenie 2.
Jeśli $A_1 = J_S^k(A)$ i $B_1 = J_S^k(B)$, $A \neq B$, to obrazem prostej AB w tej jednokładności jest prosta A_1B_1 równoległa do prostej AB, zaś obrazem odcinka AB – równoległy do niego odcinek A_1B_1.

Jednokładność o skali k, gdzie $|k| \neq 1$, nie jest izometrią.

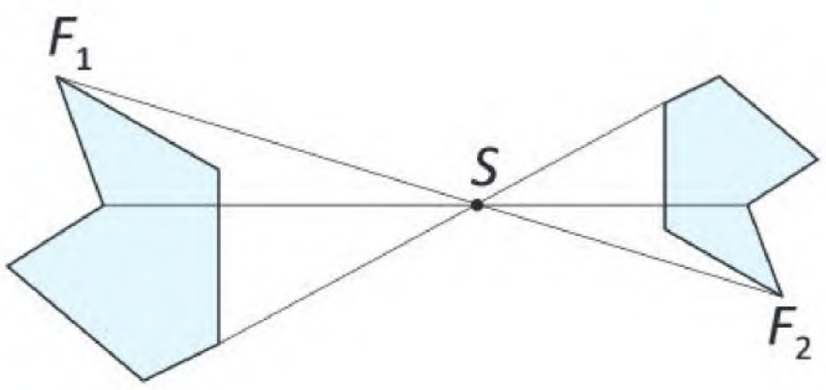
Twierdzenie 3.
Obrazem kąta w jednokładności jest kąt do niego przystający.

Ćwiczenie 8. Zaznacz na płaszczyźnie punkty A, B, C, S.
a) Wyznacz obrazy tych punktów w jednokładności o środku w punkcie S i skali 2.
b) Poprowadź boki trójkątów ABC oraz $A_1B_1C_1$ i porównaj ich długości.

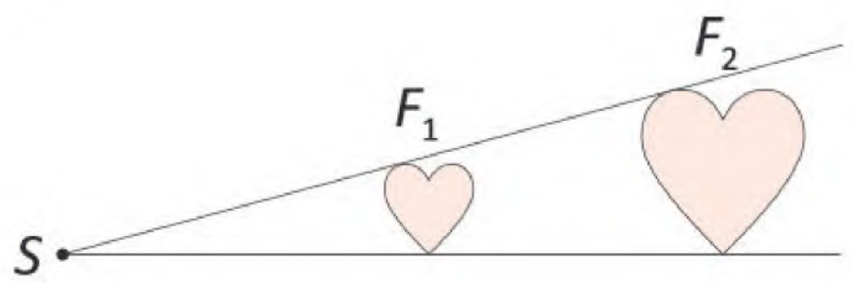
Definicja 2.
Figury F_1 i F_2 nazywamy **figurami jednokładnymi**, jeśli istnieje jednokładność J_S^k przekształcająca figurę F_1 na figurę F_2.

Poniższe rysunki ilustrują pary figur jednokładnych. Na każdym rysunku punkt S oznacza środek jednokładności.

a)



b)



Ćwiczenie 9. Na którym z powyższych rysunków jednokładność przekształcająca figurę F_1 na figurę F_2 jest dodatnia, a na którym – ujemna?

Jeśli obrazem figury F_1 w jednokładności o skali k, $k \neq 0$, jest figura F_2, to figura F_2 jest podobna do figury F_1 w skali $|k|$.

Rozpatrzymy teraz jednokładność na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych o środku w punkcie $O(0, 0)$ i skali k, $k \neq 0$. Niech obrazem punktu $A(x, y)$ w tej jednokładności będzie punkt $A_1(x_1, y_1)$. Z definicji 1. mamy:

$\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ gdzie $O(0, 0)$, $A(x, y)$, $A_1(x_1, y_1)$. Wówczas:
$[x_1, y_1] = k \cdot [x, y]$, stąd
$x_1 = k \cdot x \quad \wedge \quad y_1 = k \cdot y$

W jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali k, $k \neq 0$, obrazem punktu $A(x, y)$ jest taki punkt $A_1(x_1, y_1)$, że $x_1 = k \cdot x$ oraz $y_1 = k \cdot y$.

Przykład 7.

Dane są punkty $A(3, 0)$, $B(6, 6)$, $C(-4, 3)$. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków trójkąta $A_1B_1C_1$, który jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności $J_O^{-0,5}$, gdzie $O(0, 0)$ oraz pola trójkątów ABC i $A_1B_1C_1$.

Wiemy, że

$O(0, 0)$ – środek jednokładności

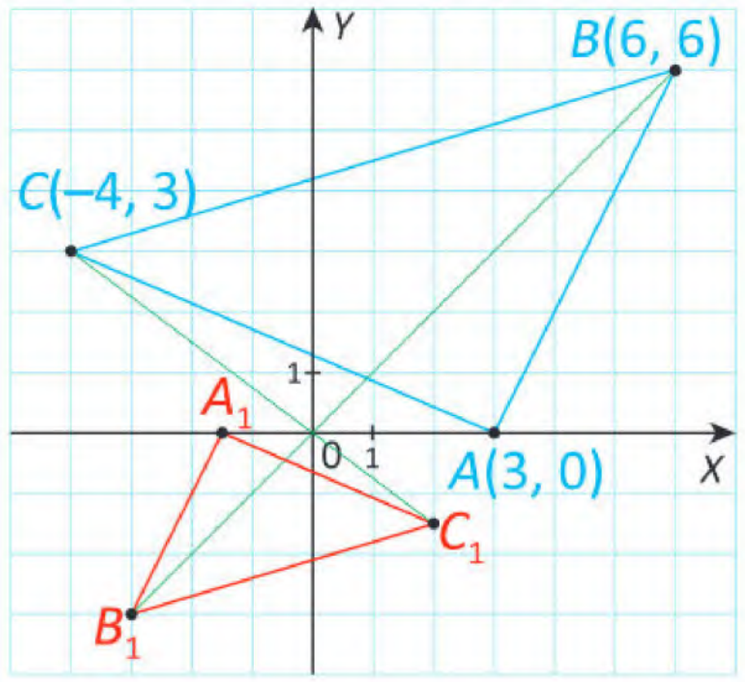
$-0{,}5$ – skala tej jednokładności

Wówczas:

$$A_1\left(-0{,}5\cdot 3;-0{,}5\cdot 0\right), \text{ czyli } A_1\left(-1\frac{1}{2},0\right)$$

$$B_1\left(-0{,}5\cdot 6;-0{,}5\cdot 6\right), \text{ czyli } B_1(-3,-3)$$

$$C_1\left(-0{,}5\cdot(-4);-0{,}5\cdot 3\right), \text{ czyli } C_1\left(2,-1\frac{1}{2}\right)$$



Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali k_1, $k_1=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$. Zatem

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}\cdot P_{ABC}$$

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|, \qquad \text{gdzie} \qquad \overrightarrow{AB}=[3,6], \quad \overrightarrow{AC}=[-7,3]$$

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|9+42\right|=\frac{51}{2} \qquad \text{stąd} \qquad P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{51}{2}=\frac{51}{8}=6\frac{3}{8}$$

Wierzchołki trójkąta $A_1B_1C_1$ mają współrzędne $A_1\left(-1\frac{1}{2},0\right)$, $B_1(-3,-3)$, $C_1\left(2,-1\frac{1}{2}\right)$. Pole trójkąta $A_1B_1C_1$ jest równe $6\frac{3}{8}$.

Przykład 8.

Znajdziemy obraz paraboli o równaniu $y=x^2$ w jednokładności J_O^2, gdzie $O(0, 0)$.

Weźmy dowolny punkt $A(x, y)$ danej paraboli. Niech jego obrazem w tej jednokładności będzie punkt $A_1(x_1, y_1)$. Wówczas:

$$x_1=2x \text{ i } y_1=2y, \qquad \text{stąd} \qquad x=\frac{1}{2}x_1 \text{ i } y=\frac{1}{2}y_1.$$

Punkt $A\left(\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{2}y_1\right)$ należy do paraboli o równaniu $y=x^2$, więc

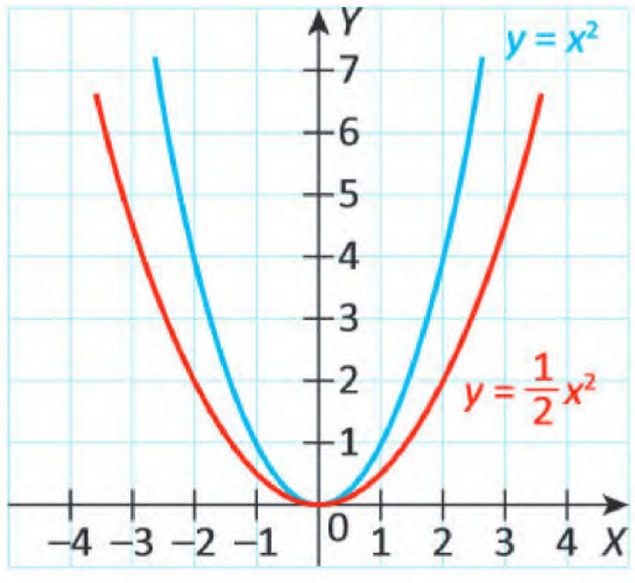
$$\frac{1}{2}y_1=\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2 \qquad \text{czyli} \qquad y_1=\frac{1}{2}x_1^2.$$

Równanie $y_1=\frac{1}{2}(x_1)^2$ jest równaniem paraboli, która jest obrazem paraboli $y=x^2$ w jednokładności J_O^2. Z własności jednokładności wynika, że parabole opisane równaniami $y=x^2$ oraz $y_1=\frac{1}{2}x_1^2$ są podobne.

Aby obie parabole można było narysować w jednym układzie współrzędnych, równanie obrazu paraboli zapisujemy w postaci

$$y=\frac{1}{2}x^2.$$

Rysunek poniżej przedstawia parabolę o równaniu $y = x^2$ i jej obraz w jednokładności o środku w punkcie (0, 0) i skali 2.



Z przykładu 8. wynika nieoczekiwany wniosek: dowolne parabole są podobne, ponieważ parabola $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, jest obrazem paraboli $y = x^2$ w jednokładności o środku $O(0, 0)$ i skali $\frac{1}{a}$ (sprawdź!).

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, że przekształcenie P, gdzie $P((x,y))=(x+4,-y)$ jest izometrią. Wyznacz obrazy A_1, B_1, C_1 punktów $A(-2, 1)$, $B(1, -3)$, $C(3, -2)$ w przekształceniu P. Naszkicuj trójkąt ABC i trójkąt $A_1B_1C_1$ we wspólnym układzie współrzędnych.

D 2. Wykaż, że przekształcenie P, gdzie $P((x,y))=(-x+2,-y-3)$, jest izometrią. Następnie naszkicuj w układzie współrzędnych obraz trójkąta o wierzchołkach $A(-5, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(1, 2)$ w przekształceniu P.

D 3. Wykaż, że przekształcenie P, gdzie $P((x,y))=(-3x,y+1)$, nie jest izometrią.

4. Wyznacz równanie okręgu o_1, będącego obrazem okręgu o: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$
   a) w symetrii osiowej względem osi OX
   b) w symetrii środkowej względem punktu (0, 0).

5. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(-2, 1)$, $B(-3, 5)$, $C(-4, 3)$ oraz czworokąt $KLMN$, gdzie $K(1, 2)$, $L(4, 2)$, $M(4, 5)$, $N(1, 5)$.
   a) Wyznacz obraz $A_1B_1C_1$ trójkąta ABC w symetrii osiowej względem osi OY.
   b) Oblicz pole części wspólnej trójkąta $A_1B_1C_1$ i kwadratu $KLMN$.

6. Dana jest prosta k: $-x + 4y = 2$ i okrąg o: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$. Wyznacz takie punkty A, B, że punkt A należy do prostej k, punkt B należy do okręgu o i środkiem odcinka AB jest punkt $(0, 0)$.

7. Dane są punkty $A(3, 5)$ oraz $B(5, 1)$. Wyznacz na osi OY punkt C tak, aby długość łamanej BCA była najmniejsza z możliwych. Oblicz długość tej najkrótszej łamanej.

8. Dane są punkty $A(-2, 6)$ oraz $C(7, 3)$. Wyznacz na osi OX punkt B tak, aby obwód trójkąta ABC był najmniejszy. Oblicz ten najmniejszy obwód.

9. Punkt A_1 jest obrazem punktu A w symetrii osiowej względem prostej k. Wyznacz współrzędne punktu A_1, jeśli:
   a) $A(0, 5)$, $k: x - 3y + 6 = 0$
   b) $A\left(2\frac{1}{2}, -5\right)$, $k: 3x + 4y = 0$

10. Obrazem okręgu o: $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 33 = 0$ w jednokładności o środku $(0, 0)$ i skali k jest okrąg o_1. Wyznacz środek i promień okręgu o_1, jeśli:
    a) $k = -0{,}5$ b) $k = -1$ c) $k = \sqrt{2}$

11. Wyznacz równanie paraboli, będącej obrazem paraboli o równaniu $y = x^2 - 2x + 1$ w jednokładności o środku $(0, 0)$ i skali k, jeśli:
    a) $k = -2$ b) $k = \frac{1}{3}$ c) $k = -\frac{1}{4}$

D 12. Udowodnij twierdzenie: *Obrazem punktu $A(x, y)$ w symetrii środkowej względem punktu $S(a, b)$ jest punkt $A_1(x_1, y_1)$, gdzie $x_1 = -x + 2a$, $y_1 = -y + 2b$.*

D 13. Udowodnij twierdzenie: *Obrazem punktu $A(x, y)$ w jednokładności o środku $S(a, b)$ i skali k, $k \neq 0$, jest punkt $A_1(x_1, y_1)$, gdzie $x_1 = kx + (1-k)a$, $y_1 = ky + (1-k)b$.*

14. Dane są dwa okręgi o_1: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ oraz o_2: $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$. Wiadomo, że $o_2 = J_S^k(o_1)$, gdzie $S(a, b)$ i $k \neq 0$. Wyznacz współrzędne środka jednokładności S oraz skalę jednokładności k. Rozważ dwa przypadki.

15. Trójkąt ABC, gdzie $A(-2, 1)$, $B(3, -2)$, $C(1, 4)$ przesunięto równolegle o wektor $\vec{u} = [-3, -4]$ i otrzymano trójkąt $A_1B_1C_1$, który przekształcono w J_S^{-2}, gdzie $S(5, -1)$, otrzymując trójkąt $A_2B_2C_2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków i pole trójkąta $A_2B_2C_2$.

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej

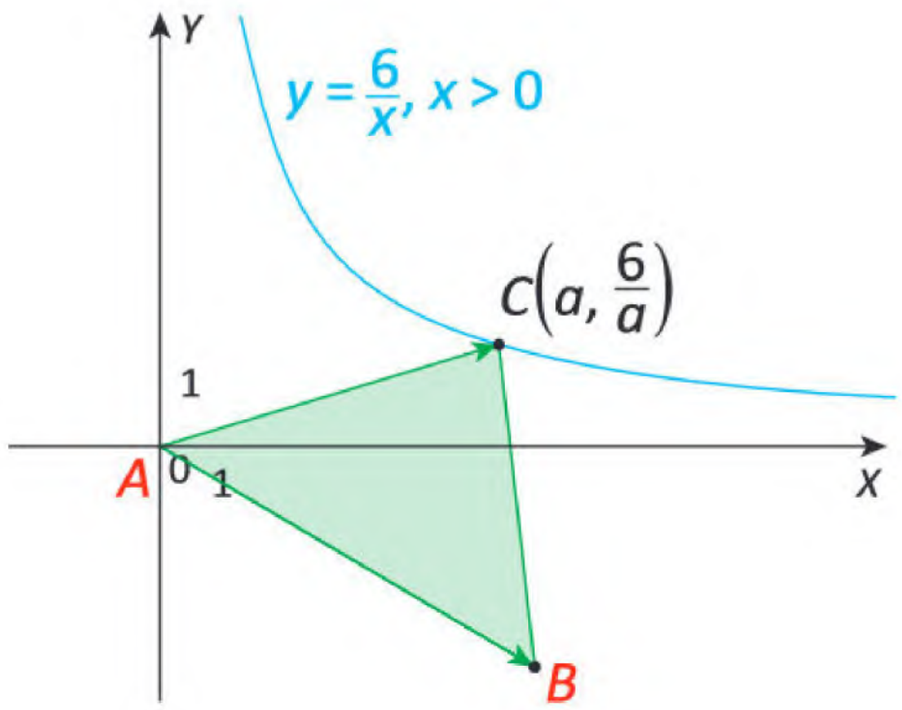
Przykład 1.

Dane są punkty $A(0, 0)$, $B(5, -3)$. Wyznaczymy punkt C należący do wykresu funkcji $y = \frac{6}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, tak aby pole trójkąta ABC było najmniejsze. Obliczymy to najmniejsze pole.

Sytuację opisaną w zadaniu ilustruje rysunek obok. Wprowadźmy oznaczenia:

$$C\left(a, \frac{6}{a}\right), \quad a > 0$$

P – pole trójkąta ABC



Wówczas

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$$

Wyznaczamy wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [5, -3] \qquad \overrightarrow{AC} = \left[a, \frac{6}{a}\right]$$

Wówczas

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left|5 \cdot \frac{6}{a} - a \cdot (-3)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{30}{a} + 3a\right| = \frac{15}{a} + \frac{3}{2}a, \text{ bo } a > 0$$

Funkcję pola opisuje wzór

$$P(a) = \frac{15}{a} + \frac{3}{2}a, \text{ gdzie } a \in (0, +\infty).$$

Funkcja jest wymierna i określona w przedziale otwartym $(0, +\infty)$, więc jest ciągła i różniczkowalna. Obliczamy jej pochodną:

$$P'(a) = -\frac{15}{a^2} + \frac{3}{2}$$

$$P'(a) = \frac{-30 + 3a^2}{2a^2}, \text{ gdzie } a \in (0, +\infty)$$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej.

$$P'(a) = 0 \quad \wedge \quad a \in (0, +\infty)$$

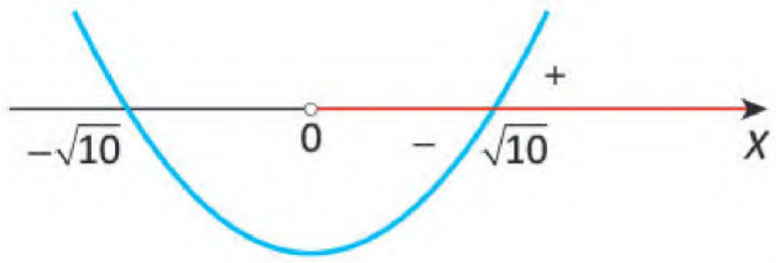
$$3a^2 - 30 = 0, \qquad \left(a = -\sqrt{10} \vee a = \sqrt{10}\right) \quad \wedge \quad a \in (0, +\infty), \text{ stąd } a = \sqrt{10}$$

Funkcja P jest określona w przedziale otwartym $(0, +\infty)$, ma tylko jeden punkt krytyczny i jest ciągła. Zatem wystarczy zbadać jej monotoniczność. Ustalamy znak pochodnej w sąsiedztwie punktu $\sqrt{10}$. Ponieważ mianownik pochodnej jest dodatni, więc znak pochodnej jest taki sam, jak znak jej licznika.

Mamy:

$$P'(a)<0 \Leftrightarrow a\in\left(0,\sqrt{10}\right)$$

$$P'(a)>0 \Leftrightarrow a\in\left(\sqrt{10},+\infty\right)$$



Funkcja P jest malejąca w przedziale $\left(0,\sqrt{10}\right\rangle$ i rosnąca w przedziale $\left\langle\sqrt{10},+\infty\right)$.
To znaczy, że w punkcie $\sqrt{10}$ funkcja P ma minimum lokalne, które jest jednocześnie wartością najmniejszą tej funkcji. Wówczas

$$C\left(\sqrt{10},\frac{6}{\sqrt{10}}\right) \quad \text{czyli} \quad C\left(\sqrt{10},\frac{3\sqrt{10}}{5}\right).$$

Obliczamy najmniejsze możliwe pole trójkąta ABC:

$$P\left(\sqrt{10}\right)=\frac{15}{\sqrt{10}}+\frac{3}{2}\sqrt{10}=3\sqrt{10}.$$

Pole trójkąta ABC jest najmniejsze, jeśli punkt C ma współrzędne $\left(\sqrt{10},\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$.
Wówczas to najmniejsze pole jest równe $3\sqrt{10}$.

Ćwiczenie 1. Oblicz obwód trójkąta ABC znalezionego w przykładzie 1.

Przykład 2.

Rozpatrujemy prostokąty, których dwa wierzchołki o rzędnych większych od –3 należą do paraboli o równaniu $y = 2 – x^2$, a dwa pozostałe wierzchołki leżą na prostej k: $y + 3 = 0$. Wśród tych prostokątów znajduje się taki, którego pole jest największe. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków tego prostokąta.

Sytuację przedstawioną w treści zadania ilustruje rysunek poniżej.

Wprowadźmy oznaczenia:

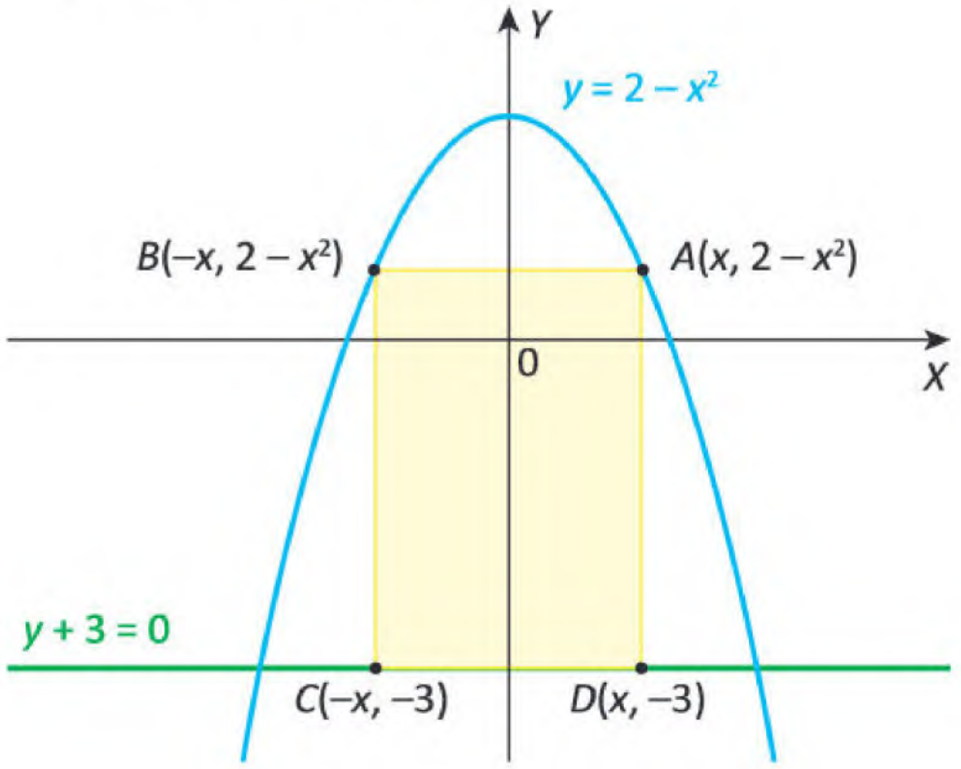
$ABCD$ – szukany prostokąt

A, B – punkty należące do paraboli o równaniu $y = 2 – x^2$.

C, D – punkty należące do prostej k.

Oś OY jest osią symetrii prostokąta $ABCD$.

Niech $A(x, 2 – x^2)$, $x > 0$. Wówczas:
$B(–x, 2 – x^2)$, $C(–x, –3)$ $D(x, –3)$,



1) Obliczamy pole P prostokąta $ABCD$.

$P = |AB| \cdot |AD|$, gdzie

$$|AB| = \sqrt{(-x-x)^2 + (2-x^2-2+x^2)^2} = \sqrt{4x^2} = 2|x| = 2x, \quad \text{bo } x > 0$$

$$|AD| = \sqrt{(x-x)^2 + (-3-2+x^2)^2} = \sqrt{(x^2-5)^2} = |x^2-5|$$

Zatem

$P(x) = 2x \cdot |x^2 - 5|$.

2) Wyznaczamy dziedzinę funkcji P.

Zauważ, że wierzchołki C, D prostokąta znajdują się na prostej k pomiędzy punktami wspólnymi prostej k i danej paraboli. Wyznaczmy współrzędne tych punktów:

$$\begin{cases} y = -3 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x^2 = 5 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{stąd}$$

$$\begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ y = -3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = -3 \end{cases}$$

Liczby należące do dziedziny funkcji P spełniają jednocześnie trzy nierówności:

$x > -\sqrt{5}$ i $x < \sqrt{5}$ i $x > 0$ – z założenia

Zatem dziedziną funkcji P jest przedział $(0, \sqrt{5})$.

Ostatecznie pole prostokąta opisuje funkcja

$P(x) = 2x \cdot |x^2 - 5|$, gdzie $x \in (0, \sqrt{5})$ skąd

$P(x) = 2x(5 - x^2)$, więc

$P(x) = -2x^3 + 10x$, gdzie $x \in (0, \sqrt{5})$.

3) Znajdujemy punkty krytyczne funkcji P. Funkcja P jest różniczkowalna. Obliczamy jej pochodną.

$P'(x) = -6x^2 + 10$, gdzie $x \in (0, \sqrt{5})$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$-6x^2 + 10 = 0 \quad \wedge \quad x \in (0, \sqrt{5})$$

$$\left(x = \frac{\sqrt{15}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{15}}{3}\right) \quad \wedge \quad \in (0, \sqrt{5})$$

$$x = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

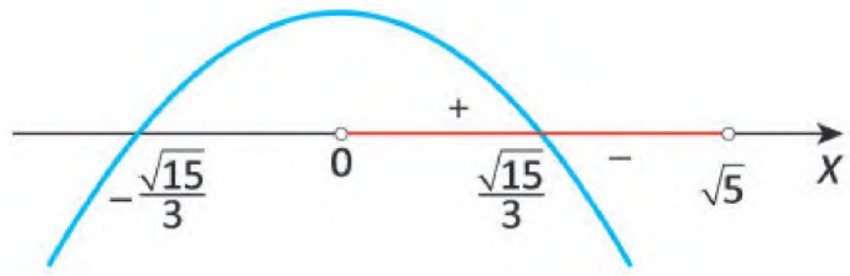
Funkcja P jest określona w przedziale otwartym $(0, \sqrt{5})$, ma tylko jeden punkt krytyczny $\frac{\sqrt{15}}{3}$ i jest funkcją ciągłą.

4) Ustalamy przedziały monotoniczności funkcji P.

Określamy znak pochodnej w sąsiedztwie punktu $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

$$P'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{5}\right)$$

$$P'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$$



Funkcja $y = P(x)$, gdzie $x\in\left(0,\sqrt{5}\right)$, jest rosnąca w przedziale $\left(0,\frac{\sqrt{15}}{3}\right\rangle$ i malejąca w przedziale $\left\langle\frac{\sqrt{15}}{3},\sqrt{5}\right)$. Zatem dla argumentu $\frac{\sqrt{15}}{3}$ funkcja P ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie jej największą wartością.

Wierzchołki prostokąta o największym polu mają współrzędne:

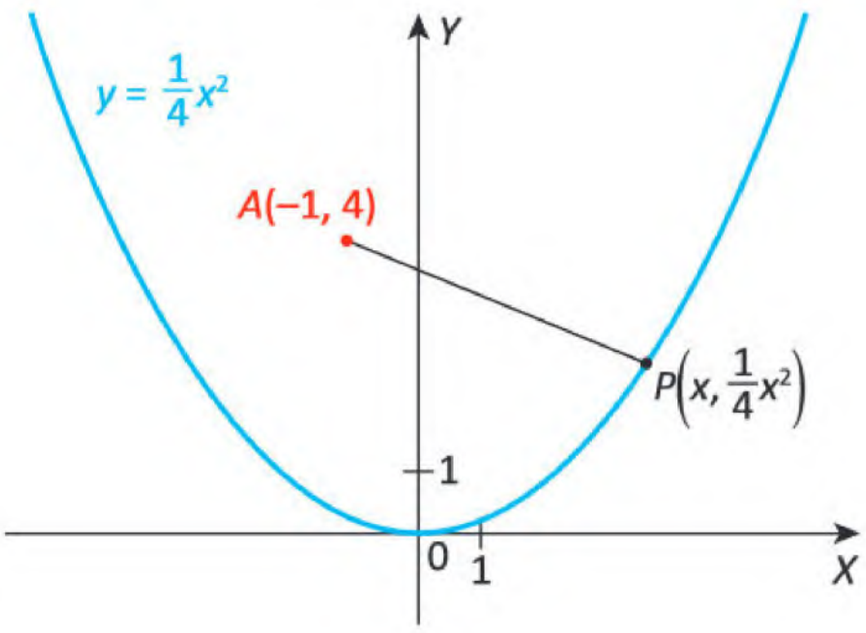
$$A\left(\frac{\sqrt{15}}{3},\frac{1}{3}\right),\ B\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},\frac{1}{3}\right),\ C\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},-3\right),\ D\left(\frac{\sqrt{15}}{3},-3\right).$$

Ćwiczenie 2. Oblicz największe pole prostokąta $ABCD$ z przykładu 2.

Przykład 3.

Wyznaczymy punkt P należący do wykresu funkcji $y=\frac{1}{4}x^2$, którego odległość od punktu $A(-1, 4)$ jest najmniejsza. Obliczymy tę odległość.

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku obok. Szukamy takiego punktu P, dla którego długość odcinka AP jest najmniejsza.



$$|AP|=\sqrt{(x+1)^2+\left(\frac{1}{4}x^2-4\right)^2},\quad \text{czyli}$$

$$|AP|=\sqrt{\frac{1}{16}x^4-x^2+2x+17},\quad x\in\boldsymbol{R}$$

Rozważmy funkcję

$$f(x)=\frac{1}{16}x^4-x^2+2x+17,\ \text{gdzie } x\in\boldsymbol{R}.$$

Zauważ, że funkcja $y=\sqrt{t}$, gdzie $t\geqslant 0$, jest funkcją rosnącą. Zatem funkcja $y=\sqrt{f(x)}$, $x\in\boldsymbol{R}$, przyjmuje najmniejszą wartość wtedy, gdy funkcja $y = f(x)$ przyj-

muje najmniejszą wartość. Wyznaczymy więc taki argument, dla którego funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość.

Funkcja f jako funkcja wielomianowa jest ciągła i różniczkowalna. Obliczamy pochodną funkcji f

$$f'(x)=\frac{1}{4}x^3-2x+2,\quad x\in \boldsymbol{R}$$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^3-2x+2=0 \Leftrightarrow x^3-8x+8=0$$

Zauważ, że jednym z rozwiązań ostatniego równania jest liczba 2 (sprawdź!). Zatem na mocy twierdzenia Bézouta wielomian $x^3 - 8x + 8$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$ (wykonaj to dzielenie!). Mamy

$$x^3 - 8x + 8 = (x - 2)(x^2 + 2x - 4)$$

$$\Delta = 20 \qquad \sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}$$

$$x_1=-1-\sqrt{5} \quad x_2=-1+\sqrt{5}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x=-1-\sqrt{5} \vee x=-1+\sqrt{5} \vee x=2\right)$$

Funkcja f ma trzy punkty krytyczne.

Obliczamy wartości funkcji f w punktach krytycznych. Możemy wykorzystać wzór Newtona do obliczenia wartości dokładnych lub skorzystać z kalkulatora do obliczenia wartości przybliżonych.

Następnie obliczamy granice funkcji f w $+\infty$ i w $-\infty$. Otrzymujemy

$$f\left(-1-\sqrt{5}\right)=\frac{25-5\sqrt{5}}{2}\approx 6{,}91 \qquad f\left(-1+\sqrt{5}\right)=\frac{25+5\sqrt{5}}{2}\approx 18{,}09$$

$$f(2) = 18 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

Na podstawie uzyskanych wyników możemy stwierdzić, że funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla argumentu $-1-\sqrt{5}$.

Szukanym punktem jest punkt $P\left(-1-\sqrt{5}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Odległość punktu P od punktu A jest równa $\sqrt{\frac{25-5\sqrt{5}}{2}}$ (w przybliżeniu 2,63).

Sprawdź, czy rozumiesz. *Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!*

D 1. Wykaż, że styczna do paraboli o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2-x-2$, która jest równoległa do cięciwy AB, gdzie $A(0, -2)$ i $B(4, 2)$, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu równym 8.

2. Wyznacz na paraboli o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2$ punkt, którego odległość od punktu $A(8, -1)$ jest najmniejsza. Podaj tę odległość.

3. Dane są punkty $A(1, -4)$ i $B(5, -2)$. Na wykresie funkcji $y=\frac{-3}{x}$, gdzie $x < 0$, wyznacz współrzędne punktu C, tak aby pole trójkąta ABC było najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

4. Na wykresie funkcji $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x$ wyznacz współrzędne takiego punktu A o odciętej a, $a \in (0, 8)$, że styczna do paraboli w punkcie A wraz z prostymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$ i $x = 4$ ogranicza trapez o najmniejszym polu. Oblicz pole tego trapezu.

5. Wyznacz na gałęzi hiperboli o równaniu $f(x)=\frac{4}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, taki punkt P, którego odległość od punktu $A(-3, 3)$ jest najmniejsza.

6. Wyznacz wymiary prostokąta o maksymalnym polu, którego dwa wierzchołki należą do osi OX, a dwa pozostałe, o rzędnych dodatnich, należą do paraboli o równaniu $y=3-\frac{1}{3}x^2$.

D 7. Rozpatrujemy odcinki równoległe do osi OY, których jeden koniec leży na wykresie funkcji $f(x)=-\sqrt{x}$, zaś drugi koniec na wykresie funkcji $g(x)=\frac{1}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$. Wykaż, że najkrótszy z tych odcinków ma długość $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 8.

Test

1. Jeśli punkt $K(-8, 2)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A(-3 + x, 2 - 3y)$, $B(x + 1, y + 8)$, to suma $x + y$ jest liczbą:

   A. dodatnią B. niewymierną C. złożoną D. parzystą

2. Prosta k: $x + y - \sqrt{3} = 0$ jest nachylona do osi OX pod kątem:

   A. 30° B. 45° C. 60° D. 135°

3. Wskaż równanie prostej, przechodzącej przez punkty $P(-2, 9)$ i $Q(6, 5)$.

   A. $y = x + 11$ B. $y = 0{,}5x + 10$ C. $y = -0{,}5x + 8$ D. $y = 0{,}5x + 2$

4. Odległość między prostymi równoległymi k: $y = x - 3$ oraz l: $x - y + 12 = 0$ jest równa:

   A. 15 B. 10,5 C. $7{,}5\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{11}$

5. Prosta prostopadła do prostej k: $3x - 2y + 6 = 0$ i przechodząca przez punkt $P(-3, 5)$ ma z osią OY punkt wspólny o współrzędnych:

   A. $(0, -3)$ B. $(0, 3)$ C. $(3, 0)$ D. $(-3, 0)$

6. Podstawa AB trójkąta ABC zawiera się w prostej k: $3x - 4y + 2 = 0$. Jeśli $C(1, 6)$, to wysokość trójkąta ABC poprowadzona z punktu C jest równa:

   A. 2,8 B. 3 C. 3,4 D. 3,8

7. Równanie $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$ opisuje okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Wówczas:

   A. $S\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$, $r = 2{,}5$ B. $S\left(-1\frac{1}{2}, 2\right)$, $r = 2{,}5$

   C. $S\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$, $r = 0{,}5\sqrt{7}$ D. $S\left(-1\frac{1}{2}, 2\right)$, $r = 0{,}5\sqrt{7}$

8. Wskaż równanie stycznej do okręgu o: $x^2 + y^2 = 25$ w punkcie $P(3, -4)$.

   A. $x - 5 = 0$ B. $4x + 3y = 0$

   C. $3x - 4y - 25 = 0$ D. $4x - 3y - 24 = 0$

9. Obrazem prostej k: $2x + y - 3 = 0$ w symetrii środkowej względem punktu $(0, 0)$ jest prosta opisana równaniem kierunkowym:

   A. $y = 2x - 3$ B. $y = -2x - 3$ C. $y = 0{,}5x + 3$ D. $y = 0{,}5x - 3$

10. Środek ciężkości trójkąta ABC ma współrzędne $(4, -5)$, a środek boku BC ma współrzędne $(2, -2)$. Zatem wierzchołek A ma współrzędne

    A. $(8, -11)$ B. $(0, 1)$ C. $(6, -8)$ D. $(-4, 7)$

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

Zadania otwarte

11. Dane są punkty $A(-4, -1)$, $B(6, 1)$, $C(-2, 5)$. Oblicz pole trójkąta ABC.

12. Dane są dwa punkty $A(1, 3)$ i $B(9, 5)$. Wyznacz na osi OY punkt C, tak aby pole trójkąta ABC było równe 17.

13. Dane są punkty $A(0,-2)$, $B(4, 6)$, $C(-1, 6)$, $D(-3, 2)$.

D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.

b) Oblicz pole tego trapezu.

14. Dane są punkty $A(-4, 3)$, $B(1, -2)$, $C(8, -1)$, $D(3, 4)$.

D a) Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest rombem.

b) Wyznacz równanie okręgu stycznego do każdego boku tego rombu.

15. Punkt A jest wierzchołkiem paraboli p: $y = (x - 1)^2$, zaś punkty B i C są punktami wspólnymi tej paraboli i prostej k: $x + y - 3 = 0$.

a) Wyznacz współrzędne punktów A, B, C.

D b) Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny i oblicz jego pole.

16. Oś OX układu współrzędnych jest osią symetrii trójkąta równobocznego ABC. Wiedząc, że $A(5, -4)$, oblicz współrzędne wierzchołków B i C.

17. Punkty $A(-1, 2)$, $B(5, -2)$ należą do okręgu o. Wyznacz równanie okręgu o, wiedząc, że środek tego okręgu leży na prostej k: $x + y + 8 = 0$.

18. Punkty $A(-1, 5)$ i $C(3, -3)$ są końcami przekątnej kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D.

19. Środkiem symetrii równoległoboku jest punkt $O(0, 0)$. Wiedząc, że dwa boki tego równoległoboku zawierają się w prostych k: $x - y - 4 = 0$ i m: $x + 2y + 5 = 0$, wyznacz współrzędne jego wierzchołków.

20. Wyznacz równanie stycznej do okręgu o: $(x - 1)^2 + y^2 = 10$, która jest równoległa do prostej k: $x - 3y + 2 = 0$.

21. Bok AB rombu $ABCD$ zawiera się w prostej k: $y + 2 = 0$, a przekątna AC – w prostej l: $\sqrt{3}x - 3y = 0$. Punkt D należy do dodatniej półosi OY. Wyznacz:

a) miarę kąta ostrego BAD

b) współrzędne wierzchołków tego rombu.

22. Przekształcenie P punktów płaszczyzny jest zdefiniowane w następujący sposób: $P((x,y)) = (-y, x+3)$.

D a) Wykaż, że przekształcenie P jest izometrią.

D b) Wyznacz w układzie współrzędnych obraz A_1B_1 odcinka AB w tym przekształceniu, jeśli $A(-1, 5)$, $B(2, -4)$. Następnie wykaż, że $A_1B_1 \perp AB$.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

23. W trójkącie równoramiennym ABC, $|AC| = |BC|$, wysokość poprowadzona z punktu C zawiera się w prostej $k: x + 2y - 4 = 0$. Wiedząc, że $A(0, -3)$, $C(-6, 5)$, oblicz współrzędne punktu B. Jakie znasz trzy sposoby wyznaczenia środka D podstawy AB tego trójkąta?

24. Dane są okręgi $o_1: x^2 + y^2 - 25 = 0$ oraz $o_2: x^2 + y^2 - 6x - 12y + 5 = 0$.

D a) Wykaż, że te okręgi mają dwa punkty wspólne.

b) Oblicz długość wspólnej cięciwy tych okręgów.

25. Dany jest punkt $A(-7, 0)$ i okrąg $o: x^2 + y^2 + 6x + 4y - 7 = 0$. Wyznacz na okręgu punkty B i C tak, aby trójkąt ABC był równoboczny.

26. Dane są okręgi $o_1: (x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 9$ oraz $o_2: x^2 + y^2 + 4x + 8y + 19 = 0$. Znajdź środek jednokładności, w której obrazem okręgu o_1 jest okrąg o_2. Rozważ dwa przypadki.

27. Wyznacz równanie okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i przechodzącego przez punkt $A(-2, 1)$.

28. Wyznacz równanie okręgu, który jest styczny do prostej $k: x + y + 13 = 0$, natomiast do prostej $l: 7x - y - 5 = 0 = 0$ jest styczny w punkcie $A(1, 2)$.

29. Wyznacz miarę kąta ostrego, jaki tworzą proste k i l.

a) $k: y = -x - 9$ oraz $l: y = 1 + (2 + \sqrt{3})x$

b) $k: y = (2 - \sqrt{3})x - 4$ oraz $l: y = x - 1$

c) $k: y = 5x + 4$ oraz $l: y = -1{,}5x - 2$

30. Wyznacz miary kątów trójkąta, którego boki zawierają się w prostych k, l, m.

a) $k: 2x + y = 0$, $l: (2 + \sqrt{3})x - (2\sqrt{3} - 1)y = 0$, $m: x - 2y + 5 = 0$

b) $k: y - 6 = 0$, $l: \sqrt{3}x + y - 6 = 0$, $m: x + y - \sqrt{3} = 0$

31. Wyznacz liczbę a, $a \in \boldsymbol{R}$, dla której okręgi $o_1: (x + 1)^2 + (y - a)^2 = 4$ oraz $o_2: (x + a)^2 + (y - 2)^2 = 1$ są styczne wewnętrznie. Dla wyznaczonej liczby a napisz równanie wspólnej stycznej do tych okręgów.

32. Na paraboli o równaniu $y = 0{,}5x^2$ wyznacz punkt P, którego odległość od punktu $A(-6, 0)$ jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą odległość.

33. Dane są punkty $A(2, 3)$, $B(6, 1)$. Wyznacz na krzywej $y = \frac{6}{x}$, gdzie $x < 0$, punkt C tak, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze.

34. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, prostopadłej do prostej $k: 2x - y - 3 = 0$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tą styczną, osią OX i prostą $m: x + 5 = 0$.

Odpowiedzi nie umieszczaj w podręczniku!

514

Skorowidz

A

Asymptota pionowa 320
Asymptota pozioma 322
Asymptota ukośna 323

C

Ciąg liczbowy 73
Ciąg skończony 73
Ciąg nieskończony 73
Ciąg rosnący 80
Ciąg malejący 80
Ciąg monotoniczny 80
Ciąg arytmetyczny 85
Ciąg geometryczny 100
Ciąg rozbieżny 150

D

Drzewo 167
Deltoid 213

F

Funkcja homograficzna 52
Funkcja wymierna 64
Figury podobne 245
Funkcja ciągła w punkcie 308
Funkcja ciągła 312
Funkcja pochodna 338
Funkcja okresowa 394
Figury jednokładne 501

G

Granica ciągu 133
Granica funkcji w punkcie 285
Granica lewostronna w punkcie 293
Granica prawostronna w punkcie 293

J

Jednokładność 499

K

Kapitalizacja odsetek 123
Kąt między wektorami 456
Kombinacja 186
Kwadrat 228

M

Minimum lokalne 364
Maksimum lokalne 364

N

Nierówność wymierna 38

O

Okrąg opisany na czworokącie 230
Okrąg wpisany w czworokąt 237

P

Permutacja bez powtórzeń 179
Pole prostokąta 255
Pole równoległoboku 259
Pole rombu 261
Procent składany 121
Prostokąt 227
Podobieństwo 245
Pochodne funkcji trygonometrycznych 443
Prosta styczna do okręgu 479
Prosta sieczna okręgu 479

R

Reguła dodawania 170
Reguła mnożenia 167
Równanie wymierne 26
Równoległobok 222
Równanie kanoniczne okręgu 476
Równanie kierunkowe prostej 461
Równanie ogólne prostej 463
Równanie okręgu w postaci ogólnej 476

S

Sieczna okręgu 479
Styczna do okręgu 479
Styczna do wykresu w punkcie 354
Symbol Newtona 201
Szereg liczbowy 156

Ś

Średnia arytmetyczna 43
Średnia geometryczna 43
Średnia kwadratowa 47

T

Trójkąt Pascala 204
Trapez 215

U

Ułamek algebraiczny 7

W

Wariacja z powtórzeniami 174
Wariacja bez powtórzeń 176
Wektor 451
Wzajemne położenie dwóch okręgów 483

Odpowiedzi do zadań

1. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych, s. 10-11

1. a) $\boldsymbol{R}-\{0\}$ b) $\boldsymbol{R}-\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$ c) $\boldsymbol{R}$ d) $\boldsymbol{R}-\{1\}$
   e) $\boldsymbol{R}-\{-2\}$ f) $\boldsymbol{R}-\{-4, 1\}$ g) $\boldsymbol{R}-\{-3, 0, 3\}$ h) $\boldsymbol{R}-\{-2\}$

3. a) $\frac{1}{3x^2}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{0\}$ b) $-2x$, $x\in\boldsymbol{R}-\{0\}$ c) $\frac{-1}{x^3}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{0\}$
   d) $-\frac{2}{3}x-2\frac{2}{3}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{4\}$ e) $\frac{5x-1}{5x+1}$, $x\in\boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ f) $\frac{4x^2-6x+9}{3}$, $x\in\boldsymbol{R}-\left\{-1\frac{1}{2}\right\}$
   g) $\frac{x-2}{x-3}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{-3, 3\}$ h) $2-x$, $x\in\boldsymbol{R}$

4. a) $\frac{x+7}{3x+6}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{-2, 2\}$ b) $2x-6$, $x\in\boldsymbol{R}-\{2\}$
   c) $3x^5+9x^4$, $x\in\boldsymbol{R}$ d) $x-2$, $x\in\boldsymbol{R}-\{2\}$

5. a) $\frac{1}{x-1}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{1\}$ b) $\frac{3x^2+3x}{x^2+5}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{-1\}$
   c) $\frac{x^2+1}{x+3}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{-3, -1, 1\}$ d) $x-1$, $x\in\boldsymbol{R}-\left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}$
   e) $\frac{x^2-x-6}{x}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{-3, 0, 2\}$ f) $\frac{x-1}{x-2}$, $x\in\boldsymbol{R}-\{-2, 1, 2\}$

6. a) $\frac{5x-1}{2}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-4\}$; $\frac{5\sqrt{2}-1}{2}$ b) $\frac{1}{4x-8}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{2\}$; $\frac{-\sqrt{3}}{12}$
   c) $\frac{3x-1}{x}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\left\{0, \frac{1}{3}\right\}$; $\frac{15-\sqrt[3]{25}}{5}$
   d) $\frac{4}{2-x}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-3, 2\}$; $\frac{16+8\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{9}}{5}$

7. a) $\frac{6x^2}{3x^3}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{0\}$ b) $\frac{x^2-1}{2x^2-5x+3}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\left\{1, 1\frac{1}{2}\right\}$
   c) $\frac{-x^2-6x-9}{x^2-9}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-3, 3\}$ d) $\frac{2x^2+7x+3}{x^3+27}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-3\}$
   e) $\frac{2x^3-6x^2}{2x^3+2x^2}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-1, 0\}$ f) $\frac{3x^2+21x}{2x^2+12x-14}$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-7, 1\}$

8. a) $\frac{x^3+5x}{x^3-x^2+5x-5}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{1\}$ b) $\frac{x^3-x^2}{x^3+5x^2-6x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{-6, 0, 1\}$

c) $\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-x-10}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\left\{-1\frac{2}{3}, 2\right\}$ d) $\frac{x^3-2x^2+3x-6}{x^2-4}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{-2, 2\}$

e) $\frac{x^3+2x^2-9x-18}{4x^3-4x^2-24x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{-2, 0, 3\}$ f) $\frac{-x^3+3x^2-2x}{8x-x^4}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}-\{0, 2\}$

Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych, s. 16

1. a) $\frac{2x-7}{3}$, $D=\boldsymbol{R}$ b) $\frac{x^2+4}{4}$, $D=\boldsymbol{R}$ c) $\frac{-x^3+2x^2-3x+30}{6x}$, $D=\boldsymbol{R}-\{0\}$

d) $\frac{4x+5}{x+1}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-1\}$ e) $\frac{2x^2-4x-5}{x-2}$, $D=\boldsymbol{R}-\{2\}$ f) $\frac{-4x+9}{x-1}$, $D=\boldsymbol{R}-\{1\}$

2. a) $\frac{2x^2+17x}{3(x-2)}$, $D=\boldsymbol{R}-\{2\}$ b) $\frac{x^2+2x}{6-x}$, $D=\boldsymbol{R}-\{6\}$ c) $\frac{6x+3}{x^2-1}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$

d) $\frac{5}{3-x}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-3, 3\}$ e) $\frac{x^2-3x+16}{4x^2(x-2)}$, $D=\boldsymbol{R}-\{0, 2\}$ f) $\frac{-4x+2}{x-3}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-2, 3\}$

3. a) $\frac{2x+5}{x(x+1)}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-1, 0\}$ b) $2\frac{1}{2}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-2\}$

c) $\frac{-x^2+6x+17}{(x-2)(x-3)(x+3)}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-3, 2, 3\}$ d) $\frac{1}{x-4}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-4, 4\}$

e) $\frac{-1}{x(x-1)}$, $D=\boldsymbol{R}-\{0, 1\}$ f) $\frac{-1}{x+3}$, $D=\boldsymbol{R}-\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$

4. a) $\frac{2}{x+5}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-5\}$ b) $\frac{5}{2x-4}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-2, 2\}$ c) $\frac{x-5}{3x-1}$, $D=\boldsymbol{R}-\left\{-5, \frac{1}{3}\right\}$

d) $\frac{x-1}{2x-3}$, $D=\boldsymbol{R}-\left\{-1, 1\frac{1}{2}\right\}$ e) $\frac{x^2-10x}{x^3+8}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-2\}$ f) $\frac{x-1}{6x^2+6x+6}$, $D=\boldsymbol{R}-\{1\}$

5. a) $\frac{-3x^3-7x^2}{(x^2-3)(x-5)^2(x+2)}$, $x \in \boldsymbol{R}-\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2, 5\}$

b) $\frac{4x^3+9x-18}{(x^2+1)(x^2-9)x}$, $x \in \boldsymbol{R}-\{-3, 3, 0\}$ c) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)}$, $x \in \boldsymbol{R}-\{1, 2\}$

d) $\frac{x-10}{(x-4)^2(x^2-1)}$, $x \in \boldsymbol{R}-\{-1, 1, 4\}$ e) $\frac{x^2+3x+1}{x(2x-1)(x+1)}$, $x \in \boldsymbol{R}-\left\{-3, -1, \frac{1}{2}, 0\right\}$

f) $\frac{5x-9}{(x+3)^2(x-1)}$, $x \in \{-3, 1\}$

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych, s. 20

1. a) $\frac{x^2}{10}$ b) $\frac{2x-2}{x}, x \in \boldsymbol{R}-\{0\}$ c) $\frac{20}{x(x-1)}, x \in \boldsymbol{R}-\{0, 1\}$

   d) $\frac{-5}{3}, x \in \boldsymbol{R}-\{2\}$ e) $\frac{6}{x}, x \in \boldsymbol{R}-\{-1, 0\}$ f) $\frac{4x}{2x+1}, x \in \boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

   g) $2x, x \in \boldsymbol{R}-\{-6, 0\}$ h) $\frac{-x-2}{3}, x \in \boldsymbol{R}-\{0, 2\}$ i) $\frac{7}{2-6x}, x \in \boldsymbol{R}-\left\{-1\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

2. a) $1, x \in \boldsymbol{R}-\{2, 3\}$ b) $\frac{2-x}{3-x}, x \in \boldsymbol{R}-\{-3, 2, 3\}$

   c) $\frac{-x^2-6x-36}{27x+9}, x \in \boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 6\right\}$ d) $-\frac{2}{3}x, x \in \boldsymbol{R}-\left\{\frac{1}{2}, 4\right\}$

   e) $\frac{2x+6}{3x}, x \in \boldsymbol{R}-\{-3, 0, 4\}$ f) $\frac{x+2}{x-1}, x \in \boldsymbol{R}-\{1\}$

3. a) $\frac{6}{x+1}, x \in \boldsymbol{R}-\{-5, -1, 1\}$ b) $\frac{2x^2-5x+2}{8x+24}, x \in \boldsymbol{R}-\{-4, -3, 2\}$

   c) $\frac{2x-6}{x-5}, x \in \boldsymbol{R}-\left\{-3, -1, \frac{2}{3}, 5\right\}$ d) $\frac{3}{2}x^3+3x^2+6x, x \in \boldsymbol{R}-\{2\}$

   e) $\frac{x-3}{x}, x \in \boldsymbol{R}-\{-3, 0, 1\}$ f) $3, x \in \boldsymbol{R}-\left\{-1, 1, 2\frac{1}{2}\right\}$

4. a) $\frac{2x+2}{x}, x \in \boldsymbol{R}-\{-1, 0\}$ b) $\frac{x+1}{2x}, x \in \boldsymbol{R}-\{-1, 0\}$

   c) $x^2-7x+10, x \in \boldsymbol{R}-\{-5, -2, 2\}$

5. a) $\frac{5}{4x+20}, x \in \boldsymbol{R}-\{-5, 3\}$ b) $5x-15, x \in \boldsymbol{R}$

   c) $\frac{3x^2+x}{2x-5}, x \in \boldsymbol{R}-\left\{0, 2, 2\frac{1}{2}\right\}$ d) $x^2-x, x \in \boldsymbol{R}-\{0, 1\}$

6. a) $\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+2x+1}, D=\boldsymbol{R}-\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\frac{2x-3}{2x^2+x-3}, D=\boldsymbol{R}-\left\{-1\frac{1}{2}, -1, 1, 1\frac{1}{2}\right\}$

   c) $\frac{x^3+7x^2+9x+18}{x+3}, D=\boldsymbol{R}-\{-6, -3, 1, 6\}$ d) $\frac{x+2}{x-9}, D=\boldsymbol{R}-\{-9, 9\}$

Działania na ułamkach algebraicznych, s. 24

1. a) $\frac{2x^3-1}{2x^3}, x \neq 0$ b) $\frac{x-2}{x}, x \neq 0$ c) $\frac{x-1}{2x^3}, x \neq 0$

d) $\frac{4-2x}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 0\}$ e) $\frac{1}{2x-6}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 3\}$ f) $\frac{1}{2x+1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$

2. a) $\frac{2x-1}{x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0\}$ b) $\frac{6x^2-30x+1}{2x^2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 5\}$

c) $\frac{5}{x+2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 3\}$ d) $\frac{x}{x+2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 1\}$

e) $\frac{2x-10}{3x-9}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 3\}$ f) $\frac{x}{x+2}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, -2, 1\}$

3. a) $\frac{x}{x+3}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, 0\}$ b) $\frac{2x^2-2}{2x-1}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}, 1\right\}$

c) $\frac{1}{6}$, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{3}{5}, 0\right\}$ d) $\frac{2}{2-x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, -1, 2\}$

e) $\frac{x-1}{2x}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 4\}$ f) $\frac{x-4}{8}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 4\}$

4. a) $\frac{1}{a-2}$, $\frac{\sqrt{2}+2}{-2}$ b) $-b$, 3 12. $P(x) = -2$, $Q(x) = 3x - 4$

Równania wymierne, s. 30-31

1. a) $D = \boldsymbol{R}$; $x = 0$ b) $D = \boldsymbol{R} - \{-1\}$; równanie sprzeczne

c) $D = \boldsymbol{R} - \{-4\}$; równanie sprzeczne d) $D = \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$; $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$

e) $D = \boldsymbol{R} - \{-1, 2\}$; równanie sprzeczne f) $D = \boldsymbol{R} - \{-2, 3\}$; $x = 2$

2. a) $D = \boldsymbol{R} - \{-2, 1\}$; $x = 1\frac{1}{2}$ b) $D = \boldsymbol{R} - \{0, 1\}$; $x = 3$

c) $D = \boldsymbol{R} - \left\{-4, \frac{3}{2}\right\}$; $x \in \{-2, 2\}$ d) $D = \boldsymbol{R} - \{2, 3\}$; $x \in \{-3, -2\}$

e) $D = \boldsymbol{R}$; $x \in \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$ f) $D = \boldsymbol{R}$; $x = 1$

3. a) $D = \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; $x \in \left\{-1, \frac{-7}{18}\right\}$ b) $D = \boldsymbol{R} - \{0\}$; równanie sprzeczne

c) $D = \boldsymbol{R} - \{0, 1\}$; $x \in \{-2, 2\}$ d) $D = \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 1\}$; $x = 5$

e) $D = \boldsymbol{R} - \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$; $x \in \{0, 2\}$ f) $D = \boldsymbol{R}$; $x = 3$

4. a) $D = \boldsymbol{R} - \{-2, 1\}$; $x \in \left\{-2\frac{3}{5}, 2\right\}$ b) $D = \boldsymbol{R} - \{-1, 3\}$; $x \in \left\{-1\frac{4}{9}, 4\right\}$

c) $D = \boldsymbol{R} - \{0\}$; $x \in \left\{-1, 1\frac{1}{2}\right\}$ d) $D = \boldsymbol{R} - \{-4, 3\}$; $x = 1$

e) $D = \boldsymbol{R} - \{0, 3\}$; $x \in \left\{2 - \sqrt{10}, 1, 2 + \sqrt{10}\right\}$ f) $D = \boldsymbol{R} - \{0\}$; $x = \frac{1}{2}$

5. a) $D = \boldsymbol{R} - \{-5\}$; $x = -2$ b) $D = \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$; $x \in \left\{-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}\right\}$
   c) $D = \boldsymbol{R} - \{-4, 0\}$; $x \in \{-5, -2, 1\}$ d) $D = \boldsymbol{R} - \{0, 2\}$; $x \in \{-3, -1, 3, 5\}$
6. $p = -\frac{1}{2}$ 7. $p = -2$ Drugim rozwiązaniem równania jest liczba -2.
8. Jeśli $p = 1$, to rozwiązaniami równania są liczby: $-1\frac{1}{2}$ oraz -2. Jeśli $p = 10$, to rozwiązaniami równania są liczby: $-3\frac{3}{4}$ oraz -2.
9. a) $x \in \{-3, 4\}$; b) *wskazówka*: $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$; $x \in \left\{-6-\sqrt{29},\ -6+\sqrt{29},\ 1\right\}$
10. a) $x \in \left\{-1\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2}\right\}$ b) $x \in \left\{3\frac{2}{5},\ 7\frac{2}{3}\right\}$ c) $x \in \left\{-2,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1\frac{1}{2}\right\}$
    d) $x \in \left\{\frac{-7-\sqrt{577}}{22},\ \frac{-7+\sqrt{577}}{22},\ 3,\ 4\right\}$ e) $x = 4$ f) $x = -3$

Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych, s. 36-37

1. $\frac{3}{5}$ 2. $\frac{8}{5}$ 3. $1\frac{3}{4}$ oraz $3\frac{1}{4}$ 4. 8 dni
5. 17 rzędów; w jednym rzędzie 40 krzeseł
6. I zakład – 12 stolików, II zakład – 8 stolików
7. Monika jechała z prędkością 16 km/h, a Ada z prędkością 48 km/h.
8. 3 km/h
9. 1 h
10. Pierwszy kran w ciągu 1 godziny, a drugi kran w ciągu 40 minut.
11. 14 godzin
12. Marek 28 godzin, Piotr 21 godzin

Nierówności wymierne, s. 41-42

1. a) $x \in (2, +\infty)$ b) $x \in \left\langle -2\frac{1}{2}, 1\right)$ c) $x \in (-\infty, 0) \cup \langle 5, +\infty)$
   d) $x = 0$ e) $x \in \boldsymbol{R} - \{-1\}$ f) $x \in (-4, 4)$
2. a) $x \in (-\infty, -1) \cup \langle 0, 4\rangle$ b) $x \in \left(-\infty, -2\frac{1}{2}\right\rangle \cup (-2, +\infty)$
   c) $x \in (-3, -2) \cup (-1, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2) \cup \{-1\} \cup (3, +\infty)$
   e) $x \in \left(-1\frac{2}{3}, 0\right\rangle \cup \left(1\frac{2}{3}, +\infty\right)$ f) $x \in (-8, -3) \cup (2, +\infty)$
3. a) $x \in (-3, -1) \cup (0, 1)$ b) $x \in \boldsymbol{R} - \{-5\}$ c) $x \in (-\infty, 2) \cup (10, +\infty)$

d) $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ e) $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \{5\}$ f) $x \in (-1, 1)$

4. a) $x \in (0, 1) \cup (3, 5)$ b) $x \in (-\infty, -4) \cup \langle -1, 0\rangle \cup (2, +\infty)$
c) $x \in (-\infty, -7\rangle \cup (-1, 0) \cup (0, 1\rangle \cup (3, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -3) \cup \langle -1, +\infty)$

5. a) $x \in \left(-\infty, -1\frac{1}{4}\right) \cup (5, +\infty)$ b) $x \in (-3, 0) \cup (0, 2)$

c) $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 2, +\infty)$

d) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{0, 2\frac{1}{2}\right\}$ e) $x \in \left\langle -7\frac{1}{2}, -7\right) \cup \left(-7, -5\frac{1}{2}\right\rangle$ f) $x \in \left\langle 1\frac{1}{2}, 3\right) \cup \left(3, 3\frac{3}{4}\right\rangle$

6. a) $x \in \langle -8, -2) \cup (-2, 4\rangle$ b) $x \in \left(\frac{1}{4}, 1\frac{2}{3}\right) \cup \left(1\frac{2}{3}, 4\frac{1}{2}\right)$ c) $x \in \left(-\infty, -13\right\rangle \cup \left\langle -3\frac{2}{3}, +\infty\right)$

d) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ e) $x \in \boldsymbol{R} - \{-1\}$ f) $x \in \left(-\infty, -6\right\rangle \cup \left(-5, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Zadania na dowodzenie z zastosowaniem średniej arytmetycznej, średniej geometrycznej i średniej kwadratowej kilku liczb, s. 49

1. *wskazówka*: Zastosuj nierówność $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ i podnieś ją stronami do kwadratu.

2. *wskazówka*: $\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{c^2+d^2}{cd} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{d} + \frac{d}{c}$

3. *wskazówka*: $\frac{cd}{ab} + \frac{ad}{bc} + \frac{ab}{cd} + \frac{bc}{ad} = \frac{d}{b} \cdot \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \frac{b}{d} \cdot \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) = \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \cdot \left(\frac{d}{b} + \frac{b}{d}\right)$

6. *wskazówka*: $\frac{a+b+3c}{c} + \frac{b+c+3a}{a} + \frac{a+c+3b}{b} = \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + 9$

7. *wskazówka*: Skorzystaj z zależności między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ i podobnie liczb a, b, c.

8. *wskazówka*: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$

9. *wskazówka*: $\frac{12}{a^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{9}{a^2}$; zastosuj zależność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną trzech liczb $a^4, \frac{3}{a^2}, \frac{9}{a^2}$.

10. *wskazówka*: $(1 + a)(1 + b) = 1 + a + b + ab = 82 + (a + b)$.

11. *wskazówka*: $\frac{1+a}{2} \geqslant \sqrt{a}, \frac{1+b}{2} \geqslant \sqrt{b}, \frac{1+c}{2} \geqslant \sqrt{c}$, więc $\frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{8} \geqslant \sqrt{abc}$.

12. *wskazówka*: Zastosuj zależność pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią kwadratową liczb a i b.
13. *wskazówka*: Zastosuj zależność pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią kwadratową liczb 1, a i a^2.
14. *wskazówka* $a+b+c+3=(a+1)+(b+1)+(c+1)$. Skorzystaj z zależności między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową liczb: $a+1$, $b+1$, $c+1$.

Funkcja homograficzna, s. 55-56

1. a) $f(x)=\frac{3}{x}+2$, gdzie $x\neq 0$ b) $ZW=\boldsymbol{R}-\{2\}$ c) $-1\frac{1}{2}$ d) 1

2. a) $f(x)=\frac{-2}{x+3}$, $D=\boldsymbol{R}-\{-3\}$
   b) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty,-3)$, $(-3,+\infty)$ c) $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$

3. a) $g(x)=\frac{-x+7}{x-3}$, $D=\boldsymbol{R}-\{3\}$ b) OX: $(7,0)$; OY: $\left(0,-2\frac{1}{3}\right)$ c) $x\in(-\infty,3)\cup(7,+\infty)$

4. a) $D=\boldsymbol{R}-\{-2{,}5\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{0\}$; oś OX: nie istnieje; oś OY: $(0,-2)$
   b) $D=\boldsymbol{R}-\{0\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{1\}$; oś OX: $(9,0)$; oś OY: nie istnieje
   c) $D=\boldsymbol{R}-\{-7\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{2\}$; oś OX: $(-14,0)$; oś OY: $(0,4)$
   d) $D=\boldsymbol{R}-\{3\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{6\}$; oś OX i oś OY: $(0,0)$
   e) $D=\boldsymbol{R}-\{-2\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{1\}$; oś OX: $(10,0)$; oś OY: $(0,-5)$
   f) $D=\boldsymbol{R}-\{0\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{2\}$; oś OX: $(-4,0)$; oś OY: nie istnieje

5. a) $a=2$, $\vec{u}=[-3,1]$ b) $a=1$, $\vec{u}=[2,3]$ c) $a=-3$, $\vec{u}=[-4,1]$
   d) $a=-2$, $\vec{u}=[3,-5]$ e) $a=-20$, $\vec{u}=[5,-4]$ f) $a=-1$, $\vec{u}=[3,-2]$

6. a) $b=-2$ b) $f(x)=\frac{3}{x+5}-1$, $x\neq -5$ c) $x=-5{,}5$

7. a) $b=1$, $d=-3$ b) $f(x)=\frac{4}{x-3}+1$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{1\}$ d) $x=7+4\sqrt{2}$

8. a) $A=-2$, $D=1$ b) $-2\frac{1}{2}$ c) $(2,-3)$, $\left(-1\frac{1}{2},4\right)$

9. a) $b=-15$, $d=4$ c) $(-7,-2)$

Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach, s. 62-63

2. a) $b=14$, $d=-3$ b) $x\in\left\langle 0,\frac{1}{3}\right\rangle\cup(1,+\infty)$

3. a) $A=-1$ b) $x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$

4. a) $y=\frac{2}{x-1}+2$, $D=\boldsymbol{R}-\{0,1\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{0,2\}$

   b) $y=\frac{5}{x-5}+4$, $D=\boldsymbol{R}-\{0,5\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{3,4\}$

   c) $y=\frac{-1}{x+3}-2$, $D=\boldsymbol{R}-\{-4,-3\}$, $ZW=\boldsymbol{R}-\{-2,-1\}$

5. a) $x\in\{1,2,4\}$ b) $x\in\{0,2\}$ c) $x\in\{-3,1\}$

6. a) $x\in\langle -1,0\rangle\cup(1,2\rangle$ b) $x\in(-\infty,-6)\cup(-2,0)\cup(3,+\infty)$ c) $x\in\langle -4,-2)\cup\{0\}$

7. a) $(-2,4),(-1,5),(1,1),(2,2)$ b) $(6,1),(-4,-1),(2,5),(0,-5)$
   c) $(-2,2),(0,4),(4,0),(2,-2)$

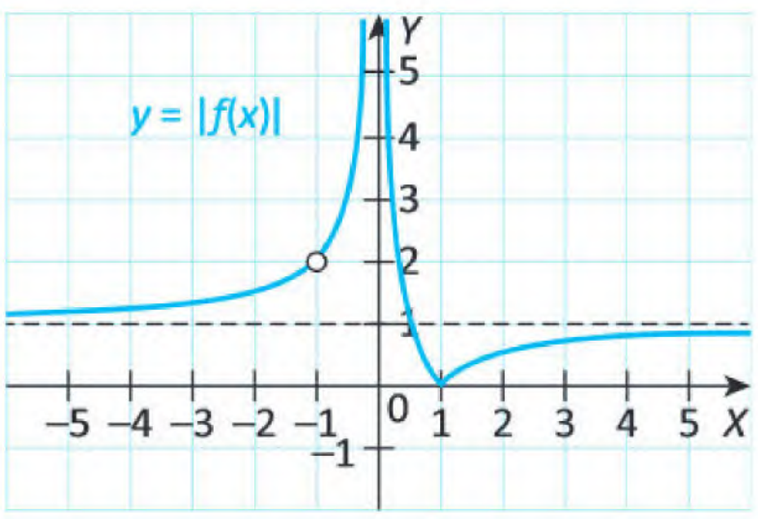
8. a) $(1,2),(2,0)$ b) $(2,1),(6,5),(8,3)$ c) $(3,0)$

9. $(4,12),(12,4),(0,0),(6,6)$

10. $(2,11,13)$ lub $(3,7,11)$

11. $p\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

12. $f(x)=\frac{1}{x}-1$, gdzie $x\in\boldsymbol{R}-\{-1,0\}$;

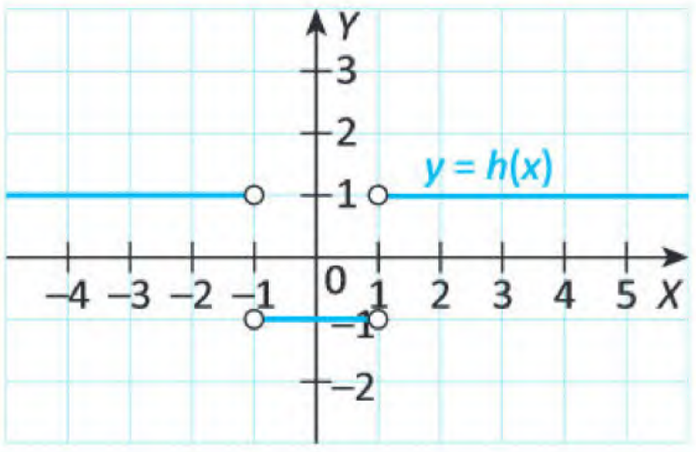


$m\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

13. *wskazówka*: Funkcja h jest funkcją homograficzną tylko wtedy, gdy $k\cdot(-k)-1\cdot(-2k-3)\neq 0$, czyli gdy $k\in\boldsymbol{R}-\{-1,3\}$. Przekształć wzór funkcji h do postaci $h(x)=k+\frac{k^2-2k-3}{x-k}$. Zauważ, że funkcja h jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty,k),(k,+\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k^2-2k-3>0$, czyli gdy $k\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

14. $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

15.



Funkcje wymierne, s. 68-69

1. a) $D_f = \boldsymbol{R} - \left\{2\frac{1}{2}\right\}$ b) $D_g = \boldsymbol{R} - \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$ c) $D_h = \boldsymbol{R} - \{2\}$

2. a) $m \in (-36, 0\rangle$ b) $m \in \left(-2\sqrt{2}, -2\right\rangle \cup \left(2, 2\sqrt{2}\right)$

3. a) $a = 6$ b) 2 c) f jest malejąca w zbiorze $(-\infty, -2)$, rosnąca w zbiorze $(-2, +\infty)$
   d) Wykresem funkcji f jest parabola $y = (x-2)(x+6)$ bez punktu $(-2, -16)$.

4. $m \in \{-1, 5\}$ Jeśli $m = -1$, to $f(x) = \frac{-1}{x-5}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 5\}$. Wówczas $f(x) \geqslant 5 - x \Leftrightarrow x \in \left\langle 4, 5\right) \cup \left\langle 6, +\infty\right)$. Jeśli $m = 5$, to $f(x) = \frac{5}{x+1}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-1, 0, 5\}$.
   Wówczas $f(x) \geqslant 5 + 5x \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -2\right\rangle \cup (-1, 0)$.

5. $p \in \boldsymbol{R} - \{0, 1, 3\}$

6. $a \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (15, +\infty)$

7. wartość największa 7, dla argumentu –0,3 b) wartość największa 4, dla argumentu 1

8. a) $ZW_f = \langle -3, 3\rangle$ b) $ZW_f = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$

9. a) $D = \boldsymbol{R} - \{-2, 3\}$ $ZW = \boldsymbol{R} - \{-1, 0\}$ *wskazówka*: $6 + x - x^2 = (x+2)(3-x)$

10. b) *wskazówka*: $\frac{4x^2}{x^2-25} = \frac{4\left(x^2-25\right)+100}{x^2-25} = \frac{100}{x^2-25} + 4$

11. a) *wskazówka*: Załóż, że $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ oraz $x_1 < x_2$. Różnicę $f(x_1) - f(x_2)$ doprowadź do postaci $\frac{3(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}$. Następnie zauważ, że jeśli $x_1, x_2 \in (-1, 1)$, to również $x_1 \cdot x_2 \in (-1, 1)$.

12. a) *wskazówka*: Rozważ ułamek $\frac{10x}{x^2+25}$ b) *wskazówka*: $\frac{4x^2+2x+4}{x^2+1} = 4 + \frac{2x}{x^2+1}$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 1., s. 70-72

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7
Odpowiedź	D	B	A	C	C	A	B

Zadania otwarte

8. a) $\frac{8x+12}{x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{0, 2\}$ b) $\frac{x-1}{x+3}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, 0, 3\}$

9. a) $D = \boldsymbol{R} - \{-2\};\ x = 2\frac{1}{2}$ b) $D = \boldsymbol{R} - \{2\};\ x = 1$

c) $D = \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\};\ x \in \left\{-1,\ \frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2}\right\}$

10. a) $D = \boldsymbol{R} - \{3\},\ ZW = \boldsymbol{R} - \{-1\}$ b) $a = 1,\ b = -3,\ c = -1$

c) funkcja g jest malejąca w przedziałach $(-\infty, 3), (3, +\infty)$

d) miejsce zerowe: 4; $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$

11. $(0, -1), \left(-3, 3\frac{1}{2}\right), (2, 1)$ 12. $D = \boldsymbol{R} - \{-5\}$; $-11, -4, -3, -2$

14. Jan – 6 godzin; Piotr – 10 godzin 17. Funkcja f jest nieparzysta.

18. a) $x \in \{-3, -2, 1, 2\}$ b) $x \in \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 2\right\}$

19. a) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2\rangle$ b) $x \in \left(\frac{1}{4},\ 1\frac{2}{3}\right) \cup \left(1\frac{2}{3},\ 4\frac{1}{2}\right)$

20. $f(1) = \frac{2}{3}$ 21. $ZW = \langle 2, 4\rangle$

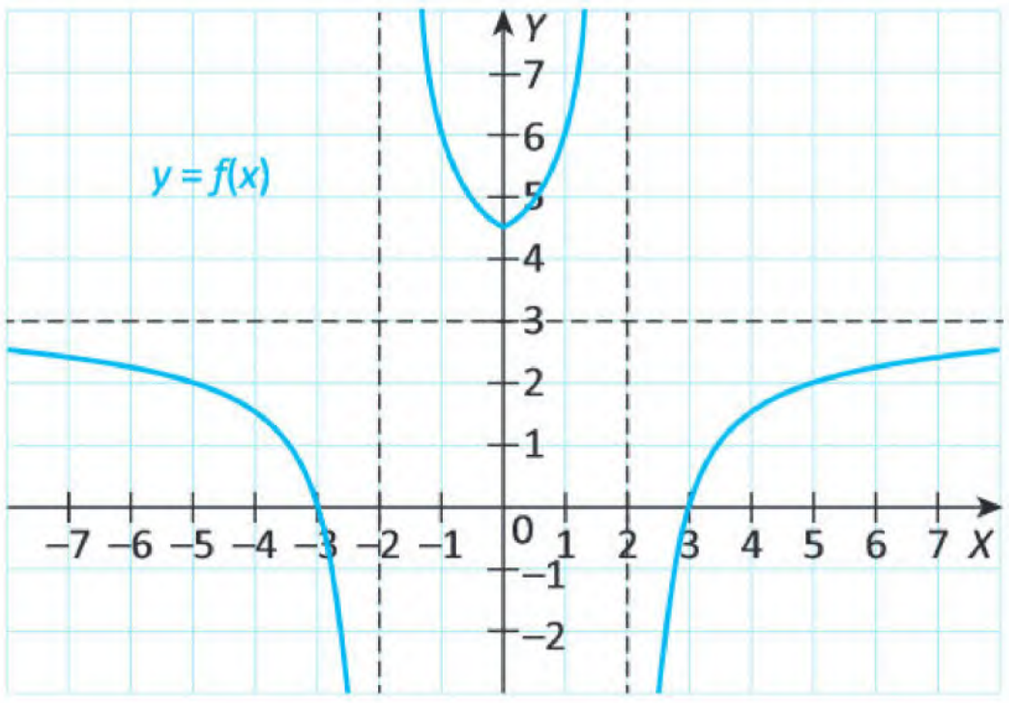
22. *wskazówka*: Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną trzech dodatnich liczb: x^3, y^2, $8y$.

23. *wskazówka*: Skorzystaj z zależności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią kwadratową trzech liczb dodatnich.

24. a) *wskazówka*: Zbadaj znak różnicy $\left(\frac{3}{x^2} + 1\right) - \frac{2}{x}$

b) *wskazówka*: $x^2 + \frac{3}{x^2} + 4 - 2x - \frac{6}{x} = \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3}{x^2}$. Zauważ, że liczba 1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$.

25.



Równanie:

– nie ma rozwiązań, jeśli $m \in \left(-3\frac{1}{2}, -2\right\rangle$;

– ma jedno rozwiązanie, jeśli $m = -3\frac{1}{2}$;

– ma dwa rozwiązania, jeśli $m \in \left(-\infty, -3\frac{1}{2}\right) \cup (-2, +\infty)$

2. Ciągi

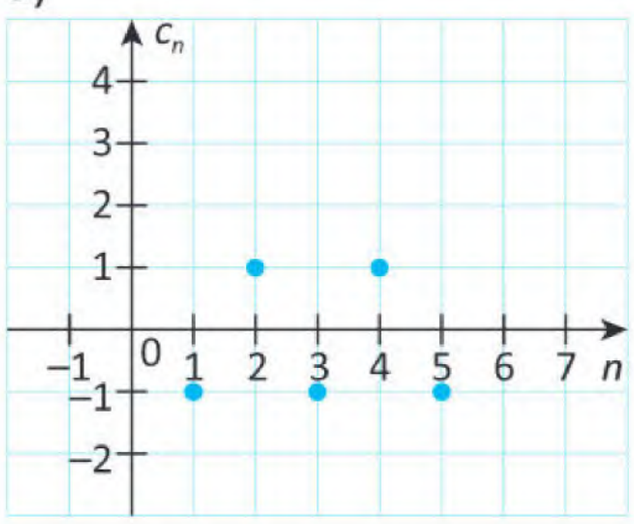
Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów, s. 78-79

1. a) $a_1 = 2,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0\ a_4 = -4,\ a_5 = -10$

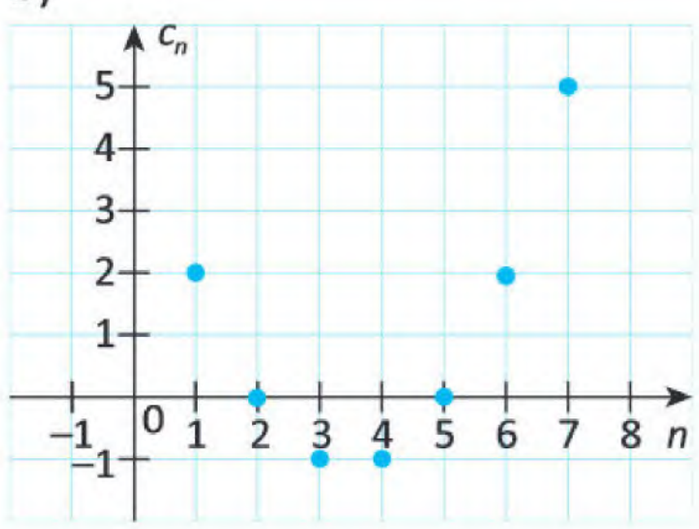
   b) $a_1 = \frac{3}{5},\ a_2 = \frac{4}{11},\ a_3 = \frac{5}{17},\ a_4 = \frac{6}{23},\ a_5 = \frac{7}{29}$

   c) $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = -1,\ a_4 = 6,\ a_5 = -3$

2. a)



b)



3. nie ma

4. a) a_7 b) b_2 i b_3 b) c_1, c_4, c_7

5. a) wszystkie oprócz a_1 i a_2; *wskazówka*: Zauważ, że mianownik jest liczbą dodatnią. Zatem dany ułamek jest liczbą ujemną tylko wtedy, gdy licznik jest ujemny.
   b) tylko a_5 c) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$

6. a) tak, c_{96} b) siedem

7. *wskazówka*: Skorzystaj z postaci iloczynowej trójmianu $6n^2 + n - 2$ i skróć ułamek.

8. a) $a_2 = 2, a_3 = 3, a_6 = 4$ b) $a_5 = 12, a_{10} = 46$

9. $c_1 = -2, c_2 = -1, c_5 = 0$

10. *wskazówka*: Uzasadnij, że $b_n = 5n - 1$.

11. a) $b_{n+1} = \frac{3n-2}{2},\ b_{n+3} = \frac{3n+4}{2},\ b_{4k} = \frac{12k-5}{2},\ b_{2k-1} = 3k - 4$

    b) $b_{n+1} = 2^{2n+3},\ b_{n+3} = 2^{2n+7},\ b_{4k} = 2^{8k+1}$

c) $b_{n+1}=\frac{-2n-1}{n+4}$, $b_{n+3}=\frac{-2n-5}{n+6}$, $b_{4k}=\frac{1-8k}{4k+3}$

12. a) $b_5=-2$ b) $b_5=-158$ c) $b_5=938\,971$ d) $b_5=90$

13. a) $a_n=5+2^{n-1}$ b) $a_n=\frac{n+1}{n}$ c) $a_n=\frac{1}{n^3}$ d) $a_n=n+\frac{1}{n+1}$

14. a) wyraz ogólny: $a_n=5\cdot(-1)^{n+1}$, wzór rekurencyjny: $\begin{cases}a_1=5\\a_{n+1}=-a_n,\ n\geqslant 1\end{cases}$

b) wyraz ogólny: $a_n=n$, wzór rekurencyjny: $\begin{cases}a_1=1\\a_{n+1}=a_n+1,\ n\geqslant 1\end{cases}$

c) wyraz ogólny: $a_n=2^n$, wzór rekurencyjny: $\begin{cases}a_1=2\\a_{n+1}=2a_n,\ n\geqslant 1\end{cases}$

d) wyraz ogólny: $a_n=-7+2(n-1)$, wzór rekurencyjny:

$\begin{cases}a_1=-7\\a_{n+1}=a_n+2,\ n\geqslant 1\end{cases}$

15. a) $\begin{cases}a_1=2\\a_{n+1}=a_n^2,\ n\geqslant 1\end{cases}$ $a_5=65\,536$ b) $\begin{cases}a_1=2\\a_2=-3\\a_{n+2}=a_n\cdot a_{n+1},\ n\geqslant 1\end{cases}$ $a_5=-108$

Monotoniczność ciągów, s. 84

3. a) ciąg niemalejący b) ciąg malejący c) ciąg rosnący d) ciąg rosnący

5. a) ciąg stały b) ciąg rosnący c) ciąg malejący d) ciąg nie jest monotoniczny

6. a) ciąg malejący b) ciąg nie jest monotoniczny
c) ciąg malejący d) ciąg rosnący

7. a) ciąg rosnący b) ciąg malejący c) ciąg rosnący
d) ciąg nierosnący

Ciąg arytmetyczny, s. 90-92

1. b) $a_1=4$, $r=-4$

2. b) ciąg malejący

3. a) $a_5=3{,}5$ $a_{12}=14$ $a_{19}=24{,}5$ b) $a_n=1{,}5n-4$ c) 4,5

4. $b_n=21n-50$

5. 62, 59, 56, 53, 50, 47, 44, 41, 38

6. $a_1=-59$

7. 28 wyrazów

8. a) $a_1=-6$, $r=\frac{1}{2}$ b) $a_1=7$, $r=-4$

9. a) 17 b) 172 c) 56

11. Jeśli $k = -1$, to wyrazy ciągu są kolejno równe: 0, –2, –4. Jeśli $k = 3$, to wyrazy ciągu są kolejno równe: 12, 6, 0.

12. $a = 20$, $b = 24$ 13. 9, 12, 15

16. $c_1 = -2$, $r = 5$ lub $c_1 = -38$, $r = 5$

17. $a_1 = 5$, ciąg ma 13 wyrazów 18. $-\frac{1}{3}$

Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, s. 98-99

1. a) 61 b) 189 c) 784 d) $a_n = 3n^2 - 3n + 1$; ciąg nie jest arytmetyczny

2. a) $a_1 = 5$, $r = 2$

3. a) *wskazówka*: Wykaż, że $a_n = 4n - 5$. b) –115

4. a) $a_n = 2n - 1$ 5. a) –115 b) 490

6. 156 7. 5050 dukatów

8. a) 2475 b) 1665 c) 1210

9. $a_1 = 18$, $r = 5$ 10. 31 11. 97 12. 12

13. 12; *wskazówka*: Suma miar kątów w wielokącie mającym n boków jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$.

14. a) $x = 58$ b) $x = 25$

15. a) 30 b) 150

17. $k = 7$; ta suma jest równa 329

18. $a_n = \frac{n}{2(n+1)}$; ciąg nie jest arytmetyczny; *wskazówka*: Uzasadnij, że licznik danego ułamka jest sumą n początkowych wyrazów ciągu (b_n), gdzie $b_n = 7n - 5$. Następnie skorzystaj z odpowiedniego wzoru i wyznacz sumę S_n początkowych wyrazów ciągu (b_n).

19. a) 19 wyrazów b) $a_{10} = 29$

Ciąg geometryczny, s. 107-109

1. a) tak; *wskazówka*: $a_n = 3 \cdot 15^n$
   b) tak; *wskazówka*: Ciąg (b_n) można opisać wzorem: $b_n = (-1)^{n+1}$ c) nie

2. a) $a_n = (-4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ b) $b_n = 2\cdot(-3)^{n-1}$ c) $c_n = (-1)^n \cdot 4{,}5$

3. a) $a_1 = -9$ b) $a_1 = \sqrt{2} + 1$

4. 243 cm 5. a) $q = \frac{8}{9}$ b) $q = -\frac{1}{2}$ lub $q = \frac{1}{2}$

6. 5 wyrazów 7. $b_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n-5}$ 8. b) 672 cm^2 9. (24, 12, 6, 3)

10. $\left(6,-2,\frac{2}{3},-\frac{2}{9}\right)$ lub $\left(6,2,\frac{2}{3},\frac{2}{9}\right)$ lub $\left(-6,2,-\frac{2}{3},\frac{2}{9}\right)$ lub $\left(-6,-2,-\frac{2}{3},-\frac{2}{9}\right)$

11. a) $c_1=8, q=2$ b) $\begin{cases} c_1=\frac{3}{16} \\ q=2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} c_1=\frac{3}{16} \\ q=-2 \end{cases}$

13. Jeśli $x=2$, to $(9, 6, 4)$. Jeśli $x=-8$, to $(-1, -4, -16)$

14. $a+b=168$

15. $q = 5$

16. a) $b_7=5184,\ b_8=-10368\sqrt{3}$ b) $k=3$

23. *wskazówka*: Skorzystaj ze wzoru: $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$.

Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, s. 115-116

1. nie; $S_{10}=\frac{1023}{1024}\cdot 2<2$ 2. w ciągu 8 dni

3. a) $q=\frac{2}{3}$ b) $a_n=27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ c) $76\frac{7}{27}$

4. $a_1=1,6$ 5. cztery

6. a) $841\frac{3}{4}$, $n=6$ b) $26\frac{7}{8}$, $n=7$

7. a) $q=-2,\ n=5$ b) $q=\frac{3}{2},\ n=6$

8. $q=-3 \vee q=2$

9. $(192, 48, 12, 3)$ lub $(3, 12, 48, 192)$

10. a) $\left(60+28\sqrt{2}\right)$ cm b) 127 cm²

14. *wskazówka*: $99980001=(9\cdot 10^7+9\cdot 10^6+9\cdot 10^5)+8\cdot 10^4+1$. Zastosuj w nawiasie wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne, s. 119-120

1. $(x=-2, y=1)$ lub $(x=4, y=4)$ 2. $(a=-1, b=-3)$ lub $(a=4, b=7)$

3. $(2, 17, 32)$

4. $(9, 3, 1)$

5. $a_1=1, q=2;\ S_{10}=1023$

6. $\left(11\frac{2}{3},11\frac{2}{3},11\frac{2}{3}\right)$ lub $(5, 10, 20)$

7. $a_n=2n+1;\ b_n=3^n$, gdzie $n\in \boldsymbol{N}_+$

8. a) $a_1 = 36, r = -4$ b) $S_5 = 31$; *wskazówka*: $a_k \cdot a_{k+3} = a_{k+2}^2$, gdzie $a_k = 36 + (k-1)\cdot(-4)$, $a_{k+2} = 36 + (k+1)\cdot(-4)$, $a_{k+3} = 36 + (k+2)\cdot(-4)$.
9. $k = 2,\ q = 4$
12. $x_1 = 1$, *wskazówka*: wykaż, że ciąg (x_n) jest arytmetyczny.

Lokaty pieniężne i kredyty bankowe, s. 129-130

1. a) 12 800 zł b) 11 936 zł
2. po sześciu latach
3. a) 42 160 zł b) 43 600 zł
4. a) 25 184 zl b) 15 lat i pół roku
5. 6863,93 zł
6. a) 58 716,74 zł b) 56 859,56 zł c) 52 469,58 zł
7. Pan Marek; $K_M = K_0(1+0{,}03)^6 \approx K_0 \cdot 1{,}194$, $K_D = K_0 \cdot \left(1 + \frac{5}{12 \cdot 100}\right)^{36} \approx K_0 \cdot 1{,}1615$
8. 20 000 zł
9. 12%
10. a) 7141,03 zł b) 2846,19 zł
11. a) I rata = 5800 zł, II rata = 5600 zł, III rata = 5400 zł, IV rata = 5200 zł
    b) 2000 zł
12. Zakup na raty

Granica ciągu liczbowego, s. 136-137

1. wszystkie o numerach większych niż 38, czyli $a_{39}, a_{40}, a_{41}, a_{42}, \ldots$
2. 399 wyrazów
3. a) dwa wyrazy b) 553 wyrazy
4. $\delta = 15$
5. $\delta = 9$

Obliczanie granic ciągów zbieżnych, s. 143-144

1. a) 11 b) 5 c) 4
2. a) $10\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{8}$ c) 27
3. a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $2\frac{2}{3}$

4. a) -1 b) 7 c) -4 d) $\frac{-1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{27}{8}$;

wskazówka: $\left(\frac{3n-5}{2n+1}\right)^3 = \frac{3n-5}{2n+1}\cdot\frac{3n-5}{2n+1}\cdot\frac{3n-5}{2n+1}$

5. a) 18 b) $\frac{-2}{15}$ c) $1\frac{2}{3}$ d) 0

6. a) 2 b) 0 c) 3 d) 1 e) $1\frac{1}{3}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ g) $\frac{1}{2}$ h) 2 i) $\frac{1}{10}$;

wskazówka: zastosuj wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego

7. a) 0 b) $1\frac{1}{2}$ c) $-\frac{5}{8}$ d) $\frac{2}{3}$;

wskazówka: zastosuj wzór $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

8. a) $k=-2$ lub $k=3$ b) $k=1$ lub $k=0$

Wybrane własności ciągów zbieżnych, s. 149

1. a) 1 b) 0 c) 3 d) 1 e) $\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{3}$

2. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{1}{8}$;

wskazówka: zastosuj wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego (i geometrycznego)

3. a) 5 b) $\frac{4}{5}$ c) 0 d) 0

Ciągi rozbieżne do nieskończoności, s. 155

1. a) $a_{751}, a_{752}, a_{753}, \ldots$ b) $a_7, a_8, a_9, \ldots$

2. a) $b_5, b_6, b_7, \ldots$ b) $b_3, b_4, b_5, \ldots$

4. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$

5. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $-2\frac{5}{8}$ e) $\frac{3}{4}$ f) $+\infty$

6. a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) 5 e) $-\infty$ f) $+\infty$

Szereg geometryczny, s. 161-162

1. a) $10\frac{1}{8}$ b) $\sqrt{2}$

2. a) $\frac{-7}{11}$ b) $\frac{23}{10}$ c) $\frac{34}{333}$ d) $\frac{-611}{495}$

3. $q=\frac{2}{3}$, $a_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $n\in \mathbf{N}_+$

4. $S_1=28$, $S_2=7$, $S_3=22\frac{3}{4}$, $S_4=10\frac{15}{16}$

5. $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

6. $a=-3$

7. a) $x\in\left\{\frac{5}{6},1\right\}$ b) $x=1$

8. a) $x\in(-\infty,0)\cup(3,4)$ b) $x\in(-3,-2)$

9. a) $f(x)=-\frac{1}{4}x-1$, gdzie $x\in(-\infty,-2)$; $ZW=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

b) $f(x)=\frac{-6}{x-3}-1$, gdzie $x\in(-1,3)$; $ZW=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1$, gdzie $x\in(-1,+\infty)$; $ZW=(0,+\infty)$

10. 36 cm²

11. *wskazówka*: $a_n=7\cdot(S-S_n)$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 2., s. 163-165

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7
Odpowiedź	D	A	D	C	B	B	C

Zadania otwarte

8. –222

9. b)

10. *wskazówka*: Wykaż, że $b_n=2n-5$ c) 165

11. a) 1168 b) $c_n=4n+3$, gdzie $n\in \mathbf{N}_+$

13. $b_1=192$, $q=\frac{1}{4}$ 5 wyrazów

14. I. $x=4$ i $y=36$; wówczas $q=3$, $r=24$ II. $x=36$ i $y=4$; wówczas $q=\frac{1}{3}$, $r=-8$

15. a) $(4, 16, 64)$ b) $b_n=3n+1$, gdzie $n\in \mathbf{N}_+$

17. a) $k=-3$; *wskazówka*: Zastosuj wzór Viete'a dla iloczynu trzech pierwiastków wielomianu trzeciego stopnia. b) $(1,-2,4)$ lub $(4,-2,1)$

18. –4, 4, 12, 36

20. a) $-\infty$ b) –2 c) $\frac{3}{4}$ d) $+\infty$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{3}{8}$

3. Kombinatoryka. Dwumian Newtona. Trójkąt Pascala

Reguła mnożenia i reguła dodawania, s. 171-172

1. 20
2. a) 14 b) 7 c) 7 d) 4
3. a) 8 b) 4 c) 15 d) 12
4. 28 odcinków
5. na 40 sposobów
6. a) 21 sposobów b) 126 sposobów
7. a) na 405 sposobów b) na 60 sposobów c) na 96 sposobów d) na 75 sposobów
8. a) na 72 sposoby b) na 32 sposoby c) na 6 sposobów d) na 16 sposobów
9. a) 36 b) 49 c) 38 d) 70
10. a) 6 b) 15 c) 18 d) 6
11. a) 24 b) 15
12. a) 14 b) 21
13. a) 6 b) 54
14. a) 52 b) 10

Wariacje, s. 178

1. a) na 25 sposobów b) na 20 sposobów
2. a) na 10 000 sposobów b) na 5040 sposobów c) na 10 sposobów
3. a) na 8^6 sposobów b) na 20 160 sposobów
4. a) 840 rodzajów b) 7^4 rodzajów
5. a) 120 b) 3 c) 16
6. a) 7^5, czyli 16 807 napisów b) 2520 napisów c) 12 348 napisów
7. a) $4 \cdot 7^3 - 1 = 1371$ b) $4 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4) = 480$

Permutacje, s. 184-185

1. a) 9! b) $(n+2)!$ c) $5 \cdot 6 \cdot 7$ d) 8 e) $n(n-1)$ f) $(n+1)!$
2. a) 30 b) 696 c) 288 d) 90
3. a) 5040 liczb b) 720 liczb
4. a) 360 liczb b) 216 liczb
5. a) 25 sposobów b) 5!, czyli 120 sposobów.
6. na 24 sposoby

7. a) na 144 sposoby b) na 144 sposoby
8. na 1152 sposoby
9. a) 480 sposobów b) 144 sposoby
10. a) 120 sposobów b) 432 sposoby
11. a) na 7! sposobów b) na 1440 sposobów c) na 480 sposobów
12. a) 16! b) 28·14! c) 168·12!
13. a) na 6! sposobów b) na 240 sposobów c) na 96 sposobów

Kombinacje, s. 192-193

1. a) 20 b) 42 c) 18 d) 10 e) 336 f) 102
3. a) 120 b) 252 c) 210
5. a) 21 odcinków b) 35 trójkątów
6. 190
7. $n = 10$
8. 32 osoby
9. a) $\binom{12}{3}\binom{15}{3} = 100\,100$ b) $\binom{15}{4}\binom{12}{2} = 90\,090$
10. a) na 1001 sposobów b) na 10 920 sposobów c) na 26 404 sposoby; *wskazówka*: liczba sposobów jest sumą $\binom{16}{1}\binom{14}{3}+\binom{16}{2}\binom{14}{2}+\binom{16}{3}\binom{14}{1}+\binom{16}{4}$ oraz różnicą $\binom{30}{4}-\binom{14}{4}$

    d) na 9660 sposobów
11. a) 120 b) 7800 c) 1920
12. a) 250 b) 14 755 c) 24 150
13. a) $\binom{16}{7}$ b) $\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{40}{1}$ c) $\binom{48}{7}+4\cdot\binom{48}{6}$ d) $4\cdot\binom{48}{4}+\binom{48}{3}$
14. a) $\binom{13}{2}\binom{39}{11}$ b) $\binom{13}{5}\cdot\binom{13}{4}\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{13}{1}$ c) $\binom{26}{6}\binom{26}{7}$ d) $\binom{52}{13}-\binom{39}{13}$

Kombinatoryka – zadania różne, s. 199-200

1. a) 10^8 b) 1 814 400 c) 10 d) 90
2. a) 6 b) 6 c) 12 d) 3360 e) 10 080 f) 420

3. a) 336 b) 111 c) 966 d) 910

4. a) $\binom{4}{2}\cdot\left[\binom{13}{1}\binom{13}{4}+\binom{13}{2}\binom{13}{3}\right]\cdot 2$ b) $\binom{4}{1}\binom{13}{5}+\binom{4}{2}\cdot\left[\binom{13}{1}\binom{13}{4}+\binom{13}{2}\binom{13}{3}\right]\cdot 2$

5. a) $5!$ b) $\binom{5}{3}\cdot 2$

6. a) na 90 sposobów b) na $3!\cdot 3!$, czyli na 36 sposobów

7. a) $\binom{7}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot 3!\cdot 3^2$ b) $\binom{7}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot 3!\cdot 3^2\cdot 7!$ c) a) $\binom{7}{3}\cdot 3!\cdot\binom{7}{3}\cdot 3!\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}$

8. 97 200; *wskazówka*: Numer komórki składa się z 9 cyfr.

9. 1020; *wskazówka*: Rozważ dwa przypadki: 1) cyfra 4 jest pierwszą cyfrą numeru – 840 możliwości 2) cyfra 4 nie jest pierwszą cyfrą numeru – 180 możliwości.

10. 3600

11. a) 1540 b) 8835 c) 30 400; *wskazówka*: Rozpatrz przypadki: $8\cdot 3$, $6\cdot 4$, $2\cdot 4\cdot 3$, $2^2\cdot 6$, $2^3\cdot 3$

12. a) $\binom{11}{5}$, czyli 462 b) 34; *wskazówka*: Rozważ przypadki: 6, $4+2$, $3+3$, $2+2+2$

Symbol Newtona. Wzór Newtona. Trójkąt Pascala, s. 206-207

1. a) 70 b) 84 c) 56 d) 35 e) 210 f) 21

2. a) $a^8+8a^7+28a^6+56a^5+70a^4+56a^3+28a^2+8a+1$
   b) $x^5+15x^4+90x^3+270x^2+405x+243$
   c) $b^4-20b^3+150b^2-500b+625$
   d) $1-9x+36x^2-84x^3+126x^4-126x^5+84x^6-36x^7+9x^8-x^9$
   e) $128x^7-224x^6+168x^5-70x^4+\frac{35}{2}x^3-\frac{21}{8}x^2+\frac{7}{32}x-\frac{1}{128}$
   f) $\frac{1}{729}y^6+\frac{2}{27}y^5+\frac{5}{3}y^4+20y^3+135y^2+486y+729$

3. a) $c_9=\binom{11}{8}(3x)^3\cdot 2^8=1\,140\,480x^3$ b) $c_6=\binom{10}{5}(2x)^5(-1)^5=-8\,064x^5$

4. a) $a=3$ b) $c_5=\frac{55}{9}x^8$

5. a) $a=1\vee a=-1$ b) jeśli $a=1$, to $c_{10}=-5005x^6$; jeśli $a=-1$, to $c_{10}=5005x^6$

6. 84

7. $n=13$

8. *wskazówka*: Zauważ, że $(1+1)^{10} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \ldots + \binom{10}{10}$

10. a) 4094 b) 256 c) 128

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 3., s. 208-210

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	C	C	B	A	B	C	A	B	A

Zadania otwarte

11. a) 10 b) 15 c) 19 d) 12

12. b) 11

13. a) 11 b) 37

14. a) 5 b) 20

15. a) 8 b) 11 c) 60 d) 105

16. a) 5040 b) 3439

17. a) 1024 b) 432

18. a) 1440 b) 10 080

19. a) 3600 b) 72

20. 9000

21. $24^2 \cdot \left(10^5 - 1\right)$

22. 3420

23. 15

24. $n = 6$

25. a) 98 b) 31

26. a) 4471 b) 3255

27. a) 150 b) 74

28. a) 60 b) 12 c) 302 400

29. 1764

30. a) 25 osób b) $\binom{11}{10} \cdot 10! \cdot 15! + \binom{14}{10} \cdot 10! \cdot 15! = 1012 \cdot 10! \cdot 15!$ c) $126 \cdot 22!$

31. $\binom{15}{7}$

32. a) 2^{18} b) 191 c) $2^{17} - 2$

33. a) 1757 b) 1303 34. $2^{15} = 32\,768$ 35. $c_9 = \binom{16}{8} \cdot \frac{x^8}{9}$

36. $n = 18$, $c_6 = \binom{18}{5} \cdot x^3$ 37. 190

4. Geometria płaska – czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy, s. 214

Sprawdź, czy rozumiesz

1. a) 75°, 85°, 95°, 105° b) 30°, 60°, 120°, 150°
2. 80°, 70°, 100°, 110°
4. (11,5 cm, 11,5 cm, 11,5 cm, 17,5 cm) lub (16 cm, 16 cm, 10 cm, 10 cm)
5. a) 15 cm, 15 cm, 20 cm, 20 cm b) 25 cm
6. a) 7 cm b) ok. 76°, 164°
7. a) $\sqrt{29}+4$ b) $2\sqrt{3}+2$ *wskazówka*: Wykaż, że czworokąt jest deltoidem i oblicz kąty widocznych trójkątów. Następnie skorzystaj z twierdzenia sinusów i z twierdzenia cosinusów.

Trapezy, s. 220-221

1. $|\sphericalangle A| = 52°$, $|\sphericalangle B| = 65°$, $|\sphericalangle C| = 115°$, $|\sphericalangle D| = 128°$
2. a) 4 b) 60°
3. a) $h = 4$ b) $|AB| = 7$, $|DC| = 3$ c) 5
4. 18 i 11 5. a) $h = 12$ b) $h = 6$
6. długości podstaw: $12\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$; długość ramion: 8
7. a) 4 b) 15
8. 21 cm, 9 cm; *wskazówka*: Uzasadnij, że trapez jest równoramienny.
10. a) 7 cm b) 3,2 cm
11. *wskazówka*: Wykaż, że $\triangle ADC \sim \triangle ACB$.
12. *wskazówka*: Wykaż, że odcinek łączący środki przekątnych trapezu zawiera się w odcinku łączącym środki ramion tego trapezu.
13. a) 6, 14; *wskazówka*: Skorzystaj z zadania 12. b) 3 : 7

Równoległoboki, s. 229

1. a) 75°, 105° b) 65°, 115°

3. a) $d_1 = 2\sqrt{2},\ d_2 = 2\sqrt{10}$ c) $h_1 = 2,\ h_2 = 2\sqrt{2}$

4. *wskazówka*: Zauważ, że $|\sphericalangle EDF| = 30°$. Oblicz $|DE|$ i $|DF|$.

5. 10 cm

6. 12 cm, 16 cm

7. $|AB| = 3\sqrt{13}$

8. a) $4 + 4\sqrt{3}$ b) $10\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

9. $8 + 4\sqrt{2}$

12. *wskazówka*: I sposób: Poprowadź przekątną *AC* i skorzystaj z własności środkowych w trójkątach *ABC* i *ACD*. II sposób: Skorzystaj z podobieństwa odpowiednich trójkątów.

Okrąg opisany na czworokącie, s. 236

1. 58°, 78°, 122°, 102°

2. $|\sphericalangle A| = 85°,\ |\sphericalangle B| = 60°,\ |\sphericalangle C| = 95°,\ |\sphericalangle D| = 120°$, kąt między przekątnymi: 85°

3. $R = 2{,}5$ cm

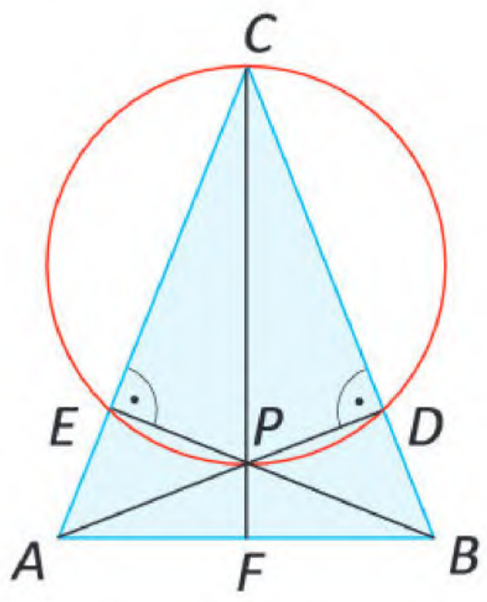
4. $2\sqrt{2}$

5. 24, 10, $13\sqrt{2}$, $13\sqrt{2}$

6. 12 cm

7. $R = 10$; *wskazówka*: Uzasadnij, że przekątna *DB* jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie *EBFD*.

8. $2R = 19\frac{5}{6}$; *wskazówka*: Wykaż, że $\triangle AFC \sim \triangle FBP$.



9. a) *wskazówka*: Oblicz przekątną *AC*, następnie cosinus kąta *ADC*.
   b) $|BD| = 15\frac{5}{7}$; *wskazówka*: Zobacz przykład 1.

Okrąg wpisany w czworokąt, s. 241

1. a) tak b) nie 4. $r = 1$ cm 5. $a = 2$ 6. 3,5 cm
7. 20, 12 8. $h = 12,\ L = 50$ 9. 9 i 16 10. $r = 10$
11. $|AB| = 13\frac{1}{3}, |BC| = 10, |CD| = 5, |AD| = 8\frac{1}{3}$; *wskazówka*: Niech O – środek okręgu, E, F – punkty styczności okręgu odpowiednio z ramieniem AD i BC. Oblicz $|AE|$ i $|AO|$. Następnie wykaż, że $\triangle EAO \sim \triangle FAB$.

Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie, s. 244

2. *wskazówka:* Wykaż, że na czworokącie $BCRQ$ można opisać okrąg i wówczas $|\sphericalangle QRB| = |\sphericalangle QCB|$. Podobnie na czworokącie $APCR$ można opisać okrąg i $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle ARP|$.

6. *wskazówka:* Wykaż, że $\triangle NOB \equiv \triangle NMB$. W tym celu oznacz: $|NO| = a$, $|OB| = b$ oraz $|NM| = x$, $|MB| = y$. Trójkąty NOB i NMB są prostokątne, więc $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$, stąd $a^2 - x^2 = y^2 - b^2$, czyli $(a + x)(a - x) = (y + b)(y - b)$. Ale w czworokąt $NOBM$ można wpisać okrąg, więc $a + x = y + b$. Wobec tego $a - x = y - b$. Ponieważ $a + b = x + y$ oraz $a + x = y + b$, więc $a = x$ i $b = y$.

7. *wskazówka*: Niech c oznacza długość ramienia trapezu. Wykaż, że $c = \frac{a+b}{2}$. Następnie zauważ, że $h = 2r$.

Podobieństwo. Czworokąty podobne, s. 250-251

1. a) figura F_1 jest podobna do figury F w skali $\frac{1}{2}$, a figura F jest podobna do figury F_1 w skali 2

   b) figura F_1 jest podobna do figury F w skali $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a figura F jest podobna do figury F_1 w skali $\sqrt{2}$

   c) figura F_1 jest podobna do figury F w skali 3, a figura F jest podobna do figury F_1 w skali $\frac{1}{3}$

2. a) nie b) tak, $k = 1$ c) tak, $k = 2$ d) nie

3. a) $k = \frac{1}{2}$ b) $|AK| : |KB| = 1 : 3$

4. 6 5. $k = \frac{2}{3}$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 4., s. 252-254

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	C	D	B	D	A	D	C	B	B

Zadania otwarte

11. a) $h_1 = 2\sqrt{3}$ cm, $h_2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm b) $d_1 = \sqrt{21}$ cm, $d_2 = \sqrt{61}$ cm

12. a) $h = 12$ cm b) $3\frac{11}{15}$

13. b) $|AB| = 6$ cm, $|AD| = |BC| = |DC| = 3$ cm

14. b) $|DC| = 6\frac{3}{4}$

15. a) Obw $= 46$, b) $\cos\alpha = \frac{161}{289}$

16. $\frac{24\sqrt{7}}{7}$

17. $|AE| = 4{,}5$ cm $|EB| = 3{,}5$ cm; prostokąty *AEFD* i *EBCF* nie są podobne

18. $|AK| = |BL| = |MC| = |DN| = 6$ cm, $|BK| = |CL| = |MD| = |AN| = 8$ cm.

19. $4\sqrt{2}$

20. a) $|\sphericalangle A| = 45°$, $|\sphericalangle B| = 70°$, $|\sphericalangle C| = 95°$, $|\sphericalangle D| = 110°$ b) 75°

21. b) $4\sqrt{2}$

22. $\frac{19}{44}$; *wskazówka*: Niech $|\sphericalangle BAD| = \alpha$, $|BD| = d$,

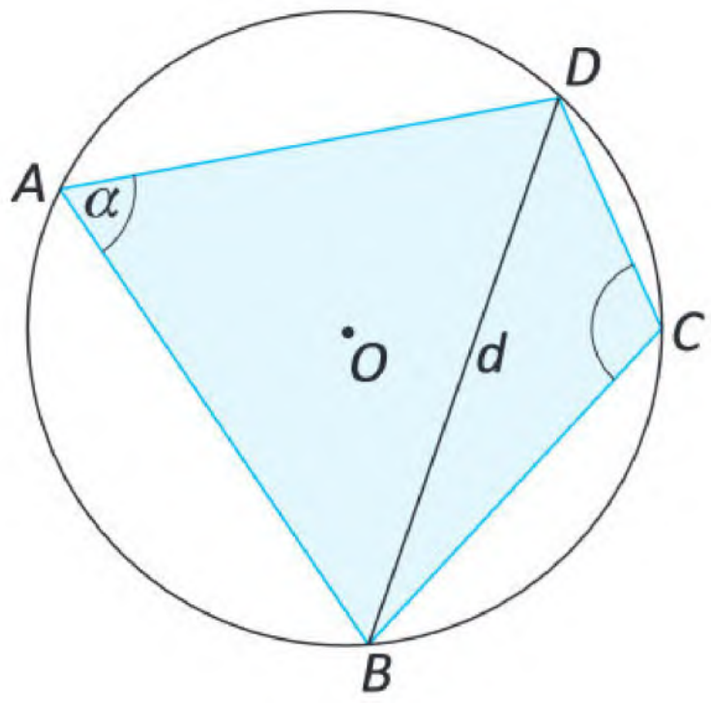
$|CD| = 2x$. Wówczas: $|\sphericalangle DCB| = 180° - \alpha$, $|BC| = 3x$,

$|AB| = |AD| = 4x$. Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów *ABD* i *BCD*:

$$d^2 = (4x)^2 + (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 4x \cdot \cos\alpha \quad \text{oraz}$$

$$d^2 = (3x)^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2x \cdot \cos(180° - \alpha)$$

Teraz przyrównaj prawe strony otrzymanych równości.

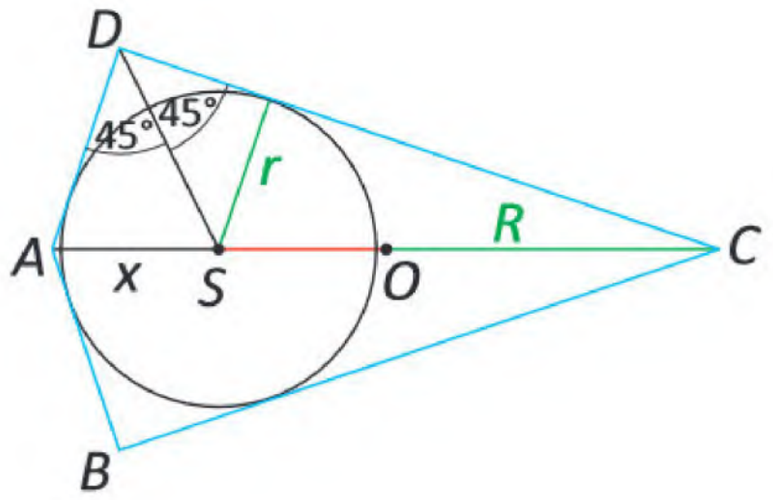


23. a) 30 b) 27

24. a) $a = 32$, $b = 8$ b) $h = 16$

25. 2 i 8

26. $|OS| = 6\frac{53}{62}$; *wskazówka*: Uzasadnij, że $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle D| = 90°$, punkt O jest środkiem przekątnej AC, a punkt S jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta ADC z przekątną AC. Oblicz $|AD|$, $|DC|$ i $|AC|$. Następnie skorzystaj z twierdzenia sinusów w trójkątach ASD, SCD i oblicz $|AS|$.



5. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu, s. 258

1. a) 1 dm² b) 4 dm
2. a) 56 cm b) $\alpha \approx 74°$
3. 12 cm, 9 cm
4. 4, 7,5
5. 3,5
6. 9, 8
7. *wskazówka*: Wykaż, że $|\sphericalangle APB| = 90°$.
8. $P = 196$ cm²
9. $P = 20$; *wskazówka*: Skorzystaj z podobieństwa trójkątów KAL i LBM.

Pole równoległoboku. Pole rombu, s. 263

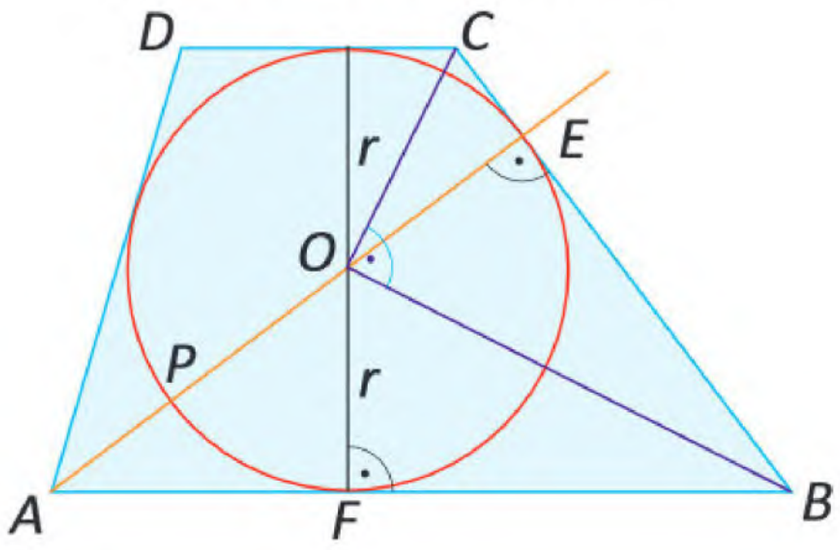
1. $42\frac{2}{3}$ cm
2. a) 48 b) $P = 45\sqrt{5}$, $h_1 = 3\sqrt{5}$, $h_2 = 5\sqrt{5}$
3. 1. przypadek: Krótszy bok ma długość 6, wówczas $P = 48\sqrt{3}$.
   2. przypadek: Krótszy bok ma długość 10, wówczas $P = 80\sqrt{3}$
4. a) 20 b) $h = 4{,}8$ cm
5. $P = 120$, $\sin\alpha = \frac{120}{169} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha > 45°$
6. $10\sqrt{13}$

Pole trapezu, s. 267

1. a) 102 b) 140

2. $81+27\sqrt{3}$
3. $a=5$ cm, $b=2$ cm
4. 30 cm^2
5. 50 cm^2
7. a) *wskazówka*: Poprowadź wysokości trapezu z wierzchołków *C* i *D*.
   b) 25; *wskazówka*: Wykaż, że trójkąty *ABE* i *DEC* są podobne, następnie oblicz $|CE|:|AE|$.
8. $21\frac{1}{3}$
9. 45 cm^2
10. 112,5 cm^2
11. $92\frac{13}{16}$

wskazówka: Środek *O* okręgu należy do dwusiecznej kąta *BAD*; $h=2r=|PE|=9$. Niech *F* oznacza punkt styczności okręgu z podstawą *AB*. Oblicz $|AF|$. Następnie zauważ, że $\triangle AFO \sim \triangle ABE$ oraz $|FB|=|BE|$; oblicz $|BE|$. Ponieważ $|\sphericalangle BOC|=90°$, więc $|CE|\cdot|BE|=|OE|^2$; oblicz $|CE|$.



Pole czworokąta – zadania różne, s. 273

1. 1,5 cm
2. 12 cm
3. ok. 56°
4. Największe pole jest równe 24. Pole drugiego czworokąta stanowi połowę największego pola.
5. 10 cm, 10 cm; $P=25\sqrt{2}$ cm^2
6. podstawy: 3 cm, 9 cm; ramię $3\sqrt{17}$ cm; pole 72 cm^2
7. 22,5
8. 3 lub 12 lub $\frac{4}{3}$
9. 25 cm^2; *wskazówka*: Uzasadnij, że punkt *N* jest punktem przecięcia środkowych trójkąta *ABC*.
10. $16\sqrt{3}$
11. $3\sqrt{3}+5$; *wskazówka*: z twierdzenia sinusów w trójkącie *KLC* wyznacz sinus kąta *CLK*. Zauważ, że $|\sphericalangle CLK|=|\sphericalangle CBA|=|\sphericalangle BAD|=45°$. Z twierdzenia cosinusów oblicz $|KL|$, następnie wysokość *h* trapezu.
12. a) 9 cm, 9 cm b) 8 cm, 10 cm

Pola figur podobnych, s. 277

1. $k=\frac{5}{2}$
2. o 19%
3. o 32,25%

4. a) $|AB| = 18$ cm, $|DC| = 8$ cm b) $h = 10$ cm

5. a) $2\sqrt{5}$ b) $88\sqrt{5}$ cm

Mapa. Skala mapy, s. 279

1. 2 cm na mapie; 10 km w rzeczywistości

2. ok.7,2 cm 3. a) 150 km^2 b) 0,58%

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 5., s. 280-282

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Odpowiedź	C	A	D	C	C	A	B	D	D

Zadania otwarte

10. $(a = 5, b = 2)$ lub $(a = 11, b = 10)$

11. a) 600 b) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$ c) 432

12. a) $4\sqrt{2}$ b) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ 13. a) 72 b) $\frac{144 - 39\sqrt{7}}{2}$ 14. $36 + 6\sqrt{3}$

15. a) 6 cm b) 10 cm 16. 338 cm^2 17. 30 18. 33,6 cm^2

19. a) 60 m b) 63 a 20. 30,72 cm^2

21. $\frac{225\sqrt{3}}{4}$; *wskazówka*: Oblicz $|BD|$ i zauważ, że trójkąt *BCD* jest równoboczny.

22. 18; *wskazówka*: Wykaż, że kąt przecięcia przekątnych jest równy 60°.

23. 41,8%

24. a) 16 cm b) $4\sqrt{34}$ cm 25. a) 600 cm^2 b) 30 cm, 20 cm

26. wskazówka: Przez punkty *A* i *B* poprowadź proste równoległe do podstaw. Pole każdego z danych czworokątów to suma pola trapezu i pola trójkąta mających wspólną wysokość.

27. a) *wskazówka*: Wykaż, że czworokąty są deltoidami, które mają jednakowe kąty. Następnie skorzystaj z podobieństwa trójkątów *EBO* i *AEO* do uzasadnienia, że $\frac{|EB|}{|OE|} = \frac{|OE|}{|AE|}$

b) *wskazówka*: Wykaż, że skala podobieństwa deltoidu *OEBF* do deltoidu *AEOH* jest równa tg 30°.

28. a) $r = 5$ b) 45° c) 13,5; *wskazówka*: $P_{OBDC} = P_{PBD} - P_{POC}$

6. Elementy analizy matematycznej

Granica funkcji w punkcie, s. 288

1. a) -2 b) 7 c) 14 d) 0 e) 5 f) 1,5
2. a) 4 b) 0 c) -6 d) $-\frac{1}{2}$ e) $-2\frac{1}{3}$ f) 1
3. a) 0 b) 130 c) -2 d) 0 e) $-\frac{1}{2}$ f) -3

Obliczanie granicy funkcji w punkcie, s. 292

1. a) 0 b) -32 c) 1 d) 384 e) 3 f) -8
2. a) 2 b) 0 c) -6 d) $-4\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$ f) 0
3. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ c) 4
4. 0

Granice jednostronne funkcji w punkcie, s. 296

1. a) 0 b) $-\frac{1}{5}$ c) 6
2. a) -3 b) $\frac{1}{6}$ c) $\sqrt{2}$
4. a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$ b) nie istnieje; $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-5$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-7$
   c) nie istnieje; $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=-8$ d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

Granica funkcji w nieskończoności, s. 300

3. a) 2 b) 0 c) -4
4. a) 0 b) $-1,5$ c) 1
5. a) $-\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{3}$
6. a) 9 b) 5 c) 8 d) 0,75 e) -6 f) 2
7. a) 0 b) 0 c) 0

Granica niewłaściwa funkcji, s. 306

1. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$
   d) 0; granica właściwa e) $+\infty$ f) -2; granica właściwa
2. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) 0

3. a) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1-3x}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1-3x}{x-2}=-\infty$; nie istnieje

   b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4-4x}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4-4x}{(x-1)^3}=-\infty$; istnieje

4. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 0 e) $-\infty$ f) $-\infty$

5. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $\dfrac{1}{2}$, granica właściwa

Ciągłość funkcji w punkcie, s. 311

3. a) nie b) tak

Ciągłość funkcji w zbiorze, s. 319

1. a) funkcja ciągła b) funkcja nie jest ciągła
   c) funkcja ciągła d) funkcja jest ciągła

2. $a=3$ lub $a=1\dfrac{2}{3}$

3. a) $a=-1$ lub $a=3$ b) $a=1$ lub $a=-2$

6. np. $1\dfrac{3}{16}$

7. *wskazówka*: Sprawdź, czy wielomian ma pierwiastki całkowite.

Asymptoty wykresu funkcji, s. 326

1. a) asymptota pionowa obustronna: $x=-7$ b) nie istnieje
   c) asymptota pionowa lewostronna: $x=-1$; asymptota pionowa prawostronna: $x=1$

2. a) asymptota pozioma obustronna: $y=0$ b) nie istnieje
   c) asymptota pozioma obustronna: $y=-\dfrac{1}{2}$

3. a) $y=3x-6$ b) $y=2x$ c) $y=-x+5$

4. a) asymptoty pionowe obustronne: $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$; asymptota pozioma obustronna: $y=2$
   b) asymptota pionowa obustronna: $x=0$; asymptota ukośna obustronna: $y=2x$
   c) asymptota pionowa obustronna: $x=-4$; asymptota ukośna prawostronna: $y=x-2$, asymptota ukośna lewostronna: $y=-x+2$

Pochodna funkcji w punkcie, s. 335

1. a) 4 b) -30 c) -2 d) 3 e) $\dfrac{1}{6}$ f) 9

2. a) $f'_-(2)=4$, $f'_+(2)=-1$ b) $f'_-(0)=0$, $f'_+(0)$ nie istnieje

3. a) $f'(0)=0$ b) $f'(1)=-4$ c) nie istnieje; $f'_-(-1)=2$, $f'_+(-1)=1$
d) nie istnieje, bo funkcja f nie jest ciągła.

4. a) $a=3, b=-2$ b) $a=\frac{1}{4}, b=2$

Funkcja pochodna, s. 344

1. a) $f'(x)=2$ b) $f'(x)=6x-1$ c) $f'(x)=3x^2-10x$
d) $f'(x)=15x^4+8x^3-3x^2$ e) $f'(x)=56x^6-8x^3-1$ f) $f'(x)=8x^3+3x^2-16$

2. a) $f'(x)=\frac{2-3x}{x^3}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}-\{0\}$ b) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-3x^{-4}$, $D_{f'}=(0,+\infty)$

c) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}-3\sqrt{2}x^2$, $D_{f'}=(0,+\infty)$ d) $f'(x)=1+\frac{2}{\sqrt{x}}$, $D_{f'}=(0,+\infty)$

e) $f'(x)=-\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}}+\frac{9}{2}x^{\frac{-5}{2}}$, $D_{f'}=(0,+\infty)$ f) $f'(x)=4x-50$, $D_{f'}=(0,+\infty)$

3. a) $f'(x)=5x^4-9x^2+2x$ b) $f'(x)=3(x-1)^2$ c) $f'(x)=(x+3)(4x^2+6x-14)$
d) $f'(x)=\frac{100}{x^2}-4$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}-\{0\}$ e) $f'(x)=8(2x+1)^3$ f) $f'(x)=\frac{4}{x^2}+4$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}-\{0\}$

4. a) $f'(x)=\frac{-4}{(x-3)^2}$, $D_{f'}-\boldsymbol{R}-\{3\}$ b) $f'(x)=\frac{30}{(2x+6)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}-\{-3\}$

c) $f'(x)=\frac{2x^3-10}{x^3}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}-\{0\}$ d) $f'(x)=\frac{3x^2-2x+3}{(x^2-1)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}-\{-1,1\}$

e) $f'(x)=\frac{(x+2)(4-x)}{(1-x)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}-\{1\}$ f) $f'(x)=3-\frac{8}{(3x+2)^2}$, $D_{f'}=\boldsymbol{R}-\left\{\frac{-2}{3}\right\}$

5. a) $f'(x)=-2x+5$; $f(4)=7, f'(4)=-3$ b) $f'(x)=3(x-5)^2$; $f(5)=f'(5)=0$
c) $f'(x)=\frac{2}{x^2}$; $f(1)=0, f'(1)=2$ d) $f'(x)=3$; $f(0)=6, f'(0)=3$

6. a) nie, bo f nie jest różniczkowalna w punkcie 1 b) tak

Funkcja złożona. Pochodna funkcji złożonej, s. 352

1. a) $(g\circ f)(x)=x^2-5$, $D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}$; $(f\circ g)(x)=(x-5)^2$, $D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}$

b) $(g\circ f)(x)=(x+1)^3(x-3)^3$, $D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}$; $(f\circ g)(x)=(x^3+1)(x^3-3)$, $D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}$

c) $(g\circ f)(x)=9-x,\ D_{g\circ f}=\langle 0,+\infty)\ ;\ (f\circ g)(x)=\sqrt{9-x^2}\ ,\ D_{f\circ g}=\langle -3,3\rangle$

d) $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-3},\ D_{g\circ f}=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{3},+\infty\right);\ (f\circ g)(x)=x-4,\ D_{f\circ g}=\langle -1,+\infty)$

e) $(g\circ f)(x)=\frac{4}{x^2}-1,\ D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}-\{0\};\ (f\circ g)(x)=\frac{2}{x^2-1},\ D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}-\{-1,1\}$

f) $(g\circ f)(x)=\frac{x}{3+4x},\ D_{g\circ f}=\boldsymbol{R}-\left\{-\frac{3}{4},0\right\};\ (f\circ g)(x)=3x+12,\ D_{f\circ g}=\boldsymbol{R}-\{-4\}$

2. a) $f'(x)=5\left(4x^2-x\right)(8x-1)\ ,\ D=\boldsymbol{R}$ b) $f'(x)=50\left(x^3+2x\right)\left(3x^2+2\right),\ D=\boldsymbol{R}$

c) $f'(x)=-12x\left(x^2-1\right)^2\ ,\ D=\boldsymbol{R}$ d) $f'(x)=\frac{360x-216}{x^3}\ ,\ D=\boldsymbol{R}-\{0\}$

e) $f'(x)=\frac{-2x-1}{8x^2}\ ,\ D=\boldsymbol{R}-\{0\}$

f) $f'(x)=5\cdot\left(2x^5-\frac{1}{3x}\right)^2\left(32x^5+\frac{2}{3x}\right),\ D=\boldsymbol{R}-\{0\}$

3. a) $f'(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\ ,\ D=\boldsymbol{R}$ b) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\ ,\ D=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

c) $f'(x)=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-4}},\ D=(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$ d) $f'(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}\ ,D=(\frac{-1}{2},+\infty)$

e) $f'(x)=\frac{x}{\left(16-x^2\right)\sqrt{16-x^2}}\ ,D=(-4,4)$

f) $f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2+3\right)}},\ D=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

4. a) $f'(4)=20$ b) $f'(1)=-576$ c) $f'(2)=1\frac{1}{4}$ d) $f'(-2)=8\frac{7}{16}$

5. 18

6. $h(4)=5,\ \ f'(4)=-\frac{1}{3}$

7. a) *wskazówka*: Funkcja f jest określona w zbiorze $\boldsymbol{R}$ i jest nieparzysta, więc spełnia warunek $f(x)=-f(-x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
Wówczas $f'(x)=-f'(-x)\cdot(-x)'$.

8. $g(-2)=1296$ $g'(-2)=-864$

9. $g(1)=0{,}2$ $g'(1)=-0{,}16$ *wskazówka*: $g'(x)=\frac{-\left[f'(x)+2\right]}{\left[f(x)+2x\right]^2},\ x\in\boldsymbol{R}$

10. $g(3)=g'(3)=\sqrt{2}$; wskazówka: $g'(x)=\frac{f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$, $x\in \boldsymbol{R}$

11. $g(5)=205 \quad g'(5)=-31$

Styczna do wykresu funkcji, s. 358

1. $y=-4x-1$; tak
2. $y=3x+2$; styczna ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji f: $(-1,-1)$, $(2,8)$
3. $y=-4x+3$; tak
4. $l_1\colon y=-\frac{1}{3}x+2,\ P_1(3,1)$ oraz $l_2\colon y=-\frac{1}{3}x-2,\ P_2(-3,-1)$
5. a) $l_1\colon y=2,\ P_1(0,2)$ $l_2\colon y=-2,\ P_2(2,-2)$ b) $Q_1(3,2)$ oraz $Q_2(-1,-2)$
6. $l_1\colon y=5x+5, P_1(-1,0)$ oraz $l_2\colon y=5x-31, P_2(5,-6)$
7. $y=2x-1 \ \vee \ y=-2x-1$
8. $y=x+1$
9. *wskazówka*: Zobacz przykład 3. Równanie $f(x)=g(x)$ rozwiąż graficznie.

Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji, s. 363

3. nie
4. nie
5. a) funkcja rosnąca w przedziałach: $\left(-\infty,\frac{-1}{6}\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right)$; funkcja malejąca w przedziale $\left\langle\frac{-1}{6},\frac{1}{2}\right\rangle$ b) funkcja rosnąca w przedziałach: $\left\langle-3,-\sqrt{5}\right\rangle$, $\left\langle\sqrt{5},+\infty\right\rangle$; funkcja malejąca w przedziałach: $\left(-\infty,-3\right\rangle$, $\left\langle-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\rangle$
   c) funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle-1,1\rangle$, malejąca w przedziałach $(-\infty,-1\rangle$, $\langle1,+\infty)$
   d) funkcja jest rosnąca w przedziałach: $\left(-\infty,-3\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{4},+\infty\right)$, malejąca w przedziale $\left\langle-3,\frac{1}{4}\right\rangle$
6. a) funkcja rosnąca w przedziałach: $(-\infty,-1\rangle$, $\langle1,+\infty)$; funkcja malejąca w przedziałach: $\langle-1,0)$, $(0,1\rangle$
   b) funkcja malejąca w przedziałach: $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,+\infty)$
   c) funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle0,1)$, malejąca w przedziałach $(-\infty,0\rangle$, $(1,+\infty)$
   d) funkcja jest stała w przedziałach $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$, $(2,+\infty)$

7. a) funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -1, +\infty)$, malejąca w przedziale $\left\langle -\frac{3}{2}, -1 \right\rangle$

   b) funkcja jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty, 3\frac{1}{3} \right\rangle$, malejąca w przedziale $\left\langle 3\frac{1}{3}, 5 \right\rangle$

   c) funkcja jest rosnąca w przedziale $\left\langle 0, 1\frac{3}{5} \right\rangle$, malejąca w przedziałach $(-\infty, 0\rangle$, $\left\langle 1\frac{3}{5}, 2 \right\rangle$

   d) funkcja jest rosnąca w przedziałach $\left\langle -1, -\frac{4}{5} \right\rangle$, $\langle 0, +\infty)$, malejąca w przedziale $\left\langle -\frac{4}{5}, 0 \right\rangle$

8. a) funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 0\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$
   b) funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 5, +\infty)$, malejąca w przedziałach $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 4\rangle$

9. $a = \frac{1}{3}, b = 5$

10. $a = 0, b = -3, c = 2$

Ekstrema lokalne funkcji, s. 372-373

1. a) $f_{\min}(-2) = 0, f_{\max}(1) = 4, f_{\min}(3) = -1$; jeśli $x \in \langle 4, 5)$ to funkcja f ma maksimum lokalne równe 3, które nie jest właściwe
   b) $g_{\min}(-3) = g_{\min}(-1) = g_{\min}(1) = g_{\min}(3) = 0, g_{\max}(-2) = g_{\max}(2) = 1, g_{\max}(0) = 3$; funkcja g nie ma innych ekstremów lokalnych

2. punkty krytyczne: 0, –1, 2; $f(0)$ – minimum lokalne; funkcja f nie ma ekstremum w punkcie -1; $f(2)$ – maksimum lokalne

3. punkty krytyczne: –3, 1; $f(-3)$ – maksimum lokalne, $f(1)$ – minimum lokalne

4. a) punkty krytyczne: –2 oraz $\frac{2}{3}$; $f_{\max}(-2) = 0$, $f_{\min}\left(\frac{2}{3}\right) = -9\frac{13}{27}$

   b) punkty krytyczne: –2 oraz 2; $f_{\min}(-2) = -30\frac{1}{3}$; funkcja nie ma ekstremum w punkcie 2

   c) punkty krytyczne: –7 oraz –3; $f_{\max}(-7) = -9, f_{\min}(-3) = -1$

   d) punkt krytyczny: $\sqrt[3]{2}$; $f_{\min}\left(\sqrt[3]{2}\right) = 1{,}5\sqrt[3]{2}$

5. a) punkty krytyczne: –2, –1, 1, 2; $f_{\max}(-2) = -5$, $f_{\min}(-1) = -27, f_{\max}(1) = 49, f_{\min}(2) = 27$

   b) punkty krytyczne: $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$; $f_{\max}\left(-\sqrt{3}\right) = 18\sqrt{3}$, $f_{\min}\left(\sqrt{3}\right) = -18\sqrt{3}$, funkcja nie ma ekstremum w punkcie 0

   c) punkty krytyczne: 1, 2; $f_{\min}(1) = 1$, $f_{\max}(2) = \frac{1}{2}$

   d) punkty krytyczne: $-2\frac{1}{2}$, 0; $f_{\max}\left(-2\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{4}, f_{\min}(0) = 0$

6. a) $f_{max}(-3)=0, f_{min}(-1)=-108$ b) $f_{max}(-1)=1, f_{max}(1)=1$

   c) $f_{max}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4\sqrt{6}}{9}$ d) $f_{max}\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{125}, f_{min}(0)=0$

7. $a=3;\ f_{max}(-1)=-2,\ f_{min}(3)=6$

8. a) $a=-5, b=4$ b) $f_{min}(7)=9$

10. *wskazówka*: Wykaż, że w przedziale $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ funkcja $f(x)=4x^3+9x^2-12x-1$ jest rosnąca.

12. a) $f_{min}(0)=-3$ b) $f_{min}(2)=-8,\ f_{max}(4)=0$

13. punkty krytyczne: $-2,\ \frac{-4}{3};\ f_{min}\left(\frac{-4}{3}\right)=\frac{-4}{27}$, funkcja nie ma ekstremum w punkcie -2

Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale, s. 379

1. a) funkcja f przyjmuje dla argumentu 2 wartość największą, równą 8 i dla argumentu 5 wartość najmniejszą, równą -55

   b) funkcja f przyjmuje dla argumentu $2\frac{2}{3}$ wartość największą, równą $\frac{16}{3\sqrt{3}}$ i dla argumentu -21 wartość najmniejszą, równą -105

2. a) funkcja f przyjmuje dla argumentu -2 wartość największą, równą 32 i dla argumentu 2 wartość najmniejszą, równą -16

   b) funkcja f przyjmuje dla argumentu -5 wartość największą, równą $3\sqrt{2}$ i dla argumentu -1 wartość najmniejszą, równą $\sqrt{2}$

4. a) nie istnieje wartość najmniejsza; wartość największa funkcji f jest równa 0
   b) nie istnieje wartość największa; wartość najmniejsza jest równa 0

5. a) nie istnieje wartość największa; wartość najmniejsza jest równa 6
   b) wartość najmniejsza jest równa 0, wartość największa nie istnieje

Zadania optymalizacyjne, s. 385

1. $1\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{3},\ 2;\ V=7\frac{1}{9}$

2. 1, 1, 1

3. $x=-\frac{1}{3};\ f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-5}{27}$

4. $4+4;\ 2$

5. 3,58 m x 4,47 m; ok. 11 911 zł

6. 15

7. 16; *wskazówka*: Rozpatrz funkcję $f(x)=\frac{K(x)}{x}$. Funkcja $y=f(x)$, gdzie $x>0$, ma wartość najmniejszą dla $x=5\sqrt{10}$, $15<5\sqrt{10}<16$. Należy obliczyć $f(15)$ i $f(16)$.
8. *wskazówka*: Wykaż, że obydwa trójkąty są równoramienne, a ich ramiona mają długość 2.
9. o godz. 13^{26}
10. ok. 106 km/h; Koszty są sumą płacy kierowcy I kosztów paliwa; opisuje je funkcja $K(x)=d\left(\frac{80}{x}+\frac{x}{140}\right)$, $D_K=\langle 50, 140\rangle$, gdzie d (stała) oznacza długość drogi (w km).

    Funkcja K przyjmuje najmniejszą wartość w punkcie $\sqrt{11\,200}$ ($\approx 105{,}8$).
11. a) taka wartość nie istnieje b) $m=3\sqrt{2}$
12. nie istnieje
13. 20; *wskazówka*: Oznacz przez x długość krótszego odcinka, wyznaczonego na dłuższej podstawie trapezu równoramiennego przez wysokość h poprowadzoną z wierzchołka kąta rozwartego. Wówczas $P=\frac{2x+20}{2}\cdot h$ oraz $h^2+x^2=10^2$
14. $2\sqrt{2}-1$; *wskazówka*: Zauważ, że trapez jest równoramienny. Zobacz wskazówkę do zadania 13.

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 6., s. 387-389

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	B	B	D	C	D	D	C	C	C

Zadania otwarte

11. $a=-1{,}5$ $b=7$
13. asymptota pionowa obustronna: $x=-2$; asymptota pozioma obustronna: $y=-\frac{1}{2}$
14. a) $y=1{,}5x+5$ b) $(-4, -1)$, $(2, 8)$
15. f malejąca w przedziałach: $(-\infty, -3\rangle$, $\langle 3, +\infty)$; f rosnąca w przedziale $\langle -3, 3\rangle$.
17. ok. $\frac{-3}{16}\approx -0{,}2$
18. a) $ZW=\langle -2, 2\rangle$ b) $ZW=(-\infty, -7\rangle\cup\langle 13, +\infty)$
19. a) funkcja malejąca w przedziale $\langle -1, 2\rangle$, rosnąca w przedziałach $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 2, +\infty)$
    b) $f_{max}(-1)=7$, $f_{min}(2)=-6{,}5$ c) $y=-6x+3$, $y=-6x+3{,}5$

20. a)

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	X	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	8 min	↗ $+\infty$	X	↗ $-\infty$	0 max	↘ $-\infty$

b) asymptota pionowa obustronna: $x = -2$, asymptota ukośna obustronna: $y = -x + 2$

21. krawędzie podstawy: 6 m i 3 m, wysokość basenu: 2 m

22. $4\sqrt{3}d$; *wskazówka*: Wykaż, że $d^2 = 2x^2 + y^2$, gdzie x – długość krawędzi

23. $a = -12$; pierwiastek dwukrotny: -2, pierwiastek jednokrotny: $1\frac{1}{2}$.

7. Trygonometria

Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej – powtórzenie wiadomości z klasy 2., s. 396-397

1. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{-5\pi}{6}$ c) $\frac{19\pi}{15}$ d) $\frac{-62\pi}{9}$

2. a) $-135°$ b) $105°$ c) $-690°$ d) $1250°$

3. a) $x = -3$ b) $x = 2{,}5$ c) $x = \frac{7}{8} \vee x = \frac{-7}{8}$

4. a) $\sin\alpha = -0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1\frac{1}{3}$

   b) $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{11}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{55}}{11}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-\sqrt{55}}{5}$

   c) $\sin\alpha = \frac{6\sqrt{37}}{37}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{37}}{37}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{6}$

   d) $\sin\alpha = \frac{-5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-5}{12}$

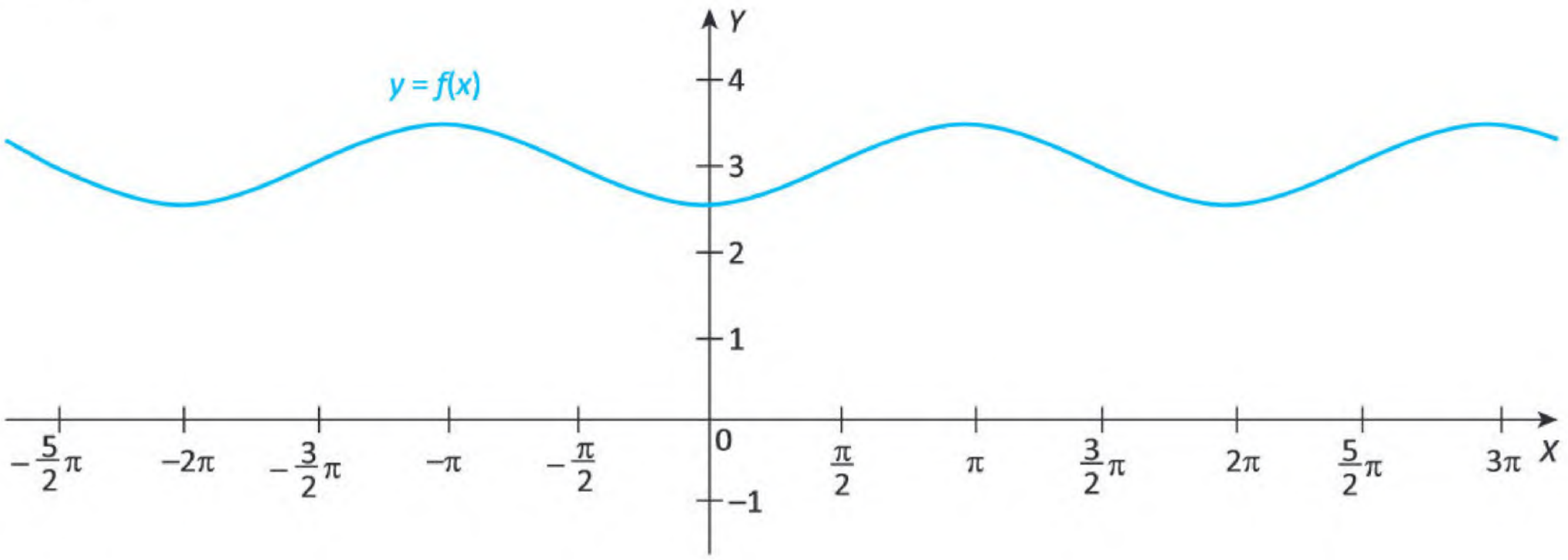
8. a) $T_0 = 2$ b) $T_0 = 2\pi$ c) $T_0 = \frac{2\pi}{3}$ d) $T_0 = 3\pi$

9. a) $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}$

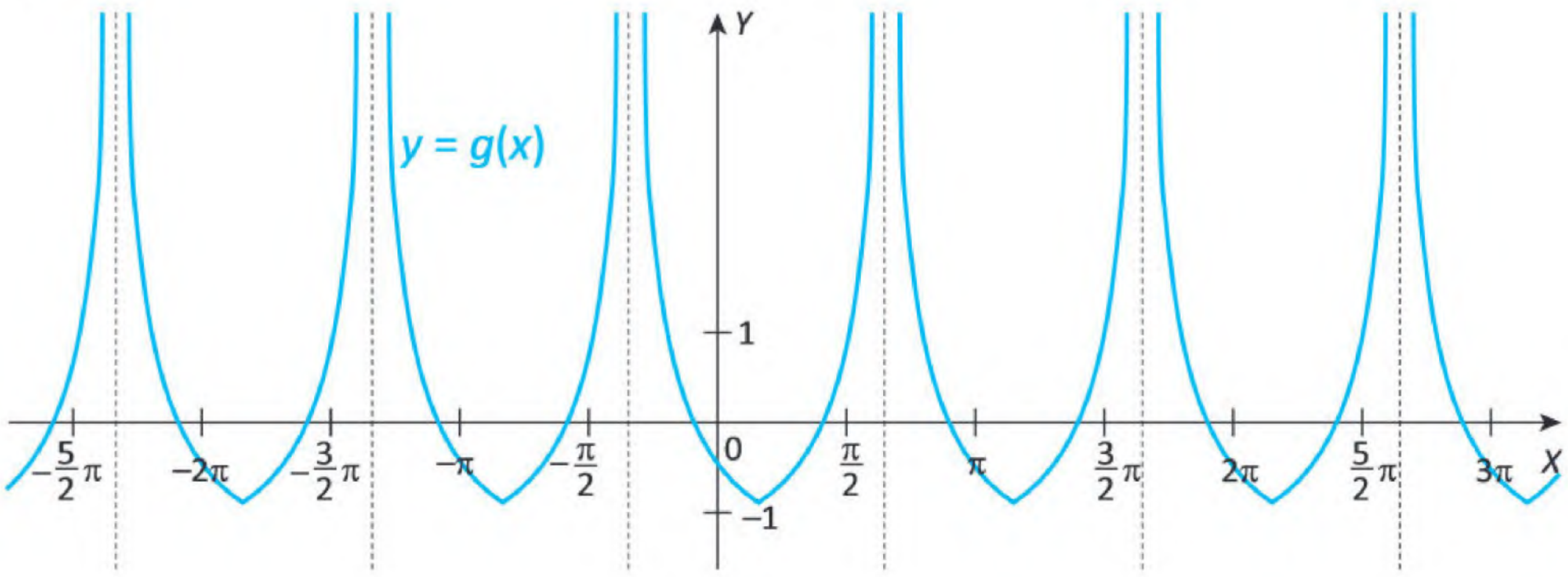
10. a) $ZW_f = \left\langle \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ b) $ZW_g = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right\rangle$ c) $ZW_h = \left\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right\rangle$

Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych, s. 401

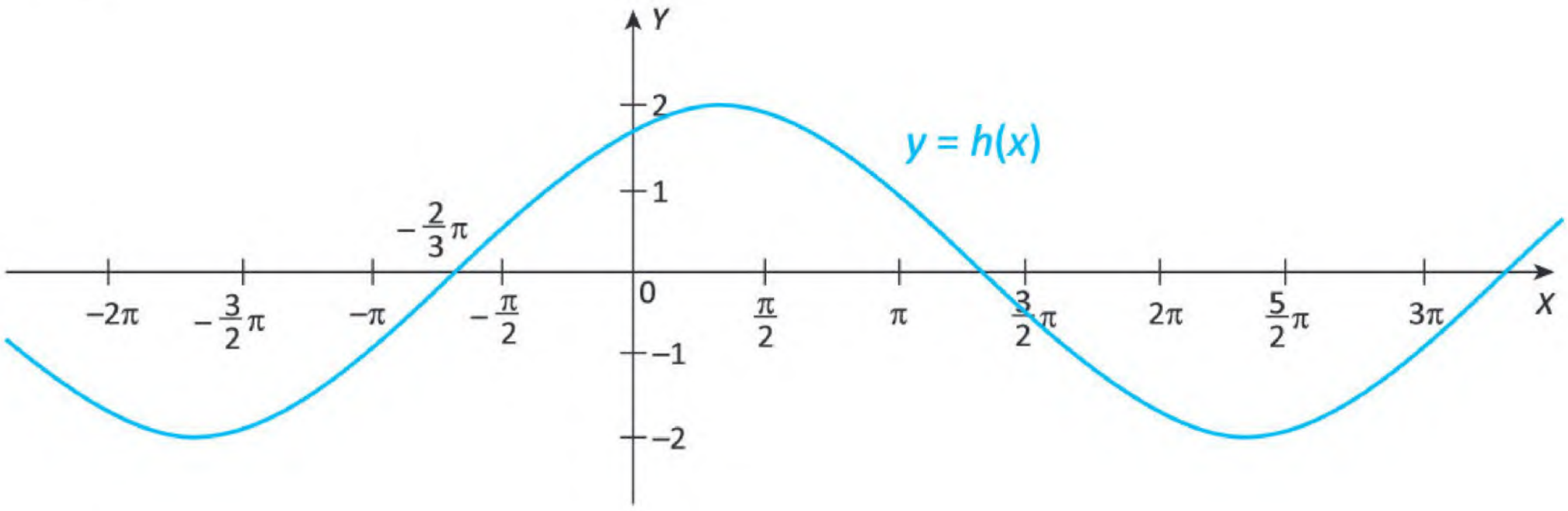
2. a)



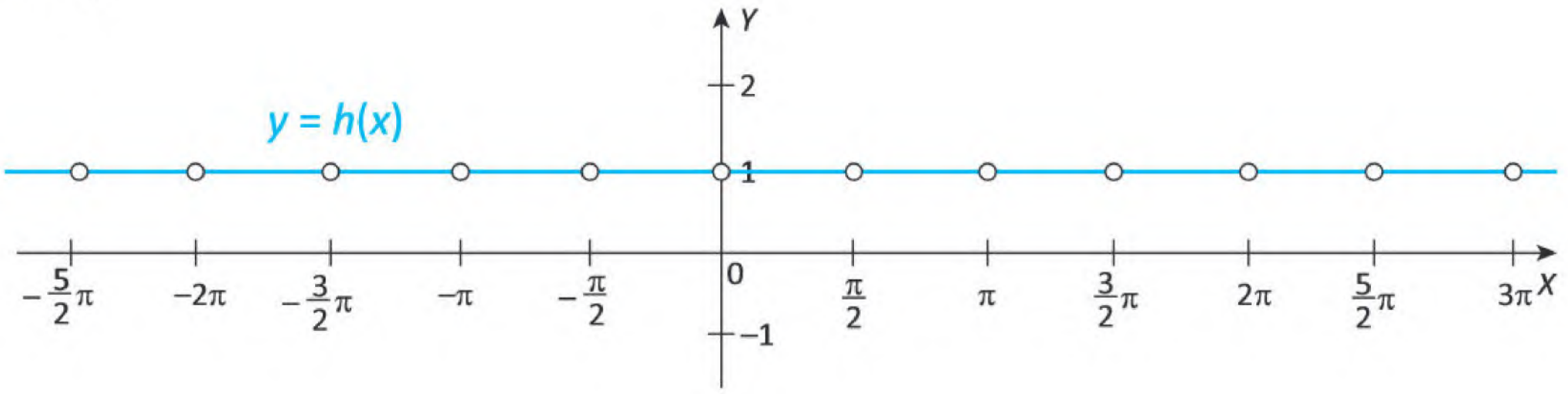
3. a)



4 b)



4. c)



Równania trygonometryczne, cz. 1., s. 409-410

1. a) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ b) $x=k\pi, k\in \mathbf{Z}$

   c) $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$

2. a) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ b) $x=\pi+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$

   c) $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \vee x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$

3. a) $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ b) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ c) $x\in \mathbf{R}-\left\{x: x=\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$

4. a) $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ b) $x=\frac{-\pi}{6}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ c) $x=k\pi, k\in \mathbf{Z}$

5. a) $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ b) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z} \vee x=\pi+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$

   c) $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in \mathbf{Z} \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ d) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$

   e) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}$ f) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$

6. a) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ b) $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$ c) równanie sprzeczne

7. a) $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$ b) $x=\frac{7\pi}{30}+\frac{k\pi}{3},\ k\in \mathbf{Z}$ c) $x=\frac{-\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}$

   d) $x=\frac{-10\pi}{3}+8k\pi, k\in \mathbf{Z}$ e) $x=\frac{2k\pi}{3} \vee x=\frac{-\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in \mathbf{Z}$ f) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbf{Z}$

8. a) $x=\frac{\pi}{3}+4k\pi \vee x=\pi+4k\pi \vee x=-\pi+4k\pi \vee x=\frac{7\pi}{3}+4k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$

   b) równanie sprzeczne c) $x=3k\pi \vee x=\frac{3\pi}{2}+3k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$

   d) $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2},\ k\in \mathbf{Z}$

9. a) $x\in\left\{\frac{-7\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$ b) $x\in\left\{\frac{-11\pi}{3}, \frac{-8\pi}{3}, \frac{-5\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$

   c) $x\in\left\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ d) $x\in\left\{\frac{-7\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right\}$

10. a) $x \in \left\{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\right\}$ b) $x \in \left\{\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right\}$

c) $x \in \left\{\frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ d) $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}\right\}$

e) $x \in \left\{\frac{-7\pi}{8}, \frac{-5\pi}{8}, \frac{-3\pi}{8}, \frac{-\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$

f) $x \in \left\{\frac{-\pi}{2}, \frac{-5\pi}{18}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{18}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

11. a) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

c) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{-\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ f) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

12. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ d) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

e) $x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

13. a) $x \in \left\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ b) $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy, s. 418-419

1. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) -1 f) $\sqrt{3}$

2. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ c) $-2-\sqrt{3}$ d) $2+\sqrt{3}$

3. a) $-\frac{33}{65}$ b) $\frac{-16}{65}$ c) $\frac{33}{56}$ d) $\frac{-16}{63}$

4. a) $\gamma = 105°,\ b = 10\sqrt{2},\ c = 5\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

b) $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{14}\ (\alpha \approx 38°),\ \sin\beta = \frac{4\sqrt{3}}{7}\ (\beta \approx 82°),\ c = 7$

c) $\left(\alpha \approx 23°, \beta \approx 63°, \gamma \approx 94°, \sin\gamma = \frac{29}{13\sqrt{5}}, a = \frac{135\sqrt{5}}{29}, b = 24\frac{6}{29}\right)$ lub

$\left(\alpha \approx 23°, \beta \approx 117°, \gamma \approx 40°, \sin\gamma = \frac{19}{13\sqrt{5}}, a = \frac{135\sqrt{5}}{19}, b = 36\frac{18}{19}\right)$

d) $\left(\alpha \approx 98°, \beta \approx 22°, \gamma = 60°, \cos\alpha = \frac{-1}{7},\ a = 8\right)$ lub

$\left(\alpha \approx 38°, \beta \approx 22°, \gamma = 120°, \cos\alpha = \frac{11}{14},\ a = 5\right)$

5. a) tak b) tak 7. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ 10. $\gamma = 45°$

11. *wskazówka*: a) $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right),\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ oraz $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

d) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right),\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{k} \in \mathbf{Z}$ oraz $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

12. $\text{ctg}\,75° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, $\text{ctg}\,15° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta, s. 423-424

1. a) $\sin 2\alpha = \frac{-24}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{-7}{25}$, $\text{tg}\,2\alpha = \frac{24}{7}$, $\text{ctg}\,\alpha = \frac{7}{24}$

b) $\sin 2\alpha = \frac{-240}{289}$, $\cos 2\alpha = \frac{161}{289}$, $\text{tg}\,2\alpha = \frac{-240}{161}$, $\text{ctg}\,2\alpha = \frac{-161}{240}$

c) $\sin 2\alpha = \frac{16}{65}$, $\cos 2\alpha = \frac{-63}{65}$, $\text{tg}\,2\alpha = \frac{-16}{63}$, $\text{ctg}\,2\alpha = \frac{-63}{16}$

d) $\sin 2\alpha = \frac{-20}{29}$, $\cos 2\alpha = \frac{-21}{29}$, $\text{tg}\,2\alpha = \frac{20}{21}$, $\text{ctg}\,2\alpha = \frac{21}{20}$

2. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $8\sqrt{6}$ d) 14

3. c) *wskazówka*: Pomnóż iloczyn przez ułamek $\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}$.

4. a) $\frac{24}{25}$ b) $\frac{-7}{25}$ c) $-3\frac{3}{7}$

5. $-\frac{1}{8}$

6. $\frac{1}{2}$

7. $\operatorname{ctg}75^\circ = 2-\sqrt{3},\ \operatorname{ctg}15^\circ = 2+\sqrt{3}$

8. $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}\quad \operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = -2-\sqrt{3}$

9. a) $y = -\cos 2x$ b) $y = -\cos x + 1$

c) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}2x,\ x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \boldsymbol{Z}$ d) $y = -2 \cdot \sin 2x$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, s. 428-429

5. a) $2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2}$ b) $2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

c) $-\sqrt{2} \cdot \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ d) $-2 \cdot \operatorname{ctg}2\alpha$

7. 1

8. a) $ZW_f = \left\langle -\frac{1}{4}, 0 \right\rangle$ b) $ZW_f = \left\langle -\frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right\rangle$ c) $ZW_f = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$

d) $ZW_f = \langle 0, 4 \rangle$ e) $ZW_f = \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$ f) $ZW_f = \left\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \right\rangle$

Równania trygonometryczne, cz. 2., s. 434-435

1. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ b) równanie sprzeczne

c) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

d) $x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

f) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

2. a) $x = \pi + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ b) $x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}$

c) $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$ d) $x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$

e) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$

f) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{2k\pi}{7} \vee x=(2k+1)\pi,\ k\in Z$

3. a) $x\in\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$ b) $x\in\left\{\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $x\in\left\{0,\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3},2\pi\right\}$ d) $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

e) $x\in\left\{\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{18},\frac{11\pi}{18},\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right\}$ f) $x\in\left\{\frac{-11\pi}{12},\frac{\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right\}$

4. a) $x=\frac{\pi}{8}+k\pi \vee x=\frac{3\pi}{8}+k\pi, k\in Z$

b) $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$ c) $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$

5. a) $k\in\left\langle -1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{\sqrt{2}}{2},1\right\rangle$ b) $k\in\left\langle -3,-\sqrt{7}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{7},3\right\rangle$

c) $k\in\left\langle 2\frac{3}{4},3\right\rangle$ d) $k\in\langle -11,-2\rangle\cup\langle 0,9\rangle$

Nierówności trygonometryczne, s. 440-441

1. a) $x\in\left\langle -\pi,\frac{-\pi}{3}\right\rangle\cup\left\langle\frac{\pi}{3},\pi\right\rangle$ b) $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{3},\frac{5\pi}{2}\right\rangle$

c) $x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right\rangle$ d) $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right\rangle\cup\left\langle\frac{5\pi}{6},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{7\pi}{6}\right\rangle\cup\left\langle\frac{11\pi}{6},2\pi\right)$

e) $x\in\langle -2\pi,2\pi\rangle$ f) $x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right\rangle$

2. a) $x\in\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right),\ k\in Z$ b) $x\in\left\langle\frac{3\pi}{4}+6k\pi,\frac{9\pi}{4}+6k\pi\right\rangle,\ k\in Z$

c) $x\in\left(\frac{-\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right\rangle,\ k\in Z$ d) $x\in(-\pi+3k\pi,3k\pi),\ k\in Z$

e) $x\in\left\langle\frac{2\pi}{3}+4k\pi,2\pi+4k\pi\right\rangle,\ k\in Z$ f) $x\in\left(\frac{7\pi}{8}+3k\pi,\frac{25\pi}{8}+3k\pi\right),\ k\in Z$

3. a) $x\in\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right),\ k\in Z$ b) $x\in\left\langle k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right\rangle,\ k\in Z$

c) $x \in \left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$ d) $x \in \left\langle\frac{-\pi}{12}+k\pi, \frac{7\pi}{12}+k\pi\right\rangle,\ k \in \boldsymbol{Z}$

e) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{x:\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\pi+2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$

f) $x \in \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right) \cup \left(\pi+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$

4. a) $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\rangle$ b) $x \in \left\langle -2\pi, \frac{-4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\rangle$

c) $x \in \left\langle\frac{-\pi}{3}, \pi\right) \cup \left\langle\frac{5\pi}{3}, 3\pi\right)$ d) $x \in \left\langle -3\pi, \frac{-\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{9\pi}{2}, 5\pi\right\rangle$

e) $x \in \left(\frac{-5\pi}{16}, \frac{-\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{-\pi}{16}, \frac{\pi}{8}\right)$ f) $x \in \langle 2, 6\rangle \cup \langle 18, 6\pi\rangle$

5. a) $x \in \left(\frac{-\pi}{12}+k\pi, \frac{5\pi}{12}+k\pi\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$ b) $x \in \left\langle\frac{\pi}{6}+4k\pi, \frac{17\pi}{6}+4k\pi\right\rangle,\ k \in \boldsymbol{Z}$

c) $x \in \left\langle\frac{\pi}{3}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right\rangle,\ k \in \boldsymbol{Z}$ d) $x \in \left(\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}, \frac{13\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$

8. a) $x \in \boldsymbol{R} - \left\{x:\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ b) $x \in \left\langle\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$

Pochodne funkcji trygonometrycznych, s. 448

1. a) $f'(x) = -\sin x - 2 \cdot \cos x$ b) $f'(x) = 3x^2 + \frac{4}{\cos^2 x}$ c) $f'(x) = 20 \cdot \cos(2x+3)$

d) $f'(x) = -21 \cdot \sin(3x-5)$ e) $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ f) $f'(x) = \frac{-2 \cdot \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

2. a) $y = -3x + \frac{\pi+4}{2}$ b) $y = 3x + \sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$

3. $P = 2\sqrt{2} - 2$

4. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$; $\sqrt{2}-1$; *wskazówka*: Wprowadźmy oznaczenia: a, b – długości przyprostokątnych, c – długość przeciwprostokątnej, x – miara kąta ostrego trójkąta przeciwległego do boku długości a, R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, r – długość promienia wpisanego w trójkąt. Wówczas $R = \frac{c}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}$ oraz $a = c \cdot \sin x$, $b = c \cdot \cos x$, więc $r = \frac{c}{2}(\sin x + \cos x - 1)$. Stosunek długości promienia r do R wyraża

funkcja $f(x)=\sin x+\cos x-1,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 7., s. 449-450

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Odpowiedź	B	A	C	B	A	C	C	D	A

Zadania otwarte

10. a) 8 b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

13. a) $x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi,\ x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$; *wskazówka*: zastosuj wzór na cosinus różnicy

b) $x=\frac{-\pi}{6}+k\pi,\ x=\frac{-\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$; *wskazówka*: zastosuj wzór na sinus sumy $(2x+4x)$

c) $x=\frac{k\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$; *wskazówka*: zastosuj wzór na różnicę cosinusów

d) $x=\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$ i $k\neq 4p-2, p\in\mathbf{Z}$; e) $x=\frac{-\pi}{4}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$

f) $x=2k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$

14. $x\in\left\langle\frac{\pi}{24}+k\pi,\frac{5\pi}{24}+k\pi\right\rangle, k\in\mathbf{Z}$ b) $x\in\left\langle 0,\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},2\pi\right\rangle$

c) $x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{6}\right\rangle\cup\left\langle\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\rangle\cup\left\langle\frac{3\pi}{2},2\pi\right\rangle$ d) $x\in\left\langle\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\rangle\cup\{0,2\pi\}$

e) $x\in\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi,\frac{5\pi}{4}+k\pi\right), k\in\mathbf{Z}$;

f) $x\in\left\langle-\pi,\frac{\pi}{12}\right\rangle\cup\left\langle\frac{5\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right\rangle\cup\left\langle\frac{11\pi}{12},\pi\right\rangle$; *wskazówka*: ustal przedziały, w których cosinus x jest dodatni (ujemny) i skorzystaj z definicji wartości bezwzględnej

17. $m\in\left\langle 0,\frac{1}{6}\right\rangle$

18. $ZW=\left\langle-2,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},2\right\rangle$

19. *wskazówka*: Doprowadź wzór funkcji do postaci: $f(x)=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$, korzystając ze wzoru na różnicę cosinusów. Następnie wykres funkcji $y=-\cos 2x$ przesuń równolegle o wektor $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right]$.

20. $T_0=\pi$; *wskazówka*: $y=\frac{1}{2}\cdot\left[2\cos(x+3)\cos(x+1)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(2x+4)+\cos 2\right]$

8. Geometria analityczna

Wektor w układzie współrzędnych. Podział odcinka, s. 455

1. a) $m=-8, n=3$ b) $m=\frac{2}{3}, n=-3$ c) $m=-3\frac{2}{3}, n=3\frac{3}{4}$
2. $A(-2, 5)$
3. I. $a=-2, \vec{u}=[6,-8], \vec{v}=[-3,4]$ II. $a=\frac{2}{3}, \vec{u}=[-2,-8], \vec{v}=\left[-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right]$
4. $(0, 1), (5, -3)$
5. $A(-7, 6)$
6. $C(2, -3), D(-7, 5)$
7. $A(-1, -3), B(7, 1)$
8. a) $D(-4, -2), |CD|=6\sqrt{5}$ b) $S(0, 0)$

Kąt między niezerowymi wektorami, s. 460

1. a) $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{10}}{10}, \cos\beta=\frac{13\sqrt{10}}{50}, \cos\gamma=\frac{4}{5}$

   b) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin\beta=\frac{11\sqrt{5}}{25}, \sin\gamma=\frac{3}{5}$
3. a) $a=0{,}1$ b) $a=2{,}5 \vee a=-2{,}5$
5. $P_1(-1, 2), P_2\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$

Proste w układzie współrzędnych, s. 466

3. $A(-3, -2), B(4, 0), C(5, 4), D(-2, 2)$
4. a) $\left(-2\frac{5}{7},\frac{4}{7}\right)$ b) $\left(-1\frac{3}{4},6\right)$

5. a) $(0, 3)$ b) $\left(6\frac{7}{8}, -4\frac{5}{16}\right)$

6. $D(1, -1)$, $E\left(2\frac{13}{29}, 2\frac{18}{29}\right)$, $F(-1, 4)$

7. $B(4, 1)$; *wskazówka*: $|AC| = |BC|$, więc prosta zawierająca wysokość CD jest symetralną boku AB.

8. $A(-4, -3)$, $B(4, 1)$

Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi, s. 471

1. a) 2 b) $\sqrt{10}$ c) 9 d) $\frac{17}{\sqrt{58}}$

2. $k_1: -x + 3y + 3 = 0$, $k_2: -x + 3y - 17 = 0$

3. $k_1: -2x - y + 7 = 0$, $k_2: -2x - y + 19 = 0$

4. $k_1: 3x - 4y + 24 = 0$, $k_2: 3x - 4y + 54 = 0$; $d(k_1, l) = 4{,}6$; $d(k_2, l) = 10{,}6$

5. $k_1: -2x + 5y - 9 = 0$, $k_2: -2x + 5y - 23 = 0$; $d(k_1, l) = \frac{14}{\sqrt{29}}$; $d(k_2, l) = \frac{28}{\sqrt{29}}$

6. $1\frac{3}{5}$ oraz $2\sqrt{5}$

7. 2,2

8. 7, $\frac{31\sqrt{34}}{34}$, $\frac{217\sqrt{53}}{265}$

9. $h_A = 4\sqrt{2}$, $h_B = \frac{8\sqrt{26}}{13}$, $h_C = \frac{8\sqrt{10}}{5}$

10. $\frac{11}{\sqrt{13}}$

11. $2\sqrt{5}$

12. a) $8x - 15y = 0$ oraz $x = 0$ b) $x + y - 9 = 0$ oraz $x - y - 7 = 0$

Pole trójkąta. Pole wielokąta, s. 475

1. a) 25 b) 17

2. a) 36 b) 28

3. a) 42 b) 43

4. a) $A(-6, -21)$, $B(1, 0)$ b) 35

5. a) $C_1(0, 3)$, $C_2\left(0, -9\frac{4}{5}\right)$ b) $C_1(6, 0)$, $C_2(2, 0)$

6. $B_1(6, 1)$, $B_2\left(-26\frac{4}{13}, -9\frac{10}{13}\right)$ 7. $P_1\left(1\frac{2}{5}, 5\frac{1}{5}\right)$, $P_2\left(3\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu, s. 482

1. a) $S(-6, 1)$, $r = 3\sqrt{3}$ b) $S\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $r = 4$

2. a) tak; $S\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ i $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

   b) nie; równanie opisuje sumę dwóch prostych: $x + y + 1 = 0$ oraz $x + y - 1 = 0$

3. a) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$

4. $S(2a, b)$; $r = |4a - b|$ 5. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 65$ 6. $(x - 10)^2 + (y + 4)^2 = 97$

7. a) prosta jest rozłączna z okręgiem b) prosta jest sieczną okręgu

8. $(-2, -2)$

9. $(-1, 1)$ oraz $\left(\frac{3}{5}, 5\frac{4}{5}\right)$

10. a) $x + y + 2\sqrt{5} = 0$ oraz $x + y - 2\sqrt{5} = 0$ b) $x - 2y + 7 = 0$ oraz $x - 2y - 3 = 0$.

11. a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$ oraz $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$ b) $y = -\sqrt{3}x - 1$ oraz $y = -\sqrt{3}x + 15$

12. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$

13. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ lub $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$

Wzajemne położenie dwóch okręgów, s. 487

1. a) okręgi rozłączne wewnętrznie b) okręgi się przecinają
   c) okręgi są styczne zewnętrznie d) okręgi są styczne wewnętrznie

2. $m = 0$, punkt styczności $(-2, 2)$ lub $m = -2$, punkt styczności $(0, -6)$

3. $m = 2$, punkt styczności $(0, 1)$ lub $m = -4$, punkt styczności: $(-2, -3)$

4. $A(0, -1)$, $B(6, 1)$; $|AB| = 2\sqrt{10}$ 5. $x - y - 1 = 0$

Zadania różne z geometrii analitycznej, s. 494-495

1. $h = 2\sqrt{5}$ 2. $P = 40$

3. $(x + 2{,}5)^2 + (y - 3{,}5)^2 = \frac{17}{4}$ 4. $(x - 4)^2 + (y - 1{,}5)^2 = \frac{65}{4}$

5. Są dwa rozwiązania: $C_1(0, 1)$, $P_{\triangle ABC_1} = 17$ oraz $C_2(0, -1)$, $P_{\triangle ABC_2} = 15$

6. $C(3, 0)$ lub $C(-2, 0)$; $P_{ABC} = 39$

7. $A(0, 0)$, $B\left(-\sqrt{3}, 3\right)$, $C\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$, $o: \left(x+\sqrt{3}\right)^2 + (y-1)^2 = 1$

8. $A(0, 3)$, $B\left(6, 3-2\sqrt{3}\right)$, $C\left(6, 3+2\sqrt{3}\right)$

9. $A(-3, 0)$, $B(6, 3)$, $C(5, 6)$, $D(-4, 3)$; *wskazówka*: Zauważ, że wierzchołki prostokąta należą do okręgu o środku w punkcie przecięcia się przekątnych i promieniu 5 oraz parami leżą na danych prostych

10. $A(-3, -3)$, $B(3, -1)$, $C(1, 5)$, $D(-5, 3)$

11. Są dwa rozwiązania: $C_1(8, 6)$ i $D_1(2, 4)$ oraz $C_2(4, -2)$, $D_2(-2, -4)$

12. $C_1(7, 4)$, $D_1(-1, 10)$ albo $C_2(-5, -12)$, $D_2(-13, -6)$

13. a) $x + 2y + 1 = 0$ oraz $2x - y + 3 = 0$
    b) $99x - 27y - 23 = 0$ oraz $21x + 77y + 3 = 0$; *wskazówka*: Niech punkt $P(x_0, y_0)$ należy do dwusiecznej jednego z kątów, wyznaczonych przez proste k i m. Wtedy punkt P jest równoodległy od ramion tego kąta, skąd $d(P, k) = d(P, m)$.

14. a) Krzywa jest okręgiem o równaniu $(x + 6)^2 + y^2 = 16$
    b) Krzywa jest okręgiem o równaniu $x^2 + (y + 2)^2 = 9$.

15. a) Krzywa jest parabolą o równaniu $y = -\frac{1}{8}x^2 - 2$

    b) Krzywa jest parabolą o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 3$.

16. a) Zbiór środków okręgów jest parabolą o równaniu $y = \frac{1}{12}x^2 - 3$.

    b) Zbiór środków okręgów jest sumą dwóch zbiorów: paraboli $y = \frac{1}{8}x^2 - 2$ bez punktu $(0, -2)$ oraz tej części osi OY, dla której $y < -2$.

17. $(x - 3)^2 + (y - 4{,}5)^2 = 6{,}25$

Wybrane przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych, s. 503-504

1. $A_1(2, -1)$, $B_1(5, 3)$, $C_1(7, 2)$
2. $A_1(7, -2)$, $B_1(4, 0)$, $C_1(1, -5)$
4. a) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$ b) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$
5. b) 2,625
6. $A_1(-6, -1)$, $B_1(6, 1)$ oraz $A_2\left(\frac{-14}{17}, \frac{5}{17}\right)$, $B_2\left(\frac{14}{17}, \frac{-5}{17}\right)$

7. $C\left(0, 3\frac{1}{2}\right)$; długość najkrótszej łamanej: $4\sqrt{5}$

8. $B(4, 0)$, najmniejszy obwód: $9\sqrt{2}+3\sqrt{10}$

9. a) $A_1\left(1\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ b) $A_1\left(5\frac{1}{2}, -1\right)$

10. a) $S\left(2\frac{1}{2}, -2\right)$, $r=\sqrt{2}$ b) $S(5, -4)$, $r=2\sqrt{2}$ c) $S\left(-5\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$, $r=4$

11. a) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x-2$ b) $y=3x^2-2x+\frac{1}{3}$ c) $y=-4x^2-2x-\frac{1}{4}$

14. $S_1\left(3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ i $k_1=3$; $S_2\left(\frac{-1}{4}, 1\frac{1}{4}\right)$ i $k_2=-3$

15. $A_2(25, 3)$, $B_2(15, 9)$, $C_2(19, -3)$, $P_{A_2B_2C_2}=48$

Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej , s. 510

2. $B(2, 2)$, $3\sqrt{5}$

3. $C\left(-\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$; $9+2\sqrt{6}$

4. $A(2, -3)$; pole jest równe 12.

5. $P(1, 4)$

6. wymiary prostokąta: $2\sqrt{3}$ na 2

Sprawdź, czy umiesz – powtórzenie do rozdziału 8., s. 511-513

Test

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	D	D	C	C	B	D	A	C	B	A

Zadania otwarte

11. $P=28$ 12. $C_1(0, 7)$, $C_2\left(0, -1\frac{1}{2}\right)$ 13. b) $P=30$

14. b) $(x-2)^2+(y-1)^2=8$

15. a) $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 4)$ b) $P=3$

16. $B(5, 4)$, $C_1\left(5-4\sqrt{3}, 0\right)$, $C_2\left(5+4\sqrt{3}, 0\right)$

17. o: $(x+2)^2+(y+6)^2=65$

18. $B(-3, -1)$, $D(5, 3)$

19. $(1, -3)$, $\left(4\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $(-1, 3)$, $\left(-4\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

20. l_1: $x-3y+9=0$, l_2: $x-3y-11=0$

21. a) $60°$ b) $A\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$, $B\left(2\sqrt{3}, -2\right)$, $C\left(4\sqrt{3}, 4\right)$, $D(0, 4)$

22. b) $A_1(-5, 2)$, $B_1(4, 5)$

23. $B(4, 5)$ I sposób: Punkt D to punkt przecięcia prostej k z prostą, prostopadłą do k i przechodzącą przez punkt A. II sposób: Punkt D to punkt przecięcia okręgu o średnicy AC z prostą k, różny od punktu C. III sposób: $D \in k$, więc $D(4-2y, y)$; wówczas $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{DA}$. IV sposób: Punkt D jest środkiem odcinka AB, gdzie B to punkt przecięcia okręgu $o(C, |AC|)$ z prostą zawierającą podstawę AB.

24. Punkty wspólne okręgów: $(5, 0)$, $(-3, 4)$; długość cięciwy: $4\sqrt{5}$.

25. $B\left(\sqrt{3}-1, 2\sqrt{3}-3\right)$, $C\left(-1-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}-3\right)$; *wskazówka*: Sprawdź, że $A \in o$.

26. $S(0, -8)$ lub $S(-3, -2)$

27. $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ lub $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

28. $(x+6)^2+(y-3)^2=50$ lub $(x-29)^2+(y+2)^2=800$

29. a) $60°$ b) $30°$ c) $45°$

30. a) $90°$, $60°$, $30°$ b) $120°$, $45°$, $15°$

31. $(a=1, y-3=0)$ lub $(a=2, x+3=0)$

32. $P(-2, 2)$ $|AP|=2\sqrt{5}$

33. $C\left(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$

34. I. $x+2y-7=0$, $P=36$ II. $x+2y+1=0$, $P=4$

566

568

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych

α	sin α	tg α	ctg α	cos α	
1°	0,017	0,017	57,290	1,000	89°
2°	0,035	0,035	28,636	0,999	88°
3°	0,052	0,052	19,081	0,999	87°
4°	0,070	0,070	14,301	0,998	86°
5°	0,087	0,087	11,430	0,996	85°
6°	0,105	0,105	9,514	0,995	84°
7°	0,122	0,123	8,144	0,993	83°
8°	0,139	0,141	7,115	0,990	82°
9°	0,156	0,158	6,314	0,988	81°
10°	0,174	0,176	5,671	0,985	80°
11°	0,191	0,194	5,145	0,982	79°
12°	0,208	0,213	4,705	0,978	78°
13°	0,225	0,231	4,331	0,974	77°
14°	0,242	0,249	4,011	0,970	76°
15°	0,259	0,268	3,732	0,966	75°
16°	0,276	0,287	3,487	0,961	74°
17°	0,292	0,306	3,271	0,956	73°
18°	0,309	0,325	3,078	0,951	72°
19°	0,326	0,344	2,904	0,946	71°
20°	0,342	0,364	2,747	0,940	70°
21°	0,358	0,384	2,605	0,934	69°
22°	0,375	0,404	2,475	0,927	68°
23°	0,391	0,424	2,356	0,921	67°
24°	0,407	0,445	2,246	0,914	66°
25°	0,423	0,466	2,145	0,906	65°
26°	0,438	0,488	2,050	0,899	64°
27°	0,454	0,510	1,963	0,891	63°
28°	0,469	0,532	1,881	0,883	62°
29°	0,485	0,554	1,804	0,875	61°
30°	0,500	0,577	1,732	0,866	60°
31°	0,515	0,601	1,664	0,857	59°
32°	0,530	0,625	1,600	0,848	58°
33°	0,545	0,649	1,540	0,839	57°
34°	0,559	0,675	1,483	0,829	56°
35°	0,574	0,700	1,428	0,819	55°
36°	0,588	0,727	1,376	0,809	54°
37°	0,602	0,754	1,327	0,799	53°
38°	0,616	0,781	1,280	0,788	52°
39°	0,629	0,810	1,235	0,777	51°
40°	0,643	0,839	1,192	0,766	50°
41°	0,656	0,869	1,150	0,755	49°
42°	0,669	0,900	1,111	0,743	48°
43°	0,682	0,933	1,072	0,731	47°
44°	0,695	0,966	1,036	0,719	46°
45°	0,707	1,000	1,000	0,707	45°
	cos α	ctg α	tg α	sin α	α